

Espaces vectoriels

Exercices de Jean-Louis Rouget. Retrouver aussi cette fiche sur www.maths-france.fr

* très facile ** facile *** difficulté moyenne **** difficile ***** très difficile

I : Incontournable T : pour travailler et mémoriser le cours

Exercice 1 *T

Soit E le \mathbb{R} -espace vectoriel des applications de $[0, 1]$ dans \mathbb{R} (muni de $f + g$ et $\lambda.f$ usuels) (ne pas hésiter à redémontrer que E est un \mathbb{R} espace vectoriel). Soit F l'ensemble des applications de $[0, 1]$ dans \mathbb{R} vérifiant l'une des conditions suivantes :

- 1) $f(0) + f(1) = 0$ 2) $f(0) = 0$ 3) $f(\frac{1}{2}) = \frac{1}{4}$ 4) $\forall x \in [0, 1], f(x) + f(1-x) = 0$
 5) $\forall x \in [0, 1], f(x) \geq 0$ 6) $2f(0) = f(1) + 3$

Dans quel cas F est-il un sous-espace vectoriel de E ?

[Correction ▼](#)

[005164]

Exercice 2 **T

On munit \mathbb{R}^n des lois produit usuelles. Parmi les sous-ensembles suivants F de \mathbb{R}^n , lesquels sont des sous-espaces vectoriels ?

- 1) $F = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n / x_1 = 0\}$ 2) $F = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n / x_1 = 1\}$
 3) $F = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n / x_1 = x_2\}$ 4) $F = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n / x_1 + \dots + x_n = 0\}$
 5) $F = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n / x_1 \cdot x_2 = 0\}$

[Correction ▼](#)

[005165]

Exercice 3 **

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel. Soient A , B et C trois sous-espaces vectoriels de E vérifiant $A \cap B = A \cap C$, $A + B = A + C$ et $B \subset C$. Montrer que $B = C$.

[Correction ▼](#)

[005166]

Exercice 4 **T

Soit $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ le \mathbb{R} -espace vectoriel des suites réelles (muni des opérations usuelles). On considère les trois éléments de E suivants : $u = (\cos(n\theta))_{n \in \mathbb{N}}$, $v = (\cos(n\theta + a))_{n \in \mathbb{N}}$ et $w = (\cos(n\theta + b))_{n \in \mathbb{N}}$ où θ , a et b sont des réels donnés. Montrer que (u, v, w) est une famille liée.

[Correction ▼](#)

[005167]

Exercice 5 **T

Soit F le sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^4 engendré par $u = (1, 2, -5, 3)$ et $v = (2, -1, 4, 7)$. Déterminer λ et μ réels tels que $(\lambda, \mu, -37, -3)$ appartienne à F .

[Correction ▼](#)

[005168]

Exercice 6 **T

Montrer que $a = (1, 2, 3)$ et $b = (2, -1, 1)$ engendrent le même sous espace de \mathbb{R}^3 que $c = (1, 0, 1)$ et $d = (0, 1, 1)$.

[Correction ▼](#)

[005169]

Exercice 7 **T

1. Vérifier qu'il existe une unique application linéaire de \mathbb{R}^3 dans \mathbb{R}^2 vérifiant $f((1,0,0)) = (1,1)$ puis $f((0,1,0)) = (0,1)$ et $f((0,0,1)) = (-1,1)$. Calculer $f((3,-1,4))$ et $f((x,y,z))$ en général.
2. Déterminer $\text{Ker} f$. En fournir une base. Donner un supplémentaire de $\text{Ker} f$ dans \mathbb{R}^3 et vérifier qu'il est isomorphe à $\text{Im} f$.

[Correction ▼](#)

[005170]

Exercice 8 **I

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel et f un élément de $\mathcal{L}(E)$.

1. Montrer que $[\text{Ker} f = \text{Ker} f^2 \Leftrightarrow \text{Ker} f \cap \text{Im} f = \{0\}]$ et $[\text{Im} f = \text{Im} f^2 \Leftrightarrow E = \text{Ker} f + \text{Im} f]$ (où $f^2 = f \circ f$).
2. Par définition, un endomorphisme p de E est un projecteur si et seulement si $p^2 = p$.

Montrer que

$$[p \text{ projecteur} \Leftrightarrow Id - p \text{ projecteur}]$$

puis que

$$[p \text{ projecteur} \Rightarrow \text{Im} p = \text{Ker}(Id - p) \text{ et } \text{Ker} p = \text{Im}(Id - p) \text{ et } E = \text{Ker} p \oplus \text{Im} p].$$

3. Soient p et q deux projecteurs, montrer que : $[\text{Ker} p = \text{Ker} q \Leftrightarrow p = p \circ q \text{ et } q = q \circ p]$.
4. p et q étant deux projecteurs vérifiant $p \circ q + q \circ p = 0$, montrer que $p \circ q = q \circ p = 0$. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que $p + q$ soit un projecteur lorsque p et q le sont. Dans ce cas, déterminer $\text{Im}(p + q)$ et $\text{Ker}(p + q)$ en fonction de $\text{Ker} p$, $\text{Ker} q$, $\text{Im} p$ et $\text{Im} q$.

[Correction ▼](#)

[005171]

Exercice 9 **

Soient E un \mathbb{K} -espace vectoriel et A , B et C trois sous-espaces de E .

1. Montrer que : $(A \cap B) + (A \cap C) \subset A \cap (B + C)$.
2. A-t-on toujours l'égalité ?
3. Montrer que : $(A \cap B) + (A \cap C) = A \cap (B + (A \cap C))$.

[Correction ▼](#)

[005172]

Exercice 10 **T

Dans $E = \mathbb{R}^4$, on considère $V = \{(x,y,z,t) \in E / x - 2y = 0 \text{ et } y - 2z = 0\}$ et $W = \{(x,y,z,t) \in E / x + z = y + t\}$.

1. Montrer que V et W sont des sous espaces vectoriels de E .
2. Donner une base de V , W et $V \cap W$.
3. Montrer que $E = V + W$.

[Correction ▼](#)

[005173]

Exercice 11 ***

Soit $f : [0, +\infty[\times [0, 2\pi[\rightarrow \mathbb{R}^2$
 $(x,y) \mapsto (x \cos y, x \sin y)$

1. f est-elle injective ? surjective ?
2. Soient a , b , α et β quatre réels. Montrer qu'il existe $(c, \gamma) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $\forall x \in \mathbb{R}, a \cos(x - \alpha) + b \cos(x - \beta) = c \cos(x - \gamma)$.
3. Soit E le \mathbb{R} -espace vectoriel des applications de \mathbb{R} dans \mathbb{R} . Soit $F = \{u \in E / \exists (a, b, \alpha, \beta) \in \mathbb{R}^4 \text{ tel que } \forall x \in \mathbb{R}, u(x) = a \cos(x - \alpha) + b \cos(2x - \beta)\}$. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E .

- Déterminer $\{\cos x, \sin x, \cos(2x), \sin(2x), 1, \cos^2 x, \sin^2 x\} \cap F$.
- Montrer que $(\cos x, \sin x, \cos(2x), \sin(2x))$ est une famille libre de F .

[Correction ▼](#)

[005174]

Exercice 12 **

Soit C l'ensemble des applications de \mathbb{R} dans \mathbb{R} , croissantes sur \mathbb{R} .

