CONCOURS CENTRALE-SUPÉLEC 2021

CORRIGÉ DE MATHÉMATIQUES 2 MP

m.laamoum@gmail.com

Inégalités de Bernstein

I Inégalité polynomiale de Bernstein et applications

I.A Polynômes de Tchebychev

On a $T_0 = 1, T_1 = X$ et $\forall n \in \mathbb{N}, T_{n+2} = 2XT_{n+1} - T_n$.

Q 1.

- Par récurrence sur n . On a $\deg T_0 = 0$ et $\deg T_1 = 1$,supposons que $\deg T_k = k$ pour $k \in [\![0, n]\!]$, comme $T_{n+1} = 2XT_n - T_{n-1}$, $\deg XT_n = n+1$ et $\deg T_{n-1} = n-1$ alors $\deg T_{n+1} = n+1$. Ainsi $\forall n \in \mathbb{N}$, $\deg T_n = n$.

- Soit $(\alpha_k)_{0\leq k\leq n}$ dans $\mathbb{C}^{n+1}$ telle que $\alpha_0 T_0 + ... + \alpha_n T_n = 0$ donc $\alpha_n T_n = -\ \alpha_0 T_0 - ... - \alpha_{n-1}T_{n-1}$.

La suite $(\deg T_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante donc $\deg(\alpha_n T_n) = \deg(-\ \alpha_0 T_0 - ... - \alpha_{n-1}T_{n-1}) \leq n-1$,si $\alpha_n \neq 0$ alors $\deg(\alpha_n T_n) = n$ ce qui est absurde. Ainsi par récurrence (descendante) on a $\alpha_0 = ... = \alpha_n = 0$ et $(T_k)_{0\leq k\leq n}$ est libre .

La famille $(T_k)_{0\leq k\leq n}$ est libre a $n+1$ éléments dans $\mathbb{C}\ _n[X]$ qui est de dimension $n+1$, donc $(T_k)_{0\leq k\leq n}$ est une base de $\mathbb{C}\ _n[X]$

Q 2. Montrons par récurrence que, pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $\theta \in R, T_n(\cos\theta) = \cos(n\theta)$.

C'est vrai pour $n = 0$, $n = 1$, supposons pour tout $k \in [\![0, n]\!]$ et $\theta \in R, T_k(\cos\theta) = \cos(k\theta)$.

On a $T_{n+1}(\cos\theta) = 2\cos\theta\ T_n(\cos\theta) - T_{n-1}(\cos\theta)$, l'hypothèse de récurrence donne

$$T_{n+1}(\cos\theta) = 2\cos(\theta)\ \cos(n\theta) - \cos((n-1)\theta)$$

On sait que $\cos(\theta)\ \cos(n\theta) = \frac{1}{2}(\cos((n+1)\theta) + \cos((n+1)\theta)$, d'où

$$T_{n+1}(\cos\theta) = \cos((n+1)\theta)$$

Q 3. Soit $P \in \mathbb{C}_n[X]$ et $(T_k)_{0\leq k\leq n}$ est une base de $\mathbb{C}_n[X]$ donc $P = \sum\limits_{k=0}^{n} \alpha_k T_k$ avec $\alpha_0, .., \alpha_n \in \mathbb{R}$, par suite

$$P(\cos\theta) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k T_k(\cos\theta) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k \cos(k\theta)$$

Ainsi $\theta \mapsto P(\cos\theta)$ est dans S_n.

Q 4. Soit $x \in [-1, 1]$ alors il existe $\theta \in [0, \pi]$ unique , tel que $\cos\theta = x$, donc $|T_n(x)| = |\cos(n\theta)|$, ce qui donne

$$\sup_{x\in[-1,1]} |T_n(x)| = \sup_{\theta\in[0,\pi]} |\cos(n\theta)| = 1$$

Q 5. Montrons par récurrence que $|\sin(n\theta)| \leqslant n|\sin\theta|$.

C'est vrai pour $n = 0$, supposons le pour n , on a

$$\begin{aligned} |\sin((n+1)\theta)| &\leq |\cos n\theta\ |\,|\sin\theta| + |\cos\theta\ |\,|\sin n\theta| \\ &\leqslant |\sin\theta| + |\sin n\theta|) \end{aligned}$$

l'hypothèse de récurrence donne $|\sin((n+1)\theta)| \leq (n+1)|\sin\theta|$.

