Géométrie analytique (affine ou euclidienne)

Exercices de Jean-Louis Rouget. Retrouver aussi cette fiche sur www.maths-france.fr

* très facile ** facile *** difficulté moyenne **** difficile ***** très difficile
I : Incontournable T : pour travailler et mémoriser le cours

Exercice 1 **T

Dans E_3 rapporté à un repère (O,i,j,k), on donne les points $A(1,2,-1)$, $B(3,2,0)$, $C(2,1,-1)$ et $D(1,0,4)$. Déterminer l'intersection des plans (OAB) et (OCD).

Correction ▼ [005501]

Exercice 2 **T

Dans E_3 rapporté à un repère (O,i,j,k), on donne : la droite (D) dont un système d'équations paramétriques est $\left\{\begin{array}{l}x=2+3t\\ y=-t\\ z=1+t\end{array}\right.$, le plan P dont un système d'équations paramétriques est $\left\{\begin{array}{l}x=1+2\lambda+\mu\\ y=-1-3\lambda+2\mu\\ z=1+\lambda\end{array}\right.$, le plan P' dont un système d'équations paramétriques est $\left\{\begin{array}{l}x=-5-\nu\\ y=3+\nu+3\eta\\ z=\nu+\eta\end{array}\right.$, Etudier $D\cap P$ et $P\cap P'$

Correction ▼ [005502]

Exercice 3 **T

Matrice dans la base canonique orthonormée directe de la rotation vectorielle de $\mathbb{R}^3$ autour de $(1,2,2)$ qui transforme j en k.

Correction ▼ [005503]

Exercice 4 **T

Dans $\mathbb{R}^3$, espace vectoriel euclidien orienté rapporté à la base orthonormée directe (i,j,k), déterminer l'image du plan d'équation $x+y=0$ par

1. la symétrie orthogonale par rapport au plan d'équation $x-y+z=0$,
2. la symétrie orthogonale par rapport au vecteur $(1,1,1)$,
3. par la rotation d'angle $\frac{\pi}{4}$ autour du vecteur $(1,1,1)$.

Correction ▼ [005504]

Exercice 5 *T

Dans $\mathbb{R}^3$ affine, déterminer un repère de la droite (D) $\left\{\begin{array}{l}x-y+2z+7=0\\ 2x+2y+3z-5=0\end{array}\right.$.

Correction ▼ [005505]

Exercice 6 *T

Dans $\mathbb{R}^3$, déterminer l'intersection de (D) $\left\{\begin{array}{l}x=2+\lambda\\ y=3-\lambda\\ z=7\end{array}\right.$ et $(P)\ :\ x+3y-5z+2=0$.

Correction ▼ [005506]

Exercice 7 **

Dans $\mathbb{R}^3$ affine, déterminer le réel a pour que les droites $\left\{\begin{array}{l} x+2=-2z \\ y=3x+z \end{array}\right.$ et $\left\{\begin{array}{l} x+y+z=1 \\ 2x+y-z=a \end{array}\right.$ soient coplanaires, puis déterminer une équation du plan les contenant.

Correction ▼ [005507]

Exercice 8 **T

Dans $\mathbb{R}^3$, équation du plan P parallèle à la droite (Oy) et passant par $A(0,-1,2)$ et $B(-1,2,3)$.

Correction ▼ [005508]

Exercice 9 **T

Dans $\mathbb{R}^3$, soient (D) $\left\{\begin{array}{l} x+y+z=1 \\ x-2y-z=0 \end{array}\right.$ et (Δ) : $6x=2y=3z$ puis (P) : $x+3y+2z=6$. Déterminer la projection de (D) sur (P) parallèlement à (Δ).

Correction ▼ [005509]

Exercice 10 **

Dans $\mathbb{R}^3$, soient (D) $\left\{\begin{array}{l} x-z-a=0 \\ y+3z+1=0 \end{array}\right.$ et (D') $\left\{\begin{array}{l} x+2y+z-2b=0 \\ 3x+3y+2z-7=0 \end{array}\right.$. Vérifier que (D) et (D') ne sont pas parallèles puis trouver a et b pour que (D) et (D') soient sécantes. Former alors une équation cartésienne de leur plan.

Correction ▼ [005510]

Exercice 11 **

Système d'équations cartésiennes de la droite (Δ) parallèle à la droite (D) : $2x=3y=6z$ et sécante aux droites (D_1) : $x=z-4=0$ et (D_2) : $y=z+4=0$.

Correction ▼ [005511]

Exercice 12 ***

Trouver toutes les droites sécantes aux quatre droites (D_1) $x-1=y=0$, (D_2) : $y-1=z=0$, (D_3) : $z-1=x=0$ et (D_4) : $x=y=-6z$.

Correction ▼ [005512]

Exercice 13 **T

Dans $\mathbb{R}^3$ euclidien rapporté à un repère orthonormé, on donne $A(2,-2,0)$, $B(4,2,6)$ et $C(-1,-3,0)$. Déterminer l'orthocentre, le centre de gravité, les centres des cercles circonscrits et inscrits au triangle (A,B,C).

Correction ▼ [005513]

Exercice 14 **T

Soit $M(x,y,z)$ un point de $\mathbb{R}^3$ rapporté à un repère orthonormé. Déterminer la distance de M à la droite (D) $\left\{\begin{array}{l} x+y+z+1=0 \\ 2x+y+5z=2 \end{array}\right.$. En déduire une équation du cylindre de révolution d'axe (D) et de rayon 2.

Correction ▼ [005514]

Exercice 15 **T

Dans $\mathbb{R}^3$ rapporté à un repère orthonormé, soient (D) $\left\{\begin{array}{l} x+y+z+1=0 \\ 2x+y+5z=2 \end{array}\right.$ et (D') $\left\{\begin{array}{l} x+y+z=2 \\ 2x+y-5z=3 \end{array}\right.$. Déterminer la distance de (D) à (D') puis la perpendiculaire commune à ces deux droites.

Correction ▼ [005515]

Exercice 16 **

Montrer que les plans $(P_1) : z-2y=5$, $(P_2) : 2x-3z=0$ et $(P_3) \ : \ 3y-x=0$ admettent une parallèle commune. Ils définissent ainsi un prisme. Déterminer l'aire d'une section perpendiculaire.

