Espaces vectoriels

Fiche amendée par David Chataur et Arnaud Bodin.

1 Définition, sous-espaces

Exercice 1

Montrer que les ensembles ci-dessous sont des espaces vectoriels (sur $\mathbb{R}$) :

— $E_1 = \{f : [0,1] \to \mathbb{R}\}$: l'ensemble des fonctions à valeurs réelles définies sur l'intervalle $[0,1]$, muni de l'addition $f+g$ des fonctions et de la multiplication par un nombre réel $\lambda \cdot f$.

— $E_2 = \{(u_n) : \mathbb{N} \to \mathbb{R}\}$: l'ensemble des suites réelles muni de l'addition des suites définie par $(u_n)+(v_n) = (u_n+v_n)$ et de la multiplication par un nombre réel $\lambda \cdot (u_n) = (\lambda \times u_n)$.

— $E_3 = \{P \in \mathbb{R}[x] \mid \deg P \leqslant n\}$: l'ensemble des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n muni de l'addition $P+Q$ des polynômes et de la multiplication par un nombre réel $\lambda \cdot P$.

Indication ▼ Correction ▼ Vidéo ■ [006868]

Exercice 2

Déterminer lesquels des ensembles E_1, E_2, E_3 et E_4 sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$.

$E_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 3x-7y = z\}$
$E_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2-z^2 = 0\}$
$E_3 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+y-z = x+y+z = 0\}$
$E_4 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z(x^2+y^2) = 0\}$

Indication ▼ Correction ▼ Vidéo ■ [000886]

Exercice 3

1. Décrire les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}$; puis de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$.
2. Dans $\mathbb{R}^3$ donner un exemple de deux sous-espaces dont l'union n'est pas un sous-espace vectoriel.

Indication ▼ Correction ▼ Vidéo ■ [006869]

Exercice 4

Parmi les ensembles suivants reconnaître ceux qui sont des sous-espaces vectoriels.

$E_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+y+a = 0 \text{ et } x+3az = 0\}$
$E_2 = \{f \in \mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \mid f(1) = 0\}$
$E_3 = \{f \in \mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \mid f(0) = 1\}$
$E_4 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x+\alpha y+1 \geqslant 0\}$

Indication ▼ Correction ▼ Vidéo ■ [000888]

Exercice 5

Soit E un espace vectoriel.

1. Soient F et G deux sous-espaces de E. Montrer que
$$F \cup G \text{ est un sous-espace vectoriel de } E \iff F \subset G \text{ ou } G \subset F.$$
2. Soit H un troisième sous-espace vectoriel de E. Prouver que
$$G \subset F \Longrightarrow F \cap (G+H) = G + (F \cap H).$$

Indication ▼ Correction ▼ Vidéo ■ [000893]

2 Systèmes de vecteurs

Exercice 6

1. Soient $v_1 = (2,1,4)$, $v_2 = (1,-1,2)$ et $v_3 = (3,3,6)$ des vecteurs de $\mathbb{R}^3$, trouver trois réels non tous nuls α, β, γ tels que $\alpha v_1 + \beta v_2 + \gamma v_3 = 0$.
2. On considère deux plans vectoriels

$$P_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y + z = 0\}$$

$$P_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y = 0\}$$

trouver un vecteur directeur de la droite $D = P_1 \cap P_2$ ainsi qu'une équation paramétrée.

Indication ▼ Correction ▼ Vidéo ■ [006870]

Exercice 7

Soient dans $\mathbb{R}^4$ les vecteurs $v_1 = (1,2,3,4)$ et $v_2 = (1,-2,3,-4)$. Peut-on déterminer x et y pour que $(x,1,y,1) \in \operatorname{Vect}\{v_1,v_2\}$? Et pour que $(x,1,1,y) \in \operatorname{Vect}\{v_1,v_2\}$?

Indication ▼ Correction ▼ Vidéo ■ [000900]

Exercice 8

Soit E le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ engendré par les vecteurs $v_1 = (2,3,-1)$ et $v_2 = (1,-1,-2)$ et F celui engendré par $w_1 = (3,7,0)$ et $w_2 = (5,0,-7)$. Montrer que E et F sont égaux.

Indication ▼ Correction ▼ Vidéo ■ [000908]

Exercice 9

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et $f_\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto e^{\alpha x}$. Montrer que la famille $(f_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{R}}$ est libre.

Indication ▼ Correction ▼ Vidéo ■ [000917]

3 Somme directe

Exercice 10

Par des considérations géométriques répondez aux questions suivantes :

1. Deux droites vectorielles de $\mathbb{R}^3$ sont-elles supplémentaires ?
2. Deux plans vectoriels de $\mathbb{R}^3$ sont-ils supplémentaires ?
3. A quelle condition un plan vectoriel et une droite vectorielle de $\mathbb{R}^3$ sont-ils supplémentaires ?

Indication ▼ Correction ▼ Vidéo ■ [006871]

Exercice 11

On considère les vecteurs $v_1 = (1,0,0,1)$, $v_2 = (0,0,1,0)$, $v_3 = (0,1,0,0)$, $v_4 = (0,0,0,1)$, $v_5 = (0,1,0,1)$ dans $\mathbb{R}^4$.

