COLLE 14 = DIMENSION DES ESPACES VECTORIELS

Connaître son cours :

1. Soit $(P_k)_{k\in[\![1,n]\!]}$ une famille de polynômes non nuls échelonnée en degré, montrer que cette famille est libre. Donner un exemple de famille libre de polynômes qui n'est pas échelonnée en degré.
2. Soit F et G deux sous-espaces supplémentaires d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E. Montrer que la famille obtenue par concaténation d'une base de F et d'une base de G est une base de E.
3. Montrer que deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie sont isomorphes si, et seulement s'ils ont la même dimension.

Exercices :

Exercice 1. (**)

Soit E l'espace vectoriel des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On note $L : E \to E$ l'application qui à $f \in E$ associe $L(f)$ définie par $L(f) : x \mapsto \dfrac{f(x) + f(-x)}{2}$.

1. Montrer que L est un endomorphisme de E.
2. Préciser le noyau et l'image de L.
3. L'application L est-elle injective ? surjective ?
4. Montrer que l'application L est une projection.

Exercice 2. (**)

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ tel que $f(x, y, z) = (-3x + 2y - 4z, 2x + 2z, 4x - 2y + 5z)$. Montrer que f est la projection sur un plan P parallèlement à une droite D. Donner une équation cartésienne du plan P et un vecteur directeur de D.

Exercice 3. (**)

Soit E un espace vectoriel et $u, v \in \mathcal{L}(E)$. On suppose que $u \circ v = v \circ u$.
Démontrer que $\ker(u)$ et $\mathrm{Im}(u)$ sont stables par v.

Exercice 4. (**)

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ et soient α, β deux réels distincts.

1. Démontrer que $E = \mathrm{Im}(f - \alpha Id_E) + \mathrm{Im}(f - \beta Id_E)$.
   On suppose de plus que α et β sont non nuls et que
   $$(f - \alpha Id_E) \circ (f - \beta Id_E) = 0.$$
2. Démontrer que f est inversible, et calculer f^{-1}.
3. Démontrer que $E = \ker(f - \alpha Id_E) \oplus \ker(f - \beta Id_E)$.
4. Exprimer en fonction de f le projecteur p sur $\ker(f - \alpha Id_E)$ parallèlement à $\ker(f - \beta Id_E)$.

Exercice 5. (***)

Soit E un espace vectoriel de dimension finie n et soit $f \in \mathcal{L}(E)$.

1. Soit $k \geq 1$. Démontrer que $\ker(f^k) \subset \ker(f^{k+1})$ et $\operatorname{Im}(f^{k+1}) \subset \operatorname{Im}(f^k)$.
2. (a) Démontrer que si $\ker(f^k) = \ker(f^{k+1})$, alors $\ker(f^{k+1}) = \ker(f^{k+2})$.

   (b) Démontrer qu'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que

   — si $k < p$, alors $\ker(f^k) \neq \ker(f^{k+1})$;

   — si $k \geq p$, alors $\ker(f^k) = \ker(f^{k+1})$.

   (c) Démontrer que $p \leq n$;
3. Démontrer que si $k < p$, alors $\operatorname{Im}(f^k) \neq \operatorname{Im}(f^{k+1})$ et si $k \geq p$, alors $\operatorname{Im}(f^k) = \operatorname{Im}(f^{k+1})$.
4. Démontrer que $\ker(f^p)$ et $\operatorname{Im}(f^p)$ sont supplémentaires.
5. Démontrer qu'il existe deux sous-espaces F et G de E tels que F et G sont supplémentaires, $f_{|F}$ est nilpotent et $f_{|G}$ induit un automorphisme de G.
6. Soit $d_k = \dim\big(\operatorname{Im}(f^k)\big)$. Montrer que la suite $(d_k - d_{k+1})$ est décroissante.

Exercice 6. (***)

Partie A - Exemple d'un projecteur

Notons $E = \mathbb{R}[X]$ l'ensemble des polynômes réels, $\mathscr{P}$ et $\mathscr{I}$ les sous-espaces vectoriels des polynômes pairs et impairs respectivement.

1. Montrer que $\mathscr{I}$ est un supplémentaire de $\mathscr{P}$ dans E.
2. Soit l'application linéaire

$$\varphi : \begin{cases} E & \longrightarrow \quad E \\ P & \longmapsto \quad \dfrac{P(X)+P(-X)}{2} + X\dfrac{P(X)-P(-X)}{2} \end{cases}$$

   (a) Déterminer $\operatorname{Im}\varphi$ puis établir que

$$\operatorname{Ker}\varphi = \{(1-X)P(X), P \in \mathscr{I}\}.$$

   (b) Montrer que φ est un projecteur de E.

   (c) En déduire que $\operatorname{Ker}\varphi$ est un supplémentaire de $\mathscr{P}$.

Partie B - sous-espaces qui admettent un supplémentaire commun

Soit E un espace vectoriel, F_1 et F_2 deux sous-espaces vectoriels de E

1. Supposons, dans cette question, que F_1 et F_2 sont supplémentaires dans E et qu'il existe un isomorphisme $u : F_1 \to F_2$.
   Montrer que $G = \{x - u(x), x \in F_1\}$ est un espace vectoriel puis qu'il est un supplémentaire commun à F_1 et F_2.
2. Réciproquement supposons dans cette question que F_1 et F_2 admettent un supplémentaire commun G. Montrer que F_1 et F_2 sont isomorphes.
