

## Espaces euclidiens

Exercices de Jean-Louis Rouget. Retrouver aussi cette fiche sur [www.maths-france.fr](http://www.maths-france.fr)

\* très facile    \*\* facile    \*\*\* difficulté moyenne    \*\*\*\* difficile    \*\*\*\*\* très difficile

I : Incontournable

### Exercice 1 \*\*\* I

Montrer que la matrice de HILBERT  $H_n = \left( \frac{1}{i+j-1} \right)_{1 \leq i, j \leq n}$  est définie positive.

[Correction ▼](#)

[005786]

### Exercice 2 \*\*\* I

1. Soit  $A$  une matrice carrée réelle de format  $n$  et  $S = {}^tAA$ . Montrer que  $S \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ .
2. Réciproquement, montrer que pour toute matrice  $S$  symétrique positive, il existe une matrice  $A$  carrée réelle de format  $n$  telle que  $S = {}^tAA$ . A-t-on l'unicité de  $A$  ?
3. Montrer que  $S$  est définie positive si et seulement si  $A$  est inversible.
4. Montrer que  $\text{rg}(A) = \text{rg}(S)$ .
5. (Racine carrée d'une matrice symétrique positive) Soit  $S$  une matrice symétrique positive. Montrer qu'il existe une et une seule matrice  $R$  symétrique positive telle que  $R^2 = S$ .

[Correction ▼](#)

[005787]

### Exercice 3 \*\*\*\* I

Soit  $E$  un espace euclidien de dimension  $n$  non nulle. Soit  $(x_1, \dots, x_p)$  une famille de  $p$  vecteurs de  $E$  ( $p \geq 2$ ). On dit que la famille  $(x_1, \dots, x_p)$  est une famille obtusangle si et seulement si  $\forall (i, j) \in \llbracket 1, p \rrbracket^2$  ( $i < j \Rightarrow x_i | x_j < 0$ ). Montrer que si la famille  $(x_1, \dots, x_p)$  est une famille obtusangle alors  $p \leq n + 1$ .

[Correction ▼](#)

[005788]

### Exercice 4 \*\*I Inégalité de HADAMARD

Soit  $E$  un espace euclidien de dimension  $n \geq 1$  et  $\mathcal{B}$  une base orthonormée de  $E$ .

Montrer que pour tout  $n$ -uplet de vecteurs  $(x_1, \dots, x_n)$ , on a :  $|\det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n)| \leq \|x_1\| \dots \|x_n\|$ . Cas d'égalité ?

[Correction ▼](#)

[005789]

### Exercice 5 \*\*

Montrer que pour toute matrice carrée  $A$  réelle de format  $n$ , on a  $|\det A| \leq \sqrt{\prod_{j=1}^n \left( \sum_{i=1}^n a_{i,j}^2 \right)}$ .

[Correction ▼](#)

[005790]

### Exercice 6 \*\*\*

Soit  $A$  une matrice orthogonale. Montrer que la valeur absolue de la somme des coefficients de  $A$  est inférieure ou égale à  $n$ . Cas d'égalité si de plus tous les coefficients de  $A$  sont positifs ?

[Correction ▼](#)

[005791]

### Exercice 7 \*\*

On munit  $E = \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$  muni du produit scalaire usuel.

1. Déterminer l'orthogonal de  $\mathcal{A}_3(\mathbb{R})$ .

2. Calculer la distance de la matrice  $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$  au sous-espace vectoriel des matrices antisymétriques.

[Correction ▼](#)

[005792]

### Exercice 8 \*\*

Soit  $(e_1, e_2, e_3)$  une base orthonormée directe d'un espace euclidien orienté  $E$  de dimension 3. Matrice de la rotation d'angle  $\frac{\pi}{3}$  autour de  $e_1 + e_2$ .

[Correction ▼](#)

[005793]

### Exercice 9 \*\*\*

Soit  $A$  une matrice carrée réelle symétrique positive de format  $n$ . Montrer que  $1 + \sqrt[n]{\det(A)} \leq \sqrt[n]{\det(I_n + A)}$ .

[Correction ▼](#)

[005794]

### Exercice 10 \*\*

Déterminer  $\text{card}(O_n(\mathbb{R}) \cap \mathcal{M}_n(\mathbb{Z}))$ .

[Correction ▼](#)

[005795]

### Exercice 11

Soit  $f$  une application de  $\mathbb{C}$  dans  $\mathbb{C}$ ,  $\mathbb{R}$ -linéaire.

1. Montrer qu'il existe deux complexes  $a$  et  $b$  tels que pour tout  $z \in \mathbb{C}$ ,  $f(z) = az + b\bar{z}$ .
2. Calculer  $\text{Tr}(f)$  et  $\det(f)$  en fonction de  $a$  et  $b$ .
3. C.N.S. pour que  $f$  soit autoadjoint dans  $\mathbb{C}$  muni de sa structure euclidienne canonique.

[Correction ▼](#)

[005796]

### Exercice 12 \*\*\*

Trouver tous les endomorphismes de  $\mathbb{R}^3$  vérifiant  $\forall (x, y) \in (\mathbb{R}^3)^2$ ,  $f(x \wedge y) = f(x) \wedge f(y)$ .

[Correction ▼](#)

[005797]

### Exercice 13 \*\*

Soit  $A$  une matrice carrée réelle. Montrer que les matrices  ${}^tAA$  et  $A{}^tA$  sont orthogonalement semblables.

[Correction ▼](#)

[005798]

### Exercice 14 \*\*\* I

Montrer que le produit de deux matrices symétriques réelles positives est à valeurs propres réelles positives.

[Correction ▼](#)

[005799]

### Exercice 15 \*\*\* I

Soient  $A$  et  $B$  deux matrices carrées réelles symétriques positives. Montrer que  $\det A + \det B \leq \det(A + B)$ .

[Correction ▼](#)

[005800]

### Exercice 16 \*\*

Valeurs et vecteurs propres de l'endomorphisme de  $\mathbb{R}^3$  euclidien orienté défini par

$$\forall x \in \mathbb{R}^3, f(x) = a \wedge (a \wedge x) \text{ où } a \text{ est un vecteur donné.}$$

**Exercice 17** \*\*\* I

Soit  $f$  un endomorphisme d'un espace euclidien de dimension  $n$  qui conserve l'orthogonalité. Montrer qu'il existe un réel positif  $k$  tel que  $\forall x \in E, \|f(x)\| = k\|x\|$ .

