COLLE 4 = ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES ET SUITES NUMÉRIQUES

Connaître son cours :

1. Montrer que la somme et le produit terme à terme de deux suites bornées sont bornées.
2. Montrer que si une suite converge, alors sa limite est unique.
3. Soit $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ deux suites convergentes. Alors, la suite $(u_n \times v_n)_n$ est convergente et sa limite est $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n \times \lim\limits_{n\to+\infty} v_n$.

Équations différentielles :

Exercice 1.

On considère

$$y'' - 4y' + 4y = d(x)$$

1. Résoudre l'équation homogène, puis trouver une solution particulière lorsque $d(x) = e^{-2x}$, puis $d(x) = e^{2x}$.
2. Donner la forme générale des solutions quand $d(x) = \frac{1}{2}\operatorname{ch}(2x)$.

Exercice 2.
Prouver que toute solution de l'équation différentielle $y' + e^{x^2}y = 0$ admet une limite nulle en $+\infty$.

Exercice 3.
Déterminer les fonctions $y, z : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivables et qui vérifient le système suivant :

$$\begin{cases} y' - y &= z \\ z' + z &= 3y \end{cases}$$

Suites numériques :

Exercice 4.

Posons $u_2 = 1 - \frac{1}{2^2}$ et pour tout entier $n \geq 3$,

$$u_n = \left(1 - \frac{1}{2^2}\right)\left(1 - \frac{1}{3^2}\right)\cdots\left(1 - \frac{1}{n^2}\right).$$

Calculer u_n et en déduire sa limite.

Exercice 5.
Soit u une suite complexe et v la suite définie par $v_n = |u_n|$. On suppose que la suite $(\sqrt[n]{v_n})$ converge vers un réel positif l. Montrer que si $0 \leq \ell < 1$, la suite (u_n) converge vers 0 et si $\ell > 1$, la suite (v_n) tend vers $+\infty$. Montrer que si $\ell = 1$, tout est possible.

Exercice 6.
On considère la suite

$$u_n = \left(2\sin\left(\frac{1}{n}\right) + \frac{3}{4}\cos(n)\right)^n$$

1. Justifier qu'il existe $l \in \,]0,1[$ et $N \in \mathbb{N}$ tels pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \geq N \;\Rightarrow |u_n| \leq l$
2. Quelle est la nature de la suite u_n ?
