Exercice 1 - Un problème de tangente

Démontrer que les courbes d'équation $y = x^2$ et $y = 1/x$ admettent une unique tangente commune.

Exercice 2 - Avant et après

Soit f une fonction dérivable en un point x_0. Montrer que

Réciproquement, si la limite précédente existe, peut-on dire que f est dérivable en x_0?

Exercice 3 - Un calcul de limite

Soit $f : R \to R$ dérivable telle que $f(0) = 0$. Montrer que $\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n^2}\right)$ admet une limite lorsque $n \to +\infty$ et la dét

Exercice 4 - Un calcul un peu sophistiqué

Soit $n \geq 1$ et $1 \leq k \leq n$.
Calculer la dérivée k-ème de $x \mapsto x^{n-1}$ et $x \mapsto \ln(1+x)$.
En déduire la dérivée n-ième de la fonction suivante : $x \mapsto x^{n-1}\ln(1+x)$.

Exercice 5 - Rolle itéré

Soit $f : [a,b] \to R$ n fois dérivable.
On suppose que f s'annule en $(n+1)$ points distincts de $[a,b]$. Démontrer qu'il existe $c \in]a,b[$ tel que $f^{(n)}(c) = 0$.
On suppose que $f(a) = f'(a) = \ldots = f^{(n-1)}(a) = f(b) = 0$. Démontrer qu'il existe $c \in]a,b[$ tel que $f^{(n)}(c) = 0$.

Exercice 6 - Théorème des accroissements finis généralisés et règle de l'Hospital

Soit $f, g : [a,b] \to R$ deux fonctions continues sur $[a,b]$ et dérivables sur $]a,b[$. On suppose que $g'(x) \neq 0$ pour tout
Démontrer que, pour tout $x \in [a,b[$, $g(x) \neq g(b)$.
On fixe $t \in [a,b[$, on pose $p = \frac{f(t)-f(b)}{g(t)-g(b)}$ et on considère la fonction h définie sur $[a,b]$ par $h(x) = f(x) - pg(x)$. Vérifier q

On suppose qu'il existe un nombre réel ℓ tel que $\lim_{x\to b^-} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell$. Démontrer que

Application : déterminer $\lim_{x\to 0^-} \frac{\cos(x)-e^x}{(x+1)e^x-1}$.

Exercice 7 - Théorème de Darboux

Soit I un intervalle ouvert de R, et f une fonction dérivable sur I. On veut prouver que f' vérifie le théorème des v
Pourquoi n'est-ce pas trivial?
Soit $(a,b) \in I^2$, tel que $f'(a) < f'(b)$, et soit $z \in]f'(a), f'(b)[$. Montrer qu'il existe $\alpha > 0$ tel que, pour tout réel $h \in]0,\alpha]$

En déduire l'existence d'un réel $h > 0$ et d'un point y de I tels que :

Montrer qu'il existe un point x de I tel que $z = f'(x)$.
En déduire que $f'(I)$ est un intervalle.
Soit $f(x) = x^2 \sin\left(\frac{1}{x^2}\right)$ sur $[0,1]$, 0 en 0. Montrer que f est dérivable sur $[0,1]$. f' est-elle continue sur $[0,1]$? Détermine

Exercice 8 - Somme de n valeurs

Soit $f : [0,1] \to R$ une fonction de classe C^1 vérifiant $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$. Démontrer que, pour tout $n \geq 1$, il exis

Exercice 9 - Accroissements finis et inégalités

Démontrer les inégalités suivantes :
$\forall x, y \in R,\ |\arctan(x) - \arctan(y)| \leq |x-y|$.
$\forall x \geq 0,\ x \leq e^x - 1 \leq xe^x$.

Exercice 10 - Rolle à l'infini

Soit $f : [0,+\infty[\to R$ une fonction continue, dérivable sur $]0,+\infty[$ et telle que $f(0) = \lim_{+\infty} f = 0$. On souhaite dém
Démontrer qu'il existe $a \in]0,c[$ et $b \in]c,+\infty[$ tel que $f(a) = f(b)$.
Conclure.

Exercice 11 - Dérivée de polynôme

Soit $P \in R[X]$ scindé (c'est-à-dire que P a toutes ses racines réelles, ou encore que $P(X) = c(X-x_1)^{\alpha_1}\ldots(X-x_p$

Exercice 12 - Une suite récurrente

On considère la suite récurrente définie par $u_0 \in R^*$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout $n \in N$, où f la fonction définie par
Déterminer $I = f(R^*)$, et montrer que I est stable par f.