Séries

Exercices de Jean-Louis Rouget. Retrouver aussi cette fiche sur www.maths-france.fr

* très facile ** facile *** difficulté moyenne **** difficile ***** très difficile
I : Incontournable

Exercice 1

Nature de la série de terme général

1) (*) $\ln\left(\frac{n^2+n+1}{n^2+n-1}\right)$ **2) (*)** $\frac{1}{n+(-1)^n\sqrt{n}}$ **3) (**)** $\left(\frac{n+3}{2n+1}\right)^{\ln n}$ **4) (**)** $\frac{1}{\ln(n)\ln(\operatorname{ch} n)}$
5) (**) $\arccos\sqrt[3]{1-\frac{1}{n^2}}$ **6) (*)** $\frac{n^2}{(n-1)!}$ **7)** $\left(\cos\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^n-\frac{1}{\sqrt{e}}$ **8) (**)** $\ln\left(\frac{2}{\pi}\arctan\frac{n^2+1}{n}\right)$
9) (*) $\int_0^{\pi/2}\frac{\cos^2 x}{n^2+\cos^2 x}\,dx$ **10) (**)** $n^{-\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{n}\right)}$ **11) (**)** $e-\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$

Correction ▼ [005688]

Exercice 2

Nature de la série de terme général
1) (***) $\sqrt[4]{n^4+2n^2}-\sqrt[3]{P(n)}$ où P est un polynôme. **2) (**)** $\frac{1}{n^\alpha}S(n)$ où $S(n)=\sum_{p=2}^{+\infty}\frac{1}{p^n}$.
3) (**) u_n où $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $u_n=\frac{1}{n}e^{-u_{n-1}}$.
4) (****) $u_n=\frac{1}{p_n}$ où p_n est le n-ème nombre premier
(indication : considérer $\sum_{n=1}^{N}\ln\left(\frac{1}{1-\frac{1}{p_n}}\right)=\sum_{n=1}^{N}\ln(1+p_n+p_n^2+\ldots)$).
5) (***) $u_n=\frac{1}{n(c(n))^\alpha}$ où $c(n)$ est le nombre de chiffres de n en base 10.
6) (*) $\frac{\left(\prod_{k=2}^{n}\ln k\right)^a}{(n!)^b}$ $a>0$ et $b>0$. **7) (**)** $\arctan\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^a\right)-\arctan\left(\left(1-\frac{1}{n}\right)^a\right)$.
8) (**) $\frac{1}{n^\alpha}\sum_{k=1}^{n}k^{3/2}$. **9) (***)** $\left(\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k}{n^\alpha}\right)\right)-1$.

Correction ▼ [005689]

Exercice 3

Nature de la série de terme général
1) (***) $\sin\left(\frac{\pi n^2}{n+1}\right)$ **2) (**)** $\frac{(-1)^n}{n+(-1)^{n-1}}$ **3) (**)** $\ln\left(1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)$ **4) (***)** $\frac{e^{in\alpha}}{n}$, $\frac{\cos(n\alpha)}{n}$ et $\frac{\sin(n\alpha)}{n}$
7) (****) $(\sin(n!\pi e))^p$ p entier naturel non nul.

Correction ▼ [005690]

Exercice 4

Calculer les sommes des séries suivantes après avoir vérifié leur convergence.

1) (**) $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{n+1}{3^n}$ **2) (**)** $\sum_{n=3}^{+\infty}\frac{2n-1}{n^3-4n}$ **3) (***)** $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(3n)!}$
4) (*) $\sum_{n=2}^{+\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n-1}}+\frac{1}{\sqrt{n+1}}-\frac{2}{\sqrt{n}}\right)$ **5) (**)** $\sum_{n=2}^{+\infty}\ln\left(1+\frac{(-1)^n}{n}\right)$ **6) (***)** $\sum_{n=0}^{+\infty}\ln\left(\cos\frac{a}{2^n}\right)$ $a\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$
textbf7) $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\operatorname{th}\frac{a}{2^n}}{2^n}$

Correction ▼ [005691]

Exercice 5 *** I

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante de nombres réels strictement positifs telle que la série de terme général u_n converge. Montrer que $u_n \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{n}\right)$. Trouver un exemple de suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de réels strictement positifs telle que la série de terme général u_n converge mais telle que la suite de terme général nu_n ne tende pas vers 0.

Correction ▼ [005692]

Exercice 6 ***

Soit σ une injection de $\mathbb{N}^*$ dans lui-même. Montrer que la série de terme général $\frac{\sigma(n)}{n^2}$ diverge.

Correction ▼ [005693]

Exercice 7 **

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs. Montrer que les séries de termes généraux u_n, $\frac{u_n}{1+u_n}$, $\ln(1+u_n)$ et $\int_0^{u_n} \frac{dx}{1+x^e}$ sont de mêmes natures.

Correction ▼ [005694]

Exercice 8 ***

Trouver un développement limité à l'ordre 4 quand n tend vers l'infini de $\left(e-\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\right)\times(n+1)!$.

Correction ▼ [005695]

Exercice 9 ***

Nature de la série de terme général $u_n = \sin\left(\pi(2+\sqrt{3})^n\right)$.

Correction ▼ [005696]

Exercice 10 **

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite positive telle que la série de terme général u_n converge. Etudier la nature de la série de terme général $\frac{\sqrt{u_n}}{n}$.

Correction ▼ [005697]

Exercice 11 ***

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels positifs. Trouver la nature de la série de terme général $v_n = \frac{u_n}{(1+u_1)\dots(1+u_n)}$, $n\geqslant 1$, connaissant la nature de la série de terme général u_n puis en calculer la somme en cas de convergence.

Correction ▼ [005698]

Exercice 12 ****

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs telle que la série de terme général u_n diverge.
Pour $n\in\mathbb{N}$, on pose $S_n = u_0+\dots+u_n$. Etudier en fonction de $\alpha>0$ la nature de la série de terme général $\frac{u_n}{(S_n)^\alpha}$.

Correction ▼ [005699]

Exercice 13 **

Soit $\alpha\in\mathbb{R}$. Nature de la série de terme général $u_n = \frac{1+(-1)^n n^\alpha}{n^{2\alpha}}$, $n\geqslant 1$.

Correction ▼ [005700]

Exercice 14 ****

On sait que $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\dots = \ln 2$.
A partir de la série précédente, on construit une nouvelle série en prenant p termes positifs, q termes négatifs, p termes positifs ... (Par exemple pour $p=3$ et $q=2$, on s'intéresse à $1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{7}+\frac{1}{9}+\frac{1}{11}-\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+\dots$).
Convergence et somme de cette série.

Correction ▼ [005701]

Exercice 15 ***

Nature de la série de terme général $u_n = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{(k(n-k))^\alpha}$.

Correction ▼ [005702]

Exercice 16

Convergence et somme éventuelle de la série de terme général

1) (**) $u_n = \frac{2n^3-3n^2+1}{(n+3)!}$ **2)** (***) $u_n = \frac{n!}{(a+1)(a+2)...(a+n)}$, $n \geqslant 1$, $a \in \mathbb{R}^{+*}$ donné.

Correction ▼ [005703]

Exercice 17 *

Nature de la série de terme général $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(n+k)^p}$, $p \in]0,+\infty[$.

Correction ▼ [005704]

Exercice 18 **

Déterminer un équivalent simple de $\frac{n!}{(a+1)(a+2)...(a+n)}$ quand n tend vers l'infini (a réel positif donné).

Correction ▼ [005705]

Exercice 19 *

Nature de la série de terme général $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(n+k)^p}$, $p \in]0,+\infty[$.

Correction ▼ [005706]

Exercice 20 *** I

Développement limité à l'ordre 4 de $\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$ quand n tend vers l'infini.

Correction ▼ [005707]

Exercice 21

Partie principale quand n tend vers $+\infty$ de

1) (***) $\sum_{p=n+1}^{+\infty} (-1)^p \frac{\ln p}{p}$ **2)** (**) $\sum_{p=1}^{n} p^p$.

Correction ▼ [005708]

Exercice 22 ***

Soit $p \in \mathbb{N}^*$, calculer $\sum_{p\in\mathbb{N}^*} \left(\sum_{n\in\mathbb{N}^*,\, n\neq p} \frac{1}{n^2-p^2}\right)$ et $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \left(\sum_{p\in\mathbb{N}^*,\, p\neq n} \frac{1}{n^2-p^2}\right)$. Que peut-on en déduire ?

Correction ▼ [005709]

Exercice 23 **

Calculer $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{3n+1}$.

Correction ▼ [005710]

Exercice 24 ****

Soient $(u_n)_{n\geqslant 1}$ une suite réelle. Pour $n \geqslant 1$, on pose $v_n = \frac{u_1+...+u_n}{n}$. Montrer que si la série de terme général $(u_n)^2$ converge alors la série de terme général $(v_n)^2$ converge et que $\sum_{n=1}^{+\infty} (v_n)^2 \leqslant 4\sum_{n=1}^{+\infty} (u_n)^2$ (indication : majorer $v_n^2 - 2u_nv_n$).

Correction ▼ [005711]

Exercice 25 ***

Convergence et somme de la série de terme général $u_n = \frac{\pi}{4} - \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1}$, $n \geqslant 0$.

Correction ▼ [005712]

Correction de **l'exercice 1 ▲**

1. Pour $n \geqslant 1$, on pose $u_n = \ln\left(\frac{n^2+n+1}{n^2+n-1}\right)$. $\forall n \geqslant 1$, u_n existe

$$u_n = \ln\left(1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right) - \ln\left(1+\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}\right) \underset{n\to+\infty}{=} \left(\frac{1}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) - \left(\frac{1}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) = O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Comme la série de terme général $\frac{1}{n^2}$, $n \geqslant 1$, converge (série de RIEMANN d'exposant $\alpha > 1$), la série de terme général u_n converge.

2. Pour $n \geqslant 2$, on pose $u_n = \frac{1}{n+(-1)^n\sqrt{n}}$. $\forall n \geqslant 2$, u_n existe et de plus $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$. Comme la série de terme général $\frac{1}{n}$, $n \geqslant 2$, diverge et est positive, la série de terme général u_n diverge.

