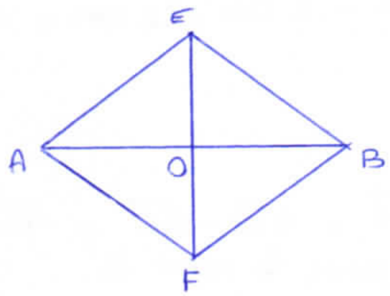
CORRECTION DE LA FEUILLE D'EXERCICES
VECTEURS NIVEAU 3

- Exercice 1 :

1. a. $\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AB}$ donc AEBF est un parallélogramme

   b. De plus, les diagonales (EF) et (AB) étant perpendiculaires, on en déduit que AEBF est un losange.

2.



- Exercice 2 :

1. (CH) // (EF) et (EH) // (FC) donc CFEH est un parallélogramme.

2. $\overrightarrow{BH} + \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{BH} + \overrightarrow{HC} = \overrightarrow{BC}$

   $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{HC}$ car CFEH est un parallélogramme

   relation de Chasles

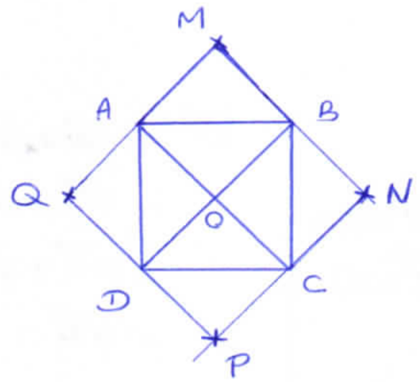
   $\overrightarrow{EH} + \overrightarrow{AF} = \overrightarrow{FC} + \overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{FC} = \overrightarrow{AC}$.

   $\overrightarrow{EH} = \overrightarrow{FC}$ car CFEH est un parallélogramme

   relation de Chasles

- Exercice 3 :

1.



1. $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$ donc OAMB est un parallélogramme.
   De plus, $\widehat{AOB} = 90°$ puisque les diagonales d'un carré sont perpendiculaires.
   Donc OAMB est un rectangle.
   Enfin, OA = OB donc c'est un carré

2. Voir figure.

3. De même que pour la question 1, les quadrilatères OBNC, OCPD et OAQD sont également des carrés.

Comme O est le milieu de [AC], $\overrightarrow{AO} = \overrightarrow{OC}$.

Or $\overrightarrow{AO} = \overrightarrow{MB}$ et $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{BN}$ d'où $\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{BN}$ d'où B est le milieu de [MN] donc $\overrightarrow{MN} = 2\overrightarrow{MB}$.

De même, $\overrightarrow{AO} = \overrightarrow{QD}$ et $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{DP}$ donc $\overrightarrow{QD} = \overrightarrow{DP}$ d'où D milieu de [QP] donc $\overrightarrow{QP} = 2\overrightarrow{QD}$

Or $\overrightarrow{QD} = \overrightarrow{AO} = \overrightarrow{MB}$ donc $\overrightarrow{QP} = 2\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MN}$.

Donc MNPQ est un parallélogramme. Comme il possède un angle droit, c'est un rectangle. De plus,

$MN = 2MB = 2OA = 2OB = 2AM = QM$ donc c'est un carré.

- <u>Exercice 4</u> :

$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BC}$ donc $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AB}$.

Donc le point M est confondu avec le point B.

- <u>Exercice 5</u> :

1. $$\begin{aligned} \overrightarrow{AM} &= \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CM} \\ &= \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CA} \\ &= \underbrace{\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CA}} + \overrightarrow{BA} \\ &= \overrightarrow{AA} + \overrightarrow{BA} \\ &= \overrightarrow{BA} \end{aligned}$$

(on nous donne $\overrightarrow{CM}$ dans l'énoncé donc on "découpe" le vecteur de manière à faire apparaître $\overrightarrow{CM}$)

2. Donc A est le milieu de [BM] d'où : M est le symétrique de B par rapport à A.

- <u>Exercice 6</u> :

1. Voir page suivante.

2. $$\begin{aligned} \overrightarrow{AD} &= \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{ID} \\ &= \overrightarrow{IE} + \overrightarrow{ID} \\ &= \overrightarrow{IE} + \overrightarrow{BI} \\ &= \overrightarrow{BI} + \overrightarrow{IE} \\ &= \overrightarrow{BE} \end{aligned}$$