- C est-il un espace vectoriel (pour les opérations usuelles) ?
- Montrer que $V = \{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} / \exists (g, h) \in C^2 \text{ tel que } f = g - h\}$ est un \mathbb{R} -espace vectoriel.

[Correction ▼](#)

[005175]

Exercice 13 **

Montrer que la commutativité de la loi $+$ est une conséquence des autres axiomes de la structure d'espace vectoriel.

[Correction ▼](#)

[005176]

Exercice 14 ***

Soient E un \mathbb{K} -espace vectoriel et A, B et C trois sous-espaces vectoriels de E . Montrer que

$$(A \cap B) + (B \cap C) + (C \cap A) \subset (A + B) \cap (B + C) \cap (C + A).$$

[Correction ▼](#)

[005177]

Exercice 15 **IT

Soient $u = (1, 1, \dots, 1)$ et $F = \text{Vect}(u)$ puis $G = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n / x_1 + \dots + x_n = 0\}$. Montrer que G est un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^n et que $\mathbb{R}^n = F \oplus G$.

[Correction ▼](#)

[005178]

Exercice 16 ****

- Soit n un entier naturel. Montrer que si n n'est pas un carré parfait alors $\sqrt{n} \notin \mathbb{Q}$.
- Soit $E = \{a + b\sqrt{2} + c\sqrt{3} + d\sqrt{6}, (a, b, c, d) \in \mathbb{Q}^4\}$. Vérifier que E est un \mathbb{Q} -espace vectoriel puis déterminer une base de E .

[Correction ▼](#)

[005179]

Exercice 17 ***T

Dans $E = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, étudier la liberté des familles suivantes A de vecteurs de E :

- a, b et c étant trois réels donnés, $A = (f_a, f_b, f_c)$ où, pour tout réel x , $f_u(x) = \sin(x + u)$.
- $A = (f_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ où, pour tout réel x , $f_n(x) = nx + n^2 + 1$.
- $A = (x \mapsto x^\alpha)_{\alpha \in \mathbb{R}}$ (ici $E =]0; +\infty[^2$).
- $A = (x \mapsto |x - a|)_{a \in \mathbb{R}}$.

[Correction ▼](#)

[005180]

Exercice 18 ****

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel et soit $(u, v) \in (\mathcal{L}(E))^2$.

- Montrer que $[\text{Kerv} \subset \text{Keru} \Leftrightarrow \exists w \in \mathcal{L}(E) / u = w \circ v]$.
- En déduire que $[v \text{ injectif} \Leftrightarrow \exists w \in \mathcal{L}(E) / w \circ v = \text{Id}_E]$.

Exercice 19 ***

Soit $E = \mathbb{R}[X]$ le \mathbb{R} -espace vectoriel des polynômes à coefficients réels.

— Soit $f : E \rightarrow E$. f est-elle linéaire, injective, surjective ? Fournir un supplémentaire de $\text{Ker } f$.

$$P \mapsto P'$$

— Mêmes questions avec $g : E \rightarrow E$.

$$P \mapsto \int_0^x P(t) dt$$

Correction de l'exercice 1 ▲

1. La fonction nulle est dans F et en particulier, $F \neq \emptyset$. Soient alors $(f, g) \in F^2$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.

$$(\lambda f + \mu g)(0) + (\lambda f + \mu g)(1) = \lambda(f(0) + f(1)) + \mu(g(0) + g(1)) = 0.$$

Par suite, $\lambda f + \mu g$ est dans F . On a montré que :

$$F \neq \emptyset \text{ et } \forall (f, g) \in F^2, \forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, \lambda f + \mu g \in F.$$

F est donc un sous-espace vectoriel de E .

2. Même démarche et même conclusion .
3. F ne contient pas la fonction nulle et n'est donc pas un sous-espace vectoriel de E .
4. La fonction nulle est dans F et en particulier, $F \neq \emptyset$. Soient alors $(f, g) \in F^2$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.

Pour x élément de $[0, 1]$,

$$(\lambda f + \mu g)(x) + (\lambda f + \mu g)(1 - x) = \lambda(f(x) + f(1 - x)) + \mu(g(x) + g(1 - x)) = 0$$

et $\lambda f + \mu g$ est dans F . F est un sous-espace vectoriel de E .

Remarque. Les graphes des fonctions considérés sont symétriques par rapport au point $(\frac{1}{2}, 0)$.

5. F contient la fonction constante 1 mais pas son opposé la fonction constante -1 et n'est donc pas un sous-espace vectoriel de E .
6. F ne contient pas la fonction nulle et n'est donc pas un sous-espace vectoriel de E .
-

Correction de l'exercice 2 ▲

Dans les cas où F est un sous-espace, on a à chaque fois trois démarches possibles pour le vérifier :

- Utiliser la caractérisation d'un sous-espace vectoriel.
- Obtenir F comme noyau d'une forme linéaire ou plus généralement, comme noyau d'une application linéaire.
- Obtenir F comme sous-espace engendré par une famille de vecteurs.

Je vous détaille une seule fois les trois démarches.

1. **1ère démarche.** F contient le vecteur nul $(0, \dots, 0)$ et donc $F \neq \emptyset$. Soient alors $((x_1, \dots, x_n), (x'_1, \dots, x'_n)) \in F^2$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$. On a

$$\lambda(x_1, \dots, x_n) + \mu(x'_1, \dots, x'_n) = (\lambda x_1 + \mu x'_1, \dots, \lambda x_n + \mu x'_n)$$

avec $\lambda x_1 + \mu x'_1 = 0$. Donc, $\lambda(x_1, \dots, x_n) + \mu(x'_1, \dots, x'_n) \in F$. F est un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^n .

2ème démarche. L'application $(x_1, \dots, x_n) \mapsto x_1$ est une forme linéaire sur \mathbb{R}^n et F en est le noyau. F est donc un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^n .

3ème démarche.

$$\begin{aligned} F &= \{(0, x_2, \dots, x_n), (x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n-1}\} = \{x_2(0, 1, 0, \dots, 0) + \dots + x_n(0, \dots, 0, 1), (x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n-1}\} \\ &= \text{Vect}((0, 1, 0, \dots, 0), \dots, (0, \dots, 0, 1)). \end{aligned}$$

F est donc un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^n .

2. F ne contient pas le vecteur nul et n'est donc pas un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^n .
3. (Ici, $n \geq 2$). L'application $(x_1, \dots, x_n) \mapsto x_1 - x_2$ est une forme linéaire sur \mathbb{R}^n et F en est le noyau. F est donc un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^n .
4. L'application $(x_1, \dots, x_n) \mapsto x_1 + \dots + x_n$ est une forme linéaire sur \mathbb{R}^n et F en est le noyau. F est donc un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^n .
5. (Ici, $n \geq 2$). Les vecteurs $e_1 = (1, 0, \dots, 0)$ et $e_2 = (0, 1, 0, \dots, 0)$ sont dans F mais $e_1 + e_2 = (1, 1, 0, \dots, 0)$ n'y est pas. F n'est donc pas un sous-espace vectoriel de E .

Remarque. F est la réunion des sous-espaces $\{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n / x_1 = 0\}$ et $\{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n / x_2 = 0\}$.

Correction de l'exercice 3 ▲

Il suffit de montrer que $C \subset B$.