3. Pour $n \geqslant 1$, on pose $u_n = \left(\frac{n+3}{2n+1}\right)^{\ln n}$. Pour $n \geqslant 1$, $u_n > 0$ et

$$\ln(u_n) = \ln(n)\ln\left(\frac{n+3}{2n+1}\right) = \ln(n)\left(\ln\left(\frac{1}{2}\right)+\ln\left(1+\frac{3}{n}\right)-\ln\left(1+\frac{1}{2n}\right)\right)$$
$$\underset{n\to+\infty}{=} \ln(n)\left(-\ln 2+O\left(\frac{1}{n}\right)\right) \underset{n\to+\infty}{=} -\ln 2\ln(n)+o(1).$$

Donc $u_n = e^{\ln(u_n)} \underset{n\to+\infty}{\sim} e^{-\ln 2\ln n} = \frac{1}{n^{\ln 2}}$. Comme la série de terme général $\frac{1}{n^{\ln 2}}$, $n \geqslant 1$, diverge (série de RIEMANN d'exposant $\alpha \leqslant 1$) et est positive, la série de terme général u_n diverge.

4. Pour $n \geqslant 2$, on pose $u_n = \frac{1}{\ln(n)\ln(\mathrm{ch}\, n)}$. u_n existe pour $n \geqslant 2$. $\ln(\mathrm{ch}\, n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln\left(\frac{e^n}{2}\right) = n-\ln 2 \underset{n\to+\infty}{\sim} n$ et $un \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n\ln(n)} > 0$.

Vérifions alors que la série de terme général $\frac{1}{n\ln n}$, $n \geqslant 2$, diverge. La fonction $x \to x\ln x$ est continue, croissante et strictement positive sur $]1,+\infty[$ (produit de deux fonctions strictement positives et croissantes sur $]1,+\infty[$). Par suite, la fonction $x \to \frac{1}{x\ln x}$ est continue et décroissante sur $]1,+\infty[$ et pour tout entier k supérieur ou égal à 2,

$$\frac{1}{k\ln k} \geqslant \int_k^{k+1} \frac{1}{x\ln x}\, dx$$

Par suite, pour $n \geqslant 2$,

$$\sum_{k=2}^n \frac{k\ln k}{\geqslant} \sum_{k=2}^n \int_k^{k+1} \frac{1}{x\ln x}\, dx = \int_2^{n+1} \frac{1}{x\ln x}\, dx = \ln(\ln(n+1)) - \ln(\ln(2) \underset{n\to+\infty}{\to} +\infty.$$

Donc u_n est positif et équivalent au terme général d'une série divergente. La série de terme général u_n diverge.

5. Pour $n \geqslant 1$, on pose $u_n = \arccos\sqrt[3]{1-\frac{1}{n^2}}$. u_n existe pour $n \geqslant 1$. De plus $u_n \underset{n\to+\infty}{\to} 0$. On en déduit que

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sin(u_n) = \sin\left(\arccos\sqrt[3]{1-\frac{1}{n^2}}\right) = \sqrt{1-\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^{2/3}} \underset{n\to+\infty}{=} \sqrt{1-1+\frac{2}{3n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)}$$
$$\underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{2}{3}\frac{1}{n}} > 0$$

terme général d'une série de RIEMANN divergente. La série de terme général un diverge.

6. Pour $n \geqslant 1$, on pose $u_n = \frac{n^2}{(n-1)!}$. u_n existe et $u_n \neq 0$ pour $n \geqslant 1$. De plus,

$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \frac{(n+1)^2}{n^2} \times \frac{(n-1)!}{n!} = \frac{(n+1)^2}{n^3} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\to} 0 < 1.$$

D'après la règle de d'ALEMBERT, la série de terme général u_n converge.

7. Pour $n \geqslant 1$, on pose $u_n = \left(\cos\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{e}}$. u_n est défini pour $n \geqslant 1$ car pour $n \geqslant 1$, $\frac{1}{\sqrt{n}} \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ et donc $\cos\frac{1}{\sqrt{n}} > 0$. Ensuite

$$\begin{aligned}\ln\left(\cos\frac{1}{\sqrt{n}}\right) &\underset{n\to+\infty}{=} \ln\left(1 - \frac{1}{2n} + \frac{1}{24n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \underset{n\to+\infty}{=} -\frac{1}{2n} + \frac{1}{24n^2} - \frac{1}{8n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \\ &\underset{n\to+\infty}{=} -\frac{1}{2n} - \frac{1}{12n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).\end{aligned}$$

Puis $n\ln\left(\cos\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \underset{n\to+\infty}{=} -\frac{1}{2} - \frac{1}{12n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$ et donc

$$u_n = e^{n\ln(\cos(1/\sqrt{n}))} - \frac{1}{\sqrt{e}} \underset{n\to+\infty}{=} \frac{1}{\sqrt{e}}\left(e^{-\frac{1}{12n}+o\left(\frac{1}{n}\right)} - 1\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{1}{12n\sqrt{e}} < 0.$$

La série de terme général $-\frac{1}{12n\sqrt{e}}$ est divergente et donc la série de terme général u_n diverge.

8.

$$\begin{aligned}\ln\left(\frac{2}{\pi}\arctan\left(\frac{n^2+1}{n}\right)\right) &= \ln\left(1 - \frac{2}{\pi}\arctan\left(\frac{n}{n^2+1}\right)\right) \\ &\underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{2}{\pi}\arctan\left(\frac{n}{n^2+1}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{2}{\pi}\frac{n}{n^2+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{2}{n\pi} < 0.\end{aligned}$$

Donc, la série de terme général u_n diverge.

9. Pour $n \geqslant 1$, on pose $u_n = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos^2 x}{n^2+\cos^2 x}\,dx$.

Pour $n \geqslant 1$, la fonction $x \mapsto \frac{\cos^2 x}{n^2+\cos^2 x}\,dx$ est continue sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ et positive et donc, u_n existe et est positif. De plus, pour $n \geqslant 1$,

$$0 \leqslant u_n \leqslant \int_0^{\pi/2} \frac{1}{n^2+0}\,dx = \frac{\pi}{2n^2}.$$

La série de terme général $\frac{\pi}{2n^2}$ converge et donc la série de terme général u_n converge.

10. $-\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{n}\right) = -\sin\left(\frac{1}{n}\right) - \cos\left(\frac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{=} -1 + O\left(\frac{1}{n}\right)$ puis

$$-\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{n}\right)\ln n \underset{n\to+\infty}{=} -\ln(n) + O\left(\frac{\ln n}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{=} -\ln(n) + o(1).$$

Par suite,

$$0 < u_n = e^{-\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{n}\right)\ln n} \underset{n\to+\infty}{\sim} e^{-\ln n} = \frac{1}{n}.$$

La série de terme général $\frac{1}{n}$ diverge et la série de terme général u_n diverge.

11. $n\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{=} 1 - \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$ et donc

$$u_n \underset{n\to+\infty}{=} e - e^{1-\frac{1}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right)} \underset{n\to+\infty}{=} e\left(1 - 1 + \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{e}{2n} > 0.$$

La série de terme général $\frac{e}{2n}$ diverge et la série de terme général u_n diverge.

Correction de l'exercice 2 ▲

1. Si P n'est pas unitaire de degré 3, u_n ne tend pas vers 0 et la série de terme général u_n diverge grossièrement.

Soit P un polynôme unitaire de degré 3. Posons $P = X^3 + aX^2 + bX + c$.

$$
\begin{aligned}
u_n &= n\left(\left(1+\frac{2}{n^2}\right)^{1/4}-\left(1+\frac{a}{n}+\frac{b}{n^2}+\frac{c}{n^3}\right)^{1/3}\right)\\
&\underset{n\to+\infty}{=} n\left(\left(1+\frac{1}{2n^2}+O\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)-\left(1+\frac{a}{3n}+\frac{b}{3n^2}-\frac{a^2}{9n^2}+O\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)\right)\\
&\underset{n\to+\infty}{=} -\frac{a}{3}+\left(\frac{1}{2}-\frac{b}{3}+\frac{a^2}{9}\right)\frac{1}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right).
\end{aligned}
$$

• Si $a\neq 0$, u_n ne tend pas vers 0 et la série de terme général u_n diverge grossièrement.

• Si $a=0$ et $\frac{1}{2}-\frac{b}{3}\neq 0$, $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \left(\frac{1}{2}-\frac{b}{3}\right)\frac{1}{n}$. u_n est donc de signe constant pour n grand et est équivalent au terme général d'une série divergente. Donc la série de terme général u_n diverge.

• Si $a=0$ et $\frac{1}{2}-\frac{b}{3}=0$, $u_n \underset{n\to+\infty}{=} O\left(\frac{1}{n^2}\right)$. Dans ce cas, la série de terme général u_n converge (absolument).

En résumé, la série de terme général u_n converge si et seulement si $a=0$ et $b=\frac{3}{2}$ ou encore la série de terme général u_n converge si et seulement si P est de la forme $X^3+\frac{3}{2}X+c$, $c\in\mathbb{R}$.

2. Pour $n\geqslant 2$, posons $u_n=\frac{1}{n^\alpha}S(n)$. Pour $n\geqslant 2$,

$$0<S(n+1)=\textstyle\sum_{p=2}^{+\infty}\frac{1}{p}\times\frac{1}{p^n}\leqslant\frac{1}{2}\sum_{p=2}^{+\infty}\frac{1}{p^n}=\frac{1}{2}S(n)$$

et donc $\forall n\geqslant 2$, $S(n)\leqslant\frac{S(2)}{2^{n-2}}$. Par suite,

$$u_n\leqslant\frac{1}{n^\alpha}\frac{S(2)}{2^{n-2}}\underset{n\to+\infty}{=}o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Pour tout réel α, la série de terme général u_n converge.

3. $\forall u_0\in\mathbb{R}$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $u_n>0$. Par suite, $\forall n\geqslant 2$, $0<u_n<\frac{1}{n}$.
On en déduit que $\lim_{n\to+\infty}u_n=0$ et par suite $u_n\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{1}{n}>0$. La série de terme général u_n diverge.

4. On sait qu'il existe une infinité de nombres premiers.

Notons $(p_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite croissante des nombres premiers. La suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite strictement croissante d'entiers et donc $\lim_{n\to+\infty}p_n=+\infty$ ou encore $\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{p_n}=0$.

Par suite, $0<\frac{1}{p_n}\underset{n\to+\infty}{\sim}\ln\left(\left(1-\frac{1}{p_n}\right)^{-1}\right)$ et les séries de termes généraux $\frac{1}{p_n}$ et $\ln\left(\left(1-\frac{1}{p_n}\right)^{-1}\right)$ sont de même nature.

Il reste donc à étudier la nature de la série de terme général $\ln\left(\left(1-\frac{1}{p_n}\right)^{-1}\right)$.

Montrons que $\forall N\in\mathbb{N}^*$, $\sum_{n=1}^{+\infty}\ln\left(\left(1-\frac{1}{p_n}\right)^{-1}\right)\geqslant\ln\left(\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{k}\right)$.

Soit $n\geqslant$. Alors $\frac{1}{p_n}<1$ et la série de terme général $\frac{1}{p_n^k}$, $k\in\mathbb{N}$, est une série géométrique convergente de somme : $\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{p_n^k}=\left(1-\frac{1}{p_n}\right)^{-1}$.

