Chapitre 5 : Premières notions de fonction

Contenus	Capacités attendues
• Fonctions réelles définies sur un intervalle ou une réunion d'intervalles réels. • Tracer la courbe représentative d'une fonction. • Croissance, décroissance, monotonie sur un intervalle, tableau de variations. • Signe d'une fonction sur un intervalle, tableau de signes. • Maximum, minimum d'une fonction sur un intervalle.	• Comparer $f(a)$ et $f(b)$ numériquement ou graphiquement. • Résoudre graphiquement ou algébriquement une équation ou une inéquation du type $f(x) = k$, $f(x) < k$, $f(x) \geq k$. • Relier représentation graphique et tableau de variations. • Déterminer graphiquement les extremums d'une fonction sur un intervalle. • Exploiter un logiciel de géométrie dynamique • Modéliser un problème à l'aide des fonctions.

Démonstrations :

☐ Étudier la position relative des courbes d'équation $y = x$, $y = x^2$ et $y = x^3$ pour $x \geq 0$.

I Vocabulaire et applications :

1 Le vocabulaire :

a Notion de fonction réelle :

Définition 1.
Une fonction réelle f définie sur un intervalle I est un objet mathématiques qui à tout $x \in I$ lui associe un . . . . nombre réel noté . . . . . .

Remarque 1. *Le nombre $f(x)$ est obtenu grâce à une transformation de la variable x.*

Exercice 1. *Transformer les protocoles de calculs suivants à l'aide d'une écriture fonctionnelle :*

1. ***Exemple :*** *Pour tout x dans l'intervalle $[0; 4]$ la fonction f le multiplie par 3 et lui soustrait 5 :*
   - *Pour tout $x \in [0; 4], f(x) = 3x - 5$.*
2. *Pour tout x dans l'intervalle $[2; 7]$ la fonction g le multiplie par 1 et lui ajoute 2 :*
   - . . . .
3. *Pour tout x dans l'intervalle $]-3; -1]$ la fonction h le multiplie par 0 et lui ajoute 12 :*
   - . . . .
4. *Pour tout x dans l'intervalle $]0; +\infty[$ la fonction k le met au carré et lui ajoute -1 :*
   - . . . .
5. *Pour tout x dans l'intervalle $]-\infty; +\infty[= \mathbb{R}$ la fonction m le duplique en deux, elle met le premier au cube, puis elle met le second au carré, enfin elle ajouter les deux ensemble :*
   - . . . .
6. *Pour tout x dans l'intervalle $[0; +\infty[= \mathbb{R}^+$ la fonction n lui ajoute 1 et prend la racine carrée de cette somme.*
   - . . . .

b Notion de l'image d'un nombre par une fonction :

Définition 2.

Soit f une fonction définie sur un intervalle I.

Pour tout $a \in I$ on note $f(a)$ . . . .

Exemple 1.

1. *Si pour tout $x \in \mathbb{R}, f(x) = 3x - 5$. Alors l'image de 4 par la fonction f est : $f(4) =$* . . . .
2. *Si pour tout $x \in \mathbb{R}, f(x) = x^2 - 1$. Alors l'image de 2 par la fonction f est :* . . . . . . $=$ . . . .
3. *Si pour tout $x \in \mathbb{R}, f(x) = x^3$. Alors l'image de -1 par la fonction f est :* . . . . . . $=$ . . . .
4. *Si pour tout $x \in \mathbb{R}^+, f(x) = \sqrt{x}$. Alors l'image de 49 par la fonction f est :* . . . . . . $=$ . . . .

c Notion d'antécédent d'un nombre par une fonction :

Définition 3.

Soit f une fonction définie sur un intervalle I.

Pour tout $y \in \mathbb{R}$ nous dirons que y admet un antécédent par la fonction f ***si il existe*** . . . .

tel que : . . . .

Exemple 2.

1. *Si pour tout $x \in \mathbb{R}, f(x) = x + 5$. Alors le nombre 10 admet un antécédent par la fonction f car :*

   . . . .

   . . . .
2. *Si pour tout $x \in \mathbb{R}, f(x) = x - 3$. Alors le nombre -3 admet un antécédent par la fonction f car :*

   . . . .

   . . . .
3. *Si pour tout $x \in \mathbb{R}, f(x) = 2x$. Alors le nombre 8 admet un antécédent par la fonction f car :*

   . . . .