On a

$$\sup_{x\in[-1,1]} |T_n'(x)| = \sup_{\theta\in[0,\pi]} |T_n'(\cos\theta)|$$

de la relation $T_n(\cos\theta) = \cos(n\theta)$ on a $\sin(\theta)T_n'(\cos\theta) = n\sin(n\theta)$ donc $|\sin(\theta)T_n'(\cos\theta)| \leq n^2\,|\sin\theta|$ et

$$|T_n'(\cos\theta)| \leq n^2$$

Pour $\theta \neq k\pi$, $T_n'(\cos\theta) = n\frac{\sin(n\theta)}{\sin(\theta)}$ donc $|T_n'(\cos\theta)| \underset{\theta\to 0}{\to} n^2$ et $|T_n'(\cos\theta)| \underset{\theta\to 0}{\to} |T_n'(1)|$, donc $|T_n'(1)| = n^2$.

Ainsi $\sup\limits_{\theta\in[0,\pi]} |T_n'(\cos\theta)| = n^2$.

I.B Inégalité de Bernstein

Q 6. Soit $A \in \mathbb{C}_{2n}[X]$, scindé à racines simples, $(a_1, \ldots, \alpha_{2n})$ ses racines et $B \in \mathbb{C}_{2n-1}[X]$. La décomposition de la fraction $\dfrac{B}{A}$ en éléments simples s'écrit

$$\frac{B(X)}{A(X)} = \sum_{k=1}^{2n} \frac{\alpha_k}{X - a_k}$$

Soit $i \in \ [\![0, n]\!]$ on a $(X - a_i)\dfrac{B(X)}{A(X)} = \alpha_i + (X - a_i)\displaystyle\sum_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{2n} \frac{\alpha_k}{X - a_k}$ donc $\alpha_i = \lim\limits_{t \to a_i} (t - a_i)\dfrac{B(t)}{A(t)}$, comme a_i est racine simple de A alors $\lim\limits_{t \to a_i} \frac{A(t)}{t - a_i} = A'(a_i) \neq 0$ ce qui donne $\alpha_i = \dfrac{B(a_i)}{A(a_i)}$ et $\dfrac{B(X)}{A(X)} = \displaystyle\sum_{k=1}^{2n} \frac{B(\alpha_k)}{(X - \alpha_k) A'(\alpha_k)}$.

Q 7. Soit P dans $\mathbb{C}_{2n}[X]$, et $\lambda \in \mathbb{C}$, $P_\lambda(X) = P(\lambda X) - P(\lambda)$.
On a $P_\lambda(1) = 0$ donc $X - 1$ divise P_λ.

Q 8. La formule de Taylor en λ s'écrit

$$P(X) = P(\lambda) + (X - \lambda) \sum_{k=1}^{2n} \frac{P^{(k)}(\lambda)}{k!}(X - \lambda)^{k-1}$$

donc

$$P(\lambda X) = P(\lambda) + \lambda(X - 1) \sum_{k=1}^{2n} \frac{P^{(k)}(\lambda)}{k!}\lambda^{k-1}(X - 1)^{k-1}$$

et

$$Q_\lambda(X) = \lambda P'(\lambda) + \sum_{k=2}^{2n} \frac{P^{(k)}(\lambda)}{k!}\lambda^{k}(X - 1)^{k-1}$$

ce qui donne $Q_\lambda(1) = \lambda P'(\lambda)$.
On considère le polynôme $R(X) = X^{2n} + 1$. Pour k dans $[\![1, 2n]\!]$, on note $\varphi_k = \frac{\pi}{2n} + \frac{k\pi}{n}$ et $\omega_k = \mathrm{e}^{i\varphi_k}$.

Q 9. Les racines de $R(X) = X^{2n} + 1$ sont les racines d'ordre $2n$ de -1 qui sont $e^{i\frac{(2k+1)\pi}{2n}} = \omega_k$ avec k dans $[\![1, 2n]\!]$, R est unitaire donc

$$R(X) = \prod_{k=1}^{2n} (X - \omega_k).$$

Q 10. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$. La formule (I.1), donne

$$Q_\lambda(X) = \sum_{k=1}^{2n} Q_\lambda(\omega_k) \frac{R(X)}{(X - \omega_k) R'(\omega_k)}$$

on a $Q_\lambda(\omega_k) = \frac{P(\lambda\omega_k) - P(\lambda)}{\omega_k - 1}$ et $R'(\omega_k) = 2n\omega_k^{2n-1} = \dfrac{-2n}{\omega_k}$ d'où

$$Q_\lambda(X) = -\frac{1}{2n} \sum_{k=1}^{2n} \frac{P(\lambda\omega_k) - P(\lambda)}{\omega_k - 1} \frac{X^{2n} + 1}{X - \omega_k}\omega_k$$