Soit x un élément de C . Alors $x \in A + C = A + B$ et il existe $(y, z) \in A \times B$ tel que $x = y + z$. Mais $z \in B \subset C$ et donc, puisque C est un sous-espace vectoriel de E , $y = x - z$ est dans C . Donc, $y \in A \cap C = A \cap B$ et en particulier y est dans B . Finalement, $x = y + z$ est dans B . On a montré que tout élément de C est dans B et donc que, $C \subset B$. Puisque d'autre part $B \subset C$, on a $B = C$.

Correction de l'exercice 4 ▲

Soit $u' = (\sin(n\theta))_{n \in \mathbb{N}}$. On a : $u = 1.u + 0.u'$, puis $v = \cos a.u - \sin a.u'$, puis $w = \cos b.u - \sin b.u'$. Les trois vecteurs u , v et w sont donc combinaisons linéaires des deux vecteurs u et u' et constituent par suite une famille liée ($p + 1$ combinaisons linéaires de p vecteurs constituent une famille liée).

Correction de l'exercice 5 ▲

Soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned} (\lambda, \mu, -37, -3) \in F &\Leftrightarrow \exists (a, b) \in \mathbb{R}^2 / (\lambda, \mu, -37, -3) = au + bv \Leftrightarrow \exists (a, b) \in \mathbb{R}^2 / \begin{cases} a + 2b = \lambda \\ 2a - b = \mu \\ -5a + 4b = -37 \\ 3a + 7b = -3 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \exists (a, b) \in \mathbb{R}^2 / \begin{cases} a + 2b = \lambda \\ 2a - b = \mu \\ a = \frac{247}{47} \\ b = -\frac{126}{47} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = \frac{247}{47} + 2(-\frac{126}{47}) \\ \mu = 2\frac{247}{47} + \frac{126}{47} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = -\frac{5}{47} \\ \mu = \frac{620}{47} \end{cases}. \end{aligned}$$

Correction de l'exercice 6 ▲

Posons $F = \text{Vect}(a, b)$ et $G = \text{Vect}(c, d)$.

Montrons que c et d sont dans F .

$$c \in F \Leftrightarrow \exists (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 / c = \lambda a + \mu b \Leftrightarrow \exists (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 / \begin{cases} \lambda + 2\mu = 1 \\ 2\lambda - \mu = 0 \\ 3\lambda + \mu = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \exists (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 / \begin{cases} \lambda = \frac{1}{5} \\ \mu = \frac{2}{5} \\ 3\lambda + \mu = 1 \end{cases}.$$

Puisque $3 \cdot \frac{1}{5} + \frac{2}{5} = 1$, le système précédent admet bien un couple (λ, μ) solution et c est dans F . Plus précisément, $c = \frac{1}{5}a + \frac{2}{5}b$.

$$d \in F \Leftrightarrow \exists (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 / d = \lambda a + \mu b \Leftrightarrow \exists (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 / \begin{cases} \lambda + 2\mu = 0 \\ 2\lambda - \mu = 1 \\ 3\lambda + \mu = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \exists (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 / \begin{cases} \lambda = \frac{2}{5} \\ \mu = -\frac{1}{5} \\ 3\lambda + \mu = 1 \end{cases}.$$

Puisque $3 \cdot \frac{2}{5} - \frac{1}{5} = 1$, le système précédent admet bien un couple (λ, μ) solution et d est dans F . Plus précisément, $d = \frac{2}{5}a - \frac{1}{5}b$. En résumé, $\{c, d\} \subset F$ et donc $G = \text{Vect}(c, d) \subset F$.

Montrons que a et b sont dans G mais les égalités $c = \frac{1}{5}a + \frac{2}{5}b$ et $d = \frac{2}{5}a - \frac{1}{5}b$ fournissent $a = c + 2d$ et $b = 2c - d$. Par suite, $\{a, b\} \subset G$ et donc $F = \text{Vect}(a, b) \subset G$. Finalement $F = G$.

Correction de l'exercice 7 ▲

1. Si f existe alors nécessairement, pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$:

$$f((x, y, z)) = xf((1, 0, 0)) + yf((0, 1, 0)) + zf((0, 0, 1)) = x(1, 1) + y(0, 1) + z(-1, 1) = (x - z, x + y + z).$$

On en déduit l'unicité de f .

Réciproquement, f ainsi définie vérifie bien les trois égalités de l'énoncé. Il reste donc à se convaincre que f est linéaire.

Soient $((x, y, z), (x', y', z')) \in (\mathbb{R}^3)^2$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned} f(\lambda(x, y, z) + \mu(x', y', z')) &= f((\lambda x + \mu x', \lambda y + \mu y', \lambda z + \mu z')) \\ &= ((\lambda x + \mu x') - (\lambda z + \mu z'), (\lambda x + \mu x') + (\lambda y + \mu y') + (\lambda z + \mu z')) \\ &= \lambda(x - z, x + y + z) + \mu(x' - z', x' + y' + z') \\ &= \lambda f((x, y, z)) + \mu f((x', y', z')). \end{aligned}$$

f est donc linéaire et convient. On en déduit l'existence de f . On a alors $f((3, -1, 4)) = (3 - 4, 3 - 1 + 4) = (-1, 6)$.

Remarque. La démonstration de la linéarité de f ci-dessus est en fait superflue car le cours donne l'expression générale d'une application linéaire de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R}^p .

2. Détermination de $\text{Ker} f$.

Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

$$(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \Leftrightarrow f((x, y, z)) = (0, 0) \Leftrightarrow (x - z, x + y + z) = (0, 0) \Leftrightarrow \begin{cases} x - z = 0 \\ x + y + z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = x \\ y = -2x \end{cases}$$

Donc, $\text{Ker} f = \{(x, -2x, x), x \in \mathbb{R}\} = \{x(1, -2, 1), x \in \mathbb{R}\} = \text{Vect}((1, -2, 1))$. La famille $((1, -2, 1))$ engendre $\text{Ker} f$ et est libre. Donc, la famille $((1, -2, 1))$ est une base de $\text{Ker} f$. Détermination de $\text{Im} f$.

Soit $(x', y') \in \mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned} (x', y') \in \text{Im} f &\Leftrightarrow \exists (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / f((x, y, z)) = (x', y') \\ &\Leftrightarrow \exists (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / \begin{cases} x - z = x' \\ x + y + z = y' \end{cases} \Leftrightarrow \exists (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / \begin{cases} z = x - x' \\ y = -2x + x' + y' \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \text{le système d'inconnue } (x, y, z) : \begin{cases} z = x - x' \\ y = -2x + x' + y' \end{cases} \text{ a au moins une solution.} \end{aligned}$$

Or, le triplet $(0, x' + y', -x')$ est solution et le système proposé admet une solution. Par suite, tout (x', y') de \mathbb{R}^2 est dans $\text{Im} f$ et finalement, $\text{Im} f = \mathbb{R}^2$.

Détermination d'un supplémentaire de $\text{Ker} f$.

Posons $e_1 = (1, -2, 1)$, $e_2 = (1, 0, 0)$ et $e_3 = (0, 1, 0)$ puis $F = \text{Vect}(e_2, e_3)$ et montrons que $\mathbb{R}^3 = \text{Ker} f \oplus F$.