Correction ▼ [005516]

Exercice 17 *T

Angle des plans $x+2y+2z=3$ et $x+y=0$.

Correction ▼ [005517]

Exercice 18 **T

Soient $(P_1) \ : \ 4x+4y-7z-1=0$ et $(P_2) \ : \ 8x-4y+z+7=0$. Trouver une équation cartésienne des plans bissecteurs de (P_1) et (P_2).

Correction ▼ [005518]

Exercice 19 **T

Déterminer la perpendiculaire commune aux droites (D) et (D') : $(D) \left\{ \begin{array}{l} x+y-3z+4=0 \\ 2x-z+1=0 \end{array} \right.$ et $(D') \left\{ \begin{array}{l} x=z-1 \\ y=z-1 \end{array} \right.$.

Correction ▼ [005519]

Exercice 20 **

Soient (D) la droite dont un système d'équations cartésiennes est $\left\{ \begin{array}{l} x+y+z=1 \\ x-2y-z=0 \end{array} \right.$ et (P) le plan d'équation cartésienne $x+3y+2z=6$. Déterminer la projetée (orthogonale) de (D) sur (P).

Correction ▼ [005520]

Exercice 21 **I

Déterminer les différents angles d'un tétraèdre régulier (entre deux faces, entre deux arêtes et entre une arête et une face).

Correction ▼ [005521]

Exercice 22 **T

Déterminer la distance de l'origine O à la droite (D) dont un système d'équations cartésiennes est $\left\{ \begin{array}{l} x-y-z=0 \\ x+2y-z=10 \end{array} \right.$.

Correction ▼ [005522]

Correction de l'exercice 1 ▲

• $\overrightarrow{n} = \overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{OB}$ a pour coordonnées $(2,-3,-4)$. Ce vecteur n'est pas nul. Par suite, les points O, A et B ne sont pas alignés et le plan (OAB) est bien défini. C'est le plan passant par O et de vecteur normal $\overrightarrow{n}(2,-3,-4)$. Une équation cartésienne du plan (OAB) est donc $2x-3y-4z=0$. • $\overrightarrow{n}' = \overrightarrow{OC} \wedge \overrightarrow{OD}$ a pour coordonnées $(4,-9,-1)$. Ce vecteur n'est pas nul. Par suite, les points O, C et D ne sont pas alignés et le plan (OCD) est bien défini. C'est le plan passant par O et de vecteur normal $\overrightarrow{n}'(4,-9,-1)$. Une équation cartésienne du plan (OAB) est donc $4x-9y-z=0$. •$-\overrightarrow{n} \wedge \overrightarrow{n}'$ a pour coordonnées $(33,14,6)$. Ce vecteur n'est pas nul et on sait que les plans (OAB) et (OCD) sont sécants en une droite, à savoir la droite passant par $O(0,0,0)$ et de vecteur directeur $(33,14,6)$. Un système d'équations cartésiennes de cette droite est $\left\{\begin{array}{l} 2x-3y-4z=0 \\ 4x-9y-z=0 \end{array}\right.$.

Correction de l'exercice 2 ▲

Les vecteurs $(2,-3,1)$ et $(1,2,0)$ ne sont pas colinéaires, de sorte que (P) est bien un plan. Trouvons alors une équation cartésienne de (P)

$$\begin{aligned}
M(x,y,z) \in (P) &\Leftrightarrow \exists(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2 / \left\{\begin{array}{l} x = 1+2\lambda+\mu \\ y = -1-3\lambda+2\mu \\ z = 1+\lambda \end{array}\right. \Leftrightarrow \exists(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2 / \left\{\begin{array}{l} \lambda = z-1 \\ x = 1+2(z-1)+\mu \\ y = -1-3(z-1)+2\mu \end{array}\right. \\
&\Leftrightarrow \exists(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2 / \left\{\begin{array}{l} \lambda = z-1 \\ \mu = x-2z+1 \\ y = -1-3(z-1)+2(x-2z+1) \end{array}\right. \\
&\Leftrightarrow -2x+y+7z-4 = 0
\end{aligned}$$

Soit alors $M(2+3t,-t,1+t)$, $t \in \mathbb{R}$, un point de (D)

$$M \in (P) \Leftrightarrow -2(2+3t)+(-t)+7(1+t)-4 = 0 \Leftrightarrow 0 \times t - 1 = 0.$$

Ce dernier système n'a pas de solution et donc $(D) \cap (P) = \varnothing$. La droite (D) est strictement parallèle au plan (P).

$$\begin{aligned}
M(x,y,z) \in (P) \cap (P') &\Leftrightarrow \exists(\nu,\eta) \in \mathbb{R}^2 / \left\{\begin{array}{l} x = -5-\nu \\ y = 3+\nu+3\eta \\ z = \nu+\eta \\ -2x+y+7z-4 = 0 \end{array}\right. \\
&\Leftrightarrow \exists(\nu,\eta) \in \mathbb{R}^2 / \left\{\begin{array}{l} x = -5-\nu \\ y = 3+\nu+3\eta \\ z = \nu+\eta \\ -2(-5-\nu)+(3+\nu+3\eta)+7(\nu+\eta)-4 = 0 \end{array}\right. \\
&\Leftrightarrow \exists(\nu,\eta) \in \mathbb{R}^2 / \left\{\begin{array}{l} \eta = -\nu-\frac{9}{10} \\ x = -5-\nu \\ y = 3+\nu+3\left(-\nu-\frac{9}{10}\right) \\ z = \nu+\left(-\nu-\frac{9}{10}\right) \end{array}\right. \Leftrightarrow \exists\nu \in \mathbb{R} / \left\{\begin{array}{l} x = -\nu-5 \\ y = -2\nu+\frac{3}{10} \\ z = -\frac{9}{10} \end{array}\right.
\end{aligned}$$

(P) et (P') sont donc sécants en la droite passant par le point $\left(-5,\frac{3}{10},-\frac{9}{10}\right)$ et de vecteur directeur $(1,2,0)$.

