



## Probabilité conditionnelle

---

### Exercice 1

Dans la salle des profs 60% sont des femmes ; une femme sur trois porte des lunettes et un homme sur deux porte des lunettes : quelle est la probabilité pour qu'un porteur de lunettes pris au hasard soit une femme ?

[Correction ▼](#)

[005992]

### Exercice 2

Une fête réunit 35 hommes, 40 femmes, 25 enfants ; sur une table, il y a 3 urnes  $H$ ,  $F$ ,  $E$  contenant des boules de couleurs dont respectivement 10%, 40%, 80% de boules noires. Un présentateur aux yeux bandés désigne une personne au hasard et lui demande de tirer une boule dans l'urne  $H$  si cette personne est un homme, dans l'urne  $F$  si cette personne est une femme, dans l'urne  $E$  si cette personne est un enfant. La boule tirée est noire : quelle est la probabilité pour que la boule ait été tirée par un homme ? une femme ? un enfant ? Le présentateur n'est pas plus magicien que vous et moi et pronostique le genre de la personne au hasard : que doit-il dire pour avoir le moins de risque d'erreur ?

[Correction ▼](#)

[005993]

### Exercice 3

Un fumeur, après avoir lu une série de statistiques effrayantes sur les risques de cancer, problèmes cardiovasculaires liés au tabac, décide d'arrêter de fumer ; toujours d'après des statistiques, on estime les probabilités suivantes : si cette personne n'a pas fumé un jour  $J_n$ , alors la probabilité pour qu'elle ne fume pas le jour suivant  $J_{n+1}$  est 0.3 ; mais si elle a fumé un jour  $J_n$ , alors la probabilité pour qu'elle ne fume pas le jour suivant  $J_{n+1}$  est 0.9 ; quelle est la probabilité  $P_{n+1}$  pour qu'elle fume le jour  $J_{n+1}$  en fonction de la probabilité  $P_n$  pour qu'elle fume le jour  $J_n$  ? Quelle est la limite de  $P_n$  ? Va-t-il finir par s'arrêter ?

[Correction ▼](#)

[005994]

### Exercice 4

Un professeur oublie fréquemment ses clés. Pour tout  $n$ , on note :  $E_n$  l'événement «le jour  $n$ , le professeur oublie ses clés»,  $P_n = P(E_n)$ ,  $Q_n = P(\overline{E_n})$ .

On suppose que :  $P_1 = a$  est donné et que si le jour  $n$  il oublie ses clés, le jour suivant il les oublie avec la probabilité  $\frac{1}{10}$  ; si le jour  $n$  il n'oublie pas ses clés, le jour suivant il les oublie avec la probabilité  $\frac{4}{10}$ .

Montrer que  $P_{n+1} = \frac{1}{10}P_n + \frac{4}{10}Q_n$ . En déduire une relation entre  $P_{n+1}$  et  $P_n$

Quelle est la probabilité de l'événement «le jour  $n$ , le professeur oublie ses clés» ?

[Correction ▼](#)

[005995]

### Exercice 5

Dans les barres de chocolat N., on trouve des images équitablement réparties des cinq personnages du dernier Walt Disney, une image par tablette. Ma fille veut avoir le héros Princecharmant : combien dois-je acheter de barres pour que la probabilité d'avoir la figurine attendue dépasse 80% ? Même question pour être sûr à 90%.

[Correction ▼](#)

[005996]

### Exercice 6

En cas de migraine trois patients sur cinq prennent de l'aspirine (ou équivalent), deux sur cinq prennent un médicament M présentant des effets secondaires :

Avec l'aspirine, 75% des patients sont soulagés.

Avec le médicament M, 90% des patients sont soulagés.

1. Quel est le taux global de personnes soulagées ?
2. Quel est la probabilité pour un patient d'avoir pris de l'aspirine sachant qu'il est soulagé ?