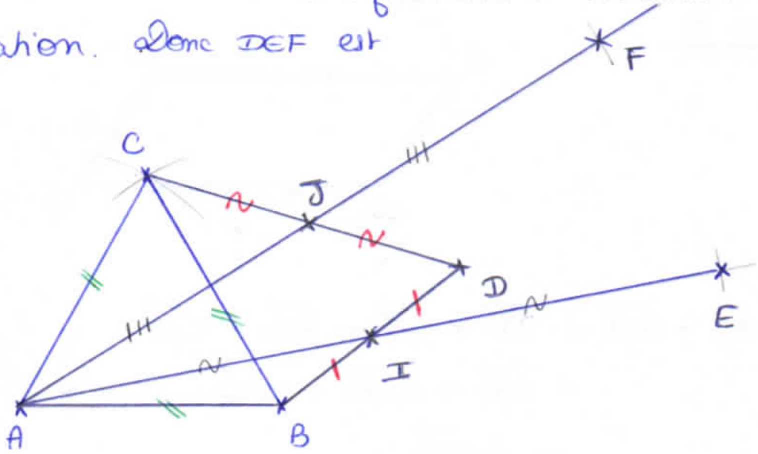
I milieu de [AE] donc $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IE}$

I milieu de [BD]

$$\begin{aligned} \overrightarrow{CF} &= \overrightarrow{CJ} + \overrightarrow{JF} \\ &= \overrightarrow{JD} + \overrightarrow{AJ} \\ &= \overrightarrow{AJ} + \overrightarrow{JD} \\ &= \overrightarrow{AD} \end{aligned}$$

J milieu de [AF] et [CD]

3. $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BE} = \overrightarrow{CF}$ donc la transformation amenant ABC sur DEF est une translation. Donc DEF est équilatéral.



3

- Exercice 7 :

$$\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{DB} - \overrightarrow{CD}.$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC}.$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{DB}$$

$$\Leftrightarrow \cancel{\overrightarrow{DA}} = \cancel{\overrightarrow{DA}} + \overrightarrow{DB}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{DB} = \overrightarrow{0}$$ donc D et B sont confondus

- Exercice 8.

1. $$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{CD}$$
$$= \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DB}$$
$$= \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB}$$

De plus, $$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = (\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IJ} + \overrightarrow{JB}) + (\overrightarrow{CI} + \overrightarrow{IJ} + \overrightarrow{JD})$$
$$= \underbrace{\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{CI}}_{=\overrightarrow{0}} + 2\,\overrightarrow{IJ} + \underbrace{\overrightarrow{JB} + \overrightarrow{JD}}_{=\overrightarrow{0}}$$

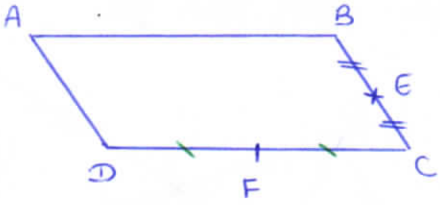
car I milieu de [AC] — car J milieu de [BD]

Donc $\boxed{\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB} = 2\,\overrightarrow{IJ}}$

2. $$\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} - (\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BD})$$
$$= \overrightarrow{AC} + \cancel{\overrightarrow{CB}} - \cancel{\overrightarrow{CB}} - \overrightarrow{BD}$$
$$= \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BD}.$$

De plus, $$\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CD} = (\overrightarrow{AK} + \overrightarrow{KL} + \overrightarrow{LB}) - (\overrightarrow{CL} + \overrightarrow{LK} + \overrightarrow{KD})$$
$$= \overrightarrow{AK} + \overrightarrow{KL} + \overrightarrow{LB} - \overrightarrow{CL} - \overrightarrow{LK} - \overrightarrow{KD}$$
$$= \underbrace{\overrightarrow{AK} + \overrightarrow{DK}}_{=\overrightarrow{0}} + \overrightarrow{KL} + \underbrace{\overrightarrow{LB} + \overrightarrow{LC}}_{=\overrightarrow{0}} + \overrightarrow{KL} = 2\,\overrightarrow{KL}.$$

