Corrigé Mines d'Albi, Alès, Douai, Nantes 2000

Analyse

Partie I

1. Les fonctions sinh et cosh sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et cosh ne s'annulent pas sur $\mathbb{R}$ donc tanh est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc continue sur cet intervalle.

Pout tout réel x, $(\tanh)'(x) = \dfrac{\cosh^2(x) - \sinh^2(x)}{\cosh^2(x)} = \dfrac{1}{\cosh^2(x)} > 0$. tanh est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

De plus, pour tout x, $\tanh(x) = \dfrac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}}$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \tanh x = 1$ et par imparité $\lim\limits_{x\to-\infty} \tanh x = -1$.

tanh établit donc une bijection de $\mathbb{R}$ dans $I = \left] \lim\limits_{x\to-\infty} \tanh(x), \lim\limits_{x\to+\infty} \tanh(x) \right[=]-1, 1[$.

2. Le calcul précédent montre que pour tout réel x, $\tanh'(x) = 1 - \tanh^2(x)$.

3. Soit x dans I. Alors $-x$ appartient à I.

De plus, $\tanh(\operatorname{artanh}(-x)) = -x$ et $\tanh(-\operatorname{artanh}(x)) = -\tanh(\operatorname{artanh}(x)) = -x$ car tanh ext impaire.

Comme tanh est bijective donc injective sur $\mathbb{R}$, il en résulte que $\operatorname{artanh}(-x) = -\operatorname{artanh}(x)$ ce qui établit que artanh est impaire.

4. Soit y dans I et $x = \operatorname{artanh}(y)$. La fonction tanh est dérivable au point x et $\tanh'(x) = 1 - \tanh^2(x) \neq 0$. Donc artanh est dérivable en y et $\operatorname{artanh}'(y) = \dfrac{1}{\tanh'(x)} = \dfrac{1}{1 - \tanh^2(\operatorname{artanh}(y))} = \dfrac{1}{1 - y^2}$.

5. Une décompostion en éléments simples donne pour tout x de I, $\dfrac{1}{1 - x^2} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{x+1} - \dfrac{1}{x-1}\right)$. Par intégration, qu'il existe un réel C tel que pour tout x de I, $\operatorname{artanh}(x) = \dfrac{1}{2}\ln(x+1) - \dfrac{1}{2}\ln(1-x) + C$.

Or $\tanh(0) = 0$ donc $\operatorname{artanh}(0) = 0$ ce qui donne $C = 0$.

Pour tout x de I, $\operatorname{artanh}(x) = \dfrac{1}{2}\ln(x+1) - \dfrac{1}{2}\ln(1-x) = \dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$.

6. On fait un développement limité de la dérivée de artanh à l'ordre 4 en 0 :

On obtient : $\operatorname{artanh}'(x) \underset{0}{=} 1 + x^2 + x^4 + o(x^4)$.

Par intégration, puisque $\operatorname{artanh}(0) = 0$, $\operatorname{artanh}(x) \underset{0}{=} x + \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^5}{5} + o(x^5)$.

Partie II

7. La fonction $x \mapsto x$ est continue et ne s'annule pas sur $]0, 1[$ donc la solution générale de $xy' + 3y = 0$ est de la forme $x \mapsto Ce^{\Phi(x)}$ où Φ est une primitive de $x \mapsto -\dfrac{3}{x}$ sur $]0, 1[$. Prenons $\Phi : x \mapsto -3\ln x$.

La solution générale de $xy' + 3y = 0$ est de la forme $x \mapsto \dfrac{C}{x^3}$.

Cherchons une solution particulière y_0 de (E) de la forme $y_0(x) = \dfrac{z(x)}{x^3}$. y_0 est solution de (E) sur $]0, 1[$ si et seulement si pour tout x de $]0, 1[$, $x\dfrac{z'(x)}{x^3} - 3x\dfrac{z(x)}{x^4} + 3\dfrac{z(x)}{x^3} = \dfrac{1}{1 - x^2}$ ce qui équivaut à pour tout x de $]0, 1[$, $z'(x) = \dfrac{x^2}{1 - x^2} = \dfrac{1}{1 - x^2} - 1$. Prenons z définie par $z(x) = \operatorname{artanh}(x) - x$.

