Examen n°3 : Mathématiques

(Temps : 4 heures)

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les étudiants sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs. Les réponses doivent toutes être soigneusement justifiées. Les calculatrices sont interdites.

Barème indicatif :

- Exercice 1 .... 15 points
- Exercice 2 .... 6 points
- Exercice 3 .... 19 points

Exercice 1. Calculs d'intégrales, équations différentielles linéaires du premier ordre

1 Partie I

Soit h la fonction qui, à tout réel strictement positif x, associe : $\operatorname{Arctan}(x)+\operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right)$.

1. Montrer que la fonction h est constante sur $]0,+\infty\,[$ (on précisera la valeur prise par h sur $]0,+\infty[$).
2. (a) Pour tout réel t de $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, exprimer $\cos(t)$ en fonction de $\cos\left(\frac{t}{2}\right)$.
   (b) Pour tout réel t de $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, comparer $\frac{1}{1+\tan^2\left(\frac{t}{2}\right)}$ et $\cos^2\left(\frac{t}{2}\right)$.
   (c) Pour tout réel t de $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, on pose :
   $$u=\tan\left(\frac{t}{2}\right)$$
   Exprimer $\cos(t)$ en fonction de u.

2 Partie II

Pour tout réel x de $]-1,1\,[$, on pose : $F(x)=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{1-x\cos(t)}$.

3. Que vaut $F(0)$?
4. A l'aide du changement de variable $u=\tan\left(\frac{t}{2}\right)$, montrer que, pour tout réel x de $]-1,1[$:
$$F(x)=\frac{2}{\sqrt{1-x^2}} \operatorname{Arctan} \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$$

Indication : on pensera à utiliser la première partie.

5. En déduire, pour tout réel x de $]-1,1[$, une relation entre $F(x)$ et $F(-x)$.
6. En déduire que F est dérivable sur] - 1,1 [et démontrer que pour tout réel x de$]-1,1[$:
$$\left(1-x^2\right) F'(x)=xF(x)+1$$
7. (a) Donner la solution générale sur] - 1,1[de l'équation différentielle homogène :
   $$(E_0) \quad \left(1-x^2\right) y'-xy=0$$
   (b) A l'aide de la méthode de variation de la constante, donner la solution générale sur $]-1,1[$ de l'équation différentielle :
   $$\text{(E)} \quad \left(1-x^2\right) y'-xy=1$$
   (c) Donner les solutions respectives des problèmes de Cauchy :
   $$(P_0) \quad \begin{cases} \left(1-x^2\right) y'-xy=1 \\ y(0)=0 \end{cases}$$
   et
   $$(P_1) \quad \begin{cases} \left(1-x^2\right) y'-xy=1 \\ y(0)=\frac{\pi}{2} \end{cases}$$
   (d) Pour tout réel x de $]-1,1\,[$, déduire de la résolution de (P_1) une expression simplifiée de $F(x)$ avec la fonction Arcsin.
8. On admet que F est dérivable sur $]-1,1[$ avec pour tout $x\in]-1,1[$:
$$F'(x)=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(t)}{(1-x\cos(t))^2} dt.$$
   En déduire la valeur de $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(t)-x}{(1-x\cos(t))^2} dt$ pour tout réel x de $]-1,1[$.

Exercice 2. (e un nombre irrationnel)
Soit $(u_n)_n$ une suite réelle vérifiant, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n = \int_0^1 x^n e^x dx$$

1. Calculer les trois premiers termes de la suite $(u_n)_n$.
2. Montrer que la suite $(u_n)_n$ est monotone et positive. Justifier que cette suite converge et donner sa limite.
3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $a, b \in \mathbb{Z}$ tel que : $u_n = a \times e + b$.
4. Montrer que e n'est pas un nombre rationnel.

