COLLE 23 = POLYNÔMES, FRACTIONS RATIONNELLES,FONCTIONS DÉRIVABLES ET FONCTIONS À PLUSIEURS VARIABLES

Polynômes et Fractions rationnelles :

Exercice 1.
Décomposer les fractions suivantes en éléments simples sur $\mathbb{R}$, par identification des coefficients.

1. $F = \frac{X}{X^2-4}$
2. $G = \frac{X^3-3X^2+X-4}{X-1}$
3. $H = \frac{2X^3+X^2-X+1}{X^2-2X+1}$
4. $K = \frac{X+1}{X^4+1}$

Exercice 2.
On pose $Q_0 = (X-1)(X-2)^2$, $Q_1 = X(X-2)^2$ et $Q_2 = X(X-1)$. À l'aide de la décomposition en éléments simples de $\frac{1}{X(X-1)(X-2)^2}$, trouver des polynômes $A_0,\ A_1,\ A_2$ tels que
$A_0Q_0 + A_1Q_1 + A_2Q_2 = 1$.

Exercice 3.
Calculer les intégrales suivantes :

1. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^3(t)}{1+\cos^2(t)}dt$
2. $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{\sin(t)}$

Exercice 4.
Soit $T_n(x) = \cos\big(n \arccos(x)\big)$ pour $x \in [-1,1]$.

1. (a) Montrer que pour tout $\theta \in [0,\pi]$, $T_n(\cos\theta) = \cos(n\theta)$.
   (b) Calculer T_0 et T_1.
   (c) Montrer la relation de récurrence $T_{n+2}(x) = 2xT_{n+1}(x) - T_n(x)$, pour tout $n \geq 0$.
   (d) En déduire que T_n une fonction polynomiale de degré n.
2. Soit $P(X) = \lambda(X-a_1)\cdots(X-a_n)$ un polynôme, où les a_k sont deux à deux distincts et $\lambda \neq 0$. Montrer que
$$\frac{1}{P(X)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\frac{1}{P'(a_k)}}{X-a_k}$$
3. Décomposer $\frac{1}{T_n}$ en éléments simples.

Exercice 5.
Intégrer les fractions rationnelles suivantes :

1. $\displaystyle\int \frac{x^3}{x^2-x-6}dx$
2. $\displaystyle\int \frac{x^3}{x^2+4x+4}dx$

Fonctions à plusieurs variables :

Exercice 6.

Pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, on pose
$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2} \text{ si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 \text{ si } (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$
Montrer que f est de classe C^1 (au moins) sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 7.
Soit $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & \begin{cases} 0 \text{ si } y = 0 \\ y^2 \sin\left(\frac{x}{y}\right) \text{ si } y \neq 0 \end{cases} \end{array}.$

1. Etudier la continuité de f.
2. Etudier l'existence et la valeur éventuelle de dérivées partielles d'ordre 1 sur $\mathbb{R}^2$.
3. Étudier $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ en $(0,0)$.

Exercice 8.

Trouver les extrema locaux de

1. $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & x^2+xy+y^2-3x-6y \end{array}$
2. $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & x^2+2y^2-2xy-2y+1 \end{array}$
3. $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & x^4+y^4-4xy \end{array}$

Exercice 9.

On désire fabriquer une boite ayant la forme d'un parallélépipède rectangle, sans couvercle sur le dessus. Le volume de cette boite doit être égal à $0,5m^3$ et pour optimiser la quantité de mâtière utilisée, on désire que la somme des aires des faces soit aussi petite que possible. Quelles dimensions doit-on choisir pour fabriquer la boite ?
