

Calculs de primitives et d'intégrales

Exercices de Jean-Louis Rouget. Retrouver aussi cette fiche sur www.maths-france.fr

* très facile ** facile *** difficulté moyenne **** difficile ***** très difficile

I : Incontournable T : pour travailler et mémoriser le cours

Exercice 1

Calculer les primitives des fonctions suivantes en précisant le ou les intervalles considérés :

- 1) $\frac{1}{x^3+1}$
- 2) $\frac{x^2}{x^3+1}$
- 3) $\frac{x^5}{x^3-x^2-x+1}$
- 4) $\frac{1-x}{(x^2+x+1)^5}$
- 5) $\frac{1}{x(x^2+1)^2}$
- 6) $\frac{x^2+x}{x^6+1}$
- 7) $\frac{1}{x^4+1}$
- 8) $\frac{1}{(x^4+1)^2}$
- 9) $\frac{1}{x^8+x^4+1}$
- 10) $\frac{x}{(x^4+1)^3}$
- 11) $\frac{1}{(x+1)^7-x^7-1}$

[Correction ▼](#)

[005466]

Exercice 2

Calculer les primitives des fonctions suivantes en précisant le ou les intervalles considérés :

- 1) $\frac{1}{\cos x}$ et $\frac{1}{\operatorname{ch} x}$
- 2) $\frac{1}{\sin x}$ et $\frac{1}{\operatorname{sh} x}$
- 3) $\frac{1}{\tan x}$ et $\frac{1}{\operatorname{th} x}$
- 4) $\frac{\sin^2(x/2)}{x-\sin x}$
- 5) $\frac{1}{2+\sin^2 x}$
- 6) $\frac{\cos x}{\cos x+\sin x}$
- 7) $\frac{\cos(3x)}{\sin x+\sin(3x)}$
- 8) $\frac{1}{\cos^4 x+\sin^4 x}$
- 9) $\frac{\sin x \sin(2x)}{\sin^4 x+\cos^4 x+1}$
- 10) $\frac{\tan x}{1+\sin(3x)}$
- 11) $\frac{\cos x+2\sin x}{\sin x-\cos x}$
- 12) $\frac{\sin x}{\cos(3x)}$
- 13) $\frac{1}{\alpha \cos^2 x+\beta \sin^2 x}$
- 14) $\frac{\operatorname{ch}^3 x}{1+\operatorname{sh} x}$
- 15) $\sqrt{\operatorname{ch} x-1}$
- 16) $\frac{\operatorname{th} x}{1+\operatorname{ch} x}$
- 17) $\frac{1}{\operatorname{sh}^5 x}$
- 18) $\frac{1}{1-\operatorname{ch} x}$

[Correction ▼](#)

[005467]

Exercice 3

Calculer les primitives des fonctions suivantes en précisant le ou les intervalles considérés :

- 1) $\frac{1}{\sqrt{x^2+2x+5}}$ et $\sqrt{x^2+2x+5}$
- 2) $\frac{1}{\sqrt{2x-x^2}}$
- 3) $\frac{\sqrt{1+x^6}}{x}$
- 4) $\frac{1}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}$
- 5) $\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$
- 6) $\frac{x^2+1}{x\sqrt{x^4-x^2+1}}$
- 7) $\sqrt{\frac{1-\sqrt{x}}{\sqrt{x}}}$
- 8) $\frac{1}{1+\sqrt{1+x^2}}$
- 9) $\frac{\sqrt[3]{x^3+1}}{x^2}$ et $\frac{1}{\sqrt[3]{x^3+1}}$
- 10) $\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt[3]{x+1}}$

[Correction ▼](#)

[005468]

Exercice 4

Calculer les primitives des fonctions suivantes en précisant le ou les intervalles considérés :

- 1) $\frac{1}{x \ln x}$
- 2) $\arcsin x$
- 3) $\arctan x$
- 4) $\arccos x$
- 5) $\operatorname{argsh} x$
- 6) $\operatorname{argch} x$
- 7) $\operatorname{argth} x$
- 8) $\ln(1+x^2)$
- 9) $e^{\arccos x}$
- 10) $\cos x \ln(1+\cos x)$
- 11) $\frac{\arctan x}{\sqrt{x}}$
- 12) $\frac{x e^x}{(x+1)^2}$
- 13) $(\frac{x}{e})^x \ln x$
- 14) $x^n \ln x$ ($n \in \mathbb{N}$)
- 15) $e^{\alpha x} \cos(\alpha x)$ ($(\alpha, \alpha) \in (\mathbb{R}^*)^2$)
- 16) $\sin(\ln x)$ et $\cos(\ln x)$
- 17) $\frac{\sqrt{x^n+1}}{x}$
- 18) $x^2 e^x \sin x$

[Correction ▼](#)

[005469]

Exercice 5

Calculer les intégrales suivantes (a, b réels donnés, p et q entiers naturels donnés)

- 1) $\int_{1/a}^a \frac{\ln x}{x^2+1} (0 < a)$
- 2) $\int_0^\pi 2 \cos(px) \cos(qx) dx$ et $\int_0^\pi 2 \cos(px) \sin(qx) dx$ et $\int_0^\pi 2 \sin(px) \sin(qx) dx$
- 3) $\int_a^b \sqrt{(x-a)(b-x)} dx$
- 4) $\int_{-2}^2 (|x-1| + |x| + |x+1| + |x+2|) dx$
- 5) $\int_{1/2}^2 \left(1 + \frac{1}{x^2}\right) \arctan x dx$
- 6) $\int_{-1}^1 \sqrt{1 + |x(1-x)|} dx$
- 7) $\int_0^\pi \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x}$
- 8) $\int_1^x (\ln t)^n dt (n \in \mathbb{N}^*)$

[Correction ▼](#)

[005470]

Exercice 6

Condition nécessaire et suffisante sur a, b, c et d pour que les primitives de $\frac{(x-a)(x-b)}{(x-c)^2(x-d)^2}$ soient rationnelles (a, b, c et d réels donnés).

[Correction ▼](#)

[005471]

Exercice 7

Etude de $f(x) = \int_{-1}^1 \frac{\sin x}{1 - 2t \cos x + t^2} dt$.

[Correction ▼](#)

[005472]

Exercice 8

Etude de $f(x) = \int_0^1 \text{Max}(x, t) dt$.

[Correction ▼](#)

[005473]

Exercice 9 Intégrales de WALLIS

Pour n entier naturel, on pose $W_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n x dx$.

1. Calculer W_0 et W_1 . Déterminer une relation entre W_n et W_{n+2} et en déduire W_{2n} et W_{2n+1} en fonction de n .
2. Etudier les variations de la suite (W_n) et en déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{W_{n+1}}{W_n}$.
3. Montrer que la suite $(nW_n W_{n-1})_{n \in \mathbb{N}^*}$ est constante. En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} W_n$, puis un équivalent simple de W_n . En écrivant $\int_0^{\pi/2} = \int_0^\alpha + \int_\alpha^{\pi/2}$, retrouver directement $\lim_{n \rightarrow +\infty} W_n$.
4. Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} n \left(\frac{1.3 \dots (2n-1)}{2.4 \dots (2n)} \right)^2 = \frac{1}{\pi}$. (Formule de WALLIS)

[005474]

Exercice 10

Pour n entier naturel, on pose $I_n = \int_0^{\pi/4} \tan^n x dx$.

1. Calculer I_0 et I_1 . Trouver une relation entre I_n et I_{n+2} . En déduire I_n en fonction de n .
2. Montrer que I_n tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$, et en déduire les limites des suites (u_n) et (v_n) définies par : $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k} (n \in \mathbb{N}^*)$ et $v_n = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{2k-1}$.

[Correction ▼](#)

[005475]

Correction de l'exercice 1 ▲

1. I est l'un des deux intervalles $]-\infty, -1[$ ou $]-1, +\infty[$. f est continue sur I et admet donc des primitives sur I .

$$\frac{1}{X^3+1} = \frac{1}{(X+1)(X+j)(X+j^2)} = \frac{a}{X+1} + \frac{b}{X+j} + \frac{\bar{b}}{X+j^2},$$

où $a = \frac{1}{3(-1)^2} = \frac{1}{3}$ et $b = \frac{1}{3(-j)^2} = \frac{j}{3}$. Par suite,

$$\begin{aligned} \frac{1}{X^3+1} &= \frac{1}{3} \left(\frac{1}{X+1} + \frac{j}{X+j} + \frac{j^2}{X+j^2} \right) = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{X+1} + \frac{-X+2}{X^2-X+1} \right) = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{X+1} - \frac{1}{2} \frac{2X-1}{X^2-X+1} + \frac{3}{2} \frac{1}{X^2-X+1} \right) \\ &= \frac{1}{3} \left(\frac{1}{X+1} - \frac{1}{2} \frac{2X-1}{X^2-X+1} + \frac{3}{2} \frac{1}{(X-\frac{1}{2})^2 + (\frac{\sqrt{3}}{2})^2} \right). \end{aligned}$$

Mais alors,

$$\int \frac{1}{x^3+1} dx = \frac{1}{3} \left(\ln|x+1| - \frac{1}{2} \ln(x^2-x+1) + \frac{3}{2} \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan \frac{x-\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} \right) = \frac{1}{6} \ln \frac{(x-1)^2}{x^2-x+1} + \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan \frac{2x-1}{\sqrt{3}} + C.$$

2. I est l'un des deux intervalles $]-\infty, -1[$ ou $]1, +\infty[$. Sur I , $\int \frac{x^2}{x^3+1} dx = \frac{1}{3} \ln(x^3+1) + C$.
3. $X^3 - X^2 - X + 1 = X^2(X-1) - (X-1) = (X^2-1)(X-1) = (X-1)^2(X+1)$. Donc, la décomposition en éléments simples de $f = \frac{X^5}{X^3-X^2-X+1}$ est de la forme $aX^2 + bX + c + \frac{d_1}{X-1} + \frac{d_2}{(X-1)^2} + \frac{e}{X+1}$.

Détermination de a , b et c . La division euclidienne de X^5 par $X^3 - X^2 - X + 1$ s'écrit $X^5 = (X^2 + X + 2)(X^3 - X^2 - X + 1) + 2X^2 + X - 2$. On a donc $a = 1$, $b = 1$ et $c = 2$.