Correction ▼

[005802]

**Exercice 18** \*\* I

Soit  $P$  le plan de  $\mathbb{R}^4$  d'équations  $\begin{cases} x+y+z+t=0 \\ x+y-2z-t=0 \end{cases}$  dans une base orthonormée  $\mathcal{B}$  de  $\mathbb{R}^4$  muni de sa structure euclidienne canonique.

1. Déterminer les matrices dans  $\mathcal{B}$  de la projection orthogonale sur  $P$  et de la symétrie orthogonale par rapport à  $P$ .
2. Calculer la distance d'un vecteur quelconque de  $\mathbb{R}^4$  à  $P$ .

Correction ▼

[005803]

**Exercice 19** \*\*

La matrice  $\begin{pmatrix} n-1 & -1 & \dots & -1 \\ -1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & -1 \\ -1 & \dots & -1 & n-1 \end{pmatrix}$  est-elle positive ? définie ?

Correction ▼

[005804]

**Exercice 20** \*\*\*

$O_n(\mathbb{R})$  est-il convexe ?  $O_n(\mathbb{R})$  contient-il trois points alignés ?

Correction ▼

[005805]

### Correction de l'exercice 1 ▲

La matrice  $H_n$  est symétrique réelle. Soit  $X = (x_i)_{1 \leq i \leq n} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ .

$$\begin{aligned} {}^tXH_nX &= \sum_{1 \leq i, j \leq n} \frac{x_i x_j}{i+j-1} = \sum_{1 \leq i, j \leq n} x_i x_j \int_0^1 t^{i+j-2} dt = \int_0^1 \left( \sum_{1 \leq i, j \leq n} x_i x_j t^{i+j-2} \right) dt \\ &= \int_0^1 \left( \sum_{i=1}^n x_i t^{i-1} \right)^2 dt \geq 0. \end{aligned}$$

De plus, si  $X \neq 0$ , le polynôme  $\sum_{i=1}^n x_i t^{i-1}$  n'est pas le polynôme nul et donc, puisqu'un polynôme non nul admet un nombre fini de racines, la fonction  $t \mapsto \left( \sum_{i=1}^n x_i t^{i-1} \right)^2$ . Ainsi, la fonction  $t \mapsto \left( \sum_{i=1}^n x_i t^{i-1} \right)^2$  est continue positive et non nulle sur  $[0, 1]$  et on en déduit que  $\int_0^1 \left( \sum_{i=1}^n x_i t^{i-1} \right)^2 dt > 0$ . On a montré que  $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$ ,  ${}^tXH_nX > 0$  et donc que

la matrice  $H_n$  est symétrique définie positive.

### Correction de l'exercice 2 ▲

1.  ${}^tS = {}^t({}^tAA) = {}^tA({}^tA) = {}^tAA = S$ . Donc  $S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ .

Soit  $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ ,  ${}^tXSX = {}^tX{}^tAAX = {}^t(AX)AX = \|AX\|_2^2 \geq 0$ . Donc  $S \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ .

$\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), {}^tAA \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ .

2. Soit  $S \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ . D'après le théorème spectral, il existe  $P$  dans  $O_n(\mathbb{R})$  et  $D$  dans  $\mathcal{D}_n(\mathbb{R})$  telles que  $S = PD^tP$ .

Posons  $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ . Puisque  $S$  est dans  $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ ,  $D$  est dans  $\mathcal{D}_n^+(\mathbb{R})$  et on peut poser  $D' = \text{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_n})$  de sorte que  $D^2 = D$ . On peut alors écrire

$$S = PD^tP = PD'D^tP = {}^t(D'P)D'^tP,$$

et la matrice  $A = D'^tP$  convient.

$\forall S \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R}), \exists A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) / S = {}^tAA$ .

On a aussi  ${}^t(-A)(-A) = S$  et comme en général  $-A \neq A$ , on n'a pas l'unicité de la matrice  $A$ .

3.

$$\begin{aligned} S \text{ définie positive} &\Leftrightarrow \forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}, {}^tXSX > 0 \Leftrightarrow \forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}, \|AX\|_2^2 > 0 \\ &\Leftrightarrow \forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}, AX \neq 0 \Leftrightarrow \text{Ker}A = \{0\} \Leftrightarrow A \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{R}). \end{aligned}$$

4. Montrons que les matrices  $A$  et  $S$  ont même noyau. Soit  $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ .

$$X \in \text{Ker}A \Rightarrow AX = 0 \Rightarrow {}^tAAX = 0 \Rightarrow SX = 0 \Rightarrow X \in \text{Ker}S,$$

et

$$X \in \text{Ker}S \Rightarrow {}^tAAX = 0 \Rightarrow {}^tX{}^tAAX = 0 \Rightarrow {}^t(AX)AX = 0 \Rightarrow \|AX\|_2^2 = 0 \Rightarrow AX = 0 \Rightarrow X \in \text{Ker}A.$$

Ainsi,  $\text{Ker}({}^tAA) = \text{Ker}(A)$  et en particulier, grâce au théorème du rang, on a montré que

$\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \text{rg}({}^tAA) = \text{rg}(A)$ .

5. Soit  $S \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ .

**Existence.** D'après le théorème spectral, il existe  $P_0 \in O_n(\mathbb{R})$  et  $D_0 \in \mathcal{D}_n^+(\mathbb{R})$  telles que  $S = P_0 D_0^t P_0$ .