   . . . .
4. *Si pour tout $x \in \mathbb{R}, f(x) = 5x + 1$. Alors le nombre 6 admet un antécédent par la fonction f car :*

   . . . .

   . . . .
5. *Si pour tout $x \in \mathbb{R}, f(x) = 7x + 9$. Alors le nombre 12 admet un antécédent par la fonction f car :*

   . . . .

   . . . .

Remarque 2. *Lorsque nous cherchons l'antécédent de $y \in \mathbb{R}$ par la fonction f il faudra résoudre l'équation :*

$$f(x) = y$$

Remarque 3.

- *Pour certains nombres réels $y \in \mathbb{R}$, il* ***n'existe pas d'antécédent*** *de y par une fonction f donnée.*
- *Pour certains nombres réels $y \in \mathbb{R}$,* ***il existe plusieurs antécédents*** *de y par une fonction f donnée.*

Exemple 3.

1. *Si pour tout* $x \in \mathbb{R},\ f(x) = x^2$.

   ☐ *Le nombre* -5 *admet-il un antécédent par la fonction* f *?*

   ....

   ....

   ☐ *Donner les antécédents du nombre* 25 *par la fonction* f.

   ....

   ....

2. *Si pour tout* $x \in \mathbb{R},\ g(x) = x^2 - 2$.

   ☐ *Le nombre* -3 *admet-il un antécédent par la fonction* g *?*

   ....

   ....

   ☐ *Donner les antécédents du nombre* 7 *par la fonction* g.

   ....

   ....

d Exercices d'applications :

Exercice 2. *Pour tout* $x \in \mathbb{R}$ *on défini* $f(x) = (x-5)(x+5)$ *et* $g(x) = (x+3)^2$

1. *Donner l'image de* $\dfrac{4}{5}$ *par la fonction* f.

   ....

   ....

   ....

2. *Donner l'image de* $\sqrt{3}$ *par la fonction* g.

   ....

   ....

   ....

3. *Donner les antécédents de* 0 *par la fonction* f.

   ....

   ....

   ....

   ....

4. *Donner les antécédents de* 36 *par la fonction* g.

   ....

   ....

   ....

   ....

Exercice 36 p.95 - Exercice 45 p.96 - Exercice 36 p.95

II Courbe représentative et lecture graphique :

1 Courbe représentative d'une fonction :

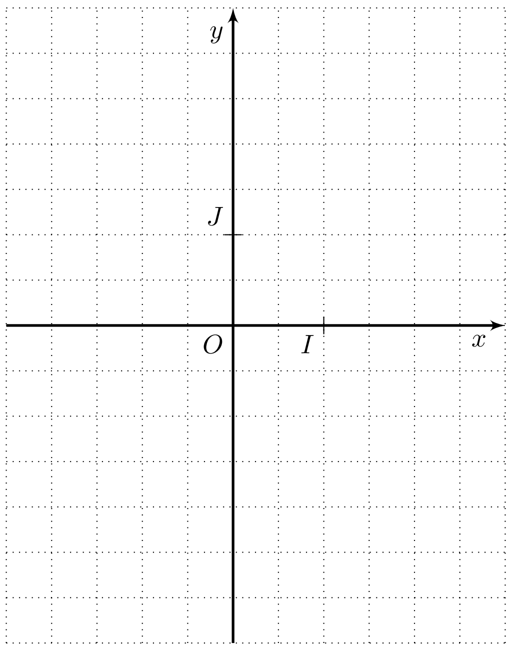
Définition 4.
Soient f une fonction définie sur un intervalle D et (O, I, J) un repère du plan. On appelle ....
.... de la fonction f sur l'intervalle D l'ensemble des points du plan $\mathcal{C}_f$ tels que :

$$\mathcal{C}_f := \{.................................\}$$

Remarque 4. *Pour tracer la courbe représentative de la fonction f sur l'intervalle D nous allons faire un tableau de valeurs en piochant des valeurs de x dans l'intervalle D et en calculant $f(x)$. Plus il y aura de valeurs plus la courbe sera précise.*

Exercice 3. *On nous donne ci-dessous un tableau de valeurs pour la fonction f définie sur l'intervalle $[-2; 2.5]$, les images $f(x)$ on déjà été calculées dans ce tableau. Tracer avec les données de ce tableau deux approximations possibles de $\mathcal{C}_f$.*