$e = \lim_{x \rightarrow -1} (x+1)f(x) = \frac{(-1)^5}{(-1-1)^2} = -\frac{1}{4}$. Puis, $d_2 = \lim_{x \rightarrow 1} (x-1)^2 f(x) = \frac{1^5}{1+1} = \frac{1}{2}$. Enfin, $x = 0$ fournit $0 = c - d_1 + d_2 + e$ et donc, $d_1 = -2 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = -\frac{9}{4}$. Finalement,

$$\frac{X^5}{X^3 - X^2 - X + 1} = X^2 + X + 2 - \frac{9}{4} \frac{1}{X-1} + \frac{1}{2} \frac{1}{(X-1)^2} - \frac{1}{4} \frac{1}{X+1},$$

et donc, I désignant l'un des trois intervalles $]-\infty, -1[$, $] -1, 1[$ ou $]1, +\infty[$, on a sur I

$$\int \frac{x^5}{x^3 - x^2 - x + 1} dx = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 2x - \frac{1}{2(x-1)} - \frac{1}{4} \ln|x+1| + C.$$

4. Sur \mathbb{R} ,

$$\begin{aligned} \int \frac{1-x}{(x^2+x+1)^5} dx &= -\frac{1}{2} \int \frac{2x+1}{(x^2+x+1)^5} dx + \frac{3}{2} \int \frac{1}{(x^2+x+1)^5} dx = \frac{1}{8(x^2+x+1)^4} + \frac{3}{2} \int \frac{1}{((x+\frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4})^5} dx \\ &= \frac{1}{8(x^2+x+1)^4} + \frac{3}{2} \int \frac{1}{((\frac{\sqrt{3}}{2}u)^2 + \frac{3}{4})^5} \frac{\sqrt{3}}{2} du \quad (\text{en posant } x + \frac{1}{2} = \frac{u\sqrt{3}}{2}) \\ &= \frac{1}{8(x^2+x+1)^4} + \frac{2^8 \sqrt{3}}{3^4} \int \frac{1}{(u^2+1)^5} du. \end{aligned}$$

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, posons alors $I_n = \int \frac{du}{(u^2+1)^n}$. Une intégration par parties fournit

$$I_n = \frac{u}{(u^2+1)^n} + 2n \int \frac{u^2+1-1}{(u^2+1)^{n+1}} du = \frac{u}{(u^2+1)^n} + 2n(I_n - I_{n+1}),$$

et donc, $I_{n+1} = \frac{1}{2n} \left(\frac{u}{(u^2+1)^n} + (2n-1)I_n \right)$. Mais alors,

$$\begin{aligned}
I_5 &= \frac{1}{8} \frac{u}{(u^2+1)^4} + \frac{7}{8} I_4 = \frac{1}{8} \frac{u}{(u^2+1)^4} + \frac{7}{8.6} \frac{u}{(u^2+1)^3} + \frac{7.5}{8.6} I_3 \\
&= \frac{1}{8} \frac{u}{(u^2+1)^4} + \frac{7}{8.6} \frac{u}{(u^2+1)^3} + \frac{7.5}{8.6.4} \frac{u}{(u^2+1)^2} + \frac{7.5.3}{8.6.4} I_2 \\
&= \frac{1}{8} \frac{u}{(u^2+1)^4} + \frac{7}{8.6} \frac{u}{(u^2+1)^3} + \frac{7.5}{8.6.4} \frac{u}{(u^2+1)^2} + \frac{7.5.3}{8.6.4.2} \frac{u}{u^2+1} + \frac{7.5.3.1}{8.6.4.2} I_1 \\
&= \frac{1}{8} \frac{u}{(u^2+1)^4} + \frac{7}{8.6} \frac{u}{(u^2+1)^3} + \frac{7.5}{8.6.4} \frac{u}{(u^2+1)^2} + \frac{7.5.3}{8.6.4.2} \frac{u}{u^2+1} + \frac{7.5.3.1}{8.6.4.2} \arctan u + C.
\end{aligned}$$

Maintenant,

$$u^2 + 1 = \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x + \frac{1}{2}\right)\right)^2 + 1 = \frac{4}{3}x^2 + \frac{4}{3}x + \frac{1}{3} + 1 = \frac{4}{3}(x^2 + x + 1).$$

Par suite,

$$\begin{aligned}
\frac{2^8\sqrt{3}}{3^4} \int \frac{1}{(u^2+1)^5} du &= \frac{2^8\sqrt{3}}{3^4} \left(\frac{1}{8} \frac{3^4}{4^4} \frac{\frac{2}{\sqrt{3}}(x+\frac{1}{2})}{(x^2+x+1)^4} + \frac{7}{8.6} \frac{3^3}{4^3} \frac{\frac{2}{\sqrt{3}}(x+\frac{1}{2})}{(x^2+x+1)^3} + \frac{7.5}{8.6.4} \frac{3^2}{4^2} \frac{\frac{2}{\sqrt{3}}(x+\frac{1}{2})}{(x^2+x+1)^2} \right. \\
&\quad \left. + \frac{7.5.3}{8.6.4.2} \frac{3}{4} \frac{\frac{2}{\sqrt{3}}(x+\frac{1}{2})}{x^2+x+1} + \frac{7.5.3.1}{8.6.4.2} \arctan \frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C \right). \\
&= \frac{1}{8} \frac{2x+1}{(x^2+x+1)^4} + \frac{7}{36} \frac{2x+1}{(x^2+x+1)^3} + \frac{35}{108} \frac{2x+1}{(x^2+x+1)^2} + \frac{35}{54} \frac{2x+1}{x^2+x+1} \\
&\quad + \frac{70\sqrt{3}}{81} \arctan \frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C,
\end{aligned}$$

(il reste encore à réduire au même dénominateur).

5. On pose $u = x^2$ et donc $du = 2x dx$

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{x(x^2+1)^2} dx &= \int \frac{x}{x^2(x^2+1)^2} dx = \frac{1}{2} \int \frac{du}{u(u+1)^2} = \frac{1}{2} \int \left(\frac{1}{u} - \frac{1}{u+1} - \frac{1}{(u+1)^2} \right) du \\
&= \frac{1}{2} (\ln|u| - \ln|u+1| + \frac{1}{u+1}) + C \\
&= \frac{1}{2} \left(\ln \frac{x^2}{x^2+1} + \frac{1}{x^2+1} \right) + C.
\end{aligned}$$

6. $\int \frac{x^2+x}{x^6+1} dx = \int \frac{x^2}{x^6+1} dx + \int \frac{x}{x^6+1} dx.$

Ensuite, en posant $u = x^3$ et donc $du = 3x^2 dx$,

$$\int \frac{x^2}{x^6+1} dx = \frac{1}{3} \int \frac{1}{u^2+1} du = \frac{1}{3} \arctan u + C = \frac{1}{3} \arctan(x^3) + C,$$

et en posant $u = x^2$ et donc $du = 2x dx$,

$$\begin{aligned}
\int \frac{x}{x^6+1} dx &= \frac{1}{2} \int \frac{1}{u^3+1} du = \frac{1}{6} \ln \frac{(u-1)^2}{u^2-u+1} + \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan \frac{2u-1}{\sqrt{3}} + C \text{ (voir 1))} \\
&= \frac{1}{6} \ln \frac{(x^2-1)^2}{x^4-x^2+1} + \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan \frac{2x^2-1}{\sqrt{3}} + C
\end{aligned}$$

Finalement,

$$\int \frac{x^2+x}{x^6+1} dx = \frac{1}{3} \arctan(x^3) + \frac{1}{6} \ln \frac{(x^2-1)^2}{x^4-x^2+1} + \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan \frac{2x^2-1}{\sqrt{3}} + C.$$

7. $\frac{1}{X^4+1} = \sum_{k=0}^3 \frac{\lambda_k}{X-z_k}$ où $z_k = e^{i(\frac{\pi}{4}+k\frac{\pi}{2})}$. De plus, $\lambda_k = \frac{1}{4z_k^3} = \frac{z_k}{4z_k^4} = -\frac{z_k}{4}$. Ainsi,

$$\begin{aligned}\frac{1}{X^4+1} &= -\frac{1}{4} \left(\frac{e^{i\pi/4}}{X-e^{i\pi/4}} + \frac{e^{-i\pi/4}}{X-e^{-i\pi/4}} + \frac{-e^{i\pi/4}}{X+e^{i\pi/4}} + \frac{-e^{-i\pi/4}}{X+e^{-i\pi/4}} \right) \\ &= -\frac{1}{4} \left(\frac{\sqrt{2}X-2}{X^2-\sqrt{2}X+1} - \frac{\sqrt{2}X+2}{X^2+\sqrt{2}X+1} \right).\end{aligned}$$

Mais,

$$\frac{\sqrt{2}X-2}{X^2-\sqrt{2}X+1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{2X-\sqrt{2}}{X^2-\sqrt{2}X+1} - \frac{1}{(X-\frac{1}{\sqrt{2}})^2+(\frac{1}{\sqrt{2}})^2},$$

et donc,

$$\int \frac{\sqrt{2}x-2}{x^2-\sqrt{2}x+1} dx = \frac{1}{\sqrt{2}} \ln(x^2-\sqrt{2}x+1) - \sqrt{2} \arctan(\sqrt{2}x-1) + C,$$

et de même,

$$\int \frac{\sqrt{2}x+2}{x^2+\sqrt{2}x+1} dx = \frac{1}{\sqrt{2}} \ln(x^2+\sqrt{2}x+1) + \sqrt{2} \arctan(\sqrt{2}x+1) + C.$$

Finalement,

$$\int \frac{1}{x^4+1} dx = \frac{1}{\sqrt{2}} \ln \frac{x^2-\sqrt{2}x+1}{x^2+\sqrt{2}x+1} - \sqrt{2}(\arctan(\sqrt{2}x-1) + \arctan(\sqrt{2}x+1)) + C.$$

8. Une intégration par parties fournit

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{x^4+1} dx &= \frac{x}{x^4+1} + \int \frac{4x^4}{(x^4+1)^2} dx = \frac{x}{x^4+1} + 4 \int \frac{x^4+1-1}{(x^4+1)^2} dx \\ &= \frac{x}{x^4+1} + 4 \int \frac{1}{x^4+1} dx - 4 \int \frac{1}{(x^4+1)^2} dx\end{aligned}$$

