# TD 12 : Études locales et asymptotiques

## Connaître son cours :

- Soit $f$ une fonction de classe $\mathscr{C}^n$ sur un intervalle réel $I$ et $a \in I$. Donner l'expression de la formule de *Taylor-Young* et proposer une démonstration par récurrence sur le degré $n$ de régularité de la fonction $f$.
- Montrer qu'en cas d'existence, la liste des coefficients d'un développement limité est unique.
- Donner un développement limité de la fonction tan en 0 puis en $\frac{\pi}{4}$ à l'ordre 5.
- Donner un développement limité de la fonction $\left(x \mapsto \sqrt{1+x}\right)$ en 0 à l'ordre 5.
- Calculer le développement limité à l'ordre 5 en 0 de la fonction composée $\left(x \mapsto e^{\sin(x)}\right)$.
- Calculer successivement les développements en 0 à l'ordre 5 de $\left(x \mapsto \frac{1}{\cos(x)}\right)$ et de la fonction sin. Retrouver le développements en 0 à l'ordre 5 de la fonction tan.
- Soit $f$ une fonction admettant un développement limité à l'ordre $n$ en $a$ de partie régulière $P_n$. Montrer que toute primitive $F$ de $f$ admet un développement limité à l'ordre $n+1$ en $a$ et donner son expression.

## Relations de comparaison et développements limités :

**Exercice 1. (*)**

Soient $f$ et $g$ deux fonctions définies au voisinage d'un réel $a$ ou de $a = \pm\infty$. Montrer que
$e^f \sim_a e^g \iff \lim_a (f-g) = 0$.
A-t-on $f \sim_a g \implies e^f \sim_a e^g$ ?

---

**Exercice 2. (*)**

Déterminer les développements limités des fonctions suivantes :

1. $\dfrac{1}{1+x+x^2}$ à l'ordre 4 en 0
2. $\dfrac{\cos x - 1}{\sin x + 1}$ à l'ordre 2 en 0
3. $\dfrac{\ln(1+x)}{\sin x}$ à l'ordre 3 en 0

---

**Exercice 3. (*)**

Calculer les développements limités suivants :

1. $\ln\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)$ à l'ordre 4 en 0
2. $\exp(\sin x)$ à l'ordre 4 en 0
3. $(\cos x)^{\sin x}$ à l'ordre 5 en 0

---

**Exercice 4. (*)**

Calculer les développements limités suivants :

1. $\dfrac{1}{x}$ à l'ordre 3 en 2
2. $\ln(x)$ à l'ordre 3 en 2
3. $e^x$ à l'ordre 3 en 1
4. $\cos(x)$ à l'ordre 3 en $\dfrac{\pi}{3}$
5. $\sqrt{x}$ à l'ordre 3 en 2

---

**Exercice 5. (*)**

Calculer les développements limités suivants :

1. $\arccos x$ à l'ordre 5 en 0
2. $\displaystyle\int_0^x e^{t^2}\,dt$ à l'ordre 5 en 0.

---

**Exercice 6. (**)**

Soit $f(x) = \frac{x}{1-x^2}$. Calculer $f^{(n)}(0)$ puis $f^{(n)}(x)$ pour $|x| \neq 1$ .

---

**Exercice 7. (**)**

Trouver un équivalent simple de $\arccos x$ en 1.
*Indication : faire un développement limité d'ordre* 0 *à gauche et utiliser la fonction sinus*

---

**Exercice 8. (**)**

Calculer les développements limités suivants :

1. $\dfrac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{x}}$ à l'ordre 3 en $+\infty$
2. $\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)-\ln x$ à l'ordre 4 en $+\infty$

---

**Exercice 9. (**)**

Calculer, à l'ordre 100, le développement limité en 0 de la fonction $\left(x\mapsto \ln\left(\sum_{k=0}^{99}\dfrac{x^k}{k!}\right)\right)$.

---

**Exercice 10. (**)**

Pour $x\in\mathbb{R}$, on pose $f(x)=x\exp(x^2)$.

1. Montrer que $f$ réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.
2. Justifier que $f^{-1}$ admet un développement limité à l'ordre 4 en 0.
3. Donner ce développement limité.

---

**Exercice 11. (**)**

Calculer $\ell=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{\ln(x+1)}{\ln x}\right)^x$. Donner un équivalent de $\left(\dfrac{\ln(x+1)}{\ln x}\right)^x-\ell$ lorsque $x\to+\infty$.

---

**Exercice 12. (**)**

Donner un développement limité à l'ordre 2 de $f(x)=\dfrac{\sqrt{1+x^2}}{1+x+\sqrt{1+x^2}}$ en 0. En déduire un développement à l'ordre 2 en $+\infty$. Calculer un développement à l'ordre 1 en $-\infty$.

---

**Exercice 13. (**)**

Soit $a$ un nombre réel et $f:]a,+\infty[\to\mathbb{R}$ une application de classe $C^2$. On suppose $f$ et $f''$ bornées ; on pose $M_0=\sup\limits_{x>a}|f(x)|$ et $M_2=\sup\limits_{x>a}|f''(x)|$.

1. En appliquant une formule de Taylor reliant $f(x)$ et $f(x+h)$, montrer que, pour tout $x>a$ et tout $h>0$, on a : $|f'(x)|\leq \dfrac{h}{2}M_2+\dfrac{2}{h}M_0$.
2. En déduire que $f'$ est bornée sur $]a,+\infty[$.