[Correction ▼](#)

[005997]

### Exercice 7

Dans une population 40% des individus ont les yeux bruns, 25% des individus ont les cheveux blonds, 15% des individus ont les yeux bruns et les cheveux blonds.

On choisit un individu au hasard. Calculez :

1. La probabilité de l'événement : si un individu a les yeux bruns d'avoir les cheveux blonds.
2. La probabilité de l'événement : si un individu a les cheveux blonds d'avoir les yeux bruns.
3. La probabilité de l'événement : si un individu a les cheveux blonds, de ne pas avoir les yeux bruns.

[Correction ▼](#)

[005998]

### Exercice 8

Un constructeur aéronautique équipe ses avions trimoteurs d'un moteur central de type A et de deux moteurs, un par aile, de type B ; chaque moteur tombe en panne indépendamment d'un autre, et on estime à  $p$  la probabilité pour un moteur de type A de tomber en panne et à  $q$  la probabilité pour un moteur de type B de tomber en panne.

Le trimoteur peut voler si le moteur central *ou* les deux moteurs d'ailes fonctionnent : quelle est la probabilité pour l'avion de voler ? Application numérique :  $p = 0.001\%$ ,  $q = 0.02\%$ .

[Correction ▼](#)

[005999]

### Exercice 9

On sait qu'à une date donnée, 3% d'une population est atteinte d'hépatite On dispose de tests de dépistage de la maladie :

- Si la personne est malade, alors le test est positif avec une probabilité de 95%.
  - Si la personne est saine, alors le test est positif avec une probabilité de 10%.
1. Quelle est la probabilité pour une personne d'être malade si son test est positif ?
  2. Quelle est la probabilité pour une personne d'être saine si son test est positif ?
  3. Quelle est la probabilité pour une personne d'être malade si son test est négatif ?
  4. Quelle est la probabilité pour une personne d'être saine si son test est négatif ?

[Correction ▼](#)

[006000]

### Exercice 10

Dans mon trousseau de clés il y a 8 clés ; elles sont toutes semblables. Pour rentrer chez moi je mets une clé au hasard ; je fais ainsi des essais jusqu'à ce que je trouve la bonne ; j'écarte au fur et à mesure les mauvaises clés. Quelle est la probabilité pour que j'ouvre la porte :

1. du premier coup ?
2. au troisième essai ?
3. au cinquième essai ?
4. au huitième essai ?

[Correction ▼](#)

[006001]

### Exercice 11

Six couples sont réunis dans une soirée de réveillon. Une fois les bises de bonne année échangées, on danse, de façon conventionnelle : un homme avec une femme, mais pas forcément la sienne.

1. Quelle est la probabilité  $P(A)$  pour que chacun des 6 hommes danse avec son épouse légitime ?

2. Quelle est la probabilité  $P(B)$  pour que André danse avec son épouse ?
3. Quelle est la probabilité  $P(C)$  pour que André et René dansent avec leur épouse ?
4. Quelle est la probabilité  $P(D)$  pour que André ou René danse(nt) avec leur épouse ?

[Correction ▼](#)

[006002]

---

### Exercice 12

Dans l'ancienne formule du Loto il fallait choisir 6 numéros parmi 49.

1. Combien y-a-t-il de grilles possibles ? En déduire la probabilité de gagner en jouant une grille.
2. Quelle est la probabilité que la grille gagnante comporte 2 nombres consécutifs ?

[Correction ▼](#)

[006003]

---

### Exercice 13

Un débutant à un jeu effectue plusieurs parties successives. Pour la première partie, les probabilités de gagner ou perdre sont les mêmes ; puis, on suppose que :

- Si une partie est gagnée, la probabilité de gagner la suivante est 0.6.
- Si une partie est perdue, la probabilité de perdre la suivante est 0.7.

Soit  $G_n$  l'événement «Gagner la partie  $n$ », et  $u_n = P(G_n)$ . On note  $v_n = P(\overline{G_n})$ .

