TD Suites Exercice 1 Pour chacune des assertions suivantes, dire si elle est vraie ou fausse, $5i$ elle est vraie donner une preuve, sinon, donner un contre-exemple. Fxercice 5 Soit (u_N) une suite reclle. 1. On suppose que les suites extraites $(t_{2n})_{n\in N}$ et $(u_{2n+1})_{n\in N}$ convergent vers une meme limite ℓ. R. Montrer que ($u_n)$ converge vers f. 2. On suppose que $(u_{2n})\cdot(u_{2n+1})$ et (u_{mn}) convergent. Montrer que (t_n) eonverge. xercice 6 Soit (u_s) une suite de termes strictement positifs. On suppose que $\frac{u_{n-1}}{u_n}\frac{1}{\pi+\infty}\ell_4$ avec $\ell>1$. 1. Mantrer que la suite (u_n) est croisfante A partir diun certain rang. 2. Montrer que $t_n\rightarrow+\infty$ Exercice 7 Soit (x_N) une suite de recels 1. Montrer que si $x_{n+1}-x_{ni}\rightarrow\ell,\frac{\pi}{n}\rightarrow\ell$ Indication : Lemme de Cesaro. 2. On suppose que $\forall n\in N_1$, Fn >0 et $\frac{x_{n-1}}{x_n}\rightarrow\ell$. Montrer que $\sqrt[3]{x_n}\rightarrow\ell$ 3. Déterminer les limites eventuelles des suites $\sqrt[n]{\left(\begin{array}{c}2n\\ n\end{array}\right)}$ et $\frac{\sqrt[5]{\pi}}{n}$. Exercice 8 Soit $(u_n),(v_n)$ deux suites a valeurs dans $[0,1]$ telles que $u_nv_n\rightarrow1$. Montrer que $u_n\rightarrow1$ et $v_n\rightarrow1$. Exercice 9 On suppose $u_n\rightarrow\ell,v_n\rightarrow\ell'$. Montrer que max $(u_n,v_a)\rightarrow\max(\ell,\ell')$. Exercice 10. Déterminer la limite; quand $n\rightarrow+\infty$; de $\left(\sin\frac{1}{n}+y^3\cos n\right)^n$. Exercice 11 Etudier la limite de sin $\left(\pi\sqrt{\pi^2+b}\right)$ Exercice 12 Déterminer la limite, quand $n\rightarrow+\infty$, de $E\left(a^n\right)^{2/a}$, en fonction de $a\in R_+$. Exercice 13. Soit $a_i,\ldots,a_m>0$. Montrer que $\left(\sum_{i=1}^m a_i^n\right)^{\frac{1}{k}}\frac{n_{n\rightarrow+\infty}}{\operatorname{minx}}a_{i\leq1}a_i$. Exercice 14 Soit $u_r=\sum_e^n(-1)\left(\begin{array}{c}1\\ s\end{array}\right)$ 1. Etudier la limite de une- 2. Montrer que $\sum_{k-0}^i\frac{1}{(\text{ iv})}=\frac{m_a}{2}$. Exercice 16 * Soit $f:N-+N$ une bijection. 1. Montrer que $f(m)\rightarrow+\infty$. 2. On suppose que $\frac{f(b)}{\pi}+L$ Montrer que $L=1$ 3. La limite precedente existe :t-elle toujours?

