



Probabilité conditionnelle

Exercice 1

Dans la salle des profs 60% sont des femmes ; une femme sur trois porte des lunettes et un homme sur deux porte des lunettes : quelle est la probabilité pour qu'un porteur de lunettes pris au hasard soit une femme ?

[Correction ▼](#)

[005992]

Exercice 2

Une fête réunit 35 hommes, 40 femmes, 25 enfants ; sur une table, il y a 3 urnes H , F , E contenant des boules de couleurs dont respectivement 10%, 40%, 80% de boules noires. Un présentateur aux yeux bandés désigne une personne au hasard et lui demande de tirer une boule dans l'urne H si cette personne est un homme, dans l'urne F si cette personne est une femme, dans l'urne E si cette personne est un enfant. La boule tirée est noire : quelle est la probabilité pour que la boule ait été tirée par un homme ? une femme ? un enfant ? Le présentateur n'est pas plus magicien que vous et moi et pronostique le genre de la personne au hasard : que doit-il dire pour avoir le moins de risque d'erreur ?

[Correction ▼](#)

[005993]

Exercice 3

Un fumeur, après avoir lu une série de statistiques effrayantes sur les risques de cancer, problèmes cardiovasculaires liés au tabac, décide d'arrêter de fumer ; toujours d'après des statistiques, on estime les probabilités suivantes : si cette personne n'a pas fumé un jour J_n , alors la probabilité pour qu'elle ne fume pas le jour suivant J_{n+1} est 0.3 ; mais si elle a fumé un jour J_n , alors la probabilité pour qu'elle ne fume pas le jour suivant J_{n+1} est 0.9 ; quelle est la probabilité P_{n+1} pour qu'elle fume le jour J_{n+1} en fonction de la probabilité P_n pour qu'elle fume le jour J_n ? Quelle est la limite de P_n ? Va-t-il finir par s'arrêter ?

[Correction ▼](#)

[005994]

Exercice 4

Un professeur oublie fréquemment ses clés. Pour tout n , on note : E_n l'événement «le jour n , le professeur oublie ses clés», $P_n = P(E_n)$, $Q_n = P(\overline{E_n})$.

On suppose que : $P_1 = a$ est donné et que si le jour n il oublie ses clés, le jour suivant il les oublie avec la probabilité $\frac{1}{10}$; si le jour n il n'oublie pas ses clés, le jour suivant il les oublie avec la probabilité $\frac{4}{10}$.

Montrer que $P_{n+1} = \frac{1}{10}P_n + \frac{4}{10}Q_n$. En déduire une relation entre P_{n+1} et P_n

Quelle est la probabilité de l'événement «le jour n , le professeur oublie ses clés» ?

[Correction ▼](#)

[005995]

Exercice 5

Dans les barres de chocolat N., on trouve des images équitablement réparties des cinq personnages du dernier Walt Disney, une image par tablette. Ma fille veut avoir le héros Princecharmant : combien dois-je acheter de barres pour que la probabilité d'avoir la figurine attendue dépasse 80% ? Même question pour être sûr à 90%.

[Correction ▼](#)

[005996]

Exercice 6

En cas de migraine trois patients sur cinq prennent de l'aspirine (ou équivalent), deux sur cinq prennent un médicament M présentant des effets secondaires :

Avec l'aspirine, 75% des patients sont soulagés.

Avec le médicament M, 90% des patients sont soulagés.

1. Quel est le taux global de personnes soulagées ?
2. Quel est la probabilité pour un patient d'avoir pris de l'aspirine sachant qu'il est soulagé ?

[Correction ▼](#)

[005997]

Exercice 7

Dans une population 40% des individus ont les yeux bruns, 25% des individus ont les cheveux blonds, 15% des individus ont les yeux bruns et les cheveux blonds.

On choisit un individu au hasard. Calculez :

1. La probabilité de l'événement : si un individu a les yeux bruns d'avoir les cheveux blonds.
2. La probabilité de l'événement : si un individu a les cheveux blonds d'avoir les yeux bruns.
3. La probabilité de l'événement : si un individu a les cheveux blonds, de ne pas avoir les yeux bruns.

[Correction ▼](#)

[005998]

Exercice 8

Un constructeur aéronautique équipe ses avions trimoteurs d'un moteur central de type A et de deux moteurs, un par aile, de type B ; chaque moteur tombe en panne indépendamment d'un autre, et on estime à p la probabilité pour un moteur de type A de tomber en panne et à q la probabilité pour un moteur de type B de tomber en panne.

Le trimoteur peut voler si le moteur central *ou* les deux moteurs d'ailes fonctionnent : quelle est la probabilité pour l'avion de voler ? Application numérique : $p = 0.001\%$, $q = 0.02\%$.