On obtient alors la solution générale de (E) de la forme :

$$x \mapsto \frac{\operatorname{artanh}(x) - x + C}{x^3}, \quad C \in \mathbb{R}$$

Partie III

8. Si il existe un réel C tel que pour tout réel x, $f(x) = C$, f étant solution du problème posé, alors C vérifie $C = \dfrac{2C}{1+C^2}$ ce qui équivaut à $C(C^2-1) = 0$ soit $C = 0$ ou $C = 1$ ou $C = -1$.

9. Si f est solution, $f(0)$ vérifie $f(0) = \dfrac{2f(0)}{1+f(0)^2}$ ce qui donne comme à la question précédente $f(0) = 0$ ou $f(0) = 1$ ou $f(0) = -1$.

10. Pour tout réel x, $1 - |f(x)| = 1 - \dfrac{2a}{1+a^2} = \dfrac{(1-a)^2}{1+a^2}$ où $a = \left|f\left(\dfrac{x}{2}\right)\right|$.

Ainsi pour tout réel x, $|f(x)| \leq 1$ soit $-1 \leq f(x) \leq 1$.

11. Supposons que f soit solution. Alors, pour tout réel x :

$$(-f)(2x) = -f(2x) = -\frac{2f(x)}{1+(f(x))^2} = \frac{2(-f(x))}{1+(-f(x))^2}$$

ce qui montre que $-f$ est aussi solution.

12. Pour tout réel x :

$$\begin{aligned}\frac{2\tanh(x)}{1+(\tanh(x))^2} &= \frac{2\sinh(x)\cosh(x)}{(\cosh(x))^2+(\sinh(x))^2} = \frac{2\sinh(x)\cosh(x)}{2(\cosh(x))^2-1} \\ &= \frac{(e^x+e^{-x})(e^x-e^{-x})}{(e^x+e^{-x})^2-2} = \frac{e^{2x}-e^{-2x}}{e^{2x}+e^{-2x}} = \tanh(2x)\end{aligned}$$

ce qui montre que tanh est solution du problème posé.

13. On a $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{x_0}{2^n} = 0$. Or f est dérivable donc continue en 0 donc $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = f(0) = 1$.

Il en résulte que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$.

14. Pour tout entier n, $u_n = f\left(2\dfrac{x_0}{2^{n+1}}\right) = \dfrac{2u_{n+1}}{1+u_{n+1}^2}$.

Comme pour tout n, $1 + u_{n+1}^2 > 0$, u_{n+1} et u_n ont toujours le même signe donc pour tout entier n, u_n a le signe de u_0. D'autre part pour tout entier n, $u_{n+1} - u_n = \dfrac{u_{n+1}(u_{n+1}^2) - 1}{1+u_{n+1}^2}$.

Puisque pour tout x, $f^2(x) \leq 1$, on en déduit que pour tout n, $u_{n+1}^2 - 1 \leq 0$ et que $(u_{n+1} - u_n)u_{n+1} \leq 0$. Ainsi si $u_0 \geq 0$ la suite u est décroissante et si $u_0 \leq 0$ la suite u est croissante.

15. Comme $f(x_0) \neq f(0)$, u_0 appartient à $[-1, 1[$. Distinguons deux cas :

Si u_0 est négatif, alors tous les termes de la suite u sont négatifs et la suite u ne peut converger vers 1.

Si u_0 appartient à $[0, 1[$, la suite u est décroissante et on a $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n \leq u_0 < 1$ ce qui conduit à $1 < 1$. Contradiction.

16. Si $f(0) = -1$, alors $g = -f$ est une solution du problème posé qui vérifie $g(0) = 1$ ce qui est impossible d'après la question précédente.

17. On déduit des questions précédentes qu'il n'existe pas de fonctions non constantes solution du problème posé qui vérifie $f(0) = 1$ ou $f(0) = -1$.

18. Supposons qu'il existe un réel x_0 tel que $f(x_0) = 1$.

Soit v la suite définie par son terme général $v_n = f\left(\dfrac{x_0}{2^n}\right)$.

