1 Dupuy

Exercice 25 [01047] [Correction]
On donne $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$. Calculer

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2(k+1)^2}$$

après en avoir justifié l'existence.

Exercice 31 [01029] [Correction]
(Règle de Raabe-Duhamel) Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de réels strictement positifs.

(a) On suppose qu'à partir d'un certain rang

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{v_{n+1}}{v_n}.$$

Montrer que $u_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{O}(v_n)$.

(b) On suppose que

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \underset{n\to+\infty}{=} 1 - \frac{\alpha}{n} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right) \text{ avec } \alpha > 1.$$

Montrer, à l'aide d'une comparaison avec une série de Riemann, que la série $\sum u_n$ converge.

(c) On suppose cette fois-ci que

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \underset{n\to+\infty}{=} 1 - \frac{\alpha}{n} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right) \text{ avec } \alpha < 1.$$

Montrer que la série $\sum u_n$ diverge

Exercice 66 [02949] [Correction]
Étudier la limite quand $n \to +\infty$ de

$$\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{k}{n}\right)^n.$$

2 Mansuy

Exercice 7

Déterminer la somme de la série de terme général $\frac{n-a\lfloor\frac{n}{a}\rfloor}{n(n+1)}$ où $a \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

Exercice F Sommation des équivalents

Soit $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ deux suites positives équivalentes. Montrer que

- si les séries de termes généraux u_n et v_n divergent, alors $\sum_{k=0}^{n} u_k \sim \sum_{k=0}^{n} v_k$;
- si les séries de termes généraux u_n et v_n convergent, alors $\sum_{k=n}^{\infty} u_k \sim \sum_{k=n}^{\infty} v_k$.

Exercice 25 [01047] [Correction] On donne $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$. Calculer

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2(k+1)^2}$$

après en avoir justifié l'existence.

Exercice 31 [01029] [Correction]
(Règle de Raabe-Duhamel) Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de réels strictement positifs.
(a) On suppose qu'à partir d'un certain rang

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{v_{n+1}}{v_n}.$$

Montrer que $u_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{O}(v_n)$.
(b) On suppose que

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \underset{n\to+\infty}{=} 1 - \frac{\alpha}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \text{ avec } \alpha > 1.$$

Montrer, à l'aide d'une comparaison avec une série de Riemann, que la série $\sum u_n$ converge.
(c) On suppose cette fois-ci que

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \underset{n\to+\infty}{=} 1 - \frac{\alpha}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \text{ avec } \alpha < 1.$$

Montrer que la série $\sum u_n$ diverge
Exercice 66 [02949] [Correction]
Étudier la limite quand $n \to +\infty$ de

$$\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{k}{n}\right)^n.$$

3 Mansuy

4 Exercice 7

Déterminer la somme de la série de terme général $\frac{n-a\lfloor \frac{n}{a} \rfloor}{n(n+1)}$ où $a \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$.

5 Exercice F Sommation des équivalents

Soit $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ deux suites positives équivalentes. Montrer que
- si les séries de termes généraux u_n et v_n divergent, alors $\sum_{k=0}^{n} u_k \sim \sum_{k=0}^{n} v_k$;
- si les séries de termes généraux u_n et v_n convergent, alors $\sum_{k=n}^{\infty} u_k \sim \sum_{k=n}^{\infty} v_k$.