Correction de l'exercice 3 ▲

Soit r la rotation cherchée. Notons u le vecteur $\frac{1}{3}(1,2,2)$ (u est unitaire) et θ l'angle de r. r est la rotation d'angle θ autour du vecteur unitaire u. On sait que pour tout vecteur v de $\mathbb{R}^3$

$$r(v) = (\cos\theta)v + (1-\cos\theta)(v.u)u + (\sin\theta)u \wedge v \quad (*)$$

et en particulier que $[v,r(v),u] = \sin\theta\|v\wedge u\|^2$. L'égalité $r(j)=k$ fournit

$$\sin\theta\|j\wedge u\|^2 = [j,r(j),u] = [u,j,k] = \tfrac{1}{3}\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \tfrac{1}{3}.$$

Comme $u\wedge j = \frac{1}{3}(i+2j+2k)\wedge j = -\frac{2}{3}j+\frac{1}{3}k$, on a $\|j\wedge u\|^2 = \frac{5}{9}$ et donc $\sin\theta = \frac{3}{5}$. L'égalité $r(j)=k$ fournit ensuite

$$k = (\cos\theta)j + (1-\cos\theta)\times\tfrac{2}{3}\times\tfrac{1}{3}(i+2j+2k) + \tfrac{3}{5}\times\tfrac{1}{3}(i+2j+2k)\wedge j$$

En analysant la composante en i, on en déduit que $\frac{2}{9}(1-\cos\theta)-\frac{2}{5}=0$ et donc $\cos\theta = -\frac{4}{5}$. Ainsi, pour tout vecteur $v=(x,y,z)$ de $\mathbb{R}^3$, l'égalité $(*)$ s'écrit

$$\begin{aligned}
r(v) &= -\frac{4}{5}(x,y,z) + \frac{9}{5}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}(x+2y+2z)(1,2,2) + \frac{3}{5}\times\frac{1}{3}(2z-2y,2x-z,-2x+y) \\
&= \frac{1}{5}(-4x+(x+2y+2z)+(2z-2y), -4y+2(x+2y+2z)+(2x-z), -4z+2(x+2y+2z)+(-2x+y)) \\
&= \frac{1}{5}(-3x+4z, 4x+3z, 5y) = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -3 & 0 & 4 \\ 4 & 0 & 3 \\ 0 & 5 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

La matrice cherchée est

$$\boxed{\begin{pmatrix} -\frac{3}{5} & 0 & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & 0 & \frac{3}{5} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.}$$

Correction de l'exercice 4 ▲

Notons P le plan d'équation $x+y=0$ dans la base $\mathscr{B}=(i,j,k)$. P est le plan de vecteur normal $n=i+j$.

1. Soit s la symétrie orthogonale par rapport au plan P' d'équation $x-y+z=0$. $s(P)$ est le plan de vecteur normal $s(n)$. Or, le vecteur n est dans P' et donc $s(n)=n$ puis $s(P)=P$.

$$\boxed{s(P) \text{ est le plan } P.}$$

2. Notons σ la symétrie orthogonale par rapport au vecteur $u=(1,1,1)$. $\sigma(P)$ est le plan de vecteur normal

$$\sigma(n) = 2\tfrac{n.u}{\|u\|^2}u - n = 2\tfrac{2}{3}(1,1,1)-(1,1,0) = \tfrac{1}{3}(1,1,4).$$

$$\boxed{\sigma(P) \text{ est le plan d'équation } x+y+4z=0.}$$

3. Notons r la rotation d'angle $\frac{\pi}{4}$ autour du vecteur unitaire $u=\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)$. $r(P)$ est le plan de vecteur normal

$$\begin{aligned}
r(n) &= \left(\cos\frac{\pi}{4}\right)n + \left(1-\cos\frac{\pi}{4}\right)(n.u)u + \left(\sin\frac{\pi}{4}\right)u\wedge n \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0) + \left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\times\frac{2}{3}(1,1,1) + \frac{1}{\sqrt{2}}\times\frac{1}{\sqrt{3}}(-1,1,0) \\
&= \frac{1}{3\sqrt{2}}(3+2(\sqrt{2}-1)-\sqrt{3}, 3+2(\sqrt{2}-1)+\sqrt{3}, 2(\sqrt{2}-1)) = \frac{1}{3\sqrt{2}}(1+2\sqrt{2}-\sqrt{3}, 1+2\sqrt{2}+\sqrt{3}, 2(\sqrt{2}-
\end{aligned}$$

$$\boxed{r(P) \text{ est le plan d'équation } (1+2\sqrt{2}-\sqrt{3})x+(1+2\sqrt{2}+\sqrt{3})y+2(\sqrt{2}-1)z=0.}$$

Correction de l'exercice 5 ▲

Puisque $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -1$, on choisit d'exprimer x et z en fonction de y. Soit $M(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. D'après les formules de CRAMER, on a

$$\begin{aligned} M \in (D) &\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x-y+2z+7=0 \\ 2x+2y+3z-5=0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x+2z=y-7 \\ -2x-3z=2y-5 \end{array} \right. \\ &\Leftrightarrow x=\frac{1}{1}\begin{vmatrix} y-7 & 2 \\ 2y-5 & -3 \end{vmatrix} \text{ et } z=\frac{1}{1}\begin{vmatrix} 1 & y-7 \\ -2 & 2y-5 \end{vmatrix} \\ &\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x=31-7y \\ z=-19+4y \end{array} \right. . \end{aligned}$$

$$\boxed{(D) \text{ est la droite passant par } A(31,0,-19) \text{ dirigée par le vecteur } u(-7,1,4).}$$

Correction de l'exercice 6 ▲

Soit $M(2+\lambda, 3-\lambda, 7)$, $\lambda \in \mathbb{R}$, un point quelconque de (D).

$$M \in (P) \Leftrightarrow (2+\lambda)+3(3-\lambda)-5\times 7+2=0 \Leftrightarrow \lambda=12.$$

$(P)\cap(D)$ est donc un singleton. Pour $\lambda=12$, on obtient les coordonnées du point d'intersection

$$\boxed{(P)\cap(D)=\{(14,-9,7)\}.}$$

Correction de l'exercice 7 ▲

• **Repère de** (D)**.**

$$\left\{ \begin{array}{l} x+2=-2z \\ y=3x+z \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x=-2-2z \\ y=3(-2-2z)+z \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x=-2-2z \\ y=-6-5z \end{array} \right.$$

