Exercice 1 - Hypothèse affaiblie

Soit f définie sur un intervalle ouvert I contenant 0, continue sur I. On suppose en outre que $\lim_{x\to 0}\frac{f(2x)-f(x)}{x}=0$. Montrer que f est dérivable en 0.

Exercice 2 - Calcul de dérivée n-ième

Soit $n\in\mathbb{N}$. Montrer que la dérivée d'ordre $n+1$ de $x^n e^{1/x}$ est

$$\frac{(-1)^{n+1}}{x^{n+2}}e^{1/x}.$$

Exercice 3 - Polynômes de Laguerre

On pose, pour tout entier naturel n et pour tout réel x,

$$h_n(x)=x^n e^{-x} \text{ et } L_n(x)=\frac{e^x}{n!}h_n^{(n)}(x).$$

1. Montrer que, pour tout entier n, L_n est une fonction polynômiale. Préciser son degré et son coefficient dominant.
2. Plus précisément, montrer que, pour tout $k\in\{0,\dots,n\}$, il existe $Q_k\in\mathbb{R}[X]$ tel que, pour tout $x\in\mathbb{R}$, on a
$$h_n^{(k)}(x)=x^{n-k}e^{-x}Q_k(x).$$

Exercice 4 - Limite de la dérivée et limite de $f(x)/x$.

Soit $f:]0,+\infty[\to\mathbb{R}$ une fonction dérivable et $\ell\in\mathbb{R}$ tel que $\lim_{x\to+\infty}f'(x)=\ell$. L'objectif de cet exercice est de démontrer que $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\ell$.

1. On suppose dans cette question que $\ell=0$. Soit $\varepsilon>0$.
   (a) Montrer qu'il existe $A>0$ tel que, pour tout $x\geq A$, on a
   $$\left|\frac{f(x)}{x}\right|\leq\left|\frac{f(A)}{x}\right|+\varepsilon.$$
   (b) En déduire le résultat dans ce cas.
2. Démontrer le résultat dans le cas général.
3. Réciproquement, est-il vrai que pour toute fonction dérivable $f:]0,+\infty[\to\mathbb{R}$ telle que $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\ell$, alors on a $\lim_{x\to+\infty}f'(x)=\ell$?

Exercice 5 - Polynômes

Déterminer la dérivée d'ordre n de la fonction f définie par $f(x)=(x-a)^n(x-b)^n$ (a,b sont des réels). En étudiant le cas $a=b$, trouver la valeur de $\sum_{k=0}^n\binom{n}{k}^2$.

Cette feuille d'exercices a été conçue à l'aide du site https://www.bibmath.net