Soit alors N un entier naturel supérieur ou égal à 2 et $p_1<p_2...<p_n$ la liste des nombres premiers inférieurs ou égaux à N.

Tout entier entre 1 et N s'écrit de manière unique $p_1^{\beta_1}\dots p_k^{\beta_k}$ où $\forall i\in[\![1,n]\!]$, $0\leqslant\beta_i\leqslant\alpha_i=E\left(\frac{\ln(N)}{\ln(p_i)}\right)$ et deux entiers distincts ont des décompositions distinctes. Donc

$$\sum_{k=1}^{+\infty}\ln\left(\left(1-\frac{1}{p_k}\right)^{-1}\right)\geqslant\sum_{k=1}^{n}\ln\left(\left(1-\frac{1}{p_k}\right)^{-1}\right)\ (\text{car }\forall k\in\mathbb{N}^*,\ \left(1-\frac{1}{p_k}\right)^{-1}>1)$$
$$=\sum_{k=1}^{n}\ln\left(\sum_{i=0}^{+\infty}\frac{1}{p_k^i}\right)\geqslant\sum_{k=1}^{n}\ln\left(\sum_{i=0}^{\alpha_k}\frac{1}{p_k^i}\right)$$
$$=\ln\left(\prod_{k=1}^{n}\left(\sum_{i=0}^{\alpha_k}\frac{1}{p_k^i}\right)\right)=\ln\left(\sum_{0\leqslant\beta_1\leqslant\alpha_1,\dots,\dots0\leqslant\beta_n\leqslant\alpha_n}\frac{1}{p_1^{\beta_1}\dots,\ p_n^{\beta_n}}\right)$$
$$\geqslant\ln\left(\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{k}\right).$$

Or $\lim_{N\to+\infty}\ln\left(\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{k}\right)=+\infty$ et donc $\sum_{k=1}^{+\infty}\ln\left(\left(1-\frac{1}{p_k}\right)^{-1}\right)=+\infty$.

La série de terme général $\ln\left(1-\frac{1}{p_k}\right)^{-1}$ diverge et il en est de même de la série de terme général $\frac{1}{p_n}$. (Ceci montre qu'il y a beaucoup de nombres premiers et en tout cas beaucoup plus de nombres premiers que de carrés parfaits par exemple).

5. Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Posons $n=a_p\times10^p+\ldots+a_1\times10+a_0$ où $\forall i\in[\![0,p]\!]$, $a_i\in\{0,1;\ldots,9\}$ et $a_p\neq0$. Alors $c(n)=p+1$.
Déterminons p est en fonction de n. On a $10^p\leqslant n<10^{p+1}$ et donc $p=E(\log(n))$. Donc

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\ u_n=\frac{1}{n(E(\log n)+1)^\alpha}.$$

Par suite, $u_n\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{\ln^\alpha(10)}{n\ln^\alpha(n)}$ et la série de terme général u_n converge si et seulement si $\alpha>1$ (séries de BERTRAND). Redémontrons ce résultat qui n'est pas un résultat de cours.
La série de terme général $\frac{1}{n\ln n}$ est divergente (voir l'exercice 1, 4)). Par suite, si $\alpha\leqslant1$, la série de terme général $\frac{1}{n\ln^\alpha(n)}$ est divergente car $\forall n\geqslant2$, $\frac{1}{n\ln^\alpha(n)}\geqslant\frac{1}{n\ln n}$.
Soit $\alpha>1$. Puisque la fonction $x\mapsto\frac{1}{x\ln^\alpha x}$ est continue et strictement décroissante sur $]1,+\infty[$, pour $k\geqslant3$,

$$\frac{1}{k\ln^\alpha k}\leqslant\int_{k-1}^{k}\frac{1}{x\ln^\alpha x}\,dx$$

puis, pour $n\geqslant3$, en sommant pour $k\in[\![3,n]\!]$

$$\sum_{k=3}^{n}\frac{1}{k\ln^\alpha k}\leqslant\sum_{k=3}^{n}\int_{k-1}^{k}\frac{1}{x\ln^\alpha x}\,dx=\int_2^n\frac{1}{x\ln^\alpha x}\,dx=\frac{1}{\alpha-1}\left(\frac{1}{\ln^{\alpha-1}(2)}-\frac{1}{\ln^{\alpha-1}(n)}\right)\leqslant\frac{1}{\alpha-1}\frac{1}{\ln^{\alpha-1}(2)}.$$

Ainsi, la suite des sommes partielles de la série à termes positifs, de terme général $\frac{1}{k\ln^\alpha k}$, est majorée et donc la série de terme général $\frac{1}{k\ln^\alpha k}$ converge.
6 Soit $n\geqslant2$.

$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\frac{\ln^a(n+1)}{(n+1)^b}\underset{n\to+\infty}{\to}0<1$$

et d'après la règle de d'ALEMBERT, la série de terme général u_n converge.

6. $\lim_{n\to+\infty}u_n=\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{4}=0$. Donc

$$u_n\underset{n\to+\infty}{\sim}\tan(u_n)$$
$$=\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^a-\left(1-\frac{1}{n}\right)^a}{1+\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^a}\underset{n\to+\infty}{=}\frac{\frac{2a}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)}{2+O\left(\frac{1}{n^2}\right)}\underset{n\to+\infty}{=}\frac{a}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Par suite, la série de terme général u_n converge si et seulement si $a=0$.

7. La fonction $x \mapsto x^{3/2}$ est continue et croissante sur $\mathbb{R}^+$. Donc pour $k \geqslant 1$, $\int_{k-1}^{k} x^{3/2}\,dx \leqslant k^{3/2} \leqslant \int_{k}^{k+1} x^{3/2}\,dx$ puis pour $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\int_0^n x^{3/2}\,dx \sum_{k=1}^n \int_{k-1}^k x^{3/2}\,dx \leqslant \sum_{k=1}^n k^{3/2} \leqslant \sum_{k=1}^n \int_k^{k+1} x^{3/2}\,dx = \int_1^{n+1} x^{3/2}\,dx$$

ce qui fournit

$$\tfrac{2}{5}n^{5/2} \leqslant \sum_{k=1}^n k^{3/2} \leqslant \tfrac{2}{5}((n+1)^{5/2}-1) \text{ et donc } \sum_{k=1}^n k^{3/2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{2n^{5/2}}{5}.$$

Donc $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{2n^{\frac{5}{2}-\alpha}}{5} > 0$. La série de terme général u_n converge si et seulement si $\alpha > \frac{7}{2}$.

8. Pour $n \geqslant 1$,

$$u_n = \left(1+\tfrac{1}{n^\alpha}\right)\left(1+\tfrac{2}{n^\alpha}\right)\dots\left(1+\tfrac{n}{n^\alpha}\right) - 1 \geqslant \tfrac{1}{n^\alpha}+\tfrac{2}{n^\alpha}+\dots+\tfrac{n}{n^\alpha} = \tfrac{n(n+1)}{2n^\alpha} > 0.$$

Comme $\frac{n(n+1)}{2n^\alpha} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2n^{\alpha-2}}$, si $\alpha \leqslant 3$, on a $\alpha-2 \leqslant 1$ et la série de terme général u_n diverge.

Si $\alpha > 3$,

$$\begin{aligned} 0 < u_n &\leqslant \left(1+\frac{n}{n^\alpha}\right)^n - 1 = e^{n\ln\left(1+\frac{1}{n^{\alpha-1}}\right)} - 1 \\ &\underset{n\to+\infty}{\sim} n\ln\left(1+\frac{1}{n^{\alpha-1}}\right) \\ &\underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n^{\alpha-2}} \text{ terme général d'une série de RIEMANN convergente,} \end{aligned}$$

et, puisque $\alpha-2 > 1$, la série de terme général u_n converge. Finalement, la série de terme général u_n converge si et seulement si $\alpha > 3$.

Correction de l'exercice 3 ▲

1. Pour $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n = \sin\left(\frac{\pi n^2}{n+1}\right) = \sin\left(\frac{\pi(n^2-1+1)}{n+1}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{n+1}+(n-1)\pi\right) = (-1)^{n-1}\sin\left(\frac{\pi}{n+1}\right).$$

La suite $\left((-1)^{n-1}\sin\left(\frac{\pi}{n+1}\right)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est alternée en signe et sa valeur absolue tend vers 0 en décroissant. La série de terme général u_n converge donc en vertu du critère spécial aux séries alternées.

2. (la suite $\left(\frac{1}{n+(-1)^{n-1}}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas décroisante à partir d'un certain rang).

$$u_n = \frac{(-1)^n}{n}\frac{1}{1+\frac{(-1)^{n-1}}{n}} \underset{n\to+\infty}{=} \frac{(-1)^n}{n}\left(1+O\left(\frac{1}{n}\right)\right) \underset{n\to+\infty}{=} \frac{(-1)^n}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

La série de terme général $\frac{(-1)^n}{n}$ converge en vertu du critère spécial aux séries alternées et la série de terme général $O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ est absolument convergente. On en déduit que la série de terme général u_n converge.

3. $u_n = \ln\left(1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right) \underset{n\to+\infty}{=} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - \frac{1}{2n} + O\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)$. Les séries de termes généraux respectifs $\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ et $O\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)$ sont convergentes et la série de terme général $-\frac{1}{2n}$ est divergente. Si la série de terme général u_n convergeait alors la série de terme général $-\frac{1}{2n} = u_n - \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - O\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)$ convergerait ce qui n'est pas. Donc la série de terme général u_n diverge.

   Remarque. La série de terme général u_n diverge bien que u_n soit équivalent au terme général d'une série convergente.

4. Si $\alpha \in 2\pi\mathbb{Z}$, alors les deux premières séries divergent et la dernière converge.

   Soit $\alpha \notin 2\pi\mathbb{Z}$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, posons $v_n = e^{in\alpha}$ et $\varepsilon_n = \frac{1}{n}$ de sorte que $u_n = \varepsilon_n v_n$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, posons encore $V_n = \sum_{k=1}^n v_k$.