(D) est la droite passant par $A(0,-1,-1)$ et dirigée par $u(2,5,-1)$. • **Repère de** (D')**.**

$$\left\{ \begin{array}{l} x+y+z=1 \\ 2x+y-z=a \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} -x-y=z-1 \\ 2x+y=z+a \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x=2z+a-1 \\ y=2-a-3z \end{array} \right.$$

(D') est la droite passant par $A'(a-1,2-a,0)$ et dirigée par $u'(2,-3,1)$. • Déjà u et u' ne sont pas colinéaires et donc (D) et (D') sont ou bien sécantes en un point et dans ce cas coplanaires ou bien non coplanaires. • Le plan (P) contenant (D) et parallèle à (D') est le plan de repère (A,u,u'). Déterminons une équation de ce plan.

$$M(x,y,z)\in(P) \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x & 2 & 2 \\ y+1 & 5 & -3 \\ z+1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow 2x-4(y+1)-16(z+1)=0 \Leftrightarrow -x+2y+8z=-10.$$

• Enfin, (D) et (D') sont coplanaires si et seulement si (D') est contenue dans (P). Comme (D') est déjà parallèle à (P), on a

$$(D) \text{ et } (D') \text{ coplanaires} \Leftrightarrow A'\in(P) \Leftrightarrow -(a-1)+2(2-a)=-10 \Leftrightarrow a=\tfrac{5}{3}.$$

$$\boxed{\begin{array}{c}(D) \text{ et } (D') \text{ sont coplanaires si et seulement si } a=\frac{5}{3} \text{ et dans ce cas, une équation du plan contenant } (D) \\ \text{et } (D') \text{ est } -x+2y+8z=-10.\end{array}}$$

Correction de l'exercice 8 ▲

Puisque P parallèle à la droite (Oy), le vecteur $\overrightarrow{j} = (0,1,0)$ est dans $\overrightarrow{P}$. De même, le vecteur $\overrightarrow{AB} = (-1,3,1)$ est dans $\overrightarrow{P}$. P est donc nécessairement le plan passant par $A(0,-1,2)$ et de vecteur normal $\overrightarrow{j} \wedge \overrightarrow{AB} = (1,0,1)$. Réciproquement, ce plan convient. Une équation de P est donc $(x-0)+(z-2)=0$ ou encore $x+z=2$.

$$\boxed{\text{Une équation du plan parallèle à la droite } (Oy) \text{ et passant par } A(0,-1,2) \text{ et } B(-1,2,3) \text{ est } x+z=2.}$$

Correction de l'exercice 9 ▲

Notons p la projection sur (P) parallèlement à (Δ). • Déterminons un repère de (D).

$$\left\{\begin{array}{l} x+y+z=1 \\ x-2y-z=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} y+z=-x+1 \\ 2y+z=x \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} y=2x-1 \\ z=-3x+2 \end{array}\right.$$

(D) est la droite de repère $(A,\overrightarrow{u})$ où $A(0,-1,2)$ et $\overrightarrow{u}(1,2,-3)$. • (Δ) est dirigée par le vecteur $\overrightarrow{u'}(1,3,2)$. $\overrightarrow{u}$ n'est pas colinéaire à $\overrightarrow{u'}$ et donc (D) n'est pas parallèle à (Δ). On en déduit que $p(D)$ est une droite. Plus précisément, $p(D)$ est la droite intersection du plan (P) et du plan (P') contenant (D) et parallèle à (Δ). Déterminons une équation de (P'). Un repère de (P') est $(A,\overrightarrow{u},\overrightarrow{u'})$. Donc

$$M(x,y,z) \in (P') \Leftrightarrow \left|\begin{array}{ccc} x & 1 & 1 \\ y+1 & 2 & 3 \\ z-2 & -3 & 2 \end{array}\right| = 0 \Leftrightarrow 13x-5(y+1)+(z-2)=0 \Leftrightarrow 13x-5y+z=7.$$

Finalement

$$\boxed{p(D) \text{ est la droite dont un système d'équations cartésiennes est } \left\{\begin{array}{l} 13x-5y+z=7 \\ x+3y+2z=6 \end{array}\right.}$$

Correction de l'exercice 10 ▲

• **Repère de (D).**

$$\left\{\begin{array}{l} x-z-a=0 \\ y+3z+1=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=a+z \\ y=-1-3z \end{array}\right. .$$

(D) est la droite passant par $A(a,-1,0)$ et dirigée par $u(1,-3,1)$. • **Repère de (D').**

$$\left\{\begin{array}{l} x+2y+z-2b=0 \\ 3x+3y+2z-7=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 2y+z=2b-x \\ 3y+2z=7-3x \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} y=4b-7+x \\ z=14-6b-3x \end{array}\right.$$

(D') est la droite passant par $A'(0,4b-7,-6b+14)$ et dirigée par $u'(1,1,-3)$. • Les vecteurs u et u' ne sont pas colinéaires et donc (D) et (D') ne sont pas parallèles. • Le plan (P) contenant (D) et parallèle à (D') est le plan de repère (A,u,u'). Déterminons une équation de ce plan.

$$M(x,y,z) \in (P) \Leftrightarrow \left|\begin{array}{ccc} x-a & 1 & 1 \\ y+1 & -3 & 1 \\ z & 1 & -3 \end{array}\right| = 0 \Leftrightarrow 8(x-a)+4(y+1)+4z=0 \Leftrightarrow 2x+y+z=2a-1.$$

• Enfin, (D) et (D') sont sécantes si et seulement si (D') est contenue dans (P). Comme (D') est déjà parallèle à (P), on a

$$(D) \text{ et } (D') \text{ sécantes} \Leftrightarrow A' \in (P) \Leftrightarrow (4b-7)+(-6b+14)=2a-1 \Leftrightarrow b=-a+4.$$

(D) et (D') sont sécantes si et seulement si $b = -a+4$ et dans ce cas, une équation du plan contenant (D) et (D') est $2x+y+z = 2a-1$.

