EXERCICE 2.

1 Partie I

1. Soit h la fonction qui, à tout réel strictement positif x, associe : $\text{Arctan}(x) + \text{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right)$.

Montrer que la fonction h est constante sur $]0, +\infty[$ (on précisera la valeur prise par h sur $]0, +\infty[$).

2. (a) Pour tout réel t de $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, exprimer $\cos(t)$ en fonction de $\cos\left(\frac{t}{2}\right)$.

(b) Pour tout réel t de $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, comparer $\frac{1}{1+\tan^2\left(\frac{t}{2}\right)}$ et $\cos^2\left(\frac{t}{2}\right)$.

(c) Pour tout réel t de $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, on pose:

$$u = \tan\left(\frac{t}{2}\right)$$

Exprimer $\cos(t)$ en fonction de u.

2 Partie II

Pour tout réel x de $]-1, 1[$, on pose : $F(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{1 - x\cos(t)}$.

3. Que vaut $F(0)$?

4. A l'aide du changement de variable $u = \tan\left(\frac{t}{2}\right)$, montrer que, pour tout réel x de $]-1, 1[$:

$$F(x) = \frac{2}{\sqrt{1-x^2}} \text{Arctan} \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$$

Indication: on pensera à utiliser la première partie.

5. En déduire, pour tout réel x de $]-1, 1[$, une relation entre $F(x)$ et $F(-x)$.

6. En déduire que F est dérivable sur] - 1,1 [et démontrer que pour tout réel x de$]-1, 1[$:

$$\left(1-x^2\right)F'(x)=xF(x)+1$$

7. (a) Donner la solution générale sur] - 1,1[de l'équation différentielle homogène :

$$(E_0) \quad \left(1-x^2\right)y'-xy=0$$

(b) A l'aide de la méthode de variation de la constante, donner la solution générale sur $]-1,1[$ de l'équation différentielle :

$$\text{(E)} \quad \left(1-x^2\right)y'-xy=1$$

(c) Donner les solutions respectives des problèmes de Cauchy :

$$(P_0) \quad \begin{cases} \left(1-x^2\right)y'-xy=1 \\ y(0)=0 \end{cases}$$

et

$$(P_1) \quad \begin{cases} \left(1-x^2\right)y'-xy=1 \\ y(0)=\frac{\pi}{2} \end{cases}$$

(d) Pour tout réel x de $]-1,1[$, déduire de la résolution de (P_1) une expression simplifiée de $F(x)$ avec la fonction Arcsin.

8. On admet que F est dérivable sur $]-1,1[$ avec pour tout $x\in]-1,1\Big[: F'(x)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos(t)}{(1-x\cos(t))^2}dt$.

En déduire la valeur de $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos(t)-x}{(1-x\cos(t))^2}dt$ pour tout réel x de $]-1,1[$.