COLLE 27 = ALGÈBRE LINÉAIRE, ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES ET PROBABILITÉS

Exercices mixtes :

Exercice 1.

Soit P le plan d'équation $x+y+z=0$ et D la droite d'équation $x=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z}{3}$.

1. Vérifier que $\mathbb{R}^3 = P \oplus D$.
2. Soit p la projection vectorielle de $\mathbb{R}^3$ sur P parallèlement à D. Soit $u=(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$.
   Déterminer $p(u)$ et donner la matrice de p dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
3. Déterminer une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de p est diagonale, expliciter cette matrice.

Exercice 2.

Une urne contient deux boules blanches et huit boules noires.

1. Un joueur tire successivement, avec remise, cinq boules dans cette urne. Pour chaque boule blanche tirée, il gagne 2 points et pour chaque boule noire tirée, il perd 3 points.
   On note X la variable aléatoire représentant le nombre de boules blanches tirées.
   On note Y le nombre de points obtenus par le joueur sur une partie.
   (a) Déterminer la loi de X, son espérance et sa variance.
   (b) Déterminer la loi de Y , son espérance et sa variance.
2. Dans cette question, on suppose que les cinq tirages successifs se font sans remise.
   (a) Déterminer la loi de X, son espérance et sa variance.
   (b) Déterminer la loi de Y , son espérance et sa variance.

Exercice 3.

1. Déterminer une primitive de $x \longmapsto \cos^4(x)$
2. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle : $y''+y=\cos^3(x)$ en utilisant la méthode de variation des constantes.

Exercice 4.

Une secrétaire effectue, une première fois, un appel téléphonique vers n correspondants distincts. On admet que les n appels constituent n expériences indépendantes et que, pour chaque appel, la probabilité d'obtenir le correspondant demandé est $p\in\,]0,1[$.
Soit X la variable aléatoire représentant le nombre de correspondants obtenus.

1. Donner la loi de X. Justifier.
2. La secrétaire rappelle une seconde fois, dans les mêmes conditions, chacun des $n-X$ correspondants qu'elle n'a pas pu joindre au cours de la première série d'appels. On note Y la variable aléatoire représentant le nombre de personnes jointes au cours de la seconde série d'appels.
   (a) Soit $i\in[\![0\ ;\ n]\!]$. Déterminer, pour $k\in\mathbb{N}$, $P(Y=k|X=i)$.
   (b) Montrer l'égalité suivante :
   $$\binom{n-i}{k-i}\binom{n}{i} = \binom{k}{i}\binom{n}{k}$$
   (c) Prouver que $Z=X+Y$ suit une loi binomiale dont on déterminera les paramètres.
   (d) Déterminer l'espérance et la variance de Z.

Exercice 5.

On cherche à résoudre sur $\mathbb{R}_+^*$ l'équation différentielle :

$$x^2y'' - 3xy' + 4y = 0. \ (E)$$

1. Cette équation est-elle linéaire ? Qu'est-ce qui change par rapport au cours ?
2. Analyse. Soit y une solution de (E) sur $\mathbb{R}_+^*$. Pour $t \in \mathbb{R}$, on pose $z(t) = y(e^t)$. En déduire que z vérifie une équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants que l'on précisera. En déduire l'expression y.
3. Synthèse. Vérifier que la fonction y trouvée précédemment est solution de (E).

Exercice 6.

Soient E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^2 - f - 2Id = 0$.

1. Prouver que f est bijectif et exprimer f^{-1} en fonction de f .
2. Prouver que $E = \ker(f + Id) \oplus \ker(f - 2Id)$.
3. Dans cette question, on suppose que E est de dimension finie.
   Prouver que $Im(f + Id) = \ker(f - 2Id)$.