1. $\operatorname{Vect}\{v_1,v_2\}$ et $\operatorname{Vect}\{v_3\}$ sont-ils supplémentaires dans $\mathbb{R}^4$?
2. $\operatorname{Vect}\{v_1,v_2\}$ et $\operatorname{Vect}\{v_4,v_5\}$ sont-ils supplémentaires dans $\mathbb{R}^4$?
3. $\operatorname{Vect}\{v_1,v_3,v_4\}$ et $\operatorname{Vect}\{v_2,v_5\}$ sont-ils supplémentaires dans $\mathbb{R}^4$?
4. $\operatorname{Vect}\{v_1,v_4\}$ et $\operatorname{Vect}\{v_3,v_5\}$ sont-ils supplémentaires dans $\mathbb{R}^4$?

Indication ▼ Correction ▼ Vidéo ■ [000920]

Exercice 12

Soient $v_1 = (0,1,-2,1), v_2 = (1,0,2,-1), v_3 = (3,2,2,-1), v_4 = (0,0,1,0)$ et $v_5 = (0,0,0,1)$ des vecteurs de $\mathbb{R}^4$. Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifier votre réponse.

1. $\operatorname{Vect}\{v_1,v_2,v_3\} = \operatorname{Vect}\{(1,1,0,0),(-1,1,-4,2)\}$.
2. $(1,1,0,0) \in \operatorname{Vect}\{v_1,v_2\} \cap \operatorname{Vect}\{v_2,v_3,v_4\}$.
3. $\dim(\operatorname{Vect}\{v_1,v_2\} \cap \operatorname{Vect}\{v_2,v_3,v_4\}) = 1$ (c'est-à-dire c'est une droite vectorielle).
4. $\operatorname{Vect}\{v_1,v_2\} + \operatorname{Vect}\{v_2,v_3,v_4\} = \mathbb{R}^4$.
5. $\operatorname{Vect}\{v_4,v_5\}$ est un sous-espace vectoriel supplémentaire de $\operatorname{Vect}\{v_1,v_2,v_3\}$ dans $\mathbb{R}^4$.

Indication ▼ Correction ▼ Vidéo ■ [000919]

Exercice 13

Soit $E = \Delta^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ l'espace des fonctions dérivables et $F = \{f \in E \mid f(0) = f'(0) = 0\}$. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E et déterminer un supplémentaire de F dans E.

Indication ▼ Correction ▼ Vidéo ■ [000923]

Exercice 14

Soit

$$E = \left\{ (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid (u_n)_n \text{ converge } \right\}.$$

Montrer que l'ensemble des suites constantes et l'ensemble des suites convergeant vers 0 sont des sous-espaces supplémentaires dans E.

Indication ▼ Correction ▼ Vidéo ■ [000926]

Indication pour l'exercice 1 ▲

On vérifiera sur ces exemples la définition donnée en cours.

Indication pour l'exercice 2 ▲

1. E_1 est un sous-espace vectoriel.
2. E_2 n'est pas un sous-espace vectoriel.
3. E_3 est un sous-espace vectoriel.
4. E_4 n'est pas un sous-espace vectoriel.

Indication pour l'exercice 3 ▲

1. Discuter suivant la dimension des sous-espaces.
2. Penser aux droites vectorielles.

Indication pour l'exercice 4 ▲

1. E_1 est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ si et seulement si $a = 0$.
2. E_2 est un sous-espace vectoriel.
3. E_3 n'est pas un espace vectoriel.
4. E_4 n'est pas un espace vectoriel.

Indication pour l'exercice 5 ▲

1. Pour le sens $\Rightarrow$: raisonner par l'absurde et prendre un vecteur de $F \setminus G$ et un de $G \setminus F$. Regarder la somme de ces deux vecteurs.
2. Raisonner par double inclusion, revenir aux vecteurs.

Indication pour l'exercice 6 ▲

1. On pensera à poser un système.
2. Trouver un vecteur non-nul commun aux deux plans.

Indication pour l'exercice 7 ▲

On ne peut pas pour le premier, mais on peut pour le second.

Indication pour l'exercice 8 ▲

Montrer la double inclusion. Utiliser le fait que de manière générale pour $E = \mathrm{Vect}(v_1, \dots, v_n)$ alors :

$$E \subset F \iff \forall i = 1, \dots, n \quad v_i \in F.$$

Indication pour l'exercice 9 ▲

Supposer qu'il existe des réels $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ et des indices $\alpha_1 > \alpha_2 > \dots > \alpha_n$ (tout cela en nombre fini !) tels que

$$\lambda_1 f_{\alpha_1} + \dots + \lambda_n f_{\alpha_n} = 0.$$

Ici le 0 est la fonction constante égale à 0. Regarder quel terme est dominant et factoriser.

Indication pour l'exercice 10 ▲

1. Jamais.
2. Jamais.
3. Considérer un vecteur directeur de la droite.

Indication pour l'exercice 11 ▲

1. Non.
2. Oui.
3. Non.
4. Non.

Indication pour l'exercice 12 ▲

1. Vrai.
2. Vrai.
3. Faux.
4. Faux.
5. Vrai.

Indication pour l'exercice 13 ▲

Soit

$$G = \left\{x \mapsto ax+b \mid (a,b) \in \mathbb{R}^2\right\}.$$

Montrer que G est un supplémentaire de F dans E.

Indication pour l'exercice 14 ▲

Pour une suite (u_n) qui converge vers ℓ regarder la suite $(u_n - \ell)$.