$x \in [-2; 2.5]$	-2	-1.5	-1	-0.5	0	0.5	1	1.5	2	2.5
$f(x)$	-2	-2.5	-3	-2.25	-0.5	0.5	2	1.5	2.5	3



Remarque 5. *La courbe représentative $\mathcal{C}_f$ d'une fonction f devient précise plus on choisit un nombre important de x sur l'axe des abscisses pour ensuite calculer le nombre $f(x)$ et obtenir un point de $\mathcal{C}_f$.*

Exercice 4. *En vous inspirant de l'exercice 3 qui précède, tracer sur votre cahier d'exercices la courbe représentative de la fonction g sur l'intervalle $[-2; 2.5]$ sachant que :*

$$\textit{Pour tout } x \in \mathbb{R},\ g(x) = x^2 - x$$

2 Lecture graphique avec la courbe représentative d'une fonction :

a Lire les images et les antécédents :

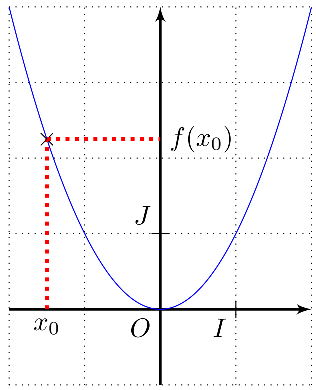
Trouver l'image d'un nombre x_0 par la fonction f :

I/ Trouver le nombre x_0 sur l'axe des abscisses.

II/ Monter ou bien descendre jusqu'à toucher la courbe $\mathcal{C}_f$.

III/ Se déplacer horizontalement en restant à la même hauteur pour retrouver l'axe des ordonnées.

IV/ Lire le nombre associé $f(x_0)$ qui est l'image de x_0 par la fonction f.



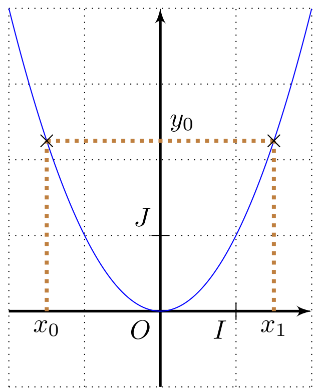
Trouver le(s) antécédent(s) de y_0 par f si il(s) existe(nt) :

I/ Trouver le nombre y_0 sur l'axe des ordonnées.

II/ Se déplacer horizontalement en restant à la même hauteur pour trouver si il existe un ou des points de $\mathcal{C}_f$.

III/ Partir des points de $\mathcal{C}_f$ trouvés puis monter ou bien descendre jusqu'à toucher l'axe des abscisses.

IV/ Lire les valeurs x_0 et x_1 qui sont les antécédents de y_0 par la fonction f.



Exercice 5.

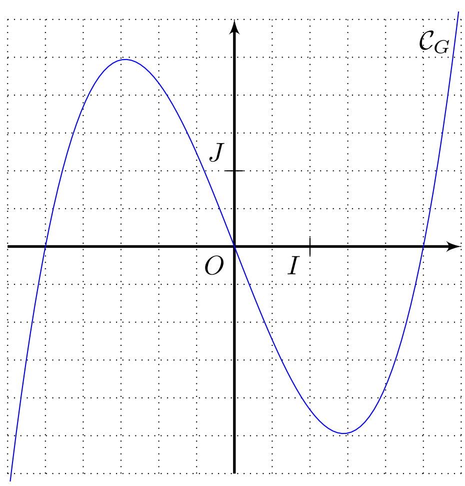
On considère une fonction G définie sur $\mathbb{R}$ dont on donne une représentation graphique ci-dessous :

1. *Combien d'antécédents ont les nombres suivants :$\{-1; 0; 2; 2.8\}$.*
2. *Donner l'image de -1.5 et l'image de 2 par la fonction G.*
3. *Donner un antécédent de -1 qui soit strictement négatif.*
4. *Comparer les nombres suivants :*

