COLLE 24 = DÉRIVABILITÉ, CONTINUITÉ ET DÉTERMINANTS :

Exercices mixtes :

Exercice 1. *(Extrait d'un Concours Centrale-Supélec, Filière MP 1998)*

Soient $-\infty \leq a < b \leq +\infty$ et f une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]a;b[$ à valeur dans $\mathbb{R}$.

☐ f est dite absolument monotone (en abrégé AM) si

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in]a;b[,\ f^{(n)}(x) \geq 0.$$

☐ f est dite complètement monotone (en abrégé CM) si

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in]a;b[,\ (-1)^n f^{(n)}(x) \geq 0.$$

Questions :

1. Soient f et g deux fonctions AM définies sur $]a;b[$. Montrer que $f+g$ et fg sont AM. Qu'en est-il pour les fonctions *CM* ?
2. Si f est une fonction AM sur $]a;b[$, montrer par récurrence que e^f l'est aussi.
3. Soient $f :]a;b[\mapsto \mathbb{R}$ et $g :]-b;-a[\mapsto \mathbb{R}$ définie par : $g(x) = f(-x)$. Montrer que f est AM sur $]a;b[$ si, et seulement si, g est CM sur $]-b;-a[$.
4. (a) Vérifier que la fonction $-\ln$ est CM sur $]0;1[$.
   (b) Montrer que $f :]0;1[\mapsto \mathbb{R}$ définie par :
   $$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$
   est AM sur $]0;1[$.
   (c) Montrer que la fonction arcsin est AM sur $]0;1[$.
   (d) Montrer que la fonction tan est AM sur $]0;\frac{\pi}{2}[$.
5. (a) On suppose dans cette question que $a \in \mathbb{R}$ et f est AM sur $]a;b[$.
   Montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que :
   $$\lim_{x \to a^+} f(x) = \lambda$$
   (b) On prolonge f en posant $f(a) = \lambda$. Montrer que f est dérivable à droite en a et que f' est continue à droite en a.
   (c) Plus généralement, montrer que f est indéfiniment dérivable à droite en a avec des dérivées positives ou nulles. Le même phénomène se produit-il en b ?

Exercice 2.

Soient $(z_0, \ldots, z_n)$ des nombres complexes deux à deux distincts. Montrer que la famille

$$((X-z_0)^n, \ldots, (X-z_n)^n)$$

est une base de $\mathbb{C}_n[X]$.

Exercice 3.

Soit $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose que A et B sont semblables sur $\mathbb{C}$, c'est à dire qu'il existe $P \in \mathcal{G}l_n(\mathbb{C})$ tel que $A = PBP^{-1}$. Montrer que A et B sont semblables sur $\mathbb{R}$.

Exercice 4.

Soient $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on définit :

$$f_n(x) = \begin{vmatrix} 1+x^2 & -x & 0 & \cdots & 0 \\ -x & 1+x^2 & -x & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & -x & 1+x^2 & -x \\ 0 & \cdots & 0 & -x & 1+x^2 \end{vmatrix}$$

1. Trouver une relation de récurrence double sur $f_n(x)$.
2. Expliciter pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$ la valeur de $f_n(x)$
3. Montrer que pour $x \in \mathbb{R}\backslash\{0;1\}$:

$$f_n(x) = \frac{\frac{1}{x^{n+1}} - x^{n+1}}{\frac{1}{x} - x} x^n$$

Exercice 5.

Soient n≥1, p≥0. Calculer le déterminant suivant :

$$A = \begin{vmatrix} \binom{n}{0} & \binom{n}{1} & \cdots & \binom{n}{p} \\ \binom{n+1}{0} & \binom{n+1}{1} & \cdots & \binom{n+1}{p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \binom{n+p}{0} & \binom{n+p}{1} & \cdots & \binom{n+p}{p} \end{vmatrix}$$