On démontre comme à la question **13.** que v converge vers $f(0) = 0$.

Le calcul effectué à la question **14.** montre que la suite v est constante égale à $v_0 = 1$ et ne peut donc pas converger vers 0.

De manière analogue, il est impossible qu'il existe un réel x_0 tel que $f(x_0) = -1$. Ainsi, pour tout réel x, $-1 < f(x) < 1$.

19. En utilisant l'expression de artanh trouvée au **5.**, on a pour tout réel x :

$$g(2x) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+f(2x)}{1-f(2x)}\right) = \frac{1}{2}\ln\left(\left(\frac{1+f(x)}{1-f(x)}\right)^2\right) = 2\text{artanh}(f(x)) = 2g(x)$$

20. La fonction f est dérivable en 0. La fonction artanh est dérivable sur $]-1,1[$ donc en $f(0)=0$. Par composition, la fonction g est dérivable en 0.

21. Soit x réel non nul. On a $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{x}{2^n} = 0$. Or g est dérivable en 0 et $g(0)=0$ donc $\lim\limits_{u\to 0} \frac{g(u)}{u} = g'(0)$.

Il en résulte que $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = g'(0)$.

22. Pour tout entier n, $v_n = \dfrac{g\left(2\frac{x}{2^{n+1}}\right)}{2\frac{x}{2^{n+1}}} = \dfrac{g\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right)}{\frac{x}{2^{n+1}}} = v_{n+1}$ car $g(2b) = 2g(b)$ d'après la question **19.**. La suite v est donc constante égale à $v_0 = \dfrac{g(x)}{x}$. Or elle converge vers $g'(0)$.

Ainsi pour tout réel x non nul ,$g(x) = g'(0)x$ relation qui est encore valable pour $x=0$: g est donc linéaire.

23. Si f est solution du problème posé :

- Si $f(0)=1$ d'après la question **17.**, f est constante égale à 1.
- Si $f(0)=-1$ d'après la question **17.**, f est constante égale à -1.
- Si $f(0)=0$ d'après la question **22.**, il existe un réel c tel que pour tout réel x, $\text{artanh}(f(x)) = cx$ ce qui donne $f(x) = \tanh(cx)$. La question **12.** assure que les fonctions de ce type sont bien solutions.

Algèbre

Partie I

1. D'après la formule du binôme de Newton, on a $A = \sum_{k=0}^{2n} C_{2n}^k X^k - 1 = \sum_{k=1}^{2n} C_{2n}^k X^k = XB$ avec $B = \sum_{k=1}^{2n} C_{2n}^k X^{k-1}$. Le polynôme B est de degré $2n-1$, son coefficient dominant est $C_{2n}^{2n} = 1$ et son terme constant b_0 vaut $C_{2n}^1 = 2n$.

2. z est racine de A si et seulement si $(z+1)^{2n} = 1$ ce qui équivaut à $z + 1 = \exp\left(\frac{2ik\pi}{2n}\right)$ où k est un entier compris entre 1 et $2n-1$.

Donc les racines de A sont $z_0 = 0$ et $z_k = \exp\left(\frac{2ik\pi}{2n}\right) - 1$ avec k est un entier compris entre 1 et $2n-1$.

Remarquons que pour tout entier k compris entre 1et $2n-1$:

$$z_k = \exp\left(\frac{ik\pi}{2n}\right)\left(\exp\left(\frac{ik\pi}{2n}\right) - \exp\left(-\frac{ik\pi}{2n}\right)\right) = 2i\sin\left(\frac{k\pi}{2n}\right)\exp\left(\frac{ik\pi}{2n}\right)$$

3. Faisons dans P_n le changement d'indice $l = 2n - k$. Alors :

$$P_n = \prod_{l=n+1}^{2n-1} \sin\left(\frac{(2n-l)\pi}{2n}\right) = \prod_{l=n+1}^{2n-1} \sin\left(\pi - \frac{l\pi}{2n}\right) = \prod_{l=n+1}^{2n-1} \sin\left(\frac{l\pi}{2n}\right)$$

car $\sin(\pi - x) = \sin x$.

