**Exercice 1** - Pour s'échauffer...

1. Calculer le déterminant suivant :
$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}.$$

2. Soit $E$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^2 = -Id_E$. Que dire de la dimension de $E$?

**Exercice 2** - Déterminant et matrice antisymétrique

Soit $A \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$ une matrice antisymétrique et soit $J \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont égaux à 1. Démontrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\det(A + xJ) = \det(A)$.

**Exercice 3** - Avec des coefficients binomiaux

Soient $n \geq 1$, $p \geq 0$. Calculer le déterminant suivant :

$$\begin{vmatrix} \binom{n}{0} & \binom{n}{1} & \dots & \binom{n}{p} \\ \binom{n+1}{0} & \binom{n+1}{1} & \dots & \binom{n+1}{p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \binom{n+p}{0} & \binom{n+p}{1} & \dots & \binom{n+p}{p} \end{vmatrix}.$$

**Exercice 4** - Sur des polynômes

Soit $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_n[X])$. Calculer $\det(u)$ dans chacun des cas suivants :

1. $u(P) = P + P'$;
2. $u(P) = P(X+1) - P(X)$;
3. $u(P) = XP' + P(1)$.

**Exercice 5** - Inversibilité dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que $M$ soit inversible et que $M^{-1}$ soit dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$.

**Exercice 6** - Rang de la comatrice et applications

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Discuter le rang de $\operatorname{comat} A$ en fonction du rang de $A$.
2. Résoudre, pour $n \geq 3$, l'équation $\operatorname{comat} A = A$.

**Exercice 7** - Polynômes

Soient $(z_0, \dots, z_n)$ des nombres complexes deux à deux distincts. Montrer que la famille

$$\big((X - z_0)^n, (X - z_1)^n, \dots, (X - z_n)^n\big)$$

est une base de $\mathbb{C}_n[X]$.

EXERCICE 8 - Similarité

Soit $A, B \in M_n(\mathbb{R})$. On suppose que $A$ et $B$ sont semblables sur $\mathbb{C}$, ie qu'il existe $P \in Gl_n(\mathbb{C})$ tel que $A = PBP^{-1}$. Montrer que $A$ et $B$ sont semblables sur $\mathbb{R}$.

EXERCICE 9 - Densité des matrices inversibles

Soit $A$ une matrice carrée d'ordre $n$ à coefficients complexes. Montrer :

$$\exists \alpha > 0,\ \forall \varepsilon \in \mathbb{R},\ 0 < |\varepsilon| < \alpha,\ A + \varepsilon I_n \text{ est inversible.}$$

EXERCICE 10 - Lien entre la trace et le déterminant

Soit $E$ un espace vectoriel de dimension $n$ dont une base est $\mathcal{B}$. Soient $(x_1, \dots, x_n) \in E$ et $f \in L(E)$. Démontrer que $\sum_{k=1}^n \det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, f(x_k), \dots, x_n) = \operatorname{Tr}(f) \det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n)$

Cette feuille d'exercices a été conçue à l'aide du site https://www.bibmath.net