1. Ecrire 2 relations entre  $u_n, u_{n+1}, v_n, v_{n+1}$ .
2. A l'aide de la matrice mise en évidence en déduire  $u_n$  et  $v_n$ . Faire un calcul direct à l'aide de  $u_n + v_n$ .

[Correction ▼](#)

[006004]

### Correction de l'exercice 1 ▲

Notons les différents événements :  $Fe$  : «être femme»,  $Lu$  : «porter des lunettes»,  $H$  : «être homme»

Alors on a  $P(Fe) = 0.6$ ,  $P(Lu/Fe) = \frac{1}{3}$ ; il s'agit de la probabilité conditionnelle probabilité de «porter des lunettes» sachant que la personne est une femme. De même, on a  $P(Lu/H) = 0.5$ . On cherche la probabilité conditionnelle  $P(Fe/Lu)$ . D'après la formule des probabilités totales on a :  $P(Fe/Lu)P(Lu) = P(Lu/Fe)P(Fe)$  avec  $P(Lu) = P(Lu/Fe)P(Fe) + P(Lu/H)P(H)$ .

Application numérique :  $P(Lu) = 0.4$ , donc  $P(Fe/Lu) = \frac{P(Lu/Fe)P(Fe)}{P(Lu)} = 0.5$ . Remarque : on peut trouver les mêmes réponses par des raisonnements élémentaires.

### Correction de l'exercice 2 ▲

C'est évidemment le même que le précédent (exercice ??), seul le contexte est différent : il suffit d'adapter les calculs faits. En pronostiquant un enfant, le présentateur a une chance sur deux environ de ne pas se tromper.

### Correction de l'exercice 3 ▲

Fumeurs

Définissons les événements :  $F_n$  «Fumer le  $n^{\text{ème}}$  jour», et  $\overline{F_n}$  l'événement complémentaire. Alors  $\{\overline{F_n}, F_n\}$  constitue un système complet d'événements,  $P_n = P(F_n)$ ; on peut donc écrire :  $P(\overline{F_{n+1}}) = P(\overline{F_{n+1}}/F_n)P(F_n) + P(\overline{F_{n+1}}/\overline{F_n})P(\overline{F_n})$ .

Comme  $P(\overline{F_{n+1}}/F_n) = 0.9$  et  $P(\overline{F_{n+1}}/\overline{F_n}) = 0.3$   $1 - P_{n+1} = 0.9P_n + 0.3(1 - P_n)$ , soit  $P_{n+1} = -0.6P_n + 0.7$ . Notons (R) cette relation.

Pour connaître le comportement à long terme, il faut étudier cette suite récurrente; il y a des techniques mathématiques pour ça, c'est le moment de s'en servir.

Cherchons la solution de l'équation « $\ell = -0.6\ell + 0.7$ », la limite éventuelle satisfait nécessairement cette équation : faire un passage à la limite dans la relation (R), ou utiliser le théorème du point fixe.

On trouve  $\ell = \frac{7}{16}$ ; alors, la suite  $Q_n = (P_n - \ell)$  vérifie :  $Q_{n+1} = -0.6Q_n$ , ce qui permet de conclure :  $Q_{n+1} = (-0.6)^n Q_1$  et comme  $((-0.6)^n)$  est une suite qui tend vers 0, on peut dire que la suite  $(Q_n)$  tend vers 0 et donc que la suite  $(P_n)$  tend vers  $\ell = \frac{7}{16}$ .

Conclusion : la probabilité  $P_n$  pour qu'elle fume le jour  $J_n$  tend vers  $\frac{7}{16} \simeq 0.4375$ .

### Correction de l'exercice 4 ▲

$P_{n+1} = P(E_{n+1}) = P(E_{n+1}/E_n)P(E_n) + P(E_{n+1}/\overline{E_n})P(\overline{E_n}) = \frac{1}{10}P_n + \frac{4}{10}Q_n$ . Donc  $P_{n+1} = \frac{1}{10}P_n + \frac{4}{10}(1 - P_n) = \frac{4}{10} - \frac{3}{10}P_n$ .

