COLLE 20 = DÉVELOPPEMENTS LIMITÉS,COMPORTEMENT ASYMPTOTIQUE ET SÉRIES NUMÉRIQUES

Développements limités,comportement asymptotique :

Exercice 1.

Etudier l'existence et la valeur éventuelle des limites suivantes

1. $\lim_{x\to\pi/2}(\sin x)^{1/(2x-\pi)}$
2. $\lim_{n\to+\infty}\left(\cos(\frac{n\pi}{3n+1})+\sin(\frac{n\pi}{6n+1})\right)^n$
3. $\lim_{x\to 0}(\cos x)^{\ln|x|}$
4. $\lim_{x\to e,\ x<e}(\ln x)^{\ln(e-x)}$
5. $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\ln(x+1)}{\ln x}\right)^x$

Exercice 2.

1. Développement asymptotique à la précision x^2 en 0 de $\frac{1}{x(e^x-1)}-\frac{1}{x^2}$.
2. Développement asymptotique à la précision $\frac{1}{x^3}$ en $+\infty$ de $x\ln(x+1)-(x+1)\ln x$.

Exercice 3.

1. Donner un équivalent simple en $+\infty$ et $-\infty$ de $\sqrt{x^2+3x+5}-x+1$.
2. Donner un équivalent simple en 0 de $(\sin x)^{x-x^2}-(x-x^2)^{\sin x}$.
3. Donner un équivalent simple en $+\infty$ de $x^{\tanh x}$.

Exercice 4.

Soit $u_0\in]0,\frac{\pi}{2}]$. Pour $n\in\mathbb{N}$, on pose $u_{n+1}=\sin(u_n)$.

1. Montrer brièvement que la suite u est strictement positive et converge vers 0.
2. (a) Déterminer un réel α tel que la suite $u_{n+1}^\alpha-u_n^\alpha$ ait une limite finie non nulle.
   (b) En utilisant le lemme de CESARO, déterminer un équivalent simple de u_n.

Séries numériques :

Exercice 5.

Donner un développement asymptotique à la précision $\frac{1}{n^3}$ de $u_n=\frac{1}{n!}\sum_{k=0}^n k!$.

Exercice 6.

Donner la nature de la série de terme général :

1. $\ln\left(\frac{n^2+n+1}{n^2+n-1}\right)$
2. $\frac{1}{n+(-1)^n\sqrt{n}}$
3. $\left(\frac{n+3}{2n+1}\right)^{\ln n}$
4. $\frac{n^2}{(n-1)!}$

Exercice 7.

Trouver un développement limité à l'ordre 4 quand n tend vers l'infini de $\left(e-\sum_{k=0}^n\frac{1}{k!}\right)\times(n+1)!$.

Exercice 8.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs. Montrer que les séries de termes généraux u_n, $\frac{u_n}{1+u_n}$, $\ln(1+u_n)$ et $\int_0^{u_n}\frac{dx}{1+x^e}$ sont de mêmes natures.

Exercice 9.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante de nombres réels strictement positifs telle que la série de terme général u_n converge.

Montrer que $u_n \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{n}\right)$. Trouver un exemple de suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de réels strictement positifs telle que la série de terme général u_n converge mais telle que la suite de terme général nu_n ne tende pas vers 0.

Exercice 10.

Donner la nature de la série de terme général $u_n=\sum_{k=1}^n\frac{1}{(n+k)^p}$, $p\in]0,+\infty[$.

Exercice 11.

Calculer $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{3n+1}$.

Exercice 12.

Donner un développement limité à l'ordre 4 de $\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{1}{k^2}$ quand n tend vers l'infini.