[Correction ▼](#)

[005999]

Exercice 9

On sait qu'à une date donnée, 3% d'une population est atteinte d'hépatite On dispose de tests de dépistage de la maladie :

- Si la personne est malade, alors le test est positif avec une probabilité de 95%.
 - Si la personne est saine, alors le test est positif avec une probabilité de 10%.
1. Quelle est la probabilité pour une personne d'être malade si son test est positif ?
 2. Quelle est la probabilité pour une personne d'être saine si son test est positif ?
 3. Quelle est la probabilité pour une personne d'être malade si son test est négatif ?
 4. Quelle est la probabilité pour une personne d'être saine si son test est négatif ?

[Correction ▼](#)

[006000]

Exercice 10

Dans mon trousseau de clés il y a 8 clés ; elles sont toutes semblables. Pour rentrer chez moi je mets une clé au hasard ; je fais ainsi des essais jusqu'à ce que je trouve la bonne ; j'écarte au fur et à mesure les mauvaises clés. Quelle est la probabilité pour que j'ouvre la porte :

1. du premier coup ?
2. au troisième essai ?
3. au cinquième essai ?
4. au huitième essai ?

[Correction ▼](#)

[006001]

Exercice 11

Six couples sont réunis dans une soirée de réveillon. Une fois les bises de bonne année échangées, on danse, de façon conventionnelle : un homme avec une femme, mais pas forcément la sienne.

1. Quelle est la probabilité $P(A)$ pour que chacun des 6 hommes danse avec son épouse légitime ?

2. Quelle est la probabilité $P(B)$ pour que André danse avec son épouse ?
3. Quelle est la probabilité $P(C)$ pour que André et René dansent avec leur épouse ?
4. Quelle est la probabilité $P(D)$ pour que André ou René danse(nt) avec leur épouse ?

[Correction ▼](#)

[006002]

Exercice 12

Dans l'ancienne formule du Loto il fallait choisir 6 numéros parmi 49.

1. Combien y-a-t-il de grilles possibles ? En déduire la probabilité de gagner en jouant une grille.
2. Quelle est la probabilité que la grille gagnante comporte 2 nombres consécutifs ?

[Correction ▼](#)

[006003]

Exercice 13

Un débutant à un jeu effectue plusieurs parties successives. Pour la première partie, les probabilités de gagner ou perdre sont les mêmes ; puis, on suppose que :

- Si une partie est gagnée, la probabilité de gagner la suivante est 0.6.
- Si une partie est perdue, la probabilité de perdre la suivante est 0.7.

Soit G_n l'événement «Gagner la partie n », et $u_n = P(G_n)$. On note $v_n = P(\overline{G_n})$.

1. Ecrire 2 relations entre $u_n, u_{n+1}, v_n, v_{n+1}$.
2. A l'aide de la matrice mise en évidence en déduire u_n et v_n . Faire un calcul direct à l'aide de $u_n + v_n$.

[Correction ▼](#)

[006004]

Correction de l'exercice 1 ▲

Notons les différents événements : Fe : «être femme», Lu : «porter des lunettes», H : «être homme»

Alors on a $P(Fe) = 0.6$, $P(Lu/Fe) = \frac{1}{3}$; il s'agit de la probabilité conditionnelle probabilité de «porter des lunettes» sachant que la personne est une femme. De même, on a $P(Lu/H) = 0.5$. On cherche la probabilité conditionnelle $P(Fe/Lu)$. D'après la formule des probabilités totales on a : $P(Fe/Lu)P(Lu) = P(Lu/Fe)P(Fe)$ avec $P(Lu) = P(Lu/Fe)P(Fe) + P(Lu/H)P(H)$.

Application numérique : $P(Lu) = 0.4$, donc $P(Fe/Lu) = \frac{P(Lu/Fe)P(Fe)}{P(Lu)} = 0.5$. Remarque : on peut trouver les mêmes réponses par des raisonnements élémentaires.

Correction de l'exercice 2 ▲

C'est évidemment le même que le précédent (exercice ??), seul le contexte est différent : il suffit d'adapter les calculs faits. En pronostiquant un enfant, le présentateur a une chance sur deux environ de ne pas se tromper.

Correction de l'exercice 3 ▲

Fumeurs

Définissons les événements : F_n «Fumer le $n^{\text{ème}}$ jour», et $\overline{F_n}$ l'événement complémentaire. Alors $\{\overline{F_n}, F_n\}$ constitue un système complet d'événements, $P_n = P(F_n)$; on peut donc écrire : $P(\overline{F_{n+1}}) = P(\overline{F_{n+1}}/F_n)P(F_n) + P(\overline{F_{n+1}}/\overline{F_n})P(\overline{F_n})$.

