EXERCICE 2.

On considère dans tout cet exercice les deux fonctions F et G définies sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$F(x) = \frac{\sin(x)}{x} \qquad\qquad G(x) = \frac{1-\cos(x)}{x}$$

Etudes de deux fonctions

1. (a) Montrer que les fonctions F et G sont continues sur $\mathbb{R}_+^*$.

   (b) Montrer que F et G sont prolongeables par continuité en 0. On notera encore F et G ces prolongements.

2. (a) Montrer que les fonctions F et G sont dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$ et calculer leurs dérivées.

   (b) Démontrer, à l'aide de développements limités, que les fonctions F et G sont dérivables en 0. Préciser les valeurs de $F'(0)$ et $G'(0)$.

3. (a) Montrer que les réels strictement positifs tels que $F(x) = 0$ constituent une suite $(a_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ strictement croissante. On donnera explicitement la valeur de a_k.

   (b) Montrer que les réels strictement positifs tels que $G(x) = 0$ constituent une suite $(b_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ strictement croissante. Y a-t-il un lien entre les suites $(a_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ et $(b_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$?

4. (a) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Montrer **sans calcul** qu'il existe un réel $x_k \in]a_k, a_{k+1}[$ tel que $F'(x_k) = 0$.

   (b) Montrer que la fonction F' est de même signe que $h : x \longmapsto x\cos(x) - \sin(x)$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

   (c) Démontrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, la fonction h est strictement monotone sur $[a_k, a_{k+1}]$.

   (d) En déduire l'unicité du réel x_k défini dans la question 4.(a).

   (e) Etablir que : $\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad x_k \in \left]a_k, a_k + \frac{\pi}{2}\right[$.

   (f) Calculer $\lim\limits_{k\to+\infty} x_k$ puis déterminer un équivalent simple de la suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$.