Et donc,

$$\int \frac{1}{(x^4+1)^2} dx = \frac{1}{4} \left(\frac{x}{x^4+1} + 3 \int \frac{1}{x^4+1} dx \right) = \dots$$

9. Posons $R = \frac{1}{X^8+X^4+1}$.

$$\begin{aligned}X^8+X^4+1 &= \frac{X^{12}-1}{X^4-1} = \frac{\prod_{k=0}^{11} (X-e^{2ik\pi/12})}{(X-1)(X+1)(X-i)(X+i)} \\ &= (X-e^{i\pi/6})(X-e^{-i\pi/6})(X+e^{i\pi/6})(X+e^{-i\pi/6})(X-j)(X-j^2)(X+j)(X+j^2).\end{aligned}$$

R est réelle et paire. Donc,

$$R = \frac{a}{X-j} + \frac{\bar{a}}{X-j^2} - \frac{a}{X+j} - \frac{\bar{a}}{X+j^2} + \frac{b}{X-e^{i\pi/6}} + \frac{\bar{b}}{X-e^{-i\pi/6}} - \frac{b}{X+e^{i\pi/6}} - \frac{\bar{b}}{X+e^{-i\pi/6}}.$$

$$a = \frac{1}{8j^7+4j^3} = \frac{1}{4(2j+1)} = \frac{2j^2+1}{4(2j+1)(2j^2+1)} = \frac{-1-2j}{12} \text{ et donc,}$$

$$\frac{a}{X-j} + \frac{\bar{a}}{X-j^2} = \frac{1}{12} \left(\frac{-1-2j}{X-j} + \frac{-1-2j^2}{X-j^2} \right) = \frac{1}{4} \frac{1}{X^2+X+1} = \frac{1}{4} \frac{1}{(X+\frac{1}{2})^2 + (\frac{\sqrt{3}}{2})^2},$$

et par parité,

$$\frac{a}{X-j} + \frac{\bar{a}}{X-j^2} - \frac{a}{X+j} - \frac{\bar{a}}{X+j^2} = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{(X+\frac{1}{2})^2 + (\frac{\sqrt{3}}{2})^2} + \frac{1}{(X-\frac{1}{2})^2 + (\frac{\sqrt{3}}{2})^2} \right).$$

Ensuite, $b = \frac{1}{8e^{7i\pi/6} + 4e^{3i\pi/6}} = \frac{1}{4e^{i\pi/6}(-2-j^2)} = \frac{e^{-i\pi/6}}{4(-1+j)} = \frac{e^{-i\pi/6}(-1+j^2)}{12} = \frac{e^{-i\pi/6}(-2-j)}{12} = \frac{-2e^{-i\pi/6}-i}{12}$, et donc,

$$\frac{b}{X-e^{i\pi/6}} + \frac{\bar{b}}{X-e^{-i\pi/6}} = \frac{1}{12} \left(\frac{-2e^{-i\pi/6}-i}{X-e^{i\pi/6}} + \frac{-2e^{i\pi/6}+i}{X-e^{-i\pi/6}} \right) = \frac{1}{12} \frac{-2\sqrt{3}X+3}{X^2-\sqrt{3}X+1} = -\frac{1}{4\sqrt{3}} \frac{2X-\sqrt{3}}{X^2-\sqrt{3}X+1}.$$

Par parité,

$$\frac{b}{X-e^{i\pi/6}} + \frac{\bar{b}}{X-e^{-i\pi/6}} - \frac{b}{X+e^{i\pi/6}} - \frac{\bar{b}}{X+e^{-i\pi/6}} = -\frac{1}{4\sqrt{3}} \frac{2X-\sqrt{3}}{X^2-\sqrt{3}X+1} + \frac{1}{4\sqrt{3}} \frac{2X+\sqrt{3}}{X^2+\sqrt{3}X+1}.$$

Finalement,

$$\int \frac{1}{x^8+x^4+1} = \frac{1}{2\sqrt{3}} \left(\arctan \frac{2x-1}{\sqrt{3}} + \arctan \frac{2x+1}{\sqrt{3}} \right) + \frac{1}{4\sqrt{3}} \ln \frac{x^2+\sqrt{3}x+1}{x^2-\sqrt{3}x+1} + C.$$

10. En posant $u = x^2$ et donc $du = 2x dx$, on obtient $\int \frac{x}{(x^4+1)^3} dx = \frac{1}{2} \int \frac{1}{(u^2+1)^3} du$.

Pour $n \geq 1$, posons $I_n = \int \frac{1}{(u^2+1)^n} du$. Une intégration par parties fournit :

$$\begin{aligned} I_n &= \frac{u}{(u^2+1)^n} + \int \frac{u \cdot (-n)(2u)}{(u^2+1)^{n+1}} du = \frac{u}{(u^2+1)^n} + 2n \int \frac{u^2+1-1}{(u^2+1)^{n+1}} du \\ &= \frac{u}{(u^2+1)^n} + 2n(I_n - I_{n+1}), \end{aligned}$$

et donc, $\forall n \geq 1$, $I_{n+1} = \frac{1}{2n} \left(\frac{u}{(u^2+1)^n} + (2n-1)I_n \right)$.

On en déduit que

$$I_3 = \frac{1}{4} \left(\frac{u}{(u^2+1)^2} + 3I_2 \right) = \frac{u}{4(u^2+1)^2} + \frac{3}{8(u^2+1)} + \frac{3}{8} \arctan u + C,$$

et finalement que

$$\int \frac{x}{(x^4+1)^3} dx = \frac{1}{16} \left(\frac{2x^2}{(x^4+1)^2} + \frac{3}{x^4+1} + 3 \arctan(x^2) \right) + C.$$

11.

$$\begin{aligned} (X+1)^7 - X^7 - 1 &= 7X^6 + 21X^5 + 35X^4 + 35X^3 + 21X^2 + 7X = 7X(X^5 + 3X^4 + 5X^3 + 5X^2 + 3X + 1) \\ &= 7X(X+1)(X^4 + 2X^3 + 3X^2 + 2X + 1) = 7X(X+1)(X^2 + X + 1)^2. \end{aligned}$$

Par suite,

$$\frac{7}{(X+1)^7 - X^7 - 1} = \frac{1}{X(X+1)(X-j)^2(X-j^2)^2} = \frac{a}{X} + \frac{b}{X+1} + \frac{c_1}{X-j} + \frac{c_2}{(X-j)^2} + \frac{\bar{c}_1}{X-j^2} + \frac{\bar{c}_2}{(X-j^2)^2}.$$

$a = \lim_{x \rightarrow 0} xR(x) = 1$, $b = \lim_{x \rightarrow -1} (x+1)R(x) = -1$, et

$$c_2 = \lim_{x \rightarrow j} (x-j)^2 R(x) = \frac{1}{j(j+1)(j-j^2)^2} = -\frac{1}{j^2(1-2j+j^2)} = \frac{1}{3}. \text{ Puis,}$$

$$\frac{c_2}{(X-j)^2} + \frac{\overline{c_2}}{(X-j^2)^2} = \frac{1}{3} \left(\frac{(X-j^2)^2 + (X-j)^2}{(X^2+X+1)^2} \right) = \frac{2X^2+2X-1}{3(X^2+X+1)^2},$$

et

$$\begin{aligned} R - \left(\frac{c_2}{(X-j)^2} + \frac{\overline{c_2}}{(X-j^2)^2} \right) &= \frac{1}{X(X+1)(X^2+X+1)^2} - \frac{2X^2+2X-1}{3(X^2+X+1)^2} = \frac{3-X(X+1)(2X^2+2X-1)}{3X(X+1)(X^2+X+1)^2} \\ &= \frac{-2X(X+1)(X^2+X+1)+3+3X(X+1)}{3X(X+1)(X^2+X+1)^2} = \frac{-2X^2-2X+3}{3X(X+1)(X^2+X+1)}. \end{aligned}$$

$$\text{Puis, } c_2 = \frac{-2j^2-2j+3}{3j(j+1)(j-j^2)} = -\frac{5}{j-j^2} = \frac{5(j-j^2)}{(j-j^2)(j^2-j)} = \frac{5(j-j^2)}{3}.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \frac{1}{(X+1)^7 - X^7 - 1} &= \frac{1}{7} \left(\frac{1}{X} - \frac{1}{X+1} + \frac{1}{3} \left(\frac{5(j-j^2)}{X-j} + \frac{5(j^2-j)}{X-j^2} + \frac{1}{(X-j)^2} + \frac{1}{(X-j^2)^2} \right) \right) \\ &= \frac{1}{7} \left(\frac{1}{X} - \frac{1}{X+1} - \frac{5}{X^2+X+1} + \frac{1}{3} \left(\frac{1}{(X-j)^2} + \frac{1}{(X-j^2)^2} \right) \right) \\ &= \frac{1}{7} \left(\frac{1}{X} - \frac{1}{X+1} - \frac{5}{(X+\frac{1}{2})^2 + (\frac{\sqrt{3}}{2})^2} + \frac{1}{3} \left(\frac{1}{(X-j)^2} + \frac{1}{(X-j^2)^2} \right) \right). \end{aligned}$$

Finalement,

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{(x+1)^7 - x^7 - 1} dx &= \frac{1}{7} \left(\ln \left| \frac{x}{x+1} \right| - \frac{10}{\sqrt{3}} \arctan \frac{2x+1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{3} \left(\frac{1}{x-j} + \frac{1}{x-j^2} \right) \right) + C \\ &= \frac{1}{7} \left(\ln \left| \frac{x}{x+1} \right| - \frac{10}{\sqrt{3}} \arctan \frac{2x+1}{\sqrt{3}} - \frac{2x+1}{3(x^2+x+1)} \right) + C. \end{aligned}$$

