EXERCICE 2.

Partie I

1. Soit h la fonction qui, à tout réel strictement positif x, associe : $\text{Arctan}(x)+\text{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right)$.
   Montrer que la fonction h est constante sur $]0,+\infty[$ (on précisera la valeur prise par h sur $]0,+\infty[$).
2. (a) Pour tout réel t de $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, exprimer $\cos(t)$ en fonction de $\cos\left(\frac{t}{2}\right)$.

   (b) Pour tout réel t de $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, comparer $\dfrac{1}{1+\tan^2\left(\frac{t}{2}\right)}$ et $\cos^2\left(\frac{t}{2}\right)$.

   (c) Pour tout réel t de $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, on pose :
   $$u=\tan\left(\frac{t}{2}\right)$$
   Exprimer $\cos(t)$ en fonction de u.

Partie II

Pour tout réel x de $]-1,1[$, on pose : $F(x)=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dt}{1-x\cos(t)}$.

3. Que vaut $F(0)$?
4. A l'aide du changement de variable $u=\tan\left(\frac{t}{2}\right)$, montrer que, pour tout réel x de $]-1,1[$:
   $$F(x)=\frac{2}{\sqrt{1-x^2}}\text{Arctan}\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$$
   Indication : on pensera à utiliser la première partie.
5. En déduire, pour tout réel x de $]-1,1[$, une relation entre $F(x)$ et $F(-x)$.
6. En déduire que F est dérivable sur $]-1,1[$ et démontrer que pour tout réel x de $]-1,1[$:
   $$(1-x^2)F'(x)=xF(x)+1$$
7. (a) Donner la solution générale sur $]-1,1[$ de l'équation différentielle homogène :
   $$(E_0)\qquad (1-x^2)y'-xy=0$$
   (b) A l'aide de la méthode de variation de la constante, donner la solution générale sur $]-1,1[$ de l'équation différentielle :
   $$(E)\qquad (1-x^2)y'-xy=1$$
   (c) Donner les solutions respectives des problèmes de Cauchy :
   $$(P_0)\qquad \begin{cases}(1-x^2)y'-xy=1\\ y(0)=0\end{cases}$$
   et
   $$(P_1)\qquad \begin{cases}(1-x^2)y'-xy=1\\ y(0)=\frac{\pi}{2}\end{cases}$$
   (d) Pour tout réel x de $]-1,1[$, déduire de la résolution de (P_1) une expression simplifiée de $F(x)$ avec la fonction Arcsin.
8. On **admet** que F est dérivable sur $]-1,1[$ avec pour tout $x\in]-1,1[$: $F'(x)=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos(t)}{(1-x\cos(t))^2}dt$.
   En déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos(t)-x}{(1-x\cos(t))^2}dt$ pour tout réel x de $]-1,1[$.