TD 21 : Séries numériques

Connaître son cours :

Soit $(u_n)_n \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$, montrer les propriétés suivantes :

- La suite $(u_n)_n$ et la série de terme général $(u_n - u_{n-1})_n$ sont de même nature.
- Si la série de terme général u_n converge, alors la suite $(u_n)_n$ tend vers 0. La réciproque est-elle vraie ? Donner un exemple d'une série qui diverge grossièrement.
- Si la série de terme général u_n converge absolument, alors elle converge.
- Énoncer le critère de comparaison série-intégrale et donner la preuve de celui-ci.
- Rappeler le critère des séries de Riemann et donner la preuve de celui-ci.
- Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathbb{R}^+$ telle que $u_n \underset{\sim+\infty}{=} o(v_n)$. Si la série de terme général $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente, montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est absolument convergente donc convergente. La réciproque est-elle vraie ?
- Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites d'éléments de $\mathbb{R}^+$ telles que $u_n \sim v_n$. Montrer que la série de terme général $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge si, et seulement si, la série de terme général $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

Séries à termes positifs :

Relations de comparaison

Exercice 1. (*)

Donner la nature de la série de terme général

1) $\ln\left(\dfrac{n^2+n+1}{n^2+n-1}\right)$ **2)** $\dfrac{1}{n+(-1)^n\sqrt{n}}$

3) $\left(\dfrac{n+3}{2n+1}\right)^{\ln n}$ **4)** $\left(\cos\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)^n - \dfrac{1}{\sqrt{e}}$

5) $\ln\left(\dfrac{2}{\pi}\arctan\left(\dfrac{n^2+1}{n}\right)\right)$

Exercice 2. (*)

On considère la suite $(u_n)_n$ où $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \dfrac{1}{n}e^{-u_{n-1}}$ avec $u_0 \in \mathbb{R}$. Donner la nature de la série de terme général $(u_n)_n$.

Exercice 3. (**)

Calculer les sommes des séries suivantes après avoir vérifié leur convergence.

1) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n+1}{3^n}$ **2)** $\displaystyle\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{2n-1}{n^3-4n}$

Exercice 4. (*)

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite positive telle que la série de terme général u_n converge. Étudier la nature de la série de terme général $\frac{\sqrt{u_n}}{n}$.

Exercice 5. (**)

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante de nombres réels strictement positifs telle que la série de terme général u_n converge. Montrer que $u_n \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{n}\right)$.
Trouver un exemple de suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de réels strictement positifs telle que la série de terme général u_n converge mais telle que la suite de terme général nu_n ne tende pas vers 0.

Exercice 6. (*)

Étudier la convergence des séries $\sum u_n$ suivantes :

1) $u_n = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{\sqrt{n}}$ **2)** $u_n = ne^{-\sqrt{n}}$

3) $u_n = \dfrac{(n!)^3}{(3n)!}$

Comparaison série-intégrale

Exercice 7. (**)

1. Donner un développement limité à l'ordre 2 de la suite $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$ quand n tend vers l'infini.
2. Déterminer la nature de la série de terme général $(R_n)_n$.

Exercice 8. (**) (Séries de Bertrand)

On souhaite étudier, suivant la valeur de $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, la convergence de la série de terme général

$$u_n = \frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta}.$$

1. Démontrer que la série converge si $\alpha > 1$.
2. Traiter le cas $\alpha < 1$.
3. On suppose que $\alpha = 1$. On pose

$$T_n = \int_2^n \frac{dx}{x(\ln x)^\beta}$$

   (a) Montrer si $\beta \leq 0$, alors la série de terme général u_n est divergente.

   (b) Montrer que si $\beta > 1$, alors la suite (T_n) est bornée, alors que si $\beta \leq 1$, la suite (T_n) tend vers $+\infty$.

   (c) Conclure pour la série de terme général u_n, lorsque $\alpha = 1$.

Quelques classiques

Exercice 9. (***) *(La série harmonique)*

On pose $H_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$.