Comme $P(\overline{F_{n+1}}/F_n) = 0.9$ et $P(\overline{F_{n+1}}/\overline{F_n}) = 0.3$ $1 - P_{n+1} = 0.9P_n + 0.3(1 - P_n)$, soit $P_{n+1} = -0.6P_n + 0.7$. Notons (R) cette relation.

Pour connaître le comportement à long terme, il faut étudier cette suite récurrente; il y a des techniques mathématiques pour ça, c'est le moment de s'en servir.

Cherchons la solution de l'équation « $\ell = -0.6\ell + 0.7$ », la limite éventuelle satisfait nécessairement cette équation : faire un passage à la limite dans la relation (R), ou utiliser le théorème du point fixe.

On trouve $\ell = \frac{7}{16}$; alors, la suite $Q_n = (P_n - \ell)$ vérifie : $Q_{n+1} = -0.6Q_n$, ce qui permet de conclure : $Q_{n+1} = (-0.6)^n Q_1$ et comme $((-0.6)^n)$ est une suite qui tend vers 0, on peut dire que la suite (Q_n) tend vers 0 et donc que la suite (P_n) tend vers $\ell = \frac{7}{16}$.

Conclusion : la probabilité P_n pour qu'elle fume le jour J_n tend vers $\frac{7}{16} \simeq 0.4375$.

Correction de l'exercice 4 ▲

$P_{n+1} = P(E_{n+1}) = P(E_{n+1}/E_n)P(E_n) + P(E_{n+1}/\overline{E_n})P(\overline{E_n}) = \frac{1}{10}P_n + \frac{4}{10}Q_n$. Donc $P_{n+1} = \frac{1}{10}P_n + \frac{4}{10}(1 - P_n) = \frac{4}{10} - \frac{3}{10}P_n$.

La suite $(P_n - \ell)$ est géométrique, où ℓ est solution de $\frac{4}{10} - \frac{3}{10}\ell = \ell$ soit $\ell = \frac{4}{13}$. Donc $P_n = \frac{4}{13} + a(-\frac{3}{10})^{n-1}$.

Correction de l'exercice 5 ▲

La probabilité d'avoir Princecharmant dans la barre B est $\frac{1}{5}$; si j'achète n barres, la probabilité de n'avoir la figurine dans aucune des n barres est $(\frac{4}{5})^n$, puisqu'il s'agit de n événements indépendants de probabilité $\frac{4}{5}$. Je cherche donc n tel que : $1 - (\frac{4}{5})^n \geq 0.8$. On a facilement : $n \geq 8$.

Puis, je cherche m tel que : $1 - (\frac{4}{5})^m \geq 0.9$; il faut au moins 11 barres pour que la probabilité dépasse 90%. Pour la probabilité 99%, $n \geq 21$.

Correction de l'exercice 6 ▲

1. Le taux global de personnes soulagées : $P(S) = \frac{3}{5}0.75 + \frac{2}{5}0.90 = 0.81$.

2. Probabilité pour un patient d'avoir pris de l'aspirine sachant qu'il est soulagé : $P(A/S) = P(A \cap S)/P(S) = \frac{P(A)P(S/A)}{P(S)} = \frac{\frac{3}{5}0.75}{0.81} = 55.6\%$.

Correction de l'exercice 7 ▲

1. Probabilité conditionnelle : si un individu a les yeux bruns d'avoir les cheveux blonds. C'est $P(CB/YB) = \frac{P(YB/CB)P(CB)}{P(YB)} = \frac{P(YB \cap CB)}{P(YB)} = \frac{0.15}{0.4} = 0.375$.

- La probabilité de l'événement : si un individu a les cheveux blonds d'avoir les yeux bruns. C'est $P(YB/CB) = P(YB \cap CB)/P(CB) = \frac{0.15}{0.25} = 0.6$.
- La probabilité de l'événement : si un individu a les cheveux blonds, de ne pas avoir les yeux bruns. C'est $P(\text{non}YB/CB) = 1 - P(YB/CB) = 0.4$.

Correction de l'exercice 8 ▲

On obtient par calcul direct ou par événement contraire la probabilité de voler : $1 - p + p(1 - q)^2$.