Posons  $D_0 = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$  où les  $\lambda_i$ ,  $1 \leq i \leq n$ , sont des réels positifs puis  $\Delta_0 = \text{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_n})$  et enfin  $R = P_0 \Delta_0^t P_0$ . La matrice  $R$  est orthogonalement semblable à une matrice de  $\mathcal{D}_n^+(\mathbb{R})$  et est donc un élément de  $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ . Puis

$$R^2 = P_0 \Delta_0^{2t} P_0 = P_0 D_0^t P_0 = S.$$

**Unicité.** Soit  $M$  un élément de  $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$  telle que  $M^2 = S$ .

$M$  est diagonalisable d'après le théorème spectral et donc  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) = \bigoplus_{\lambda \in \text{Sp}(M)} E_M(\lambda)$ . Mais si  $\lambda$  est une

valeur propre de  $M$ ,  $\text{Ker}(M - \lambda I_n) \subset \text{Ker}(M^2 - \lambda^2 I_n) = \text{Ker}(S - \lambda^2 I_n)$ . De plus, les valeurs propres de  $M$  étant positive, les  $\lambda^2$ ,  $\lambda \in \text{Sp}(M)$ , sont deux à deux distincts ou encore les  $\text{Ker}(S - \lambda^2 I_n)$ ,  $\lambda \in \text{Sp}(M)$ , sont deux à deux distincts.

Ceci montre que pour chaque  $\lambda \in \text{Sp}(M)$ ,  $\text{Ker}(M - \lambda I_n) = \text{Ker}(S - \lambda^2 I_n)$  et que les  $\lambda^2$ ,  $\lambda \in \text{Sp}(M)$ , sont toutes les valeurs propres de  $S$ .

Ainsi, nécessairement la matrice  ${}^t P_0 M P_0$  est une matrice diagonale  $D$ . L'égalité  $M^2 = S$  fournit  $D^2 = D_0$  puis  $D = \Delta_0$  (car  $D \in \mathcal{D}_n^+(\mathbb{R})$ ) et finalement  $M = R$ .

$$\forall S \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R}), \exists ! R \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R}) / R^2 = S.$$

### Correction de l'exercice 3 ▲

**1 ère solution.** Soit  $p \geq 2$ . Montrons que si la famille  $(x_1, \dots, x_p)$  est obtusangle alors la famille  $(x_1, \dots, x_{p-1})$  est libre.

Soit  $(x_1, \dots, x_p)$  une famille obtusangle. Supposons que la famille  $(x_1, \dots, x_{p-1})$  soit liée.

Il existe donc  $(\lambda_1, \dots, \lambda_{p-1}) \in \mathbb{R}^{p-1} \setminus \{(0, \dots, 0)\}$  tel que  $\sum_{k=1}^{p-1} \lambda_k x_k = 0$ .

Quitte à multiplier les deux membres de l'égalité par  $-1$ , on peut supposer que l'un des  $\lambda_i$  au moins est strictement positif. On pose  $I = \{k \in \llbracket 1, p-1 \rrbracket / \lambda_k > 0\}$  et  $J = \{k \in \llbracket 1, p-1 \rrbracket / \lambda_k \leq 0\}$  (éventuellement  $J$  est vide).

Si  $J$  est vide, il reste  $\sum_{i \in I} \lambda_i x_i = 0$  et si  $J$  est non vide,

$$\|\sum_{i \in I} \lambda_i x_i\|^2 = -(\sum_{i \in I} \lambda_i x_i) \cdot (\sum_{j \in J} \lambda_j x_j) = -\sum_{(i,j) \in I \times J} \lambda_i \lambda_j (x_i | x_j) \leq 0 \text{ (car } \forall (i,j) \in I \times J, (x_i | x_j) < 0 \text{ et } \lambda_i \lambda_j \leq 0).$$

Ainsi, dans tous les cas,  $\sum_{i \in I} \lambda_i x_i = 0$ . Mais ceci est impossible car  $(\sum_{i \in I} \lambda_i x_i) | x_p = \sum_{i \in I} \lambda_i (x_i | x_p) < 0$ .

On a montré que la famille  $(x_1, \dots, x_{p-1})$  est libre et on en déduit que  $p-1 \leq n$  ou encore  $p \leq n+1$ .

**2ème solution.** Montrons par récurrence sur  $n = \dim E_n \geq 1$  que toute famille obtusangle de  $E_n$  a un cardinal inférieur ou égal à  $n+1$ .

- Pour  $n = 1$ . Soient  $x_1, x_2$  et  $x_3$  trois vecteurs de  $E_1$ . On peut identifier ces vecteurs à des réels. Deux des trois réels  $x_1, x_2$  ou  $x_3$  ont même signe et on ne peut donc avoir  $x_1 x_2 < 0$  et  $x_1 x_3 < 0$  et  $x_2 x_3 < 0$ .

Une famille obtusangle de  $E_1$  a donc un cardinal inférieur ou égal à 2.

- Soit  $n \geq 1$ . Supposons que toute famille obtusangle d'un espace euclidien de dimension  $n$  a un cardinal inférieur ou égal à  $n+1$ . Soit  $(x_1, \dots, x_p)$  une famille obtusangle de  $E_{n+1}$ .

Si  $p = 1$  alors  $p \leq n+2$ . Supposons dorénavant  $p \geq 2$ .

On va construire à partir de cette famille une famille obtusangle de cardinal  $p-1$  d'un espace euclidien de dimension  $n$ .

Soit  $F = x_p^\perp$ . Puisque la famille  $(x_1, \dots, x_p)$  est obtusangle, le vecteur  $x_p$  n'est pas nul et  $F$  est un espace euclidien de dimension  $n$ .

On note  $y_1, y_2, \dots, y_{p-1}$  les projetés orthogonaux des vecteurs  $x_1, \dots, x_{p-1}$  sur  $F$ . On sait que

$$\forall i \in \llbracket 1, p-1 \rrbracket, y_i = x_i - \frac{(x_i | x_p)}{\|x_p\|^2} x_p.$$

Soit  $(i, j) \in \llbracket 1, p-1 \rrbracket$  tel que  $i \neq j$ .

$$(y_i|y_j) = (x_i|x_j) - 2 \frac{(x_i|x_p)(x_j|x_p)}{\|x_p\|^2} + \frac{(x_i|x_p)(x_j|x_p)\|x_p\|^2}{\|x_p\|^4} = (x_i|x_j) - \frac{(x_i|x_p)(x_j|x_p)}{\|x_p\|^2} < 0.$$

Ainsi, la famille  $(y_i)_{1 \leq i \leq p-1}$  est une famille obtusangle d'un espace euclidien de dimension  $n$  et par hypothèse de récurrence  $p-1 \leq n+1$  et donc  $p \leq n+2$ . Le résultat est démontré par récurrence.

