Exercice 7

Considérons $\mathbb{R}_n[X]$ muni du produit scalaire

$$\langle P|Q\rangle = \int_0^1 P(x)Q(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Posons L_k le polynôme égal à la dérivée $k^{\text{ième}}$ de $[X(X-1)]^k$ pour $k \in [\![0,n]\!]$.

1. Montrer que la famille $(L_k)_{k\in[\![0,n]\!]}$ est orthogonale.
2. Calculer la norme euclidienne de L_k pour $k \in [\![0,n]\!]$.

Exercice 14

Soit E un espace euclidien et $e_1,\dots,e_n \in E$ tels que

$$\forall x \in E, \qquad \|x\|^2 = \sum_{i=1}^n \langle x|e_i\rangle^2.$$

1. Montrer que la famille $(e_1,\dots,e_n)$ est génératrice.
2. Supposons, dans cette question, que les vecteurs $e_1,\dots,e_n$ sont unitaires. Montrer que $(e_1,\dots,e_n)$ est une base orthonormale de E.
3. Supposons, dans cette question, que $\dim E = n$.
   a. Montrer que $(e_1,\dots,e_n)$ est une base de E.
   b. Montrer que
   $$\forall (x,y) \in E^2, \qquad \langle x|y\rangle = \sum_{i=1}^n \langle x|e_i\rangle\langle y|e_i\rangle.$$
   c. Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice dont le coefficient en position i,j est $\langle e_i|e_j\rangle$. Montrer que $M^2 = M$ et conclure.

Exercice 15

Soit p un projecteur orthogonal d'un espace euclidien E.

1. Montrer que $\|p(x)\|^2 = \langle p(x)|x\rangle$ pour tout $x \in E$.
2. Montrer que, pour toute base orthonormée $(e_1,\dots,e_n)$ de E,
$$\sum_{k=1}^n \|p(e_k)\|^2 = \mathrm{rg}(p).$$

Exercice 16

Soit p un projecteur d'un espace euclidien E. Montrer que p est un projecteur orthogonal si, et seulement si, $\|p(x)\| \leq \|x\|$ pour tout $x \in E$.