

# Examen n°0

01/09/2022 – durée : 3 heures

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les étudiants sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs. Les réponses doivent toutes être soigneusement justifiées. Les calculatrices sont interdites.

## Barème indicatif :

- Exercice 1 ..... 6 points
- Exercice 2 ..... 10 points
- Exercice 3 ..... 10 points
- Exercice 4 ..... 10 points
- Exercice 5 ..... 10 points
- Exercice 6 ..... 10 points
- Exercice 7 ..... 12 points
- Exercice 8 ..... 10 points
- Exercice 9 ..... 11 points
- Exercice 10 ..... 11 points

**Exercice 1.**

1. Écrire aussi simplement que possible les expressions suivantes.

(a) (\*)  $A = (2 + \sqrt{5})^2$

(b) (\*)  $B = (\sqrt{2\sqrt{3}})^4$

(c) (\*\*)  $C = \sqrt{11 + 6\sqrt{2}}$

2. (\*\*) Exprimer la quantité suivante sans racine carrée au dénominateur.

$$D = \frac{1}{1 + \sqrt{2} + \sqrt{3}}$$

**Exercice 2.**

(\*\*\*) Montrer que  $\sqrt{3}$  est un irrationnel. Généraliser.

**Exercice 3.**

Etudier la convergence des suites définies par :

1. (\*\*)  $u_n = \ln\left(\frac{n^n}{2^n}\right)$

2. (\*\*)  $v_n = \sqrt{n + \cos(n)} - \sqrt{n}$

3. (\*\*\*)  $w_n = \frac{\ln(1 + e^{-n})}{e^{-n}}$  (on pourra penser à un taux d'accroissement)

4. (\*\*\*)  $\forall n \in \mathbb{N}^*, t_n = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n \left\lfloor \frac{k^2}{n} \right\rfloor$

La partie entière d'un réel  $x$ , notée  $[x]$ , désigne le plus grand entier relatif plus petit ou égal à  $x$ .

**Exercice 4.**

On se propose de déterminer les fonctions  $f$  de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  deux fois dérivables sur  $\mathbb{R}$  et telles que :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x+y) + f(x-y) = 2(f(x) + f(y)).$$

Dans les questions 1. et 2. on suppose que  $f$  est une fonction solution.

1. (\*\*) Calculer  $f(0)$ . Montrer que  $f$  est paire.
2. (\*\*\*) Montrer que  $f''$  est constante.
3. (\*\*) Conclure

**Exercice 5.**

On pose, pour  $x$  réel :

$$B(x) = \sqrt{x + 2\sqrt{x-1}} + \sqrt{x - 2\sqrt{x-1}}$$

1. (\*) Résoudre dans  $\mathbb{R}$  l'inéquation :

$$x - 2\sqrt{x-1} \geq 0$$

2. (\*) Donner l'ensemble de définition de  $B$ .
3. (\*) Démontrer que pour tout  $x \in [1, +\infty[$ , on a :

$$(B(x))^2 = 2x + 2|x-2|$$

4. (\*\*) En déduire, sans le symbole valeur absolue et selon les valeurs de  $x$ , la valeur de  $B(x)$ .

**Exercice 6.**

(\*\*\*) Pour  $x \in [0, 1[$ , calculer

$$F(x) = \int_0^x \ln \left( \frac{1+t}{1-t} \right) dt.$$

Montrer que  $\lim_{x \rightarrow 1} F(x) = 2 \ln(2)$

**Exercice 7.**

Pour  $n \in \mathbb{N}$ ,  $f_n$  désigne la fonction de  $]0, \pi]$  dans  $\mathbb{R}$  définie par

$$\forall x \in ]0, \pi], \quad f_n(x) = \frac{\sin \left( \left( n + \frac{1}{2} \right) x \right)}{\sin \left( \frac{x}{2} \right)}$$

- (\*\*) En utilisant la définition de la dérivée, montrer que  $\lim_{u \rightarrow 0} \frac{\sin(u)}{u} = 1$
- (\*\*) En déduire que la fonction  $f_n$  admet une limite que l'on précisera en 0.  
Ceci permet de prolonger  $f_n$  en une fonction continue sur  $[0, \pi]$ , encore notée  $f_n$  et de poser

$$I_n = \int_0^\pi f_n(t) dt$$

- (\*\*\*) Si  $n \in \mathbb{N}$ , calculer  $I_{n+1} - I_n$ , puis  $I_n$ .

**Exercice 8.**

- (\*) On lance un dé non pipé. On répète 4 fois l'opération, les lancers successifs étant supposés indépendants. Quelle est la probabilité pour que l'on obtienne au moins un 6 ?
- (\*) On considère deux dés non pipés. Donner la probabilité qu'en 24 lancers, les dés amènent au moins un double 6. Est-elle supérieure à  $\frac{1}{2}$  ?
- Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . On considère  $n$  dés non pipés. On les jette  $4 \times 6^{n-1}$  fois.
  - (\*\*\*) Déterminer la probabilité  $p_n$  d'obtenir au moins une fois  $n$  six.
  - (\*\*\*) Déterminer la limite de la suite  $(p_n)_{n \geq 1}$ .

**Exercice 9.**

- (\*\*) Trouver les nombres complexes non nuls  $z$  tels que  $Z = z + \frac{1}{z}$  soit réel.
- (a) (\*) Soient  $z$  et  $z'$  deux nombres complexes. Montrer :

$$|z + z'|^2 + |z - z'|^2 = 2(|z|^2 + |z'|^2).$$

- (\*) Donner une interprétation géométrique de cette égalité en considérant un parallélogramme, les longueurs de ses côtés, les longueurs de ses diagonales.
- (\*) Soient  $A, B, C$  trois points non alignés du plan,  $I$  le milieu de  $[BC]$ . Déduire de (b) une expression de  $AI^2$  en fonction de  $AB^2$ ,  $BC^2$ ,  $CA^2$ .

**Exercice 10.**

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $E$  un ensemble de cardinal  $n$

- Soit  $B$  un sous-ensemble de  $E$  de cardinal  $r$  avec  $r$  un entier entre 0 et  $n$ . Montrer que le nombre de sous-ensembles  $A$  de  $E$  tel que  $A \subseteq B$  vaut  $2^r$
- En déduire que le nombre de couples  $(A, B)$  de sous-ensembles de  $E$  tels que  $A \subset B$  vaut  $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 2^k$
- Calculer cette somme et conclure.

**BONUS :** pouvait-on trouver ce résultat directement ?