(SOUS-)ESPACES VECTORIELS ET COMBINAISONS LINÉAIRES

1
1) Dans $\mathbb{R}^3$, à quelle condition nécessaire et suffisante sur $a \in \mathbb{R}$ le vecteur $(1,-a,1)$ est-il combinaison linéaire de $(1,1,1)$ et $(a,0,2)$?
2) Dans $\mathbb{R}^\mathbb{R}$, $x \longmapsto \cos^2 x$ est-elle combinaison linéaire de $x \longmapsto 1$ et $x \longmapsto \cos(2x)$?
3) Dans $\mathbb{R}^\mathbb{R}$, $x \longmapsto \sin(2x)$ est-elle combinaison linéaire des fonctions sinus et cosinus ?
4) Montrer que pour tout $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$, A^2 est combinaison linéaire de I_2 et A.

---

2 Les ensembles suivants sont-ils des sous-espaces vectoriels ?
1) $\left\{(x,y) \in \mathbb{R}_+^2 \mid \ x=y\right\}$.
2) $\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \ 2x-5y-1=0\right\}$.
3) $\left\{(x,2x,3x) \mid \ x \in \mathbb{R}\right\}$.
4) $\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \ x^3+x+y^2=0\right\}$.
5) $\left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid \ x=y \quad \text{et} \quad 3y-2z=0\right\}$.
6) $\left\{P \in \mathbb{R}[X] \mid \ \deg(P) \geqslant 2\right\}$.
7) $\left\{P \in \mathbb{R}[X] \mid \ P\left(X^2\right) = P' + X^4 P\right\}$.
8) $\left\{f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R}) \mid \ f(0)+f(1)=f'(0)\right\}$.

---

3 Les ensembles suivants sont-ils des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^\mathbb{R}$?
1) L'ensemble des fonctions 1-périodiques.
2) L'ensemble des fonctions croissantes.
3) L'ensemble des fonctions monotones.
4) L'ensemble des fonctions qui sont la somme d'une fonction croissante et d'une fonction décroissante.
5) L'ensemble des fonctions majorées.
6) L'ensemble des fonctions bornées.

---

4 Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
1) Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E. Montrer que $F \cup G$ est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si $F \subset G$ ou $G \subset F$.
2) Soit $(F_i)_{i\in I}$ une suite *filtrante* de sous-espaces vectoriels de E, i.e. pour laquelle :
$$\forall i,j \in I, \quad \exists k \in I, \quad F_i \cup F_j \subset F_k.$$
Montrer que $\bigcup_{i\in I} F_i$ est un sous-espace vectoriel de E.

---

5 Montrer que les ensembles suivants sont des sous-espaces affines :
1) $\left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x-y+z=2 \ \text{et} \ 2x+y+2z=1\right\}$.
2) $\left\{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \mid \ \operatorname{tr}(M)=1\right\}$.
3) $\left\{f \in \mathscr{C}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \mid \ f(0)=2 \quad \text{et} \quad f(1)=-3\right\}$.
4) $\left\{y \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R}) \mid \ \forall x \in \mathbb{R}, \ e^{x^2} y'(x)+y(x)=1\right\}$.

---

6 Montrer par des opérations sur les Vect l'égalité :
$$\mathbb{R}_2[X] = \operatorname{Vect}\left((X-1)^2, (X-1)(X+1), (X+1)^2\right).$$

---

7 Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$:
$$\operatorname{Vect}\left(x \longmapsto \cos(kx)\right)_{0\leqslant k\leqslant n} = \operatorname{Vect}\left(x \longmapsto \cos^k x\right)_{0\leqslant k\leqslant n}.$$

FAMILLES LIBRES ET BASES

8 Montrer que les fonctions $x \longmapsto \sin x$, $x \longmapsto \cos x$, $x \longmapsto x\sin x$ et $x \longmapsto x\cos x$ sont linéairement indépendantes dans $\mathbb{R}^\mathbb{R}$.

---

9 Montrer que $\left(x \longmapsto e^x, x \longmapsto e^{2x}, x \longmapsto e^{x^2}\right)$ est libre dans $\mathbb{R}^\mathbb{R}$:
1) par une technique d'évaluation.
2) par une étude asymptotique en $+\infty$.

---

10 Montrer de deux manières différentes que les suites $(1)_{n\in\mathbb{N}}$, $\left(n^2\right)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(2^n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont linéairement indépendantes dans $\mathbb{R}^\mathbb{N}$.

---

11 Montrer que les suites $\left(n^k\right)_{n\in\mathbb{N}}$, k décrivant $\mathbb{N}$, sont linéairement indépendantes dans $\mathbb{R}^\mathbb{N}$.