Correction de l'exercice 2 ▲

1. On pose $t = \tan \frac{x}{2}$ et donc $dx = \frac{2dt}{1+t^2}$.

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{\cos x} dx &= \int \frac{1+t^2}{1-t^2} \frac{2dt}{1+t^2} = \int 2 \frac{1}{1-t^2} dt = \ln \left| \frac{1+t}{1-t} \right| + C = \ln \left| \frac{\tan \frac{\pi}{4} + \tan \frac{x}{2}}{1 - \tan \frac{\pi}{4} \tan \frac{x}{2}} \right| + C \\ &= \ln \left| \tan \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right| + C. \end{aligned}$$

ou bien

$$\int \frac{1}{\cos x} dx = \int \frac{\cos x}{1 - \sin^2 x} dx = \ln \left| \frac{1 + \sin x}{1 - \sin x} \right| + C \dots$$

ou bien, en posant $u = x + \frac{\pi}{2}$, (voir 2))

$$\int \frac{1}{\cos x} dx = \int \frac{1}{\cos(u - \frac{\pi}{2})} du = \int \frac{1}{\sin u} du = \ln \left| \tan \frac{u}{2} \right| + C = \ln \left| \tan \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right| + C.$$

Ensuite, en posant $t = e^x$ et donc $dx = \frac{dt}{t}$,

$$\int \frac{1}{\operatorname{ch} x} dx = \int \frac{2}{t + \frac{1}{t}} \frac{dt}{t} = 2 \int \frac{1}{1+t^2} dt = 2 \arctan(e^x) + C,$$

ou bien

$$\int \frac{1}{\operatorname{ch} x} dx = \int \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh}^2 x + 1} dx = \arctan(\operatorname{sh} x) + C.$$

2. En posant $t = \tan \frac{x}{2}$,

$$\int \frac{1}{\sin x} dx = \int \frac{1+t^2}{2t} \frac{2dt}{1+t^2} = \int \frac{1}{t} dt = \ln |t| + C = \ln \left| \tan \frac{x}{2} \right| + C.$$

3. $\int \frac{dx}{\tan x} = \int \frac{\cos x}{\sin x} dx = \ln |\sin x| + C$ et $\int \frac{1}{\operatorname{th} x} = \ln |\operatorname{sh} x| + C$.

4. $\int \frac{\sin^2(x/2)}{x - \sin x} dx = \frac{1}{2} \int \frac{1 - \cos x}{x - \sin x} dx = \frac{1}{2} \ln |x - \sin x| + C$.

5. $\frac{1}{2 + \sin^2 x} dx = \frac{1}{\frac{2}{\cos^2 x} + \tan^2 x} \frac{dx}{\cos^2 x} = \frac{1}{2 + 3 \tan^2 x} d(\tan x)$, et en posant $u = \tan x$,

$$\int \frac{1}{2 + \sin^2 x} dx = \int \frac{1}{2 + 3u^2} du = \frac{1}{3} \sqrt{\frac{3}{2}} \arctan\left(\sqrt{\frac{3}{2}} u\right) + C = \frac{1}{\sqrt{6}} \arctan\left(\sqrt{\frac{3}{2}} \tan x\right) + C.$$

6. Posons $I = \int \frac{\cos x}{\cos x + \sin x} dx$ et $J = \int \frac{\sin x}{\cos x + \sin x} dx$. Alors, $I + J = \int dx = x + C$ et $I - J = \int \frac{-\sin x + \cos x}{\cos x + \sin x} dx = \ln |\cos x + \sin x| + C$. En additionnant ces deux égalités, on obtient :

$$I = \int \frac{\cos x}{\cos x + \sin x} dx = \frac{1}{2} (x + \ln |\cos x + \sin x|) + C.$$

ou bien, en posant $u = x - \frac{\pi}{4}$,

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{\cos x}{\cos x + \sin x} dx = \int \frac{\cos x}{\sqrt{2} \cos(x - \frac{\pi}{4})} dx = \int \frac{\cos(u + \frac{\pi}{4})}{\sqrt{2} \cos u} du = \frac{1}{2} \int \left(1 - \frac{\sin u}{\cos u}\right) du = \frac{1}{2} (u + \ln |\cos u|) + C \\ &= \frac{1}{2} \left(x - \frac{\pi}{4} + \ln \left| \frac{1}{\sqrt{2}} (\cos x + \sin x) \right| \right) + C = \frac{1}{2} (x + \ln |\cos x + \sin x|) + C. \end{aligned}$$

7.

$$\frac{\cos(3x)}{\sin x + \sin(3x)} dx = \frac{4 \cos^3 x - 3 \cos x}{4 \sin x - 4 \sin^3 x} = \frac{1}{4} \frac{4 \cos^3 x - 3 \cos x}{\sin x (1 - \sin^2 x)} = \frac{1}{4} \left(\frac{4 \cos x}{\sin x} - \frac{3}{\sin x \cos x} \right) = \frac{\cos x}{\sin x} - \frac{3}{2} \frac{1}{\sin(2x)}.$$

Par suite,

$$\int \frac{\cos(3x)}{\sin x + \sin(3x)} dx = \ln |\sin x| - \frac{3}{4} \ln |\tan x| + C.$$

8. $\cos^4 x + \sin^4 x = (\cos^2 x + \sin^2 x)^2 - 2 \sin^2 x \cos^2 x = 1 - \frac{1}{2} \sin^2(2x)$, et donc

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{\cos^4 x + \sin^4 x} dx &= \int \frac{1}{1 - \frac{1}{2} \sin^2(2x)} dx = \int \frac{1}{2 - \sin^2 u} du \quad (\text{en posant } u = 2x) \\ &= \int \frac{1}{1 + \cos^2 u} du = \int \frac{1}{1 + \frac{1}{1+v^2}} \frac{dv}{1+v^2} \quad (\text{en posant } v = \tan u) \\ &= \int \frac{dv}{v^2 + 2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan \frac{v}{\sqrt{2}} + C = \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan \frac{\tan(2x)}{\sqrt{2}} + C. \end{aligned}$$

9.

$$\begin{aligned} \frac{\sin x \sin(2x)}{\sin^4 x + \cos^4 x + 1} dx &= \frac{2 \sin^2 x}{1 - 2 \sin^2 x \cos^2 x + 1} \cos x dx = \frac{2 \sin^2 x}{2 - 2 \sin^2 x (1 - \sin^2 x)} \cos x dx \\ &= \frac{u^2}{u^4 - u^2 + 1} du \quad (\text{en posant } u = \sin x). \end{aligned}$$

Maintenant, $u^4 - u^2 + 1 = \frac{u^6+1}{u^2+1} = (u - e^{i\pi/6})(u - e^{-i\pi/6})(u + e^{i\pi/6})(u + e^{-i\pi/6})$, et donc,

$$\frac{u^2}{u^4 - u^2 + 1} = \frac{a}{u - e^{i\pi/6}} + \frac{\bar{a}}{u - e^{-i\pi/6}} - \frac{a}{u + e^{i\pi/6}} - \frac{\bar{a}}{u + e^{-i\pi/6}},$$

ou $a = \frac{(e^{i\pi/6})^2}{(e^{i\pi/6} - e^{-i\pi/6})(e^{i\pi/6} + e^{i\pi/6})(e^{i\pi/6} + e^{-i\pi/6})} = \frac{(e^{i\pi/6})^2}{i.2e^{i\pi/6}.\sqrt{3}} = \frac{-ie^{i\pi/6}}{2\sqrt{3}}$, et donc

$$\begin{aligned} \frac{u^2}{u^4 - u^2 + 1} &= \frac{1}{2\sqrt{3}} \left(\frac{-ie^{i\pi/6}}{u - e^{i\pi/6}} + \frac{ie^{-i\pi/6}}{u - e^{-i\pi/6}} + \frac{ie^{i\pi/6}}{u + e^{i\pi/6}} - \frac{ie^{-i\pi/6}}{u + e^{-i\pi/6}} \right) \\ &= \frac{1}{2\sqrt{3}} \left(\frac{u}{u^2 - \sqrt{3}u + 1} - \frac{u}{u^2 + \sqrt{3}u + 1} \right) \\ &= \frac{1}{2\sqrt{3}} \left(\frac{1}{2} \frac{2u - \sqrt{3}}{u^2 - \sqrt{3}u + 1} + \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{1}{u^2 - \sqrt{3}u + 1} - \frac{1}{2} \frac{2u + \sqrt{3}}{u^2 + \sqrt{3}u + 1} + \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{1}{u^2 + \sqrt{3}u + 1} \right) \\ &= \frac{1}{4\sqrt{3}} \left(\frac{2u - \sqrt{3}}{u^2 - \sqrt{3}u + 1} - \frac{2u + \sqrt{3}}{u^2 + \sqrt{3}u + 1} \right) + \frac{1}{4} \left(\frac{1}{(u + \frac{\sqrt{3}}{2})^2 + (\frac{1}{2})^2} + \frac{1}{(u - \frac{\sqrt{3}}{2})^2 + (\frac{1}{2})^2} \right) \end{aligned}$$

et donc,

$$\int \frac{\sin x \sin(2x)}{\sin^4 x + \cos^4 x + 1} dx = \frac{1}{4\sqrt{3}} \ln \left| \frac{\sin^2 x - \sqrt{3} \sin x + 1}{\sin^2 x + \sqrt{3} \sin x + 1} \right| + \frac{1}{2} (\arctan(2 \sin x - \sqrt{3}) + \arctan(2 \sin x + \sqrt{3})) + C.$$

10. En posant $u = \sin x$, on obtient

$$\frac{\tan x}{1 + \sin(3x)} dx = \frac{\sin x}{1 + 3 \sin x - 4 \sin^3 x} \frac{1}{\cos^2 x} \cos x dx = \frac{u}{(1 + 3u - 4u^3)(1 - u^2)} du$$

Or, $1 + 3u - 4u^3 = (u + 1)(-4u^2 - 4u - 1) = -(u - 1)(2u + 1)^2$ et donc, $(1 + 3u - 4u^3)(1 - u^2) = (u + 1)(u - 1)^2(2u + 1)^2$ et donc,

$$\frac{u}{(1 + 3u - 4u^3)(1 - u^2)} = \frac{a}{u + 1} + \frac{b_1}{u - 1} + \frac{b_2}{(u - 1)^2} + \frac{c_1}{2u + 1} + \frac{c_2}{(2u + 1)^2}.$$

$$a = \lim_{u \rightarrow -1} (u + 1)f(u) = \frac{-1}{(-1-1)^2(-2+1)^2} = -\frac{1}{4}, b_2 = \frac{1}{(1+1)(2+1)^2} = \frac{1}{18}$$

$$\text{et } c_2 = \frac{-1/2}{(-\frac{1}{2}+1)(-\frac{1}{2}-1)^2} = -\frac{4}{9}.$$

