Chapitre 4 : Calcul littéral et applications

Contenus	**Capacités attendues**
• Règles de calcul sur les puissances entières relatives sur les racines carrées. • Relation $\sqrt{a^2} = \lvert a \rvert$. • Les trois identités remarquables dans les deux sens : $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ et $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ et $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$ • Exemple de calcul sur les expressions algébriques, en particulier sur des expressions fractionnaires • Travailler avec les inégalités et ensemble solution.	• Effectuer des calculs numériques ou littéraux mettant en jeu des puissances, des racines carrées, des écritures fractionnaires. • Mettre en relation des variables en fonction des autres. • Choisir la forme la plus adaptée à la résolution d'un problème (développée réduite et ordonnée, factorisée) • Comparer deux quantités en utilisant leur différence. ou leur quotient dans le cas positif. • Modéliser un problème à l'aide d'une inéquation.

Démonstrations :

☐ Pour $a, b \in \mathbb{R}^+$ on a $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$

☐ Pour $a, b \in \mathbb{R}^+$ on a $\sqrt{a+b} \leq \sqrt{a} + \sqrt{b}$

☐ Illustrations géométriques des identitées remarquables

Exemples d'algorithme :

☐ Déterminer la première puissance d'un nombre positif donné supérieure ou inférieure à une valeur donnée.

Approfondissements possibles :

☐ $(a+b+c)^2$

☐ $(a+b)^3$

I Puissances entières :

1 Un entier naturel en exposant

Définition 1. *Soient $a \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$,*

• *Pour $n \leq 2$, $a^n = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$* • $a^1 = \ldots$ • *Pour $a \neq 0$, $a^0 = \ldots$*

Exemple 1.

....

2 Un entier négatif en exposant

Définition 2. *Soient $a \in \mathbb{R}^*$ un réel non nul et $n \in \mathbb{N}$. On note a^{-n} l'inverse de a^n*

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

Exemple 2.

• $10^{-5} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ • $2^{-6} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ • $\left(\sqrt{4}\,\right)^{-3} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

3 Règles de calcul sur les puissances

Propriété 1. *Soient $a \in \mathbb{R}^*$ un réel non nul et $m, n \in \mathbb{Z}$ deux entiers realtifs.*

- $a^n \times a^m = \dots\dots\dots$
- $\dfrac{a^n}{a^m} = \dots\dots\dots$
- $(a^n)^m = \dots\dots\dots$

Exemple 3.

- $10^{-5} \times 10^2 = \dots\dots\dots\dots\dots$
- $\dfrac{2,3^6}{2,3^4} = \dots\dots\dots\dots\dots$
- $\left(\left(\sqrt{4}\,\right)^{-3}\right)^{-2} = \dots\dots\dots\dots\dots$

Propriété 2. *Soient $a, b \in \mathbb{R}^*$ deux réels non nul et $n \in \mathbb{Z}$ un entier relatif.*

- $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dots\dots\dots$
- $(ab)^n = \dots\dots\dots$

Exemple 4.

- $\left(\dfrac{\pi}{\sqrt{5}}\right)^2 = \dots\dots\dots\dots\dots$
- $\left(3\sqrt{4}\,\right)^2 = \dots\dots\dots\dots\dots$

Remarque 1. *Attention il n'existe pas de règle pour les sommes et les puissances. Penser aux formules des identités remarquables.*

II Racine carrée d'un nombre réel positif :

1 Définition

Définition 3. *Soit $a \in \mathbb{R}^+$ un réel positif ou nul. La racine carrée de a est un ... ... que l'on note ... ... et qui vérifie d'être égale au nombre ... ... lorsqu'on la met au carré.*

$$\left(\sqrt{a}\,\right)^2 = a$$

Exemple 5.

- $\sqrt{9} = \dots\dots\dots\dots\dots$
- $\sqrt{2,5} = \dots\dots\dots\dots\dots$
- $\sqrt{5} = \dots\dots\dots\dots\dots$

Propriété 3. *Pour tout réel $a \in \mathbb{R}$*

$$\sqrt{a^2} = |a|$$

Exemple 6.

- $\sqrt{6^2} = \dots\dots\dots\dots\dots$
- $\sqrt{(-2,3)^2} = \dots\dots\dots\dots\dots$
- $\sqrt{(-\pi)^2} = \dots\dots\dots\dots\dots$
- $\sqrt{\left(-\dfrac{1}{3}\right)^2} = \dots\dots\dots\dots\dots$

2 Règles de calcul avec les racines carrées

Remarque 2. *Attention comme avec les puissances il n'existe pas de règle de calcul avec les sommes et les racines carrés. Vous le découvrirez plus tard, la racine carrée est une forme de puissance, plus exactement une puissance $\dfrac{1}{2}$.*

Propriété 4. *Soient $a, b \in \mathbb{R}^+$ deux réels positis.*

- $\sqrt{ab} = \dots\dots\dots$
- $\sqrt{\dfrac{a}{b}} = \dots\dots\dots$

Démonstration.

. . . .

. . . .

. . . .

□

Propriété 5. *Soient $a, b \in \mathbb{R}^{*+}$ deux réels positis non nul alors :*

$$\sqrt{a+b} < \sqrt{a} + \sqrt{b}$$

Démonstration.

. . . .

. . . .

. . . .

□

III Expressions littérales :

Définition 4.

- ***Développer***, *c'est transformer une expression sous forme de produit en une expression sous forme de sommes*
- ***Factoriser***, *c'est transformer une expression sous forme de sommes en une expression sous forme de produits.*

Exemple 7.

- *Factorisation de* $A = (x+1)(4x-1) + 8x(x+1)$. . . . .

. . . .

- *Développement de* $A = (x+1)(4x-1) + 8x(x+1)$. . . . .

. . . .

Propriété 6. *Soient $a, b \in \mathbb{R}$ deux réels, on a trois* ***identités remarquables*** *:*

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

Exercice 1.

1. *Développer les expressions suivantes :*

   ☐ $(6x-3)^2$ ....

   ☐ $(7x+3y)^2$ ....

   ☐ $(x-5y)(5y+x)$ ....

2. *Factoriser les expressions suivantes :*

   ☐ $9x^2+30x+25$ ....

   ☐ $64y^2-x^2$ ....

   ☐ $47y^2+16x^2+36xy$ ....

Remarque 3. *Pour faire une somme (ou une différence) de deux expressions fractionnaires littérales, il faut les réduire au même dénominateur.*

Exercice 2. *Réduire au même dénominateur les expressions fractionnaires :*

☐ $\dfrac{6x-3}{4}+\dfrac{5x-5}{8}$ ....

....

....

☐ $\dfrac{6x-3}{5}-\dfrac{5x-5}{7}$ ....

....

....

☐ $\dfrac{2x-1}{x^2+1}-\dfrac{5x-9}{4x^2+4}$ ....

....

....

☐ $\dfrac{6x-8}{x+1}-\dfrac{x+1}{x+4}$ ....

....

....