On a $Q_\lambda(1) = \lambda P'(\lambda)$ donc

$$\begin{aligned}
\lambda P'(\lambda) &= \frac{1}{2n} \sum_{k=1}^{2n} \frac{P(\lambda\omega_k) - P(\lambda)}{(\omega_k - 1)^2} 2\omega_k \\
&= \frac{1}{2n} \sum_{k=1}^{2n} P(\lambda\omega_k) \frac{2\omega_k}{(1 - \omega_k)^2} - \frac{P(\lambda)}{2n} \sum_{k=1}^{2n} \frac{2\omega_k}{(1 - \omega_k)^2}.
\end{aligned}$$

Q 11. L'égalité (I.2) appliquée au polynôme $P(X) = X^{2n}$ donne

$$2n\lambda^{2n} = \frac{1}{2n} \sum_{k=1}^{2n} \frac{-2\lambda^{2n}}{(\omega_k - 1)^2} 2\omega_k.$$

après simplification

$$\sum_{k=1}^{2n} \frac{\omega_k}{(\omega_k - 1)^2} = -n^2.$$

La formule (I.2) s'écrit alors

$$\forall \lambda \in \mathbb{C}, \quad \lambda P'(\lambda) = \frac{1}{2n} \sum_{k=1}^{2n} P(\lambda \omega_k) \frac{2\omega_k}{(1-\omega_k)^2} + nP(\lambda).$$

Q 12. Soit $f \in \mathcal{S}_n$ donc $f(t) = a_0 + \sum\limits_{k=1}^{n} (a_k \cos(kt) + b_k \sin(kt))$ avec $a_k,\, b_k \in \mathbb{C}\ \forall k \in [\![1, n]\!]$.
On utilise la formule d'Euler pour ecrire

$$\begin{aligned} f(t) &= a_0 + \sum_{k=1}^{n} \left(\alpha_k \mathrm{e}^{ik\theta} + \beta_k \mathrm{e}^{-ik\theta}\right) \\ &= \mathrm{e}^{-in\theta} \left(\mathrm{e}^{in\theta} a_0 + \sum_{k=1}^{n} \left(\alpha_k \mathrm{e}^{i(k+n)\theta} + \beta_k \mathrm{e}^{i(\mathrm{n}-k)\theta} \right) \right) \\ &= \mathrm{e}^{-in\theta} \left(\mathrm{e}^{in\theta} a_0 + \sum_{k=n+1}^{2n} \alpha_{k-n} \mathrm{e}^{ik\theta} + \sum_{k=0}^{n-1} \beta_{n-k} \mathrm{e}^{ik\theta} \right) \end{aligned}$$

Donc $f(\theta) = \mathrm{e}^{-in\theta} U\left(\mathrm{e}^{i\theta}\right)$ avec $U(X) = a_0 X^n + \sum\limits_{k=n+1}^{2n} \alpha_{k-n} X^k + \sum\limits_{k=0}^{n-1} \beta_{n-k} X^k \in \mathbb{C}_{2n}[X]$

Q 13. Soit $k \in [\![1, 2n]\!]$,

$$\begin{aligned} \frac{2\omega_k}{(1-\omega_k)^2} &= \frac{2\left(e^{i\varphi_k/2}\right)^2}{(1-e^{i\varphi_k})^2} \\ &= \frac{2}{(e^{-i\varphi_k/2} - e^{i\varphi_k/2})^2} \\ &= \frac{-1}{2\sin(\varphi_k/2)^2} \end{aligned}$$

On sait que $f(\theta) = \mathrm{e}^{-in\theta} U\left(\mathrm{e}^{i\theta}\right)$ (Q12) avec $U \in \mathbb{C}_{2n}[X]$. On applique la question Q11 à U avec $\lambda = \mathrm{e}^{i\theta}$,

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^{i\theta} U'(\mathrm{e}^{i\theta}) &= \frac{1}{2n} \sum_{k=1}^{2n} U\left(\mathrm{e}^{i(\theta+\varphi_k)}\right) \frac{2\omega_k}{(1-\omega_k)^2} + nU(\mathrm{e}^{i\theta}) \\ &= \frac{-1}{2n} \sum_{k=1}^{2n} U\left(\mathrm{e}^{i(\theta+\varphi_k)}\right) \frac{1}{2\sin(\varphi_k/2)^2} + nU(\mathrm{e}^{i\theta}) \end{aligned}$$

