
EXERCICE 1 - Exponentielle et équivalent

Soient f et g deux fonctions définies au voisinage d'un réel a ou de $a = \pm\infty$. Montrer que $e^f \sim_a e^g \iff \lim_a (f - g) = 0$. A-t-on $f \sim_a g \implies e^f \sim_a e^g$?

EXERCICE 2 - Quotient de DLs

Déterminer les développements limités des fonctions suivantes :

1. $\frac{1}{1+x+x^2}$ à l'ordre 4 en 0
2. $\tan(x)$ à l'ordre 5 en 0
3. $\frac{\sin x - 1}{\cos x + 1}$ à l'ordre 2 en 0
4. $\frac{\ln(1+x)}{\sin x}$ à l'ordre 3 en 0.

EXERCICE 3 - Composition de DLs

Calculer les développements limités suivants :

1. $\ln\left(\frac{\sin x}{x}\right)$ à l'ordre 4 en 0
2. $\exp(\sin x)$ à l'ordre 4 en 0
3. $(\cos x)^{\sin x}$ à l'ordre 5 en 0
4. $x(\cosh x)^{\frac{1}{x}}$ à l'ordre 4 en 0.

EXERCICE 4 - Intégration de DLs

Calculer les développements limités suivants :

1. $\arccos x$ à l'ordre 5 en 0
2. $\int_0^x e^{t^2} dt$ à l'ordre 5 en 0.

EXERCICE 5 - DLs pas en 0!

Calculer les développements limités suivants :

1. $\frac{1}{x}$ à l'ordre 3 en 2
2. $\ln(x)$ à l'ordre 3 en 2
3. e^x à l'ordre 3 en 1
4. $\cos(x)$ à l'ordre 3 en $\frac{\pi}{3}$
5. \sqrt{x} à l'ordre 3 en 2

EXERCICE 6 - DL en l'infini

Calculer les développements limités suivants :

1. $\frac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{x}}$ à l'ordre 3 en $+\infty$
2. $\ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right) - \ln x$ à l'ordre 4 en $+\infty$

EXERCICE 7 - Astucieux!

Calculer, à l'ordre 100, le développement limité en 0 de $\ln\left(\sum_{k=0}^{99} \frac{x^k}{k!}\right)$.

EXERCICE 8 - Développement limité d'une fonction réciproque

Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $f(x) = x \exp(x^2)$.

1. Démontrer que f réalise une bijection de \mathbb{R} sur \mathbb{R} .
2. Justifier que f^{-1} admet un développement limité à l'ordre 4 en 0.
3. Donner ce développement limité.