Correction de l'exercice 11 ▲

• (Δ) est parallèle à (D) si et seulement si (Δ) est dirigée par le vecteur $u(3,2,1)$ ou encore (Δ) admet un système d'équations paramétriques de la forme $\left\{\begin{array}{l} x = a+3\lambda \\ y = b+2\lambda \\ z = c+\lambda \end{array}\right.$. Ensuite, (Δ) est sécante à (D_1) si et seulement si on peut choisir le point (a,b,c) sur (D_1) ou encore si et seulement si (Δ) admet un système d'équations paramétriques de la forme $\left\{\begin{array}{l} x = 3\lambda \\ y = b+2\lambda \\ z = 4+\lambda \end{array}\right.$. Enfin,

$$(\Delta) \text{ et } (D_2) \text{ sécantes} \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}/\ b+2\lambda = 4+\lambda+4 = 0 \Leftrightarrow b+2\times(-8) = 0 \Leftrightarrow b = 16.$$

Ceci démontre l'existence et l'unicité de (Δ) : un système d'équations paramétriques de (δ) est $\left\{\begin{array}{l} x = 3\lambda \\ y = 16+2\lambda \\ z = 4+\lambda \end{array}\right.$.

Un système d'équations cartésiennes de (Δ) est $\left\{\begin{array}{l} x = 3(z-4) \\ y = 16+2(z-4) \end{array}\right.$ ou encore

$$\boxed{(\Delta) : \left\{\begin{array}{l} x-3z+12 = 0 \\ y-2z-8 = 0 \end{array}\right. .}$$

Correction de l'exercice 12 ▲

Notons (Δ) une éventuelle droite solution. • (Δ) est sécante à (D_1) et (D_2) si et seulement si (Δ) passe par un point de la forme $(1,0,a)$ et par un point de la forme $(b,1,0)$ ou encore si et seulement si (Δ) passe par un point de la forme $(1,0,a)$ et est dirigée par un vecteur de la forme $(b-1,1,-a)$. Ainsi, (Δ) est sécante à (D_1) et (D_2) si et seulement si (Δ) admet un système d'équations paramétriques de la forme $\left\{\begin{array}{l} x = 1+\lambda(b-1) \\ y = \lambda \\ z = a-\lambda a \end{array}\right.$ ou encore un système d'équations cartésiennes de la forme $\left\{\begin{array}{l} x-(b-1)y = 1 \\ ay+z = a \end{array}\right.$.

• Ensuite, (Δ) et (D_3) sécantes $\Leftrightarrow \exists y \in \mathbb{R}/ \left\{\begin{array}{l} -(b-1)y = 1 \\ ay+1 = a \end{array}\right. \Leftrightarrow b \neq 1$ et $-\frac{a}{b-1}+1 = a \Leftrightarrow b \neq 0$ et $b \neq 1$ et $a = 1-\frac{1}{b}$. En résumé, les droites sécantes à (D_1), (D_2) et (D_3) sont les droites dont un système d'équations cartésiennes est

$$\left\{\begin{array}{l} x-(b-1)y = 1 \\ \left(1-\frac{1}{b}\right)y+z = 1-\frac{1}{b} \end{array}\right., b \notin \{0,1\}.$$

Enfin,

$$\begin{aligned}
(\Delta) \text{ et } (D) \text{ sécantes} &\Leftrightarrow \exists (x,y,z)\in\mathbb{R}^3/\ \left\{\begin{array}{l} x-(b-1)y=1\\ \left(1-\frac{1}{b}\right)y+z=1-\frac{1}{b}\\ x=y=-6z\end{array}\right.\\
&\Leftrightarrow \exists (x,y,z)\in\mathbb{R}^3/\ \left\{\begin{array}{l} -6z+6(b-1)z=1\\ -6\left(1-\frac{1}{b}\right)z+z=1-\frac{1}{b}\\ x=y=-6z\end{array}\right.\\
&\Leftrightarrow b\notin\{0,1,2\} \text{ et } -6\left(1-\frac{1}{b}\right)\frac{1}{6(b-2)}+\frac{1}{6(b-2)}=1-\frac{1}{b}\\
&\Leftrightarrow b\notin\{0,1,2\} \text{ et } -6(b-1)+b=6(b-1)(b-2) \Leftrightarrow b\notin\{0,1,2\} \text{ et } 6b^2-13b+6=0\\
&\Leftrightarrow b\in\left\{\frac{2}{3},\frac{3}{2}\right\}.
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Les droites solutions sont } (\Delta_1) : \left\{\begin{array}{l} 3x+y=3\\ y-2z=1\end{array}\right. \text{ et } (\Delta_2) : \left\{\begin{array}{l} 2x-y=2\\ y+3z=1\end{array}\right. .}$$

Correction de l'exercice 13 ▲

• Déterminons le centre de gravité G.

$$G=\tfrac{1}{3}A+\tfrac{1}{3}B+\tfrac{1}{3}C=\tfrac{1}{3}(2,-2,0)+\tfrac{1}{3}(4,2,6)+\tfrac{1}{3}(-1,-3,0)=\left(\tfrac{5}{3},-1,2\right).$$

• Déterminons le centre du cercle circonscrit O. Une équation du plan (ABC) est $\begin{vmatrix} x-2 & 2 & -3\\ y+2 & 4 & -1\\ z & 6 & 0\end{vmatrix}=0$ ou encore $6(x-2)-18(y+2)+10z=0$ ou enfin $3x-9y+5z=24$. Posons alors $O(a,b,c)$. Ensuite, $OA=OB\Leftrightarrow(a-2)^2+(b+2)^2+c^2=(a-4)^2+(b-2)^2+(c-6)^2\Leftrightarrow 4a+8b+12c=48\Leftrightarrow a+2b+3c=16$ et $OA=OC\Leftrightarrow(a-2)^2+(b+2)^2+c^2=(a+1)^2+(b+3)^2+c^2\Leftrightarrow -6a-2b=2\Leftrightarrow 3a+b=-1$. D'où le système

$$\begin{aligned}
\left\{\begin{array}{l} 3a-9b+5c=24\\ a+2b+3c=16\\ 3a+b=-1\end{array}\right. &\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} b=-3a-1\\ 3a-9(-3a-1)+5c=24\\ a+2(-3a-1)+3c=16\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} b=-3a-1\\ 6a+c=3\\ -5a+3c=18\end{array}\right.\\
&\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} b=-3a-1\\ c=3-6a\\ -5a+3(3-6a)=18\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} a=-\frac{9}{23}\\ b=\frac{4}{23}\\ c=\frac{123}{23}\end{array}\right.
\end{aligned}$$