---

12 On pose $P_0 = 1$ et pour tout $k \in \mathbb{N}^*$:
$$P_k = X(X-1)(X-2)\ldots(X-k+1).$$
Montrer de deux manières différentes que la famille $(P_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est libre.

---

13 Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $u_1,\ldots,u_n \in E$. Pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, on pose $v_k = u_1+\ldots+u_k$.
1) Montrer que la famille $(u_1,\ldots,u_n)$ est libre si et seulement si la famille $(v_1,\ldots,v_n)$ l'est.
2) Montrer que $(u_1,\ldots,u_n)$ engendre E si et seulement si $(v_1,\ldots,v_n)$ engendre E.

---

14 Montrer que la famille $\left(x \longmapsto |x-\lambda|\right)_{\lambda\in\mathbb{R}}$ de $\mathscr{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ est libre.

---

15 Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice *à diagonale strictement dominante*, i.e. pour laquelle pour tout $i \in [\![1,n]\!]$:
$$\sum_{\substack{1\leqslant j\leqslant n\\ j\neq i}} |a_{ij}| < |a_{ii}|.$$
Soit $X \in \mathbb{C}^n$ une colonne pour laquelle $AX = 0$. Montrer que $X = 0$ en exploitant le réel $\max\left\{|x_1|,\ldots,|x_n|\right\}$. Qu'en déduit-on sur A ?

16 Soit $n \in \mathbb{N}$. On veut montrer que la famille $\left((X+k)^n\right)_{0\leqslant k\leqslant n}$ de $\mathbb{R}[X]$ est libre. Soient $\lambda_0,\dots,\lambda_n \in \mathbb{R}$. On suppose que $\displaystyle\sum_{k=0}^n \lambda_k (X+k)^n = 0$.

1) Montrer que pour tout $p \in [\![0,n]\!]$:
 a) $\displaystyle\sum_{k=0}^n \lambda_k (X+k)^p = 0$. b) $\displaystyle\sum_{k=0}^n \lambda_k k^p = 0$.
2) Conclure en utilisant des polynômes de Lagrange.

---

17 Montrer que la famille $\left(x \longmapsto e^{\lambda x}\right)_{\lambda\in\mathbb{R}}$ de $\mathscr{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ est libre :

1) en s'intéressant au comportement asymptotique des exponentielles.
2) en utilisant des polynômes de Lagrange.

---

18 Montrer que la famille $\left(x \longmapsto \sin(\lambda x)\right)_{\lambda\in\mathbb{R}_+^*}$ de $\mathscr{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ est libre en utilisant des polynômes de Lagrange.

19

1) Bien comprendre l'affirmation : « $\mathbb{R}$ est un $\mathbb{Q}$-espace vectoriel. »
2) a) Montrer que la famille $(\ln p)_{p\in\mathbb{P}}$ est $\mathbb{Q}$-*libre*, i.e. libre dans le $\mathbb{Q}$-espace vectoriel $\mathbb{R}$.
 b) En déduire que $\ln p$ est rationnel pour au plus un nombre premier p.
 On peut montrer que $\ln r$ est irrationnel pour tout $r \in \mathbb{Q}_+^* \setminus \{1\}$, mais c'est autrement plus compliqué.
3) a) Montrer que la famille $\left(1,\sqrt{p}\right)$ est $\mathbb{Q}$-libre pour tout $p \in \mathbb{P}$.
 b) En déduire que la famille $\left(1,\sqrt{2},\sqrt{3},\sqrt{6}\right)$ est $\mathbb{Q}$-libre.

Bases et dimension

20 Énoncer proprement en termes linéaires le résultat du cours sur les suites récurrentes linéaires homogènes d'ordre 2 (sous-espace vectoriel, base, dimension…).

21

1) Montrer que $\big((-1,1,1),(1,-1,1),(1,1,-1)\big)$ est une base de $\mathbb{R}^3$ et déterminer les coordonnées du vecteur $(8,4,2)$ dans cette base.
2) Montrer que la famille :
$$\left(X^3+X^2-X-1\ ,\ X^3-X^2+1\ ,\ X^3-X^2+X\ ,\ X^3+2X+1\right)$$
est une base de $\mathbb{R}_3[X]$ et déterminer les coordonnées de X^2 dans cette base.

---

22 Pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, on pose :
$$u_k = \big(k,k-1,\dots,2,1,0,\dots,0\big) \in \mathbb{R}^n.$$
Montrer que la famille $(u_1,\dots,u_n)$ est une base de $\mathbb{R}^n$.