D'autre part

$$\begin{aligned} f'(\theta) &= -in\mathrm{e}^{-in\theta} U\left(\mathrm{e}^{i\theta}\right) + i\mathrm{e}^{i(1-n)\theta} U'\left(\mathrm{e}^{i\theta}\right) \\ &= i\mathrm{e}^{-in\theta} \left(-nU\left(\mathrm{e}^{i\theta}\right) + \mathrm{e}^{\theta} U'\left(\mathrm{e}^{i\theta}\right)\right) \end{aligned}$$

et $\mathrm{e}^{-in\varphi_k} = -i(-1)^k$ donc

$$\begin{aligned} f'(\theta) &= i\mathrm{e}^{-in\theta} \frac{-1}{2n} \sum_{k=1}^{2n} U\left(\mathrm{e}^{i(\theta+\varphi_k)}\right) \frac{1}{2\sin(\varphi_k/2)^2} \\ &= \frac{1}{2n} \sum_{k=1}^{2n} \mathrm{e}^{-i(\theta+\varphi_k)} U\left(\mathrm{e}^{i(\theta+\varphi_k)}\right) \frac{(-1)^k}{2\sin(\varphi_k/2)^2} \\ &= \frac{1}{2n} \sum_{k=1}^{2n} f(\theta+\varphi_k) \frac{(-1)^k}{2\sin(\varphi_k/2)^2} \end{aligned}$$

Q 14. f est bornée sur $\mathbb{R}$ donc $\|f\|_{L^\infty(\mathbb{R})}$existe. Soit $\theta \in \mathbb{R}$ on a

$$|f'(\theta)| \leqslant \frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{2n} |f(\theta+\varphi_k)| \frac{1}{2\sin(\varphi_k/2)^2} \leq \frac{\|f\|_{L^\infty(\mathbb{R})}}{2n}\sum_{k=1}^{2n}\frac{1}{2\sin(\varphi_k/2)^2}.$$

Les questions Q11 et Q12 donnent

$$\sum_{k=1}^{2n}\frac{\omega_k}{(\omega_k-1)^2} = -n^2 \text{ et } \frac{2\omega_k}{(1-\omega_k)^2} = \frac{-1}{2\sin(\varphi_k/2)^2}$$

donc

$$\sum_{k=1}^{2n}\frac{1}{2\sin(\varphi_k/2)^2} = 2n^2$$

ainsi

$$|f'(\theta)| \leqslant n\|f\|_{L^\infty(\mathbb{R})}.$$

I.C Quelques conséquences de l'inégalité (I.4)

Q 15. Soit $x \in [-1,1]$ et $t \in \mathbb{R}$ tel que $x = \cos t$. Soit $P \in \mathbb{C}_n[X]$ posons $f(t) = P(\cos(t))$. D'après la question Q3 on a $f \in \mathcal{S}_n$, la question Q14 donne $|f'(t)| \leqslant n\|f\|_{L^\infty(\mathbb{R})}$. De plus

$$\|f\|_{L^\infty(\mathbb{R})} = \|P\|_{L^\infty([-1,1])}$$

et

$$|f'(t)| = |\sin(t)P'(\cos(t))| = \left|P'(x)\sqrt{1-x^2}\right|$$

ainsi

$$\left|P'(x)\sqrt{1-x^2}\right| \leqslant n\ \|P\|_{L^\infty([-1,1])}$$

Q 16. Soit $Q \in \mathbb{C}_{n-1}[X]$ avec $Q(X) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k X^k$ et $f : \theta \mapsto Q(\cos\theta)\sin\theta$, on a $f(\theta) = \sum\limits_{k=0}^{n-1} a_k \sin\theta\cos^k(\theta)$. Remarquons que

$$\sin\theta\cos^k(\theta) = -\frac{1}{k+1}\left(\cos^{k+1}(\theta)\right)'$$

Comme $(T_h)_{0\leq h\leq k+1}$ est une base de $\mathbb{C}_{k+1}[X]$ alors il existe $\alpha_0,..,\alpha_h \in \mathbb{C}$, $X^{k+1} = \sum\limits_{h=0}^{k+1}\alpha_h T_h(X)$ donc

$$\cos^{k+1}(\theta) = \sum_{h=0}^{k+1}\alpha_h T_h(\cos(\theta)) = \sum_{h=0}^{k+1}\alpha_h\cos(h\theta)$$

et

$$\sin\theta\cos^k(\theta) = \sum_{h=0}^{k+1}\frac{h\alpha_h}{k+1}\sin(h\theta)$$

ce qui permet d'écrire $f(\theta)$ sous la forme $\sum\limits_{k=0}^{n-1} b_k\sin(k\theta)$ ainsi $f \in \mathcal{S}_n$.
Soit $x \in [-1,1]$ et $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $x = \cos\theta$. On a

$$f'(\theta) = \cos(\theta)\, Q(\cos\theta) - \sin^2(\theta)\, Q'(\cos\theta)$$

et $f'(0) = Q(1)$ de plus

$$\|f\|_{L^\infty(\mathbb{R})} = \sup_{-1\leqslant x\leqslant 1}\left|Q(x)\sqrt{1-x^2}\right|$$