Ensuite, $u = 0$ fournit $0 = a - b_1 + b_2 + c_1 + c_2$ ou encore $c_1 - b_1 = \frac{1}{4} - \frac{1}{18} + \frac{4}{9} = \frac{23}{36}$. D'autre part, en multipliant par u , puis en faisant tendre u vers $+\infty$, on obtient $0 = a + b_1 + c_1$ et donc $b_1 + c_1 = \frac{1}{4}$ et donc, $c_1 = \frac{4}{9}$ et $b_1 = -\frac{7}{36}$. Finalement,

$$\frac{u}{(u + 1)(u - 1)^2(2u + 1)^2} = -\frac{1}{4(u + 1)} - \frac{7}{36(u - 1)} + \frac{1}{18(u - 1)^2} + \frac{4}{9(2u + 1)} - \frac{4}{9(2u + 1)^2}.$$

Finalement,

$$\int \frac{\tan x}{1 + \sin(3x)} dx = -\frac{1}{4} \ln(\sin x + 1) - \frac{7}{36} \ln(1 - \sin x) - \frac{1}{18(\sin x - 1)} + \frac{2}{9} \ln|2 \sin x + 1| + \frac{2}{9} \frac{1}{2 \sin x + 1} + C$$

11. (voir 6))

$$\begin{aligned} \int \frac{\cos x + 2 \sin x}{\sin x - \cos x} dx &= \int \frac{\frac{1}{2}((\sin x + \cos x) - (\sin x - \cos x)) + ((\sin x + \cos x) + (\sin x - \cos x))}{\sin x - \cos x} dx \\ &= \frac{3}{2} \int \frac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x} + \frac{1}{2} \int dx \\ &= \frac{3}{2} \ln|\sin x - \cos x| + \frac{x}{2} + C. \end{aligned}$$

12.

$$\begin{aligned}\int \frac{\sin x}{\cos(3x)} dx &= \int \frac{\sin x}{4\cos^3 x - 3\cos x} dx = \int \frac{1}{3u - 4u^3} du \text{ (en posant } u = \cos x) \\ &= \int \left(\frac{1}{3u} - \frac{1}{3(2u - \sqrt{3})} - \frac{1}{3(2u + \sqrt{3})} \right) du \\ &= \frac{1}{3} (\ln |\cos x| - \frac{1}{2} \ln |2\cos x - \sqrt{3}| - \frac{1}{2} \ln |2\cos x + \sqrt{3}|) + C.\end{aligned}$$

13. Dans tous les cas, on pose $t = \tan x$ et donc $dx = \frac{dt}{1+t^2}$.

$$\int \frac{1}{\alpha \cos^2 x + \beta \sin^2 x} dx = \int \frac{1}{\alpha + \beta \tan^2 x} \frac{dx}{\cos^2 x} = \int \frac{dt}{\alpha + \beta t^2}.$$

Si $\beta = 0$ et $\alpha \neq 0$, $\int \frac{1}{\alpha \cos^2 x + \beta \sin^2 x} dx = \frac{1}{\alpha} \tan x + C$.

Si $\beta \neq 0$ et $\alpha\beta > 0$,

$$\int \frac{1}{\alpha \cos^2 x + \beta \sin^2 x} dx = \frac{1}{\beta} \int \frac{1}{t^2 + (\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}})^2} dt = \frac{1}{\sqrt{\alpha\beta}} \arctan\left(\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}} \tan x\right) + C.$$

Si $\beta \neq 0$ et $\alpha\beta < 0$,

$$\int \frac{1}{\alpha \cos^2 x + \beta \sin^2 x} dx = \frac{1}{\beta} \int \frac{1}{t^2 - (\sqrt{-\frac{\alpha}{\beta}})^2} dt = \frac{\operatorname{sgn}(\beta)}{2\sqrt{-\alpha\beta}} \ln \left| \frac{\tan x - \sqrt{-\frac{\alpha}{\beta}}}{\tan x + \sqrt{-\frac{\alpha}{\beta}}} \right| + C.$$

14.

$$\begin{aligned}\int \frac{\operatorname{ch}^3 x}{1 + \operatorname{sh} x} dx &= \int \frac{1 + \operatorname{sh}^2 x}{1 + \operatorname{sh} x} \operatorname{ch} x dx \\ &= \int \frac{u^2 + 1}{u + 1} du \text{ (en posant } u = \operatorname{sh} x) \\ &= \int \left(u - 1 + \frac{2}{u + 1} \right) du = \frac{\operatorname{sh}^2 x}{2} - \operatorname{sh} x + 2 \ln |1 + \operatorname{sh} x| + C.\end{aligned}$$

15. On peut poser $u = e^x$ mais il y a mieux.

$$\begin{aligned}\int \sqrt{\operatorname{ch} x - 1} dx &= \int \frac{\sqrt{(\operatorname{ch} x - 1)(\operatorname{ch} x + 1)}}{\sqrt{\operatorname{ch} x + 1}} dx = \operatorname{sgn}(x) \int \frac{\operatorname{sh} x}{\sqrt{\operatorname{ch} x + 1}} dx \\ &= 2 \operatorname{sgn}(x) \sqrt{\operatorname{ch} x + 1} + C.\end{aligned}$$

16.

$$\begin{aligned}\int \frac{\operatorname{th} x}{\operatorname{ch} x + 1} dx &= \int \frac{1}{\operatorname{ch} x (\operatorname{ch} x + 1)} \operatorname{sh} x dx \\ &= \int \frac{1}{u(u + 1)} du \text{ (en posant } u = \operatorname{ch} x) \\ &= \int \left(\frac{1}{u} - \frac{1}{u + 1} \right) du = \ln \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{ch} x + 1} + C.\end{aligned}$$

17. $\int \frac{1}{\operatorname{sh}^5 x} dx = \int \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{sh}^6 x} dx = \int \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{sh}^6 x} dx = \int \frac{\operatorname{sh} x}{(\operatorname{ch}^2 x - 1)^3} dx = \int \frac{1}{(u^2 - 1)^3} du$ (en posant $u = \operatorname{ch} x$).

18.

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{1 - \operatorname{ch} x} dx &= \int \frac{1 + \operatorname{ch} x}{1 - \operatorname{ch}^2 x} dx = - \int \frac{1}{\operatorname{sh}^2 x} dx - \int \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh}^2 x} dx \\ &= \coth x + \frac{1}{\operatorname{sh} x} + C.\end{aligned}$$

Correction de l'exercice 3 ▲

1.

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{\sqrt{x^2+2x+5}} dx &= \int \frac{1}{\sqrt{(x+1)^2+2^2}} dx = \operatorname{argsh} \frac{x+1}{2} + C \\ &= \ln\left(\frac{x+1}{2} + \sqrt{\left(\frac{x+1}{2}\right)^2 + 1}\right) + C = \ln(x+1 + \sqrt{x^2+2x+5}) + C.\end{aligned}$$

Puis,

$$\begin{aligned}\int \sqrt{x^2+2x+5} dx &= (x+1)\sqrt{x^2+2x+5} - \int (x+1) \frac{2x+2}{2\sqrt{x^2+2x+5}} dx \\ &= (x+1)\sqrt{x^2+2x+5} - \int \frac{x^2+2x+5-4}{\sqrt{x^2+2x+5}} dx \\ &= (x+1)\sqrt{x^2+2x+5} - \int \sqrt{x^2+2x+5} dx + 4 \int \frac{1}{\sqrt{x^2+2x+5}} dx,\end{aligned}$$

et donc,

$$\int \sqrt{x^2+2x+5} dx = \frac{1}{2}(x+1)\sqrt{x^2+2x+5} + 2\ln(x+1 + \sqrt{x^2+2x+5}) + C.$$

(On peut aussi poser $x+1 = 2\operatorname{sh} u$).

2. $\int \frac{1}{\sqrt{2x-x^2}} dx = \int \frac{1}{\sqrt{1-(x-1)^2}} dx = \arcsin(x-1) + C.$

3. On pose $u = x^6$ puis $v = \sqrt{1+u}$ (ou directement $u = \sqrt{1+x^6}$) et on obtient :

$$\begin{aligned}\int \frac{\sqrt{1+x^6}}{x} dx &= \int \frac{\sqrt{1+u}}{u} x^5 dx = \frac{1}{6} \int \frac{\sqrt{1+u}}{u} du \\ &= \frac{1}{6} \int \frac{v}{v^2-1} 2v dv = \frac{1}{3} \int \frac{v^2}{v^2-1} dv = \frac{1}{3} \left(v + \int \frac{1}{v^2-1} dv \right) = \frac{1}{3} \left(v + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{v-1}{v+1} \right| \right) + C \\ &= \frac{1}{3} \left(\sqrt{1+x^6} + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\sqrt{1+x^6}-1}{\sqrt{1+x^6}+1} \right| \right) + C\end{aligned}$$

4.

