(b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\dfrac{a_{2n+2}}{n+1} = (2n+1)b_n - (2n+2)b_{n+1}$.

(c) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $2\left(\dfrac{b_n}{a_{2n}} - \dfrac{b_{n+1}}{a_{2n+2}}\right) = \dfrac{1}{(n+1)^2}$.

(d) En déduire enfin l'existence et la valeur de $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k^2}$, que l'on note également : $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} \dfrac{1}{k^2}$.

Partie III : Formule de Wallis

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $\rho_n = \dfrac{a_{2n}}{a_{2n+1}}$.

4. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\rho_n = \dfrac{(2n+1)\pi}{2^{4n+1}} \binom{2n}{n}^2$.

5. (a) Montrer que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

   (b) En déduire un encadrement de ρ_n pour tout $n \in \mathbb{N}$, puis la limite : $\lim\limits_{n\to+\infty} \rho_n = 1$.

   (c) En déduire la formule de Wallis.

Partie IV : Formule de Stirling

On note f la fonction $x \longmapsto \left(x + \dfrac{1}{2}\right)\ln\left(1 + \dfrac{1}{x}\right)$ et g la fonction $x \longmapsto f(x) - \dfrac{1}{12x} + \dfrac{1}{12(x+1)}$, toutes deux définies sur $\mathbb{R}_+^*$.

On pose également pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $u_n = \dfrac{n^{n+\frac{1}{2}}}{n!e^n}$ et $v_n = \ln(u_n)$.

6. (a) Montrer que pour tout $x > 0$: $f''(x) = \dfrac{1}{2x^2(x+1)^2}$, et simplifier de même g'' sur $\mathbb{R}_+^*$.

   (b) En déduire que f est minorée par 1, et g majorée par 1 sur $\mathbb{R}_+^*$.

7. (a) Exprimer $v_{n+1} - v_n$ à l'aide de la fonction f pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

   (b) En déduire que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante et majorée, puis que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers un réel strictement positif ℓ.

   (c) Montrer, en étudiant pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ le rapport $\dfrac{u_n^2}{u_{2n}}$, que : $\ell = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}$. En déduire la formule de Stirling.