☐ $G(-1)$ ... $G(1)$

☐ $G(1)$ ... $G(1.5)$

☐ $G(0)$ ... $G(-2.5)$



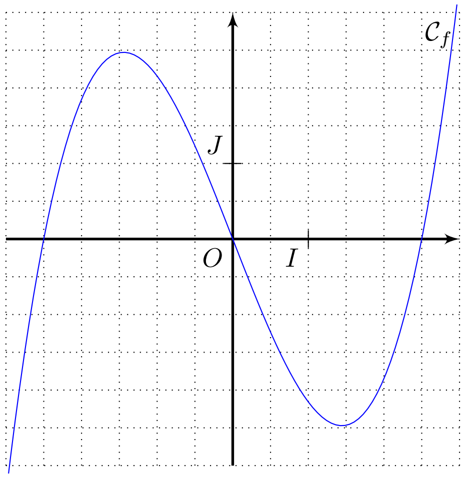
b Signe d'une fonction sur un intervalle et lecture graphique, tableau de signes :

Définition 5. *Soient f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ et I un intervalle réel.*

— *La fonction f est* .... *sur I si* ....

— *La fonction f est* .... *sur I si* ....

Exemple 4.



....

....

....

....

....

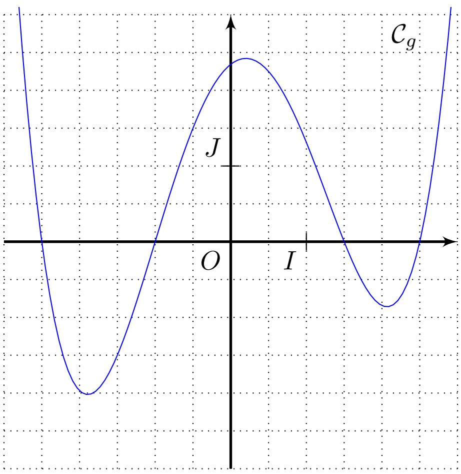
Exercice 6. *Par lecture graphique donner le signe de la fonction g.*

....

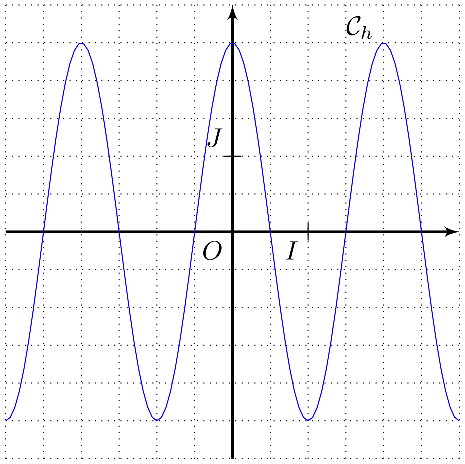
....

....

....



Exercice 7. *Par lecture graphique donner le signe de la fonction h.*



....

....

....

....

c Résolution d'équations et d'inéquations :

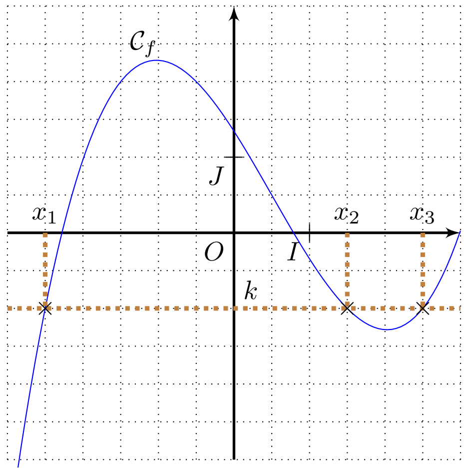
Résoudre avec un graphique l'équation $f(x) = k$:

I/ Trouver le nombre k sur l'axe des ordonnées.

II/ Se déplacer horizontalement en restant à la même hauteur pour trouver si il existe un ou des points de $\mathcal{C}_f$.

III/ Partir des points de $\mathcal{C}_f$ trouvés puis monter ou bien descendre jusqu'à toucher l'axe des abscisses.

IV/ Lire les valeurs x_1 , x_2 et x_3 qui sont solutions de l'équation de $f(x) = k$.



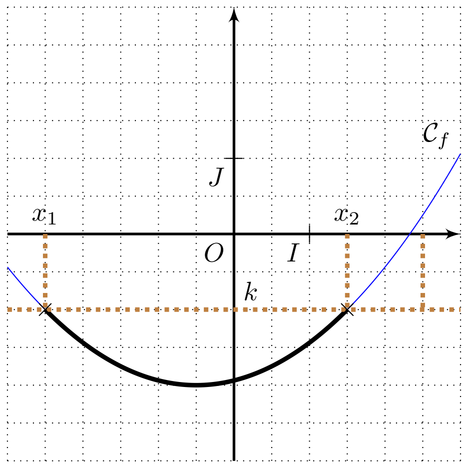
Résoudre avec un graphique l'inéquation $f(x) \leq k$:

I/ Trouver le nombre k sur l'axe des ordonnées.

