COLLE 13 = ESPACES VECTORIELS

Connaître son cours :

1. Soit u une application linéaire entre deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels E et F.Montrer que l'image directe par u d'un sous-espace vectoriel de E est un sous-espace vectoriel de F.
2. Montrer que la somme de deux sous-espaces vectoriels est directe si, et seulement si, leur intersection est égale à $\{0_E\}$.
3. Soit $e_1, \ldots, e_p$ des vecteurs d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E.
   Montrer que pour tous $\lambda \in \mathbb{K}$ et $i \neq j \ \in [\![1, p]\!]$, $\mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_p) = \mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_i + \lambda e_j, \ldots, e_p)$.

Exercices :

Exercice 1. (*)

Dans $\mathbb{R}[X]$, $P(X) = 16X^3 - 7X^2 + 21X - 4$ est-il combinaison linéaire de $P_1(X) = 8X^3 - 5X^2 + 1$ et de $P_2(X) = X^2 + 7X - 2$?

Exercice 2. (**)

Soit $E = \mathscr{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Pour tout $a \in \mathbb{R}$, posons $E_a = \{f \in E, f(a) = 0\}$.

1. Montrer, que pour tout $a \in \mathbb{R}$, E_a est un sous-espace vectoriel de E.
2. Soit $a \neq b$. Montrer que $E = E_a + E_b$.
3. La somme de E_a et de E_b peut-elle être directe ?

Exercice 3. (**)

1. Montrer par des opérations sur les Vect les égalités :
$$\mathbb{R}_2[X] \;=\; \mathrm{Vect}\big((X-1)^2, (X-1)(X+1), (X+1)^2\big).$$
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$:
$$\underset{0 \le k \le n}{\mathrm{Vect}}\Big(\big(x \mapsto \cos(kx)\big)\Big) = \underset{0 \le k \le n}{\mathrm{Vect}}\Big(\big(x \mapsto \cos^k(x)\big)\Big).$$

Exercice 4. (**)

Soit $E = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On note F le sous-espace vectoriel des fonctions paires et G le sous-espace vectoriel des fonctions impaires. Montrer que F et G sont supplémentaires après avoir expliqué pour F et G étaient des sous-espaces vectoriels de E.

Exercice 5. (***)

Partie A - Exemple d'un projecteur

Notons $E = \mathbb{R}[X]$ l'ensemble des polynômes réels, $\mathscr{P}$ et $\mathscr{I}$ les sous-espaces vectoriels des polynômes pairs et impairs respectivement.

1. Montrer que $\mathscr{I}$ est un supplémentaire de $\mathscr{P}$ dans E.
2. Soit l'application linéaire

$$\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ P & \longmapsto & \dfrac{P(X)+P(-X)}{2} + X\dfrac{P(X)-P(-X)}{2} \end{array} \right.$$

   (a) Déterminer $\operatorname{Im}\varphi$ puis établir que

$$\operatorname{Ker}\varphi = \{(1-X)P(X), P \in \mathscr{I}\}.$$

   (b) Montrer que φ est un projecteur de E.

   (c) En déduire que $\operatorname{Ker}\varphi$ est un supplémentaire de $\mathscr{P}$.

Partie B - sous-espaces qui admettent un supplémentaire commun

Soit E un espace vectoriel, F_1 et F_2 deux sous-espaces vectoriels de E

1. Supposons, dans cette question, que F_1 et F_2 sont supplémentaires dans E et qu'il existe un isomorphisme $u : F_1 \to F_2$.

   Montrer que $G = \{x - u(x), x \in F_1\}$ est un espace vectoriel puis qu'il est un supplémentaire commun à F_1 et F_2.
2. Réciproquement supposons dans cette question que F_1 et F_2 admettent un supplémentaire commun G. Montrer que F_1 et F_2 sont isomorphes.