

3. On pose $u_n = \frac{(2n)!}{4^n (n!)^2}$. Montrer que la suite u_n est décroissante.
4. En utilisant la formule de Stirling (que l'on ne demande pas de démontrer!) :

$$n! = n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n} \left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right) \right) \sim n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n}$$

montrer que $u_n \sim \frac{1}{\sqrt{\pi n}}$ et en particulier $\lim u_n = 0$.

5. En déduire que la série (2) est convergente pour $x = -1/4$ et divergente pour $x = 1/4$.