Correction de l'exercice 1 ▲

Pour qu'un ensemble E, muni d'une addition $x+y \in E$ (pour tout $x,y \in E$) et d'une multiplication par un scalaire $\lambda \cdot x \in E$ (pour tout $\lambda \in K, x \in E$), soit un K-espace vectoriel il faut qu'il vérifie les huit points suivants.

1. $x+(y+z)=(x+y)+z$ (pour tout $x,y,z \in E$)
2. il existe un vecteur nul $0 \in E$ tel que $x+0=x$ (pour tout $x \in E$)
3. il existe un opposé $-x$ tel que $x+(-x)=0$ (pour tout $x \in E$)
4. $x+y=y+x$ (pour tout $x,y \in E$)
   Ces quatre premières propriétés font de $(E,+)$ un groupe abélien.
5. $1 \cdot x = x$ (pour tout $x \in E$)
6. $\lambda \cdot (x+y) = \lambda \cdot x + \lambda \cdot y$ (pour tout $\lambda \in K =$, pour tout $x,y \in E$)
7. $(\lambda+\mu) \cdot x = \lambda \cdot x + \mu \cdot x$ (pour tout $\lambda, \mu \in K$, pour tout $x \in E$)
8. $(\lambda \times \mu) \cdot x = \lambda \cdot (\mu \cdot x)$ (pour tout $\lambda, \mu \in K$, pour tout $x \in E$)

Il faut donc vérifier ces huit points pour chacun des ensembles (ici $K=\mathbb{R}$).
Commençons par E_1.

1. $f+(g+h)=(f+g)+h$; en effet on bien pour tout $t \in [0,1]$: $f(t)+\big(g(t)+h(t)\big)=\big(f(t)+g(t)\big)+h(t)$ d'où l'égalité des fonctions $f+(g+h)$ et $(f+g)+h$. Ceci est vrai pour tout $f,g,h \in E_1$.
2. le vecteur nul est ici la fonction constante égale à 0, que l'on note encore 0, on a bien $f+0=f$ (c'est-à-dire pour tout $x \in [0,1]$, $(f+0)(t)=f(t)$, ceci pour toute fonction f).
3. il existe un opposé $-f$ définie par $-f(t)=-\big(f(t)\big)$ tel que $f+(-f)=0$
4. $f+g=g+f$ (car $f(t)+g(t)=g(t)+f(t)$ pour tout $t \in [0,1]$).
5. $1 \cdot f = f$; en effet pour tout $t \in [0,1]$, $(1 \cdot f)(t) = 1 \times f(t) = f(t)$. Et une fois que l'on compris que $\lambda \cdot f$ vérifie par définition $(\lambda \cdot f)(t) = \lambda \times f(t)$ les autres points se vérifient sans peine.
6. $\lambda \cdot (f+g) = \lambda \cdot f + \lambda \cdot g$
7. $(\lambda+\mu) \cdot f = \lambda \cdot f + \mu \cdot f$
8. $(\lambda \times \mu) \cdot f = \lambda \cdot (\mu \cdot f)$; en effet pour tout $t \in [0,1]$, $(\lambda \times \mu) f(t) = \lambda(\mu f(t))$

Voici les huit points à vérifier pour E_2 en notant u la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$

1. $u+(v+w)=(u+v)+w$
2. le vecteur nul est la suite dont tous les termes sont nuls.
3. La suite $-u$ est définie par $(-u_n)_{n\in\mathbb{N}}$
4. $u+v=v+u$
5. $1 \cdot u = u$
6. $\lambda \cdot (u+v) = \lambda \cdot u + \lambda \cdot v$: montrons celui-ci en détails par définition $u+v$ est la suite $(u_n+v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et par définition de la multiplication par un scalaire $\lambda \cdot (u+v)$ est la suite $\big(\lambda \times (u_n+v_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ qui est bien la suite $\big(\lambda u_n + \lambda v_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ qui est exactement la suite $\lambda \cdot u + \lambda \cdot v$.
7. $(\lambda+\mu) \cdot u = \lambda \cdot u + \mu \cdot v$
8. $(\lambda \times \mu) \cdot u = \lambda \cdot (\mu \cdot u)$

Voici ce qu'il faut vérifier pour E_3, après avoir remarqué que la somme de deux polynômes de degré $\leqslant n$ est encore un polynôme de degré $\leqslant n$ (même chose pour $\lambda \cdot P$), on vérifie :

1. $P+(Q+R)=(P+Q)+R$
2. il existe un vecteur nul $0 \in E_3$: c'est le polynôme nul
3. il existe un opposé $-P$ tel que $P+(-P)=0$
4. $P+Q=Q+P$
5. $1 \cdot P = P$

6. $\lambda \cdot (P+Q) = \lambda \cdot P + \lambda \cdot Q$
7. $(\lambda + \mu) \cdot P = \lambda \cdot P + \mu \cdot P$
8. $(\lambda \times \mu) \cdot P = \lambda \cdot (\mu \cdot P)$

