Examen n°1

(Temps : 4 heures)

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les étudiants sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs. Les réponses doivent toutes être soigneusement justifiées. Les calculatrices sont interdites.

Barème indicatif :

- Exercice 1 .... 8 points
- Exercice 2 .... 7 points
- Exercice 3 .... 5 points

Exercice 1. *(Temps : 1 heure et 30 minutes)*

1. Étudier le sens de variation de la fonction g définie pour tout t de $\mathbb{R}$ par : $g(t) = e^t - t - 1$.
2. Quel est le minimum de la fonction g sur $\mathbb{R}$?
3. En déduire les inégalités suivantes :
   (a) pour tout réel t :
   $$e^t \geq 1 + t \qquad e^t > t \qquad -te^{-t} > -1$$
   (b) pour tout réel t tel que $t > -1$:
   $$\ln(1+t) \leq t$$
   (c) pour tout réel x :
   $$\ln(1 - xe^{-x}) \leq -xe^{-x}$$
4. On considère la fonction f définie par la relation :
   $$f(x) = x^2 - 2\ln(e^x - x)$$
   (a) Montrer que f est définie sur $\mathbb{R}$ et que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 2x - 2\ln(1 - xe^{-x})$.
   (b) En déduire la limite de f en $+\infty$.
   (c) Montrer que pour tout $x < 0$: $f(x) = x^2\left(1 - 2\dfrac{\ln(-x)}{(-x)^2}\right) - 2\ln\left(1 - \dfrac{e^x}{x}\right)$
   (d) En déduire la limite de f en $-\infty$.
   (e) Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer f'. Montrer que pour tout réel x :
   $$f'(x) = \frac{2(x-1)(e^x - x - 1)}{e^x - x}$$
   Dresser le tableau de variation de la fonction f.
   (f) On considère la parabole $(\mathscr{P})$ d'équation $y = x^2 - 2x$ et $(\mathscr{C})$ la courbe représentative de f. Tracer dans un même repère orthonormal (unité : 3cm) l'allure des courbes $(\mathscr{P})$ et $(\mathscr{C})$ et les tangentes horizontales $(\mathscr{D})$ et $(\mathscr{D}')$ à $(\mathscr{C})$.
   (g) Montrer que $(\mathscr{P})$ et $(\mathscr{C})$ sont asymptotes en $+\infty$, c'est-à-dire que la limite en $+\infty$ de $f(x) - x^2 - 2x$ est nulle. Étudier les positions relatives des courbes $(\mathscr{P})$ et $(\mathscr{C})$.
5. Soit n un entier naturel, on pose :
   $$u_n = \int_0^n xe^{-x}dx$$
   (a) Démontrer que la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est croissante.
   (b) Calculer u_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   On pourra d'abord calculer la dérivée de $h : x \longmapsto -(x+1)e^{-x}$.
   (c) Déterminer la limite de la suite u.
6. L'aire du domaine (en unités d'aire) limité par les droites d'équation $x = 0$, $x = n$, entre la parabole $(\mathscr{P})$ et la courbe $(\mathscr{C})$ est définie par :
   $$I_n = -2\int_0^n \ln(1 - xe^{-x})dx$$

(a) Montrer en utilisant certaines des questions précédentes que $I_n \geq 2u_n$.

(b) On admet que la suite (I_n) converge vers une limite l. Montrer que : $l \geq 2$.

Exercice 2. *(Temps : 1 heure et 20 minutes)*
On définit la suite de Fibonacci $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ et la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$$

1. Déterminer la liste des 10 premiers nombres de Fibonacci (de F_1 à F_{10}).
2. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 6 \Rightarrow F_n > n$.
   Que peut-on en déduire pour la suite $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$?
3. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ n \geq 2 \Rightarrow F_n < F_{n+1} \leq 2F_n$.
4. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum\limits_{k=1}^{n} F_k = F_{n+2} - 1$
5. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum\limits_{k=1}^{n} F_k^2 = F_n F_{n+1}$
6. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum\limits_{k=1}^{2n-1} F_k F_{k+1} = F_{2n}^2$
7. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, F_{2n} = F_{n+1}^2 - F_{n-1}^2$ et $F_{2n+1} = F_{n+1}^2 + F_n^2$.
8. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{2n-k}{k} = F_{2n+1}$ et $\sum\limits_{k=0}^{n} \binom{2n+1-k}{k} = F_{2n+2}$
9. Montrer que si l'on pose : $\varphi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$: $\forall n \in \mathbb{N}^*, F_{n-1} + \varphi F_n = \varphi^n$.
10. Montrer que si l'on pose : $\overline{\varphi} = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$: $\forall n \in \mathbb{N}, F_n = \dfrac{\varphi^n - \overline{\varphi}^n}{\varphi - \overline{\varphi}}$.

Exercice 3. *(Temps : 1 heure et 10 minutes)*

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$:
   (a) $\sqrt{x-9} + \sqrt{x-24} = x$
   (b) $x - 1 < \sqrt{x^2 - 2}$
   (c) $|(x-3)(x-5)| > x - 3$
   (d) $|x| + |x-1| + |x-2| \leq 6$
2. En raisonnant par **équivalences**, résoudre les inéquations :
   (a) $|1-x| \leq \dfrac{x}{2-x}$
   (b) $x + 1 \leq \sqrt{x+2}$
3. (a) Montrer que toute fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ peut s'écrire comme la somme d'une fonction polynomiale de degré au plus 2 et d'une fonction s'annulant en -1, 0 et 1. Y a-t-il unicité ?
   (b) Montrer que toute fonction continue $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ est la somme d'une fonction linéaire ($x \longmapsto ax$) et d'une fonction d'intégrale nulle sur $[0,1]$. Y a-t-il unicité ?