Donc $O\left(-\frac{9}{23},\frac{4}{23},\frac{123}{23}\right)$. • Déterminons l'orthocentre H. D'après la relation d'EULER,

$$H=O+3\overrightarrow{OG}=\left(-\tfrac{9}{23},\tfrac{4}{23},\tfrac{123}{23}\right)+3\left(-\tfrac{9}{23}-\tfrac{5}{3},\tfrac{4}{23}+1,\tfrac{123}{23}-2\right)=\left(\tfrac{-151}{23},\tfrac{85}{23},\tfrac{354}{23}\right).$$

• Déterminons le centre du cercle inscrit I. On sait que $I=\text{bar}\{A(a),B(b),C(c)\}$ où $a=BC=\sqrt{5^2+5^2+6^2}=\sqrt{86}$, $b=AC=\sqrt{3^2+1^2+0^2}=\sqrt{10}$ et $c=AB=\sqrt{2^2+4^2+6^2}=\sqrt{54}$. Donc

$$\begin{aligned}
I&=\frac{\sqrt{86}}{\sqrt{86}+\sqrt{10}+\sqrt{54}}A+\frac{\sqrt{10}}{\sqrt{86}+\sqrt{10}+\sqrt{54}}B+\frac{\sqrt{54}}{\sqrt{86}+\sqrt{10}+\sqrt{54}}C\\
&=\left(\frac{2\sqrt{86}+4\sqrt{10}-\sqrt{54}}{\sqrt{86}+\sqrt{10}+\sqrt{54}},\frac{-2\sqrt{86}+2\sqrt{10}-3\sqrt{54}}{\sqrt{86}+\sqrt{10}+\sqrt{54}},\frac{6\sqrt{10}}{\sqrt{86}+\sqrt{10}+\sqrt{54}}\right).
\end{aligned}$$

Dans $\mathbb{R}^3$ euclidien rapporté à un repère orthonormé, on donne $A(2,-2,0)$, $B(4,2,6)$ et $C(-1,-3,0)$. Déterminer l'orthocentre, le centre de gravité, les centres des cercles circonscrits et inscrits au triangle (A,B,C).

$$\boxed{G\left(\frac{5}{3},-1,2\right),\ O\left(-\frac{9}{23},\frac{4}{23},\frac{123}{23}\right) \text{ et } H\left(\frac{-151}{23},\frac{85}{23},\frac{354}{23}\right) \text{ puis } I\left(\frac{2\sqrt{86}+4\sqrt{10}-\sqrt{54}}{\sqrt{86}+\sqrt{10}+\sqrt{54}},\frac{-2\sqrt{86}+2\sqrt{10}-3\sqrt{54}}{\sqrt{86}+\sqrt{10}+\sqrt{54}},\frac{6\sqrt{10}}{\sqrt{86}+\sqrt{10}+\sqrt{54}}\right).}$$

Correction de l'exercice 14 ▲

• Déterminons un repère de (D).

$$\begin{cases} x+y+z+1=0 \\ 2x+y+5z=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=-1-z \\ 2x+y=2-5z \end{cases} \Leftrightarrow\Leftrightarrow \begin{cases} x=3-4z \\ y=-4+3z \end{cases}.$$

Un repère de (D) est $(A,\overrightarrow{u})$ où $A(3,-4,0)$ et $\overrightarrow{u}(-4,3,1)$. • Soit $M(x,y,z)$ un point du plan. On sait que

$$d(A,(D)) = \frac{\|\overrightarrow{AM}\wedge\overrightarrow{u}\|}{\|\overrightarrow{u}\|} = \frac{\sqrt{(y-3z+4)^2+(x+4z-3)^2+(3x+4y+7)^2}}{\sqrt{26}}$$

• Notons $\mathscr{C}$ le cylindre de révolution d'axe (D) et de rayon 2.

$$M(x,y,z)\in\mathscr{C} \Leftrightarrow d(A,(D))=2 \Leftrightarrow (y-3z+4)^2+(x+4z-3)^2+(3x+4y+7)^2=104$$

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Une équation cartésienne du cylindre de révolution d'axe } (D) \text{ et de rayon 2 est} \\ (y-3z+4)^2+(x+4z-3)^2+(3x+4y+7)^2=104.\end{array}}$$

Correction de l'exercice 15 ▲

• Déterminons un repère de (D).

$$\begin{cases} x+y+z+1=0 \\ 2x+y+5z=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=-z-1 \\ 2x+y=-5z+2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-4z+3 \\ y=3z-4 \end{cases}$$

Un repère de (D) est $(A,\overrightarrow{u})$ où $A(3,-4,0)$ et $\overrightarrow{u}(-4,3,1)$. • Déterminons un repère de (D').

$$\begin{cases} x+y+z=2 \\ 2x+y-5z=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=-z+2 \\ 2x+y=5z+3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=6z+1 \\ y=-7z+1 \end{cases}$$

Un repère de (D') est $\left(A',\overrightarrow{u'}\right)$ où $A'(1,1,0)$ et $\overrightarrow{u'}(6,-7,1)$. • $\overrightarrow{u}\wedge\overrightarrow{u'} = \begin{pmatrix}-4\\3\\1\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}6\\-7\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}10\\10\\10\end{pmatrix} \neq \overrightarrow{0}$.

