

Exercice 1145 (Nombres de Bell) Soit E_n un ensemble fini de cardinal $n \geq 1$

On appelle partition de E_n , tout ensemble de parties de E_n non vides, deux à deux disjointes, et dont la réunion est égale à E_n .

On note B_n le nombre de partitions de E_n et on convient que $B_0 = 1$. Les $B_n, n \in \mathbb{N}$ sont appelés nombres de Bell.

1. Calculer B_1, B_2 et B_3

2. Etablir la relation, dite d'Aitken, $\forall n \in \mathbb{N}, B_{n+1} = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} B_i$

3. Démontrer par récurrence forte que $\forall n \in \mathbb{N}, B_n = \sum_{i=0}^{+\infty} e^{-1} \frac{i^n}{i!}$