# Vecteurs - Feuille d'exercices niveau 2

## Exercice 1 : représentant d'un vecteur, égalité de deux vecteurs

1. On considère la figure ci-dessous :

   *a*. Construire au compas sur la figure ci-dessus les points $M$ et $N$ vérifiant $\overrightarrow{PM} = \overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{QN} = \overrightarrow{u}$.

   *b*. Que peut-on dire des vecteurs $\overrightarrow{PQ}$ et $\overrightarrow{MN}$. Justifier.

2. On considère quatre points $A$, $B$, $C$, $D$ tels que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$. Faire une figure à main levée, puis compléter les égalités suivantes à l'aide des points $A$, $B$, $C$ et $D$ :

   $\overrightarrow{B....} = \overrightarrow{....C}$ ; $\overrightarrow{....A} = \overrightarrow{D....}$ ; $\overrightarrow{A....} = \overrightarrow{B....}$ ; $\overrightarrow{CC} = \overrightarrow{D....}$ .

## Exercice 2 : égalité de deux vecteurs et parallélogramme

1. Tracer un triangle $IJK$. On définit le point $L$ tel que $\overrightarrow{IJ} + \overrightarrow{IL} = \overrightarrow{IK}$.
   Construire le point $L$ après avoir indiqué la nature du quadrilatère $IJKL$.
2. Soit $ABCD$ un parallélogramme.

   *a*. Construire le symétrique $E$ de $D$ par rapport à $C$ et le symétrique $F$ de $B$ par rapport à $A$.
   Que peut-on dire des vecteurs $\overrightarrow{DC}$ et $\overrightarrow{CE}$ ? Des vecteurs $\overrightarrow{AF}$ et $\overrightarrow{BA}$ ? Justifier les réponses.

   *b*. Démontrer que le quadrilatère $CEAF$ est un parallélogramme.

   *c*. Parmi les points de la figure, reconnaître les points $P$ et $Q$ définis par :

   $$\overrightarrow{DP} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AB} \text{ et } \overrightarrow{CQ} = \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{CB}.$$

   *d*. Construire le symétrique $H$ de $B$ par rapport à $C$.

   *e*. Comparer $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{DH}$. Justifier.

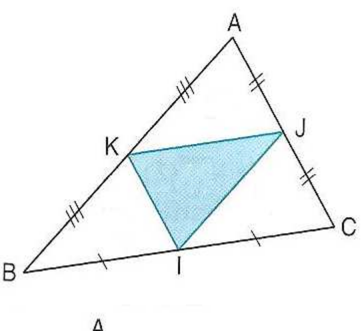
## Exercice 3 : direction, sens et norme d'un vecteur

1. On considère la figure ci-contre. Citer :

*a*. deux vecteurs égaux à $\overrightarrow{KJ}$ ;

*b*. deux vecteurs égaux à $\overrightarrow{JC}$ ;

*c*. deux vecteurs égaux à $\overrightarrow{KA}$.

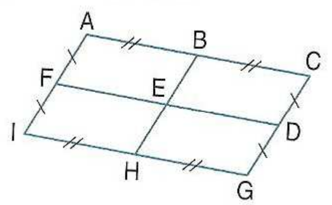



2. On considère la figure ci-contre. Avec tous les points de cette figure, écrire :

*a*. tous les vecteurs égaux à $\overrightarrow{BC}$ ;

*b*. tous les vecteurs égaux à $\overrightarrow{FB}$ ;

*c*. tous les vecteurs égaux à $\overrightarrow{DB}$.



## Exercice 4 : représentant d'un vecteur d'origine donnée

Les questions suivantes sont indépendantes.

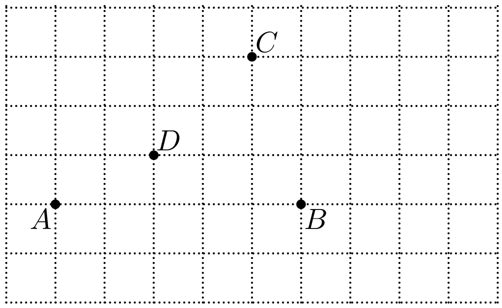
- Sans quadrillage.