Pour $(n,p)\in(\mathbb{N}^*)^2$, posons enfin $R_n^p=\sum_{k=1}^{n+p}u_k-\sum_{k=1}^{n}u_k=\sum_{k=n+1}^{n+p}u_k$. (On effectue alors une transformation d'ABEL).

$$\begin{aligned}R_n^p&=\sum_{k=n+1}^{n+p}\varepsilon_k v_k=\sum_{k=n+1}^{n+p}\varepsilon_k(V_k-V_{k-1})=\sum_{k=n+1}^{n+p}\varepsilon_k V_k-\sum_{k=n+1}^{n+p}\varepsilon_k V_{k-1}=\sum_{k=n+1}^{n+p}\varepsilon_k V_k-\sum_{k=n}^{n+p-1}\varepsilon_{k+1}V_k\\&=\varepsilon_{n+p}V_{n+p}-\varepsilon_{n+1}V_n+\sum_{k=n+1}^{n+p-1}(\varepsilon_k-\varepsilon_{k+1})V_k.\end{aligned}$$

Maintenant, pour $n\in\mathbb{N}^*$, $V_n=e^{i\alpha}\frac{e^{in\alpha}-1}{e^{i\alpha}-1}=e^{i\alpha}\frac{\sin(n\alpha/2)}{\sin(\alpha/2)}$ et donc $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $|V_n|\leqslant\frac{1}{|\sin(\alpha/2)|}$. Par suite, pour $(n,p)\in(\mathbb{N}^*)^2$

$$\begin{aligned}|R_n^p|&=\left|\frac{1}{n+p}V_{n+p}-\frac{1}{n+1}V_n+\sum_{k=n+1}^{n+p-1}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)V_k\right|\\&\leqslant\frac{1}{|\sin(\alpha/2)|}\left(\frac{1}{n+p}+\frac{1}{n+1}+\sum_{k=n+1}^{n+p-1}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)\right)\\&=\frac{1}{|\sin(\alpha/2)|}\left(\frac{1}{n+p}+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+p}\right)=\frac{2}{|\sin(\alpha/2)|(n+1)}\\&\leqslant\frac{2}{n|\sin(\alpha/2)|}.\end{aligned}$$

Soit alors ε un réel strictement positif. Pour $n\geqslant E\left(\frac{2}{\varepsilon|\sin(\alpha/2)|}\right)+1$ et p entier naturel non nul quelconque, on a $|R_n^p|<\varepsilon$.

On a montré que $\forall\varepsilon>0$, $\exists n_0\in\mathbb{N}^*/\ \forall(n,p)\in\mathbb{N}^*$, $\left(n\geqslant n_0\Rightarrow\left|\sum_{k=1}^{n+p}u_k-\sum_{k=1}^{n}u_k\right|<\varepsilon\right.$.

Ainsi, la série de terme général u_n vérifie le critère de CAUCHY et est donc convergente. Il en est de même des séries de termes généraux respectifs $\frac{\cos(n\alpha)}{n}=\mathrm{Re}\left(\frac{e^{in\alpha}}{n}\right)$ et $\frac{\sin(n\alpha)}{n}=\mathrm{Im}\left(\frac{e^{in\alpha}}{n}\right)$.

5. Pour $x\in]0,+\infty[$, posons $f(x)=\frac{\ln x}{x}$. f est dérivable sur $]0,+\infty[$ et $\forall x>e$, $f'(x)=\frac{1-\ln x}{x}<0$.
Donc, la fonction f est décroissante sur $[e,+\infty[$. On en déduit que la suite $\left(\frac{\ln n}{n}\right)_{n\geqslant3}$ est une suite décroissante. Mais alors la série de terme général $(-1)^n\frac{\ln n}{n}$ converge en vertu du critère spécial aux séries alternées.

6. • Si $\deg P\geqslant\deg Q$, u_n ne tend pas vers 0 et la série de terme général u_n est grossièrement divergente.
• Si $\deg P\leqslant\deg Q-2$, $u_n=O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ et la série de terme général u_n est absolument convergente.
• Si $\deg P=\deg Q-1$, $u_n\underset{n\to+\infty}{=}(-1)^n\frac{\mathrm{dom}P}{n\,\mathrm{dom}Q}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)$. u_n est alors somme de deux termes généraux de séries convergentes et la série de terme général u_n converge.
En résumé, la série de terme général u_n converge si et seulement si $\deg P<\deg Q$.

7. $e=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{k!}$ puis pour $n\geqslant2$, $n!e=1+n+\sum_{k=0}^{n-2}\frac{n!}{k!}+\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{n!}{k!}$.
Pour $0\leqslant k\leqslant n-2$, $\frac{n!}{k!}$ est un entier divisible par $n(n-1)$ et est donc un entier pair que l'on note $2K_n$.
Pour $n\geqslant2$, on obtient

$$\sin(n!\pi e)=\sin\left(2K_n\pi+(n+1)\pi+\pi\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{n!}{k!}\right)=(-1)^{n+1}\sin\left(\pi\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{n!}{k!}\right).$$

Déterminons un développement limité à l'ordre 2 de $\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{n!}{k!}$ quand n tend vers $+\infty$.

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{n!}{k!}=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{(n+1)(n+2)}+\sum_{k=n+3}^{+\infty}\frac{n!}{k!}.$$

Maintenant, pour $k\geqslant n+3$, $\frac{n!}{k!}=\frac{1}{k(k-1)\ldots(n+1)}\leqslant\frac{1}{(n+1)^{k-n}}$ et donc

$$\sum_{k=n+3}^{+\infty}\frac{n!}{k!}\leqslant\sum_{k=n+3}^{+\infty}\frac{1}{(n+1)^{k-n}}=\frac{1}{(n+1)^3}\times\frac{1}{1-\frac{1}{n+1}}=\frac{1}{n(n+1)^2}\leqslant\frac{1}{n^3}.$$

On en déduit que $\sum_{k=n+3}^{+\infty}\frac{n!}{k!}\underset{n\to+\infty}{=}o\left(\frac{1}{n^2}\right)$. Il reste

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{n!}{k!}\underset{n\to+\infty}{=}\frac{1}{n+1}+\frac{1}{(n+1)(n+2)}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\underset{n\to+\infty}{=}\frac{1}{n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-1}+\frac{1}{n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\underset{n\to+\infty}{=}\frac{1}{n}+o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Finalement , $\sin(n!\pi e)\underset{n\to+\infty}{=}(-1)^{n+1}\sin\left(\frac{\pi}{n}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)=\frac{(-1)^{n+1}\pi}{n}+\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

$\sin(n!\pi e)$ est somme de deux termes généraux de séries convergentes et la série de terme général $\sin(n!\pi e)$ converge.

Si $p\geqslant 2$, $|\sin^p(n!\pi e)|\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{\pi^p}{n^p}$ et la série de terme général $\sin^p(n!\pi e)$ converge absolument.

Correction de l'exercice 4 ▲

1. $\frac{n+1}{3^n}\underset{n\to+\infty}{=}o\left(\frac{1}{n^2}\right)$. Par suite, la série de terme général $\frac{n+1}{3^n}$ converge.

   1er calcul. Soit $S=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{n+1}{3^n}$. Alors

$$\begin{aligned}\frac{1}{3}S&=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{n+1}{3^{n+1}}=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n}{3^n}=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n+1}{3^n}-\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{3^n}\\&=(S-1)-\frac{1}{3}\frac{1}{1-\frac{1}{3}}=S-\frac{3}{2}.\end{aligned}$$

   On en déduit que $S=\frac{9}{4}$.

$$\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{n+1}{3^n}=\frac{9}{4}.}$$

   2ème calcul. Pour $x\in\mathbb{R}$ et $n\in\mathbb{N}$, on pose $f_n(x)=\sum_{k=0}^{n}x^k$.
   Soit $n\in\mathbb{N}^*$. f_n est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour $x\in\mathbb{R}$,

$$f_n'(x)=\sum_{k=1}^{n}kx^{k-1}=\sum_{k=0}^{n-1}(k+1)x^k.$$

   Par suite, pour $n\in\mathbb{N}^*$ et $x\in\mathbb{R}\setminus\{1\}$

$$\sum_{k=0}^{n-1}(k+1)x^k=f_n'(x)=\left(\frac{x^n-1}{x-1}\right)'(x)=\frac{nx^{n-1}(x-1)-(x^n-1)}{(x-1)^2}=\frac{(n-1)x^n-nx^{n-1}+1}{(x-1)^2}.$$

   Pour $x=\frac{1}{3}$, on obtient $\sum_{k=0}^{n-1}\frac{k+1}{3^k}=\frac{\frac{n-1}{3^n}-\frac{n}{3^{n-1}}+1}{\left(\frac{1}{3}-1\right)^2}$ et quand n tend vers l'infini, on obtient de nouveau $S=\frac{9}{4}$.

2. Pour $k\geqslant 3$, $\frac{2k-1}{k^3-4k}=\frac{3}{8(k-2)}+\frac{1}{4k}-\frac{5}{8(k+2)}$. Puis

$$\begin{aligned}\sum_{k=3}^{n}\frac{2k-1}{k^3-4k}&=\frac{3}{8}\sum_{k=3}^{n}\frac{1}{k-2}+\frac{1}{4}\sum_{k=3}^{n}\frac{1}{k}-\frac{5}{8}\sum_{k=3}^{n}\frac{1}{k+2}=\frac{3}{8}\sum_{k=1}^{n-2}\frac{1}{k}+\frac{1}{4}\sum_{k=3}^{n}\frac{1}{k}-\frac{5}{8}\sum_{k=5}^{n+2}\frac{1}{k}\\&\underset{n\to+\infty}{=}\frac{3}{8}\left(1+\frac{1}{2}+\sum_{k=3}^{n}\frac{1}{k}\right)+\frac{1}{4}\sum_{k=3}^{n}\frac{1}{k}-\frac{5}{8}\left(-\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\sum_{k=3}^{n}\frac{1}{k}\right)+o(1)\\&\underset{n\to+\infty}{=}\frac{3}{8}\times\frac{3}{2}+\frac{5}{8}\times\frac{7}{12}+o(1)\underset{n\to+\infty}{=}\frac{89}{96}+o(1).\end{aligned}$$

   La série proposée est donc convergente de somme $\frac{89}{96}$.

$$\boxed{\sum_{n=3}^{+\infty}\frac{2n-1}{n^3-4n}=\frac{89}{96}.}$$

3. Pour $k\in\mathbb{N}$, on a $1^{3k}+j^{3k}+(j^2)^{3k}=3$ puis $1^{3k+1}+j^{3k+1}+(j^2)^{3k+1}=1+j+j^2=0$ et $1^{3k+2}+j^{3k+2}+(j^2)^{3k+2}=1+j^2+j^4=0$. Par suite,

$$e+e^j+e^{j^2}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1^n+j^n+(j^2)^n}{n!}=3\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(3n)!},$$

et donc

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(3n)!}&=\frac{1}{3}(e+e^j+e^{j^2})=\frac{1}{3}\left(e+e^{-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}}+e^{-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}}\right)=\frac{1}{3}\left(e+2e^{-1/2}\mathrm{Re}(e^{-i\sqrt{3}/2})\right)\\&=\frac{1}{3}\left(e+2e^{-1/2}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right).\end{aligned}$$

$$\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(3n)!}=\frac{1}{3}\left(e+\frac{2}{\sqrt{e}}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right).}$$

4.

$$\begin{aligned}\sum_{k=2}^{n}\left(\frac{1}{\sqrt{k-1}}+\frac{1}{\sqrt{k+1}}-\frac{2}{\sqrt{k}}\right)&=\sum_{k=2}^{n}\left(\left(\frac{1}{\sqrt{k-1}}-\frac{1}{\sqrt{k}}\right)-\left(\frac{1}{\sqrt{k}}-\frac{1}{\sqrt{k+1}}\right)\right)\\&=\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)-\left(\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)\text{ (somme télescopique)}\\&\underset{n\to+\infty}{=}1-\frac{1}{\sqrt{2}}+o(1)\end{aligned}$$

$$\boxed{\sum_{n=2}^{+\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n-1}}+\frac{1}{\sqrt{n+1}}-\frac{2}{\sqrt{n}}\right)=1-\frac{1}{\sqrt{2}}.}$$

5. $\ln\left(1+\frac{(-1)^n}{n}\right)\underset{n\to+\infty}{=}\frac{(-1)^n}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)$. Donc la série de terme général $\ln\left(1+\frac{(-1)^n}{n}\right)$ converge.