Correction de l'exercice 2 ▲

1. (a) $(0,0,0) \in E_1$.
   (b) Soient (x,y,z) et (x',y',z') deux éléments de E_1. On a donc $3x - 7y = z$ et $3x' - 7y' = z'$. Donc $3(x+x') - 7(y+y') = (z+z')$, d'où $(x+x', y+y', z+z')$ appartient à E_1.
   (c) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $(x,y,z) \in E_1$. Alors la relation $3x - 7y = z$ implique que $3(\lambda x) - 7(\lambda y) = \lambda z$ donc que $\lambda(x,y,z) = (\lambda x, \lambda y, \lambda z)$ appartient à E_1.
2. $E_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 - z^2 = 0\}$ c'est-à-dire $E_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = z \text{ ou } x = -z\}$. Donc $(1,0,-1)$ et $(1,0,1)$ appartiennent à E_2 mais $(1,0,-1) + (1,0,1) = (2,0,0)$ n'appartient pas à E_2 qui n'est en conséquence pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
3. E_3 est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$. En effet :
   (a) $(0,0,0) \in E_3$.
   (b) Soient (x,y,z) et (x',y',z') deux éléments de E_3. On a donc $x+y-z = x+y+z = 0$ et $x'+y'-z' = x'+y'+z' = 0$. Donc $(x+x') + (y+y') - (z+z') = (x+x') + (y+y') + (z+z') = 0$ et $(x,y,z) + (x',y',z') = (x+x', y+y', z+z')$ appartient à E_3.
   (c) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $(x,y,z) \in E_3$. Alors la relation $x+y-z = x+y+z = 0$ implique que $\lambda x + \lambda y - \lambda z = \lambda x + \lambda y + \lambda z = 0$ donc que $\lambda(x,y,z) = (\lambda x, \lambda y, \lambda z)$ appartient à E_3.
4. Les vecteurs $(1,0,0)$ et $(0,0,1)$ appartiennent à E_4 mais leur somme $(1,0,0) + (0,0,1) = (1,0,1)$ ne lui appartient pas donc E_4 n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

Correction de l'exercice 3 ▲

1. L'espace vectoriel $\mathbb{R}$ a deux sous-espaces : celui formé du vecteur nul $\{0\}$ et $\mathbb{R}$ lui-même.
   L'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$ a trois types de sous-espaces : $\{0\}$, une infinité de sous-espaces de dimension 1 (ce sont les droites vectorielles) et $\mathbb{R}^2$ lui-même.
   Enfin, l'espace $\mathbb{R}^3$ a quatre types de sous-espaces : le vecteur nul, les droites vectorielles, les plans vectoriels et lui-même.
2. On considère deux droites vectorielles de $\mathbb{R}^3$ dont des vecteurs directeurs u et v ne sont pas colinéaires alors le vecteur $u+v$ n'appartient à aucune de ces deux droites, l'union de celles-ci n'est pas un espace vectoriel.

Correction de l'exercice 4 ▲

1. E_1 : non si $a \neq 0$ car alors $0 \notin E_1$; oui, si $a = 0$ car alors E_1 est l'intersection des sous-espaces vectoriels $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+y = 0\}$ et $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = 0\}$.
2. E_2 est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
3. E_3 : non, car la fonction nulle n'appartient pas à E_3.
4. E_4 : non, en fait E_4 n'est même pas un sous-groupe de $(\mathbb{R}^2, +)$ car $(2,0) \in E_4$ mais $-(2,0) = (-2,0) \notin E_4$.

Correction de l'exercice 5 ▲

1. Sens $\Leftarrow$. Si $F \subset G$ alors $F \cup G = G$ donc $F \cup G$ est un sous-espace vectoriel. De même si $G \subset F$.
   Sens $\Rightarrow$. On suppose que $F \cup G$ est un sous-espace vectoriel. Par l'absurde supposons que F n'est pas inclus dans G et que G n'est pas inclus dans F. Alors il existe $x \in F \setminus G$ et $y \in G \setminus F$. Mais alors $x \in F \cup G$, $y \in F \cup G$ donc $x + y \in F \cup G$ (car $F \cup G$ est un sous-espace vectoriel). Comme $x + y \in F \cup G$ alors $x + y \in F$ ou $x + y \in G$.

— Si $x+y \in F$ alors, comme $x \in F$, $(x+y)+(-x) \in F$ donc $y \in F$, ce qui est absurde.
— Si $x+y \in G$ alors, comme $y \in G$, $(x+y)+(-y) \in G$ donc $x \in G$, ce qui est absurde.
Dans les deux cas nous obtenons une contradiction. Donc F est inclus dans G ou G est inclus dans F.

2. Supposons $G \subset F$.
   — Inclusion $\supset$. Soit $x \in G+(F\cap H)$. Alors il existe $a \in G$, $b \in F\cap H$ tels que $x=a+b$. Comme $G \subset F$ alors $a \in F$, de plus $b \in F$ donc $x=a+b \in F$. D'autre part $a \in G$, $b \in H$, donc $x=a+b \in G+H$. Donc $x \in F\cap(G+H)$.
   — Inclusion $\subset$. Soit $x \in F\cap(G+H)$. $x \in G+H$ alors il existe $a \in G$, $b \in H$ tel que $x=a+b$. Maintenant $b=x-a$ avec $x \in F$ et $a \in G \subset F$, donc $b \in F$, donc $b \in F\cap H$. Donc $x=a+b \in G+(F\cap H)$.