#### Correction de l'exercice 4 ▲

Si la famille  $(x_1, \dots, x_n)$  est liée, l'inégalité est vraie.

Si la famille  $(x_1, \dots, x_n)$  est libre, on peut considérer  $B_0 = (e_1, \dots, e_n)$  l'orthonormalisée de SCHMIDT de la famille  $(x_1, \dots, x_n)$ . Les bases  $B_0$  et  $B$  sont des bases orthonormées de  $E$  et donc

$$\begin{aligned} |\det_B(x_1, \dots, x_n)| &= |\det_{B_0}(x_1, \dots, x_n)| = \text{abs} \left( \begin{vmatrix} (x_1|e_1) & \times & \dots & \times \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \times \\ 0 & \dots & 0 & (x_n|e_n) \end{vmatrix} \right) \\ &= \prod_{k=1}^n |(x_k|e_k)| \leq \prod_{k=1}^n \|x_k\| \|e_k\| \text{ (d'après l'inégalité de CAUCHY-SCHWARZ)} \\ &= \prod_{k=1}^n \|x_k\|. \end{aligned}$$

$$\forall (x_1, \dots, x_n) \in E^n, |\det_B(x_1, \dots, x_n)| \leq \prod_{k=1}^n \|x_k\| \text{ (inégalité de HADAMARD).}$$

Ensuite,

- si la famille  $(x_1, \dots, x_n)$  est liée, on a l'égalité si et seulement si l'un des vecteurs  $x_k$  est nul

- si la famille  $(x_1, \dots, x_n)$  est libre, on a l'égalité si et seulement si  $\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, |(x_k|e_k)| = \|x_k\| \|e_k\|$ . Les cas d'égalité

de l'inégalité de CAUCHY-SCHWARZ étant connus, on a l'égalité si et seulement si  $\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, x_k$  est colinéaire à  $e_k$

ou encore si et seulement si la famille  $(x_1, \dots, x_n)$  est orthogonale.

En résumé, l'inégalité de HADAMARD est une égalité si et seulement si la famille  $(x_1, \dots, x_n)$  est orthogonale libre ou si l'un des vecteurs est nul.

#### Correction de l'exercice 5 ▲

C'est l'exercice 4.

#### Correction de l'exercice 6 ▲

Soit  $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$  une matrice orthogonale. On pose  $X = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ .

D'après l'inégalité de CAUCHY-SCHWARZ

$$\begin{aligned} \left| \sum_{1 \leq i,j \leq n} a_{i,j} \right| &= \left| \sum_{1 \leq i,j \leq n} 1 \times a_{i,j} \times 1 \right| = |{}^t X A X| = |(A X|X)| \\ &\leq \|A X\| \|X\| \text{ (d'après l'inégalité de CAUCHY-SCHWARZ)} \\ &= \|X\|^2 \text{ (puisque la matrice } A \text{ est orthogonale)} \\ &= n. \end{aligned}$$

On a l'égalité si et seulement si la famille  $(X, A X)$  est liée ce qui équivaut à  $X$  vecteur propre de  $A$ .

On sait que les valeurs propres (réelles) de  $A$  ne peuvent être que 1 ou  $-1$ . Donc,

$$\text{égalité} \Leftrightarrow AX = X \text{ ou } AX = -X \Leftrightarrow \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \left| \sum_{j=1}^n a_{i,j} \right| = 1$$

Il paraît difficile d'améliorer ce résultat dans le cas général. Supposons de plus que  $\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, a_{i,j} \geq 0$ . Soit  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ . Puisque tous les  $a_{i,j}$  sont éléments de  $[0, 1]$ ,

$$1 = \sum_{j=1}^n a_{i,j} \geq \sum_{j=1}^n a_{i,j}^2 = 1.$$

L'inégalité écrite est donc une égalité et on en déduit que chaque inégalité  $a_{i,j} \geq a_{i,j}^2, 1 \leq j \leq n$ , est une égalité. Par suite,  $\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, a_{i,j} \in \{0, 1\}$ . Ceci montre que la matrice  $A$  est une matrice de permutation qui réciproquement convient.

### Correction de l'exercice 7 ▲

Le produit scalaire usuel de  $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$  est défini par

$$\forall (A, B) \in (\mathcal{M}_3(\mathbb{R}))^2, (A|B) = \text{Tr}({}^tAB) = \sum_{1 \leq i, j \leq n} a_{i,j} b_{i,j}.$$

1. Déterminons l'orthogonal de  $\mathcal{A}_3(\mathbb{R})$  dans  $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ . Soit  $(A, B) \in \mathcal{S}_3(\mathbb{R}) \times \mathcal{A}_3(\mathbb{R})$ .

$$(A|B) = \text{Tr}({}^tAB) = \text{Tr}(AB) = \text{Tr}(BA) = -\text{Tr}({}^tBA) = -(B|A).$$

et donc  $(A|B) = 0$ . Donc  $\mathcal{S}_3(\mathbb{R}) \subset (\mathcal{A}_3(\mathbb{R}))^\perp$  et comme de plus,  $\dim(\mathcal{S}_3(\mathbb{R})) = \dim((\mathcal{A}_3(\mathbb{R}))^\perp)$ , on a montré que

$$(\mathcal{A}_3(\mathbb{R}))^\perp = \mathcal{S}_3(\mathbb{R}).$$

2. Ainsi, la projection orthogonale de  $M$  sur  $\mathcal{A}_3(\mathbb{R})$  est exactement la partie antisymétrique  $p_a(M)$  de  $M$  et la distance cherchée est la norme de  $M - p_a(M) = p_s(M)$  avec

$$p_s(M) = \frac{1}{2} \left( \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \right) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Par suite,

$$d(M, \mathcal{A}_3(\mathbb{R})) = \|p_s(M)\| = \frac{1}{2} \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2} = 1.$$

