COLLE 19 = DÉTERMINANTS

Connaître son cours :

1. Soit β une base d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension n. Monter que n vecteurs $x_1, \ldots, x_n \in E$ forme une base de E si, et seulement si, $\det_\beta (x_1, \ldots, x_n) \neq 0$.
2. Soit $\Phi : M \longmapsto M^T$, calculer $\det(\Phi)$.
3. Soient $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ une matrice carrée et $B = (b_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ où $b_{i,j} = (-1)^{i+j} a_{i,j}$. Calculer $\det(B)$ en fonction de $\det(A)$.

Exercices :

Exercice 1. (**)

Soit $a, b \in \mathbb{C}$. Donner une forme factorisée au déterminant suivant.

$$\begin{vmatrix} 1 & a & b \\ a & 1 & b \\ b & a & 1 \end{vmatrix}$$

Exercice 2. (***)

Soit $x \in \mathbb{R}$. Calculer

$$\begin{vmatrix} 1+x^2 & -x & 0 & \dots & 0 \\ -x & 1+x^2 & -x & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & -x & 1+x^2 & -x \\ 0 & \dots & 0 & -x & 1+x^2 \end{vmatrix}.$$

Exercice 3. (**)

Notons, pour tout $k \in [\![1, n]\!], S_k = \sum_{i=1}^k i$. Calculer le déterminant

$$\begin{vmatrix} S_1 & S_1 & S_1 & \cdots & S_1 \\ S_1 & S_2 & S_2 & \cdots & S_2 \\ S_1 & S_2 & S_3 & \cdots & S_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ S_1 & S_2 & S_3 & \cdots & S_n \end{vmatrix}.$$

Exercice 4. (***)

Soit $n \geq 2$ et $P \in \mathbb{R}_{n-2}[X]$. Calculer le déterminant

$$\begin{vmatrix} P(1) & P(2) & \cdots & P(n) \\ P(2) & P(3) & \cdots & P(n+1) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ P(n) & P(n+1) & \cdots & P(2n-1) \end{vmatrix}$$

Exercice 5. (**)

Calculer le déterminant de la matrice $M_n \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ de coefficients $m_{i,j}$ égaux à 1 si $i = j, i = 1$ ou $j = 1$, nuls sinon.

$$\begin{vmatrix} 1 & \dots & \dots & 1 \\ \vdots & \ddots & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 1 & & & 1 \end{vmatrix}.$$

Exercice 6. (***)

Soient $a_1, \dots, a_n$ des nombres complexes, $\omega = e^{2i\pi/n}$, et A et M les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ a_n & a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_2 & a_3 & \dots & \dots & a_1 \end{pmatrix},$$

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & \dots & 1 \\ 1 & \omega & \omega^2 & \dots & \omega^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ 1 & \omega^{n-1} & \omega^{2(n-1)} & \dots & \omega^{(n-1)(n-1)} \end{pmatrix}.$$

Calculer $\det(AM)$ et en déduire $\det(A)$.
