TD8 fcts continues

Exercice 1 - Avec la partie entière

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \lfloor x \rfloor + \sqrt{x - \lfloor x \rfloor}$. Étudier la continuité de f sur $\mathbb{R}$.

Exercice 2 - Indicatrice de $\mathbb{Q}$

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{si } x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Montrer que f est discontinue en tout point.

Exercice 3 - Une fonction bizarre

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \text{ est irrationnel ou } x = 0. \\ \frac{1}{q} & \text{si } x = p/q, \text{ avec } p \in \mathbb{Z},\ q \geq 1 \text{ et } p \wedge q = 1 \end{cases}$$

En quels points f est-elle continue?

Exercice 4 - Prolongement par continuité et fonctions trigonométriques

Dire si les fonctions suivantes sont prolongeables par continuité à $\mathbb{R}$ tout entier :

1. $f(x) = \sin(1/x)$ si $x \neq 0$;
2. $g(x) = \sin(x)\sin(1/x)$ si $x \neq 0$;
3. $h(x) = \cos(x)\cos(1/x)$ si $x \neq 0$.

Exercice 5 - Une fonction lipschitzienne est continue

Soit I un intervalle, $k > 0$ et $f : I \to \mathbb{R}$ vérifiant :

$$\forall (x, y) \in I^2,\ |f(x) - f(y)| \leq k|x - y|.$$

Démontrer que f est continue sur I.

Exercice 6 - Fonctions monotones

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction monotone. Montrer que l'ensemble de ses points de discontinuité est fini ou dénombrable.

Exercice 7 - Une équation fonctionnelle

On cherche à déterminer toutes les fonctions continues $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vérifiant, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(2x) - f(x) = x$.

1. Soit f une telle fonction. Démontrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$ et pour tout $n \geq 1$, on a
$$f(x) - f(x/2^n) = \sum_{k=1}^{n} \frac{x}{2^k}.$$
2. Répondre au problème posé.

Exercice 8 - Une infinité de solutions

Démontrer que l'équation $\cos x = \frac{1}{x}$ admet une infinité de solutions dans $\mathbb{R}_+^*$.

Exercice 9 - Point fixe

Soit $f : [0,1] \to [0,1]$ une fonction continue. Démontrer que f admet toujours au moins un point fixe.

Exercice 10 - Point fixe

Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ continue. On suppose que $x \mapsto \frac{f(x)}{x}$ admet une limite finie $l < 1$ en $+\infty$. Démontrer que f admet un point fixe.

Exercice 11 - Infinité d'antécédents

Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ une fonction continue surjective.

1. Démontrer que 0 admet un nombre infini d'antécédents.
2. Plus généralement, démontrer que tout réel admet un nombre infini d'antécédents.

Exercice 12 - Fonctions continues périodiques

Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$ admettant une période T. Prouver que f est uniformément continue.

Exercice 13 - Avec une limite à l'infini

Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ une fonction continue admettant une limite (finie) en $+\infty$. Montrer que f est uniformément continue.

Exercice 14 - Une fonction étonnament lipschitzienne

Soient $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues. Pour $t \in \mathbb{R}$, on pose

$$h(t) = \sup\{f(x) + tg(x);\ x \in [a,b]\}.$$

Montrer que h est lipschitzienne.

Cette feuille d'exercices a été conçue à l'aide du site http://www.bibmath.net