Exercice 1 - Applications linéaires ou non (sur R^n)?

Dire si les applications suivantes sont des applications linéaires :
$f : R^2 \to R^3,\ (x, y) \mapsto (x + y, x - 2y, 0);$
$f : R^2 \to R^3,\ (x, y) \mapsto (x + y, x - 2y, 1);$
$f : R^2 \to R,\ (x, y) \mapsto x^2 - y^2.$

Exercice 2 - Applications linéaires ou non (sur les polynômes)?

Dire si les applications suivantes sont des applications linéaires :
$f : R[X] \to R^2,\ P \mapsto \big(P(0), P'(1)\big);$
$f : R[X] \to R[X],\ P \mapsto AP$, où $A \in R[X]$ est un polynôme fixé;
$f : R[X] \to R[X],\ P \mapsto P^2.$

Exercice 3 - Noyau et image

On considère l'application linéaire f de R^3 dans R^4 définie par

Déterminer une base de $\mathrm{Im}(f)$.
Déterminer une base de $\ker(f)$.
L'application f est-elle injective? surjective?

Exercice 4 - Dérivation

Soit $E = \mathcal{C}^\infty(R)$ et $\phi \in \mathcal{L}(E)$ définie par $\phi(f) = f'$. Quel est le noyau de ϕ? Quelle est son image? ϕ est-elle injecti

Exercice 5 -

Soit E l'espace vectoriel des applications de R dans R. On note $L : E \to E$ l'application qui à $f \in E$ associe $L(f)$ c
Montrer que L est un endomorphisme de E.
Préciser le noyau et l'image de L.
L'application L est-elle injective ? surjective ?

Exercice 6 - Application linéaire définie sur un espace de polynôme

Soit $E = C[X]$, p un entier naturel et f l'application de E dans E définie par $f(P) = (1 - pX)P + X^2P'$. f est-elle

Exercice 7 - Applications linéaires dans un espace de polynômes

Soit $E = R_3[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à 3. On définit u l'ap

Montrer que u est un endomorphisme de E.
Déterminer une base de $\mathrm{Im}(u)$.
Déterminer une base de $\ker(u)$.
Montrer que $\ker(u)$ et $\mathrm{Im}(u)$ sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E.

Exercice 8 - Une projection dans $R[X]$

Soit $A \in R[X]$ non nul, et $\phi : R[X] \to R[X]$ l'application qui à un polynôme P associe son reste dans la division eu

Exercice 9 - Somme de deux projecteurs

Soit E un R-espace vectoriel. Soient p et q deux projecteurs de E.
Montrer que $p + q$ est un projecteur si et seulement si $p \circ q = q \circ p = 0$.
Montrer que, dans ce cas, on a $\mathrm{Im}(p + q) = \mathrm{Im}(p) \oplus \mathrm{Im}(q)$ et $\ker(p + q) = \ker p \cap \ker q$.

Exercice 10 - Endomorphismes qui commutent, noyaux et images

Soit E un espace vectoriel et $u, v \in \mathcal{L}(E)$. On suppose que $u \circ v = v \circ u$. Démontrer que $\ker(u)$ et $\mathrm{Im}(u)$ sont stable

Exercice 11 - Image de la composée et somme de l'image et du noyau

Soit E un espace vectoriel et $f, g \in \mathcal{L}(E)$. Démontrer que

Exercice 12 -

Soit E un espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E)$.
Montrer que

On suppose que E est de dimension finie. Montrer que