TD 4 : Sommes et produits

Sommes et produits classiques :

Exemples de sommes et de produits

Exercice 1. (*)

Calculer les sommes suivantes pour $n \in \mathbb{N}$.

1. $\sum_{k=0}^{n} k(3k+1)$
2. $\sum_{k=0}^{n} \frac{2^{k-1}}{3^{k+1}}$
3. $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k k$
4. $\sum_{k=0}^{n} k(k+1)(k-1)$

Exercice 2. (*)

Simplifier les produits suivants :

1. $\prod_{k=1}^{n} \sqrt{k(k+1)}$
2. $\prod_{k=1}^{n} (-5)^{k^2-k}$

Exercice 3. (*)

Montrer en raisonnant par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$\sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}$$

Exercice 4. (*)

Calculer $\sum_{k=2}^{n-1} \frac{3^k}{2^{2k-1}}$ pour tout $n \in \mathbb{N},\ n \geq 3$

En déduire :

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=2}^{n-1} \frac{3^k}{2^{2k-1}}$$

Exercice 5. (*)

Soient $n \geq 1$ un entier et $a \in \mathbb{C}$. Calculer la somme et le produit des racines n-ièmes de a.

Exercice 6. (*)

Soit z un nombre complexe de module ρ, d'argument θ. Calculer

$$(z+\bar{z})(z^2+\bar{z}^2)\cdots(z^n+\bar{z}^n)$$

en fonction de ρ et de θ.

Exercice 7. (**)

Calculer le produit $\prod_{k=1}^{n} \frac{2k-1}{2k}$.

Exercice 8. (**)

1. Calculer les nombres suivants :
   - $1,1111... = \lim_{n\to+\infty} 1,\underbrace{111...1}_{n}$
   - $0,9999... = \lim_{n\to+\infty} 0,\underbrace{999...9}_{n}$
2. Calculer $\underbrace{1-1+1-...+(-1)^{n-1}}_{n}$, $n \in \mathbb{N}^*$.
3. Soient $n \in \mathbb{N}$ et $\theta \in \mathbb{R}$.
   Calculer $\sum_{k=0}^{n} \cos(k\theta)$ et $\sum_{k=0}^{n} \sin(k\theta)$.
4. Pour $x \in [0,1]$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on pose
   $$S_n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k}$$
   Déterminer $\lim_{n\to+\infty} S_n$.
5. On pose $u_0 = 1$ et, pour $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 2u_n - 3$.
   (a) Calculer la suite $(u_n - 3)_{n\in\mathbb{N}}$.
   (b) Calculer $\sum_{k=0}^{n} u_k$.

Exercice 9. (**)

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$. Calculer la somme $\sum_{k=0}^{n-1} \cos^k(x)\cos(kx)$.

Exercice 10. (*)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, calculer $\sum_{k=0}^{n} \sin^3(kx)$.

Exercice 11. (**)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, calculer $S_n = \sum_{k=n}^{3n} \min(k, 2n)$.

Exercice 12. (**)

Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ avec $b \neq 0$. Calculer

$$C = \sum_{k=0}^{n} \cosh(a+kb) \text{ et } S = \sum_{k=0}^{n} \sinh(a+kb)$$

Exercice 13. (***)

En utilisant la formule de la progression géométrique et la dérivation, calculer, pour x réel et n dans $\mathbb{N}^*$:

$$\sum_{k=0}^{n} kx^k$$

Pour $|x| < 1$, déterminer la limite de la somme précédente lorsque n tend vers $+\infty$.

Coefficients binomiaux, binôme de Newton

Exercice 14. (*)

1. Rappeler la formule du binôme de Newton et calculer $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$
2. Soit $n \geq 1$ un entier. Exprimer les sommes suivantes $S_1 = \binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \binom{n}{4} + \ldots$ et $S_2 = \binom{n}{1} + \binom{n}{3} + \binom{n}{5} + \ldots$ à l'aide du symbole $\sum$ et de la fonction partie entière.

