

---

### EXERCICE 1 - Eléments caractéristiques d'une projection

Soit  $f$  l'endomorphisme de  $\mathbb{R}^3$  tel que  $f(x, y, z) = (-3x + 2y - 4z, 2x + 2z, 4x - 2y + 5z)$ . Montrer que  $f$  est la projection sur un plan  $P$  parallèlement à une droite  $D$ . Donner une équation cartésienne du plan  $P$  et un vecteur directeur de  $D$ .

### EXERCICE 2 - Endomorphismes annulant un polynôme de degré 2

Soit  $f \in \mathcal{L}(E)$  et soient  $\alpha, \beta$  deux réels distincts.

1. Démontrer que  $E = \text{Im}(f - \alpha \text{Id}_E) + \text{Im}(f - \beta \text{Id}_E)$ .

On suppose de plus que  $\alpha$  et  $\beta$  sont non nuls et que

$$(f - \alpha \text{Id}_E) \circ (f - \beta \text{Id}_E) = 0.$$

2. Démontrer que  $f$  est inversible, et calculer  $f^{-1}$ .
3. Démontrer que  $E = \ker(f - \alpha \text{Id}_E) \oplus \ker(f - \beta \text{Id}_E)$ .
4. Exprimer en fonction de  $f$  le projecteur  $p$  sur  $\ker(f - \alpha \text{Id}_E)$  parallèlement à  $\ker(f - \beta \text{Id}_E)$ .

### EXERCICE 3 - Noyaux itérés

Soit  $E$  un espace vectoriel de dimension finie  $n$  et soit  $f \in \mathcal{L}(E)$ .

1. Soit  $k \geq 1$ . Démontrer que  $\ker(f^k) \subset \ker(f^{k+1})$  et  $\text{Im}(f^{k+1}) \subset \text{Im}(f^k)$ .
2. (a) Démontrer que si  $\ker(f^k) = \ker(f^{k+1})$ , alors  $\ker(f^{k+1}) = \ker(f^{k+2})$ .  
(b) Démontrer qu'il existe  $p \in \mathbb{N}$  tel que
  - si  $k < p$ , alors  $\ker(f^k) \neq \ker(f^{k+1})$ ;
  - si  $k \geq p$ , alors  $\ker(f^k) = \ker(f^{k+1})$ .(c) Démontrer que  $p \leq n$ ;
3. Démontrer que si  $k < p$ , alors  $\text{Im}(f^k) \neq \text{Im}(f^{k+1})$  et si  $k \geq p$ , alors  $\text{Im}(f^k) = \text{Im}(f^{k+1})$ .
4. Démontrer que  $\ker(f^p)$  et  $\text{Im}(f^p)$  sont supplémentaires.
5. Démontrer qu'il existe deux sous-espaces  $F$  et  $G$  de  $E$  tels que  $F$  et  $G$  sont supplémentaires,  $f|_F$  est nilpotent et  $f|_G$  induit un automorphisme de  $G$ .
6. Soit  $d_k = \dim(\text{Im}(f^k))$ . Montrer que la suite  $(d_k - d_{k+1})$  est décroissante.

Cette feuille d'exercices a été conçue à l'aide du site <https://www.bibmath.net>