COLLE 7 = FONCTIONS CONTINUES

Connaître son cours :

1. Soit f une fonction continue sur un intervalle I. Montrer que : si f est injective, alors f est strictement monotone.
2. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue en 0 telle que pour chaque $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = f(2x)$. Montrer que f est constante.
3. Soit $f : [0,1] \to [0,1]$ une fonction continue. Démontrer que f admet toujours au moins un point fixe.

Fonctions continues :

Exercice 1. *Théorème des cordes universelles*

Soit $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ une application continue telle que $f(0) = f(1)$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Définissons

$$g : \left\{ \begin{array}{ccc} \left[0, 1 - \frac{1}{n}\right] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x + \frac{1}{n}) - f(x) \end{array} \right.$$

1. Calculer $\sum\limits_{k=0}^{n-1} g\left(\frac{k}{n}\right)$.
2. En déduire qu'il existe $\alpha_n \in \left[0, 1 - \frac{1}{n}\right]$ tel que $f(\alpha_n + \frac{1}{n}) = f(\alpha_n)$.
3. Expliquer à l'aider d'un schéma ce qui est décrit par ce théorème.

Exercice 2.

Démontrer que si une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est continue en x_0, alors $|f|$ est continue en x_0. Démontrer que la réciproque est fausse.

Exercice 3.

Définition 1.
▷ Un réel $c \in [a,b]$ est un point fixe de l'application $f : [a,b] \to [a,b]$ si $f(c) = c$.
▷ Un réel $c \in [a,b]$ est un 2-cycle de l'application $f : [a,b] \to [a,b]$ si $f(c) \neq c$ et $f \circ f(c) = c$.

On note f^n la composée $n^{\text{ième}}$ de l'application $f : [a,b] \to I$; par exemple, $f^0 = \mathrm{Id}$,
$f^1 = f, f^2 = f \circ f, f^3 = f \circ f \circ f \ldots$

1. Montrer que toute application continue $f : [a,b] \to [a,b]$ admet un point fixe.
2. Montrer que tout point fixe d'une application $f : [a,b] \to [a,b]$ est un point fixe de f^n pour $n > 0$.
3. Donner un exemple d'application continue $f : [a,b] \to [a,b]$ qui admet un 2-cycle.
4. Donner un exemple d'application continue $f : [a,b] \to [a,b]$ qui n'admet pas de 2-cycle.
5. Déterminer, selon la valeur de $\lambda \in]0,4]$, les points fixes et les 2-cycles de l'application

---

 mail: i.botcazou@gmx.fr

Exercice 4.

Soient $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues. Montrer que $\inf(f, g)$ et $\sup(f, g)$ sont continues de deux manières différentes.

Exercice 5.

Soit $F : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ une application uniformément continue sur $\mathbb{R}^+$.

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists \alpha > 0,\ \forall (x, y) \in (\mathbb{R}^+)^2,\ |x - y| \leq \alpha\ \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \epsilon$$

On se propose de démontrer qu'il existe deux réels a et b tels que, pour tout $x \in [0, +\infty[$, on ait $F(x) \leq ax + b$. Pour cela, on commence par fixer $\eta_1 > 0$ tel que

$$\forall (x, y) \in ([0, +\infty[)^2,\ \big(|x - y| < \eta_1 \implies |F(x) - F(y)| \leq 1\big).$$

On fixe également $x_0 \in [0, +\infty[$.

1. Soit n_0 le plus petit entier tel que $\frac{x_0}{n_0} \leq \eta_1$; justifier l'existence de n_0 et démontrer que $n_0 \leq \frac{x_0}{\eta_1} + 1$.
2. Montrer que
$$|F(x_0) - F(0)| \leq \sum_{k=0}^{n_0-1} \left| F\left(\frac{(k+1)x_0}{n_0}\right) - F\left(\frac{kx_0}{n_0}\right) \right|.$$
3. Conclure.
4. La fonction exponentielle est-elle uniformément continue sur $\mathbb{R}^+$?

Exercice 6.

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ périodique et admettant une limite finie l en $+\infty$. Montrer que f est constante.
