Notations

Dans tout le problème, n désigne un entier naturel non nul : $n \in \mathbb{N}^*$.

- Dans $\mathscr{E}_n = \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ espace vectoriel réel de dimension n, on utilisera le produit scalaire canonique défini par :

$$\forall U, V \in \mathscr{E}_n,\ (U|V) = U^\top V$$

- On notera $\mathscr{M}_n = \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, l'espace vectoriel des matrices carrées de taille n à coefficients réels.
- Pour $A \in \mathscr{M}_n$, on notera $\ker(A)$ le noyau de A vu comme endomorphisme de $\mathscr{E}_n$.
- Dans $\mathscr{M}_n$, on notera 0_n la matrice nulle et I_n la matrice unité. Le déterminant est noté det.
- $\mathscr{G}_n = GL_n(\mathbb{R}) = \{M \in \mathscr{M}_n,\ \det(M) \neq 0\}$ désigne le groupe linéaire des matrices inversibles de $\mathscr{M}_n$.
- $\mathscr{O}_n = \{M \in \mathscr{M}_n,\ M^\top M = I_n\}$ désigne le groupe orthogonal d'indice n, formé des matrices orthogonales de $\mathscr{M}_n$.
- On sera enfin amené à utiliser des décompositions par blocs. On rappelle en particulier que si A, B, C, D, A', B', C', $D' \in \mathscr{M}_n$ on a alors dans $\mathscr{M}_{2n}$:

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A' & B' \\ C' & D' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AA' + BC' & AB' + BD' \\ CA' + DC' & CB' + DD' \end{pmatrix}$$

$$\det\begin{pmatrix} A & C \\ 0_n & D \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} A & 0_n \\ C & D \end{pmatrix} = \det(A)\det(D)$$

I - Le groupe symplectique

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soit J_n ou simplement J la matrice de $\mathscr{M}_{2n}$ définie par :

$$J = \begin{pmatrix} 0_n & -I_n \\ I_n & 0_n \end{pmatrix}$$

On note :

$$\mathscr{S}_{p_{2n}} = \left\{M \in \mathscr{M}_{2n},\ M^\top J M = J\right\}$$

1. Calculer J^2 et $J^\top$ en fonction de I_{2n} et J. Montrer que J est inversible et identifier son inverse.
2. Vérifier que $J \in \mathscr{S}_{p_{2n}}$ et que pour tout réel α,

$$K(\alpha) = \begin{pmatrix} I_n & 0_n \\ -\alpha I_n & I_n \end{pmatrix} \in \mathscr{S}_{p_{2n}}$$

3. Pour tout $U \in \mathscr{G}_n$, vérifier que $L_U = \begin{pmatrix} U & 0_n \\ 0_n & (U^{-1})^\top \end{pmatrix}$ est dans $\mathscr{S}_{p_{2n}}$.
4. Si $M \in \mathscr{S}_{p_{2n}}$, préciser les valeurs possibles de $\det(M)$.
5. Montrer que le produit de deux éléments de $\mathscr{S}_{p_{2n}}$ est un élément de $\mathscr{S}_{p_{2n}}$.
6. Montrer qu'un élément de $\mathscr{S}_{p_{2n}}$ est inversible et que son inverse appartient à $\mathscr{S}_{p_{2n}}$.
7. Montrer que si $M \in \mathscr{S}_{p_{2n}}$ alors $M^\top \in \mathscr{S}_{p_{2n}}$.

Soit M une matrice de $\mathscr{M}_{2n}$ écrite sous la forme :

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \text{ avec } A, B, C, D \in \mathscr{M}_n$$

8. Déterminer les relations sur A, B, C, D caractérisant l'appartenance de M à $\mathscr{S}_{p_{2n}}$.