# COLLE7 = MATRICES ET FONCTIONS DÉRIVABLES

## Questions de cours :

Soient $n, p \in \mathbb{N}$ et $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Rappeler la définition d'une matrice élémentaire de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et expliquer pourquoi toute matrice $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ peut se décomposer comme combinaison linéaire de matrices élémentaires de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.
2. Pour $(i, j) \in \{1, .., n\}^2$ donner le coefficient $AB_{ij}$ en fonction des coefficients des matrices A et B. Montrer que $Tr(AB) = Tr(BA)$.
3. Montrer que $(AB)^T = B^T A^T$. Si $A$ est une matrice symétrique inversible, montrer que $A^{-1}$ est aussi une matrice symétriques.
4. Démontrer la propriété suivante :

   **Propriété.**
   *Soient $D \subset \mathbb{R}$, $f : D \to \mathbb{C}$ une fonction et $a \in D$. Si $f$ est dérivable en $a$, alors $f$ est continue en $a$.*
5. Soit $n \in \mathbb{N}$. Démontrer que la fonction $x \in \mathbb{R} \mapsto x^n$ est dérivable en tout point de $\mathbb{R}$ et donner sa fonction dérivée associée.
6. Démontrer que la fonction
$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} x \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{array}$$
   est continue en 0 mais non dérivable en 0.

## Matrices :

**Exercice 1.**
Soit
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

1. Montrer que le polynôme $P(X) = X^2 - 3X + 2$ est anulateur de la matrice $A$.
2. Donner le reste de la division Euclidienne de $X^n$ par $X^2 - 3X + 2$ pour $n \geq 2$.
3. En déduire la valeur de $A^n$.

---

**Exercice 2.**
Les affirmations suivantes sont-elles vraies ?

1. $\forall A, B, C \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) : Tr(ABC) = Tr(BAC)$
2. $\exists A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) : AB - BA = I_n$
3. Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tels que $AB - BA = A$. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a $Tr(A^n) = 0$

---

**Exercice 3.**
Soient $A$ et $B$ deux matrices de tailles $n$ vérifiant $AB - BA = A$ .Montrer que pout tout entier naturel $k$
$$A^{k+1}B - BA^{k+1} = (k+1)A^{k+1}$$

---

**Exercice 4.**
Soit $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$

1. Pour tous $(i, j) \in \{1, 2, 3\}$ on note $E_{ij}$ une matrice élémentaire de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Expliquer ce que donne les produits matriciels $I_3 E_{ij}$ et $E_{ij} I_3$.
2. Considérons le centre de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ :
$$\mathcal{Z}(\mathcal{M}_3(\mathbb{R})) : \{A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) ; \forall M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) : MA = AM\}$$
   Montrer que :
$$\mathcal{Z}(\mathcal{M}_3(\mathbb{R})) = \{\lambda I_3 : \lambda \in \mathbb{R}\}$$

---

**Exercice 5.**
Calculer les puissances n-ième des matrices suivantes :
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} , \ A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} , \ A = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

---

**Exercice 6.**
Soit $T$ une matrice triangulaire supérieure de taille $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $T$ commute avec sa transposée, si et seulement si $T$ est diagonale.

---

# Fonctions dérivables :

**Exercice 7.**
Étudier la dérivabilité sur $\mathbb{R}$ des fonctions suivantes :

1. $x \longmapsto \begin{cases} (x-1)^2 & \text{Si } x \leq 1 \\ (x-1)^3 & \text{Si } x > 1 \end{cases}$
2. $x \longmapsto \begin{cases} x^2+x & \text{Si } x \leq 1 \\ ax^3+bx+1 & \text{Si } x > 1 \end{cases}$ , $(a,b) \in \mathbb{R}^2$
3. $x \longmapsto \dfrac{|x|}{1+|x^2-1|}$

---

**Exercice 8.**
Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$. On fait l'hypothèse que :

$$\forall x \in \mathbb{R} : f \circ f(x) = \frac{x}{4} + 1$$

1. Montrer que : $f'(x) = f'\left(\dfrac{x}{4}+1\right)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
2. En déduire de $f'$ est une fonction constante sur $\mathbb{R}$
3. Déterminer les fonctions $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ telles que $f \circ f(x) = \dfrac{x}{4} + 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

---

**Exercice 9.** Soit $a \in \mathbb{R}$ et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable en a.
Que vaut $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x+h^2)}{h}$ ?

---

**Exercice 10.**

1. On note $f$ la fonction $x \mapsto e^{x^2}$. Montrer qu'il existe pour tout $n \in \mathbb{N}$ une fonction polynomiale $P_n$ pour laquelle $f^{(n)}(x) = P_n(x)e^{x^2}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ ,puis déterminer le degré de $Pn$.
2. On note $f$ la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{1+x^2}$. Montrer qu'il existe pour tout $n \in \mathbb{N}$ une fonction polynomiale $P_n$ pour laquelle $f^{(n)}(x) = \dfrac{P_n(x)}{(1+x^2)^{n+1}}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ ,puis déterminer le degré de $Pn$.

---

**Exercice 11.**
Pour tous $n \in \mathbb{N}^*$, calculer la dérivée $n^{\text{ème}}$
de $x \mapsto x^{n-1}\ln(1+x)$ sur $]-1,+\infty[$.

---

**Exercice 12.**
Montrer que pour tous $n \in \mathbb{N}*$ et $x \in \mathbb{R}*$ :

$$\frac{d^n}{dx^n}\left(x^{(n-1)} \exp\left(\frac{1}{x}\right)\right) = \frac{(-1)^n}{x^{n+1}} \exp\left(\frac{1}{x}\right)$$

---