### Correction de l'exercice 8 ▲

Posons  $k = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_1 + e_2)$ . Soit  $u = xe_1 + ye_2 + ze_3 \in E$ . On sait que

$$\begin{aligned} r(u) &= (\cos \theta)u + (1 - \cos \theta)(u|k)k + (\sin \theta)k \wedge u = \frac{1}{2}u + \frac{1}{4}(u|(e_1 + e_2))(e_1 + e_2) + \frac{\sqrt{6}}{4}(e_1 + e_2) \wedge u \\ &\llcorner = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \frac{1}{4}(x+y) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{\sqrt{6}}{4} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \frac{1}{4}(x+y) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{\sqrt{6}}{4} \begin{pmatrix} z \\ -z \\ -x+y \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{3}{4}x + \frac{1}{4}y + \frac{\sqrt{6}}{4}z \\ \frac{1}{4}x + \frac{3}{4}y - \frac{\sqrt{6}}{4}z \\ -\frac{\sqrt{6}}{4}x + \frac{\sqrt{6}}{4}y + \frac{1}{2}z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & \frac{\sqrt{6}}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & -\frac{\sqrt{6}}{4} \\ -\frac{\sqrt{6}}{4} & \frac{\sqrt{6}}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \end{aligned}$$

et la matrice cherchée est

$$M = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & \frac{\sqrt{6}}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & -\frac{\sqrt{6}}{4} \\ -\frac{\sqrt{6}}{4} & \frac{\sqrt{6}}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

### Correction de l'exercice 9 ▲

La matrice  $A$  est symétrique réelle positive. Donc ses valeurs propres  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  sont des réels positifs. De plus,

$$\det A = \lambda_1 \dots \lambda_n \text{ et } \det(I_n + A) = \chi_A(-1) = (1 + \lambda_1) \dots (1 + \lambda_n).$$

L'inégalité à démontrer équivaut donc à :

$$\forall (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in (\mathbb{R}^+)^n, 1 + \sqrt[n]{\prod_{k=1}^n \lambda_k} \leq \sqrt[n]{\prod_{k=1}^n (1 + \lambda_k)}.$$

Soit donc  $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in (\mathbb{R}^+)^n$ . Si l'un des  $\lambda_k$  est nul, l'inégalité est immédiate.

Supposons dorénavant tous les  $\lambda_k$  strictement positifs. L'inégalité à démontrer s'écrit

$$\ln(1 + \exp(\frac{1}{n}(\ln(\lambda_1) + \dots + \ln(\lambda_n)))) \leq \frac{1}{n}(\ln(1 + \exp(\ln(\lambda_1))) + \dots + \ln(1 + \exp(\ln(\lambda_n)))) \quad (*)$$

ou encore  $f(\frac{1}{n}(x_1 + \dots + x_n)) \leq \frac{1}{n}(f(x_1) + \dots + f(x_n))$  où  $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \ln(1 + e^x)$  et  $\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, x_k = \ln(\lambda_k)$ . L'inégalité à démontrer est une inégalité de convexité. La fonction  $f$  est deux fois dérivable sur  $\mathbb{R}$  et pour tout réel  $x$ ,

$$f'(x) = \frac{e^x}{e^x + 1} = 1 - \frac{1}{e^x + 1} \text{ puis } f''(x) = \frac{e^x}{(e^x + 1)^2} \geq 0.$$

La fonction  $f$  est donc convexe sur  $\mathbb{R}$  ce qui démontre l'inégalité (\*).

$$\forall A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R}), 1 + \sqrt[n]{\det(A)} \leq \sqrt[n]{\det(I_n + A)}.$$

### Correction de l'exercice 10 ▲

Soit  $A$  une matrice orthogonale à coefficients entiers. Puisque les colonnes ou les lignes de  $A$  sont unitaires, on trouve par ligne ou par colonne un et un seul coefficient de valeur absolue égale à 1, les autres coefficients étant nuls.  $A$  est donc obtenue en multipliant chaque coefficient d'une matrice de permutation par 1 ou  $-1$ . Réciproquement, une telle matrice est orthogonale à coefficients entiers.

Il y a  $n!$  matrices de permutation et pour chaque matrice de permutation  $2^n$  façons d'attribuer un signe  $+$  ou  $-$  à chaque coefficient égal à 1. Donc

$$\text{card}(O_n(\mathbb{R}) \cap \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})) = 2^n n!.$$

### Correction de l'exercice 11 ▲

1. Soit  $f$  un endomorphisme du  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel  $\mathbb{C}$ . Pour tout nombre complexe  $z$

$$\begin{aligned} f(z) &= f((\text{Re}(z)).1 + (\text{Im}(z)).i) = (\text{Re}(z))f(1) + (\text{Im}(z))f(i) = \frac{1}{2}(z + \bar{z})f(1) + \frac{1}{2i}(z - \bar{z})f(i) \\ &= \frac{f(1) - if(i)}{2}z + \frac{f(1) + if(i)}{2}\bar{z}, \end{aligned}$$

et on peut prendre  $a = \frac{f(1) - if(i)}{2}$  et  $b = \frac{f(1) + if(i)}{2}$ . (Réciproquement pour  $a$  et  $b$  complexes donnés, l'application  $f$  ainsi définie est  $\mathbb{R}$ -linéaire et on a donc l'écriture générale complexe d'un endomorphisme du plan).



2.  $\text{Tr}(f) = \text{Re}(f(1)) + \text{Im}(f(i)) = \text{Re}(a+b) + \text{Im}(i(a-b)) = \text{Re}(a+b) + \text{Re}(a-b) = 2\text{Re}(a)$   
et

$$\begin{aligned}\det(f) &= \text{Re}(a+b)\text{Im}(i(a-b)) - \text{Im}(a+b)\text{Re}(i(a-b)) = \text{Re}(a+b)\text{Re}(a-b) + \text{Im}(a+b)\text{Im}(a-b) \\ &= (\text{Re}(a))^2 - (\text{Re}(b))^2 + (\text{Im}(a))^2 - (\text{Im}(b))^2 = |a|^2 - |b|^2.\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Tr}(f) = 2\text{Re}(a) \text{ et } \det(f) = |a|^2 - |b|^2.}$$

3. Soient  $z$  et  $z'$  deux nombres complexes. On rappelle que

$$z|z' = (\text{Re}z)(\text{Re}z') + (\text{Im}z)(\text{Im}z') = \frac{1}{4}(z+\bar{z})(z'+\bar{z}') - \frac{1}{4}(z-\bar{z})(z'-\bar{z}') = \frac{1}{2}(\bar{z}z' + z\bar{z}') = \text{Re}(\bar{z}z').$$

et au passage si on oriente le plan de sorte que la base orthonormée  $(1, i)$  soit directe,

$$[z, z'] = (\text{Re}z)(\text{Im}z') - (\text{Im}z)(\text{Re}z') = \frac{1}{4i}(z+\bar{z})(z'-\bar{z}') - \frac{1}{4i}(z-\bar{z})(z'+\bar{z}') = \frac{1}{2i}(\bar{z}z' - z\bar{z}') = \text{Im}(\bar{z}z').$$

