COLLE 25 = ALGÈBRE LINÉAIRE, ESPACES EUCLIDIENS, INTÉGRATION ET VARIABLES ALÉATOIRES

Exercices mixtes :

Exercice 1. (Concours communs Polytechniques 2017)

Une particule possède deux états possibles numérotés 1 et 2 et peut passer de son état à l'état 1 ou 2 de façon aléatoire. On considère un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ sur lequel on définit pour tout $n \in \mathbb{N}$, la variable aléatoire X_n égale à l'état de la particule au temps n. L'état de la particule au temps $n+1$ dépend uniquement de son état au temps n selon les règles suivantes :

- Si au temps n la particule est dans l'état 1, au temps $n+1$ elle passe à l'état 2 avec une probabilité de $\dfrac{1}{2}$.
- Si au temps n la particule est dans l'état 2, au temps $n+1$ elle passe à l'état 1 avec une probabilité de $\dfrac{1}{4}$.

On suppose que $P(X_0 = 1) = P(X_0 = 2) = \dfrac{1}{2}$.

Questions :

1. Déterminer en justifiant la loi de X_1.
   On pose $\mu_n = (P(X_n = 1), P(X_n = 2))$ le vecteur ligne de $\mathbb{R}^2$ caractérisant la loi de X_n .
2. Justifier la relation matricielle suivante :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ \mu_{n+1} = \mu_n A \ \text{ avec } A = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{2} & \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{1}{4} & \dfrac{3}{4} \end{pmatrix}.$$
3. En déduire la loi de X_3.
4. (a) Temps de premier accès à l'état 1 : on note T la variable aléatoire égale au plus petit entier $n \in \mathbb{N}$ tel que $X_n = 1$. Déterminer $P(T = 1)$, puis $P(T = k)$ pour tout entier $k \geq 2$.
   (b) En déduire $E[T]$.

Exercice 2. (Concours communs Polytechniques 2018)

On note E l'espace vectoriel des applications continues sur le segment $[-1, 1]$ et à valeurs réelles.

1. Démontrer que l'on définit un produit scalaire sur E en posant pour f et g éléments de E :
$$(f|g) = \int_{-1}^{1} f(t)g(t)dt$$
2. On note $u : t \mapsto 1$, $v : t \mapsto t$ et $F = vect\{u, v\}$, déterminer une base orthonormée de F.
3. Déterminer le projeté orthogonal de la fonction $w : t \mapsto e^t$ sur le sous-espace F et en déduire la valeur du réel :
$$\underset{(a,b)\in\mathbb{R}^2}{inf} \left[\int_{-1}^{1} \left(e^t - (a + bt)\right)^2 dt \right]$$

Exercice 3.

Soit E un $\mathbb{R}$ espace vectoriel de dimension finie. Soit $|| \ ||$ une norme sur E vérifiant l'identité du parallèlogramme, c'est-à-dire : $\forall (x, y) \in E^2,\ ||x+y||^2 + ||x-y||^2 = 2(||x||^2 + ||y||^2)$. On se propose de démontrer que $|| \ ||$ est associée à un produit scalaire. On définit sur E^2 une application f par : $\forall (x, y) \in E^2,\ f(x, y) = \frac{1}{4}(||x+y||^2 - ||x-y||^2)$.

1. Montrer que pour tout (x, y, z) de E^3, on a : $f(x+z, y) + f(x-z, y) = 2f(x, y)$.
2. Montrer que pour tout (x, y) de E^2, on a : $f(2x, y) = 2f(x, y)$.
3. Montrer que pour tout (x, y) de E^2 et tout rationnel r, on a : $f(rx, y) = rf(x, y)$.
   On admettra que pour tout réel λ et tout (x, y) de E^2 on a : $f(\lambda x, y) = \lambda f(x, y)$ (ce résultat provient de la continuité de f).
4. Montrer que pour tout (u, v, w) de E^3, $f(u, w) + f(v, w) = f(u + v, w)$.
5. Montrer que f est bilinéaire.
6. Montrer que $|| \ ||$ est une norme euclidienne.

Exercice 4.

Pour toute matrice carrée A de dimension n, on appelle trace de A, et l'on note $\operatorname{tr} A$, la somme des éléments diagonaux de A :

$$\operatorname{tr} A = \sum_{i=1}^{n} a_{i,i}$$

1. Montrer que si A, B sont deux matrices carrées d'ordre n, alors $\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA)$.
2. Montrer que si f est un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension n, M sa matrice par rapport à une base e, M' sa matrice par rapport à une base e', alors $\operatorname{tr} M = \operatorname{tr} M'$. On note $\operatorname{tr} f$ la valeur commune de ces quantités.
3. Montrer que si g est un autre endomorphisme de E, $\operatorname{tr}(f \circ g - g \circ f) = 0$.

Exercice 5.

Soit E l'ensemble des fonctions continues strictement positives sur $[a, b]$.
Soit $\begin{array}{cccc} \varphi : & E & \to & \mathbb{R} \\ & f & \mapsto & \left(\int_a^b f(t)\,dt\right)\left(\int_a^b \frac{1}{f(t)}\,dt\right) \end{array}$.

1. Montrer que $\varphi(E)$ n'est pas majoré.
2. Montrer que $\varphi(E)$ est minoré. Trouver $m = \operatorname{Inf}\{\varphi(f),\ f \in E\}$. Montrer que cette borne infèrieure est atteinte et trouver toutes les f de E telles que $\varphi(f) = m$.
