TD 17 : Dénombrement

Connaître son cours :

- Que signifie qu'un ensemble E est fini. Montrer que toute partie de l'ensemble $[\![1, n]\!]$ pour $n \in \mathbb{N}^*$ est finie. En déduire que toute partie d'un ensemble fini est finie.
- Soit $p, q \in \mathbb{N}^*$, montrer qu'il existe une injection de $[\![1, p]\!]$ dans $[\![1, q]\!]$ si, et seulement si, $p \leq q$.
- Soit E et F deux ensembles finis. Alors, $E \cup F$ est fini et $|E \cup F| = |E| + |F| - |E \cap F|$. En déduire le nombre d'entiers à, au plus, quatre chiffres qui ne sont divisibles ni par 3 ni par 5.
- Soit E et F deux ensembles finis de cardinal n et p respectivement, et $f : E \to F$. S'il existe un entier $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $n > kp$, montrer qu'il existe un élément $y \in F$ tel que $|f^{-1}(\{y\})| > k$.
- Donner la formule de Vandermonde pour tous $a, b, n \in \mathbb{N}$.

Dénombrements pratiques :

Exercice 1. (*)

Combien y a-t-il de nombres de 5 chiffres où 0 figure une fois et une seule ?

Exercice 2. (*)

On part du point de coordonnées $(0, 0)$ pour rejoindre le point de coordonnées (p, q) (p et q entiers naturels donnés) en se déplaçant à chaque étape d'une unité vers la droite ou vers le haut. Combien y a-t-il de chemins possibles ?

Exercice 3. (*)

Dénombrer les anagrammes des mots suivants : IPESUP , SUCCES , ANANAS.

Exercice 4. (**)

Quelle est la probabilité p_n pour que dans un groupe de n personnes choisies au hasard, deux personnes au moins aient le même anniversaire (*on supposera que l'année a toujours* 365 *jours, tous équiprobables*). Montrer que pour $n \geq 23$, on a $p_n \geq \frac{1}{2}$.

Exercice 5. (*)

Dans une ville, il y a quatre boulangeries qui ferment un jour par semaine.

1. Déterminer le nombre de façons d'attribuer un jour de fermeture hebdomadaire ?
2. Reprendre la même question si plusieurs boulangeries ne peuvent fermer le même jour.
3. Reprendre la même question si chaque jour, il doit y avoir au moins une boulangerie ouverte.

Exercice 6. (*)

On considère un ensemble X de $n+1$ entiers (distincts) choisis dans $\{1, \ldots, 2n\}$. Démontrer que parmi les éléments de X, on peut toujours trouver 2 entiers dont la somme fait $2n+1$.

Exercice 7. (**)

Dans une entreprise, il y a 800 employés. 300 sont des hommes, 352 sont membres d'un syndicat, 424 sont mariés, 188 sont des hommes syndiqués, 166 sont des hommes mariés, 208 sont syndiqués et mariés, 144 sont des hommes mariés syndiqués. Combien y-a-t-il de femmes célibataires non syndiquées ?

Exercice 8. (**)

Une main au poker est formée de 5 cartes extraites d'un jeu de 52 cartes. Traditionnellement,trèfle, carreau, coeur, pique sont appelées couleurs et les valeurs des cartes sont rangées dans l'ordre : as, roi, dame, valet, 10, 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, de la plus forte à la plus faible. Dénombrer les mains suivantes :

1. quinte flush : main formée de 5 cartes consécutives de la même couleur (la suite as, 2, 3, 4 et 5 est une quinte flush).
2. carré : main contenant 4 cartes de la même valeur (4 as par exemple).
3. full : main formée de 3 cartes de la même valeur et de deux autres cartes de même valeur (par exemple, 3 as et 2 rois).
4. quinte : main formée de 5 cartes consécutives et qui ne sont pas toutes de la même couleur.
5. brelan : main comprenant 3 cartes de même valeur et qui n'est ni un carré, ni un full (par exemple, 3 as, 1 valet, 1 dix).

Exercice 9. (***)

De combien de façons peut-on payer 100 euros avec des pièces de 10, 20 et 50 centimes ?