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}} dx &= \int \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{(1+x) - (1-x)} dx = \frac{1}{2} \left(\int \frac{\sqrt{1+x}}{x} dx - \int \frac{\sqrt{1-x}}{x} dx \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\int \frac{u}{u^2-1} 2u du + \int \frac{v}{1-v^2} 2v dv \right) \text{ (en posant } u = \sqrt{1+x} \text{ et } v = \sqrt{1-x} \text{)} \\ &= \int \left(1 + \frac{1}{u^2-1} \right) du + \int \left(-1 + \frac{1}{1-v^2} \right) dv \\ &= u - v + \frac{1}{2} \left(\ln \left| \frac{1-u}{1+u} \right| + \ln \left| \frac{1+v}{1-v} \right| \right) + C \\ &= \sqrt{1+x} - \sqrt{1-x} + \frac{1}{2} \left(\ln \left| \frac{1-\sqrt{1+x}}{1+\sqrt{1+x}} \right| + \ln \left| \frac{1+\sqrt{1-x}}{1-\sqrt{1-x}} \right| \right) + C.\end{aligned}$$

5. On pose $u = \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$ et donc $x = \frac{u^2+1}{u^2-1}$, puis $dx = \frac{2u(-2)}{(u^2-1)^2} du$. Sur $]1, +\infty[$, on obtient

$$\begin{aligned}
\int \sqrt{\frac{x+1}{x-1}} dx &= -2 \int u \frac{2u}{(u^2-1)^2} du \\
&= 2 \frac{u}{u^2-1} - 2 \int \frac{u^2-1}{(u^2-1)^2} du \\
&= \frac{2u}{u^2-1} + 2 \ln \left| \frac{1+u}{1-u} \right| + C \\
&= 2\sqrt{x^2-1} + \ln \left| \frac{\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{x+1}-1} \right| + C
\end{aligned}$$

6. On note ε le signe de x .

$\sqrt{x^4-x^2+1} = \varepsilon x \sqrt{x^2 + \frac{1}{x^2} - 1} = \varepsilon x \sqrt{(x - \frac{1}{x})^2 + 1}$ puis, $\frac{x^2+1}{x} \cdot \frac{1}{x} = 1 + \frac{1}{x^2} = (x - \frac{1}{x})'$. On pose donc $u = x - \frac{1}{x}$ et on obtient

$$\begin{aligned}
\int \frac{x^2+1}{x\sqrt{x^4-x^2+1}} dx &= \varepsilon \int \frac{1}{\sqrt{(x - \frac{1}{x})^2 + 1}} \cdot \frac{x^2+1}{x} \frac{1}{x} dx = \varepsilon \int \frac{1}{\sqrt{u^2+1}} du = \varepsilon \operatorname{argsh}(x - \frac{1}{x}) + C \\
&= \varepsilon \ln \left(\frac{x^2-1 + \varepsilon \sqrt{x^4-x^2+1}}{x} \right) + C.
\end{aligned}$$

7. Sur $]0, 1]$, on pose déjà $u = \sqrt{x}$ et donc, $x = u^2$, $dx = 2u du$.

$$\int \sqrt{\frac{1-\sqrt{x}}{\sqrt{x}}} dx = \int \sqrt{\frac{1-u}{u}} 2u du = 2 \int \sqrt{u(1-u)} du = 2 \int \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(u - \frac{1}{2}\right)^2} du.$$

Puis, on pose $u - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \sin v$ et donc $du = \frac{1}{2} \cos v dv$. On note que $x \in]0, 1] \Rightarrow u \in]0, 1] \Rightarrow v = \arcsin(2u - 1) \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \Rightarrow \cos v \geq 0$.

$$\begin{aligned}
\int \sqrt{\frac{1-\sqrt{x}}{\sqrt{x}}} dx &= 2 \int \sqrt{\frac{1}{4}(1 - \sin^2 v)} \frac{1}{2} \cos v dv = \frac{1}{2} \int \cos^2 v dv = \frac{1}{4} \int (1 + \cos(2v)) dv \\
&= \frac{1}{4} (v + \frac{1}{2} \sin(2v)) + C = \frac{1}{4} (v + \sin v \cos v) + C \\
&= \frac{1}{4} (\arcsin(2\sqrt{x} - 1) + (2\sqrt{x} - 1) \sqrt{1 - (2\sqrt{x} - 1)^2}) + C \\
&= \frac{1}{4} (\arcsin(2\sqrt{x} - 1) + 2(2\sqrt{x} - 1) \sqrt{\sqrt{x} - x}) + C
\end{aligned}$$

8. On pose $x = \operatorname{sh} t$ puis $u = e^t$.

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{1 + \sqrt{1+x^2}} dx &= \int \frac{1}{1 + \operatorname{ch} t} \operatorname{ch} t dt = \int \frac{\frac{1}{2}(u + \frac{1}{u})}{1 + \frac{1}{2}(u + \frac{1}{u})} \frac{du}{u} = \int \frac{u^2+1}{u(u^2+2u+1)} du = \int \left(\frac{1}{u} - \frac{2}{(u+1)^2} \right) du \\
&= \ln|u| + \frac{2}{u+1} + C.
\end{aligned}$$

Maintenant, $t = \operatorname{argsh} x = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$ et donc, $u = x + \sqrt{x^2+1}$. Finalement,

$$\int \frac{1}{1 + \sqrt{1+x^2}} dx = \ln(x + \sqrt{x^2+1}) - \frac{2}{x + \sqrt{x^2+1}} + C.$$

9. On pose $u = \frac{1}{x}$ puis $v = \sqrt[3]{u^3 + 1} = \frac{\sqrt[3]{x^3 + 1}}{x}$ et donc $v^3 = u^3 + 1$ puis $v^2 dv = u^2 du$.

$$\begin{aligned} \int \frac{\sqrt[3]{x^3 + 1}}{x^2} dx &= \int \frac{\sqrt[3]{(\frac{1}{u})^3 + 1}}{\frac{1}{u^2}} \frac{-du}{u^2} = - \int \frac{\sqrt[3]{u^3 + 1}}{u} du = - \int \frac{\sqrt[3]{u^3 + 1}}{u^3} u^2 du \\ &= - \int \frac{v}{v^3 - 1} v^2 dv = \int \left(-1 - \frac{1}{(v-1)(v^2 + v + 1)} \right) dv \\ &= \int \left(-1 - \frac{1}{3} \frac{1}{v-1} + \frac{1}{3} \frac{v+2}{v^2 + v + 1} \right) dv \\ &= -v - \frac{1}{3} \ln|v-1| + \frac{1}{6} \int \frac{2v+1}{v^2 + v + 1} dv + \frac{1}{2} \int \frac{1}{(v+\frac{1}{2})^2 + (\frac{\sqrt{3}}{2})^2} dv \\ &= -v - \frac{1}{3} \ln|v-1| + \frac{1}{6} \ln(v^2 + v + 1) + \sqrt{3} \arctan\left(\frac{2v+1}{\sqrt{3}}\right) + C \dots \end{aligned}$$

Correction de l'exercice 4 ▲

1. $\int \frac{1}{x \ln x} dx = \ln|\ln x| + C.$
2. $\int \arcsin x dx = x \arcsin x - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx = x \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C.$
3. $\int \arctan x dx = x \arctan x - \int \frac{x}{1+x^2} dx = x \arctan x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + C.$
4. $\int \arccos x dx = x \arccos x + \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx = x \arccos x - \sqrt{1-x^2} + C.$
5. $\int \operatorname{argsh} x dx = x \operatorname{argsh} x - \int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} dx = x \operatorname{argsh} x - \sqrt{1+x^2} + C.$
6. $\int \operatorname{argch} x dx = x \operatorname{argch} x - \int \frac{x}{\sqrt{x^2-1}} dx = x \operatorname{argch} x - \sqrt{x^2-1} + C.$
7. $\int \operatorname{argth} x dx = x \operatorname{argth} x - \int \frac{x}{1-x^2} dx = x \operatorname{argth} x + \frac{1}{2} \ln(1-x^2) + C$ (on est sur $] -1, 1[$).
8. $\int \ln(1+x^2) dx = x \ln(1+x^2) - 2 \int \frac{x^2+1-1}{x^2+1} dx = x \ln(1+x^2) - 2x + 2 \arctan x + C.$
- 9.

$$\begin{aligned} \int e^{\operatorname{Arccos} x} dx &= x e^{\operatorname{Arccos} x} + \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} e^{\operatorname{Arccos} x} dx \\ &= x e^{\operatorname{Arccos} x} - \sqrt{1-x^2} e^{\operatorname{Arccos} x} + \int \sqrt{1-x^2} \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} e^{\operatorname{Arccos} x} dx \end{aligned}$$

et donc, $\int e^{\operatorname{Arccos} x} dx = \frac{1}{2} (x e^{\operatorname{Arccos} x} - \sqrt{1-x^2} e^{\operatorname{Arccos} x}) + C.$

10.

$$\begin{aligned} \int \cos x \ln(1 + \cos x) dx &= \sin x \ln(1 + \cos x) - \int \sin x \frac{-\sin x}{1 + \cos x} dx = \sin x \ln(1 + \cos x) - \int \frac{\cos^2 x - 1}{\cos x + 1} dx \\ &= \sin x \ln(1 + \cos x) - \int (\cos x - 1) dx = \sin x \ln(1 + \cos x) - \sin x + x + C. \end{aligned}$$

11. $\int \frac{\arctan x}{\sqrt{x}} dx = 2\sqrt{x} \arctan x - 2 \int \frac{\sqrt{x}}{x^2+1} dx.$

Dans la dernière intégrale, on pose $u = \sqrt{x}$ et donc $x = u^2$ puis, $dx = 2u du$. On obtient $\int \frac{\sqrt{x}}{x^2+1} dx = \int \frac{2u^2}{u^4+1} du$. Mais,

$$\begin{aligned} \frac{2u^2}{u^4+1} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{u}{u^2 - \sqrt{2}u + 1} - \frac{u}{u^2 + \sqrt{2}u + 1} \right) \\ &= \frac{1}{2\sqrt{2}} \left(\frac{2u - \sqrt{2}}{u^2 - \sqrt{2}u + 1} - \frac{2u + \sqrt{2}}{u^2 + \sqrt{2}u + 1} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{(u - \frac{1}{\sqrt{2}})^2 + (\frac{1}{\sqrt{2}})^2} + \frac{1}{(u + \frac{1}{\sqrt{2}})^2 + (\frac{1}{\sqrt{2}})^2} \right). \end{aligned}$$

Par suite,

$$\int \frac{2u^2}{u^4 + 1} du = \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln\left(\frac{u^2 - \sqrt{2}u + 1}{u^2 + \sqrt{2}u + 1}\right) + \frac{1}{\sqrt{2}}(\arctan(\sqrt{2}u - 1) + \arctan(\sqrt{2}u + 1)) + C,$$

et donc,

$$\int \frac{\arctan x}{\sqrt{x}} dx = 2\sqrt{x} \arctan x - \frac{1}{\sqrt{2}} \ln\left(\frac{x - \sqrt{2x} + 1}{x + \sqrt{2x} + 1}\right) - \sqrt{2}(\arctan(\sqrt{2x} - 1) + \arctan(\sqrt{2x} + 1)) + C.$$

$$12. \frac{x}{(x+1)^2} e^x = \frac{1}{x+1} e^x - \frac{1}{(x+1)^2} e^x = \left(\frac{1}{x+1} e^x\right)' \text{ et donc } \int \frac{x e^x}{(x+1)^2} dx = \frac{e^x}{x+1} + C.$$

$$13. \int \left(\frac{x}{e}\right)^x \ln x dx = \int e^{x \ln x - x} d(x \ln x - x) = e^{x \ln x - x} + C = \left(\frac{x}{e}\right)^x dx.$$

$$14. \int x^n \ln x dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} \ln x - \frac{1}{n+1} \int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} \ln x - \frac{x^{n+1}}{(n+1)^2} + C.$$

