Exercice 1 - Trouver une base orthonormale

Déterminer une base orthonormale de $\mathbb{R}_2[X]$ muni du produit scalaire

$$\langle P,Q\rangle = \int_{-1}^{1} P(t)Q(t)dt.$$

Exercice 2 - Projection dans un espace de matrices

Soit $E=\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ que l'on munit du produit scalaire

$$\langle M,N\rangle = \mathrm{Tr}(M^T N).$$

On pose $F=\left\{\begin{pmatrix} a & b\\ -b & a\end{pmatrix};\ (a,b)\in\mathbb{R}^2\right\}$.

1. Déterminer une base orthonormée de $F^\perp$.
2. Calculer la projection de $J=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}$ sur $F^\perp$.
3. Calculer la distance de J à F.

Exercice 3 - Méthode des moindres carrés

Soit n et p deux entiers naturels avec $p\leq n$. On munit $\mathbb{R}^n$ du produit scalaire canonique et on identifie $\mathbb{R}^n$ avec $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. On considère une matrice $A\in\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ de rang p et $B\in\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

1. Démontrer qu'il existe une unique matrice X_0 de $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ telle que
$$\|AX_0-B\|=\inf\{\|AX-B\|;\ X\in\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})\}.$$
2. Montrer que X_0 est l'unique solution de
$$A^TAX=A^TB.$$
3. Application : déterminer
$$\inf\{(x+y-1)^2+(x-y)^2+(2x+y+2)^2;\ (x,y)\in\mathbb{R}^2\}.$$

Cette feuille d'exercices a été conçue à l'aide du site https://www.bibmath.net