  Soit $ABC$ un triangle.

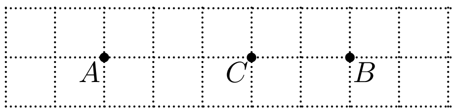
  1. Tracer au compas le point $E$ tel que $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{BC}$.
  2. Tracer au compas le point $F$ tel que $\overrightarrow{CF} = \overrightarrow{BA}$.
  3. Que peut-on dire des points $E$ et $F$ ? Justifier.

- Avec deux vecteurs et quadrillage.

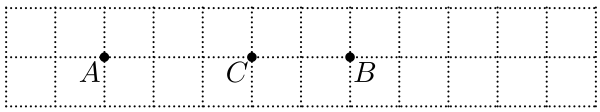
  1. Construire sur la figure ci-dessous le point $M$ défini par $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}$ et le point $N$ défini par $\overrightarrow{BN} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}$.




  2. Construire sur la figure ci-dessous le point $M$ défini par $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$.




  3. Construire sur la figure ci-dessous le point $M$ défini par $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$.




- Avec deux vecteurs et sans quadrillage.

  Les questions suivantes sont équivalentes.

  1. Soit $ABC$ un triangle. Faire une figure puis construire les points $D$, $E$, $F$, $G$, $H$, $I$, $J$ et $K$ tels que :

$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} \ , \ \overrightarrow{BE} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} \ , \ \overrightarrow{CF} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB} \ , \ \overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB} \ , \ \overrightarrow{AH} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BA}$$

$$, \ \overrightarrow{AI} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC} \ , \ \overrightarrow{CJ} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{BA} \ \text{ et } \ \overrightarrow{AK} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BA}.$$

  2. Soit un carré $ABCD$. Faire une figure puis construire les points $E$ et $F$ tels que :

$$\overrightarrow{CE} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB} \ \text{ et } \ \overrightarrow{DF} = \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DA}.$$

  3. Soit $ABCD$ un losange. Faire une figure puis construire le quadrilatère $DEFG$ tel que :

$$\overrightarrow{DG} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DB} \ , \ \overrightarrow{BE} = \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{BA} \ \text{ et } \ \overrightarrow{DF} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{BA}.$$

  4. Soit $LUMA$ un rectangle de centre $O$. Construire les points $X$ et $Y$ tels que :

$$\overrightarrow{LX} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{OU} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{AY} = \overrightarrow{LU} + \overrightarrow{OM}$$

  5. Soit $(O; I, J)$ un repère orthonormé. Construire le polygone $OABCDEFGH$ où :
     $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OI} + \overrightarrow{OJ}$, $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OH}$, $\overrightarrow{OG} = \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{BA}$,
     $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OI} + \overrightarrow{OI}$, $\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OJ} + \overrightarrow{OJ}$, $\overrightarrow{OF} = \overrightarrow{OH} + \overrightarrow{OH}$, $\overrightarrow{OE} = \overrightarrow{OG} + \overrightarrow{AD}$.

## Exercice 5 : enchaînement de deux translations, construction du vecteur somme.

Soient $A$, $B$, $E$ et $F$ quatre points tels que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{EF}$. Soit $D$ un point quelconque. Quelle est l'image du point $E$ par la translation de vecteur $\overrightarrow{AD}$ suivie de la translation de vecteur $\overrightarrow{DB}$ ? Justifier.

**Exercice 6 : milieu d'un segment**

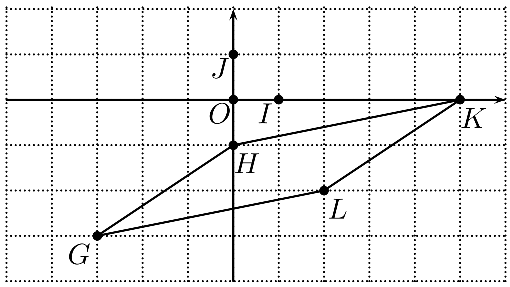
Les questions suivantes sont équivalentes.