La suite  $(P_n - \ell)$  est géométrique, où  $\ell$  est solution de  $\frac{4}{10} - \frac{3}{10}\ell = \ell$  soit  $\ell = \frac{4}{13}$ . Donc  $P_n = \frac{4}{13} + a(-\frac{3}{10})^{n-1}$ .

### Correction de l'exercice 5 ▲

La probabilité d'avoir Princecharmant dans la barre B est  $\frac{1}{5}$ ; si j'achète  $n$  barres, la probabilité de n'avoir la figurine dans aucune des  $n$  barres est  $(\frac{4}{5})^n$ , puisqu'il s'agit de  $n$  événements indépendants de probabilité  $\frac{4}{5}$ . Je cherche donc  $n$  tel que :  $1 - (\frac{4}{5})^n \geq 0.8$ . On a facilement :  $n \geq 8$ .

Puis, je cherche  $m$  tel que :  $1 - (\frac{4}{5})^m \geq 0.9$ ; il faut au moins 11 barres pour que la probabilité dépasse 90%. Pour la probabilité 99%,  $n \geq 21$ .

### Correction de l'exercice 6 ▲

1. Le taux global de personnes soulagées :  $P(S) = \frac{3}{5}0.75 + \frac{2}{5}0.90 = 0.81$ .

2. Probabilité pour un patient d'avoir pris de l'aspirine sachant qu'il est soulagé :  $P(A/S) = P(A \cap S)/P(S) = \frac{P(A)P(S/A)}{P(S)} = \frac{\frac{3}{5}0.75}{0.81} = 55.6\%$ .

### Correction de l'exercice 7 ▲

1. Probabilité conditionnelle : si un individu a les yeux bruns d'avoir les cheveux blonds. C'est  $P(CB/YB) = \frac{P(YB/CB)P(CB)}{P(YB)} = \frac{P(YB \cap CB)}{P(YB)} = \frac{0.15}{0.4} = 0.375$ .

- La probabilité de l'événement : si un individu a les cheveux blonds d'avoir les yeux bruns. C'est  $P(YB/CB) = P(YB \cap CB)/P(CB) = \frac{0.15}{0.25} = 0.6$ .
- La probabilité de l'événement : si un individu a les cheveux blonds, de ne pas avoir les yeux bruns. C'est  $P(\text{non}YB/CB) = 1 - P(YB/CB) = 0.4$ .

### Correction de l'exercice 8 ▲

On obtient par calcul direct ou par événement contraire la probabilité de voler :  $1 - p + p(1 - q)^2$ .

### Correction de l'exercice 9 ▲

- La probabilité pour une personne d'être malade si son test est positif est  $P(M/T^+) = P(T^+/M)P(M)/P(T^+)$  or  $P(T^+) = P(T^+/M)P(M) + P(T^+/S)P(S) = 0.95 \cdot 0.03 + 0.1 \cdot 0.97 = 0.1255$ . D'où :  $P(M/T^+) = 22.7\%$ .
- La probabilité pour une personne d'être saine si son test est positif est  $P(S/T^+) = 1 - P(M/T^+) = 77.3\%$ .
- La probabilité pour une personne d'être malade si son test est négatif est  $P(M/T^-) = 0.0017$ .
- La probabilité pour une personne d'être saine si son test est négatif est  $1 - P(M/T^-) = 0.998 = 99.8\%$ .