---

23 Montrer pour tout $n \in \mathbb{N}$ que la famille :
$$\left(1+X, X+X^2, \dots, X^{n-1}+X^n, X^n\right)$$
est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

---

24 Soient $x_1,\dots,x_n \in \mathbb{K}$. On appelle *matrice de Vandermonde de* $x_1,\dots,x_n$ la matrice :
$$V = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{n-1} \end{pmatrix}.$$
Montrer que V est inversible si et seulement si $x_1,\dots,x_n$ sont distincts.

---

25 Montrer que les ensembles suivants sont des sous-espaces vectoriels et déterminer une base de chacun d'eux :

1) $\left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid\ x+2y+z=0\right\}$.
2) $\left\{P \in \mathbb{R}_3[X] \mid\ P(X^2) = (X^3+1)P\right\}$.
3) $\left\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid\ x+y=z+t \text{ et } 2x-y-z+t=0\right\}$.
4) $\left\{P \in \mathbb{R}_4[X] \mid\ P(0)=P(1)=P(2)\right\}$.

---

26 On note A la matrice $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 7 & 1 \end{pmatrix}$ et $\mathscr{C}$ l'ensemble des matrices de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ qui commutent à A. Montrer que $\mathscr{C}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ et en déterminer une base.

---

27 Montrer que l'ensemble des matrices de trace nulle de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est en un sous-espace vectoriel et déterminer sa dimension.

---

28 Montrer que l'ensemble des fonctions :
$$x \longmapsto A\sin(x+\varphi), \qquad A \text{ et } \varphi \text{ décrivant } \mathbb{R},$$
est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et déterminer sa dimension.

---

29 Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

1) Déterminer un entier $d \in \mathbb{N}$ pour lequel la famille $\left(I_n, M, M^2, \dots, M^d\right)$ est liée.
2) En déduire que M possède un polynôme annulateur non nul à coefficients dans $\mathbb{K}$.

---

30 Soient $A,B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ deux matrices pour lesquelles $AB = A^2+A+I_n$. Montrer que $AB=BA$.

---

31 Soient $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$, $B \in \mathcal{M}_q(\mathbb{K})$ et $X \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$. Montrer que la matrice par blocs $\begin{pmatrix} A & X \\ 0_{q,p} & B \end{pmatrix}$ est inversible si et seulement si A et B le sont. Que vaut son inverse dans ce cas ?

---

32 Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$. Montrer que les trois fonctions $x \longmapsto \sin(x+a)$, $x \longmapsto \sin(x+b)$ et $x \longmapsto \sin(x+c)$ sont linéairement dépendantes dans $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

---

33 Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $x_1, \ldots, x_n \in E$ et $y_1, \ldots, y_n \in E$. On suppose que les vecteurs $x_1+y_1, \ldots, x_n+y_n$ sont linéairement indépendants. Montrer que $\mathrm{rg}(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n) \geqslant n$.

34

1) Montrer que la famille :
$$\left(X^3+X+1, X^3-2X+2, X^2+3X\right)$$
est libre et la compléter en une base de $\mathbb{R}_4[X]$.
2) Montrer que la famille $\big((8,4,1,2),(1,3,0,5)\big)$ est libre et la compléter en une base de $\mathbb{R}^4$.
3) Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 3 et (e_1, e_2, e_3) une base de E. On pose $\varepsilon_1 = e_1+2e_2+e_3$ et $\varepsilon_2 = e_2 - e_3$. Montrer que $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ est libre et la compléter en une base de E.

---

35 Déterminer la dimension de :
$$\mathrm{Vect}\big((1,2,1,0),(4,-2,1,1),(7,2,4,2),(1,0,1,1)\big).$$

Matrice d'une famille de vecteurs dans une base

36 Les familles suivantes sont-elles des bases ?
1) $\big((2,0,\alpha),(2,\alpha,2),(\alpha,0,2)\big)$ $\quad(\alpha \in \mathbb{R})$.
2) $\big((1,0,2,1),(0,1,1,2),(2,0,1,1),(2,1,0,1)\big)$.

---

37 Soient $P_0, \ldots, P_n \in \mathbb{K}[X]$ des polynômes pour lesquels $\deg(P_i) = i$ pour tout $i \in [\![0,n]\!]$. Montrer par une technique matricielle que la famille $(P_i)_{0\leqslant i\leqslant n}$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$. Comment montrer ce résultat sans matrices ?

---

38 Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $(u_1, \ldots, u_{2n+1})$ une famille libre de E. Montrer que la famille :
$$\left(u_1+u_2, u_2+u_3, \ldots, u_{2n}+u_{2n+1}, u_{2n+1}+u_1\right)$$
est également libre par une technique matricielle.