Tout d'abord, $\text{Ker} f \cap F = \{0\}$. En effet :

$$\begin{aligned} (x, y, z) \in \text{Ker} f \cap F &\Leftrightarrow \exists (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 / (x, y, z) = ae_1 = be_2 + ce_3 \\ &\Leftrightarrow \exists (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 / \begin{cases} x = a = b \\ y = -2a = c \\ z = a = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = z = 0 \end{aligned}$$

Vérifions ensuite que $\text{Ker} f + F = \mathbb{R}^3$.

$$(x, y, z) \in \text{Ker}f + F \Leftrightarrow \exists(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 / (x, y, z) = ae_1 + be_2 + ce_3$$

$$\Leftrightarrow \exists(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 / \begin{cases} a + b = x \\ -2a + c = y \\ a = z \end{cases} \Leftrightarrow \exists(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 / \begin{cases} a = z \\ b = x - z \\ c = y + 2z \end{cases}$$

Le système précédent (d'inconnue (a, b, c)) admet donc toujours une solution et on a montré que $\mathbb{R}^3 = \text{Ker}f + F$. Finalement, $\mathbb{R}^3 = \text{Ker}f \oplus F$ et F est un supplémentaire de $\text{Ker}f$ dans \mathbb{R}^3 .

Vérifions enfin que F est isomorphe à $\text{Im}f$. Mais, $F = \{(x, y, 0), (x, y) \in \mathbb{R}^2\}$ et $\varphi : \begin{matrix} F & \rightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x, y, 0) & \mapsto & (x, y) \end{matrix}$ est clairement un isomorphisme de F sur $\text{Im}f (= \mathbb{R}^2)$.

Correction de l'exercice 8 ▲

1. On a toujours $\text{Ker}f \subset \text{Ker}f^2$.

En effet, si x est un vecteur de $\text{Ker}f$, alors $f^2(x) = f(f(x)) = f(0) = 0$ (car f est linéaire) et x est dans $\text{Ker}f^2$.

Montrons alors que : $[\text{Ker}f = \text{Ker}f^2 \Leftrightarrow \text{Ker}f \cap \text{Im}f = \{0\}]$. Supposons que $\text{Ker}f = \text{Ker}f^2$ et montrons que $\text{Ker}f \cap \text{Im}f = \{0\}$.

Soit $x \in \text{Ker}f \cap \text{Im}f$. Alors, d'une part $f(x) = 0$ et d'autre part, il existe y élément de E tel que $x = f(y)$. Mais alors, $f^2(y) = f(x) = 0$ et $y \in \text{Ker}f^2 = \text{Ker}f$. Donc, $x = f(y) = 0$. On a montré que $\text{Ker}f = \text{Ker}f^2 \Rightarrow \text{Ker}f \cap \text{Im}f = \{0\}$.

Supposons que $\text{Ker}f \cap \text{Im}f = \{0\}$ et montrons que $\text{Ker}f = \text{Ker}f^2$.

Soit $x \in \text{Ker}f^2$. Alors $f(f(x)) = 0$ et donc $f(x) \in \text{Ker}f \cap \text{Im}f = \{0\}$. Donc, $f(x) = 0$ et x est dans $\text{Ker}f$. On a ainsi montré que $\text{Ker}f^2 \subset \text{Ker}f$ et, puisque l'on a toujours $\text{Ker}f \subset \text{Ker}f^2$, on a finalement $\text{Ker}f = \text{Ker}f^2$. On a montré que $\text{Ker}f \cap \text{Im}f = \{0\} \Rightarrow \text{Ker}f = \text{Ker}f^2$.

On a toujours $\text{Im}f^2 \subset \text{Im}f$. En effet : $y \in \text{Im}f^2 \Rightarrow \exists x \in E / y = f^2(x) = f(f(x)) \Rightarrow y \in \text{Im}f$.

Supposons que $\text{Im}f = \text{Im}f^2$ et montrons que $\text{Ker}f + \text{Im}f = E$. Soit $x \in E$. Puisque $f(x) \in \text{Im}f = \text{Im}f^2$, il existe $t \in E$ tel que $f(x) = f^2(t)$. Soit alors $z = f(t)$ et $y = x - f(t)$. On a bien $x = y + z$ et $z \in \text{Im}f$. De plus, $f(y) = f(x) - f(f(t)) = 0$ et y est bien élément de $\text{Ker}f$. On a donc montré que $E = \text{Ker}f + \text{Im}f$.

Supposons que $\text{Ker}f + \text{Im}f = E$ et montrons que $\text{Im}f = \text{Im}f^2$.

Soit $x \in E$. Il existe $(y, z) \in \text{Ker}f \times \text{Im}f$ tel que $x = y + z$. Mais alors $f(x) = f(z) \in \text{Im}f^2$ car z est dans $\text{Im}f$. Ainsi, pour tout x de E , $f(x)$ est dans $\text{Im}f^2$ ce qui montre que $\text{Im}f \subset \text{Im}f^2$ et comme on a toujours $\text{Im}f^2 \subset \text{Im}f$, on a montré que $\text{Im}f = \text{Im}f^2$.

2. $\text{Id} - p$ projecteur $\Leftrightarrow (\text{Id} - p)^2 = \text{Id} - p \Leftrightarrow \text{Id} - 2p + p^2 = \text{Id} - p \Leftrightarrow p^2 = p \Leftrightarrow p$ projecteur.

Soit x un élément de E . $x \in \text{Im}p \Rightarrow \exists y \in E / x = p(y)$. Mais alors $p(x) = p^2(y) = p(y) = x$. Donc, $\forall x \in E, (x \in \text{Im}p \Rightarrow p(x) = x)$.

Réciproquement, si $p(x) = x$ alors bien sûr, x est dans $\text{Im}p$.

Finalement, pour tout vecteur x de E , $x \in \text{Im}p \Leftrightarrow p(x) = x \Leftrightarrow (\text{Id} - p)(x) = 0 \Leftrightarrow x \in \text{Ker}(\text{Id} - p)$. On a montré que $\text{Im}p = \text{Ker}(\text{Id} - p)$.

En appliquant ce qui précède à $\text{Id} - p$ qui est également un projecteur, on obtient $\text{Im}(\text{Id} - p) = \text{Ker}(\text{Id} - (\text{Id} - p)) = \text{Ker}p$.

Enfin, puisque $p^2 = p$ et donc en particulier que $\text{Ker}p = \text{Ker}p^2$ et $\text{Im}p = \text{Im}p^2$, le 1) montre que $E = \text{Ker}p \oplus \text{Im}p$.

3.

$$p = p \circ q \text{ et } q = q \circ p \Leftrightarrow p \circ (\text{Id} - q) = 0 \text{ et } q \circ (\text{Id} - p) = 0 \Leftrightarrow \text{Im}(\text{Id} - q) \subset \text{Ker}p \text{ et } \text{Im}(\text{Id} - p) \subset \text{Ker}q$$

$$\Leftrightarrow \text{Ker}q \subset \text{Ker}p \text{ et } \text{Ker}p \subset \text{Ker}q \text{ (d'après 2))}$$

$$\Leftrightarrow \text{Ker}p = \text{Ker}q.$$

4. $p \circ q + q \circ p = 0 \Rightarrow p \circ q = (p \circ p) \circ q = p \circ (p \circ q) = -p \circ (q \circ p)$ et de même, $q \circ p = q \circ p \circ p = -p \circ q \circ p$. En particulier, $p \circ q = q \circ p$ et donc $0 = p \circ q + q \circ p = 2p \circ q = 2q \circ p$ puis $p \circ q = q \circ p = 0$.