Notons  $M$  la matrice de  $f$  dans la base  $(1, i)$ . Puisque la base  $(1, i)$  est orthonormée,

$$f = f^* \Leftrightarrow M = {}^tM \Leftrightarrow \text{Im}(a+b) = \text{Re}(i(a-b)) \Leftrightarrow \text{Im}(a+b) = -\text{Im}(a-b) \Leftrightarrow 2\text{Im}a = 0 \Leftrightarrow a \in \mathbb{R}.$$

$$\boxed{f = f^* \Leftrightarrow a \in \mathbb{R}.}$$

### Correction de l'exercice 12 ▲

Soit  $(i, j, k)$  une base orthonormée directe de  $\mathbb{R}^3$  euclidien orienté. Posons  $u = f(i)$ ,  $v = f(j)$  et  $w = f(k)$ . Nécessairement,  $u \wedge v = f(i) \wedge f(j) = f(i \wedge j) = f(k) = w$  et de même  $v \wedge w = u$  et  $w \wedge u = v$ .

**1er cas.** Si l'un des vecteurs  $u$  ou  $v$  ou  $w$  est nul alors  $u = v = w = 0$  et donc  $f = 0$ . Réciproquement, l'application nulle convient.

**2ème cas.** • Si les trois vecteurs  $u$ ,  $v$  et  $w$  sont non nuls alors  $u \wedge v \neq 0$  et donc la famille  $(u, v)$  est libre. Mais alors la famille  $(u, v, w)$  est une base directe de  $\mathbb{R}^3$ .

Ensuite  $w = u \wedge v$  est orthogonal à  $u$  et  $v$  et  $v = w \wedge u$  est orthogonal à  $u$ . On en déduit que la famille  $(u, v, w)$  est une base orthogonale directe de  $\mathbb{R}^3$ .

Enfin, puisque  $u$  et  $v$  sont orthogonaux,  $\|w\| = \|u \wedge v\| = \|u\|\|v\|$  et de même  $\|u\| = \|v\|\|w\|$  et  $\|v\| = \|u\|\|w\|$ . Puis  $\|u\|\|v\|\|w\| = (\|u\|\|v\|\|w\|)^2$  et donc, puisque les vecteurs  $u$ ,  $v$  et  $w$  sont non nuls,  $\|u\|\|v\|\|w\| = 1$ . Les égalités  $\|u\|\|v\|\|w\| = 1$  et  $\|u\| = \|v\|\|w\|$  fournissent  $\|u\|^2 = 1$  et de même  $\|v\|^2 = \|w\|^2 = 1$ .

Finalement, la famille  $(u, v, w)$  est une base orthonormée directe.

En résumé, l'image par  $f$  d'une certaine base orthonormée directe de  $\mathbb{R}^3$  est une base orthonormée directe de  $\mathbb{R}^3$  et on sait que  $f$  est un automorphisme orthogonal positif de  $\mathbb{R}^3$  c'est-à-dire une rotation de  $\mathbb{R}^3$ .

• Réciproquement, si  $f$  est la rotation d'angle  $\theta$  autour du vecteur unitaire  $e_3$ . On considère  $e_1$  et  $e_2$  deux vecteurs de  $\mathbb{R}^3$  tels que la famille  $(e_1, e_2, e_3)$  soit une base orthonormée directe.

Pour vérifier que  $f$  est solution, par linéarité, il suffit de vérifier les 9 égalités :  $\forall (i, j) \in \{1, 2, 3\}^2$ ,  $f(e_i \wedge e_j) = f(e_i) \wedge f(e_j)$ . Pour vérifier ces 9 égalités, il suffit se réduisent en fin de compte d'en vérifier 2 :

$$f(e_1) \wedge f(e_2) = e_3 = f(e_3) = f(e_1 \wedge e_2) \text{ et } f(e_3) \wedge f(e_1) = e_3 \wedge f(e_1) = f(e_2) = f(e_3 \wedge e_1).$$

Les endomorphismes cherchés sont donc l'application nulle et les rotations de  $\mathbb{R}^3$ .

### Correction de l'exercice 13 ▲

Puisque les matrices  $S_1 = {}^tAA$  et  $S_2 = A^tA$  sont symétriques réelles, ces deux matrices sont à valeurs propres réelles. On sait d'autre part que si  $M$  et  $N$  sont deux matrices quelconques alors les matrices  $MN$  et  $NM$  ont même polynôme caractéristique.

Notons alors  $(\lambda_i)_{1 \leq i \leq n}$  la famille des valeurs propres des matrices  $S_1$  et  $S_2$  et posons  $D = \text{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ . D'après le théorème spectral, il existe deux matrices orthogonales  $P_1$  et  $P_2$  telles que  $S_1 = P_1 D P_1$  et  $S_2 = P_2 D P_2$ . Mais alors

$$S_2 = P_2({}^tP_1S_1P_1){}^tP_2 = (P_2{}^tP_1)S_1{}^t(P_2{}^tP_1).$$

Comme la matrice  $P_2{}^tP_1$  est orthogonale, on a montré que les matrices  $S_1$  et  $S_2$  sont orthogonalement semblables.

$$\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \text{ les matrices } {}^tAA \text{ et } A{}^tA \text{ sont orthogonalement semblables.}$$

### Correction de l'exercice 14 ▲

**Remarque.** Il faut prendre garde au fait que le produit de deux matrices symétriques n'est pas nécessairement symétrique. Plus précisément, si  $A$  et  $B$  sont deux matrices symétriques alors

$$AB \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \Leftrightarrow {}^t(AB) = AB \Leftrightarrow {}^tB{}^tA = AB \Leftrightarrow BA = AB$$

et le produit de deux matrices symétriques est symétrique si et seulement si ces deux matrices commutent. Donc au départ, rien n'impose que les valeurs propres de  $AB$  soient toutes réelles.

