COLLE 21 = SÉRIES NUMÉRIQUES ET VARIABLES ALÉATOIRES

Séries numériques :

Exercice 1.

Donner la nature de la série de terme général :

1. $\ln\left(\frac{n^2+n+1}{n^2+n-1}\right)$
2. $\frac{1}{n+(-1)^n\sqrt{n}}$
3. $\left(\cos\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{e}}$
4. $\frac{n^2}{(n-1)!}$
5. $\frac{2n^3-3n^2+1}{(n+3)!}$
6. $\frac{1}{\sqrt{n-1}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} - \frac{2}{\sqrt{n}}$

Exercice 2.

Déterminer un équivalent simple de $\sum_{k=1}^{n} \sqrt{k}$ quand n tend vers l'infini.

Exercice 3.

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Donner la nature de la série de terme général $u_n = \frac{1+(-1)^n n^\alpha}{n^{2\alpha}}$, $n \geqslant 1$.

Exercice 4.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs. Montrer que les séries de termes généraux u_n, $\frac{u_n}{1+u_n}$, $\ln(1+u_n)$ et $\int_0^{u_n} \frac{dx}{1+x^e}$ sont de mêmes natures.

Exercice 5.

Trouver un développement limité à l'ordre 3 quand n tend vers l'infini de $\left(e - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\right) \times (n+1)!$.

Exercice 6.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante de nombres réels strictement positifs telle que la série de terme général u_n converge.

Montrer que $u_n \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{n}\right)$

Trouver un exemple de suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de réels strictement positifs telle que la série de terme général u_n converge mais telle que la suite de terme général nu_n ne tende pas vers 0.

Exercice 7.

Calculer les sommes des séries suivantes après avoir vérifié leur convergence.

1) $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n+1}{3^n}$ **2)** $\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{2n-1}{n^3-4n}$

3) $\sum_{n=2}^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{n}\right)$

Exercice 8.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite positive telle que la série de terme général u_n converge. Etudier la nature de la série de terme général $\frac{\sqrt{u_n}}{n}$.

Exercice 9.

Déterminer un équivalent simple de $\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$ quand n tend vers l'infini.

Variables aléatoires :

Exercice 10.

Une entreprise souhaite recrute un cadre. n personnes se présentent pour le poste. Chacun d'entre eux passe à tour de rôle un test, et le premier qui réussit le test est engagé. La probabilité de réussir le test est $p \in]0,1[$. On pose également $q = 1-p$. On définit la variable aléatoire X par $X = k$ si le k-ième candidat qui réussit le test est engagé, et $X = n+1$ si personne n'est engagé.

1. Déterminer la loi de X.
2. En dérivant la fonction $x \mapsto \sum_{k=0}^{n} x^k$
   En déduire la valeur de $\sum_{k=1}^{n} kx^{k-1}$ pour $x \neq 1$.
3. En déduire l'espérance de X.
4. Quelle est la valeur minimale de p pour avoir plus d'une chance sur deux de recruter l'un des candidats ?

Exercice 11.

On lance n fois une pièce parfaitement équilibrée. Quelle est la probabilité d'obtenir strictement plus de piles que de faces.

Exercice 12.

Soit X, Y deux variables aléatoires indépendantes suivant la loi uniforme sur $\{1, ..., n\}$.

1. Déterminer $P(X = Y)$.
2. Déterminer $P(X \geq Y)$.
3. Déterminer la loi de $X + Y$.

Exercice 13.

On jette 3600 fois un dé équilibré. Minorer la probabilité que le nombre d'apparitions du numéro 1 soit compris entre 480 et 720.
