Examen n°4

(Temps : 4 heures)

1. La présentation, la lisibilité, l'orthographe, **la qualité de la rédaction et la précision des raisonnements** entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Autrement dit, toute rédaction "fumeuse" ou toute justification bancale n'apportera qu'une faible quantité de points.
2. Les étudiants sont invités é encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs. **Les réponses doivent toutes étre soigneusement justifiées**
3. Les calculatrices sont interdites.

Exercice 1. 1. *Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ continue. On suppose que $x \mapsto \frac{f(x)}{x}$ admet une limite finie $l < 1$ en $+\infty$. Démontrer que f admet un point fixe*

2. *On dit qu'une matrice $A = (a_{i,j})$ est **stochastique** si :*
   - $a_{i,j} \geq 0 \ \forall \ (i,j) \in [|1,n|]^2$
   - $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} = 1 \ \forall \ i \in [|1,n|]$

   Montrer que le produit de deux matrices stochastiques est stochastique.

3. *Pour tout vecteur du plan fixé $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$, on considère la suite définie par récurrence :*

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$$

   (a) *En partant de $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, représenter les 8 premiers termes de la suite.*

   (b) *Cette suite est elle convergente ?*

Exercice 2. *(Fonctions continues au sens de Césaro)*
On a vu en cours que dire que f est continue sur $\mathbb{R}$ revient à dire que pour toute suite (x_n), pour tout $a \in \mathbb{R}$:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \implies \lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(a)$$

(caractérisation séquentielle de la continuité)

On va étudier une réciproque avec une hypothèse légèrement différente dans cet exercice et montrer que les seules fonctions qui la vérifient sont beaucoup plus restreintes que les fonctions continues sur $\mathbb{R}$!

*Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$. On dit que f est **continue au sens de Cesaro** en a si pour toute suite (x_n) :*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_1 + ... + x_n}{n} = a \implies \lim_{n\to\infty} \frac{f(x_1) + ... + f(x_n)}{n} = f(a)$$

On veut déterminer toutes les fonctions continue au sens de Cesaro sur $\mathbb{R}$: on raisonne par analyse-synthèse.

1. *Soit $a \in \mathbb{R}$.*

   (a) *Montrer que f est continue au sens de Cesaro revient à dire $f - a$ l'est aussi.*

   (b) *Montrer qu'on peut alors supposer que $f(0) = 0$*

2. *On va maintenant utiliser une suite particulière pour se ramener à une équation fonctionnelle sur f qu'on sait résoudre.*

   (a) *Montrer que si f est continue au sens de Cesaro sur $\mathbb{R}$, alors :*

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{f(x) + f(y)}{2}$$

   Indication : penser à une suite sympa

   (b) *En supposant $f(0) = 0$, montrer que $f\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{f(x)}{2}$, puis que $f(x+y) = f(x) + f(y)$*

3. (a) *Montrer que $\forall r \in \mathbb{Q}$, $f(rx) = rf(x)$.*

   (b) *Redémontrer que pour tout réel x, il existe une suite $(x_n) \in \mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$ tel que $\lim_{n\to\infty} x_n = x$*

   (c) *En déduire que $\forall r \in \mathbb{R}$, $f(rx) = rf(x)$*

4. *Conclure*

Exercice 3. ***(Les puissances d'une matrice triangulaire supérieure dont les coefficients diagonaux sont de module complexe inférieur à 1 tendent vers 0)***
L'objectif de l'exercice est de montrer que les puissances d'une matrice triangulaire supérieure à coefficients complexes de module strictement inférieurs à 1 tendent vers 0 en l'infini.
Une première question intéressante à se poser : que cela signifie t-il qu'une suite de matrices tend vers 0 ? On a défini la convergence pour une suite de réels ou à la rigueur de complexes au chapitre 7, mais jamais pour une suite de matrices.
Ici, on dira que la suite de matrices tend vers 0 *si et seulement si la suite des coefficients tendent tous vers 0 en l'infini.*
Autrement dit, si $T = (t_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$ *avec* $t_{i,j} = 0$ *pour* $i > j$. *et* $|t_{i,i}| < 1$ *pour tout* $i \in [|1, n|]$, $\lim\limits_{p\to\infty} T^p = 0$.

Notation : *on notera* $(t_{i,j}^{(p)})_{1\leq i,j\leq n}$ *les coefficients de la matrice* T^p. *On va montrer que tous les coefficients tendent vers 0, en procédant par récurrence selon la "distance" à la diagonale. Attention à ne pas confondre avec* $t_{i,i}^n$

Les questions 2 et 3 traite le cas des coefficients diagonaux et ceux au-dessus de la diagonale (initialisation). La question 4 correspond à l'hérédité.

