COLLE 8 = FONCTIONS DÉRIVABLES ET POLYNÔMES

Questions de cours :

1. Soient $k \in \mathbb{N}^*$ et $f, g \in \mathbb{C}^k(I, \mathbb{R})$, exprimer $(fg)^{(k)}$.
   En déduire les dérivées successives de la fonction $x \mapsto x^3 e^x$
2. Démontrer la propriété suivante :
   Propriété.
   Soient $I \subset \mathbb{R}$, $f : I \to \mathbb{C}$ une fonction dérivable sur I et $a \in I$.
   Si $f(a)$ est un extremum local de f alors $f'(a) = 0$.
3. Rappeler le théorème de Rolle et donner sa démonstration.
4. Rappeler le théorème des acroissements finis et démontrer la propriété suivante :
   Propriété.
   Soient $I \subset \mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{C}$ une fonction dérivable sur I.
   f est constante sur I si et seulement si f' est nulle sur I.
5. Soit P un polynôme différent de X. Montrer que $P(X) - X$ divise $P(P(X)) - X$.
6. Démontrer la propriété suivante :
   Propriété.
   Soient $P \in K[X]$ et $a \in K$.
   a est racine de P si et seulement si $(X - a)$ divise P
7. Soient $x_1, x_2, ..., x_n \in K$ distincts et $y_1, y_2, ..., y_n \in K$ quelconques. Donner l'espression du seul et unique polynôme P de degré $n-1$ pour lequel $P(x_i) = y_i$ pour tout $i \in [\![1; n]\!]$

Fonctions dérivables :

Exercice 1.
Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. On fait l'hypothèse que :

$$\forall x \in \mathbb{R} : f \circ f(x) = \frac{x}{4} + 1$$

1. Montrer que : $f'(x) = f'\left(\frac{x}{4} + 1\right)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
2. En déduire de f' est une fonction constante sur $\mathbb{R}$
3. Déterminer les fonctions $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telles que $f \circ f(x) = \frac{x}{4} + 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Exercice 2. Soient x et y réels avec $0 < x < y$.

1. Montrer que

$$x < \frac{y - x}{\ln y - \ln x} < y.$$

2. On considère la fonction f définie sur $[0, 1]$ par

$$\alpha \mapsto f(\alpha) = \ln(\alpha x + (1-\alpha)y) - \alpha \ln x - (1-\alpha) \ln y.$$

   De l'étude de f déduire que pour tout α de $]0, 1[$

$$\alpha \ln x + (1 - \alpha) \ln y < \ln(\alpha x + (1 - \alpha)y).$$

   Interprétation géométrique ?

Exercice 3.
Étudier la dérivabilité des fonctions suivantes :

$$f_1(x) = x^2 \cos\frac{1}{x}, \quad \text{si } x \neq 0 \qquad ; \qquad f_1(0) = 0;$$

$$f_2(x) = \sin x \cdot \sin\frac{1}{x}, \quad \text{si } x \neq 0 \qquad ; \qquad f_2(0) = 0;$$

$$f_3(x) = \frac{|x|\sqrt{x^2 - 2x + 1}}{x - 1}, \quad \text{si } x \neq 1 \qquad ; \qquad f_3(1) = 1.$$

Exercice 4.
Montrer que le polynôme $X^n + aX + b$, (a et b réels) admet au plus trois racines réelles.

Exercice 5.
Pour tous $n \in \mathbb{N}^*$, calculer la dérivée $n^{\text{ème}}$ de $x \mapsto x^{n-1} \ln(1 + x)$ sur $]-1, +\infty[$.

Exercice 6.
Montrer que pour tous $n \in \mathbb{N}*$ et $x \in \mathbb{R}*$:

$$\frac{d^n}{dx^n}\left(x^{n-1} \exp\left(\frac{1}{x}\right)\right) = \frac{(-1)^n}{x^{n+1}} \exp\left(\frac{1}{x}\right)$$

Polynômes :

Exercice 7.
Soit P un polynôme à coefficients réels tel que $\forall x \in \mathbb{R},\ P(x) \geq 0$. Montrer qu'il existe deux polynômes R et S à coefficients réels tels que $P = R^2 + S^2$.

Exercice 8.
Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$$

(*Indication : étudier le polynôme* $(X+1)^{2n}$)

Exercice 9.
Trouver les polynômes P de $\mathbb{R}[X]$ vérifiant $P(X^2) = P(X)P(X+1)$ (penser aux racines de P).

Exercice 10.
Soit P un polynôme à coefficients entiers relatifs de degré supérieur ou égal à 1. Soit n un entier relatif et $m = P(n)$.

1. Montrer que $\forall k \in \mathbb{Z},\ P(n+km)$ est un entier divisible par m.
2. Montrer qu'il n'existe pas de polynômes non constants à coefficients entiers tels que $P(n)$ soit premier pour tout entier n.

Exercice 11.
Trouver tous les polynômes divisibles par leur dérivée.

Exercice 12.
Déterminer deux polynômes U et V vérifiant $UX^n + V(1-X)^m = 1$ et $\deg(U) < m$ et $\deg(V) < n$.
