Niveau : Seconde
M.Botcazou
mail : ibotca52@gmail.com

CORRECTION FEUILLE 5 : CALCUL LITTÉRAL

Puissances entières :

Exercice 1.
Calculer les puissances suivantes :

1. $(-9)^0 = 1$
2. $10^3 = 1000$
3. $(-2)^3 = -8$
4. $-7^2 = -49$

Exercice 2.
Calculer les puissances négatives suivantes :

1. $10^{-5} = \dfrac{1}{10^5} = 0,00001$
2. $1^{-3} = \dfrac{1}{1^3} = \dfrac{1}{1} = 1$
3. $(-2)^{-3} = \dfrac{1}{(-2)^3} = \dfrac{1}{-8} = -\dfrac{1}{8}$
4. $-6^{-2} = \dfrac{1}{-6^2} = \dfrac{1}{-36} = -\dfrac{1}{36}$

Exercice 3.
Exprimer sous la forme d'une seule puissance

1. $4^5 \times 4^7 = 4^{5+7} = 4^{12}$
2. $7^3 \times 7^{-2} = 7^{3-2} = 7^1 = 7$
3. $10^3 \times 10^{-4} \times 10^5 = 10^{3-4+5} = 10^4$
4. $5^4 \times (5^{-1})^2 = 5^4 \times 5^{-1\times 2} = 5^{4-2} = 5^2$

Exercice 4.
Exprimer sous la forme d'une seule puissance

1. $\dfrac{5^4}{5^6} = 5^{4-6} = 5^{-2} = \dfrac{1}{5^2} = \dfrac{1}{25}$
2. $\dfrac{4^3}{4^2} \times \dfrac{4^5}{4^6} = 4^{3-2} \times 4^{5-6}$
   $= 4^{3-2+5-6} = 4^0 = 1$
3. $7^{-1} \times \dfrac{7^3}{7^4} = 7^{-1+3-4} = 7^{-2} = \dfrac{1}{7^2}$
   $= \dfrac{1}{49}$
4. $\dfrac{3^2}{3^{-2}} = 3^{2-(-2)} = 3^{2+2} = 3^4$

Exercice 5.
Calculer les puissances suivantes :

1. $\left(\dfrac{5}{3}\right)^2 = \dfrac{5^2}{3^2} = \dfrac{25}{9}$
2. $\left(\dfrac{1}{4}\right)^{-2} = \left(\dfrac{4}{1}\right)^2 = 4^2 = 16$
3. $\left(\dfrac{1}{2^2}\right)^3 = \dfrac{1^3}{(2^2)^3}$
4. $\left(\dfrac{4}{3^2}\right)^{-2} = \left(\dfrac{3^2}{4}\right)^2 = \dfrac{(3^2)^2}{4^2} = \dfrac{3^4}{4^2}$
   $= \dfrac{81}{16}$

Exercice 6.
Exprimer sous la forme d'une seule puissance :

1. $5^6 \times 3^5 \times 5^4 \times 3^5 = 5^6 \times 5^4 \times 3^5 \times 3^5$
   $= 5^{6+4} \times 3^{5+5} = 5^{10} \times 3^{10}$
   $= (5 \times 3)^{10}$

2. $(12^2)^5 \times (12^3)^{-3} = 12^{2\times 5} \times 12^{3\times -3}$
   $= 12^{10} \times 12^{-9} = 12^{10-9}$
   $= 12^1 = 12$

Racine carrée d'un nombre réel positif :

Exercice 7.
Simplifier les racines carrées

1. $\sqrt{1} \times \sqrt{0} \ = \ 1 \times 0 \ = \ 0$
2. $\sqrt{25} \times \sqrt{16} \ = \ 5 \times 4 \ = \ 20$
3. $\sqrt{121} \ = \ \sqrt{11 \times 11} \ = \ \sqrt{11^2} \ = \ 11$
4. $\sqrt{144} \ = \ \sqrt{12 \times 12} \ = \ 12$

Exercice 8.
Écrire plus simplement les nombres suivants :

1. $\sqrt{1.2^2} \ = \ 1.2$
2. $\sqrt{\pi^2} \ = \ \pi$
3. $\sqrt{(-2.666)^2} \ = \ |-2.666\,| \ = \ 2.666$
4. $\sqrt{7.89}^{\,2} \ = \ 7.89$

Exercice 9.
Écrire plus simplement les nombres suivants :