Soient  $A$  et  $B$  deux matrices symétriques réelles positives. D'après l'exercice 2, il existe deux matrices carrées  $M$  et  $N$  telles que  $A = {}^tMM$  et  $B = {}^tNN$ . On a alors  $AB = {}^tMM{}^tNN$ . La matrice  $AB$  a même polynôme caractéristique que la matrice  $N({}^tMM{}^tN = {}^t(M{}^tN)M{}^tN$ . D'après l'exercice 2, cette dernière matrice est symétrique positive et a donc des valeurs propres réelles positives. On a montré que les valeurs propres de la matrice  $AB$  sont réelles et positives.

$$\forall (A, B) \in (\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R}), \text{Sp}(AB) \subset \mathbb{R}^+).$$

### Correction de l'exercice 15 ▲

Soient  $A$  et  $B$  deux matrices symétriques réelles positives.

**1er cas.** Supposons qu'aucune des deux matrices  $A$  ou  $B$  n'est inversible, alors  $\det A + \det B = 0$ .

D'autre part, la matrice  $A + B$  est symétrique car  $(\mathcal{S}_n(\mathbb{R}), +, \cdot)$  est un espace vectoriel et ses valeurs propres sont donc réelles. De plus, pour  $X$  vecteur colonne donné,  ${}^tX(A + B)X = {}^tXAX + {}^tXBX \geq 0$ .

La matrice  $A + B$  est donc symétrique réelle positive. Par suite, les valeurs propres de la matrice  $A + B$  sont des réels positifs et puisque  $\det(A + B)$  est le produit de ces valeurs propres, on a  $\det(A + B) \geq 0 = \det A + \det B$ .

**2ème cas.** Sinon, une des deux matrices  $A$  ou  $B$  est inversible (et donc automatiquement définie positive). Supposons par exemple  $A$  définie positive.

D'après l'exercice 2, il existe une matrice inversible  $M$  telle que  $A = {}^tMM$ . On peut alors écrire  $A + B = {}^tMM + B = {}^tM(I_n + {}^t(M^{-1}BM^{-1})M$  et donc

$$\det(A + B) = (\det M)^2 \det(I_n + {}^t(M^{-1}BM^{-1})M) = (\det M)^2 \det(I_n + C)$$

où  $C = {}^tM^{-1}BM^{-1}$ . La matrice  $C$  est symétrique, positive car pour tout vecteur colonne  $X$ ,

$${}^tXCX = {}^tX{}^t(M^{-1}BM^{-1})X = {}^t(M^{-1}X)B(M^{-1}X) \geq 0$$

et ses valeurs propres  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  sont des réels positifs. Les valeurs propres de la matrice  $I_n + C$  sont les réels  $1 + \lambda_i$ ,  $1 \leq i \leq n$  et donc

$$\det(I_n + C) = (1 + \lambda_1) \dots (1 + \lambda_n) \geq 1 + \lambda_1 \dots \lambda_n = 1 + \det C.$$

Maintenant,  $\det A = (\det M)^2$  puis  $\det B = (\det M)^2 \det C$  et donc

$$\det A + \det B = (\det M)^2 (1 + \det C) \leq (\det M)^2 \det(I_n + C) = \det(A + B).$$

On a montré que

$$\forall (A, B) \in (\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R}), \det A + \det B \leq \det(A + B).$$

### Correction de l'exercice 16 ▲

Si  $a = 0$ ,  $f = 0$  et il n'y a plus rien à dire.

Si  $a \neq 0$ , puisque  $f(a) = 0$ , 0 est valeur propre de  $f$  et  $\text{Vect}(a) \subset E_0(f)$ . D'autre part, si  $x$  est orthogonal à  $a$ , d'après la formule du double produit vectoriel

$$f(x) = (a.x)a - \|a\|^2 x = -\|a\|^2 x.$$

Donc le réel non nul  $-\|a\|^2$  est valeur propre de  $f$  et  $a^\perp \subset E_{-\|a\|^2}$ . Maintenant,  $\dim \text{Vect}(a) + \dim a^\perp = 3$  et donc  $\text{Sp}(f) = (0, -\|a\|^2, -\|a\|^2)$  puis  $E_0(f) = \text{Vect}(a)$  et  $E_{-\|a\|^2} = a^\perp$ . On en déduit aussi que  $f$  est diagonalisable. On peut noter que, puisque  $f$  est diagonalisable et que les sous-espaces propres sont orthogonaux,  $f$  est un endomorphisme symétrique.

### Correction de l'exercice 17 ▲

Il s'agit de montrer qu'un endomorphisme d'un espace euclidien  $E$  qui conserve l'orthogonalité est une similitude.

On peut raisonner sur une base orthonormée de  $E$  que l'on note  $\mathcal{B} = (e_i)_{1 \leq i \leq n}$ . Par hypothèse, la famille  $(f(e_i))_{1 \leq i \leq n}$  est orthogonale. De plus, pour  $i \neq j$ ,  $(e_i + e_j) | (e_i - e_j) = \|e_i\|^2 - \|e_j\|^2 = 0$  et donc  $f(e_i + e_j) | f(e_i - e_j) = 0$  ce qui fournit  $\|f(e_i)\| = \|f(e_j)\|$ . Soit  $k$  la valeur commune des normes des  $f(e_i)$ ,  $1 \leq i \leq n$ .

Si  $k = 0$ , tous les  $f(e_i)$  sont nuls et donc  $f$  est nulle.

Si  $k \neq 0$ , l'image par l'endomorphisme  $\frac{1}{k}f$  de la base orthonormée  $\mathcal{B}$  est une base orthonormée. Donc l'endomorphisme  $\frac{1}{k}f$  est un automorphisme orthogonal de  $E$  et donc l'endomorphisme  $\frac{1}{k}f$  conserve la norme.

Dans tous les cas, on a trouvé un réel positif  $k$  tel que  $\forall x \in E$ ,  $\|f(x)\| = k\|x\|$ .

### Correction de l'exercice 18 ▲

Les deux formes linéaires considérées sont indépendantes et donc  $P$  est un plan. Une base de  $P$  est par exemple  $(i, j) = ((1, -1, 0, 0), (1, 0, 2, -3))$ . On orthonormalise la base  $(i, j)$ .

