TD 2 : Arithmétique

Divisibilité, division euclidienne :

Exercice 1. (*)

Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$:
$n(n+1)(n+2)(n+3)$ est divisible par 24,
$n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)$ est divisible par 120.

Exercice 2. (*)

Montrer que si n est un entier naturel somme de deux carrés d'entiers alors le reste de la division euclidienne de n par 4 n'est jamais égal à 3.

Exercice 3. (*)

Montrer que le reste de la division euclidienne de 2^{65362} par 7 est 2.

Exercice 4. (*)

Donner le reste de la division de 100^{1000} par 13.

Exercice 5. (**)

1. Montrer que le reste de la division euclidienne par 8 du carré de tout nombre impair est 1.
2. Montrer de même que tout nombre pair vérifie $x^2 = 0 \pmod 8$ ou $x^2 = 4 \pmod 8$.
3. Soient a, b, c trois entiers impairs. Déterminer le reste modulo 8 de $a^2 + b^2 + c^2$ et celui de $2(ab + bc + ca)$.
4. En déduire que les deux nombres précédents ne sont pas des carrés. Montrer ensuite que $ab + bc + ca$ n'en est pas un non plus.

Exercice 6. (***)

Soient $x, y, z \in \mathbb{Z}$ trois entiers solutions de l'équation de Fermat $x^3 + y^3 = z^3$. Montrer que l'un des entiers x, y ou z est multiple de 3.

Algorithme d'Euclide, pgcd, ppcm :

Exercice 7. (*)

1. Trouver $u, v \in \mathbb{Z}$ tels que
$126u + 230v = 126 \wedge 230$.
2. Calculer le pgcd des nombres suivants :
a) $390, 720, 450$. b) $180, 606, 750$.

Exercice 8. (**)

Soit $n \in \mathbb{Z}$.

1. Donner $(3n+1) \wedge (2n+5)$.
2. Montrer que les entiers $n^3 + 3n^2 - 5$ et $n+2$ sont premiers entre eux.

Exercice 9. (**)

Déterminer les couples d'entiers naturels de pgcd 18 et de somme 360. De même avec pgcd 18 et produit 6480.

Exercice 10. (**)

Soient $a = 1\,111\,111\,111$ et $b = 123\,456\,789$. Trouver $u, v \in \mathbb{Z}$ tels que $au + bv = \mathrm{pgcd}(a, b)$.

Exercice 11. (*)

Démontrer que le nombre $7^n + 1$ est divisible par 8 si n est impair ; dans le cas n pair, donner le reste de sa division par 8.

Nombres premiers, nombres premiers entre eux :

Exercice 12. (*)

Montrer que tout entier composé $n \in \mathbb{N}^*$ possède un diviseur premier inférieur ou égal à $\sqrt{n}$.

Exercice 13. (*)

Combien 15! admet-il de diviseurs ?

Exercice 14. (**)

Démontrer que $\sqrt[5]{\dfrac{4}{3}}$ est un irrationnel.

Exercice 15. (***)

Soit $(x, y) \in \mathbb{N}^2$, justifier que l'équation

$$x^2 = y^2 + (x \wedge y) + 2$$

admet $(2, 1)$ et $(2, 0)$ pour seules solutions.

Exercice 16. (**)

Soit X l'ensemble des nombres premiers de la forme $4k + 3$ avec $k \in \mathbb{N}$.

1. Montrer que X est non vide.
2. Montrer que le produit de nombres de la forme $4k + 1$ est encore de cette forme.
3. On suppose que X est fini et on l'écrit alors $X = \{p_1, \dots, p_n\}$.
   Soit $a = 4p_1p_2 \dots p_n - 1$. Montrer par l'absurde que a admet un diviseur premier de la forme $4k + 3$.
4. Montrer que ceci est impossible et donc que X est infini.

Exercice 17. (***)

Montrer qu'il existe une infinité de nombres premiers de la forme $6k + 5$.