Correction de l'exercice 6 ▲

1.

$$\begin{aligned}
& \alpha v_1+\beta v_2+\gamma v_3=0 \\
\iff & \alpha(2,1,4)+\beta(1,-1,2)+\gamma(3,3,6)=(0,0,0) \\
\iff & \big(2\alpha+\beta+3\gamma, \alpha-\beta+3\gamma, 4\alpha+2\beta+6\gamma\big)=(0,0,0) \\
\iff & \begin{cases} 2\alpha+\beta+3\gamma & =0 \\ \alpha-\beta+3\gamma & =0 \\ 4\alpha+2\beta+6\gamma & =0 \end{cases} \\
\iff & \cdots \qquad \text{(on résout le système)} \\
\iff & \alpha=-2t, \beta=t, \gamma=t \quad t \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

   Si l'on prend $t=1$ par exemple alors $\alpha=-2$, $\beta=1$, $\gamma=1$ donne bien $-2v_1+v_2+v_3=0$. Cette solution n'est pas unique, les autres coefficients qui conviennent sont les $(\alpha=-2t, \beta=t, \gamma=t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

2. Il s'agit donc de trouver un vecteur $v=(x,y,z)$ dans P_1 et P_2 et donc qui doit vérifier $x-y+z=0$ et $x-y=0$:

$$\begin{aligned}
& v=(x,y,z) \in P_1\cap P_2 \\
\iff & x-y+z=0 \text{ et } x-y=0 \\
\iff & \begin{cases} x-y-z=0 \\ x-y=0 \end{cases} \\
\iff & \cdots \qquad \text{(on résout le système)} \\
\iff & (x=t, y=t, z=0) \quad t \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

   Donc, si l'on fixe par exemple $t=1$, alors $v=(1,1,0)$ est un vecteur directeur de la droite vectorielle D, une équation paramétrique étant $D=\{(t,t,0) \mid t \in \mathbb{R}\}$.

Correction de l'exercice 7 ▲

1.

$$\begin{aligned}
& (x,1,y,1) \in \operatorname{Vect}\{v_1,v_2\} \\
\iff & \exists \lambda,\mu \in \mathbb{R} \qquad (x,1,y,1) = \lambda(1,2,3,4) + \mu(1,-2,3,-4) \\
\iff & \exists \lambda,\mu \in \mathbb{R} \qquad (x,1,y,1) = (\lambda,2\lambda,3\lambda,4\lambda) + (\mu,-2\mu,3\mu,-4\mu) \\
\iff & \exists \lambda,\mu \in \mathbb{R} \qquad (x,1,y,1) = (\lambda+\mu, 2\lambda-2\mu, 3\lambda+3\mu, 4\lambda-4\mu) \\
\implies & \exists \lambda,\mu \in \mathbb{R} \qquad 1 = 2(\lambda-\mu) \text{ et } 1 = 4(\lambda-\mu) \\
\implies & \exists \lambda,\mu \in \mathbb{R} \qquad \lambda-\mu = \frac{1}{2} \text{ et } \lambda-\mu = \frac{1}{4}
\end{aligned}$$

Ce qui est impossible (quelque soient x,y). Donc on ne peut pas trouver de tels x,y.

2. On fait le même raisonnement :

$$\begin{aligned}
& (x,1,1,y) \in \operatorname{Vect}\{v_1,v_2\} \\
iff\ & \exists \lambda,\mu \in \mathbb{R} \qquad (x,1,1,y) = (\lambda+\mu, 2\lambda-2\mu, 3\lambda+3\mu, 4\lambda-4\mu) \\
\iff & \exists \lambda,\mu \in \mathbb{R} \qquad \begin{cases} x &= \lambda+\mu \\ 1 &= 2\lambda-2\mu \\ 1 &= 3\lambda+3\mu \\ y &= 4\lambda-4\mu \end{cases} \\
\iff & \exists \lambda,\mu \in \mathbb{R} \qquad \begin{cases} \lambda &= \frac{5}{12} \\ \mu &= -\frac{1}{12} \\ x &= \frac{1}{3} \\ y &= 2 \end{cases}.
\end{aligned}$$

Donc le seul vecteur $(x,1,1,y)$ qui convienne est $(\frac{1}{3},1,1,2)$.

Correction de l'exercice 8 ▲

Montrons d'abord que $E \subset F$. On va d'abord montrer que $v_1 \in F$ et $v_2 \in F$.
Tout d'abord $v_1 \in F \iff v_1 \in \operatorname{Vect}\{w_1,w_2\} \iff \exists \lambda,\mu \quad v_1 = \lambda w_1 + \mu w_2$.
Il s'agit donc de trouver ces λ,μ. Cela se fait en résolvant un système (ici on peut même le faire de tête) on trouve la relation $7(2,3,-1) = 3(3,7,0) - (5,0,-7)$ ce qui donne la relation $v_1 = \frac{3}{7}w_1 - \frac{1}{7}w_2$ et donc $v_1 \in F$.
De même $7v_2 = -w_1 + 2w_2$ donc $v_2 \in F$.
Maintenant v_1 et v_2 sont dans l'espace vectoriel F, donc toute combinaison linéaire de v_1 et v_2 aussi, c'est-à-dire : pour tout λ,μ, on a $\lambda v_1 + \mu v_2 \in F$. Ce qui implique $E \subset F$.

Il reste à montrer $F \subset E$. Il s'agit donc d'écrire w_1 (puis w_2) en fonction de v_1 et v_2. On trouve $w_1 = 2v_1 - v_2$ et $w_2 = v_1 + 3v_2$. Encore une fois cela entraîne $w_1 \in E$ et $w_2 \in E$ donc $\operatorname{Vect}\{w_1,w_2\} \subset E$ d'où $F \subset E$.
Par double inclusion on a montré $E = F$.

