COLLE 18 = DÉNOMBREMENT

Connaître son cours :

1. Montrer que toute partie de l'ensemble $[\![1,n]\!]$ pour $n \in \mathbb{N}^*$ est finie.
2. Soit $p,q \in \mathbb{N}^*$, montrer qu'il existe une injection de $[\![1,p]\!]$ dans $[\![1,q]\!]$ si, et seulement si, $p \leq q$.
3. Soit E et F deux ensembles finis. Alors, $E \cup F$ est fini et $|E \cup F| = |E| + |F| - |E \cap F|$.

Exercices :

Exercice 1. (*)

Combien les mots suivants possèdent-ils d'anagrammes ?

1. "ABRACADABRA". 2. "LIPSCHITZIENNE".

Exercice 2. (**) *(Nombres de Bell)*

Soit E_n un ensemble fini de cardinal $n \geq 1$. On appelle partition de E_n, tout ensemble de parties de E_n non vides, deux à deux disjointes, et dont la réunion est égale à E_n. On note B_n le nombre de partitions de E_n et on convient que $B_0 = 1$. Les $B_n, n \in \mathbb{N}$ sont appelés *nombres de Bell.*

1. Calculer B_1, B_2 et B_3

2. Etablir la relation, dite d'Aitken, $\forall n \in \mathbb{N}, B_{n+1} = \sum_{i=0}^{n} \begin{pmatrix} n \\ i \end{pmatrix} B_i$

3. Démontrer par récurrence forte que $\forall n \in \mathbb{N}, B_n = \sum_{i=0}^{+\infty} e^{-1} \frac{i^n}{i!}$

Exercice 3. (*)

On appelle diagonale d'un polygone convexe tout segment joignant deux de ses sommets non consécutifs. Si un polygone possède autant de diagonales que de côtés, combien possède-t-il de côtés ?

Exercice 4. (***) *(Nombres de Stirling de première espèce)*

Soit n et k deux entiers strictement positifs.

1. Montrer qu'il n'existe qu'un nombre fini de partitions de l'ensemble $\{1, \ldots, n\}$ en k parties. Dans la suite, on notera $S(n,k)$ le nombre de ces partitions. On pose de plus $S(0,0) = 1$ et $S(n,0) = S(0,k) = 0$.
2. Que vaut $S(n,k)$ pour $k > n$?
3. Que vaut $S(n,1)$?
4. Démontrer que $S(n,k) = S(n-1,k-1) + kS(n-1,k)$.
5. Rédiger une fonction récursive Python permettant de calculer $S(n,k)$.
