SOMMES ET PRODUITS

Exercice 1 - Somme tÃ©lescopique et factorielle

En utilisant une somme tÃ©lescopique, calculer $\sum_{k=1}^{n} k \cdot k!$.

Exercice 2 - Transformer en somme tÃ©lescopique

1. DÃ©terminer une suite (u_k) telle que, pour tout $k \geq 0$, on ait
$$u_{k+1} - u_k = (k+2)2^k.$$
2. En dÃ©duire $\sum_{k=0}^{n}(k+2)2^k$.

Exercice 3 - Calcul de sommes par dÃ©coupage

Soit $n \in \mathbb{N}$.

1. Calculer $A_n = \sum_{k=2n+1}^{3n}(2n)$.
2. Calculer $B_n = \sum_{k=n}^{2n} k$.
3. En dÃ©duire la valeur de $S_n = \sum_{k=n}^{3n} \min(k, 2n)$.

Exercice 4 - Sommation d'Abel

Soient $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de nombres complexes. On dÃ©finit deux suites $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en posant :
$$A_n = \sum_{k=0}^{n} a_k, \qquad b_n = B_{n+1} - B_n.$$

1. DÃ©montrer que $\sum_{k=0}^{n} a_k B_k = A_n B_n - \sum_{k=0}^{n-1} A_k b_k$.
2. En dÃ©duire la valeur de $\sum_{k=0}^{n} 2^k k$.

Exercice 5 - Somme de puissances

Soit $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Calculer $S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} x^k$.
2. En dÃ©duire la valeur de $T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} kx^k$.

Exercice 6 - Quelques sommes doubles

Calculer les sommes doubles suivantes :

1. $\sum_{1\leq i,j\leq n} ij$.
2. $\sum_{1\leq i\leq j\leq n} \frac{i}{j}$.

Exercice 7 - Sommes doubles

Pour $n \in \mathbb{N}$, on note
$$a_n = \sum_{k=1}^{n} k,\ b_n = \sum_{k=1}^{n} k^2 \text{ et } c_n = \sum_{k=1}^{n} k^3.$$
Pour cet exercice, on admettra que $a_n = \dfrac{n(n+1)}{2}$, que $b_n = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ et que $c_n = a_n^2$.

1. Calculer $\displaystyle\sum_{1\leq i\leq j\leq n} ij$.

2. Calculer $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\min(i,j)$.

Exercice 8 - Une somme Ã partir de la formule du binÃ´me

L'objectif de l'exercice est de dÃ©montrer la (surprenante!) formule suivante :

$$\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}\frac{(-1)^{k+1}}{k}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}.$$

1. Soit x un rÃ©el non nul. DÃ©montrer que

$$\frac{1-(1-x)^n}{x}=\sum_{p=0}^{n-1}(1-x)^p.$$

2. On pose pour $x\in\mathbb{R}$,

$$f(x)=\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}\frac{(-1)^k}{k}x^k.$$

   DÃ©montrer que, pour $x\in\mathbb{R}$, on a

$$f'(x)=-\sum_{p=0}^{n-1}(1-x)^p.$$

3. Conclure.

Cette feuille d'exercices a Ã©tÃ© conÃ§ue Ã l'aide du site http://www.bibmath.net