La fonction carré

La fonction carré est donnée par la relation algébrique suivante $f : x \longmapsto x^2$

1. Pour tout nombre réel $x \in \mathbb{R}$ pouvons-nous mettre ce nombre au carré ? En déduire le domaine de définition de la fonction carré.

2. Grâce à un tableau de valeurs, tracer dans un repère orthogonal la courbe associée à la fonction carré sur l'intervalle $[-3\ ;\ 3]$.
(Indication : faites des pas de 0.25 pour choisir vos nombres dans l'intervalle $[-3\ ;\ 3]$)

Définition 1. *Dans un repère orthogonal, la courbe représentative de la fonction carrée est appelée* ***parabole****.*

3. Par lecture graphique donner le tableau de variations de la fonction carré.

4. Par lecture graphique donner le tableau de signes de la fonction carré.

5. Remarquez-vous une symétrie sur la courbe représentative de la fonction carré ? Si oui laquelle ?

6. (a) En utilisant les données calculées pour tracer la courbe de la fonction carrée, comparer les nombres suivants :

   - $f(-3)$ ... $f(3)$ • $f(-2)$ ... $f(2)$ • $f(-1.25)$ ... $f(1.25)$ • $f(-0.75)$ ... $f(0.75)$

   (b) Soit $a \geq 0$, comparer les deux nombres suivants : $f(-a)$ ... $f(a)$
   (Si vous trouvez cela trop abstrait repenser au point précédent)

   Propriété 1. *Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$. La fonction f est dite* ***paire*** *sur $\mathbb{R}$ si pour tout $x \geq 0$*

   $$f(-x) = f(x)$$

   La courbe représentative de la fonction f présentera une symétrie par rapport à l'axe des ordonnées.

   (c) Que pouvez-vous dire sur la parité de la fonction carré ?

7. Résoudre graphiquement et algébriquement les inéquations suivantes :

   a) $f(x) \leq 4$ *b)* $f(x) \geq 3$ *c)* $f(x) < 7$

8. L'objectif est de démontrer pourquoi la fonction carré est décroissante sur l'intervalle $]-\infty\ ;\ 0]$ et croissante sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$

   (a) Soit a et b deux réels. À l'aide d'une identité remarquable donner une forme factorisée de

   $$f(a) - f(b) = a^2 - b^2$$

   (b) Si $a \leq b \leq 0$ que pouvez-vous dire du signe de $f(a) - f(b)$. La fonction carré respecte-t-elle l'ordre entre les abscisses et les ordonnées sur $]-\infty\ ;\ 0]$? Qu'en déduisez-vous ?

   (c) Si $0 \leq a \leq b$ que pouvez-vous dire du signe de $f(a) - f(b)$. La fonction carré respecte-t-elle l'ordre entre les abscisses et les ordonnées sur $[0\ ;\ +\infty[$? Qu'en déduisez-vous ?

La fonction cube

La fonction cube est donnée par la relation algébrique suivante $f:\ x \longmapsto x^3$

1. Pour tout nombre réel $x \in \mathbb{R}$ pouvons-nous mettre ce nombre au cube ? En déduire le domaine de définition de la fonction cube.

2. Grâce à un tableau de valeurs, tracer dans un repère orthogonal la courbe associée à la fonction cube sur l'intervalle $[-3\ ;\ 3]$.
   (Indication : faites des pas de 0.5 pour choisir vos nombres dans l'intervalle $[-3\ ;\ 3]$)

3. Par lecture graphique donner le tableau de variations de la fonction cube.

4. Par lecture graphique donner le tableau de signes de la fonction cube.

5. Remarquez-vous une symétrie sur la courbe représentative de la fonction cube ? Si oui laquelle ?

6. (a) En utilisant les données calculées pour tracer la courbe de la fonction cube, écrire le nombre de gauche en fonction du nombre de droite pour chacun des cas suivants

   - $f(-3)$ *et* $f(3)$ • $f(-2)$ *et* $f(2)$ • $f(-1.5)$ *et* $f(1.5)$ • $f(-0.5)$ *et* $f(0.5)$

   (b) Soit $a \geq 0$, écrire le nombre $f(-a)$ en fonction du nombre $f(a)$
   (Si vous trouvez cela trop abstrait repenser au point précédent)

   Propriété 2. *Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$. La fonction f est dite* ***impaire*** *sur $\mathbb{R}$ si pour tout $x \geq 0$*

   $$f(-x) \ = \ -f(x)$$

   La courbe représentative de la fonction f présentera une symétrie par rapport à l'origine O du repère.