1. Construire trois $M$, $I$ et $N$ tels que $\overrightarrow{MI} = \overrightarrow{IN}$. Que peut-on dire du point $I$ ? La réponse serait-elle la même si les points $M$, $I$ et $N$ vérifiaient seulement l'égalité $MI = IN$ ?
2. Construire cinq points non alignés $A$, $B$, $C$, $D$ et $O$ tels que $\overrightarrow{AO} = \overrightarrow{OC}$ et $\overrightarrow{DO} = \overrightarrow{OB}$. Que peut-on dire du quadrilatère $ABCD$ ? Justifier.
3. Soit $ABC$ un triangle.
   (a) Construire le point $D$ vérifiant $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$.
   (b) Construire le point $E$ vérifiant $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$.
   (c) Démontrer que le point $B$ est le milieu de $[DE]$.

**Exercice 7 : coordonnées d'un vecteur : lecture graphique et calcul**

Soit $(O; I, J)$ un repère orthonormé.

1. Soient $A(2; -5)$, $B(3; 4)$ et $C(1; -1)$. Calculer les coordonnées du point $D$ tel que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ et vérifier sur un graphique.
2. Soient $E(-1; 2)$ et $F(3; -1)$.
   *a*. Calculer les coordonnées du milieu $M$ de $[EF]$.
   *b*. Calculer les coordonnées du point $H$ tel que $E$ soit le milieu de $[HF]$.
   *c*. Calculer les coordonnées du point $K$ tel que $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{FK}$.
   *d*. Faire une figure et contrôler les résultats des questions précédentes.
3. On donne la figure ci-contre :
   *a*. Lire les coordonnées des points $G$, $H$, $K$ et $L$.
   *b*. Démontrer que $GHKL$ est un parallélogramme.




4. On donne les points $M(-2; -3)$ et $N(-1; 2)$. Calculer les coordonnées du point $P$ tel que $-2\overrightarrow{MP} + 5\overrightarrow{PN} = \overrightarrow{0}$.

**Exercice 8 : Relation de Chasles.**

Les questions suivantes sont indépendantes.

1. Compléter les égalités suivantes sans faire de figure :

$$\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{MN} = ........ \;; \qquad \overrightarrow{AP} + \overrightarrow{QR} + \overrightarrow{PQ} = ........ \;; \qquad \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{....C} + \overrightarrow{....D} = \overrightarrow{AD}\ .$$

2. Soit $ABC$ un triangle. Soient $E$, $F$ et $D$ les milieux respectifs des côtés $[AC]$, $[BC]$ et $[AB]$.
   *a*. Faire une figure, puis compléter les égalités suivantes :

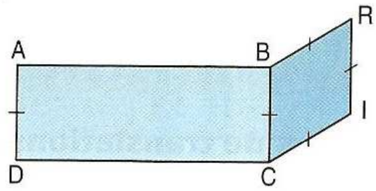
$$\overrightarrow{EB} = \overrightarrow{E....} + \overrightarrow{C....} \quad ; \quad \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{....B} + \overrightarrow{....C}.$$

   *b*. Déduire de la question précédente que $\overrightarrow{EB} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{EC}$.
3. Soit $ABCD$ un parallélogramme.
   *a*. Simplifier les sommes suivantes :

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} \;;\; \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DA} \;;\; \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BA} \;;\; \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{AD}.$$

   *b*. Démontrer que pour tout point $M$ du plan, on a $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CM} = \overrightarrow{DM}$.
4. Simplifier les sommes suivantes :
   - ⋄ $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{BC}$ ;
   - ⋄ $\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{EB}$ ;
   - ⋄ $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{BA}$ ;
   - ⋄ $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DO} + \overrightarrow{BC}$.