Correction de l'exercice 9 ▲

À partir de la famille $(f_\alpha)_{\alpha\in\mathbb{R}}$ nous considérons une combinaison linéaire (qui ne correspond qu'à un nombre *fini* de termes).
Soient $\alpha_1 > \alpha_2 > \ldots > \alpha_n$ des réels distincts que nous avons ordonnés, considérons la famille (finie) : $(f_{\alpha_i})_{i=1,\ldots,n}$.
Supposons qu'il existe des réels $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$ tels que $\sum_{i=1}^n \lambda_i f_{\alpha_i} = 0$. Cela signifie que, quelque soit $x \in \mathbb{R}$, alors $\sum_{i=1}^n \lambda_i f_{\alpha_i}(x) = 0$, autrement dit pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\lambda_1 e^{\alpha_1 x} + \lambda_2 e^{\alpha_2 x} + \cdots + \lambda_n e^{\alpha_n x} = 0.$$

Le terme qui domine est $e^{\alpha_1 x}$ (car $\alpha_1 > \alpha_2 > \cdots$). Factorisons par $e^{\alpha_1 x}$:

$$e^{\alpha_1 x}\left(\lambda_1 + \lambda_2 e^{(\alpha_2-\alpha_1)x} + \cdots + \lambda_n e^{(\alpha_n-\alpha_1)x}\right) = 0.$$

Mais $e^{\alpha_1 x} \neq 0$ donc :

$$\lambda_1 + \lambda_2 e^{(\alpha_2-\alpha_1)x} + \cdots + \lambda_n e^{(\alpha_n-\alpha_1)x} = 0.$$

Lorsque $x \to +\infty$ alors $e^{(\alpha_i-\alpha_1)x} \to 0$ (pour tout $i \geqslant 2$, car $\alpha_i - \alpha_1 < 0$). Donc pour $i \geqslant 2$, $\lambda_i e^{(\alpha_i-\alpha_1)x} \to 0$ et en passant à la limite dans l'égalité ci-dessus on trouve :

$$\lambda_1 = 0.$$

Le premier coefficients est donc nul. On repart de la combinaison linéaire qui est maintenant $\lambda_2 f_2 + \cdots + \lambda_n f_n = 0$ et en appliquant le raisonnement ci-dessus on prouve par récurrence $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0$. Donc la famille $(f_\alpha)_{\alpha\in\mathbb{R}}$ est une famille libre.

Correction de l'exercice 10 ▲

1. Si les deux droites vectorielles sont distinctes alors elles engendrent un plan vectoriel et donc pas $\mathbb{R}^3$ tout entier. Si elles sont confondues c'est pire : elles n'engendrent qu'une droite. Dans tout les cas elles n'engendrent pas $\mathbb{R}^3$ et ne sont donc pas supplémentaires.
2. Si P et P' sont deux plans vectoriels alors $P\cap P'$ est une droite vectorielle si $P \neq P'$ ou le plan P tout entier si $P = P'$. Attention, tous les plans vectoriels ont une équation du type $ax+by+cz = 0$ et doivent passer par l'origine, il n'existe donc pas deux plans parallèles par exemple. Donc l'intersection $P\cap P'$ n'est jamais réduite au vecteur nul. Ainsi P et P' ne sont pas supplémentaires.
3. Soit D une droite et P un plan, u un vecteur directeur de D. Si le vecteur u appartient au plan P alors $D \subset P$ et les espaces ne sont pas supplémentaires (ils n'engendrent pas tout $\mathbb{R}^3$). Si $u \notin P$ alors d'une part $D\cap P$ est juste le vecteur nul d'autre part D et P engendrent tout $\mathbb{R}^3$; D et P sont supplémentaires.
   Détaillons un exemple : si P est le plan d'équation $z = 0$ alors il est engendré par les deux vecteurs $v = (1,0,0)$ et $w = (0,1,0)$. Soit D une droite de vecteur directeur $u = (a,b,c)$.
   Alors $u \notin P \iff u \notin \mathrm{Vect}\{v,w\} \iff c \neq 0$. Dans ce cas on bien que d'une part que $D = \mathrm{Vect}\{u\}$ intersecté avec P est réduit au vecteur nul. Ainsi $D\cap P = \{(0,0,0)\}$. Et d'autre part tout vecteur $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ appartient à $D+P = \mathrm{Vect}\{u,v,w\}$. Il suffit de remarquer que $(x,y,z) - \frac{z}{c}(a,b,c) = (x-\frac{za}{c}, y-\frac{zb}{c}, 0) = (x-\frac{za}{c})(1,0,0) + (y-\frac{zb}{c})(0,1,0)$. Et ainsi $(x,y,z) = \frac{z}{c}u + (x-\frac{za}{c})v + (y-\frac{zb}{c})w$. Donc $D+P = \mathbb{R}^3$.
   Bilan on a bien $D\oplus P = \mathbb{R}^3$: D et P sont en somme directe.