La réciproque est immédiate.

$p+q$ projecteur $\Leftrightarrow (p+q)^2 = p+q \Leftrightarrow p^2 + pq + qp + q^2 = p+q \Leftrightarrow pq + qp = 0 \Leftrightarrow pq = qp = 0$ (d'après ci-dessus). Ensuite, $\text{Im}(p+q) = \{p(x) + q(x), x \in E\} \subset \{p(x) + q(y), (x, y) \in E^2\} = \text{Im}p + \text{Im}q$.

Réciproquement, soit z un élément de $\text{Im}p + \text{Im}q$. Il existe deux vecteurs x et y de E tels que $z = p(x) + q(y)$. Mais alors, $p(z) = p^2(x) + pq(y) = p(x)$ et $q(z) = qp(x) + q^2(y) = q(y)$ et donc

$$z = p(x) + p(y) = p(z) + q(z) = (p+q)(z) \in \text{Im}(p+q).$$

Donc, $\text{Im}p + \text{Im}q \subset \text{Im}(p+q)$ et finalement, $\text{Im}(p+q) = \text{Im}p + \text{Im}q$.

$\text{Ker}p \cap \text{Ker}q = \{x \in E / p(x) = q(x) = 0\} \subset \{x \in E / p(x) + q(x) = 0\} = \text{Ker}(p+q)$.

Réciproquement, si x est élément de $\text{Ker}(p+q)$ alors $p(x) + q(x) = 0$. Par suite, $p(x) = p^2(x) + pq(x) = p(p(x) + q(x)) = p(0) = 0$ et $q(x) = qp(x) + q^2(x) = q(0) = 0$. Donc, $p(x) = q(x) = 0$ et $x \in \text{Ker}p \cap \text{Ker}q$. Finalement, $\text{Ker}(p+q) = \text{Ker}p \cap \text{Ker}q$.

Correction de l'exercice 9 ▲

1. Soit $x \in E$.

$$x \in (A \cap B) + (A \cap C) \Rightarrow \exists y \in A \cap B, \exists z \in A \cap C / x = y + z.$$

y et z sont dans A et donc $x = y + z$ est dans A car A est un sous-espace vectoriel de E .

Puis y est dans B et z est dans C et donc $x = y + z$ est dans $B + C$. Finalement,

$$\forall x \in E, [x \in (A \cap B) + (A \cap C) \Rightarrow x \in A \cap (B + C)].$$

Autre démarche.

$(A \cap B \subset B \text{ et } A \cap C \subset C) \Rightarrow (A \cap B) + (A \cap C) \subset B + C$ puis $(A \cap B \subset A \text{ et } A \cap C \subset A \Rightarrow (A \cap B) + (A \cap C) \subset A + A = A$, et finalement $(A \cap B) + (A \cap C) \subset A \cap (B + C)$.

2. Si on essaie de démontrer l'inclusion contraire, le raisonnement coince car la somme $y + z$ peut être dans A sans que ni y , ni z ne soient dans A .

Contre-exemple. Dans \mathbb{R}^2 , on considère $A = \mathbb{R} \cdot (1, 0) = \{(x, 0), x \in \mathbb{R}\}$, $B = \mathbb{R} \cdot (0, 1)$ et $C = \mathbb{R} \cdot (1, 1)$.

$B + C = \mathbb{R}^2$ et $A \cap (B + C) = A$ mais $A \cap B = \{0\}$ et $A \cap C = \{0\}$ et donc $(A \cap B) + (A \cap C) = \{0\} \neq A \cap (B + C)$.

3. $A \cap B \subset B \Rightarrow (A \cap B) + (A \cap C) \subset B + (A \cap C)$ mais aussi $(A \cap B) + (A \cap C) \subset A + A = A$. Donc, $(A \cap B) + (A \cap C) \subset A \cap (B + (A \cap C))$.

Inversement, soit $x \in A \cap (B + (A \cap C))$ alors $x = y + z$ où y est dans B et z est dans $A \cap C$. Mais alors, x et z sont dans A et donc $y = x - z$ est dans A et même plus précisément dans $A \cap B$. Donc, $x \in (A \cap B) + (A \cap C)$. Donc, $A \cap (B + (A \cap C)) \subset (A \cap B) + (A \cap C)$ et finalement, $A \cap (B + (A \cap C)) = (A \cap B) + (A \cap C)$.

Correction de l'exercice 10 ▲

1. Pour $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$, on pose $f((x, y, z, t)) = x - 2y$, $g((x, y, z, t)) = y - 2z$ et $h((x, y, z, t)) = x - y + z - t$. f , g et h sont des formes linéaires sur \mathbb{R}^4 . Donc, $V = \text{Ker}f \cap \text{Ker}g$ est un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^4 en tant qu'intersection de sous-espaces vectoriels de \mathbb{R}^4 et $W = \text{Ker}h$ est un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^4 .
2. Soit $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$.

$$(x, y, z, t) \in V \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2y \\ y = 2z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4z \\ y = 2z \end{cases}.$$

Donc, $V = \{(4z, 2z, z, t), (z, t) \in \mathbb{R}^2\} = \text{Vect}(e_1, e_2)$ où $e_1 = (4, 2, 1, 0)$ et $e_2 = (0, 0, 0, 1)$. Montrons alors que (e_1, e_2) est libre. Soit $(z, t) \in \mathbb{R}^2$.

$$ze_1 + te_2 = 0 \Rightarrow (4z, 2z, z, t) = (0, 0, 0, 0) \Rightarrow z = t = 0.$$

Donc, (e_1, e_2) est une base de V .

Pour $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$, $(x, y, z, t) \in W \Leftrightarrow t = x - y + z$. Donc, $W = \{(x, y, z, x - y + z), (x, y, z) \in \mathbb{R}^3\} = \text{Vect}(e'_1, e'_2, e'_3)$ où $e'_1 = (1, 0, 0, 1)$, $e'_2 = (0, 1, 0, -1)$ et $e'_3 = (0, 0, 1, 1)$.

Montrons alors que (e'_1, e'_2, e'_3) est libre. Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

$$xe'_1 + ye'_2 + ze'_3 = 0 \Rightarrow (x, y, z, x - y + z) = (0, 0, 0, 0) \Rightarrow x = y = z = 0.$$

Donc, (e'_1, e'_2, e'_3) est une base de W . Soit $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$.

$$(x, y, z, t) \in V \cap W \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2y \\ y = 2z \\ x - y + z - t = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4z \\ y = 2z \\ t = 3z \end{cases}.$$

Donc, $V \cap W = \{(4z, 2z, z, 3z), z \in \mathbb{R}\} = \text{Vect}(e)$ où $e = (4, 2, 1, 3)$. De plus, e étant non nul, la famille (e) est libre et est donc une base de $V \cap W$.