L'inégalité $|f'(0)| \leqslant n\|f\|_{L^\infty(\mathbb{R})}$ s'écrit alors

$$|Q(1)| \leqslant n\sup_{-1\leqslant x\leqslant 1}\left|Q(x)\sqrt{1-x^2}\right|$$

Q 17. Soit $R \in \mathbb{C}_{n-1}[X]$ et $t \in [-1,1]$. $S_t(X) = R(tX)$, on a $|S_t(1)| \leqslant n \sup\limits_{-1 \leqslant x \leqslant 1} \left|R(tx)\sqrt{1-x^2}\right|$.

On a $\sqrt{1-x^2} \leq \sqrt{1-(tx)^2}$ donc $|R(tx)|\sqrt{1-x^2} \leq |R(tx)|\sqrt{1-(tx)^2} \leq \sup\limits_{-1 \leqslant x \leqslant 1} \left|R(x)\sqrt{1-x^2}\right|$

et

$$\sup_{-1 \leqslant x \leqslant 1} \left|R(tx)\sqrt{1-x^2}\right| \leq \sup_{-1 \leqslant x \leqslant 1} \left|R(x)\sqrt{1-x^2}\right|$$

Finalement $|R(t)| = |S_t(1)| \leqslant n \sup\limits_{-1 \leqslant x \leqslant 1} \left|R(x)\sqrt{1-x^2}\right|$

Q 18. Soit P dans $\mathbb{C}_n[X]$, la question Q17 appliquée à P donne

$$|P'(t)| \leqslant n \sup_{-1 \leqslant x \leqslant 1} \left|P'(x)\sqrt{1-x^2}\right|$$

De la question Q15 on a

$$\left|P'(x)\sqrt{1-x^2}\right| \leqslant n \, \|P\|_{L^\infty([-1,1])}$$

donc

$$\sup_{-1 \leqslant x \leqslant 1} \left|P'(x)\sqrt{1-x^2}\right| \leqslant n \, \|P\|_{L^\infty([-1,1])}$$

et

$$|P'(t)| \leqslant n^2 \|P\|_{L^\infty([-1,1])}$$

ceci est vrai pout tout t dans $[-1,1]$ d'où

$$\|P'\|_{L^\infty([-1,1])} \leqslant n^2 \|P\|_{L^\infty([-1,1])}$$

Q 19. Il y'a égalité pour les polynômes de Tchebychev. En effet des questions Q4 et Q5 on a $\|T_n\|_{L^\infty([-1,1])} = 1$ et $\|T_n'\|_{L^\infty([-1,1])} = n^2$ donc $\|T_n'\|_{L^\infty([-1,1])} = \|T_n\|_{L^\infty([-1,1])} \, n^2$.

II Inégalités de Bernstein et transformée de Fourier

II.A Transformée de Fourier d'une fonction

Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$. $\hat{f}(\xi) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{e}^{-ix\xi} dx$, $\xi \in \mathbb{R}$

Q 20. La fonction $g : (x,\xi) \mapsto f(x)\mathrm{e}^{-ix\xi}$ est continue sur $\mathbb{R}^2$, $|g(x,\xi)| \leq |f(x)|$et $f \in L^1(\mathbb{R})$,donc $\xi \mapsto f(x)\mathrm{e}^{-ix\xi}$ est intégrable et $\hat{f}$ est bien définie, le théorème de continuité assure que $\hat{f}$ est continue sur $\mathbb{R}$.

Q 21. Soit $f, g \in L^1(\mathbb{R})$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.On a $\alpha f + \beta g \in L^1(\mathbb{R})$ donc $\widehat{\alpha f + \beta g}$ est bien définie, par linéarité de l'intégrale on a $\widehat{\alpha f + \beta g} = \alpha \widehat{f} + \beta \widehat{g}$.

Comme $\left|\hat{f}(\xi)\right| \leq \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| \, dx$ alors $\left\|\hat{f}\right\|_\infty \leq \|f\|_1$,ce qui assure que l'application linéaire $f \mapsto \hat{f}$ est continue de $\left(L^1(\mathbb{R}), \|\cdot\|_1\right)$ dans $(L^\infty(\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$.

Q 22. Soit $f \in L^1(\mathbb{R}), \lambda \in \mathbb{R}_+^*$ et soit g la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ telle que $g(x) = f(\lambda x)$ pour tout réel x.

