Exercice 1 - Équivalents et majorations - 2

Étudier la convergence des séries $\sum u_n$ suivantes :

1. $u_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{n}}$ **2**. $u_n = a^n n!,\ a \in \mathbb{R}_+$ **3**. $u_n = ne^{-\sqrt{n}}$

4. $u_n = \frac{\ln(n^2+3)\sqrt{2^n+1}}{4^n}$. **5**. $u_n = \frac{\ln n}{\ln(e^n-1)}$ **6**. $u_n = \left(\frac{1}{n}\right)^{1+\frac{1}{n}}$

7. $u_n = \frac{(n!)^3}{(3n)!}$.

Exercice 2 - Une erreur classique...

1. Démontrer que la série $\sum_n \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ converge.
2. Démontrer que $\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n} = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - \frac{1}{n} + \frac{(-1)^n}{n\sqrt{n}} + o\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right)$.
3. Étudier la convergence de la série $\sum_n \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}$.
4. Qu'a-t-on voulu mettre en évidence dans cet exercice?

Exercice 3 - Séries de Bertrand

On souhaite étudier, suivant la valeur de $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, la convergence de la série de terme général

$$u_n = \frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta}.$$

1. Démontrer que la série converge si $\alpha > 1$.
2. Traiter le cas $\alpha < 1$.
3. On suppose que $\alpha = 1$. On pose $T_n = \int_2^n \frac{dx}{x(\ln x)^\beta}$.
   (a) Montrer si $\beta \leq 0$, alors la série de terme général u_n est divergente.
   (b) Montrer que si $\beta > 1$, alors la suite (T_n) est bornée, alors que si $\beta \leq 1$, la suite (T_n) tend vers $+\infty$.
   (c) Conclure pour la série de terme général u_n, lorsque $\alpha = 1$.

Exercice 4 - Développement asymptotique de la série harmonique

On pose $H_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$.

1. Prouver que $H_n \sim_{+\infty} \ln n$.
2. On pose $u_n = H_n - \ln n$, et $v_n = u_{n+1} - u_n$. Étudier la nature de la série $\sum_n v_n$. En déduire que la suite (u_n) est convergente. On notera γ sa limite.
3. Soit $R_n = \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$. Donner un équivalent de R_n.
4. Soit w_n tel que $H_n = \ln n + \gamma + w_n$, et soit $t_n = w_{n+1} - w_n$. Donner un équivalent du reste $\sum_{k \geq n} t_k$. En déduire que $H_n = \ln n + \gamma + \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$.

Exercice 5 - Formule de Stirling

1. Soit (x_n) une suite de réels et soit (y_n) définie par $y_n = x_{n+1} - x_n$. Démontrer que la série $\sum_n y_n$ et la suite (x_n) sont de même nature.
2. On pose (u_n) la suite définie par $u_n = \dfrac{n^n e^{-n}\sqrt{n}}{n!}$. Donner la nature de la série de terme général $v_n = \ln\left(\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right)$.
3. En déduire l'existence d'une constante $C > 0$ telle que :

$$n! \sim_{+\infty} C\sqrt{n}n^n e^{-n}.$$

Cette feuille d'exercices a été conçue à l'aide du site https://www.bibmath.net