1. Prouver que $H_n \sim_{+\infty} \ln n$.
2. On pose $u_n = H_n - \ln n$, et $v_n = u_{n+1} - u_n$. Étudier la nature de la série $\sum_n v_n$. En déduire que la suite (u_n) est convergente. On notera γ sa limite.
3. Soit $R_n = \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$. Donner un équivalent de R_n.
4. Soit w_n tel que $H_n = \ln n + \gamma + w_n$, et soit $t_n = w_{n+1} - w_n$. Donner un équivalent du reste $\sum_{k \geq n} t_k$. En déduire que

$$H_n = \ln n + \gamma + \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

Exercice 10. (**) *(Formule de Stirling)*

1. On pose (u_n) la suite définie par

$$u_n = \frac{n^n e^{-n} \sqrt{n}}{n!}$$

   Donner la nature de la série de terme général

$$v_n = \ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$$

2. En déduire l'existence d'une constante $C > 0$ telle que :

$$n! \sim_{+\infty} C\sqrt{n} n^n e^{-n}.$$

Séries générales :

Exercice 11. (*)

On donne $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$.
Calculer

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2(k+1)^2}$$

après en avoir justifié l'existence.

Exercice 12. (**)

Étudier la limite $+\infty$ de $\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{k}{n}\right)^n$.

Exercice 13. (***)

Soit $a \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$. Déterminer la somme de la série de terme général $\dfrac{n - a\left\lfloor \frac{n}{a} \right\rfloor}{n(n+1)}$.

Séries alternées

Exercice 14. (**)

Soit (a_n) une suite de réels positifs, décroissante, et tendant vers 0.

1. Montrer que la série $\sum(-1)^n a_n$ converge.
2. Exprimer la suite des restes $(R_n)_n$ en valeur absolue et trouver une majoration de celle-ci.

Exercice 15. (**)

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Discuter de la nature de la série de terme général $u_n = \dfrac{1+(-1)^n n^\alpha}{n^{2\alpha}}$, $n \geqslant 1$ selon la valeur de α.

Exercice 16. (*)

1. Justifier que la série $\sum \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ converge.
2. Démontrer que
$$u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n} = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - \frac{1}{n} + \frac{(-1)^n}{n\sqrt{n}} + o\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right)$$
3. Étudier la convergence de la série
$$\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}$$
4. Donner un équivalent de la suite (u_n) en $+\infty$, que remarquez-vous ?

Exercice 17. (**)

Donner la nature de la série de terme général

1) $\ln\left(1+\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)$ **2)** $\sin\left(\dfrac{\pi n^2}{n+1}\right)$

3) $\dfrac{(-1)^n}{n+(-1)^{n-1}}$

Propriétés complémentaires

Exercice 18. (**)

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 \in [0;\pi]$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$
$$u_{n+1} = 1 - \cos(u_n)$$
Donner la limite de la suite (u_n) et déterminer la nature de la série de terme général u_n.

Exercice 19. (**) *(Règle de Raabe-Duhamel)*

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de réels strictement positifs.

1. On suppose qu'à partir d'un certain rang
$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{v_{n+1}}{v_n}.$$
Montrer que $u_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{O}(v_n)$.
2. On suppose que
$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \underset{n\to+\infty}{=} 1 - \frac{\alpha}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \text{ avec } \alpha > 1.$$
Montrer, à l'aide d'une comparaison avec une série de Riemann, que la série $\sum u_n$ converge.
3. On suppose cette fois-ci que
$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \underset{n\to+\infty}{=} 1 - \frac{\alpha}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \text{ avec } \alpha < 1.$$
Montrer que la série $\sum u_n$ diverge

Exercice 20. (**) *(Sommation des équivalents)*

Soit $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ deux suites positives équivalentes. Montrer que

- Si les séries de termes généraux u_n et v_n divergent, alors $\sum_{k=0}^{n} u_k \sim \sum_{k=0}^{n} v_k$;
- Si les séries de termes généraux u_n et v_n convergent, alors $\sum_{k=n}^{\infty} u_k \sim \sum_{k=n}^{\infty} v_k$.