   Posons $S=\sum_{k=2}^{+\infty}\ln\left(1+\frac{(-1)^k}{k}\right)$ puis pour $n\geqslant 2$, $S_n=\sum_{k=2}^{n}\ln\left(1+\frac{(-1)^k}{k}\right)$. Puisque la série converge $S=\lim_{n\to+\infty}S_n=\lim_{p\to+\infty}S_{2p+1}$ avec

$$\begin{aligned}S_{2p+1}&=\sum_{k=2}^{2p+1}\ln\left(1+\frac{(-1)^k}{k}\right)=\sum_{k=1}^{p}\left(\ln\left(1-\frac{1}{2k+1}\right)+\ln\left(1+\frac{1}{2k}\right)\right)\\&=\sum_{k=1}^{p}(\ln(2k)-\ln(2k+1)+\ln(2k+1)-\ln(2k))=0\end{aligned}$$

   et quand p tend vers $+\infty$, on obtient $S=0$.

$$\boxed{\sum_{n=2}^{+\infty}\ln\left(1+\frac{(-1)^n}{n}\right)=0.}$$

6. Si $a\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$ alors, pour tout entier naturel n, $\frac{a}{2^n}\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$ et donc $\cos\left(\frac{a}{2^n}\right)>0$.
   Ensuite, $\ln\left(\cos\left(\frac{a}{2^n}\right)\right)\underset{n\to+\infty}{=}\ln\left(1+O\left(\frac{1}{2^{2n}}\right)\right)\underset{n\to+\infty}{=}O\left(\frac{1}{2^{2n}}\right)$ et la série converge. Ensuite,

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n}\ln\left(\cos\left(\frac{a}{2^k}\right)\right)&=\ln\left(\prod_{k=0}^{n}\cos\left(\frac{a}{2^k}\right)\right)=\ln\left(\prod_{k=0}^{n}\frac{\sin\left(2\times\frac{a}{2^k}\right)}{2\sin\left(\frac{a}{2^k}\right)}\right)=\ln\left(\frac{1}{2^{n+1}}\prod_{k=0}^{n}\frac{\sin\left(\frac{a}{2^{k-1}}\right)}{\sin\left(\frac{a}{2^k}\right)}\right)\\&=\ln\left(\frac{\sin(2a)}{2^{n+1}\sin\left(\frac{a}{2^n}\right)}\right)\text{ (produit télescopique)}\\&\underset{n\to+\infty}{\sim}\ln\left(\frac{\sin(2a)}{2^{n+1}\times\frac{a}{2^n}}\right)=\ln\left(\frac{\sin(2a)}{2a}\right).\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall a\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right[,\ \sum_{n=0}^{+\infty}\ln\left(\cos\left(\frac{a}{2^n}\right)\right)=\ln\left(\frac{\sin(2a)}{2a}\right).}$$

7. Vérifions que pour tout réel x on a $\text{th}(2x) = \frac{2\,\text{th}\,x}{1+\text{th}^2 x}$. Soit $x \in \mathbb{R}$.
$\text{ch}^2 x + \text{sh}^2 x = \frac{1}{4}((e^x+e^{-x})^2 + (e^x-e^{-x})^2) = \frac{1}{2}(e^{2x}+e^{-2x}) = \text{ch}(2x)$ et $2\,\text{sh}\,x\,\text{ch}\,x = \frac{1}{2}(e^x-e^{-x})(e^x+e^{-x}) = \frac{1}{2}(e^{2x}-e^{-2x}) = \text{sh}(2x)$ puis

$$\frac{2\,\text{th}\,x}{1+\text{th}^2 x} = \frac{2\,\text{sh}\,x\,\text{ch}\,x}{\text{ch}^2 x+\text{sh}^2 x} = \frac{\text{sh}(2x)}{\text{ch}(2x)} = \text{th}(2x).$$

Par suite, pour $x \in \mathbb{R}^*$, $\text{th}\,x = \frac{2}{\text{th}(2x)} - \frac{1}{\text{th}\,x}$. Mais alors, pour $a \in \mathbb{R}^*$ et $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k}\,\text{th}\left(\frac{a}{2^k}\right) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k}\left(\frac{2}{\text{th}\,\frac{a}{2^{k-1}}} - \frac{1}{\text{th}\,\frac{a}{2^k}}\right) = \sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{2^{k-1}\,\text{th}\,\frac{a}{2^{k-1}}} - \frac{1}{2^k\,\text{th}\,\frac{a}{2^k}}\right)\\ &= \frac{2}{\text{th}(2a)} - \frac{1}{2^n\,\text{th}\,\frac{a}{2^n}} \text{ (somme télescopique)}\\ &\underset{n\to+\infty}{\to} \frac{2}{\text{th}(2a)} - \frac{1}{a},\end{aligned}$$

ce qui reste vrai quand $a = 0$.

$$\boxed{\forall a \in \mathbb{R},\ \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n}\,\text{th}\left(\frac{a}{2^n}\right) = \frac{2}{\text{th}(2a)} - \frac{1}{a}.}$$

Correction de l'exercice 5 ▲

Il faut vérifier que $nu_n \underset{n\to+\infty}{\to} 0$. Pour $n \in \mathbb{N}$, posons $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\begin{aligned}0 < (2n)u_{2n} &= 2(\underbrace{u_{2n}+\ldots+u_{2n}}_{n}) \leqslant 2\sum_{k=n+1}^{2n} u_k \text{ (car la suite } u \text{ est décroissante)}\\ &= 2(S_{2n}-S_n).\end{aligned}$$

Puisque la série de terme général u_n converge, $\lim_{n\to+\infty} 2(S_{2n}-S_n) = 0$ et donc $\lim_{n\to+\infty}(2n)u_{2n} = 0$.
Ensuite, $0 < (2n+1)u_{2n+1} \leqslant (2n+1)u_{2n} = (2n)u_{2n} + u_{2n} \underset{n\to+\infty}{\to} 0$. Donc les suites des termes de rangs pairs et impairs extraites de la suite $(nu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent et ont même limite à savoir 0. On en déduit que $\lim_{n\to+\infty} nu_n = 0$ ou encore que $u_n \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{n}\right)$.

Contre exemple avec u non monotone. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \begin{cases} 0 \text{ si } n = 0\\ \frac{1}{n} \text{ si } n \text{ est un carré parfait non nul}\\ 0 \text{ sinon}\end{cases}$. La suite u est positive et $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{p^2} < +\infty$. Pourtant, $p^2 u_{p^2} = 1 \underset{p\to+\infty}{\to} 1$ et la suite (nu_n) admet une suite extraite convergeant vers 1. On a donc pas $\lim_{n\to+\infty} nu_n = 0$.

Correction de l'exercice 6 ▲

Soit σ une permutation de $[\![1,n]\!]$. Montrons que la suite $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{\sigma(k)}{k^2}$, $n \geqslant 1$, ne vérifie pas le critère de CAUCHY. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned}S_{2n} - S_n &= \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{\sigma(k)}{k^2} \geqslant \frac{1}{(2n)^2}\sum_{k=n+1}^{2n} \sigma(k)\\ &\geqslant \frac{1}{4n^2}(1+2+\ldots+n) \text{ (car les } n \text{ entiers } \sigma(k),\ 1 \leqslant k \leqslant n, \text{ sont strictement positifs et deux à deux distincts)}\\ &= \frac{n(n+1)}{8n^2} \geqslant \frac{n^2}{8n^2} = \frac{1}{8}.\end{aligned}$$

Si la suite (S_n) converge, on doit avoir $\lim_{n\to+\infty}(S_{2n}-S_n)=0$ ce qui contredit l'inégalité précédente. Donc la série de terme général $\frac{\sigma(n)}{n^2}$, $n\geqslant 1$, diverge.

Correction de l'exercice 7 ▲

Pour $n\in\mathbb{N}$, posons $v_n=\ln(1+u_n)$, $w_n=\frac{u_n}{1+u_n}$ et $t_n=\int_0^{u_n}\frac{dx}{1+x^e}$.

• Si $u_n\underset{n\to+\infty}{\to}0$, alors $0\leqslant u_n\underset{n\to+\infty}{\sim}v_n\underset{n\to+\infty}{\sim}w_n$. Dans ce cas, les séries de termes généraux u_n, v_n et w_n sont de même nature.

D'autre part, pour $n\in\mathbb{N}$, $\frac{u_n}{1+u_n^e}\leqslant t_n\leqslant u_n$ puis $\frac{1}{1+u_n^e}\leqslant\frac{t_n}{u_n}\leqslant 1$et donc $t_n\underset{n\to+\infty}{\sim}u_n$. Les séries de termes généraux u_n et t_n sont aussi de même nature.

• Si u_n ne tend pas vers 0, la série de terme général u_n est grossièrement divergente. Puisque $u_n=e^{v_n}-1$, v_n ne tend pas vers 0 et la série de terme général v_n est grossièrement divergente. Dans ce cas aussi, les séries de termes généraux sont de même nature.

De même, puisque $w_n=\frac{u_n}{1+u_n}<1$, on a $u_n=\frac{w_n}{1-w_n}$ et w_n ne peut tendre vers 0.

Enfin, puisque u_n ne tend pas vers 0, il existe $\varepsilon>0$ tel que pour tout entier naturel N, il existe $n=n(N)\geqslant N$ tel que $u_n\geqslant\varepsilon$. Pour cet ε et ces n, on a $t_n\geqslant\int_0^{\varepsilon}\frac{dx}{1+x^e}>0$ (fonction continue, positive et non nulle) et la suite t_n ne tend pas vers 0. Dans le cas où u_n ne tend pas vers 0, les quatre séries sont grossièrement divergentes.