Puisque $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{u'}$ ne sont pas colinéaires, les droites (D) et (D') ne sont parallèles. Ceci assure l'unicité de la perpendiculaire commune à (D) et (D'). • On sait que la distance d de (D) à (D') est donnée par

$$d = \frac{\text{abs}\left(\left[\overrightarrow{AA'},\overrightarrow{u},\overrightarrow{u'}\right]\right)}{\|\overrightarrow{u}\wedge\overrightarrow{u'}\|},$$

avec $[\overrightarrow{AA'},\overrightarrow{u},\overrightarrow{u'}] = \begin{vmatrix} -2 & -4 & 6 \\ 5 & 3 & -7 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 10\times(-2)+10\times5 = 30$ et donc $d = \frac{30}{10\sqrt{3}} = \sqrt{3}$.

$$\boxed{d((D),(D')) = \sqrt{3}.}$$

• Un système d'équations de la perpendiculaire commune est $\begin{cases} \left[\overrightarrow{AM},\overrightarrow{u},\overrightarrow{u}\wedge\overrightarrow{u'}\right]=0 \\ \left[\overrightarrow{A'M},\overrightarrow{u'},\overrightarrow{u}\wedge\overrightarrow{u'}\right]=0 \end{cases}$. Or,

$$\tfrac{1}{10}\left[\overrightarrow{AM},\overrightarrow{u},\overrightarrow{u}\wedge\overrightarrow{u'}\right]=\begin{vmatrix} x-3 & -4 & 1\\ y+4 & 3 & 1\\ z & 1 & 1\end{vmatrix}=2(x-3)+5(y+4)-7z=2x+5y-7z+14,$$

et

$$\tfrac{1}{10}\left[\overrightarrow{A'M},\overrightarrow{u'},\overrightarrow{u}\wedge\overrightarrow{u'}\right]=\begin{vmatrix} x-1 & 6 & 1\\ y-1 & -7 & 1\\ z & 1 & 1\end{vmatrix}=-8(x-1)-5(y-1)+13z=-8x-5y+13z+13.$$

Donc

un système d'équations cartésienne de la perpendiculaire commune à (D) et (D') est $\left\{\begin{array}{l} 2x+5y-7z=-14\\ 8x+5y-13z=13\end{array}\right.$.

Correction de l'exercice 16 ▲

$\overrightarrow{u}\in\overrightarrow{P_1}\cap\overrightarrow{P_2}\cap\overrightarrow{P_3}\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l} z-2y=0\\ 2x-3z=0\\ 3y-x=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l} x=3y\\ z=2y\end{array}\right.$. Ainsi, les plans (P_1), (P_2) et (P_3) sont tous trois parallèles à la droite affine (D) d'équations $\left\{\begin{array}{l} x=3y\\ z=2y\end{array}\right.$. Ces plans définissent donc un prisme. Déterminons alors l'aire d'une section droite. Le plan (P) d'équation $3x+y+2z=0$ est perpendiculaire à la droite (D). Son intersection avec les plans (P_1), (P_2) et (P_3) définit donc une section droite du prisme. • Soit $M(x,y,z)$ un point de l'espace.

$$M\in(P_1)\cap(P_2)\cap(P)\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l} z-2y=5\\ 2x-3z=0\\ 3x+y+2z=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l} y=\frac{z-5}{2}\\ x=\frac{3}{2}z\\ \frac{9}{2}z+\frac{z-5}{2}+2z=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l} z=\frac{5}{14}\\ y=-\frac{65}{28}\\ x=\frac{15}{28}\end{array}\right.$$

Notons $A\left(\frac{15}{28},-\frac{65}{28},\frac{5}{14}\right)$. • Soit $M(x,y,z)$ un point de l'espace.

$$M\in(P_1)\cap(P_3)\cap(P)\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l} z-2y=5\\ 3y-x=0\\ 3x+y+2z=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l} z=2y+5\\ x=3y\\ 9y+y+2(2y+5)=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l} y=-\frac{5}{7}\\ x=-\frac{15}{7}\\ z=\frac{25}{7}\end{array}\right.$$

Notons $B\left(-\frac{15}{7},-\frac{5}{7},\frac{25}{7}\right)$.
• Soit $M(x,y,z)$ un point de l'espace.

$$M\in(P_2)\cap(P_3)\cap(P)\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l} 2x-3z=0\\ 3y-x=0\\ 3x+y+2z=0\end{array}\right.\Leftrightarrow x=y=z=0$$

Une section droite est OAB où $A\left(\frac{15}{28},-\frac{65}{28},\frac{5}{14}\right)$ et $B\left(-\frac{15}{7},-\frac{5}{7},\frac{25}{7}\right)$. De plus

$$\begin{aligned}\text{aire de}(OAB)&=\frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{OA}\wedge\overrightarrow{OB}\right\|=\frac{1}{2}\times\frac{5}{28}\times\frac{5}{7}\left\|\begin{pmatrix}3\\-13\\2\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}-3\\-1\\5\end{pmatrix}\right\|=\frac{1}{2}\times\frac{5}{28}\times\frac{5}{7}\sqrt{63^2+21^2+42^2}\\ &=\frac{1}{2}\times\frac{5}{28}\times\frac{5}{7}\times21\sqrt{3^2+1^2+2^2}=\frac{75}{4\sqrt{14}}\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{L'aire d'une section droite est } \frac{75}{4\sqrt{14}}.}$$

Correction de l'exercice 17 ▲

Soient (P) le plan d'équation $x+2y+2z=3$ et (P') le plan d'équation $x+y=0$. L'angle entre (P) et (P') est l'angle entre les vecteurs normaux $\vec{n}(1,2,2)$ et $\vec{n'}(1,1,0)$:

$$\left(\widehat{\vec{n},\vec{n'}}\right) = \arccos\left(\frac{\vec{n}.\vec{n'}}{\|\vec{n}\|\|\vec{n'}\|}\right) = \arccos\left(\frac{3}{3\sqrt{2}}\right) = \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{\pi}{4}.$$

Correction de l'exercice 18 ▲

Soit $M(x,y,z)$ un point de l'espace. On a

$$d(M,(P_1)) = \frac{|4x+4y-7z-1|}{\sqrt{4^2+4^2+7^2}} = \frac{|4x+4y-7z-1|}{9} \text{ et } d(M,(P_2)) = \frac{|8x-4y+z+7|}{\sqrt{8^2+4^2+1^2}} = \frac{|8x-4y+z+7|}{9}.$$