   (c) Que pouvez-vous dire sur la parité de la fonction cube ?

7. Résoudre graphiquement et algébriquement les inéquations suivantes :

   a) $f(x) \ \leq \ 1$ *b)* $f(x) \ \geq \ -8$ *c)* $f(x) \ < \ \dfrac{1}{27}$

8. Soit $a \in \mathbb{R}$, l'objectif est d'étudier la fonction donnée par la relation algébrique suivante

   $$g_a:\ x \longmapsto (x+a)^3$$

   (a) À l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique (Geogebra ou une calculatrice graphique), représenter la courbe de la fonction g_a pour différentes valeurs de a.
   (Vous pouvez prendre $a=-1$, $a=-0.5$, $a=0$, $a=0.5$ et $a=1$. Créer un curseur pourra vous aider.)

   (b) Pour chacune des valeurs de a, étudier l'image de $-a$ par la fonction g_a. Que remarquez-vous ?

   (c) Donner l'expression développée de $(x+a)^3$. C'est une identité remarquable du troisième degré que je vous invite à apprendre par-cœur.

La fonction inverse

La fonction inverse est donnée par la relation algébrique suivante $f : x \longmapsto \dfrac{1}{x}$

1. Pour tout nombre réel $x \in \mathbb{R}$ pouvons-nous diviser le nombre 1 par le nombre x ? En déduire le domaine de définition de la fonction inverse.

2. Grâce à un tableau de valeurs, tracer dans un repère orthogonal la courbe associée à la fonction inverse sur $[-4\ ;\ 0[\ \cup\ ]0\ ;\ 4]$
(Indication : choisissez (2cm = 1 unité) pour l'échelle de votre repère et faites des pas de 0.25 pour choisir vos nombres)

Définition 2. *Dans un repère orthogonal, la courbe représentative de la fonction inverse est appelée* ***hyperbole****.*

3. Par lecture graphique donner le tableau de variations de la fonction inverse. La fonction inverse est-elle décroissante sur $\mathbb{R}^*$?

4. Par lecture graphique donner le tableau de signes de la fonction inverse.

5. Remarquez-vous une symétrie sur la courbe représentative de la fonction inverse ? Si oui laquelle ?

6. (a) En utilisant les données calculées pour tracer la courbe de la fonction inverse, écrire le nombre de gauche en fonction du nombre de droite pour chacun des cas suivants :

   - $f(-3)$ *et* $f(3)$ • $f(-2)$ *et* $f(2)$ • $f(-1.5)$ *et* $f(1.5)$ • $f(-0.5)$ *et* $f(0.5)$

   (b) Soit $a \geq 0$, écrire le nombre $f(-a)$ en fonction du nombre $f(a)$
   (Si vous trouvez cela trop abstrait repenser au point précédent)

   (c) Que pouvez-vous dire sur la parité de la fonction inverse ?

7. Résoudre graphiquement et algébriquement les inéquations suivantes :

   a) $f(x) \leq 0$ *b)* $f(x) \geq 2$ *c)* $f(x) \geq -4$

8. L'objectif est de démontrer pourquoi la fonction inverse est décroissante sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$

   (a) Soit a et b deux réels strictement positifs. Montrer que

   $$f(a) - f(b) = \frac{b-a}{ab}$$

   (b) Si $0 < a \leq b$ que pouvez-vous dire du signe de $f(a) - f(b)$. La fonction inverse respecte-t-elle l'ordre entre les abscisses et les ordonnées sur $[0\ ;\ +\infty[$? Qu'en déduisez-vous ?

La fonction valeur absolue

La fonction valeur absolue donne la partie positive d'un nombre, elle est définie par la relation algébrique suivante $\quad f : x \longmapsto |x|$

Remarque 1. *On rappelle que :* $|x| = \begin{cases} -x & si\ x \leq 0 \\ x & si\ x > 0 \end{cases}$

1. Pour tout nombre réel $x \in \mathbb{R}$ pouvons-nous prendre la partie positive de ce nombre ? En déduire le domaine de définition de la fonction valeur absolue.

2. Grâce à un tableau de valeurs, tracer dans un repère orthonormé la courbe associée à la fonction valeur absolue sur l'intervalle $[-5\ ;\ 5]$.