Correction de l'exercice 8 ▲

Pour $n\in\mathbb{N}$, posons $u_n=(n+1)!\left(e-\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\right)$. Soit $n\in\mathbb{N}$.

$$\begin{aligned}
u_n&=\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{(n+1)!}{k!}\\
&=1+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{(n+2)(n+3)}+\frac{1}{(n+2)(n+3)(n+4)}+\frac{1}{(n+2)(n+3)(n+4)(n+5)}+\sum_{k=n+6}^{+\infty}\frac{1}{(n+2)(n+3)\dots k}
\end{aligned}$$

On a $0<\sum_{k=n+6}^{+\infty}\frac{1}{(n+2)(n+3)\dots k}=\sum_{k=n+1}\frac{1}{(n+2)^{k-(n+1)}}=\frac{1}{(n+2)^5}\frac{1}{1-\frac{1}{n+2}}=\frac{1}{(n+2)^4(n+1)}\leqslant\frac{1}{n^5}$. On en déduit que $\sum_{k=n+6}^{+\infty}\frac{1}{(n+2)(n+3)\dots k}\underset{n\to+\infty}{=}o\left(\frac{1}{n^4}\right)$. Donc

$$\begin{aligned}
u_n&\underset{n\to+\infty}{=}1+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{(n+2)(n+3)}+\frac{1}{(n+2)(n+3)(n+4)}+\frac{1}{(n+2)(n+3)(n+4)(n+5)}+o\left(\frac{1}{n^4}\right)\\
&\underset{n\to+\infty}{=}1+\frac{1}{n}\left(1+\frac{2}{n}\right)^{-1}+\frac{1}{n^2}\left(1+\frac{2}{n}\right)^{-1}\left(1+\frac{3}{n}\right)^{-1}+\frac{1}{n^3}\left(1+\frac{2}{n}\right)^{-1}\left(1+\frac{3}{n}\right)^{-1}\left(1+\frac{4}{n}\right)^{-1}+\frac{1}{n^4}+o\left(\frac{1}{n^4}\right)\\
&\underset{n\to+\infty}{=}1+\frac{1}{n}\left(1-\frac{2}{n}+\frac{4}{n^2}-\frac{8}{n^3}\right)+\frac{1}{n^2}\left(1-\frac{2}{n}+\frac{4}{n^2}\right)\left(1-\frac{3}{n}+\frac{9}{n^2}\right)+\frac{1}{n^3}\left(1-\frac{2}{n}\right)\left(1-\frac{3}{n}\right)\left(1-\frac{4}{n}\right)\\
&\quad+\frac{1}{n^4}+o\left(\frac{1}{n^4}\right)\\
&\underset{n\to+\infty}{=}1+\frac{1}{n}\left(1-\frac{2}{n}+\frac{4}{n^2}-\frac{8}{n^3}\right)+\frac{1}{n^2}\left(1-\frac{5}{n}+\frac{19}{n^2}\right)+\frac{1}{n^3}\left(1-\frac{9}{n}\right)+\frac{1}{n^4}+o\left(\frac{1}{n^4}\right)\\
&\underset{n\to+\infty}{=}1+\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}+\frac{3}{n^4}+o\left(\frac{1}{n^4}\right).
\end{aligned}$$

Finalement

$$\boxed{(n+1)!\left(e-\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\right)\underset{n\to+\infty}{=}1+\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}+\frac{3}{n^4}+o\left(\frac{1}{n^4}\right).}$$

Correction de l'exercice 9 ▲

Pour $n \in \mathbb{N}$, posons $u_n = \sin\left(\pi(2+\sqrt{3})^n\right)$. D'après la formule du binôme de NEWTON, $(2+\sqrt{3})^n = A_n + B_n\sqrt{3}$ où A_n et B_n sont des entiers naturels. Un calcul conjugué fournit aussi $(2-\sqrt{3})^n = A_n - B_n\sqrt{3}$. Par suite, $(2+\sqrt{3})^n + (2-\sqrt{3})^n = 2A_n$ est un entier pair. Par suite, pour $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n = \sin\left(2A_n\pi - \pi(2-\sqrt{3})^n\right) = -\sin\left(\pi(2-\sqrt{3})^n\right).$$

Mais $0 < 2-\sqrt{3} < 1$ et donc $(2-\sqrt{3})^n \underset{n\to+\infty}{\to} 0$. On en déduit que $|u_n| \underset{n\to+\infty}{\sim} \pi(2-\sqrt{3})^n$ terme général d'une série géométrique convergente. Donc la série de terme général u_n converge.

Correction de l'exercice 10 ▲

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a $\left(\sqrt{u_n} - \frac{1}{n}\right)^2$ et donc $0 \leqslant \frac{\sqrt{u_n}}{n} \leqslant \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{1}{n^2}\right)$. Comme la série terme général $\frac{1}{2}\left(u_n + \frac{1}{n^2}\right)$ converge, la série de terme général $\frac{\sqrt{u_n}}{n}$ converge.

Correction de l'exercice 11 ▲

Pour $n \geqslant 2$, $v_n = \frac{u_n+1-1}{(1+u_1)\dots(1+u_n)} = \frac{1}{(1+u_1)\dots(1+u_{n-1})} - \frac{1}{(1+u_1)\dots(1+u_n)}$ et d'autre part $v_1 = 1 - \frac{1}{1+u_1}$. Donc, pour $n \geqslant 2$

$$\sum_{k=1}^{n} v_k = 1 - \frac{1}{(1+u_1)\dots(1+u_n)} \text{ (somme télescopique).}$$

Si la série de terme général u_n converge alors $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$ et donc $0 < u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(1+u_n)$. Donc la série de terme général $\ln(1+u_n)$ converge ou encore la suite $\left(\ln\left(\prod_{k=1}^{n}(1+u_k)\right)\right)_{n\geqslant 1}$ converge vers un certain réel ℓ. Mais alors la suite $\left(\prod_{k=1}^{n}(1+u_k)\right)_{n\geqslant 1}$ converge vers le réel strictement positif $P = e^{\ell}$. Dans ce cas, la suite $\left(\sum_{k=1}^{n} v_k\right)_{n\geqslant 1}$ converge vers $1 - \frac{1}{P}$.
Si la série de terme général u_n diverge alors la série de terme général $\ln(1+u_n)$ diverge vers $+\infty$ et il en est de même que la suite $\left(\prod_{k=1}^{n}(1+u_k)\right)_{n\geqslant 1}$. Dans ce cas, la suite $\left(\sum_{k=1}^{n} v_k\right)_{n\geqslant 1}$ converge vers 1.

Correction de l'exercice 12 ▲

Etudions tout d'abord la convergence de la série de terme général $\frac{u_n}{S_n}$.
Si $\frac{u_n}{S_n}$ tend vers 0 alors

$$0 < \frac{u_n}{S_n} \underset{n\to+\infty}{\sim} -\ln\left(1 - \frac{u_n}{S_n}\right) = \ln\left(\frac{S_{n-1}}{S_n}\right) = \ln(S_n) - \ln(S_{n-1}).$$

Par hypothèse, $\lim_{n\to+\infty} S_n = +\infty$. On en déduit que la série de terme général $\ln(S_n) - \ln(S_{n-1})$ est divergente car $\sum_{k=1}^{n} \ln(S_k) - \ln(S_{k-1}) = \ln(S_n) - \ln(S_0) \underset{n\to+\infty}{\to} +\infty$. Dans ce cas, la série de terme général $\frac{u_n}{S_n}$ diverge ce qui est aussi le cas si $\frac{u_n}{S_n}$ ne tend pas vers 0.
Donc, dans tous les cas, la série de terme général $\frac{u_n}{S_n}$ diverge.
Si $\alpha \leqslant 1$, puisque S_n tend vers $+\infty$, à partir d'un certain rang on a $S_n^{\alpha} \leqslant S_n$ et donc $\frac{u_n}{S_n^{\alpha}} \geqslant \frac{u_n}{S_n}$. Donc, si $\alpha \leqslant 1$, la série de terme général $\frac{u_n}{S_n^{\alpha}}$ diverge.
Si $\alpha > 1$, puisque la suite (S_n) est croissante,

$$0 < \frac{u_n}{S_n^{\alpha}} = \frac{S_n - S_{n-1}}{S_n^{\alpha}} = \int_{S_{n-1}}^{S_n} \frac{dx}{S_n^{\alpha}} \leqslant \frac{dx}{x^{\alpha}} = \frac{1}{\alpha-1}\left(\frac{1}{S_{n-1}^{\alpha-1}} - \frac{1}{S_n^{\alpha-1}}\right),$$

qui est le terme général d'une série télescopique convergente puisque $\frac{1}{S_n^{\alpha-1}}$ tend vers 0 quand n tend vers l'infini. Dans ce cas, la série de terme général $\frac{u_n}{S_n^{\alpha}}$ converge.

$$\boxed{\text{La série de terme général } \frac{u_n}{S_n^{\alpha}} \text{ converge si et seulement si } \alpha > 1.}$$

Correction de l'exercice 13 ▲

Si $\alpha < 0$, $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} n^{-2\alpha}$ et si $\alpha = 0$, $u_n = 1+(-1)^n$. Donc si $\alpha \leqslant 0$, u_n ne tend pas vers 0. La série de terme général u_n diverge grossièrement dans ce cas.

On suppose dorénavant que $\alpha > 0$. Pour tout entier naturel non nul n, $|u_n| \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n^\alpha}$ et donc la série de terme général u_n converge absolument si et seulement si $\alpha > 1$.

Il reste à étudier le cas où $0 < \alpha \leqslant 1$. On a $u_n = \frac{(-1)^n}{n^\alpha} + \frac{1}{n^{2\alpha}}$. La suite $\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)_{n\geqslant 1}$ tend vers 0 en décroissant et donc la série de terme général $\frac{(-1)^n}{n^\alpha}$ converge en vertu du critère spécial aux séries alternées. On en déduit que la série de terme général u_n converge si et seulement si la série de terme général $\frac{1}{n^{2\alpha}}$ converge ou encore si et seulement si $\alpha > \frac{1}{2}$.

En résumé

Si $\alpha \leqslant 0$, la série de terme général $\frac{1+(-1)^n n^\alpha}{n^{2\alpha}}$ diverge grossièrement,

si $0 < \alpha \leqslant \frac{1}{2}$, la série de terme général $\frac{1+(-1)^n n^\alpha}{n^{2\alpha}}$ diverge,

si $\frac{1}{2} < \alpha \leqslant 1$, la série de terme général $\frac{1+(-1)^n n^\alpha}{n^{2\alpha}}$ est semi convergente,

si $\alpha > 1$, la série de terme général $\frac{1+(-1)^n n^\alpha}{n^{2\alpha}}$ converge absolument.