Par suite,

$$\begin{aligned} d(M,(P_1)) = d(M,(P_2) &\Leftrightarrow |4x+4y-7z-1| = |8x-4y+z+7| \Leftrightarrow (4x+4y-7z-1)^2 = (8x-4y+z+7)^2 \\ &\Leftrightarrow ((4x+4y-7z-1)-(8x-4y+z+7))((4x+4y-7z-1)+(8x-4y+z+7)) = 0 \\ &\Leftrightarrow (-4x+8y-8z-8)(12x-6z+6) = 0 \Leftrightarrow x-2y+2z+2 = 0 \text{ ou } 2x-z+1 = 0. \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Les plans bissecteurs de } (P_1) \text{ et } (P_2) \text{ admettent pour équation cartésienne } x-2y+2z+2=0 \text{ et } 2x-z+1=0.}$$

Correction de l'exercice 19 ▲

• Déterminons un repère de (D).

$$\left\{\begin{array}{l} x+y-3z+4=0 \\ 2x-z+1=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} y-3z=-x-4 \\ z=2x+1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} y=5x-1 \\ z=2x+1 \end{array}\right.$$

Un repère de (D) est $(A,\vec{u})$ où $A(0,-1,1)$ et $\vec{u}(1,5,2)$. • Puisque un système d'équations de (D') est $\left\{\begin{array}{l} x=z-1 \\ y=z-1 \end{array}\right.$, un repère de (D') est $\left(A',\vec{u'}\right)$ où $A'(-1,-1,0)$ et $\vec{u'}(1,1,1)$. • $\vec{u}\wedge\vec{u'} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} \neq \vec{0}$. Puisque $\vec{u}$ et $\vec{u'}$ ne sont pas colinéaires, les droites (D) et (D') ne sont parallèles. Ceci assure l'unicité de la perpendiculaire commune à (D) et (D').

• Un système d'équations de la perpendiculaire commune est $\left\{\begin{array}{l} \left[\overrightarrow{AM},\vec{u},\vec{u}\wedge\vec{u'}\right]=0 \\ \left[\overrightarrow{A'M},\vec{u'},\vec{u}\wedge\vec{u'}\right]=0 \end{array}\right.$. Or,

$$\left[\overrightarrow{AM},\vec{u},\vec{u}\wedge\vec{u'}\right] = \begin{vmatrix} x & 1 & 3 \\ y+1 & 5 & 1 \\ z-1 & 2 & -4 \end{vmatrix} = -22x+10(y+1)-14(z-1) = -22x+10y-14z+24,$$

et

$$\left[\overrightarrow{A'M},\vec{u'},\vec{u}\wedge\vec{u'}\right] = \begin{vmatrix} x+1 & 1 & 3 \\ y+1 & 1 & 1 \\ z & 1 & -4 \end{vmatrix} = -5(x+1)+7(y+1)-2z = -5x+7y-2z+2.$$

Donc

$$\boxed{\text{un système d'équations cartésienne de la perpendiculaire commune à } (D) \text{ et } (D') \text{ est } \left\{\begin{array}{l} 11x-5y+7z=12 \\ 5x-7y+2z=2 \end{array}\right. .}$$

Correction de l'exercice 20 ▲

Notons p la projection orthogonale sur (P). Un repère de (D) est $(A,\overrightarrow{u})$ où $A(0,-1,2)$ et $\overrightarrow{u}(1,2,-3)$. Un vecteur normal à (P) est $\overrightarrow{n}(1,3,2)$. $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{n}$ ne sont pas colinéaires et donc $p(D)$ est une droite du plan (P). Plus précisément, $p(D)$ est l'intersection du plan (P) et du plan (P') contenant (D) et perpendiculaire à (P). Un repère de (P') est $(A,\overrightarrow{u},\overrightarrow{n})$. Donc

$$M(x,y,z)\in(P')\Leftrightarrow\left|\begin{array}{ccc} x & 1 & 1 \\ y+1 & 2 & 3 \\ z-2 & -3 & 2 \end{array}\right|=0\Leftrightarrow 13x-5(y+1)+(z-2)=0\Leftrightarrow 13x-5y+z=7.$$

$$\boxed{\text{La projetée orthogonale de } (D) \text{ sur } (P) \text{ est la droite d'équations } \left\{\begin{array}{l} 13x-5y+z=7 \\ x+3y+2z=6 \end{array}\right. .}$$

Correction de l'exercice 21 ▲

Angle entre deux arêtes. Les faces du tétraèdre $ABCD$ sont des triangles équilatéraux et donc l'angle entre deux arêtes est $60°$.
Angle entre une arête et une face. C'est l'angle $\widehat{CDI}$ de la figure ci-dessus.

$$\widehat{CDI}=\arccos\left(\frac{HD}{DI}\right)=\arccos\left(\frac{a/2}{a\sqrt{3}/2}\right)=\arccos\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=54,7\ldots°.$$

Angle entre deux faces. C'est l'angle $\widehat{CID}$ de la figure ci-dessus.

$$\widehat{CID}=\pi-2\widehat{CDI}=2\left(\frac{\pi}{2}-\arccos\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right)=2\arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=70,5\ldots°.$$

Correction de l'exercice 22 ▲

Déterminons un repère de (D).

$$\left\{\begin{array}{l} x-y-z=0 \\ x+2y-z=10 \end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l} x-z=y \\ y+2y=10 \end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l} y=\frac{10}{3} \\ z=x-\frac{10}{3} \end{array}\right. .$$

Un repère de (D) est $(A,\overrightarrow{u})$ où $A\left(\frac{10}{3},\frac{10}{3},0\right)$ et $\overrightarrow{u}(1,0,1)$. On sait alors que

$$d(O,(D))=\frac{\|\overrightarrow{AO}\wedge\overrightarrow{u}\|}{\|\overrightarrow{u}\|}=\frac{1}{\sqrt{2}}\times\frac{10}{3}\left\|\left(\begin{array}{c} 1 \\ 1 \\ 0 \end{array}\right)\wedge\left(\begin{array}{c} 1 \\ 0 \\ 1 \end{array}\right)\right\|=\frac{10}{\sqrt{6}}.$$

$$\boxed{d(O,(D))=\frac{10}{\sqrt{6}}.}$$