Exercice 17 Soit (u_n) une suite minorée telle que $u_n+(\tan u_n)^2$ converge. 1. Montrer que (u_n) est majorée. 2. Montrer que $\left(\tan^2u_n\right)$ est bornée. 3. On suppose que $(\tan u_n)$ est croissante. Montrer que (u_n) converge. Exercice 18 On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0>0$ et $\forall n\in\mathbb{N},u_{n+1}=u_n+\frac{1}{u_n}$ 1. Montrer que $\forall n\in\mathbb{N},u_n\geq0$. 2. Montrer que $u_n\rightarrow+\infty$. 3. Déterminer la limite de $u_{n+1}^2-u_n^2$. En utilisant le théorème de Cesàro, montrer que $u_n\sim\sqrt{2n}$. Exercice 19 On considère les suites définies par $u_n=\sum_{p=0}^n\frac{1}{p!}$ et $v_n=u_n+\frac{1}{n!}$. 1. Montrer que ces deux suites sont adjacentes. On admet que leur limite est $e=e^1$. 2. Montrer que leur limite est irrationnelle. Indication : Procéder par l'absurde et écrire les inégalités pour un n bien choisi. Exercice 20 $\star$ Soit (u_n) une suite réelle positive vérifiant $\forall n\in\mathcal{N},u_{n+2}\leq\frac{u_{n+1}+u_n}{3}$. 1. Soit $v_n=\max(u_n,u_{n+1})$. Montrer que v_n est décroissante. 2. Montrer que $v_n\rightarrow0$, puis que $u_n\rightarrow0$. Exercice 21 Distance À UNE PARTIE Soit $A\subset\mathbb{R}$ non vide. Pour $x\in\mathbb{R}$, on pose $d(x,A)=\inf_{y\in A}|x-y|$. 1. Justifier la définition de $d(x,A)$. 2. Montrer que $x\mapsto d(x,A)$ est 1 -lipschitzienne, c'est-à-dire

$$\forall x,y\in\mathbb{R},\quad|d(x,A)-d(y,A)|\leq|x-y|$$

En particulier, la fonction $x\mapsto d(x,A)$ est continue. Exercice 22 Soit (u_n) une suite réelle et $\ell\in\bar{R}$. Montrer que (u_n) ne tend pas vers ℓ si et seulement s'il existe $\ell'\in\bar{R},\ell'\neq\ell$ et une suite (v_n) extraite de (u_n) tels que $v_n\rightarrow\ell'$. Exercice 23 LIMITES INFÉRIEURE ET SUPÉRIEURE Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée. Pour $n\in\mathbb{N}$ On pose

$$\alpha_n=\inf\{u_k,k\geq n\}\qquad\text{et}\qquad\beta_n=\sup\{u_k,k\geq n\}.$$

1. Montrer que $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent. On note $\alpha=\lim_{n\rightarrow+\infty}\alpha_n$, appelé limite inférieure de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, et $\beta=\lim_{n\rightarrow+\infty}\beta_n$ sa limite supérieure. 2. Montrer que (u_n) converge si et seulement si $\alpha=\beta$. 3. Montrer que β est la plus grande valeur d'adhérence de (u_n). En particulier, on a démontré le théorème de Bolzano-Weierstrass. Exercice 24 On considère une suite (u_n) vérifiant $u_{n+1}-u_n\rightarrow0$ et $u_n\rightarrow+\infty$. 1. Justifier que si $|u_{n+1}-u_n|\leq\varepsilon$ à partir du rang n_0, et que $x\geq x_{n_0}$, il existe $p\in\mathbb{N}$ tel que $|u_p-x|\leq\varepsilon$. 2. Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite telle que $v_n\rightarrow+\infty$. Montrer que $\{u_n-v_m,n,m\in\mathbb{N}\}$ est dense dans $\mathbb{R}$. 3. En déduire que $\{u_n-\lfloor u_n\rfloor,n\in\mathbb{N}\}$ est dense dans $[0,1]$. 4. Montrer que $\{\sin\ln(n),n\in\mathbb{N}\}$ est dense dans $[-1,1]$. Exercice 25 1. Soit $(a_n),(b_n)$ deux suites réelles telles que $a_n+b_n\rightarrow0$ et $e^{a_n}+e^{b_n}\rightarrow2$. Montrer que (a_n) et (b_n) convergent. 2. Soit $(a_n),(b_n),(c_n)$

trois suites réelles telles que $a_n + b_n + c_n \to 0$ et $e^{a_n} + e^{b_n} + e^{c_n} \to 3$. Montrer que (a_n), $(\ b_n)$, $(\ c_n)$ convergent. Exercice 26 $\star$ \$ Suites sous-AdDitives Soit (u_n) une suite réelle vérifiant $\forall p, q \in \mathbb{N}, u_{p+q} \leq u_p + u_q$. Montrer que la suite $\left(\frac{u_n}{n}\right)$ converge vers sa borne inférieure $\inf_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{u_n}{n}$. 2