3. Soit $u = (x, y, z, t)$ un vecteur de \mathbb{R}^4 .

On cherche $v = (4\alpha, 2\alpha, \alpha, \beta) \in V$ et $w = (a, b, c, a - b + c) \in W$ tels que $u = v + w$.

$$u = v + w \Leftrightarrow \begin{cases} 4\alpha + a = x \\ 2\alpha + b = y \\ \alpha + c = z \\ \beta + a - b + c = t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = x - 4\alpha \\ b = y - 2\alpha \\ c = z - \alpha \\ \beta = -x + y - z + t - 3\alpha \end{cases}.$$

et $\alpha = 0$, $\beta = -x + y - z + t$, $a = x$, $b = y$ et $c = z$ conviennent. Donc, $\forall u \in \mathbb{R}^4$, $\exists (v, w) \in V \times W / u = v + w$. On a montré que $\mathbb{R}^4 = V + W$.

Correction de l'exercice 11 ▲

1. Pour tout (y, y') élément de $[0, 2\pi[$, $f((0, y)) = f((0, y'))$ et f n'est pas injective.

Montrons que f est surjective.

Soit $(X, Y) \in \mathbb{R}^2$.

- Si $X = Y = 0$, $f((0, 0)) = (0, 0)$.
- Si $X = 0$ et $Y > 0$, $f((Y, \frac{\pi}{2})) = (0, Y)$ avec $(Y, \frac{\pi}{2})$ élément de $[0, +\infty[\times [0, 2\pi[$.
- Si $X = 0$ et $Y < 0$, $f((-Y, \frac{3\pi}{2})) = (0, Y)$ avec $(-Y, \frac{3\pi}{2})$ élément de $[0, +\infty[\times [0, 2\pi[$.
- Si $X > 0$ et $Y \geq 0$, $f((\sqrt{X^2 + Y^2}, \arctan \frac{Y}{X})) = (X, Y)$ avec $(\sqrt{X^2 + Y^2}, \arctan \frac{Y}{X})$ élément de $[0, +\infty[\times [0, 2\pi[$.
- Si $X < 0$ et $Y \geq 0$, $f((\sqrt{X^2 + Y^2}, \pi + \arctan \frac{Y}{X})) = (X, Y)$ avec $(\sqrt{X^2 + Y^2}, \pi + \arctan \frac{Y}{X})$ élément de $[0, +\infty[\times [0, 2\pi[$.
- Si $X > 0$ et $Y < 0$, $f((\sqrt{X^2 + Y^2}, 2\pi + \arctan \frac{Y}{X})) = (X, Y)$ avec $(\sqrt{X^2 + Y^2}, 2\pi + \arctan \frac{Y}{X})$ élément de $[0, +\infty[\times [0, 2\pi[$.
- Si $X < 0$ et $Y < 0$, $f((\sqrt{X^2 + Y^2}, \pi + \arctan \frac{Y}{X})) = (X, Y)$ avec $(\sqrt{X^2 + Y^2}, \pi + \arctan \frac{Y}{X})$ élément de $[0, +\infty[\times [0, 2\pi[$.

2. Pour tout réel x , on a $a \cos(x - \alpha) + b \cos(x - \beta) = (a \cos \alpha + b \cos \beta) \cos x + (a \sin \alpha + b \sin \beta) \sin x$.

D'après 1), f est surjective et il existe (c, γ) élément de $[0, +\infty[\times [0, 2\pi[$ tel que $a \cos \alpha + b \cos \beta = c \cos \gamma$ et $a \sin \alpha + b \sin \beta = c \sin \gamma$. Donc,

$$\exists (c, \gamma) \in [0, +\infty[\times [0, 2\pi[/ \forall x \in \mathbb{R}, a \cos(x - \alpha) + b \cos(x - \beta) = c(\cos x \cos \gamma + \sin x \sin \gamma) = c \cos(x - \gamma).$$

3. F est non vide car contient l'application nulle et est contenu dans E . De plus, pour x réel,

$$\begin{aligned} a \cos(x - \alpha) + b \cos(2x - \beta) + a' \cos(x - \alpha') + b' \cos(2x - \beta') \\ = a \cos(x - \alpha) + a' \cos(x - \alpha') + b \cos(2x - \beta) + b' \cos(2x - \beta') \\ = a'' \cos(x - \alpha'') + b'' \cos(2x - \beta''), \end{aligned}$$

pour un certain $(a', b'', \alpha'', \beta'')$ (d'après 2)). F est un sous-espace vectoriel de E .

4. Pour tout réel x , $\cos x = 1 \cdot \cos(x - 0) + 0 \cdot \cos(2x - 0)$ et $x \mapsto \cos x$ est élément de F .

Pour tout réel x , $\sin x = 1 \cdot \cos(x - \frac{\pi}{2}) + 0 \cdot \cos(2x - 0)$ et $x \mapsto \sin x$ est élément de F .

Pour tout réel x , $\cos(2x) = 0 \cdot \cos(x - 0) + 1 \cdot \cos(2x - 0)$ et $x \mapsto \cos(2x)$ est élément de F .

Pour tout réel x , $\sin(2x) = 0 \cdot \cos(x - 0) + 1 \cdot \cos(2x - \frac{\pi}{2})$ et $x \mapsto \sin(2x)$ est élément de F .

D'autre part, pour tout réel x , $\cos(2x) = 2 \cos^2 x - 1 = 1 - 2 \sin^2 x$ et donc,

$$x \mapsto 1 \in F \Leftrightarrow x \mapsto \cos^2 x \in F \Leftrightarrow x \mapsto \sin^2 x \in F.$$

Montrons alors que $1 \notin F$.

On suppose qu'il existe $(a, b, \alpha, \beta) \in \mathbb{R}^4$ tel que

$$\forall x \in \mathbb{R}, a \cos(x - \alpha) + b \cos(2x - \beta) = 1.$$

En dérivant deux fois, on obtient :

$$\forall x \in \mathbb{R}, -a \cos(x - \alpha) - 4b \cos(2x - \beta) = 0,$$

et donc en additionnant

$$\forall x \in \mathbb{R}, -3b \cos(2x - \beta) = 1,$$

ce qui est impossible (pour $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\beta}{2}$, on trouve 0). Donc, aucune des trois dernières fonctions n'est dans F .

5. On a vu que $(x \mapsto \cos x, x \mapsto \sin x, x \mapsto \cos(2x), x \mapsto \sin(2x))$ est une famille d'éléments de F . Montrons que cette famille est libre.

Soit $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$.

Supposons que $\forall x \in \mathbb{R}, a \cos x + b \sin x + c \cos(2x) + d \sin(2x) = 0$. En dérivant deux fois, on obtient $\forall x \in \mathbb{R}, -a \cos x - b \sin x - 4c \cos(2x) - 4d \sin(2x) = 0$ et en additionnant : $\forall x \in \mathbb{R}, -3c \cos(2x) - 3d \sin(2x) = 0$. Donc,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \begin{cases} a \cos x + b \sin x = 0 \\ c \cos(2x) + d \sin(2x) = 0 \end{cases}.$$

$x = 0$ fournit $a = c = 0$ puis $x = \frac{\pi}{4}$ fournit $b = d = 0$. Donc, $(x \mapsto \cos x, x \mapsto \sin x, x \mapsto \cos(2x), x \mapsto \sin(2x))$ est une famille libre d'éléments de F .

Correction de l'exercice 12 ▲

1. C contient l'identité de \mathbb{R} , mais ne contient pas son opposé. Donc, C n'est pas un espace vectoriel.

2. Montrons que V est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel des applications de \mathbb{R} dans \mathbb{R} . V est déjà non vide car contient la fonction nulle ($0 = 0 - 0$).