On sait que $g \in L^1(\mathbb{R})$ si et seulement si $g \in L^1(\mathbb{R}^+)$ et $g \in L^1(\mathbb{R}^-)$. Soit $A \in \mathbb{R}$ on a

$$\int_0^A |g(x)| \, dx = \frac{1}{\lambda} \int_0^{\lambda A} |f(x)| \, dx$$

$f \in L^1(\mathbb{R}^+)$ donc $\lim\limits_{A \to +\infty} \displaystyle\int_0^A |g(x)| \, dx$ existe et $g \in L^1(\mathbb{R}^+)$, de même on a $\lim\limits_{A \to -\infty} \displaystyle\int_A^0 |g(x)| \, dx$ existe et $g \in L^1(\mathbb{R}^-)$, par suite $g \in L^1(\mathbb{R})$.

Par le changement $t = \lambda x$ on obtient

$$\begin{aligned} \hat{g}(\xi) &= \frac{1}{\lambda} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{-i\xi/\lambda} dt \\ &= \frac{1}{\lambda} \widehat{f}\left(\frac{\xi}{\lambda}\right) \end{aligned}$$

II.B Produit de convolution

Q 23. Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$ et $g \in L^\infty(\mathbb{R})$, $|f(t)g(x-t)| \leq \|g\|_\infty |f(t)|$, donc $t \mapsto f(t)g(x-t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$ et $f * g$ est définie sur $\mathbb{R}$. Soit $x \in \mathbb{R}$, le changement $s = x - t$ donne $(f * g)(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(s)g(x-s)ds = (g * f)(x)$.

Q 24. Soit $x \in \mathbb{R}$, $|(f * g)(x)| \leq \|g\|_\infty \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|\,dt$, donc $f * g$ est bornée et $\|f * g\|_\infty \leqslant \|f\|_1 \|g\|_\infty$.

Q 25. Soit $k \in \mathbb{N}$ et g est de classe $\mathcal{C}^k$ telle que les fonctions $g^{(j)}$ sont bornées pour $j \in [\![0, k]\!]$.
Soit $j \in [\![0, k]\!]$ la fonction $h : (t, x) \mapsto f(t)g(x-t)$ est de classe $\mathcal{C}^k$ et

$$\frac{\partial^j h}{\partial x^j}(t, x) = f(t)g^{(j)}(x-t)$$

donc

$$\left|\frac{\partial^j h}{\partial x^j}(t, x)\right| \leq |f(t)| \left\|g^{(j)}\right\|_\infty$$

Ainsi $f * g$ est de classe $\mathcal{C}^k$ et $(f * g)^{(k)} = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g^{(k)}(x-t)dt = f * \left(g^{(k)}\right)$.

Q 26. On suppose que $f \in L^1(\mathbb{R})$, $g \in L^\infty(\mathbb{R})$, $g \in L^1(\mathbb{R})$ et $f * g \in L^1(\mathbb{R})$.
Soit $\xi \in \mathbb{R}$,on a

$$\begin{aligned}
\widehat{f * g}(\xi) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g(x-t)dt\right) \mathrm{e}^{-ix\xi}dx \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-ix\xi}g(x-t)dx\right) dt
\end{aligned}$$

par le changement $s = x - t$ on a $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-ix\xi}g(x-t)dx = \mathrm{e}^{-it\xi} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-i(s+t)\xi}g(s)ds$, ce qui donne

$$\begin{aligned}
\widehat{f * g}(\xi) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{-it\xi} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-i(s+t)\xi}g(s)ds\right) dt \\
&= \hat{f}(\xi)\hat{g}(\xi)
\end{aligned}$$

II.C Introduction d'une fonction plateau

Q 27. Montrons par récurrence que φ est de classe $\mathcal{C}^k$ sur $\mathbb{R}$, $\forall k \in \mathbb{N}$.

– On a φ est continue sur $\mathbb{R}^*$ et $\displaystyle\lim_{\substack{x \to 0 \\ <}} \varphi(x) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} \varphi(x) = 0$, donc φ est de classe $\mathcal{C}^0$ sur $\mathbb{R}$.

– Soit $k \geq 1$, supposons que : φ est de classe $\mathcal{C}^k$ sur $\mathbb{R}$ et

$$\exists P_k \in \mathbb{R}[X], \varphi^{(k)}(t) = \begin{cases} P_k(1/t)\mathrm{e}^{-1/t} & \text{si } t > 0 \\ 0 & \text{si } t \leqslant 0 \end{cases}$$

- $\varphi^{(k)}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$, $\left(\varphi^{(k)}\right)'(t) = 0$ si $t < 0$ et $\left(\varphi^{(k)}\right)'(t) = \frac{1}{t^2}\left(-P_k'(1/t) + P_k(1/t)\right)\mathrm{e}^{-1/t}$ si $t > 0$, posons

$$P_k(X) = X^2\left(-P_k'(X) + P_k(X)\right)$$

alors φ est de classe $\mathcal{C}^{k+1}$ sur $\mathbb{R}^*$ et $\varphi^{(k+1)}(t) = \begin{cases} P_{k+1}(1/t)\mathrm{e}^{-1/t} & \text{si } t > 0 \\ 0 & \text{si } t < 0 \end{cases}$.