15.

$$\begin{aligned} \int e^{ax} \cos(\alpha x) dx &= \operatorname{Re} \left(\int e^{(a+i\alpha)x} dx \right) = \operatorname{Re} \left(\frac{e^{(a+i\alpha)x}}{a+i\alpha} \right) + C = \frac{e^{ax}}{a^2 + \alpha^2} \operatorname{Re}((a-i\alpha)(\cos(\alpha x) + i \sin(\alpha x))) + C \\ &= \frac{e^{ax}(a \cos(\alpha x) + \alpha \sin(\alpha x))}{a^2 + \alpha^2} + C \end{aligned}$$

$$16. \int \sin(\ln x) dx = x \sin(\ln x) - \int \cos(\ln x) dx = x \sin(\ln x) - x \cos(\ln x) - \int \sin(\ln x) dx \text{ et donc } \int \sin(\ln x) dx = \frac{x}{2}(\sin(\ln x) - \cos(\ln x)) + C.$$

$$17. \text{ En posant } u = x^n \text{ et donc } du = nx^{n-1} dx, \text{ on obtient}$$

$$\int \frac{\sqrt{x^n + 1}}{x} dx = \int \frac{\sqrt{x^n + 1}}{x^n} x^{n-1} dx = \frac{1}{n} \int \frac{\sqrt{u+1}}{u} du,$$

puis en posant $v = \sqrt{u+1}$ et donc $u = v^2 - 1$ et $du = 2v dv$, on obtient

$$\int \frac{\sqrt{u+1}}{u} du = \int \frac{v}{v^2 - 1} 2v dv = 2 \int \frac{v^2 - 1 + 1}{v^2 - 1} dv = 2v + \ln \left| \frac{1-v}{1+v} \right| + C.$$

Finalement,

$$\int \frac{\sqrt{x^n + 1}}{x} dx = \frac{1}{n} (2\sqrt{x^n + 1} + \ln \left| \frac{1 - \sqrt{x^n + 1}}{1 + \sqrt{x^n + 1}} \right|) + C.$$

$$18. \int x^2 e^x \sin x dx = \operatorname{Im}(\int x^2 e^{(1+i)x} dx). \text{ Or,}$$

$$\begin{aligned} \int x^2 e^{(1+i)x} dx &= x^2 \frac{e^{(1+i)x}}{1+i} - \frac{2}{1+i} \int x e^{(1+i)x} dx = x^2 \frac{e^{(1+i)x}}{1+i} - \frac{2}{1+i} (x \frac{e^{(1+i)x}}{1+i} - \int e^{(1+i)x} dx) \\ &= x^2 \frac{(1-i)e^{(1+i)x}}{2} + i x e^{(1+i)x} - i \frac{e^{(1+i)x}}{1+i} + C \\ &= e^x \left(\frac{1}{2} x^2 (1-i)(\cos x + i \sin x) + i x (\cos x + i \sin x) - \frac{1}{2} (1+i)(\cos x + i \sin x) \right) + C. \end{aligned}$$

Par suite,

$$\int x^2 e^x \sin x dx = e^x \left(\frac{x^2}{2} (\cos x + \sin x) - x \sin x - \frac{1}{2} (\cos x - \sin x) \right) + C.$$

1. On pose $t = \frac{1}{x}$ et donc $x = \frac{1}{t}$ et $dx = -\frac{1}{t^2} dt$. On obtient

$$I = \int_{1/a}^a \frac{\ln x}{x^2 + 1} dx = - \int_a^{1/a} \frac{\ln(1/t)}{\frac{1}{t^2} + 1} \frac{1}{t^2} dt = - \int_{1/a}^a \frac{\ln t}{t^2 + 1} dt = -I,$$

et donc, $I = 0$.

2. (p et q sont des entiers naturels)

$$\cos(px)\cos(qx) = \frac{1}{2}(\cos(p+q)x + \cos(p-q)x) \text{ et donc,}$$

Premier cas. Si $p \neq q$,

$$\int_0^\pi \cos(px)\cos(qx) dx = \frac{1}{2} \left[\frac{\sin(p+q)x}{p+q} + \frac{\sin(p-q)x}{p-q} \right]_0^\pi = 0.$$

Deuxième cas. Si $p = q \neq 0$,

$$\int_0^\pi \cos(px)\cos(qx) dx = \frac{1}{2} \int_0^\pi (1 + \cos(2px)) dx = \frac{1}{2} \int_0^\pi dx = \frac{\pi}{2}.$$

Troisième cas. Si $p = q = 0$. $\int_0^\pi \cos(px)\cos(qx) dx = \int_0^\pi dx = \pi$.

La démarche est identique pour les deux autres et on trouve $\int_0^\pi \sin(px)\sin(qx) dx = 0$ si $p \neq q$ et $\frac{\pi}{2}$ si $p = q \neq 0$ puis $\int_0^\pi \sin(px)\cos(qx) dx = 0$ pour tout choix de p et q .

3. La courbe d'équation $y = \sqrt{(x-a)(b-x)}$ ou encore $\begin{cases} x^2 + y^2 - (a+b)x + ab = 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$ est le demi-cercle de diamètre $\left[\begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b \\ 0 \end{pmatrix} \right]$. Par suite, si $a \leq b$, $I = \frac{\pi R^2}{2} = \frac{\pi(b-a)^2}{8}$ et si $a > b$, $I = -\frac{\pi(b-a)^2}{8}$.

4. L'intégrale proposée est somme de quatre intégrales. Chacune d'elles est la somme des aires de deux triangles. Ainsi, $I = \frac{1}{2}((1^2 + 3^2) + (2^2 + 2^2) + (3^2 + 1^2) + 4^2) = 22$.

5. On pose $u = \frac{1}{x}$. On obtient

$$\begin{aligned} I &= \int_{1/2}^2 \left(1 + \frac{1}{x^2} \right) \arctan x dx = \int_2^{1/2} (1 + u^2) \arctan u \frac{-du}{u^2} = \int_{1/2}^2 \left(1 + \frac{1}{u^2} \right) \left(\frac{\pi}{2} - \arctan u \right) du \\ &= \frac{\pi}{2} \left(\left(2 - \frac{1}{2} \right) - \left(\frac{1}{2} - 2 \right) \right) - I. \end{aligned}$$

Par suite, $I = \frac{3\pi}{2} - I$ et donc $I = \frac{3\pi}{4}$.

6. $I = \int_{-1}^1 \sqrt{1 + |x(1-x)|} dx = \int_{-1}^0 \sqrt{1 + x(x-1)} dx + \int_0^1 \sqrt{1 + x(1-x)} dx = I_1 + I_2$.

Pour I_1 , $1 + x(x-1) = x^2 - x + 1 = (x - \frac{1}{2})^2 + (\frac{\sqrt{3}}{2})^2$ et on pose $x - \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \operatorname{sh} t$ et donc $dx = \frac{\sqrt{3}}{2} \operatorname{ch} t dt$.

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{\ln(2-\sqrt{3})}^{-\ln(\sqrt{3})} \frac{\sqrt{3}}{2} \sqrt{\operatorname{sh}^2 t + 1} \frac{\sqrt{3}}{2} \operatorname{ch} t dt = \frac{3}{4} \int_{\ln(2-\sqrt{3})}^{-\ln(\sqrt{3})} \operatorname{ch}^2 t dt = \frac{3}{16} \int_{\ln(2-\sqrt{3})}^{-\ln(\sqrt{3})} (e^{2t} + e^{-2t} + 2) dt \\ &= \frac{3}{16} \left(\frac{1}{2} (e^{-2\ln(\sqrt{3})} - e^{2\ln(2-\sqrt{3})}) - \frac{1}{2} (e^{2\ln(\sqrt{3})} - e^{-2\ln(2-\sqrt{3})}) + 2(-\ln(\sqrt{3}) - \ln(2-\sqrt{3})) \right) \\ &= \frac{3}{16} \left(\frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} - (2-\sqrt{3})^2 \right) - \frac{1}{2} \left(3 - \frac{1}{(2-\sqrt{3})^2} \right) - 2\ln(2\sqrt{3}-3) \right) \\ &= \frac{3}{16} \left(-\frac{4}{3} + \frac{1}{2} (-(2-\sqrt{3})^2 + (2+\sqrt{3})^2) \right) - 2\ln(2\sqrt{3}-3) \\ &= -\frac{1}{4} + \frac{3\sqrt{3}}{4} - \frac{3}{8} \ln(2\sqrt{3}-3). \end{aligned}$$

Pour I_2 , $1 + x(1-x) = -x^2 + x + 1 = -(x - \frac{1}{2})^2 + (\frac{\sqrt{3}}{2})^2$ et on pose $x - \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \sin t$ et donc $dx = \frac{\sqrt{3}}{2} \cos t dt$.

$$\begin{aligned}
I_2 &= \int_{-\arcsin \frac{1}{\sqrt{5}}}^{\arcsin \frac{1}{\sqrt{5}}} \frac{\sqrt{3}}{2} \sqrt{1 - \sin^2 t} \frac{\sqrt{3}}{2} \cos t \, dt = \frac{3}{4} \int_{-\arcsin \frac{1}{\sqrt{5}}}^{\arcsin \frac{1}{\sqrt{5}}} \cos^2 t \, dt = \frac{3}{8} \int_{-\arcsin \frac{1}{\sqrt{5}}}^{\arcsin \frac{1}{\sqrt{5}}} (1 + \cos(2t)) \, dt \\
&= \frac{3}{8} (2 \arcsin \frac{1}{\sqrt{5}} + 2 [\sin t \cos t]_0^{\arcsin \frac{1}{\sqrt{5}}}) = \frac{3}{4} \arcsin \frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{3}{4} \frac{1}{\sqrt{5}} \sqrt{1 - \frac{1}{5}} \\
&= \frac{3}{4} \arcsin \frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{3}{10} \dots
\end{aligned}$$

7.

$$\begin{aligned}
I &= \int_0^\pi \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x} \, dx = \int_\pi^0 \frac{(\pi - u) \sin(\pi - u)}{1 + \cos^2(\pi - u)} \, -du = \pi \int_0^\pi \frac{\sin u}{1 + \cos^2 u} \, du - \int_0^\pi \frac{u \sin u}{1 + \cos^2 u} \, du \\
&= -\pi [\arctan(\cos u)]_0^\pi - I = \frac{\pi^2}{2} - I,
\end{aligned}$$

et donc, $I = \frac{\pi^2}{4}$.

8. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, posons $I_n = \int_1^x \ln^n t \, dt$.

$$I_{n+1} = [t \ln^{n+1} t]_1^x - (n+1) \int_1^x t \ln^n t \frac{1}{t} \, dt = x \ln^{n+1} x - (n+1) I_n.$$

Donc, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{I_{n+1}}{(n+1)!} + \frac{I_n}{n!} = \frac{x(\ln x)^{n+1}}{(n+1)!}$, et de plus, $I_1 = x \ln x - x + 1$.

Soit $n \geq 2$.

$$\sum_{k=1}^{n-1} (-1)^k \left(\frac{I_k}{k!} + \frac{I_{k+1}}{(k+1)!} \right) = \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^k \frac{I_k}{k!} + \sum_{k=2}^n (-1)^{k-1} \frac{I_k}{k!} = -I_1 - (-1)^n \frac{I_n}{n!},$$

Par suite,

$$I_n = (-1)^n n! \left(\sum_{k=1}^{n-1} (-1)^k \frac{x(\ln x)^{k+1}}{(k+1)!} - x \ln x + x - 1 \right) = (-1)^n n! \left(1 - \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x(\ln x)^k}{k!} \right).$$

Correction de l'exercice 6 ▲

Si $c \neq d$, les primitives considérées sont rationnelles si et seulement si il existe A et B tels que

$$\frac{(x-a)(x-b)}{(x-c)^2(x-d)^2} = \frac{A}{(x-c)^2} + \frac{B}{(x-d)^2} \quad (*)$$

$$(*) \Leftrightarrow \exists (A, B) \in \mathbb{R}^2 / \begin{cases} A + B = 1 \\ -2(Ad + Bc) = -(a+b) \\ Ad^2 + Bc^2 = ab \end{cases} \Leftrightarrow \exists (A, B) \in \mathbb{R}^2 / \begin{cases} B = 1 - A \\ A(d-c) + c = \frac{1}{2}(a+b) \\ Ad^2 + Bc^2 = ab \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \exists (A, B) \in \mathbb{R}^2 / \begin{cases} A = \frac{a+b-2c}{2(d-c)} \\ B = \frac{2d-a-b}{2(d-c)} \\ Ad^2 + Bc^2 = ab \end{cases} \Leftrightarrow \frac{a+b-2c}{2(d-c)} d^2 + \frac{2d-a-b}{2(d-c)} c^2 = ab$$

$$\Leftrightarrow d^2(a+b-2c) + c^2(2d-a-b) = 2ab(d-c) \Leftrightarrow (a+b)(d^2-c^2) - 2cd(d-c) = 2ab(d-c)$$

$$\Leftrightarrow 2cd + (a+b)(c+d) = 2ab \Leftrightarrow (a+b)(c+d) = 2(ab-cd).$$

Si $c = d$, il existe trois nombres A , B et C tels que $(x-a)(x-b) = A(x-c)^2 + B(x-c) + C$ et donc tels que

$$\frac{(x-a)(x-b)}{(x-c)^4} = \frac{A}{(x-c)^2} + \frac{B}{(x-c)^3} + \frac{C}{(x-c)^4}.$$

Dans ce cas, les primitives sont rationnelles. Finalement, les primitives considérées sont rationnelles si et seulement si $c = d$ ou $(c \neq d \text{ et } (a+b)(c+d) = 2(ab-cd))$.

Correction de l'exercice 7 ▲

Notons D le domaine de définition de f .

Si $x \in D$, $-x \in D$ et $f(-x) = -f(x)$. f est donc impaire.

Si $x \in D$, $x + 2\pi \in D$ et $f(x + 2\pi) = f(x)$. f est donc 2π -périodique.

On étudiera donc f sur $[0, \pi]$.

Soient $x \in [0, \pi]$ et $t \in [-1, 1]$. $t^2 - 2t \cos x + 1 = (t - \cos x)^2 + \sin^2 x \geq 0$ avec égalité si et seulement si $\sin x = 0$ et $t - \cos x = 0$.

Ainsi, si $x \in]0, \pi[$, $\forall t \in [-1, 1]$, $t^2 - 2t \cos x + 1 \neq 0$. On en déduit que la fraction rationnelle $t \mapsto \frac{\sin t}{1 - 2t \cos x + t^2}$ est continue sur $[-1, 1]$, et donc que $f(x)$ existe.

Si $x = 0$, $\forall t \in [-1, 1]$, $\frac{\sin t}{t^2 - 2t \cos x + 1} = \frac{0}{(t-1)^2} = 0$. On peut prolonger cette fonction par continuité en 1 et considérer que $f(0) = \int_{-1}^1 0 dt = 0$. De même, on peut considérer que $f(\pi) = 0$.

Ainsi, f est définie sur $[0, \pi]$ et donc, par parité et 2π -périodicité, sur \mathbb{R} .

Soit $x \in]0, \pi[$. Calculons $f(x)$.

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_{-1}^1 \frac{\sin t}{(t - \cos x)^2 + \sin^2 x} dt = \left[\arctan \frac{t - \cos x}{\sin x} \right]_{-1}^1 = \arctan \frac{1 - \cos x}{\sin x} + \arctan \frac{1 + \cos x}{\sin x} \\ &= \arctan \frac{2 \sin^2(x/2)}{2 \sin(x/2) \cos(x/2)} + \arctan \frac{2 \cos^2(x/2)}{2 \sin(x/2) \cos(x/2)} = \arctan(\tan(x/2)) + \arctan\left(\frac{1}{\tan(x/2)}\right) \\ &= \frac{\pi}{2} \text{ (car } \tan(x/2) > 0 \text{ pour } x \in]0, \pi[). \end{aligned}$$

Ce calcul achève l'étude de f . En voici le graphe :

Correction de l'exercice 8 ▲

Soit $x \in \mathbb{R}$. La fonction $t \mapsto \text{Max}(x, t) = \frac{1}{2}(x + t + |x - t|)$ est continue sur $[0, 1]$ en vertu de théorèmes généraux.

Par suite, $\int_0^1 \text{Max}(x, t) dt$ existe.

Si $x \leq 0$, alors $\forall t \in [0, 1]$, $x \leq t$ et donc $\text{Max}(x, t) = t$. Par suite, $f(x) = \int_0^1 t dt = \frac{1}{2}$.

Si $x \geq 1$, alors $\forall t \in [0, 1]$, $t \leq x$ et donc $\text{Max}(x, t) = x$. Par suite, $f(x) = \int_0^1 x dt = x$.

Si $0 < x < 1$,

$$f(x) = \int_0^x x dt + \int_x^1 t dt = x^2 + \frac{1}{2}(1 - x^2) = \frac{1}{2}(1 + x^2).$$

En résumé, $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{1}{2}(1 + x^2) & \text{si } 0 < x < 1 \\ x & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$.

f est déjà continue sur $] -\infty, 0]$, $[1, +\infty[$ et $]0, 1[$. De plus, $f(0^+) = \frac{1}{2} = f(0)$ et $f(1^-) = 1 = f(1)$. f est ainsi continue à droite en 0 et continue à gauche en 1 et donc sur \mathbb{R} .

f est de classe C^1 sur $] -\infty, 0]$, $[1, +\infty[$ et $]0, 1[$. De plus, $\lim_{x \rightarrow 0, x > 0} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0, x > 0} x = 0$. f est donc continue sur $[0, 1[$ de classe C^1 sur $]0, 1[$ et f' a une limite réelle quand x tend vers 0. D'après un théorème classique d'analyse, f est de classe C^1 sur $[0, 1[$ et en particulier, f est dérivable à droite en 0 et $f'_d(0) = 0$. Comme d'autre part, f est dérivable à gauche en 0 et que $f'_g(0) = 0 = f'_d(0)$, f est dérivable en 0 et $f'(0) = 0$. L'étude en 1 montre que f est dérivable en 1 et que $f'(1) = 1$. Le graphe de f est le suivant :

Correction de l'exercice 10 ▲

1. $I_0 = \int_0^{\pi/4} dx = \frac{\pi}{4}$ et $I_1 = \int_0^{\pi/4} \frac{\sin x}{\cos x} dx = [-\ln |\cos x|]_0^{\pi/4} = \frac{\ln 2}{2}$.

Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$I_n + I_{n+2} = \int_0^{\pi/4} (\tan^n x + \tan^{n+2} x) dx = \int_0^{\pi/4} \tan^n x (1 + \tan^2 x) dx = \left[\frac{\tan^{n+1} x}{n+1} \right]_0^{\pi/4} = \frac{1}{n+1}.$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{2k-1} &= \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} (I_{2k-2} + I_{2k}) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} I_{2k-2} + \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} I_{2k} \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k I_{2k} - \sum_{k=1}^n (-1)^k I_{2k} = I_0 - (-1)^n I_{2n}. \end{aligned}$$

Ainsi, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $I_{2n} = (-1)^n \left(\frac{\pi}{4} - \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{2k-1} \right)$.

De même, $\sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{2k} = I_1 - (-1)^n I_{2n+1}$ et donc, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $I_{2n+1} = \frac{(-1)^n}{2} \left(\ln 2 - \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k} \right)$.

2. Soient $\varepsilon \in]0, \frac{\pi}{2}[$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

$$0 \leq I_n = \int_0^{\pi/4 - \varepsilon/2} \tan^n x dx + \int_{\pi/4 - \varepsilon/2}^{\pi/4} \tan^n x dx \leq \frac{\pi}{4} \tan^n \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varepsilon}{2} \right) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Maintenant, $0 < \tan \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varepsilon}{2} \right) < 1$ et donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \tan^n \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varepsilon}{2} \right) = 0$. Par suite, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que, pour $n \geq n_0$, $0 \leq \tan^n \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varepsilon}{2} \right) < \frac{\varepsilon}{2}$. Pour $n \geq n_0$, on a alors $0 \leq I_n < \varepsilon$.

Ainsi, I_n tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$. On en déduit immédiatement que u_n tend vers $\ln 2$ et v_n tend vers $\frac{\pi}{4}$.