On prend  $e_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1, 0, 0)$  puis  $e'_2 = j - (j|e_1)e_1 = (1, 0, 2, -3) - \frac{1}{2}(1, -1, 0, 0) = \frac{1}{2}(1, 1, 4, -6)$  puis  $e_2 = \frac{1}{3\sqrt{6}}(1, 1, 4, -6)$ .

Une base orthonormée de  $P$  est  $(e_1, e_2)$  où  $e_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1, 0, 0)$  et  $e_2 = \frac{1}{3\sqrt{6}}(1, 1, 4, -6)$ .

1. Le projeté orthogonal de  $u = (x, y, z, t)$  sur  $P$  est

$$\begin{aligned} p_P(u) &= (u|e_1)e_1 + (u|e_2)e_2 = \frac{1}{2}(x-y)(1, -1, 0, 0) + \frac{1}{54}(x+y+4z-6t)(1, 1, 4, -6) \\ &= \frac{1}{27}(14x-13y+2z-3t, -13x+14y+2z-3t, 2x+2y+8z-12t, -3x-3y-12z+18t). \end{aligned}$$

La matrice dans la base canonique de la projection orthogonale sur  $P$  est

$$M = \frac{1}{27} \begin{pmatrix} 14 & -13 & 2 & -3 \\ -13 & 14 & 2 & -3 \\ 2 & 2 & 8 & -12 \\ -3 & -3 & -12 & 18 \end{pmatrix}.$$

La matrice dans la base canonique de la symétrie orthogonale par rapport à  $P$  est

$$S = 2M - I_4 = \frac{1}{27} \begin{pmatrix} 1 & -26 & 4 & -6 \\ -26 & 1 & 4 & -6 \\ 4 & 4 & -11 & -24 \\ -6 & -6 & -24 & 9 \end{pmatrix}.$$

2. La distance de  $u = (x, y, z, t)$  à  $P$  est

$$\begin{aligned} \|u - p_P(u)\| &= \frac{1}{27} \|(14x + 13y - 2z + 3t, 13x + 14y - 2z + 3t, -2x - 2y + 19z + 12t, 3x + 3y + 12z + 9t)\| \\ &= \frac{1}{27} \sqrt{(14x + 13y - 2z + 3t)^2 + (13x + 14y - 2z + 3t)^2 + (-2x - 2y + 19z + 12t)^2 + (3x + 3y + 12z + 9t)^2} \end{aligned}$$

### Correction de l'exercice 19 ▲

**1ère solution.** (n'utilisant pas les valeurs propres) Soient  $A$  la matrice de l'énoncé puis  $X = (x_i)_{1 \leq i \leq n}$  un élément de  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ .

$$\begin{aligned} {}^tXAX &= (n-1) \sum_{i=1}^n x_i^2 - \sum_{i \neq j} x_i x_j = \sum_{i \neq j} (x_i^2 - x_i x_j) = \frac{1}{2} \left( \sum_{i \neq j} x_i^2 - 2x_i x_j + x_j^2 \right) \\ &= \sum_{i \neq j} (x_i - x_j)^2 \geq 0 \end{aligned}$$

et donc la matrice  $A$  est positive. De plus, si  $X = (1)_{1 \leq i \leq n} \neq 0$ ,  ${}^tXAX = 0$  et donc la matrice  $A$  n'est pas définie.

**2ème solution.** La matrice  $A$  est symétrique réelle. Donc ses valeurs propres sont réelles et  $A$  est diagonalisable. Par suite, la dimension de chacun de des sous-espaces propres de  $A$  est égale à l'ordre de multiplicité de la valeur propre correspondante.

On note alors que  $\text{rg}(A - nI_n) = 1$  et donc  $n$  est valeur propre de  $A$  d'ordre  $n - 1$ . Soit  $\lambda$  la valeur propre manquante.

$$(n-1)n + \lambda = \text{Tr}A = n(n-1).$$

Donc  $\lambda = 0$ . Ainsi,  $\text{Sp}(A) \subset \mathbb{R}^+$  et donc la matrice  $A$  est positive mais 0 est valeur propre de  $A$  et donc la matrice  $A$  n'est pas définie.

La matrice  $A$  est positive et non définie.

### Correction de l'exercice 20 ▲

Pour la première question, une simple observation suffit : les matrices  $I$  et  $-I$  sont dans  $O_n(\mathbb{R})$ , mais pas la matrice nulle qui est leur milieu.

Soient  $A$  et  $B$  deux matrices orthogonales distinctes. Montrons que pour tout réel  $\lambda \in ]0, 1[$ , la matrice  $(1 - \lambda)A + \lambda B$  n'est pas orthogonale.

Supposons par l'absurde qu'il existe  $\lambda \in ]0, 1[$  tel que la matrice  $(1 - \lambda)A + \lambda B$  soit orthogonale.

Pour  $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , on note respectivement  $A_j$ ,  $B_j$  et  $C_j$  la  $j$ -ème colonne de matrice  $A$ , de la matrice  $B$  et de la matrice  $(1 - \lambda)A + \lambda B$ . Ces trois matrices étant orthogonales, pour tout  $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,

$$1 = \|C_j\| \leq (1 - \lambda)\|A_j\| + \lambda\|B_j\| = (1 - \lambda) + \lambda = 1,$$

et donc  $\|C_j\| = (1 - \lambda)\|A_j\| + \lambda\|B_j\|$ . On est dans un cas d'égalité de l'inégalité de MINKOWSKI. Puisque  $\lambda \in ]0, 1[$ , les colonnes  $(-\lambda)A_j$  et  $\lambda B_j$  ne sont pas nulles et donc sont colinéaires et de même sens. Puisque les réels  $1 - \lambda$  et  $\lambda$  sont strictement positifs, il en est de même des colonnes  $A_j$  et  $B_j$  et puisque ces colonnes sont des vecteurs unitaires, ces colonnes sont en fin de compte égales. En résumé, si il existe  $\lambda \in ]0, 1[$  tel que la matrice  $(1 - \lambda)A + \lambda B$  soit orthogonale, alors  $A = B$ . Ceci est une contradiction et on a montré que

$O_n(\mathbb{R})$  n'est pas convexe.

---