Exercice 3. (Fractions continues, suites)
On définit par récurrence pour tout $n \in \mathbb{N}$ une application $F_n : (t_0, \ldots, t_n) \longmapsto F_n(t_0, \ldots, t_n)$ de $\left(\mathbb{R}_+^*\right)^{n+1}$ dans $\mathbb{R}_+^*$ en posant pour tout $t_0 > 0$, $\quad F_0(t_0) = t_0$ et pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $t_0, \ldots, t_{n+1} > 0$:

$$F_{n+1}(t_0, \ldots, t_{n+1}) = t_0 + \frac{1}{F_n(t_1, \ldots, t_{n+1})}$$

On admet qu'une telle définition est bien possible et que pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $t_0, \ldots, t_n > 0$, $\quad F_n(t_0, \ldots, t_n) > 0$.
Les applications ainsi construites sont appelées des fractions continues.
Par exemple :

$$F_3(1,2,3,4) = 1 + \frac{1}{F_2(2,3,4)} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{F_1(3,4)}} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{3 + \frac{1}{F_0(4)}}} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{3 + \frac{1}{4}}}$$

Un exemple

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\quad u_n = F_n(2, \ldots, 2)$

1. Vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $u_{n+1} = 2 + \frac{1}{u_n}$ puis étudier rapidement la fonction $f : x \longmapsto 2 + \frac{1}{x}$ sur $[2, +\infty[$ (sens de variation, limites aux bornes).
2. Montrer que pour tout $p \in \mathbb{N}$ on a : $\begin{cases} u_{2p} \leqslant u_{2p+2} \leqslant \frac{5}{2} \\ u_{2p+1} \geqslant u_{2p+3} \geqslant 2 \end{cases}$
3. Déterminer le(s) point(s) fixe(s) de $f \circ f$ et en déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge. On précisera sa limite.

Une nouvelle définition récursive

4. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tous $t_0, \ldots, t_{n+1} > 0$:

$$F_{n+1}(t_0, \ldots, t_{n+1}) = F_n\left(t_0, \ldots, t_{n-1}, t_n + \frac{1}{t_{n+1}}\right)$$

Un résultat universel de convergence

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'entiers naturels non nuls. On note $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ les suites définies par :

$$\begin{cases} p_0 = a_0 \\ q_0 = 1 \end{cases} \text{ et } \begin{cases} p_1 = 1 + a_0 a_1 \\ q_1 = a_1 \end{cases} \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} p_{n+2} = p_{n+1} a_{n+2} + p_n \\ q_{n+2} = q_{n+1} a_{n+2} + q_n \end{cases}$$

On admet que p_n et q_n sont des entiers naturels non nuls pour tout $n \in \mathbb{N}$.

5. Etudier la stricte monotonie de la suite $(q_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et déterminer sa limite.
6. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $p_{n+1} q_n - p_n q_{n+1} = (-1)^n$.
7. En déduire que les suites $\left(\frac{p_{2n}}{q_{2n}}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\left(\frac{p_{2n+1}}{q_{2n+1}}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes. On note ℓ leur limite commune.
8. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\left|\ell - \frac{p_n}{q_n}\right| < \frac{1}{q_n^2}$. On pourra remarquer que ℓ est compris entre $\frac{p_n}{q_n}$ et $\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}$.
9. En déduire que ℓ est irrationnel.

10. Montrer que pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $t > 0$: $F_{n+2}\left(a_0, \ldots, a_{n+1}, t\right) = \frac{p_{n+1}t+p_n}{q_{n+1}t+q_n}$.
11. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $F_n\left(a_0, \ldots, a_n\right) = \frac{p_n}{q_n}$.

En conclusion, la suite de rationnels $\left(F_n\left(a_0, \ldots, a_n\right)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un irrationnel, et ceci quelle que soit la suite $\left(a_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ d'entiers naturels non nuls choisie au départ.

Développement d'un irrationnel en fraction continue

Soit x un irrationnel supérieur à 1.

12. Justifier la bonne définition de la suite $\left(x_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $x_0 = x$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\quad x_{n+1} = \frac{1}{x_n - \lfloor x_n \rfloor}$.
    On pose alors pour tout $n \in \mathbb{N}$: $a_n = \lfloor x_n \rfloor$.
13. Montrer que a_n est un entier naturel non nul pour tout $n \in \mathbb{N}$.
    On peut dès lors associer à la suite $\left(a_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites $\left(p_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\left(q_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ comme à la question 3.
14. Montrer, en exploitant notamment le résultat de la question 10. , que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $x = \frac{p_{n+1}x_{n+2}+p_n}{q_{n+1}x_{n+2}+q_n}$.
15. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\left|x - \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}\right| < \frac{1}{q_{n+1}^2}$, puis que $\lim_{n\to+\infty} F_n\left(a_0, \ldots, a_n\right) = x$.

Conclusion : $x = a_0 + \frac{1}{a_1+\frac{1}{a_2+\frac{1}{a_3+\ldots}}}$.

La suite $\left(a_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est appelée le développement de x en fraction continue.