Correction de l'exercice 11 ▲

1. Non. Tout d'abord par définition $\mathrm{Vect}\{v_1,v_2\} + \mathrm{Vect}\{v_3\} = \mathrm{Vect}\{v_1,v_2,v_3\}$, Nous allons trouver un vecteur de $\mathbb{R}^4$ qui n'est pas dans $\mathrm{Vect}\{v_1,v_2\} + \mathrm{Vect}\{v_3\}$. Il faut tâtonner un peu pour le choix, par exemple faisons le calcul avec $u = (0,0,0,1)$.
   $u \in \mathrm{Vect}\{v_1,v_2,v_3\}$ si et seulement si il existe des réels α,β,γ tels que $u = \alpha v_1 + \beta v_2 + \gamma v_3$. Si l'on écrit les vecteurs verticalement, on cherche donc α,β,γ tels que :

$$\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix} + \gamma\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}$$

   Ce qui est équivalent à trouver α,β,γ vérifiant le système linéaire :

$$\begin{cases} 0 = \alpha\cdot 1 + \beta\cdot 0 + \gamma\cdot 0 \\ 0 = \alpha\cdot 0 + \beta\cdot 0 + \gamma\cdot 1 \\ 0 = \alpha\cdot 0 + \beta\cdot 1 + \gamma\cdot 0 \\ 1 = \alpha\cdot 1 + \beta\cdot 0 + \gamma\cdot 0 \end{cases} \quad \text{qui équivaut à} \quad \begin{cases} 0 = \alpha \\ 0 = \gamma \\ 0 = \beta \\ 1 = \alpha \end{cases}$$

Il n'y a clairement aucune solution à ce système (les trois premières lignes impliquent $\alpha = \beta = \gamma = 0$ et cela rentre alors en contradiction avec la quatrième).

Un autre type de raisonnement, beaucoup plus rapide, est de dire que ces deux espaces ne peuvent engendrés tout $\mathbb{R}^4$ car il n'y pas assez de vecteurs en effet 3 vecteurs ne peuvent engendrer l'espace $\mathbb{R}^4$ de dimension 4.

2. Oui. Notons $F = \mathrm{Vect}\{v_1, v_2\}$ et $G = \mathrm{Vect}\{v_4, v_5\}$. Pour montrer $F \oplus G = \mathbb{R}^4$ il faut montrer $F \cap G = \{(0,0,0,0)\}$ et $F + G = \mathbb{R}^4$.

   (a) Montrons $F \cap G = \{(0,0,0,0\}$. Soit $u \in F \cap G$, d'une part $u \in F = \mathrm{Vect}\{v_1, v_2\}$ donc il existe $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tels que $u = \alpha v_1 + \beta v_2$. D'autre part $u \in G = \mathrm{Vect}\{v_4, v_5\}$ donc il existe $\gamma, \delta \in \mathbb{R}$ tels que $u = \gamma v_4 + \delta v_5$. On a écrit u de deux façons donc on a l'égalité $\alpha v_1 + \beta v_2 = \gamma v_4 + \delta v_5$. En écrivant les vecteurs comme des vecteurs colonnes cela donne

   $$\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \gamma \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \delta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

   Donc $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ est solution du système linéaire suivant :

   $$\begin{cases} \alpha = 0 \\ 0 = \delta \\ \beta = 0 \\ \alpha = \gamma + \delta \end{cases}$$

   Cela implique $\alpha = \beta = \gamma = \delta = 0$ et donc $u = (0,0,0,0)$. Ainsi le seul vecteur de $F \cap G$ est le vecteur nul.

   (b) Montrons $F + G = \mathbb{R}^4$. $F + G = \mathrm{Vect}\{v_1, v_2\} + \mathrm{Vect}\{v_4, v_5\} = \mathrm{Vect}\{v_1, v_2, v_4, v_5\}$. Il faut donc montrer que n'importe quel vecteur $u = (x_0, y_0, z_0, t_0)$ de $\mathbb{R}^4$ s'écrit comme une combinaison linéaire de v_1, v_2, v_4, v_5. Fixons u et cherchons $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$ tels que $\alpha v_1 + \beta v_2 + \gamma v_4 + \delta v_5 = u$. Après avoir considéré les vecteurs comme des vecteurs colonnes cela revient à résoudre le système linéaire :

   $$\begin{cases} \alpha = x_0 \\ \delta = y_0 \\ \beta = z_0 \\ \alpha + \gamma + \delta = t_0 \end{cases}$$

   Nous étant donné un vecteur $u = (x_0, y_0, z_0, t_0)$ on a calculé qu'en choisissant $\alpha = x_0$, $\beta = z_0$, $\gamma = t_0 - x_0 - y_0$, $\delta = y_0$ on obtient bien $\alpha v_1 + \beta v_2 + \gamma v_4 + \delta v_5 = u$. Ainsi tout vecteur est engendré par $F + G$.

   Ainsi $F \cap G = \{(0,0,0,0)\}$ et $F + G = \mathbb{R}^4$ donc $F \oplus G = \mathbb{R}^4$.

3. Non. Ces deux espaces ne sont pas supplémentaires car il y a trop de vecteurs ! Il engendrent tout, mais l'intersection n'est pas triviale. En effet on remarque assez vite que $v_5 = v_3 + v_4$ est dans l'intersection. On peut aussi obtenir ce résultat en résolvant un système.