- On a

$$\frac{\varphi^{(k)}(t) - \varphi^{(k)}(0)}{t} = \begin{cases} \frac{1}{t}P_{k+1}(1/t)\mathrm{e}^{-1/t} & \text{si } t > 0 \\ 0 & \text{si } t < 0 \end{cases}$$

ce qui donne

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ <}} \frac{\varphi^{(k)}(t) - \varphi^{(k)}(0)}{t} = \lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} \frac{\varphi^{(k)}(t) - \varphi^{(k)}(0)}{t} = 0$$

donc φ est $k + 1$ fois dérivable en 0 et $\varphi^{(k+1)}(0) = 0$.

- $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <}} \varphi^{(k+1)}(t) = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} \varphi^{(k+1)}(t) = 0$ donc φ est de classe $\mathcal{C}^{k+1}$ en 0 .

Ainsi φ est de classe $\mathcal{C}^{k+1}$ sur $\mathbb{R}$ et $\varphi^{(k+1)}(t) = \begin{cases} P_{k+1}(1/t)\mathrm{e}^{-1/t} & \text{si } t > 0 \\ 0 & \text{si } t \leq 0 \end{cases}$

Finalement φ est de classe $\mathcal{C}^k$ $\forall k \in \mathbb{N}$ sur $\mathbb{R}$.

Q 28. Soit $\psi : t \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } t \notin]-1, 1[\\ \mathrm{e}^{1/(t^2-1)} & \text{sinon.} \end{cases}$ définie sur $\mathbb{R}$, on a $\psi(t) = \varphi(1-t^2)$. ψ est composée de deux fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ donc elle est aussi.

Q 29. Soit $\theta : x \mapsto \int_0^x \psi(t)\ dt$ l'unique primitive de ψ s'annulant en 0. Comme $\theta' = \psi$ alors θ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

Soit $x \in]-\infty, -1]$, on a $\psi(t) = 0$ pour $t \in [0, x]$ donc $\theta(x) = 0 = A$.

Soit $x \in [1, +\infty[$,$\theta(x) = \int_0^1 \psi(t)\ dt + \int_1^x \psi(t)\ dt$ et $\int_1^x \psi(t)\ dt = 0$,car $\psi(t) = 0$ pour $t \in [0, x]$, donc $\theta(x) = \int_0^1 \psi(t)\ dt = B$.

De plus $B \neq 0$ car ψ est continue et strictement positive sur $[0, 1]$.

Q 30. Posons $h : x \mapsto \frac{1}{B}\theta(x)$, elle est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, $h(x) = 0$ si $x \in]-\infty, -1]$ et $h(x) = 1$ si $x \in [1, +\infty[$.

On compose h avec une fonction affine $x \mapsto ax + b$ qui envoie -2 sur 1 et -1 sur -1. On a donc $a = 2$ et $b = 3$.

La fonction $x \mapsto h(2x+3)$ est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et $h(2x+3) = \begin{cases} 0 \text{ si } x \in]-\infty, -2] \\ 1 \text{ si } x \in [-1, +\infty[\end{cases}$.

De même on compose h avec la fonction affine $x \mapsto -2x + 3$ qui envoie 2 sur -1 et 1 sur 1 .

La fonction $x \mapsto h(-2x+3)$ est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et $h(-2x+3) = \begin{cases} 0 \text{ si } x \in [2, +\infty[\\ 1 \text{ si } x \in]-\infty, 1] \end{cases}$.

Donc la fonction suivante convient :

$$\rho : x \mapsto h\left(2x+3\right) h\left(-2x+3\right)$$

en effet $\rho \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ et :

Si $x \in [-1, 1]$ alors $h(2x+3) = h(-2x+3) = 1$ donc $\rho(x) = 1$.

Si $x \in \mathbb{R}\backslash[-2, 2]$ alors $h(2x+3) = 0$ ou $h(-2x+3) = 0$ donc $\rho(x) = 0$.

