1. Montrer que $\mathscr{T}_n$ est un espace vectoriel.
2. Soit $T \in \mathscr{T}_n$. Calculer, pour tout entier k, les intégrales
$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(kx)T(x)\,\mathrm{d}x \text{ et } \int_{-\pi}^{\pi} \cos(kx)T(x)\,\mathrm{d}x\,.$$
3. Montrer que la famille composée des fonctions $x \mapsto \cos(kx)$ pour $k \in [\![0, n]\!]$ et des fonctions $x \mapsto \sin(jx)$ pour $j \in [\![1, n]\!]$ est une base de $\mathscr{T}_n$. En déduire la dimension de $\mathscr{T}_n$.

●●○ Exercice 7

Soit E de dimension finie et u, $v \in \mathscr{L}(E)$ vérifiant $u^2 + u \circ v = \mathrm{Id}$. Montrer que u et v commutent.

●●● Exercice 8

Soit E un espace vectoriel de dimension finie, $u \in \mathscr{L}(E)$ nilpotent d'indice p (tel que $u^p = 0_{\mathscr{L}(E)}$ et $u^{p-1} \neq 0_{\mathscr{L}(E)}$) et $\Phi : v \in \mathscr{L}(E) \mapsto u \circ v - v \circ u$.

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $v \in \mathscr{L}(E)$,
$$\Phi^n(v) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} u^{n-k} \circ v \circ u^k.$$
2. Montrer que Φ est nilpotente et majorer son indice de nilpotence.
3. Soit $a \in \mathscr{L}(E)$. Montrer qu'il existe $b \in \mathscr{L}(E)$ tel que $a \circ b \circ a = a$.
4. En déduire l'indice de nilpotence de Φ.

●●○ Exercice 9

Soit E, F deux espaces vectoriels de dimension finie et $u \in \mathscr{L}(E)$. Déterminer la dimension du sous-espace
$$\{v \in \mathscr{L}(E, F),\ v \circ u = 0_{\mathscr{L}(E,F)}\}.$$