Soit $(f_1, f_2) \in V^2$. Il existe $(g_1, g_2, h_1, h_2) \in C^4$ tel que $f_1 = g_1 - h_1$ et $f_2 = g_2 - h_2$. Mais alors, $f_1 + f_2 = (g_1 + g_2) - (h_1 + h_2)$. Or, une somme de fonctions croissantes sur \mathbb{R} est croissante sur \mathbb{R} , et donc, $g_1 + g_2$ et $h_1 + h_2$ sont des éléments de C ou encore $f_1 + f_2$ est dans V .

Soit $f \in V$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Il existe $(g, h) \in V^2$ tel que $f = g - h$ et donc $\lambda f = \lambda g - \lambda h$.

Si $\lambda \geq 0$, λg et λh sont croissantes sur \mathbb{R} et λf est dans V .

Si $\lambda < 0$, on écrit $\lambda f = (-\lambda h) - (-\lambda g)$, et puisque $-\lambda g$ et $-\lambda h$ sont croissantes sur \mathbb{R} , λf est encore dans V . V est donc un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel des applications de \mathbb{R} dans \mathbb{R} .

Correction de l'exercice 13 ▲

Soit $(x, y) \in E^2$.

$(1+1).(x+y) = 1.(x+y) + 1.(x+y) = (x+y) + (x+y) = x+y+x+y$ mais aussi $(1+1).(x+y) = (1+1).x + (1+1).y = x+x+y+y$.

Enfin, $(E, +)$ étant un groupe, tout élément est régulier et en particulier x est régulier à gauche et y est régulier à droite. On a montré que pour tout couple (x, y) élément de E^2 , $x+y = y+x$.

Correction de l'exercice 14 ▲

Soit $F = (A \cap B) + (A \cap C) + (B \cap C)$.

$F \subset A+A+B = A+B$ puis $F \subset A+C+C = A+C$ puis $F \subset B+C+C = B+C$ et finalement $F \subset (A+B) \cap (A+C) \cap (B+C)$.

Correction de l'exercice 15 ▲

$F = \text{Vect}(u)$ est un sous espace vectoriel de \mathbb{R}^n et G est un sous espace vectoriel de \mathbb{R}^n , car est le noyau de la forme linéaire $(x_1, \dots, x_n) \mapsto x_1 + \dots + x_n$.

Soit $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ et soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$x - \lambda u \in G \Leftrightarrow (x_1 - \lambda, \dots, x_n - \lambda) \in G \Leftrightarrow \sum_{k=1}^n (x_k - \lambda) = 0 \Leftrightarrow \lambda = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k.$$

Donc,

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \exists ! \lambda \in \mathbb{R} / x - \lambda u \in G,$$

et donc,

$$\mathbb{R}^n = F \oplus G.$$

Le projeté sur F parallèlement à G d'un vecteur $x = (x_1, \dots, x_n)$ est

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k \cdot u = \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k, \dots, \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k \right)$$

et le projeté du même vecteur sur G parallèlement à F est

$$x - \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k \right) \cdot u = \left(x_1 - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k, \dots, x_n - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k \right).$$

Correction de l'exercice 16 ▲

1. Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2.

Si $\sqrt{n} \in \mathbb{Q}$, il existe $(a, b) \in (\mathbb{N}^*)^2$ tel que $\sqrt{n} = \frac{a}{b}$ ou encore tel que $n.b^2 = a^2$. Mais alors, par unicité de la décomposition d'un entier naturel supérieur ou égal à 2 en facteurs premiers, tous les facteurs premiers de n ont un exposant pair ce qui signifie exactement que n est un carré parfait.

Si $n = 0$ ou $n = 1$, $\sqrt{n} \in \mathbb{Q}$ et n est d'autre part un carré parfait. On a montré que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, (\sqrt{n} \in \mathbb{Q} \Rightarrow n \text{ est un carré parfait})$$

ou encore par contraposition

$$\forall n \in \mathbb{N}, (n \text{ n'est pas un carré parfait} \Rightarrow \sqrt{n} \notin \mathbb{Q}).$$

2. D'après 1), $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ et $\sqrt{6}$ sont irrationnels.

$E = \text{Vect}_{\mathbb{Q}}(1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{6})$ et donc, E est un \mathbb{Q} -espace vectoriel et $(1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{6})$ en est une famille génératrice.

Montrons que cette famille est \mathbb{Q} -libre.

Soit $(a, b, c, d) \in \mathbb{Q}^4$.

$$\begin{aligned} a + b\sqrt{2} + c\sqrt{3} + d\sqrt{6} = 0 &\Rightarrow (a + d\sqrt{6})^2 = (-b\sqrt{2} - c\sqrt{3})^2 \Rightarrow a^2 + 2ad\sqrt{6} + 6d^2 = 2b^2 + 2bc\sqrt{6} + 3c^2 \\ &\Rightarrow a^2 - 2b^2 - 3c^2 + 6d^2 = 2(-ad + bc)\sqrt{6} \end{aligned}$$

Puisque $\sqrt{6} \notin \mathbb{Q}$, on obtient $a^2 - 2b^2 - 3c^2 + 6d^2 = 2(-ad + bc) = 0$ (car si $bc - ad \neq 0$, $\sqrt{6} = \frac{a^2 - 2b^2 - 3c^2 + 6d^2}{2(-ad + bc)} \in \mathbb{Q}$) ou encore,

$$\begin{cases} a^2 - 3c^2 = 2b^2 - 6d^2 & (1) \\ ad = bc & (2) \end{cases}.$$

De même,

$$\begin{aligned} a + b\sqrt{2} + c\sqrt{3} + d\sqrt{6} = 0 &\Rightarrow (a + c\sqrt{3})^2 = (-b\sqrt{2} - d\sqrt{6})^2 \Rightarrow (a^2 + 2ac\sqrt{3} + 3c^2 = 2b^2 + 4bd\sqrt{3} + 6d^2 \\ &\Rightarrow \begin{cases} a^2 + 3c^2 = 2b^2 + 6d^2 & (3) \\ ac = 2bd & (4) \end{cases} \end{aligned}$$

(puisque $\sqrt{3}$ est irrationnel). En additionnant et en retranchant (1) et (3), on obtient $a^2 = 2b^2$ et $c^2 = 2d^2$. Puisque $\sqrt{2}$ est irrationnel, on ne peut avoir $b \neq 0$ (car alors $\sqrt{2} = \pm \frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$) ou $d \neq 0$. Donc, $b = d = 0$ puis $a = c = 0$. Finalement, la famille $(1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{6})$ est \mathbb{Q} -libre et est donc une base de E .

Correction de l'exercice 17 ▲

1. Notons respectivement g et h , les fonctions sinus et cosinus.

$f_a = \cos a.g + \sin a.h$, $f_b = \cos b.g + \sin b.h$ et $f_c = \cos c.g + \sin c.h$. Donc, f_a , f_b et f_c sont trois combinaisons linéaires des deux fonctions g et h et constituent donc une famille liée ($p+1$ combinaisons linéaires de p vecteurs donnés constituent une famille liée).

2. f_0 , f_1 et f_2 sont trois combinaisons linéaires des deux fonctions $x \mapsto 1$ et $x \mapsto x$. Donc, la famille (f_0, f_1, f_2) est une famille liée puis la famille $(f_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ est liée en tant que sur-famille d'une famille liée.