Somme de deux sous-espaces vectoriels

39 Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et F et G deux sous-espaces vectoriels de E pour lesquels $\dim F + \dim G > \dim E$. Montrer que F et G ont au moins un vecteur non nul en commun.

---

40 Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et F et G deux sous-espaces vectoriels de E. Montrer que $F \cup G = F+G$ si et seulement si $F \subset G$ ou $G \subset F$.

---

41 On pose : $a = (0,0,1,0)$, $b = (1,1,0,-1)$, $u = (1,0,1,0)$, $v = (0,1,-1,0)$ et $w = (1,1,1,1)$, ainsi que : $F = \mathrm{Vect}(a,b)$ et $G = \mathrm{Vect}(u,v,w)$. Déterminer les dimensions de F, G, $F+G$ et $F \cap G$.

---

42 On pose $F = \mathrm{Vect}\big((1,0,0,1),(0,1,1,0)\big)$ et :
$G = \Big\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \;\Big|\; x+y+z=0 \quad\text{et}\quad y-z+t=0\Big\}$.
Montrer que F et G sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de $\mathbb{R}^4$.

---

43 Montrer que l'ensemble $\mathscr{P}$ des fonctions paires de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et l'ensemble $\mathscr{I}$ des fonctions impaires de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

---

44 Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. À quelle condition nécessaire et suffisante les sous-espaces vectoriels $\mathrm{Vect}\big((\lambda,\lambda,1)\big)$ et $\mathrm{Vect}\big((1,\lambda,1),(2,1,1)\big)$ sont-ils supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$?

---

45 On note F l'ensemble des fonctions constantes sur $[0,1]$ et on pose :
$$G = \left\{ f \in \mathscr{C}\big([0,1],\mathbb{R}\big) \;\middle|\; \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = 0 \right\}.$$
Montrer que F et G sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de $\mathscr{C}\big([0,1],\mathbb{R}\big)$.

---

46 Montrer que $\Big\{P \in \mathbb{R}_3[X] \;\Big|\; P\big(X^2\big) = X^2 P(X)\Big\}$ et $\Big\{P \in \mathbb{R}_3[X] \;\Big|\; P(1) = P(2)\Big\}$ sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires dans $\mathbb{R}_3[X]$.

---

47 Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et F_1, F_2 et G trois sous-espaces vectoriels de E.
1) Si F_1 et F_2 sont en somme directe, montrer que $F_1 \cap G$ et $F_2 \cap G$ le sont aussi.

2) Si F_1 et F_2 sont supplémentaires dans E, $F_1 \cap G$ et $F_2 \cap G$ le sont-ils dans G ?

---

48 🕑 Déterminer un supplémentaire des sous-espaces vectoriels suivants :

1) $\text{Vect}\big((1,2,1,1),(2,2,1,1)\big)$ dans $\mathbb{R}^4$.

2) $\Big\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid \quad x+y+2z-t=0 \quad \text{et} \quad 2x+y-z+t=0\Big\}$ dans $\mathbb{R}^4$.

3) $\Big\{P \in \mathbb{R}_4[X] \mid \quad P(-X) = P(X)\Big\}$ dans $\mathbb{R}_4[X]$.

4) dans $\mathbb{R}_3[X]$:

$$\Big\{P \in \mathbb{R}_3[X] \mid \quad P'+3P = P(0)X^3+P(1)X+P(1)\Big\}.$$

5) $\Big\{P \in \mathbb{R}[X] \mid \quad P(1) = P(2) = 0\Big\}$ dans $\mathbb{R}[X]$.

---

49 Pour tout $M = \begin{pmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$, on pose :

$$M^\circ = \begin{pmatrix} i & h & g \\ f & e & d \\ c & b & a \end{pmatrix},$$

puis $E = \Big\{M \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R}) \mid \quad M^\circ = M\Big\}$. Déterminer un supplémentaire de E dans $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.

---

50 Déterminer un supplémentaire des sous-espaces vectoriels suivants :

1) 🕑 $\Big\{P \in \mathbb{R}_3[X] \mid \quad P(0) = P'(0) = 0\Big\}$ dans $\mathbb{R}_3[X]$.

2) 🕑🕑 $\Big\{f \in \mathscr{D}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \mid \quad f(0) = f'(0) = 0\Big\}$ dans $\mathscr{D}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

---

51 🕑🕑🕑 Soient $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ distincts. On pose :

$$F = \Big\{f \in \mathscr{C}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \mid \quad \forall k \in [\![1,n]\!], \quad f(x_k) = 0\Big\}.$$

Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et en déterminer un supplémentaire dans $\mathscr{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.
