PRODUIT SCALAIRE

Exercice 1 - Produits scalaires sur $\mathbb{R}^2$

Les applications suivantes définissent-elles un produit scalaire sur $\mathbb{R}^2$?

1. $\varphi_1\big((x_1,x_2),(y_1,y_2)\big)=\sqrt{x_1^2+y_1^2+x_2^2+y_2^2}$;
2. $\varphi_2\big((x_1,x_2),(y_1,y_2)\big)=4x_1y_1-x_2y_2$;
3. $\varphi_3\big((x_1,x_2),(y_1,y_2)\big)=x_1y_1-3x_1y_2-3x_2y_1+10x_2y_2$.

Exercice 2 - Produit scalaire et matrices

Pour $A,B\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on définit

$$\langle A,B\rangle=\mathrm{tr}(A^TB).$$

1. Démontrer que cette formule définit un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
2. En déduire que, pour tous $A,B\in\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, on a

$$\big(\mathrm{tr}(AB)\big)^2\leq \mathrm{tr}(A^2)\mathrm{tr}(B^2).$$

Exercice 3 - Un produit scalaire sur les polynômes

Soit $n\geq 1$ et soit $a_0,\dots,a_n$ des réels distincts deux à deux. Montrer que l'application $\varphi:\mathbb{R}_n[X]\times\mathbb{R}_n[X]\to\mathbb{R}$ définie par $\varphi(P,Q)=\sum_{i=0}^n P(a_i)Q(a_i)$ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$.

Exercice 4 - Des exemples de produit scalaire

Démontrer que les formules suivantes définissent des produits scalaires sur l'espace vectoriel associé :

1. $\langle f,g\rangle=f(0)g(0)+\int_0^1 f'(t)g'(t)dt$ sur $E=\mathcal{C}^1([0,1],\mathbb{R})$;
2. $\langle f,g\rangle=\int_a^b f(t)g(t)w(t)dt$ sur $E=\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$ où $w\in E$ satisfait $w>0$ sur $]a,b[$.

Exercice 5 - Une première application de l'inégalité de Cauchy-Schwarz

Démontrer que pour tous $x_1,\dots,x_n\in\mathbb{R}$,

$$\left(\sum_{k=1}^n \frac{x_k}{2^k}\right)^2\leq\frac{1}{3}\sum_{k=1}^n x_k^2.$$

Exercice 6 - Quand une inégalité en implique une autre...

Soit x,y,z trois réels tels que $2x^2+y^2+5z^2\leq 1$. Démontrer que $(x+y+z)^2\leq\frac{17}{10}$.

Cette feuille d'exercices a été conçue à l'aide du site https://www.bibmath.net