On en déduit que $Q_n = \prod_{k=1}^{2n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{2n}\right) = \prod_{k=1}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{2n}\right) \times \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \times \prod_{k=n+1}^{2n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{2n}\right) = P_n^2$.

De plus, pour tout entier k compris entre 1 et $2n-1$, $\frac{k\pi}{2n}$ appartient à $[0,\pi]$ donc $\sin\left(\frac{k\pi}{2n}\right) \geq 0$ ce qui implique que P_n et Q_n sont positifs. Par conséquent, $P_n = \sqrt{Q_n}$.

4. $\prod_{k=1}^{2n-1} z_k$ est le produit des racines du polynôme B. D'après les relations coefficients racines, ce produit vaut $(-1)^{2n-1}b_0$. Donc $\prod_{k=1}^{2n-1} z_k = -2n$. D'autre part, d'après l'expression des z_k donnée au **2.** :

$$\begin{aligned}\prod_{k=1}^{2n-1} z_k &= (2i)^{2n-1} \times Q_n \prod_{k=1}^{2n-1} \exp\left(\frac{ik\pi}{2n}\right) = \frac{2^{2n-1}(-1)^n Q_n}{i} \exp\left(\frac{i\pi}{2n}\sum_{k=1}^{2n-1} k\right) \\ &= \frac{2^{2n-1}(-1)^n Q_n}{i} \exp\left(i\left(n\pi - \frac{\pi}{2}\right)\right) = -2^{2n-1} Q_n\end{aligned}$$

En égalant les deux résultats, on trouve $Q_n = \frac{4n}{2^{2n}}$ et $P_n = \sqrt{Q_n} = \frac{\sqrt{n}}{2^{n-1}}$.

5. La fraction $F = \frac{1}{A}$ admet $z_0, \ldots, z_{2n-1}$ comme pôles simples.

On a donc $F = \sum_{k=0}^{2n-1} \frac{\alpha_k}{X - z_k}$ avec $\alpha_k = \frac{1}{A'(x_k)}$.

Or $A'(z_k) = 2n(z_k+1)^{2n-1} = 2n\frac{(z_k+1)^{2n}}{z_k+1} = 2n\frac{1}{z_k+1}$ car z_k est racine de A.

Finalement, $F = \frac{1}{2n}\sum_{k=0}^{2n-1} \frac{1+z_k}{X - z_k}$.

Partie II

6. Soit $f = k\mathrm{Id}_E$ une homothétie vectorielle de rapport k où k est un nombre complexe.

On a $(f + \mathrm{Id}_E)^{2n} - \mathrm{Id}_E = A(k)\mathrm{Id}_E$.

Donc f est solution de l'équation proposée si et seulement si k est racine de A.

7. En utilisant le binôme de Newton, on a $2^n = \displaystyle\sum_{k=0}^{2n} C_{2n}^k$ et $0 = \displaystyle\sum_{k=0}^{2n} C_{2n}^k(-1)^k$.

Or tout entier k compris entre 0 et $2n$ est soit de la forme $2l$ où l est un entier compris entre 0 et n soit de la forme $2l+1$ où l est un entier compris entre 0 et $n-1$. En séparant dans les deux sommes précédentes les entiers pairs des entiers impairs, on a $2^n = S + S'$ et $0 = S - S'$, ce qui donne $S = S' = 2^{n-1}$.

8. Soit s une symétrie. s et Id_E commutent dans $\mathcal{L}(E)$ donc $(s + \mathrm{Id}_E)^{2n} = \displaystyle\sum_{k=0}^{2n} C_{2n}^k s^k$.

Or $s^k = \mathrm{Id}_E$ si k est pair et $s^k = s$ si k est impair car $s \circ s = \mathrm{Id}_E$.

On obtient $(s + \mathrm{Id}_E)^{2n} - \mathrm{Id}_E = (S-1)\mathrm{Id}_E + S's = (2^{n-1}-1)\mathrm{Id}_E + 2^{n-1}s$.

Ainsi si s est une symétrie solution du problème posé $s = \dfrac{2^{n-1}-1}{2^{n-1}}\mathrm{Id}_E$ qui n'est pas une symétrie.

Il n'y a donc pas de symétrie solution du problème posé.