3. Pour α réel donné et $x > 0$, posons $f_\alpha(x) = x^\alpha$.

Soient n un entier naturel supérieur ou égal à 2, puis $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que $\alpha_1 < \dots < \alpha_n$. Soit encore $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$.

$$\sum_{k=1}^n \lambda_k f_{\alpha_k} = 0 \Rightarrow \forall x \in]0; +\infty[, \sum_{k=1}^n \lambda_k x^{\alpha_k} = 0 \Rightarrow \forall x \in]0; +\infty[, \sum_{k=1}^n \lambda_k x^{\alpha_k - \alpha_n} = 0,$$

(en divisant les deux membres par x^{α_n}). Dans cette dernière égalité, on fait tendre x vers $+\infty$ et on obtient $\lambda_n = 0$. Puis, par récurrence descendante, $\lambda_{n-1} = \dots = \lambda_1 = 0$. On a montré que toute sous-famille finie de la famille $(f_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{R}}$ est libre et donc, la famille $(f_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{R}}$ est libre.

4. Pour a réel donné et x réel, posons $f_a(x) = |x - a|$. Soient n un entier naturel supérieur ou égal à 2, puis a_1, \dots, a_n , n réels deux à deux distincts. Soit $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que $\sum_{k=1}^n \lambda_k f_{a_k} = 0$.

S'il existe $i \in \{1, \dots, n\}$ tel que $\lambda_i \neq 0$ alors,

$$f_{a_i} = -\frac{1}{\lambda_i} \sum_{k \neq i} \lambda_k f_{a_k}.$$

Mais cette dernière égalité est impossible car f_{a_i} n'est pas dérivable en a_i alors que $-\frac{1}{\lambda_i} \sum_{k \neq i} \lambda_k f_{a_k}$ l'est. Donc, tous les λ_i sont nuls.

Correction de l'exercice 18 ▲

1. \Leftarrow Soit $(u, v)((\mathcal{L}(E))^2)$. On suppose qu'il existe $w \in \mathcal{L}(E)$ tel que $u = w \circ v$. Soit x un élément de Kerv . Alors $v(x) = 0$ et donc $u(x) = w(v(x)) = w(0) = 0$. Mais alors, x est dans Keru . Donc $\text{Kerv} \subset \text{Keru}$.
 \Rightarrow Supposons que $\text{Kerv} \subset \text{Keru}$. On cherche à définir w , élément de $\mathcal{L}(E)$ tel que $w \circ v = u$. Il faut définir précisément w sur $\text{Im}v$ car sur $E \setminus \text{Im}v$, on a aucune autre contrainte que la linéarité.
Soit y un élément de $\text{Im}v$. (Il existe x élément de E tel que $y = v(x)$). On a alors envie de poser $w(y) = u(x)$ mais le problème est que y , élément de $\text{Im}v$ donné peut avoir plusieurs antécédents x , x' ... et on peut avoir $u(x) \neq u(x')$ de sorte que l'on n'aurait même pas défini une application w .
Soient x et x' deux éléments de E tels que $v(x) = v(x') = y$ alors $v(x - x') = 0$ et donc $x - x' \in \text{Kerv} \subset \text{Keru}$. Par suite, $u(x - x') = 0$ ou encore $u(x) = u(x')$. En résumé, pour y élément donné de $\text{Im}v$, il existe x élément de E tel que $v(x) = y$. On pose alors $w(y) = u(x)$ en notant que $w(y)$ est bien uniquement défini, car ne dépend pas du choix de l'antécédent x de y par v . w n'est pas encore défini sur E tout entier. Notons F un supplémentaire quelconque de $\text{Im}v$ dans E (l'existence de F est admise).
Soit X un élément de E . Il existe deux vecteurs y et z , de $\text{Im}v$ et F respectivement, tels que $X = y + z$. On pose alors $w(X) = u(x)$ où x est un antécédent quelconque de y par v (on a pris pour restriction de w à F l'application nulle). w ainsi définie est une application de E dans E car, pour X donné y est uniquement défini puis $u(x)$ est uniquement défini (mais pas nécessairement x).
Soit x un élément de E et $y = v(x)$. $w(v(x)) = w(y) = w(y + 0) = u(x)$ (car 1) y est dans $\text{Im}v$ 2) 0 est dans F 3) x est un antécédent de y par v) et donc $w \circ v = u$.
Montrons que w est linéaire. Soient, avec les notations précédentes, $X_1 = y_1 + z_1$ et $X_2 = y_2 + z_2$...

$$\begin{aligned} w(X_1 + X_2) &= w((y_1 + y_2) + (z_1 + z_2)) = u(x_1 + x_2) \quad (\text{car } y_1 + y_2 = v(x_1) + v(x_2) = v(x_1 + x_2)) \\ &= u(x_1) + u(x_2) = w(X_1) + w(X_2) \end{aligned}$$

et

$$w(\lambda X) = w(\lambda y + \lambda z) = u(\lambda x) = \lambda u(x) = \lambda w(X).$$

2. On applique 1) à $u = \text{Id}$.

$$v \text{ injective} \Leftrightarrow \text{Kerv} = \{0\} \Leftrightarrow \text{Kerv} = \text{KerId} \Leftrightarrow \exists w \in \mathcal{L}(E) / w \circ v = \text{Id}.$$

Correction de l'exercice 19 ▲

1. $\forall P \in E, f(P) = P'$ est un polynôme et donc f est une application de E vers E .
 $\forall (P, Q) \in E^2, \forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, f(\lambda P + \mu Q) = (\lambda P + \mu Q)' = \lambda P' + \mu Q' = \lambda f(P) + \mu f(Q)$ et f est un endomorphisme de E .
Soit $P \in E. P \in \text{Ker}f \Leftrightarrow P' = 0 \Leftrightarrow P$ est constant. $\text{Ker}f$ n'est pas nul et f n'est pas injective.
Soient $Q \in E$ puis P le polynôme défini par : $\forall x \in \mathbb{R}, P(x) = \int_0^x Q(t) dt$. P est bien un polynôme tel que $f(P) = Q$. f est surjective.
Soit $F = \{P \in E / P(0) = 0\}$. F est un sous espace de E en tant que noyau de la forme linéaire $P \mapsto P(0)$.
 $\text{Ker}f \cap F = \{0\}$ car si un polynôme est constant et s'annule en 0, ce polynôme est nul. Enfin, si P est un polynôme quelconque, $P = P(0) + (P - P(0))$ et P s'écrit bien comme la somme d'un polynôme constant et d'un polynôme s'annulant en 0. Finalement $E = \text{Ker}f \oplus F$.
2. On montre facilement que g est un endomorphisme de E .
 $P \in \text{Ker}g \Rightarrow \forall x \in \mathbb{R}, \int_0^x P(t) dt = 0 \Rightarrow \forall x \in \mathbb{R}, P(x) = 0$ (en dérivant). Donc, $\text{Ker}g = \{0\}$ et donc g est injective.
Si P est dans Img alors $P(0) = 0$ ce qui montre que g n'est pas surjective. De plus, si $P(0) = 0$ alors $\int_0^x P'(t) dt = P(x) - P(0) = P(x)$ ce qui montre que $P = g(P')$ est dans Img et donc que $\text{Img} = \{P \in E / P(0) = 0\}$.

