COLLE 19 = DÉTERMINANTS

Connaître son cours :

1. Soit $a, b \in \mathbb{C}$. Donner une forme factorisée au déterminant suivant.

$$\begin{vmatrix} 1 & a & b \\ a & 1 & b \\ b & a & 1 \end{vmatrix}$$

2. Soit $\Phi : M \longmapsto M^T$, calculer $\det(\Phi)$.
3. Calculer le déterminant de la matrice $M_n \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ de coefficients $m_{i,j}$ égaux à 1 si $i = j, i = 1$ ou $j = 1$, nuls sinon.

$$\begin{vmatrix} 1 & \dots & \dots & 1 \\ \vdots & \ddots & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 1 & & & 1 \end{vmatrix}.$$

Exercices :

Exercice 1. (**)

Soit

$$V = \{x \mapsto e^x P(x) \ : \ P \in \mathbb{R}_n[X]\}$$

1. Montrer que V est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ dont on déterminera la dimension.
2. Montrer que l'application $D : f \mapsto f'$ est un endomorphisme de V dont on calculera le déterminant.

Exercice 2. (**)

Soit f un endomorphisme du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$.

1. Montrer qu'il existe un unique couple (a, b) de complexes, tels que

$$\forall z \in \mathbb{C}, f(z) = az + b\bar{z}$$

2. Exprimer en fonction de a et b le déterminant de f.

Exercice 3. (**)

Soit A une matrice antisymétrique réelle d'ordre $2n + 1$.
Montrer que

$$det A = 0$$

Ce résultat est-il encore vrai lorsque A est d'ordre pair ? Justifier.

Exercice 4. (**)

Soient $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{C}$. Calculer $\det(a_{max(i,j)})$.
En déduire en particulier $\det(max(i,j))$ et $\det(min(i,j))$.

Exercice 5. (***)

Soient $a_1, \dots, a_n$ des nombres complexes, $\omega = e^{2i\pi/n}$, et A et M les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ a_n & a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_2 & a_3 & \dots & \dots & a_1 \end{pmatrix},$$

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & \dots & 1 \\ 1 & \omega & \omega^2 & \dots & \omega^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ 1 & \omega^{n-1} & \omega^{2(n-1)} & \dots & \omega^{(n-1)(n-1)} \end{pmatrix}.$$

Calculer $\det(AM)$ et en déduire $\det(A)$.