### Correction de l'exercice 10 ▲

Une manière de résoudre le problème est la suivante : puisqu'il y a 8 clés et que j'écarte une après l'autre les mauvaises clés, je considère comme ensemble de toutes les possibilités, toutes les permutations de ces huit clés : il y en a  $8!$ . Alors la solution de chaque question est basée sur le même principe :

- Les permutations (fictives) qui traduisent le cas (1) sont celles qui peuvent être représentées par une suite :  $BMMMMMMM$ , la lettre  $B$  désigne la bonne,  $M$  désigne une mauvaise. Il y a  $7!$  permutations de ce type. Donc  $P(A) = \frac{7!}{8!} = \frac{1}{8}$ , on s'en doutait !
- De même, les permutations (fictives) sont celles qui peuvent être représentées par une suite :  $MBMMMMMM$  : il y en a encore  $7!$ , et la probabilité est la même.
- Le raisonnement permet en fait de conclure que la probabilité, avant de commencer, d'ouvrir la porte est la même pour le premier, deuxième, ..., huitième essai.

### Correction de l'exercice 11 ▲

- L'univers des possibles est l'ensemble des couples possibles : il y en a  $6! = 720$  (imaginez les dames assises et les hommes choisissant leur partenaire). La probabilité  $P(A)$  pour que chacun des 6 hommes danse avec son épouse légitime est, si chacun choisit au hasard,  $\frac{1}{6!}$ .
- André danse avec son épouse, les autres choisissent au hasard : il y a  $5!$  permutations pour ces derniers :  $P(B) = \frac{5!}{6!} = \frac{1}{6}$ .
- André et René dansent avec leur épouse, les 4 autres choisissent au hasard : il y a  $4!$  permutations pour ces derniers :  $P(C) = \frac{4!}{6!} = \frac{1}{30}$ .
- André ou René dansent avec leur épouse, les 4 autres font ce qu'ils veulent. Considérons les événements  $D_1$  : «André danse avec son épouse»;  $D_2$  : «René danse avec son épouse». Alors  $D = D_1 \cup D_2$  et  $P(D_1 \cup D_2) = P(D_1) + P(D_2) - P(D_1 \cap D_2) = \frac{3}{10}$ .

### Correction de l'exercice 12 ▲

- Combien de grilles ? Il y en a  $\binom{49}{6} = 13983816$

2. Combien de grilles avec 2 nombres consécutifs ? Ce problème peut être résolu par astuce : considérer les numéros gagnants comme 6 places à «choisir» parmi 49. En considérant des cloisons matérialisant les numéros gagnants, c'est un problème de points et cloisons. Par exemple :

$$|\bullet\bullet||\bullet|\bullet\bullet\bullet|\bullet\bullet|$$

les gagnants sont : 1 ; 4 ; 5 ; 7 ; 11 ; 14. Dans notre cas on ne veut pas de cloisons consécutives. Les cinq cloisons séparent les numéros en 7 boîtes. Les 5 boîtes intérieures étant non vides, on y met 5 points, puis  $38 (= 49 - 5 - 6)$  dans 7 boîtes. Il y a  $\frac{(38-1+7)!}{38!6!} = 7.0591 \times 10^6$  séquences ne comportant pas 2 nombres consécutifs.

D'où la probabilité d'avoir une grille comportant 2 nombres consécutifs : 0.4952.

### Correction de l'exercice 13 ▲

$$1. u_{n+1} = P(G_{n+1}) = P(G_{n+1}/Gn)P(Gn) + P(G_{n+1}/\overline{Gn})P(\overline{Gn}) = 0.6u_n + 0.3v_n.$$

$$v_{n+1} = 0.4u_n + 0.7v_n.$$

$$\text{Donc } \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.6 & 0.3 \\ 0.4 & 0.7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$$

Comme  $u_n + v_n = 1$ ,  $u_{n+1} = 0.6u_n + 0.3(1 - u_n) = 0.3 + 0.3u_n$ . La suite  $(u_n - \ell)$  est géométrique, où  $\ell$  est solution de  $0.3 + 0.3\ell = \ell$ , donc  $\ell = \frac{3}{7}$ . Donc  $u_n = \frac{3}{7} + u_1(0.3)^{n-1} = \frac{3}{7} + 0.5(0.3)^{n-1}$ .