Correction de l'exercice 9 ▲

- La probabilité pour une personne d'être malade si son test est positif est $P(M/T^+) = P(T^+/M)P(M)/P(T^+)$ or $P(T^+) = P(T^+/M)P(M) + P(T^+/S)P(S) = 0.95 \cdot 0.03 + 0.1 \cdot 0.97 = 0.1255$. D'où : $P(M/T^+) = 22.7\%$.
- La probabilité pour une personne d'être saine si son test est positif est $P(S/T^+) = 1 - P(M/T^+) = 77.3\%$.
- La probabilité pour une personne d'être malade si son test est négatif est $P(M/T^-) = 0.0017$.
- La probabilité pour une personne d'être saine si son test est négatif est $1 - P(M/T^-) = 0.998 = 99.8\%$.

Correction de l'exercice 10 ▲

Une manière de résoudre le problème est la suivante : puisqu'il y a 8 clés et que j'écarte une après l'autre les mauvaises clés, je considère comme ensemble de toutes les possibilités, toutes les permutations de ces huit clés : il y en a $8!$. Alors la solution de chaque question est basée sur le même principe :

- Les permutations (fictives) qui traduisent le cas (1) sont celles qui peuvent être représentées par une suite : $BMMMMMMM$, la lettre B désigne la bonne, M désigne une mauvaise. Il y a $7!$ permutations de ce type. Donc $P(A) = \frac{7!}{8!} = \frac{1}{8}$, on s'en doutait !
- De même, les permutations (fictives) sont celles qui peuvent être représentées par une suite : $MBMMMMMM$: il y en a encore $7!$, et la probabilité est la même.
- Le raisonnement permet en fait de conclure que la probabilité, avant de commencer, d'ouvrir la porte est la même pour le premier, deuxième, ..., huitième essai.

Correction de l'exercice 11 ▲

- L'univers des possibles est l'ensemble des couples possibles : il y en a $6! = 720$ (imaginez les dames assises et les hommes choisissant leur partenaire). La probabilité $P(A)$ pour que chacun des 6 hommes danse avec son épouse légitime est, si chacun choisit au hasard, $\frac{1}{6!}$.
- André danse avec son épouse, les autres choisissent au hasard : il y a $5!$ permutations pour ces derniers : $P(B) = \frac{5!}{6!} = \frac{1}{6}$.
- André et René dansent avec leur épouse, les 4 autres choisissent au hasard : il y a $4!$ permutations pour ces derniers : $P(C) = \frac{4!}{6!} = \frac{1}{30}$.
- André ou René dansent avec leur épouse, les 4 autres font ce qu'ils veulent. Considérons les événements D_1 : «André danse avec son épouse»; D_2 : «René danse avec son épouse». Alors $D = D_1 \cup D_2$ et $P(D_1 \cup D_2) = P(D_1) + P(D_2) - P(D_1 \cap D_2) = \frac{3}{10}$.

Correction de l'exercice 12 ▲

- Combien de grilles ? Il y en a $\binom{49}{6} = 13983816$

2. Combien de grilles avec 2 nombres consécutifs ? Ce problème peut être résolu par astuce : considérer les numéros gagnants comme 6 places à «choisir» parmi 49. En considérant des cloisons matérialisant les numéros gagnants, c'est un problème de points et cloisons. Par exemple :

$$|\bullet\bullet||\bullet|\bullet\bullet\bullet|\bullet\bullet|$$

les gagnants sont : 1 ; 4 ; 5 ; 7 ; 11 ; 14. Dans notre cas on ne veut pas de cloisons consécutives. Les cinq cloisons séparent les numéros en 7 boîtes. Les 5 boîtes intérieures étant non vides, on y met 5 points, puis $38 (= 49 - 5 - 6)$ dans 7 boîtes. Il y a $\frac{(38-1+7)!}{38!6!} = 7.0591 \times 10^6$ séquences ne comportant pas 2 nombres consécutifs.

D'où la probabilité d'avoir une grille comportant 2 nombres consécutifs : 0.4952.

Correction de l'exercice 13 ▲

1. $u_{n+1} = P(G_{n+1}) = P(G_{n+1}/Gn)P(Gn) + P(G_{n+1}/\overline{Gn})P(\overline{Gn}) = 0.6u_n + 0.3v_n.$

$$v_{n+1} = 0.4u_n + 0.7v_n.$$

$$\text{Donc } \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.6 & 0.3 \\ 0.4 & 0.7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$$

Comme $u_n + v_n = 1$, $u_{n+1} = 0.6u_n + 0.3(1 - u_n) = 0.3 + 0.3u_n$. La suite $(u_n - \ell)$ est géométrique, où ℓ est solution de $0.3 + 0.3\ell = \ell$, donc $\ell = \frac{3}{7}$. Donc $u_n = \frac{3}{7} + u_1(0.3)^{n-1} = \frac{3}{7} + 0.5(0.3)^{n-1}$.