Correction de l'exercice 14 ▲

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note S_n la somme des n premiers termes de la série considérée et on pose $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$. Il est connu que $H_n \underset{n\to+\infty}{=} \ln n + \gamma + o(1)$.

Soit $m \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned}
S_{m(p+q)} &= \left(1+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{2p-1}\right) - \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2q}\right) + \left(\frac{1}{2p+1}+\ldots+\frac{1}{4p-1}\right) - \left(\frac{1}{2q+2}+\ldots+\frac{1}{4q}\right) + \ldots \\
&\quad + \left(\frac{1}{2(m-1)p+1}+\ldots+\frac{1}{2mp-1}\right) - \left(\frac{1}{2(m-1)q+2}+\ldots+\frac{1}{2mq}\right) \\
&= \sum_{k=1}^{mp} \frac{1}{2k-1} - \sum_{k=1}^{mq} \frac{1}{2k} = \sum_{k=1}^{2mp} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{mp} \frac{1}{2k} - \sum_{k=1}^{mq} \frac{1}{2k} = H_{2mp} - \frac{1}{2}(H_{mp}+H_{mq}) \\
&\underset{m\to+\infty}{=} (\ln(2mp)+\gamma) - \frac{1}{2}(\ln(mp)+\gamma+\ln(mq)+\gamma) + o(1) = \ln 2 + \frac{1}{2}\ln\left(\frac{p}{q}\right) + o(1).
\end{aligned}$$

Ainsi, la suite extraite $(S_{m(p+q)})_{m\in\mathbb{N}^*}$ converge vers $\ln 2 + \frac{1}{2}\ln\left(\frac{p}{q}\right)$.

Montrons alors que la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Il existe un unique entier naturel non nul m_n tel que $m_n(p+q) \leqslant n < (m_n+1)(p+q)$ à savoir $m_n = E\left(\frac{n}{p+q}\right)$.

$$\begin{aligned}
|S_n - S_{m_n(p+q)}| &\leqslant \frac{1}{2m_np+1} + \ldots + \frac{1}{2(m_n+1)p-1} + \frac{1}{2m_nq+2} + \frac{1}{2(m_n+1)q} \\
&\leqslant \frac{p}{2m_np+1} + \frac{q}{2m_nq+2} \leqslant \frac{1}{2m_n} + \frac{1}{2m_n} = \frac{1}{m_n}.
\end{aligned}$$

Soit alors $\varepsilon > 0$.

Puisque $\lim_{n\to+\infty} m_n = +\infty$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que pour $n \geqslant n_0$, $\frac{1}{m_n} < \frac{\varepsilon}{2}$ et aussi $\left|S_{m_n(p+q)} - \ln 2 - \frac{1}{2}\ln\left(\frac{p}{q}\right)\right| < \frac{\varepsilon}{2}$. Pour $n \geqslant n_0$, on a alors

$$\left|S_n-\ln 2-\frac{1}{2}\ln\left(\frac{p}{q}\right)\right| \leqslant |S_n-S_{m_n(p+q)}|+\left|S_{m_n(p+q)}-\ln 2-\frac{1}{2}\ln\left(\frac{p}{q}\right)\right| \leqslant \frac{1}{m_n}+\left|S_{m_n(p+q)}-\ln 2-\frac{1}{2}\ln\left(\frac{p}{q}\right)\right|$$
$$<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

On a montré que $\forall\varepsilon>0$, $\exists n_0\in\mathbb{N}^*/\ \forall n\in\mathbb{N}$, $(n\geqslant n_0\Rightarrow \left|S_n-\left(\ln 2+\frac{1}{2}\ln\left(\frac{p}{q}\right)\right)\right|<\varepsilon)$ et donc, la série proposée converge et a pour somme $\ln 2+\frac{1}{2}\ln\left(\frac{p}{q}\right)$.

Correction de l'exercice 15 ▲

La série proposée est le produit de CAUCHY de la série de terme général $\frac{1}{n^\alpha}$, $n\geqslant 1$, par elle même.
• Si $\alpha>1$, on sait que la série de terme général $\frac{1}{n^\alpha}$ converge absolument et donc que la série proposée converge.
• Si $0\leqslant\alpha\leqslant 1$, pour $0<k<n$ on a $0<k(n-k)\leqslant\frac{n}{2}\left(n-\frac{n}{2}\right)=\frac{n^2}{4}$. Donc $u_n\geqslant\frac{n-1}{\left(\frac{n^2}{4}\right)^\alpha}$ avec $\frac{n-1}{\left(\frac{n^2}{4}\right)^\alpha}\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{4^\alpha}{n^{2\alpha-1}}$.
Comme $2\alpha-1\leqslant 1$, la série proposée diverge.
• Si $\alpha<0$, $u_n\geqslant\frac{1}{(n-1)^\alpha}$ et donc u_n ne tend pas vers 0. Dans ce cas, la série proposée diverge grossièrement.

Correction de l'exercice 16 ▲

1. Soit $n\in\mathbb{N}$.

$$\begin{aligned}2n^3-3n^2+1&=2(n+3)(n+2)(n+1)-15n^2-22n-11=2(n+3)(n+2)(n+1)-15(n+3)(n+2)+53n+79\\&=2(n+3)(n+2)(n+1)-15(n+3)(n+2)+53(n+3)-80\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{2n^3-3n^2+1}{(n+3)!}&=\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{2}{n!}-\frac{15}{(n+1)!}+\frac{53}{(n+2)!}-\frac{80}{(n+3)!}\right)=2e-15(e-1)+53(e-2)-80\left(e-\frac{5}{2}\right)\\&=-40e+111.\end{aligned}$$

$$\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{2n^3-3n^2+1}{(n+3)!}=-40e+111.}$$

2. Pour $n\in\mathbb{N}$, on a $u_{n+1}=\frac{n+1}{a+n+1}u_n$. Par suite $(n+a+1)u_{n+1}=(n+1)u_n=(n+a)u_n+(1-a)u_n$ puis

$$(1-a)\sum_{k=1}^{n}u_k=\sum_{k=1}^{n}(k+a+1)u_{k+1}-\sum_{k=1}^{n}(k+a)u_k=(n+a+1)u_{n+1}-(a+1)u_1=(n+a+1)u_{n+1}-1.$$

Si $a=1$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $u_n=\frac{1}{n+1}$. Dans ce cas, la série diverge.
Si $a\neq 1$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $\sum_{k=1}^{n}u_k=\frac{1}{1-a}((n+a+1)u_{n+1}-1)=\frac{1}{a-1}-\frac{1}{a-1}(a+n+1)u_{n+1}$.
Si $a>1$, la suite u est strictement positive et la suite des sommes partielles (S_n) est majorée par $\frac{1}{a-1}$. Donc la série de terme général u_n converge. Il en est de même de la suite $((a+n+1)u_{n+1})$. Soit $\ell=\lim_{n\to+\infty}(a+n+1)u_{n+1}$.
Si $\ell\neq 0$, $u_{n+1}\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{\ell}{n+a+1}$ contredisant la convergence de la série de terme général u_n. Donc $\ell=0$ et

$$\text{si } a>1,\ \sum_{n=1}^{+\infty}u_n=\frac{1}{a-1}.$$

Si $0<a<1$, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $u_n\geqslant\frac{1\times 2\times\ldots\times n}{2\times 3\ldots\times(n+1)}=\frac{1}{n+1}$. Dans ce cas, la série diverge.

Correction de l'exercice 17 ▲

Pour tout entier naturel non nul n, $0 < \frac{1}{2^p n^{p-1}} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2n)^p} \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(n+k)^p} \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n^p} = \frac{1}{n^{p-1}}$ et la série de terme général u_n converge si et seulement si $p > 2$.

Correction de l'exercice 18 ▲

(On applique la règle de RAABE-DUHAMEL qui n'est pas un résultat de cours.) Pour $n \in \mathbb{N}$, posons $u_n = \frac{n!}{(a+1)(a+2)\dots(a+n)}$.

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n+1}{a+n+1} = \left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{a+1}{n}\right)^{-1} \underset{n\to+\infty}{=} \left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{a+1}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \underset{n\to+\infty}{=} 1-\frac{a}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

et « on sait » qu'il existe un réel strictement positif K tel que $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{K}{n^a}$.

Correction de l'exercice 19 ▲

Pour tout entier naturel non nul n, $0 < \frac{1}{2^p n^{p-1}} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2n)^p} \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(n+k)^p} \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n^p} = \frac{1}{n^{p-1}}$ et la série de terme général u_n converge si et seulement si $p > 2$.

Correction de l'exercice 20 ▲

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, posons $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$. Puisque la série de terme général $\frac{1}{k^2}$, $k \geqslant 1$, converge, la suite (R_n) est définie et tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$.
$0 < \frac{1}{k^2} \underset{k\to+\infty}{\sim} \frac{1}{k(k-1)} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$ et puisque la série de terme général $\frac{1}{k^2}$ converge, la règle de l'équivalence des restes de séries à termes positifs convergentes permet d'affirmer que

$$\begin{aligned}
R_n &= \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \sum_{k=n+1}^{+\infty} \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}\right) \\
&= \lim_{N\to+\infty} \sum_{k=n+1}^{N} \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}\right) \text{ (surtout ne pas décomposer en deux sommes)} \\
&= \lim_{N\to+\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{N}\right) \text{ (somme télescopique)} \\
&= \frac{1}{n}
\end{aligned}$$

ou encore $R_n \underset{n\to+\infty}{=} \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$.
Plus précisément, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $R_n - \frac{1}{n} = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} - \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k(k-1)} = -\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2(k-1)}$.
Or $-\frac{1}{k^2(k-1)} + \frac{1}{k(k-1)(k-2)} = \frac{2}{k^2(k-1)(k-2)}$ puis
$\frac{2}{k^2(k-1)(k-2)} - \frac{2}{k(k-1)(k-2)(k-3)} = -\frac{6}{k^2(k-1)(k-2)(k-3)}$ et donc

$$\begin{aligned}
R_n &= \frac{1}{n} - \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2(k-1)} = \frac{1}{n} - \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k(k-1)(k-2)} + \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{2}{k^2(k-1)(k-2)} \\
&= \frac{1}{n} - \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k(k-1)(k-2)} + \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{2}{k(k-1)(k-2)(k-3)} - \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{6}{k^2(k-1)(k-2)(k-3)}
\end{aligned}$$