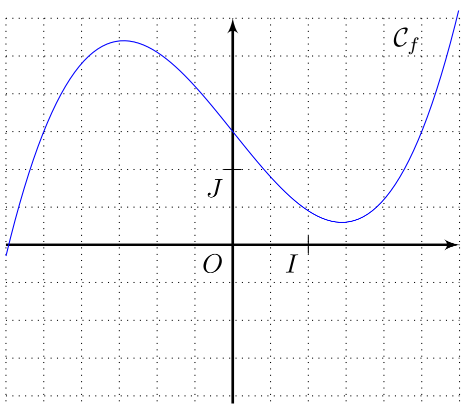
II/ Se déplacer horizontalement en restant à la même hauteur pour trouver si il existe un ou des points de $\mathcal{C}_f$.

III/ Colorier la partie de $\mathcal{C}_f$ qui est en dessous de la droite d'équation $y = k$.

IV/ Lire les valeurs x_1 et x_2 et donner la réponse sous forme d'intervalle.



Exemple 5.



1. *Résoudre graphiquement l'équation $f(x) = 1.5$:*

. . . .

. . . .

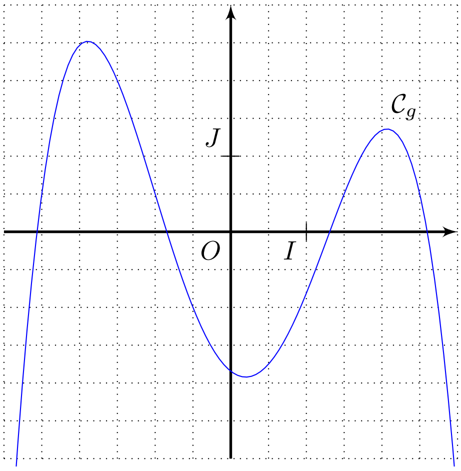
2. *Résoudre graphiquement l'inéquation $f(x) \leq 1.5$:*

. . . .

. . . .

Exercice 8.

Résoudre graphiquement l'équation $g(x) = 0.5$:



. . . .

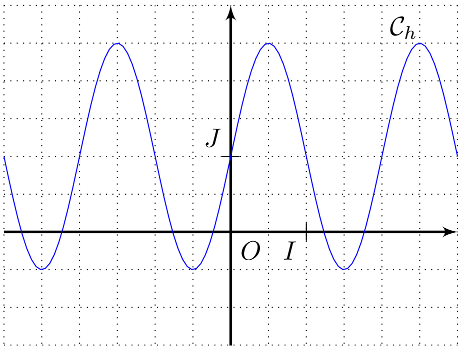
. . . .

Résoudre graphiquement l'inéquation $g(x) < 0.5$:

. . . .

. . . .

Exercice 9.



Résoudre graphiquement l'équation $h(x) = 1$:

. . . .

. . . .

Résoudre graphiquement l'inéquation $h(x) \geq 1$:

. . . .

. . . .

III Variations et extremums :

1 Variation d'une fonction sur un intervalle :

Définition 6. *Soient f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ et I un intervalle réel.*

— *La fonction f est* . . . . *sur I si* . . . .
. . . .
. . . .

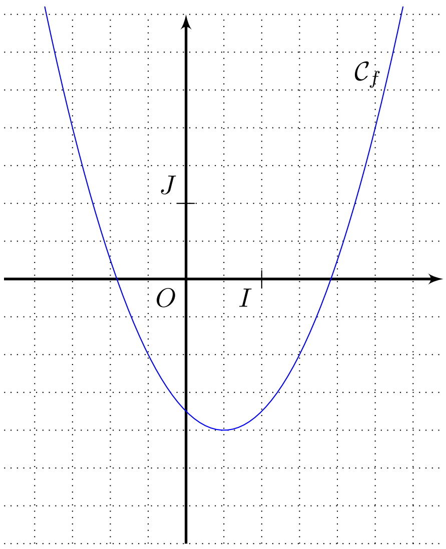
— *La fonction f est* . . . . *sur I si* . . . .
. . . .
. . . .