1. ***Préliminaires***
   (a) *Soit* $T = (t_{i,j})$ *et* $S = (s_{i,j})$ *deux matrices triangulaires supérieures. Montrer que* TS *est triangulaire supérieure. En déduire que* T^k *est triangulaire supérieure.*
2. ***Coefficients diagonaux : les*** $t_{i,i}^{(p)}$
   Montrer que $\lim\limits_{n\to\infty} t_{i,i}^{(n)} = 0$
3. ***Coefficients juste au-dessus de la diagonale :***
   (a) *Calculer* $t_{i,i+1}^{(2)}$, *puis montrer que :*
   $$t_{i,i+1}^{(p+1)} = t_{i,i+1}^{(p)} t_{i,i} + t_{i+1,i+1}^{p} t_{i,i+1}$$
   (b) *Soit* $(u_n)_{n\geq 1}$ *une suite récurrente définie par :* $u_{n+1} = au_n + b_n$ *avec* $a \in \mathbb{R}$ *et* (b_n) *une suite réelle. Montrer que*
   $$u_n = u_1 a^{n-1} + \sum_{k=1}^{n-1} b_k a^{n-1-k}$$
   pour $n \geq 1$
   (c) *Trouver une expression simplifiée de* $t_{i,i+1}^{(p)}$ *en utilisant la formule précédente, puis montrer que cette suite tend vers* 0
4. ***Cas général :*** *Soit* $k \in [|1, n-1|]$. *On suppose que* $\lim\limits_{n\to\infty} t_{i,i+l}^{(p)} = 0$ *pour tout* $0 \leq l \leq k-1$ $i \in [|1, n-l|]$, . *On veut montrer que* $\lim\limits_{n\to\infty} t_{i,i+k}^{(p)} = 0$ *pour* $i \in [|1, n-k|]$,
   (a) *Montrer*
   (b) *Soit* $x \in]-1, 1[$
      i. *Montrer que pour tout* $l \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^{l} |x|^k \leq \dfrac{1}{1-|x|}$
      ii. *Soit* (u_n) *une suite qui tend vers* 0. *Montrer que la suite* (w_n) *définie par :*
      $$\forall n \in \mathbb{N}, w_n = \sum_{k=0}^{n} u_k x^{n-k}$$
      tend vers 0
   (c) *En utilisant la question 3(b), les questions 4(a) et 4(b), conclure que* $\lim\limits_{p\to\infty} t_{i,i+l}^{(p)} = 0$.

5. *Conclure*

Exercice 4. ***Opérateurs à noyau*** *On étudie dans cet exercice une propriété des opérateurs à noyaux. Ca sert notamment en machine learning pour approximer des fonctions de décision. Vous pouvez taper "Méthodes à noyau" sur Google (après le DS évidemment!) Soient* $K \in \mathcal{C}^0\left([0,1]^2, \mathbf{R}^{+^*}\right)$, f *et* g *dans* $\mathcal{C}^0\left([0,1], \mathbf{R}^{+^*}\right)$ *vérifiant, pour tout* x *de* $[0,1]$: $\int_0^1 K(x,y)f(y)dy = g(x)$, $\int_0^1 K(x,y)g(y)dy = f(x)$. *L'objectif du problème est de montrer que* $f = g$
(Remarque : il y a ci-dessus une fonction continue à 2 variables, ce qu'on a pas encore vu en cours. Pour ce problème, vous pouvez simplement considérer que la fonction est continue comme fonction de x *à* y *fixé et continue comme fonction de* y *à* x *fixé).*

On note, si $h \in \mathcal{C}^0([0,1], \mathbf{R})$:

$$T : h \mapsto \left(T(h) : x \in [0,1] \quad \mapsto \quad T(h)(x) = \int_0^1 K(x,y)h(y)dy\right)$$

T *associe donc à une fonction continue* h *une fonction* $T(h)$ *dont on peut montrer qu'elle est continue. On a donc* $T(f) = g$ *et* $T(g) = f$.

1. ***Préliminaires :***
   (a) *Montrer que si* h_1 *et* $h_2 \in \mathcal{C}^0\left([0,1], \mathbf{R}^{+^*}\right)$, *on a* $T(h_1 + \lambda h_2) = T(h_1) + \lambda T(h_2)$ *(on dit que* T *est linéaire, on reverra ça pour l'algèbre linéaire)*

   (b) *L'objectif de cette question est de montrer que* T *est un opérateur strictement positif, autrement dit que si* $h \geq 0$, $T(h) > 0$
      i. *Montrer que si* $h \in \mathcal{C}^0([0,1], \mathbf{R}^+)$, $h \neq 0$, *il existe un intervalle* A *sur lequel* $h > 0$
      ii. *Conclure*
      Indication : pour une fonction f *positive,* A *un intervalle de* $[0,1]$, *on a* $\displaystyle\int_0^1 f(y)dy \geq \int_A f(y)dy$

   L'objectif des questions 2 et 3 est de se ramener à une fonction positive et de montrer une contradiction avec le caractère strictement positif de $\boldsymbol{T}$.

2. *Montrer qu'il existe* $r > 0$ *et* $x_0 \in [0,1]$ *tel que* $f - rg \geq 0$ *et* $f(x_0) - rg(x_0) = 0$.
   Indication : on pourra appliquer le théorème des bornes atteintes (le TBA...) à $\dfrac{f}{g}$.

3. *Dans cette question, on suppose par l'absurde que* $f - rg$ *n'est pas identiquement nulle*
   (a) *Montrer que si* $x \in [0,1]$, $T(f - rg)(x) > 0$ *puis* $T^2(f - rg)(x) > 0$ ($T^2 = T \circ T$)
   (b) *En déduire enfin que* $f - rg > 0$ *et conclure à une absurdité*

4. *On a donc montré que* $f = rg$. *Montrer que* $r^2 = 1$, *puis que* $r = 1$ *Conclure que* $f = g$