COLLE 22-23 = RATTRAPAGE

Colle 22 :

Exercice 1.
Soit X une variable aléatoire prenant ses valeurs dans $\{0, 1, ..., N\}$. Démontrer que

$$E(X) = \sum_{n=0}^{N-1} P(X > n)$$

Exercice 2.

Pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on pose

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2} \text{ si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 \text{ si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}.$$

Montrer que f est de classe C^1 (au moins) sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 3.

Une entreprise souhaite recrute un cadre. n personnes se présentent pour le poste. Chacun d'entre eux passe à tour de rôle un test, et le premier qui réussit le test est engagé. La probabilité de réussir le test est $p \in]0, 1[$. On pose également $q = 1 - p$. On définit la variable aléatoire X par $X = k$ si le k-ième candidat qui réussit le test est engagé, et $X = n + 1$ si personne n'est engagé.

1. Déterminer la loi de X.
2. En dérivant la fonction $x \mapsto \sum_{k=0}^{n} x^k$.
   En déduire l'espérance de X.
3. Quelle est la valeur minimale de p pour avoir plus d'une chance sur deux de recruter l'un des candidats ?

Colle 23 :

Exercice 4.
On pose $Q_0 = (X - 1)(X - 2)^2$, $Q_1 = X(X - 2)^2$ et $Q_2 = X(X - 1)$. À l'aide de la décomposition en éléments simples de $\frac{1}{X(X-1)(X-2)^2}$, trouver des polynômes $A_0,\ A_1,\ A_2$ tels que
$A_0Q_0 + A_1Q_1 + A_2Q_2 = 1$.

Exercice 5.

On désire fabriquer une boite ayant la forme d'un parallélépipède rectangle, sans couvercle sur le dessus. Le volume de cette boite doit être égal à $0,5m^3$ et pour optimiser la quantité de mâtière utilisée, on désire que la somme des aires des faces soit aussi petite que possible. Quelles dimensions doit-on choisir pour fabriquer la boite ?

Exercice 6.
Soit $T_n(x) = \cos\big(n \arccos(x)\big)$ pour $x \in [-1, 1]$.

1. (a) Montrer que pour tout $\theta \in [0, \pi]$, $T_n(\cos\theta) = \cos(n\theta)$.
   (b) Calculer T_0 et T_1.
   (c) Montrer la relation de récurrence $T_{n+2}(x) = 2xT_{n+1}(x) - T_n(x)$, pour tout $n \geq 0$.
   (d) En déduire que T_n une fonction polynomiale de degré n.
2. Soit $P(X) = \lambda(X - a_1) \cdots (X - a_n)$ un polynôme, où les a_k sont deux à deux distincts et $\lambda \neq 0$. Montrer que

$$\frac{1}{P(X)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\frac{1}{P'(a_k)}}{X - a_k}$$

3. Décomposer $\frac{1}{T_n}$ en éléments simples.