   Vérifier que $S_1 = S_2 = 2^{n-1}$.

Exercice 15. (**)

Pour n dans $\mathbb{N}$, x dans $\mathbb{R}$, donner une expression simple de : $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{x^{k+1}}{k+1}$.

Exercice 16. (***)

Calculer $\sum_{k=0}^{n} k^2 \binom{n}{k}$.

Exercice 17. (**)

Donner des expressions simples de :

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k \cos(kx), \quad \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k \sin(kx).$$

Exercice 18. (***)

Calculer les sommes

$$\sum_{\substack{k=0 \\ k \equiv 0[3]}}^{n} \binom{n}{k}, \quad \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{2k} (-1)^k, \quad \sum_{k=0}^{n} \binom{2n+1}{2k+1} t^{2k+1}.$$

Exercice 19. (**)

Montrer que $\binom{n}{0}^2 + \binom{n}{1}^2 + \ldots + \binom{n}{n}^2 = \binom{2n}{n}$ (utiliser le polynôme $(1+x)^{2n}$).

Exercice 20. (**)

Calculer les sommes $\sum_{\substack{k=0 \\ k \equiv 0[4]}}^{n} \binom{n}{k}$

Sommes et produits télescopiques

Exercice 21. (*)

Calculer $\sum_{k=1}^{n} k \cdot k!$.

Exercice 22. (**)

1. (*) Calculer $\prod_{k=1}^{n} (1 + \frac{1}{k})$, $n \in \mathbb{N}^*$.
2. (***) Calculer $\prod_{k=1}^{n} \cos \frac{a}{2^k}$, $a \in]0, \pi[$, $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 23. (**)

Montrer que $\binom{p}{p} + \binom{p+1}{p} \ldots + \binom{n}{p} = \binom{n+1}{p+1}$ où $0 \leq p \leq n$. Donner un interprétation dans le triangle de Pascal ?

Exercice 24. (**)

1. Déterminer une suite (u_k) telle que, pour tout $k \geq 0$, on ait
$$u_{k+1} - u_k = (k+2)2^k.$$
2. En déduire $\sum_{k=0}^{n} (k+2)2^k$.

Exercice 25. (*)

1. Si n est dans $\mathbb{N}^*$, simplifier :
$$\sum_{k=1}^{n} \ln\left(1+\frac{1}{k}\right).$$
Quelle est la limite de cette expression lorsque n tend vers $+\infty$?
2. Si n est un entier $n \geq 2$, simplifier :
$$\sum_{k=2}^{n} \ln\left(1-\frac{1}{k^2}\right).$$
Quelle est la limite de cette expression lorsque n tend vers $+\infty$?

Exercice 26. (*)

Déterminer trois réels a, b, c tels que :

$$\forall x \in \mathbb{R}\backslash\{0,-1,-2\},\ \frac{1}{x(x+1)(x+2)} = \frac{a}{x}+\frac{b}{x+1}+\frac{c}{x+2}$$

Donner pour n dans $\mathbb{N}^*$, une expression simple de

$$U_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)}.$$

Donner la limite de $(U_n)_{n\geq 1}$ lorsque n tend vers $+\infty$?

Exercice 27. (*)

1. Pour $x \in \mathbb{R}$ étudier la quantité $x^3-(x-1)^3$ et retrouver l'expression simple de
$$\sum_{k=1}^{n} k^2.$$
2. Adapter cette méthode pour calculer :
$$\sum_{k=1}^{n} k^3.$$

Exercice 28. (*)

Calculer les sommes suivantes

1. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{k}{(k+1)!}$
2. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}}$

Exercice 29. (*)

1. Montrer pour $k \geq 2$ que : $\dfrac{1}{k^2} \leq \dfrac{1}{k-1} - \dfrac{1}{k}$
2. En déduire que la suite $\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}\right)_{n\geq 1}$ converge.

