II - Centre de $\mathscr{S}_{p_{2n}}$

On s'intéresse ici au centre $\mathcal{Z}$ de $\mathscr{S}_{p_{2n}}$ c'est-à-dire : $\mathcal{Z} = \left\{M \in \mathscr{S}_{p_{2n}},\ \forall N \in \mathscr{S}_{p_{2n}},\ MN = NM\right\}$.

9. Justifier l'inclusion suivante : $\left\{-I_{2n}, I_{2n}\right\} \subset \mathcal{Z}$.

Réciproquement, soit $M \in \mathcal{Z}$ écrite sous la forme :

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \text{ avec } A, B, C, D \in \mathscr{M}_n$$

10. En utilisant $L = \begin{pmatrix} I_n & I_n \\ 0_n & I_n \end{pmatrix}$ et sa transposée, obtenir $B = C = 0_n$ et $D = A$, A étant inversible.
11. Soit $U \in \mathscr{G}_n$. En utilisant $L_U = \begin{pmatrix} U & 0_n \\ 0_n & (U^{-1})^{\top} \end{pmatrix}$, montrer que A commute avec toute matrice $U \in \mathscr{G}_n$.
12. Conclure que $A \in \left\{-I_n, I_n\right\}$ et $\mathcal{Z} = \left\{-I_{2n}, I_{2n}\right\}$.
    <u>*Indication*</u> : on montrera d'abord que les matrices $I_n + E_{i,j}$ commutent avec A, où $(E_{i,j},\ 1 \leqslant i, j \leqslant n)$ est la base canonique de $\mathscr{M}_n$.