

CHAPITRE 3 : SOMME ET PRODUITS

Exercice 3.1 (*) Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \{-i\}$
Montrer que

$$\left| \frac{1+zi}{1-zi} \right| = 1 \iff z \in \mathbb{R}$$

Exercice 3.2 (*) Résoudre les équations suivantes :

- $z^n = -1$
- $(z-i)^n - (z+i)^n = 0$
- $\left(\frac{z+1}{z-1} \right)^n = e^{in\theta}$
- $\frac{\left(\frac{z+1}{z-1} \right)^n}{2 \cos(n\theta)} + \frac{\left(\frac{z-1}{z+1} \right)^n}{2 \cos(n\theta)} =$

Exercice 3. (*)

- Que vaut $1 + e^{\frac{2i\pi}{5}} + e^{\frac{4i\pi}{5}} + e^{\frac{6i\pi}{5}} + e^{\frac{8i\pi}{5}}$? En déduire la valeur de $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) + \cos\left(\frac{3\pi}{5}\right)$

2. Calculer $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) \cos\left(\frac{3\pi}{5}\right)$

3. En déduire la valeur de $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$

Exercice 3. (**) Soit $\omega = e^{\frac{2i\pi}{7}}$
Calculer les nombres

$$A = \omega + \omega^2 + \omega^4 \text{ et } B = \omega^3 + \omega^5 + \omega^6$$

On pourra calculer $A+B$ et AB

Majorations

Exercice 3. (*) Résoudre l'équation $\Re(z^2) = \Im(z^3)$

Exercice 3. (*) Résoudre l'équation $1 + \bar{z} = |z|$

Coefficients binomiaux, binôme de Newton

Exercice 3. (**) Exercice 3.20
() Soit $z_1, \dots, z_n \in \mathbb{C}$ et $M = \max\{|\epsilon_1 z_1| + |\epsilon_2 z_2| + \dots + |\epsilon_n z_n|, (\epsilon_1, \dots, \epsilon_n) \in \{1, -1\}^n\}$

$\{1\}^n$ Montrer que $|z_1| + |z_2| + \dots + |z_n| \leq 2M$

Exercice 3. (**) Calculer $\sum_{i=0}^n \frac{1}{(k+1)!(n-k)!}$

Changement d'indice, inter-version de sommes

Exercice 3. (*) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ Calculer $\sum_{k=0}^n \sin^3(kx)$

Exercice 3. (**) Calculer de deux manières différentes la somme

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^i 2^i$$

En déduire la valeur de $\sum_{i=1}^n i 2^i$

Exercice 3. (**) Calculer

$$\sum_{1 \leq i, j \leq n} \max(i, j)$$

Exercice 3. (***) Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que $x \neq 0[2\pi]$ et $n \in \mathbb{N}^*$

1. Calculer et simplifier $D_n(x) = \sum_{k=-n}^n e^{ikx}$

2. Calculer et simplifier $F_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} D_k(x)$

Exercice 3. (**) Calculer

$$\sum_{k=0}^n \sum_{l=0}^n 2^{2k-l}$$

Exercice 3. (****) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $\omega = e^{\frac{2i\pi}{n}}$, on pose $Z = \sum_{k=0}^n \omega^{k^2}$.
Calculer $|Z|^2$