Exercice 9 :



1. $$\vec{AC} + \vec{BD} = \vec{AB} + \vec{BC} + \vec{BC} + \vec{CD}$$
$$= \cancel{\vec{DC}} + 2\vec{BC} + \cancel{\vec{CD}}$$
$$= 2\vec{BC}.$$

$\vec{AB} = \vec{DC}$ car $ABCD$ est un parallélogramme

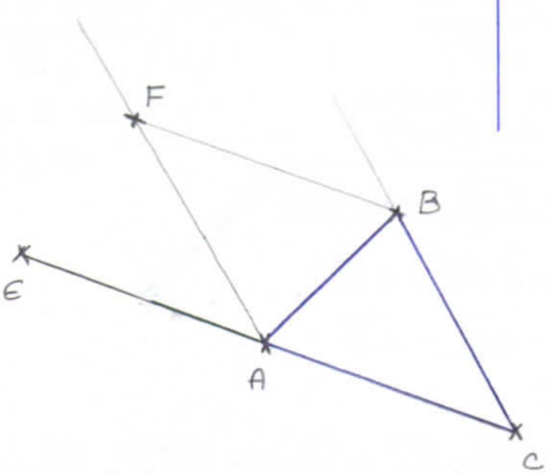
2. $$\vec{AE} + \vec{AF} = \vec{AB} + \vec{BE} + \vec{AD} + \vec{DF}$$
$$= \vec{AB} + \frac{1}{2}\vec{BC} + \vec{AD} + \frac{1}{2}\vec{DC}.$$
$$= \vec{AB} + \vec{AD} + \frac{1}{2}(\vec{BC} + \vec{DC})$$

$\vec{AD} = \vec{BC}$
$\vec{DC} = \vec{AB}$

$$= \underbrace{\vec{AB} + \vec{BC}} + \frac{1}{2}(\vec{BC} + \vec{AB})$$
$$= \vec{AC} + \frac{1}{2}\underbrace{(\vec{AB} + \vec{BC})}$$
$$= \vec{AC} + \frac{1}{2}\vec{AC}$$
$$= \frac{3}{2}\vec{AC}.$$

Exercice 10 :

1. $\vec{AE} = -\vec{AC}$
$\vec{AE} = \vec{CA}$
donc A milieu de $[CE]$
donc E est le symétrique de C par rapport à A.

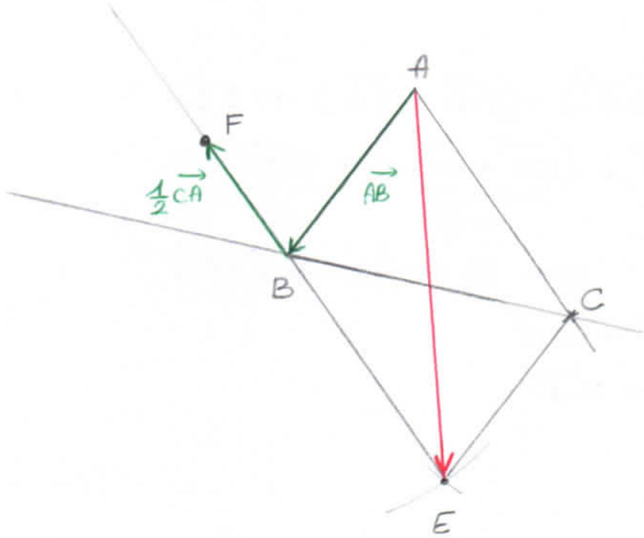


$$\vec{AF} + \vec{BF} - \vec{CF} = \vec{0}$$
$$\vec{AF} + (\vec{BA} + \vec{AF}) - (\vec{CA} + \vec{AF}) = \vec{0}$$
$$\cancel{\vec{AF}} + \vec{BA} + \vec{AF} - \vec{CA} - \cancel{\vec{AF}} = \vec{0}$$
$$\vec{AF} = -\vec{BA} + \vec{CA}$$
$$\vec{AF} = \vec{AB} + \vec{CA}$$
$$\vec{AF} = \vec{CA} + \vec{AB}$$
$$\vec{AF} = \vec{CB}.$$

Exercice 11 :