Plus précisément $\rho(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x \in \mathbb{R}\backslash[-2, 2] \\ 1 \text{ si } x \in [-1, 1] \\ h(2x+3) \text{ si } x \in [-2, -1] \\ h(-2x+3) \text{ si } x \in [1, -2] \end{cases}$

II.D Inégalités de Bernstein

Soit r la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ telle que, pour tout réel x,

$$r(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{ix\xi} \rho(\xi) d\xi$$

Q 31. On a $\rho(\xi) = 0$ si $\xi \in \mathbb{R}\backslash[-2, 2]$ donc $\xi \mapsto \mathrm{e}^{ix\xi}\rho(\xi)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$ et r est bien définie sur $\mathbb{R}$.

$$r(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{ix\xi} \rho(\xi) d\xi = \frac{1}{2\pi} \int_{-2}^{+2} \mathrm{e}^{ix\xi} \rho(\xi) d\xi$$

La fonction $(x, \xi) \mapsto \mathrm{e}^{ix\xi}\rho(\xi)$ est de classe $\mathcal{C}^{\ 1}$ sur $\mathbb{R}^2$, et $\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\mathrm{e}^{ix\xi}\rho(\xi)\right) = i\xi\mathrm{e}^{ix\xi}\rho(\xi)$. La fonction $\xi \mapsto \xi\rho(\xi)$ est continue sur le compact $[-2, 2]$, elle est donc bornée, $|\xi\rho(\xi)| \leq M$ et $M \in \mathbb{R}^+$, par suite $\left|\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\mathrm{e}^{ix\xi}\rho(\xi)\right)\right| \leq M$ et la fonction $\xi \mapsto M$ est intégrable sur $[-2, 2]$,ce qui donne que r est de classe $\mathcal{C}^{\ 1}$ sur $\mathbb{R}$ et $r'(x) = \frac{1}{2\pi} \displaystyle\int_{-2}^{+2} i\xi\mathrm{e}^{ix\xi}\rho(\xi) d\xi$.

Q 32. Une double intégration par parties donne

$$\begin{aligned} r(x) &= \frac{1}{2i\pi x}\int_{-2}^{2}\left(\mathrm{e}^{ix\xi}\right)'\rho(\xi)d\xi \\ &= \frac{1}{2i\pi x}\int_{-2}^{2}\mathrm{e}^{ix\xi}\rho'(\xi)d\xi \\ &= \frac{-1}{2\pi x^2}\int_{-2}^{2}\mathrm{e}^{ix\xi}\rho''(\xi)d\xi \end{aligned}$$

ρ'' est bornée sur $[-2,2]$ ce qui donne $x\mapsto x^2 r(x)$ est bornée sur $\mathbb{R}$, et $r(x)=O(\frac{1}{x^2})$ donc r est intégrable sur $\mathbb{R}$. Comme ρ est bornée sur $[-2,2]$ et $r(x)=\frac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-2}^{+2}\mathrm{e}^{ix\xi}\rho(\xi)d\xi$ alors r est bornée sur $\mathbb{R}$.

Q 33. On a $r(\lambda x)=\frac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{ix\lambda\xi}\rho(\xi)d\xi=\frac{1}{2\pi\lambda}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{ixt}\rho(\frac{t}{\lambda})dt$ donc $\widehat{r_\lambda}=\frac{1}{\lambda}\rho_{1/\lambda}$avec $\rho_{1/\lambda}:t\mapsto\rho(\frac{t}{\lambda})$.
Remarquons que $\rho_{1/\lambda}(t)=1$ si $t\in[-\lambda,\lambda]$ et $\hat{f}$ est nulle en dehors de $[-\lambda,\lambda]$ donc $\widehat{f}=\widehat{f}\ \rho_{1/\lambda}=\lambda\widehat{f}\ \widehat{r_\lambda}$, comme $f*r_\lambda$ est intégrable alors $\widehat{f}\ \widehat{r_\lambda}=\widehat{f*r_\lambda}$ et $\widehat{f}=\lambda\widehat{f*r_\lambda}$, ce qui donne $f=\lambda\ f*r_\lambda$.et $\widehat{f}\ \widehat{r_\lambda}=\widehat{f*r_\lambda}$ ainsi $f=\lambda f*r_\lambda$
Q 34. On a r'_λ est bornneé et intégrable sue $\mathbb{R}$ **.** Les question Q24 et Q25 et la relation $f=\lambda f*r_\lambda$ donnent $f'=\lambda f*r'_\lambda$ et $\|f'\|_\infty=\lambda\|f*r'_\lambda\|_\infty\leqslant\|r'_\lambda\|_1\|f\|_\infty$.
On a $\|r'_\lambda\|_1=\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\lambda\,|r'(\lambda t)|\ dt\underset{s=\lambda t}{=}\int_{-\infty}^{+\infty}|r'(s)|\ ds=C$ indépendante de λ,d'où

$$\|f'\|_\infty\leqslant C\lambda\|f\|_\infty.$$