1. $\sqrt{32} \times \sqrt{2} \ = \ \sqrt{2 \times 16} \times \sqrt{2}$
   $= \ \sqrt{2} \times \sqrt{16} \times \sqrt{2} \ = \ 4 \times 2 \ = \ 8$
2. $\sqrt{3} \times \sqrt{36} \times \sqrt{3} \ = \ 3 \times 6 \ = \ 18$
3. $\dfrac{\sqrt{98}}{\sqrt{2}} \ = \ \sqrt{\dfrac{98}{2}} \ = \ \sqrt{49} \ = \ 7$
4. $(4\sqrt{5})^2 \ = \ 16 \times 5 \ = \ 80$

Exercice 10.
Écrire plus simplement les nombres suivants :

1. $\sqrt{\dfrac{32}{2}} \ = \ \sqrt{16} \ = \ 4$
2. $\sqrt{3}^{\,-4} \ = \ \dfrac{1}{\left(\sqrt{3}\right)^4} \ = \ \dfrac{1}{\left(\sqrt{3}^2\right)^2} \ = \ \dfrac{1}{9}$
3. $\left(\dfrac{5}{\sqrt{2}}\right)^2 \ = \ \dfrac{5^2}{\left(\sqrt{2}\right)^2} \ = \ \dfrac{25}{2}$
4. $\dfrac{1}{\sqrt{7}^{-2}} \ = \ \dfrac{1^{-2}}{\sqrt{7}^{-2}} \ = \ \left(\dfrac{1}{\sqrt{7}}\right)^{-2}$
   $= \ \left(\sqrt{7}\right)^2 \ = \ 7$

Exercice 11.
Écrire sous la forme $a\sqrt{b}$, avec a et b entiers et b étant le plus petit possible.

1. $\sqrt{8} \ = \ \sqrt{4 \times 2} \ = \ 2\sqrt{2}$
2. $\sqrt{18} \ = \ \sqrt{9 \times 2} \ = \ 3\sqrt{2}$
3. $\sqrt{45} \ = \ \sqrt{9 \times 5} \ = \ 3\sqrt{5}$
4. $\sqrt{150} \ = \ \sqrt{15 \times 10} \ = \ \sqrt{3 \times 5 \times 2 \times 5}$
   $= \ \sqrt{5 \times 5} \times \sqrt{2 \times 3} \ = \ 5\sqrt{6}$

Exercice 12.
Écrire plus simplement les nombres suivants :

1. $4\sqrt{3} - 2\sqrt{3} + 6\sqrt{3} \ = \ \sqrt{3}\,(4 - 2 + 6)$
   $= \ \sqrt{3} \times 8$
2. $(3 - 2\sqrt{3}) - (4 - 6\sqrt{3})$
   $= \ 3 - 2\sqrt{3} - 4 + 6\sqrt{3}$
   $= \ -1 + 4\sqrt{3}$

Transformations d'expressions algébriques :

Exercice 13.
Réduire et ordonner les expressions ci-dessous :

1. $(2x+4)+3x = 5x+4$
2. $3+(2+3x)-(x-2) = 3+2+3x-x+2$
   $= 2x+7$
3. $(2x-3)-(2x+3) = 2x-3-2x-3 = -6$

Exercice 14.
Développer, réduire et ordonner les expressions ci-dessous :

1. $2(1+6x) = 12x+2$
2. $(8-x)(2+x) = -x^2+6x+16$
3. $(x-1)^2 = (x-1)\times(x-1) = x^2-2x+1$

Exercice 15.
Développer, réduire et ordonner les expressions ci-dessous :

1. $(x+2)(4x-3)-x(7-x)$
   $= 4x^2+5x-6-7x+x^2$
   $= 5x^2-2x-6$
2. $(3x-1)(3x+1) = 9x^2-1$
3. $(8x-1)(2x+1)+(16x-2)(3-x)$
   $= (8x-1)(2x+1)+2(8x-1)(3-x)$
   $= (8x-1)\left[2x+1+2(3-x)\right]$
   $= (8x-1)\left[2x+1+6-2x\right]$
   $= (8x-1)\times 7 = 56x-7$

Exercice 16.
Les trois identités remarquables que l'on vous demande de connaître par cœur sont :

Pour tout : $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

1. $(\alpha+\beta)^2 = \alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2$
2. $(\alpha+\beta)(\alpha-\beta) = \alpha^2-\beta^2$
3. $(\alpha-\beta)^2 = \alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2$

Vous devez aussi les connaître dans l'autre sens de l'égalité avec d'autres lettres comme ci-dessous :

Pour tout : $x, y \in \mathbb{R}$

1. $x^2+2xy+y^2 = (x+y)^2$
2. $x^2-y^2 = (x+y)(x-y)$
3. $x^2-2xy+y^2 = (x-y)^2$

Exercice 17.
Factoriser les expressions suivantes.