4. Non. Il y a bien quatre vecteurs mais il existe des relations entre eux.

   On peut montrer $\mathrm{Vect}\{v_1, v_4\}$ et $\mathrm{Vect}\{v_3, v_5\}$ ne sont pas supplémentaires de deux façons. Première méthode : leur intersection est non nulle, par exemple $v_4 = v_5 - v_3$ est dans l'intersection. Deuxième méthode : les deux espaces n'engendrent pas tout, en effet il est facile de voir que $(0,0,1,0) \notin \mathrm{Vect}\{v_1, v_4\} + \mathrm{Vect}\{v_3, v_5\} = \mathrm{Vect}\{v_1, v_4, v_3, v_5\}$.

Correction de l'exercice 12 ▲

Faisons d'abord une remarque qui va simplifier les calculs :

$$v_3 = 2v_1 + 3v_2.$$

Donc en fait nous avons $\mathrm{Vect}\{v_1,v_2,v_3\} = \mathrm{Vect}\{v_1,v_2\}$ et c'est un espace de dimension 2, c'est-à-dire un plan vectoriel. Par la même relation on trouve que $\mathrm{Vect}\{v_1,v_2,v_3\} = \mathrm{Vect}\{v_2,v_3\}$.

1. Vrai. $\mathrm{Vect}\{(1,1,0,0),(-1,1,-4,2)\}$ est inclus dans $\mathrm{Vect}\{v_1,v_2,v_3\}$, car $(1,1,0,0) = v_1+v_2$ et $(-1,1,-4,2) = v_1 - v_2$. Comme ils sont de même dimension ils sont égaux (autrement dit : comme un plan est inclus dans un autre alors ils sont égaux).
2. Vrai. On a $(1,1,0,0) = v_1+v_2$ donc $(1,1,0,0) \in \mathrm{Vect}\{v_1,v_2\}$, or $\mathrm{Vect}\{v_1,v_2\} = \mathrm{Vect}\{v_2,v_3\} \subset \mathrm{Vect}\{v_2,v_3,v_4\}$. Donc $(1,1,0,0) \in \mathrm{Vect}\{v_1,v_2\} \cap \mathrm{Vect}\{v_2,v_3,v_4\}$.
3. Faux. Toujours la même relation nous donne que $\mathrm{Vect}\{v_1,v_2\} \cap \mathrm{Vect}\{v_2,v_3,v_4\} = \mathrm{Vect}\{v_1,v_2\}$ donc est de dimension 2. C'est donc un plan vectoriel et pas une droite.
4. Faux. Encore une fois la relation donne que $\mathrm{Vect}\{v_1,v_2\} + \mathrm{Vect}\{v_2,v_3,v_4\} = \mathrm{Vect}\{v_1,v_2,v_4\}$, or 3 vecteurs ne peuvent engendrer $\mathbb{R}^4$ qui est de dimension 4.
5. Vrai. Faire le calcul : l'intersection est $\{0\}$ et la somme est $\mathbb{R}^4$.

Correction de l'exercice 13 ▲

Analysons d'abord les fonctions de E qui ne sont pas dans F : ce sont les fonctions h qui vérifient $h(0) \neq 0$ **ou** $h'(0) \neq 0$. Par exemple les fonctions constantes $x \mapsto b$, $(b \in \mathbb{R}^*)$ ou les homothéties $x \mapsto ax$, $(a \in \mathbb{R}^*)$ n'appartiennent pas à F.

Cela nous donne l'idée de poser

$$G = \left\{x \mapsto ax+b \mid (a,b) \in \mathbb{R}^2\right\}.$$

Montrons que G est un supplémentaire de F dans E.

Soit $f \in F \cap G$, alors $f(x) = ax+b$ (car $f \in G$) et $f(0) = b$ et $f'(0) = a$; mais $f \in F$ donc $f(0) = 0$ donc $b = 0$ et $f'(0) = 0$ donc $a = 0$. Maintenant f est la fonction nulle : $F \cap G = \{0\}$.

Soit $h \in E$, alors remarquons que pour $f(x) = h(x) - h(0) - h'(0)x$ la fonction f vérifie $f(0) = 0$ et $f'(0) = 0$ donc $f \in F$. Si nous écrivons l'égalité différemment nous obtenons

$$h(x) = f(x) + h(0) + h'(0)x.$$

Posons $g(x) = h(0) + h'(0)x$, alors la fonction $g \in G$ et

$$h = f + g,$$

ce qui prouve que toute fonction de E s'écrit comme somme d'une fonction de F et d'une fonction de G : $E = F + G$.

En conclusion nous avons montré que $E = F \oplus G$.

Correction de l'exercice 14 ▲

On note F l'espace vectoriel des suites constantes et G l'espace vectoriel des suites convergeant vers 0.

1. $F \cap G = \{0\}$. En effet une suite constante qui converge vers 0 est la suite nulle.
2. $F + G = E$. Soit (u_n) un élément de E. Notons ℓ la limite de (u_n). Soit (v_n) la suite définie par $v_n = u_n - \ell$, alors (v_n) converge vers 0. Donc $(v_n) \in G$. Notons (w_n) la suite constante égale à ℓ. Alors nous avons $u_n = \ell + u_n - \ell$, ou encore $u_n = w_n + v_n$, ceci pour tout $n \in \mathbb{N}$. En terme de suite cela donne $(u_n) = (w_n) + (v_n)$. Ce qui donne la décomposition cherchée.

Bilan : F et G sont en somme directe dans E : $E = F \oplus G$.