Exercice 1 - Une fonction lipschitzienne

1. Démontrer que la fonction sin est lipschitzienne sur $\mathbb{R}$.
2. Soit $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ continue. Démontrer que la fonction $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ définie par
$$F(x)=\int_a^b f(t)\sin(xt)dt$$
est lipschitzienne.

Exercice 2 - Une fonction lipschitzienne

1. Démontrer que la fonction sin est lipschitzienne sur $\mathbb{R}$.
2. Soit $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ continue. Démontrer que la fonction $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ définie par
$$F(x)=\int_a^b f(t)\sin(xt)dt$$
est lipschitzienne.

Exercice 3 - Limites de suites

Calculer la limite des suites suivantes :

1. $u_n=\dfrac{1}{n}\left(\sin\left(\dfrac{\pi}{n}\right)+\sin\left(\dfrac{2\pi}{n}\right)+\dots+\sin\left(\dfrac{n\pi}{n}\right)\right)$.
2. $u_n=n\left(\dfrac{1}{(n+1)^2}+\dots+\dfrac{1}{(n+n)^2}\right)$.
3. $u_n=\dfrac{\sqrt{1}+\sqrt{2}+\dots+\sqrt{n-1}}{n\sqrt{n}}$.
4. $u_n=\sqrt[n]{\left(1+\left(\dfrac{1}{n}\right)^2\right)\left(1+\left(\dfrac{2}{n}\right)^2\right)\dots\left(1+\left(\dfrac{n}{n}\right)^2\right)}$.

Exercice 4 - Produit

Déterminer la limite de
$$v_n=\frac{1}{n}\prod_{k=1}^n (k+n)^{1/n}.$$

Exercice 5 - Inégalité de Jensen

Soit $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ continue et $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ continue et convexe. Démontrer que
$$g\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt\right)\leq\frac{1}{b-a}\int_a^b g(f(t))dt.$$

Exercice 6 - Cesaro pour les intégrales

Soit $f:[0,+\infty[\to\mathbb{R}$ une fonction continue admettant une limite finie a en $+\infty$. Montrer que
$$\frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt\to a \text{ quand } x\to+\infty.$$

Cette feuille d'exercices a été conçue à l'aide du site https://www.bibmath.net