1. $3(2+3x)-(5+2x)(2+3x)$
   $= (2+3x)\left[3-(5+2x)\right]$
   $= (2+3x)(3-5-2x)$
   $= (2+3x)(-2x-2) = -(3x+2)(2x+2)$
2. $(2-5x)2-(2-5x)(1+x)$
   $= (2-5x)\left[(2-5x)-(1+x)\right]$
   $= (2-5x)(2-5x-1-x)$
   $= (2-5x)(-6x+1)$
3. $5(1-2x)-(4+3x)(1-2x)$
   $= (1-2x)\left[5-(4+3x)\right]$
   $= (1-2x)(5-4-3x)$
   $= (1-2x)(-3x+1)$

Exercice 18.
Nous factorisons les expressions suivantes grâce aux identités remarquables.

1. $x^2-2x+1 = (x-1)^2$
2. $16x^2+16x+4 = (4x+2)^2$
3. $1-x^2 = (1+x)(1-x)$

Exercice 19.
Utiliser les identités remarquables pour écrire les expressions suivantes sous la forme :
$a+b\sqrt{c}$, où $a, b, c \in \mathbb{Z}$

1. $(\sqrt{3}-4)^2 = 3-8\sqrt{3}+16 = -8\sqrt{3}+19$
2. $(3+\sqrt{5})^2 = 9+6\sqrt{5}+5 = 6\sqrt{5}+14$
3. $(\sqrt{2}-\sqrt{5})(\sqrt{2}+\sqrt{5}) = 2-5 = -3$

Transformations d’expressions fractionnaires :

Exercice 20.
Pour chaque expression, donner pour quelle(s) valeur(s) de x les nombres suivants ne sont pas définis.

1. $\dfrac{7x}{x-2} - \dfrac{5}{3-x}$

   n’est pas défini si : $x \in \{2;\ 3\}$

2. $3 + \dfrac{5x}{2x+1}$

   n’est pas défini si : $x \in \{-\dfrac{1}{2}\}$

Exercice 21.
Réduire les expressions suivantes au même dénominateur.

1. $$\frac{7x}{x-2} - \frac{5}{3-x} = \frac{7x(3-x)-5(x-2)}{(x-2)(3-x)}$$
   $$= \frac{21x-7x^2-5x+10}{(x-2)(3-x)}$$
   $$= \frac{-7x^2+16x+10}{(x-2)(3-x)}$$

2. $$\frac{7x+2}{2x-1} - \frac{8}{3x-6}$$
   $$= \frac{(7x+2)(3x-6)-8(2x-1)}{(2x-1)(3x-6)}$$
   $$= \frac{21x^2-42x+6x-12-16x+8}{(2x-1)(3x-6)}$$
   $$= \frac{21x^2-52x-4}{(2x-1)(3x-6)}$$

Exercice 22.
Résoudre les équations suivantes :

1. $$3 = \frac{5x}{2x+1}$$
   $$\Leftrightarrow 3 - \frac{5x}{2x+1} = 0$$
   $$\Leftrightarrow \frac{3(2x+1)}{(2x+1)} - \frac{5x}{2x+1} = 0$$
   $$\Leftrightarrow \frac{6x+3-5x}{(2x+1)} = 0$$
   $$\Leftrightarrow \frac{x+3}{(2x+1)} = 0$$
   $$\Leftrightarrow x+3 = 0$$
   $$\Leftrightarrow x = -3$$

2. $$\frac{3}{x+1} = \frac{2}{x-1}$$
   $$\Leftrightarrow \frac{3}{x+1} - \frac{2}{x-1} = 0$$
   $$\Leftrightarrow \frac{3(x-1)-2(x+1)}{(x+1)(x-1)} = 0$$
   $$\Leftrightarrow \frac{3x-3-2x-2}{(x+1)(x-1)} = 0$$
   $$\Leftrightarrow \frac{x-5}{(x+1)(x-1)} = 0$$
   $$\Leftrightarrow x-5 = 0$$
   $$\Leftrightarrow x = 5$$

3. $$\frac{x+2}{x} = -\frac{1}{x^2}$$
   $$\Leftrightarrow x \times \frac{x+2}{x} = -\frac{1}{x^2} \times x$$
   $$\Leftrightarrow (x+2) = -\frac{1}{x}$$
   $$\Leftrightarrow (x+2) + \frac{1}{x} = 0$$
   $$\Leftrightarrow \frac{(x+2)x}{x} + \frac{1}{x} = 0$$
   $$\Leftrightarrow \frac{x^2+2x+1}{x} = 0$$
   $$\Leftrightarrow x^2+2x+1 = 0$$
   $$\Leftrightarrow (x+1)^2 = 0$$
   $$\Leftrightarrow (x+1) = 0$$
   $$\Leftrightarrow x = -1$$