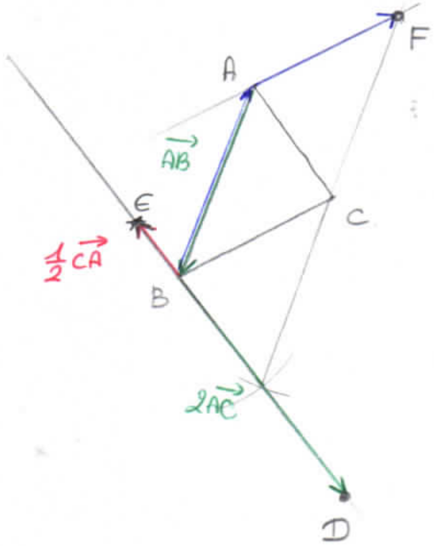
$$\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{CE}$$
$$\Leftrightarrow \cancel{\overrightarrow{AE}} = \overrightarrow{BA} + \cancel{\overrightarrow{AE}} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AE}$$
$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AE} = -\overrightarrow{BA} - \overrightarrow{CA}$$
$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$$

$$\overrightarrow{AF} + 2\,\overrightarrow{BF} = \overrightarrow{CF}$$
$$\Leftrightarrow \cancel{\overrightarrow{AF}} + 2\,(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AF}) = \overrightarrow{CA} + \cancel{\overrightarrow{AF}}$$
$$\Leftrightarrow 2\,\overrightarrow{BA} + 2\,\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{CA}$$
$$\Leftrightarrow 2\,\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{CA} - 2\,\overrightarrow{BA}$$
$$\Leftrightarrow 2\,\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{CA} + 2\,\overrightarrow{AB}$$
$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AF} = \frac{1}{2}\,\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB}.$$



Exercice 12 :

1.



2.
$$\overrightarrow{AE} + 2\,\overrightarrow{BE} - \overrightarrow{CE} = \overrightarrow{0}$$
$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AE} + 2\,(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AE}) - (\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AE}) = \overrightarrow{0}$$
$$\Leftrightarrow \cancel{\overrightarrow{AE}} + 2\,\overrightarrow{BA} + 2\,\overrightarrow{AE} - \overrightarrow{CA} - \cancel{\overrightarrow{AE}} = \overrightarrow{0}$$
$$\Leftrightarrow 2\,\overrightarrow{AE} = -2\,\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CA}$$
$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\,\overrightarrow{CA}.$$

3.
$$\overrightarrow{BF} = \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{CF}$$
$$\cancel{\overrightarrow{BF}} = \overrightarrow{AB} + \cancel{\overrightarrow{BF}} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BF}$$
$$\overrightarrow{BF} = -\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CB}$$
$$\overrightarrow{BF} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}.$$

4. AFCB est un parallélogramme par construction.

- Exercice 13 :

$$\vec{EA} + \vec{EB} + \vec{EC} + \vec{ED} = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow \vec{EI} + \vec{IA} + \vec{EI} + \vec{IB} + \vec{EJ} + \vec{JC} + \vec{EJ} + \vec{JD} = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow 2\vec{EI} + \underbrace{\vec{IA} + \vec{IB}}_{\substack{= \vec{0} \\ \text{car } I \text{ milieu} \\ \text{de } [AB]}} + 2\vec{EJ} + \underbrace{\vec{JC} + \vec{JD}}_{\substack{= \vec{0} \\ \text{car } J \text{ milieu de } [CD].}} = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow 2\vec{EI} + 2\vec{EJ} = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow \vec{EI} + \vec{EJ} = \vec{0}$$

$\Leftrightarrow$ E milieu de $[IJ]$

- Exercice 14 :

$$\vec{JA} + \vec{JB} + \vec{JC} = (\vec{JI} + \vec{IA}) + (\vec{JI} + \vec{IB}) + \vec{JC}$$

$$= 2\vec{JI} + \underbrace{(\vec{IA} + \vec{IB})}_{\substack{= \vec{0} \\ \text{car } I \text{ milieu de } [AB]}} + \vec{JC}$$

$\vec{JC} = \vec{IJ}$
car J milieu
de $[IC]$

$$= 2\vec{JI} + \vec{IJ}$$

$$= 2\vec{JI} - \vec{JI}$$

$$= \vec{JI}.$$