Exercice 10. (**)

Soit A l'ensemble des nombres à 7 chiffres ne comportant aucun "1". Déterminer le nombre d'éléments des ensembles suivants :

1. A.
2. A_1, ensemble des nombres de A ayant 7 chiffres différents.
3. A_2, ensemble des nombres pairs de A.
4. A_3, ensemble des nombres de A dont les chiffres forment une suite strictement croissante (dans l'ordre où ils sont écrits).

Exercice 11. (****) *(Le problème des chapeaux)*

Soit $n \in \mathbb{N}$, considérons n personnes qui laissent leur chapeau à un vestiaire. En repartant, chaque personne reprend un chapeau au hasard. Montrer que la probabilité qu'aucune de ces personnes n'ait repris son propre chapeau est environ $\frac{1}{e}$ quand n est grand.
(Indications :)

1. Rappeler la « formule du crible ».
2. Faire le lien avec l'ensemble des permutation à n éléments noté $\mathcal{S}_n$.

Dénombrements théoriques :

Exercice 12. (**)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et E un ensemble de cardinal n. Dénombrer les couples $(X, Y) \in \mathcal{P}(E)^2$ tels que $X \subset Y$.

Exercice 13. (**)

Dénombrer les permutations de $\mathcal{S}_{20}$ dont la décomposition en cycle de supports disjoints contient trois 4-cycles, deux 3-cycles et deux points fixes.

Exercice 14. (**)

Montrer que, pour tout $n \geq 2$,

$$\sum_{X \in \mathcal{P}(\llbracket 1,n \rrbracket)} \sum_{k \in X} k = n(n+1)2^{n-2}$$

Exercice 15. (**)

Démontrer par un dénombrement que, pour $n \geq 1$, on a :

$$\binom{2n}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2.$$

Exercice 16. (**)

Soit $n, p \geq 1$ deux entiers.

1. Combien y-a-t-il de fonctions strictement croissantes de $\{1, \ldots, p\}$ dans $\{1, \ldots, n\}$?
2. (a) Soit $f : \{1, \ldots, p\} \to \{1, \ldots, n\}$ une fonction croissante. On pose $\phi(f)$ la fonction définie sur $\{1, \ldots, p\}$, à valeurs dans $\{1, \ldots, n+p-1\}$, par $\phi(f)(k) = f(k) + k - 1$. Démontrer que $\phi(f)$ est strictement croissante.

   (b) Soit $g : \{1, \ldots, p\} \to \{1, \ldots, n+p-1\}$ une fonction strictement croissante. On pose $\psi(g)$ la fonction définie sur $\{1, \ldots, p\}$, à valeurs dans $\{1, \ldots, n\}$, par $\psi(g)(k) = g(k) - k + 1$. Démontrer que $\psi(g)$ est croissante.

   (c) Combien y-a-t-il de fonctions croissantes de $\{1, \ldots, p\}$ dans $\{1, \ldots, n\}$?

Exercice 17. (**)

Pour $n \in \mathbb{N}$, on note B_n le nombre de partitions d'un ensemble E de cardinal n. On pose $B_0 = 1$.

1. Calculer B_1, B_2 et B_3.
2. Établir la formule de récurrence

$$B_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k.$$

Exercice 18. (**)

Soit n, p des entiers naturels avec $n \geq p$. Démontrer par dénombrement que

$$\sum_{k=p}^{n} \binom{k}{p} = \binom{n+1}{p+1}.$$

Exercice 19. (**)

Soit E un ensemble fini de cardinal $n \geq 1$. Démontrer que le nombre de parties de E de cardinal pair vaut 2^{n-1}.

Exercice 20. (***)

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in \mathbb{N}$, on note Γ_n^p le nombre de n-uplets $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{N}^n$ tels que $x_1 + \cdots + x_n = p$.

1. Déterminer Γ_n^0, Γ_n^1, Γ_n^2, Γ_1^p et Γ_2^p.
2. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, pour tout $p \in \mathbb{N}$,
$$\Gamma_{n+1}^p = \Gamma_n^0 + \Gamma_n^1 + \cdots + \Gamma_n^p.$$
3. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $p \in \mathbb{N}$,
$$\Gamma_n^p = \binom{n+p-1}{p}.$$