Remarque 6.

☐ *Un fonction est croissante sur un intervalle I si elle garde le même ordre au départ qu'à l'arrivée.*

☐ *Un fonction est décroissante sur un intervalle I si elle change l'ordre entre le départ et l'arrivée.*

Exemple 6.



....

....

....

....

....

....

Exemple 7.

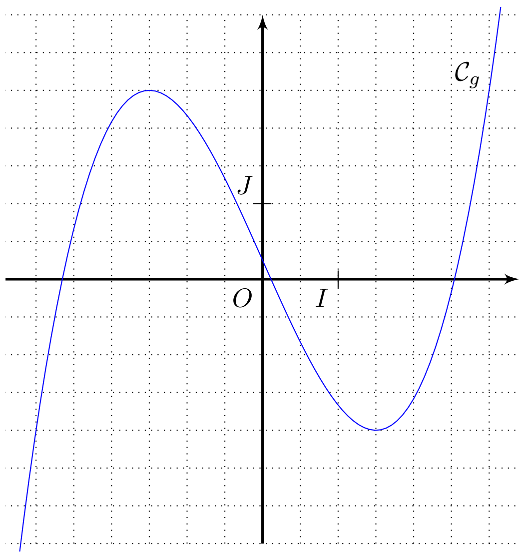
....

....

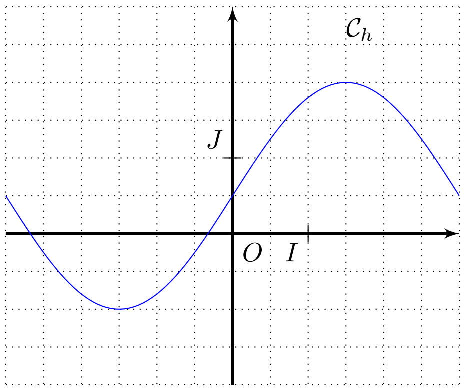
....

....

....



Exercice 10.



À l'aide de la courbe représentative de la fonction h donner le tableau de variation de la fonction h.

....

....

....

....

Exercices 20 ,22 et 23 p.185

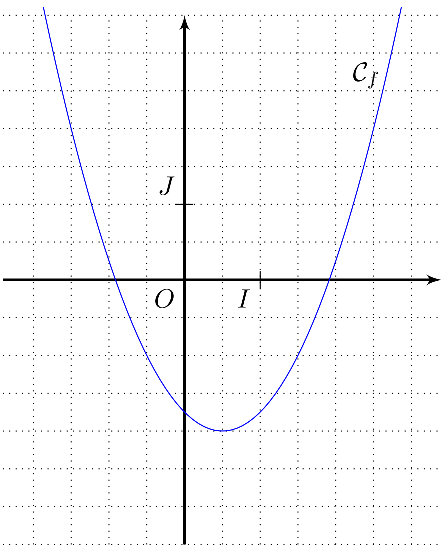
2 Extremums d'une fonction sur un intervalle :

Définition 7. *Soient f une fonction définie sur $\mathbb{R}$, I un intervalle réel et $x_1, x_2 \in I$.*

— *La fonction f admet un* .... *en x_1 sur I si* ....
....

— *La fonction f admet un* .... *en x_2 sur I si* ....
....

Exemple 8.



....

....

....

....

....

....

Exemple 9.

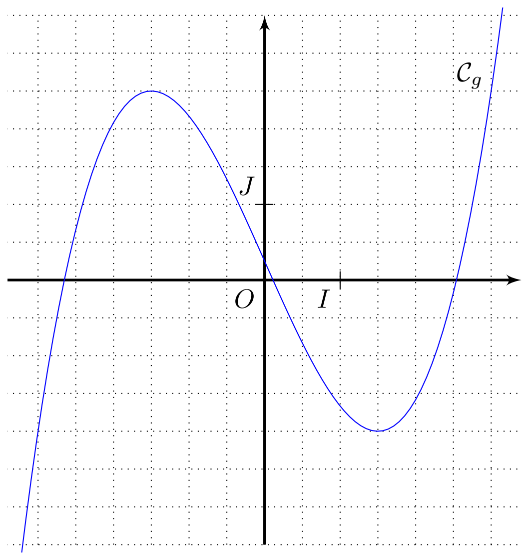
....

....

....

....

....



Exercice 40 p.188 - Exercice 33 et 36 p.187