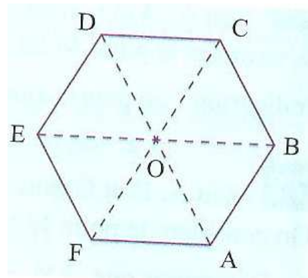
5. On considère la figure ci-dessous où $ABCD$ est un rectangle.
Simplifier les sommes suivantes :
   - ◇ $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{RI}$ ;
   - ◇ $\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{BR}$ ;
   - ◇ $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{IR}$ ;
   - ◇ $\overrightarrow{IC} + \overrightarrow{DA}$ ;
   - ◇ $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{RI} + \overrightarrow{CD}$.




6. Soient $A$, $B$, $C$ et $D$ quatre points du plan tels que $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB}$. Démontrer que les points $A$ et $D$ sont confondus.
7. Soient $A$, $B$, $C$ et $D$ quatre points quelconques du plan. Démontrer que $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{DA}$.

**<u>Exercice 9 : exercice-bilan.</u>**
Les questions suivantes sont indépendantes.

1. Soit $A(7;5)$, $B(-3;3)$, $C(-1;-3)$ et $D(7;-5)$. On note $K$, $L$, $M$ et $N$ les milieux respectifs de $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$ et $[DA]$. Démontrer que $KLMN$ est un parallélogramme. (Indication : on commencera par calculer les coordonnées des points $K$, $L$, $M$ et $N$).
2. Soit $ABCD$ un parallélogramme. Soit $E$ le symétrique de $D$ par rapport à $C$ et soit $F$ le symétrique de $C$ par rapport à $D$.
   *a.* Que peut-on dire des vecteurs $\overrightarrow{DC}$ et $\overrightarrow{CE}$ ? Des vecteurs $\overrightarrow{DC}$ et $\overrightarrow{FD}$ ? Justifier les réponses.
   *b.* Démontrer que les segments $[FE]$ et $[CD]$ ont le même milieu.
3. Soient $ABCD$ et $CBEF$ deux parallélogrammes tels que les points $A$, $B$ et $E$ ne soient pas alignés. Démontrer que $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{DF}$.
4. Soit $ABCDEF$ un hexagone régulier de centre $O$ (c'est-à-dire composé de six triangles équilatéraux de sommet $O$).
   *a.* Pourquoi a-t-on $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{EO}$ ? Donner d'autres représentants du vecteur $\overrightarrow{DC}$.
   *b.* Indiquer tous les vecteurs égaux à $\overrightarrow{AB}$.
   *c.* A quels vecteurs la somme $\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{AB}$ est-elle égale ?
   *d.* Parmi les six triangles équilatéraux dessinés, quels sont ceux qui sont images du triangle $AOF$ par une translation ? Dans chaque cas, citer le vecteur associé à la translation.




5. Soit $ABC$ un triangle.
   *a.* Construire les points $A'$, $B'$ et $C'$ tels que :
   $$\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} \quad , \quad \overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} \quad , \quad \overrightarrow{CC'} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}.$$
   *b.* Quelle est la nature du quadrilatère $CAC'B$ ?
   *c.* Qu'en déduit-on pour $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{C'A}$ ?
   *d.* Démontrer que $\overrightarrow{C'A} = \overrightarrow{AB'}$.
   *e.* Justifier que le point $A$ est le milieu de $[C'B']$. Que peut-on en déduire pour la droite $(AA')$.
   *f.* Démontrer que les droites $(AA')$, $(BB')$ et $(CC')$ sont concourantes.
6. Soit $ABCD$ un rectangle de centre $I$.
   *a.* Construire le point $K$ tel que $\overrightarrow{IK} = \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB}$. Montrer que le quadrilatère $AKBI$ est un losange.
   *b.* Soient $P$ le symétrique de $I$ par rapport à $B$ et $R$ symétrique de $K$ par rapport à $B$. Prouver que les points $I$, $K$, $P$ et $R$ sont sur un même cercle et indiquer le rayon et le centre de ce cercle. En déduire la nature du quadrilatère $IKPR$.