   Définition 3. *La fonction valeur absolue est une fonction* ***affine par morceaux****.*

3. Par lecture graphique donner le tableau de variations de la fonction valeur absolue.

4. Par lecture graphique donner le tableau de signes de la fonction valeur absolue.

5. Remarquez-vous une symétrie sur la courbe représentative de la fonction valeur absolue ? Si oui laquelle ?

6. (a) En utilisant les données calculées pour tracer la courbe de la fonction valeur absolue, comparer les nombres suivants :

   - $f(-3)$ ... $f(3)$ • $f(-2)$ ... $f(2)$ • $f(-1.25)$ ... $f(1.25)$ • $f(-0.75)$ ... $f(0.75)$

   (b) Soit $a \geq 0$, comparer les deux nombres suivants : $\quad f(-a)$ ... $f(a)$
   (Si vous trouvez cela trop abstrait repenser au point précédent)

   (c) Que pouvez-vous dire sur la parité de la fonction valeur absolue ?

7. Résoudre graphiquement et algébriquement les inéquations suivantes :

   a) $f(x) \leq 4$ $\qquad$ *b)* $f(x) \geq 3$ $\qquad$ *c)* $f(x) > -2$

8. Soit $a \in \mathbb{R}$, l'objectif est d'étudier la fonction donnée par la relation algébrique suivante

$$g_a : x \longmapsto |x - a|$$

   (a) À l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique (Geogebra ou une calculatrice graphique), représenter la courbe de la fonction g_a pour différentes valeurs de a.
   (Vous pouvez prendre $a = -2$, $a = -1$, $a = 0$, $a = 1$ et $a = 2$. Créer un curseur pourra vous aider.)

   (b) Pour chacune des valeurs de a, étudier l'image de a par la fonction g_a. Que remarquez-vous ?

La fonction racine carrée

La fonction racine carrée est donnée par la relation algébrique suivante $\quad f : x \longmapsto \sqrt{x}$

1. Pour tout nombre réel $x \in \mathbb{R}$ existe-t-il une racine carrée du nombre x ? En déduire le domaine de définition de la fonction racine carrée.

2. Grâce à un tableau de valeurs, tracer dans un repère orthogonal la courbe associée à la fonction racine carré sur l'intervalle $[0\ ;\ 16]$
(Indication : regardez l'image des nombres $\{0; 1; 4; 9; 16\}$ *et arrondissez les autres images à* 10^{-1} *près.)*

3. Par lecture graphique donner le tableau de variations de la fonction racine carrée.

4. Par lecture graphique donner le tableau de signes de la fonction racine carrée.

5. Résoudre graphiquement et algébriquement les inéquations suivantes :

   a) $f(x) \leq 2$ $\qquad$ *b)* $f(x) \geq -2$ $\qquad$ *c)* $f(x) < 8$

6. Choisissez deux nombres a et b positifs.
   (a) Calculer les valeurs suivantes : $f(a+b)$, $f(a)$ et $f(b)$

   (b) Comparer les deux valeurs ci-dessous grâce à l'un des symboles $(\leq\ ,\ =\ ,\ \geq)$

   $$f(a+b)\ \ ....\ \ f(a)+f(b)$$

7. L'objectif est de démontrer pourquoi la fonction racine carrée est croissante sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$

   (a) Soit a et b deux réels positifs. En utilisant une astuce de calcul pour faire apparaitre une identité remarquable montrer que :
   $$f(a) - f(b) \ = \ \frac{a-b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$$

   (b) Si $a \leq b$ que pouvez-vous dire du signe de $f(a) - f(b)$. La fonction racine carrée respecte-t-elle l'ordre entre les abscisses et les ordonnées sur $[0\ ;\ +\infty[$?

   (c) Que venez-vous de démontrer sur le sens de variation de la fonction racine carré ?

8. Dans cette question on considère un point A qui se déplace sur la courbe représentative de la fonction racine carrée dans un repère orthonormé. Nous noterons x l'abscisse du point A et O l'origine du repère orthonormé.

   (a) À l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique (Geogebra), représenter cette situation.

   (b) Donner l'ordonnée du point A et rappeler les coordonnées du point O.

   (c) Donner les coordonnées du vecteur $\vec{OA}$

   (d) Calculer $\|\vec{OA}\|$

   (e) Montrer que : $\quad OA \ = \ f(x) \times f(x+1)$