# COLLE 11 = ESPACES VECTORIELS ET DIMENSIONS DES ESPACES VECTORIELS

## Espaces vectoriels

**Exercice 1.**
Parmi les ensembles suivants reconnaître ceux qui sont des sous-espaces vectoriels.(Justifier)

$E_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + a = 0 \text{ et } x + 3az = 0\}$

$E_2 = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid f(1) = 0\}$

$E_3 = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid f(0) = 1\}$

$E_4 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + \alpha y + 1 \geqslant 0\}$

---

**Exercice 2.**
Soit $E$ un espace vectoriel.

1. Soient $F$ et $G$ deux sous-espaces de $E$.
   Montrer que :

   $F \cup G$ est un sous-espace vectoriel de $E$
   $\iff \quad F \subset G$ ou $G \subset F$.

2. Soit $H$ un troisième sous-espace vectoriel de $E$. Prouver que

$$G \subset F \Longrightarrow F \cap (G + H) = G + (F \cap H).$$

---

**Exercice 3.**
Soient
$v_1 = (0, 1, -2, 1), v_2 = (1, 0, 2, -1), v_3 = (3, 2, 2, -1)$, $v_4 = (0, 0, 1, 0)$ et $v_5 = (0, 0, 0, 1)$ des vecteurs de $\mathbb{R}^4$.

Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifier votre réponse.

1. $\mathrm{Vect}\{v_1, v_2, v_3\} = \mathrm{Vect}\{(1, 1, 0, 0), (-1, 1, -4, 2)\}$
2. $(1, 1, 0, 0) \in \mathrm{Vect}\{v_1, v_2\} \cap \mathrm{Vect}\{v_2, v_3, v_4\}$.
3. $\dim(\mathrm{Vect}\{v_1, v_2\} \cap \mathrm{Vect}\{v_2, v_3, v_4\}) = 1$ (c'est-à-dire c'est une droite vectorielle).
4. $\mathrm{Vect}\{v_1, v_2\} + \mathrm{Vect}\{v_2, v_3, v_4\} = \mathbb{R}^4$.
5. $\mathrm{Vect}\{v_4, v_5\}$ est un sous-espace vectoriel supplémentaire de $\mathrm{Vect}\{v_1, v_2, v_3\}$ dans $\mathbb{R}^4$.

---

**Exercice 4.**
Démontrer que les familles suivantes sont libres dans $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ :

1. $(x \longmapsto e^{ax})_{a\in\mathbb{R}}$ ;
2. $(x \longmapsto |x - a|)_{a\in\mathbb{R}}$ ;
3. $(x \longmapsto \cos(ax))_{a\in\mathbb{R}}$ ;
4. $(x \longmapsto (\sin x)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ ;

---

**Exercice 5.**

1. Soient $v_1 = (2, 1, 4)$, $v_2 = (1, -1, 2)$ et $v_3 = (3, 3, 6)$ des vecteurs de $\mathbb{R}^3$, trouver trois réels non tous nuls $\alpha, \beta, \gamma$ tels que $\alpha v_1 + \beta v_2 + \gamma v_3 = 0$.
2. On considère deux plans vectoriels

$$P_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y + z = 0\}$$

$$P_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y = 0\}$$

   trouver un vecteur directeur de la droite $D = P_1 \cap P_2$ ainsi qu'une équation paramétrée.

---

**Exercice 6.**
Soient $E = \mathcal{D}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ l'espace des fonctions dérivables et $F = \{f \in E \mid f(0) = f'(0) = 0\}$.

Montrer que $F$ est un sous-espace vectoriel de $E$ et déterminer un supplémentaire de $F$ dans $E$.

---

**Exercice 7.**
Pour $E = \mathbb{R}^4$, dire si les familles de vecteurs suivantes peuvent être complétées en une base de $E$. Si oui, le faire.

1. $(u, v, w)$ avec $u = (1, 2, -1, 0)$, $v = (0, 1, -4, 1)$ et $w = (2, 5, -6, 1)$ ;
2. $(u, v, w)$ avec $u = (1, 0, 2, 3)$, $v = (0, 1, 2, 3)$ et $w = (1, 2, 0, 3)$ ;

---

**Exercice 8.**
Soit $\mathbf{E}$ l'ensemble des fonctions continues sur $[-1, 1]$ qui sont affines sur $[-1, 0]$ et sur $[0, 1]$. Démontrer que $\mathbf{E}$ est un espace vectoriel et en donner une base.

---

**Exercice 9.**
Soit

$$E = \{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid (u_n)_n \text{ converge }\}.$$

Montrer que l'ensemble des suites constantes et l'ensemble des suites convergeant vers 0 sont des sous-espaces supplémentaires dans $E$.

---

**Exercice 10.**
Soit $\mathbf{E}$ un espace vectoriel dans lequel tout sous-espace vectoriel admet un supplémentaire. Soit $\mathbf{F}$ un sous-espace vectoriel propre de $\mathbf{E}$ (c'est-à-dire que $\mathbf{F} \neq \{0\}$ et que $\mathbf{E} \neq \mathbf{F}$). Démontrer que $\mathbf{F}$ admet au moins deux supplémentaires distincts.

---