Exercice 30. (**)

Soit x un nombre réel non multiple entier de π. En remarquant que :

$$\forall y \in \mathbb{R},\ \sin(2y) = 2\sin(y)\cos(y)$$

simplifier, pour n dans $\mathbb{N}^*$, le produit :

$$P_n(x) = \prod_{k=1}^{n} \cos\left(\frac{x}{2^k}\right).$$

En utilisant, après l'avoir justifiée, la relation

$$\frac{\sin u}{u} \underset{u\to 0}{\longrightarrow} 1$$

donner la limite de $P_n(x)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice 31. (**)

Pour n dans $\mathbb{N}^*$, soit :

$$u_n = \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2}}}} \quad (n \text{ radicaux})$$

1. Montrer : $\quad \forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = 2\cos\left(\dfrac{\pi}{2^{n+1}}\right)$
2. Pour n dans $\mathbb{N}^*$, on pose :
$$v_n = \prod_{k=1}^{n} u_k.$$
Montrer que :
$$\frac{v_n}{2^n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{2}{\pi}$$
Cette formule a été découverte par Viète (1593), elle donne une expression de π comme « produit infini ».

Exercice 32. (***)

Soient $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de nombres complexes. On définit deux suites $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en posant :

$$A_n = \sum_{k=0}^{n} a_k, \qquad b_n = B_{n+1} - B_n.$$

1. Démontrer que $\sum_{k=0}^{n} a_k B_k = A_n B_n - \sum_{k=0}^{n-1} A_k b_k$.
2. En déduire la valeur de $\sum_{k=0}^{n} 2^k k$.

Sommes et produits doubles :

Exercice 33. (*)

Calculer les sommes doubles suivantes :

1. $\sum_{1 \leq i,j \leq n} ij$.
2. $\sum_{1 \leq i \leq j \leq n} \frac{i}{j}$.

Exercice 34. (*)

Pour $n \in \mathbb{N}$, on note

$$a_n = \sum_{k=1}^{n} k,\ b_n = \sum_{k=1}^{n} k^2 \text{ et } c_n = \sum_{k=1}^{n} k^3.$$

Pour cet exercice,
on admettra que $a_n = \dfrac{n(n+1)}{2}$, que
$b_n = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ et que $c_n = a_n^2$.

1. Calculer $\displaystyle\sum_{1 \leq i \leq j \leq n} ij$.
2. Calculer $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \min(i,j)$.

Exercice 35. (**)

Calculer de deux manières différentes la somme

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{i} 2^i$$

En déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i2^i$

Exercice 36. (**)

Calculer

$$\sum_{1 \leq i,j \leq n} \max(i,j)$$

Exercice 37. (**)

Calculer

$$\sum_{k=0}^{n} \sum_{l=0}^{n} 2^{2k-l}$$

Exercice 38. (**)

Montrer, pour tout entier $n \geq 2$,

$$\sum_{k=1}^{n-1} H_k = nH_n - n$$

Exercice 39. (***)

Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que $x \neq 0[2\pi]$ et $n \in \mathbb{N}^*$

1. Calculer et simplifier $D_n(x) = \displaystyle\sum_{k=-n}^{n} e^{ikx}$
2. Calculer et simplifier $F_n(x) = \dfrac{1}{n} \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} D_k(x)$

Exercice 40. (***)

1. Soit $I_n = \int_0^1 (1-x^2)^n \, dx$. Trouver une relation de récurrence liant I_n et I_{n+1} et en déduire I_n en fonction de n

   (faire une intégration par parties dans $I_n - I_{n+1}$).
2. Démontrer l'identité valable pour $n \geq 1$: $1 - \frac{\binom{n}{1}}{3} + \frac{\binom{n}{2}}{5} + \ldots + (-1)^n \frac{\binom{n}{n}}{2n+1} = \frac{2.4.....(2n)}{1.3...(2n+1)}$.

Exercice 41. (****)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $\omega = e^{\frac{2i\pi}{n}}$, on pose $Z = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \omega^{k^2}$.

Calculer $|Z|^2$