---

**Exercice 14. (**)**

Donner des équivalents simples pour les fonctions suivantes :

1. $2e^x-\sqrt{1+4x}-\sqrt{1+6x^2}$, en 0
2. $(\cos x)^{\sin x}-(\cos x)^{\tan x}$, en 0
3. $\sqrt{x^2+1}-2\sqrt[3]{x^3+x}+\sqrt[4]{x^4+x^2}$, en $+\infty$

---

## Applications et développements asymptotiques :

**Exercice 15. (*)**

Calculer les limites suivantes

1. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{x^2}-\cos x}{x^2}$
2. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos x-\sqrt{1-x^2}}{x^4}$

---

**Exercice 16. (**)**

Étudier au voisinage de 0 la fonction définie par $f(x)=\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{\arcsin x}$. Est-elle prolongeable par continuité ? Dérivable en 0 ? Trouver une tangente à la courbe en 0.

---

**Exercice 17. (*)**

Donner un développement asymptotique à la précision $\dfrac{1}{n^3}$ (ordre 3) de $u_n=\dfrac{1}{n!}\sum_{k=0}^n k!$.

---

**Exercice 18. (**)**

Donner un développement asymptotique :

1. En 0 de $\frac{1}{x(e^x-1)}-\frac{1}{x^2}$ à la précision $x^2$.
2. En $+\infty$ de $x\ln(x+1)-(x+1)\ln x$ à la précision $\frac{1}{x^3}$.

---

**Exercice 19. (*)**

Etudier l'existence et la valeur éventuelle des limites suivantes

1. $\lim\limits_{x\to\pi/2}(\sin x)^{1/(2x-\pi)}$
2. $\lim\limits_{x\to\pi/2}|\tan x|^{\cos x}$
3. $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\cos(\dfrac{n\pi}{3n+1})+\sin(\dfrac{n\pi}{6n+1})\right)^n$
4. $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\ln|x|}$
5. $\lim\limits_{x\to\pi/2}\cos x.e^{1/(1-\sin x)}$
6. $\lim\limits_{x\to\pi/3}\dfrac{2\cos^2 x+\cos x-1}{2\cos^2 x-3\cos x+1}$
7. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1+\tan x}{1+\tanh x}\right)^{1/\sin x}$
8. $\lim\limits_{x\to e^-}(\ln x)^{\ln(e-x)}$
9. $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{x^x-1}{\ln(1-\sqrt{x^2-1})}$
10. $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{(\sin x)^x-x^{\sin x}}{\ln(x-x^2)+x-\ln x}$
11. $\lim\limits_{x\to 1/\sqrt{2}}\dfrac{(\arcsin x)^2-\dfrac{\pi^2}{16}}{2x^2-1}$

**Exercice 20. (***)**

1. Montrer que l'équation $\tan x = x$ possède une unique solution $x_n$ dans $\left]n\pi-\frac{\pi}{2},n\pi+\frac{\pi}{2}\right[$ $(n\in\mathbb{N})$.
2. Quelle relation lie $x_n$ et $\arctan(x_n)$ ?
3. Donner un DL de $x_n$ en fonction de $n$ à l'ordre 0 pour $n\to\infty$.
4. En reportant dans la relation trouvée en 2, obtenir un DL de $x_n$ à la précision $\frac{1}{n^2}$.

**Exercice 21. (***)**

Soient $(u_n)$ et $(v_n)$ deux suites réelles positives telles que $u_n\sim_{+\infty}v_n$. On pose

$$U_n=\sum_{k=1}^n u_k \text{ et } V_n=\sum_{k=1}^n v_k,$$

et on suppose de plus que $V_n\to+\infty$.
Démontrer que $U_n\sim_{+\infty}V_n$.

**Exercice 22. (**)**

Déterminer :

1. $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{x^2+3x+2}+x$
2. $\lim\limits_{x\to 0^+}(\arctan x)^{\frac{1}{x^2}}$
3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+3x)^{\frac{1}{3}}-1-\sin x}{1-\cos x}$

**Exercice 23. (***)**

Soit $u_0\in]0,\frac{\pi}{2}]$. Pour $n\in\mathbb{N}$, on pose

$$u_{n+1}=\sin(u_n)$$

1. Montrer brièvement que la suite $u$ est strictement positive et converge vers 0.
2. (a) Déterminer un réel $\alpha$ tel que la suite $u_{n+1}^\alpha-u_n^\alpha$ ait une limite finie non nulle.
   (b) En utilisant le lemme de CESARO, déterminer un équivalent simple de $u_n$.

**Exercice 24. (***)**

*"Série harmonique et constante d'*EULER *"*

On pose

$$H_n=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}$$

1. Prouver que $H_n\sim_{+\infty}\ln n$.
2. On pose $u_n=H_n-\ln n$, et $v_n=u_{n+1}-u_n$. Étudier la nature de la série $\sum\limits_n v_n$. En déduire que la suite $(u_n)$ est convergente.
   On notera $\gamma$ sa limite.
3. Soit $R_n=\sum\limits_{k=n}^{+\infty}\dfrac{1}{k^2}$.
   Donner un équivalent de $R_n$.
4. Soit $w_n$ tel que $H_n=\ln n+\gamma+w_n$, et soit $t_n=w_{n+1}-w_n$.
   Donner un équivalent du reste $\sum\limits_{k\geq n}t_k$.
   En déduire que
   $$H_n=\ln n+\gamma+\frac{1}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right)$$