Ensuite $\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2(k-1)(k-2)(k-3)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^5} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{4n^4}$ ou encore $-\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{6}{k^2(k-1)(k-2)(k-3)} \underset{n\to+\infty}{=} -\frac{3}{2n^4} + o\left(\frac{1}{n^4}\right)$. Puis

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{1}{k(k-1)(k-2)}=\lim_{N\to+\infty}\frac{1}{2}\sum_{k=n+1}^{N}\left(\frac{1}{(k-1)(k-2)}-\frac{1}{k(k-1)}\right)=\lim_{N\to+\infty}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n(n-1)}-\frac{1}{N(N-1)}\right)=\frac{1}{2n(n-1)}$$
$$=\frac{1}{2n^2}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{-1}\underset{n\to+\infty}{=}\frac{1}{2n^2}+\frac{1}{2n^3}+\frac{1}{2n^4}+o\left(\frac{1}{n^4}\right)$$

et

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{2}{k(k-1)(k-2)(k-3)}=\lim_{N\to+\infty}\frac{2}{3}\sum_{k=n+1}^{N}\left(\frac{1}{(k-1)(k-2)(k-3)}-\frac{1}{k(k-1)(k-2)}\right)$$
$$=\lim_{N\to+\infty}\frac{2}{3}\left(\frac{1}{n(n-1)(n-2)}-\frac{1}{N(N-1)(N-2)}\right)=\frac{2}{3n(n-1)(n-2)}$$
$$=\frac{2}{3n^3}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{-1}\left(1-\frac{2}{n}\right)^{-1}\underset{n\to+\infty}{=}\frac{2}{3n^3}\left(1+\frac{1}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\left(1+\frac{2}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)$$
$$\underset{n\to+\infty}{=}\frac{2}{3n^3}+\frac{2}{n^4}+o\left(\frac{1}{n^4}\right)$$

et finalement

$$R_n\underset{n\to+\infty}{=}\tfrac{1}{n}-\left(\tfrac{1}{2n^2}+\tfrac{1}{2n^3}+\tfrac{1}{2n^4}\right)+\left(\tfrac{2}{3n^3}+\tfrac{2}{n^4}\right)-\tfrac{3}{2n^4}+o\left(\tfrac{1}{n^4}\right)\underset{n\to+\infty}{=}\tfrac{1}{n}-\tfrac{1}{2n^2}+\tfrac{1}{6n^3}+o\left(\tfrac{1}{n^4}\right).$$

$$\boxed{\sum_{k=n+1}^{+\infty}\tfrac{1}{k^2}\underset{n\to+\infty}{=}\tfrac{1}{n}-\tfrac{1}{2n^2}+\tfrac{1}{6n^3}+o\left(\tfrac{1}{n^4}\right).}$$

Correction de l'exercice 21 ▲

1. La suite $\left(\frac{\ln n}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ tend vers 0, en décroissant à partir du rang 3 (fourni par l'étude de la fonction $x\mapsto\frac{\ln x}{x}$ sur $[e,+\infty[$) et donc la série de terme général $(-1)^n\frac{\ln n}{n}$, $n\geqslant 1$, converge en vertu du critère spécial aux séries alternées. Pour $n\in\mathbb{N}^*$, on pose $R_n=\sum_{p=n+1}^{+\infty}(-1)^p\frac{\ln p}{p}$.
   $(-1)^k\frac{\ln k}{k}$ n'est pas de signe constant à partir d'un certain rang et on ne peut donc lui appliquer la règle de l'équivalence des restes.
   Par contre, puisque la série de terme général $(-1)^k\frac{\ln k}{k}$ converge, on sait que l'on peut associer les termes à volonté et pour $k\in\mathbb{N}^*$, on a
   $$R_{2k-1}=\sum_{p=2k}^{+\infty}(-1)^p\tfrac{\ln p}{p}=\sum_{p=k}^{+\infty}\left(\tfrac{\ln(2p)}{2p}-\tfrac{\ln(2p+1)}{2p+1}\right).$$
   Puisque la fonction $x\mapsto\frac{\ln x}{x}$ est décroissante sur $[e,+\infty[$ et donc sur $[3,+\infty[$, pour $p\geqslant 2$, $\frac{\ln(2p)}{2p}-\frac{\ln(2p+1)}{2p+1}\geqslant 0$ et on peut utiliser la règle de l'équivalence des restes de séries à termes positifs convergentes.
   Cherchons déjà un équivalent plus simple de $\frac{\ln(2p)}{2p}-\frac{\ln(2p+1)}{2p+1}$ quand p tend vers $+\infty$.
   $$\frac{\ln(2p)}{2p}-\frac{\ln(2p+1)}{2p+1}=\frac{\ln(2p)}{2p}-\frac{1}{2p}\left(\ln(2p)+\ln\left(1+\frac{1}{2p}\right)\right)\left(1+\frac{1}{2p}\right)^{-1}$$
   $$\underset{p\to+\infty}{=}\frac{\ln(2p)}{2p}-\frac{1}{2p}\left(\ln(2p)+\frac{1}{2p}+o\left(\frac{1}{p}\right)\right)\left(1-\frac{1}{2p}+o\left(\frac{1}{p}\right)\right)$$
   $$\underset{p\to+\infty}{=}\frac{\ln(2p)}{4p^2}+o\left(\frac{\ln p}{p^2}\right)\underset{p\to+\infty}{=}\frac{\ln p+\ln 2}{4p^2}+o\left(\frac{\ln p}{p^2}\right)$$
   $$\underset{p\to+\infty}{\sim}\frac{\ln p}{4p^2}.$$

et donc $R_{2k-1} \underset{k\to+\infty}{\sim} \frac{1}{4}\sum_{p=k}^{+\infty}\frac{\ln p}{p^2}$.

Cherchons maintenant un équivalent simple de $\frac{\ln p}{p^2}$ de la forme $v_p - v_{p+1}$.

Soit $v_p = \frac{\ln p}{p} - \frac{\ln(p+1)}{p+1}$ (suggéré par $\left(\frac{\ln x}{x}\right)' = \frac{1-\ln x}{x^2} \underset{x\to+\infty}{\sim} -\frac{\ln x}{x^2}$). Alors

$$v_p - v_{p+1} = \frac{\ln p}{p} - \frac{1}{p}\left(\ln p + \ln\left(1+\frac{1}{p}\right)\right)\left(1+\frac{1}{p}\right)^{-1} \underset{p\to+\infty}{=} \frac{\ln p}{p} - \frac{1}{p}\left(\ln p + \frac{1}{p} + o\left(\frac{1}{p}\right)\right)\left(1 - \frac{1}{p} + o\left(\frac{1}{p}\right)\right)$$
$$\underset{p\to+\infty}{\sim} \frac{\ln p}{p^2}.$$

D'après la règle de l'équivalence des restes de séries à termes positifs convergentes, $R_{2k-1} \underset{k\to+\infty}{\sim} \frac{1}{4}\sum_{p=k}^{+\infty}\left(\frac{\ln p}{p} - \frac{\ln(p+1)}{p+1}\right.$
$\frac{\ln k}{4k}$ (série télescopique).

Puis, $R_{2k} = R_{2k-1} - \frac{\ln(2k)}{2k} \underset{k\to+\infty}{\sim} \frac{\ln k}{4k} - \frac{\ln(2k)}{2k} + o\left(\frac{\ln k}{k}\right) \underset{k\to+\infty}{\sim} \frac{\ln k}{4k} - \frac{\ln k}{2k} + o\left(\frac{\ln k}{k}\right) \underset{k\to+\infty}{\sim} -\frac{\ln k}{4k} + o\left(\frac{\ln k}{k}\right)$.

En résumé, $R_{2k-1} \underset{k\to+\infty}{\sim} \frac{\ln k}{4k}$ et $R_{2k} \underset{k\to+\infty}{\sim} -\frac{\ln k}{4k}$.

On peut unifier : $R_{2k-1} \underset{k\to+\infty}{\sim} \frac{\ln k}{4k} \underset{k\to+\infty}{\sim} \frac{\ln(2k-1)}{2(2k-1)}$ et $R_{2k} \underset{k\to+\infty}{\sim} -\frac{\ln k}{4k} \underset{k\to+\infty}{\sim} -\frac{\ln(2k)}{2(2k)}$. Finalement,

$$\boxed{\sum_{p=n+1}^{+\infty}(-1)^p\frac{\ln p}{p} \underset{n\to+\infty}{\sim} (-1)^{n-1}\frac{\ln n}{2n}.}$$

2. $\sum n^n$ est une série à termes positifs grossièrement divergente.

1 ère solution.

$0 < n^n \underset{n\to+\infty}{\sim} n^n - (n-1)^{n-1}$ car $\frac{n^n-(n-1)^{n-1}}{n^n} = 1 - \frac{1}{n-1}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n \underset{n\to+\infty}{=} 1 - \frac{1}{ne} + o\left(\frac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\to} 1$.

D'après la règle de l'équivalence des sommes partielles de séries à termes positifs divergentes,

$$\sum_{p=1}^{n}p^p \underset{n\to+\infty}{\sim} \sum_{p=2}^{n}p^p \underset{n\to+\infty}{\sim} \sum_{p=2}^{n}(p^p - (p-1)^{p-1}) = n^n - 1 \underset{n\to+\infty}{\sim} n^n.$$

(La somme est équivalente à son dermier terme.)

2 ème solution. Pour $n \geqslant 3$, $0 \leqslant \frac{1}{n^n}\sum_{p=1}^{n-2}p^p \leqslant \frac{1}{n^n} \times (n-2)(n-2)^{n-2} \leqslant \frac{n^{n-1}}{n^n} = \frac{1}{n}$. Donc $\frac{1}{n^n}\sum_{p=1}^{n-2}p^p$. On en déduit que $\frac{1}{n^n}\sum_{p=1}^{n}p^p = 1 + \frac{(n-1)^{n-1}}{n^n} + \frac{1}{n^n}\sum_{p=1}^{n-2}p^p \underset{n\to+\infty}{=} 1 + o(1) + o(1) = 1 + o(1)$.

$$\boxed{\sum_{p=1}^{n}p^p \underset{n\to+\infty}{\sim} n^n.}$$

Correction de l'exercice 22 ▲

Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Pour $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{p\}$, $\frac{1}{n^2-p^2} = \frac{1}{2p}\left(\frac{1}{n-p} - \frac{1}{n+p}\right)$. Donc pour $N > p$,

$$\sum_{1\leqslant n\leqslant N,\, n\neq p}\frac{1}{n^2-p^2} = \frac{1}{2p}\sum_{1\leqslant n\leqslant N,\, n\neq p}\left(\frac{1}{n-p} - \frac{1}{n+p}\right) = \frac{1}{2p}\left(\sum_{1-p\leqslant k\leqslant N-p,\, k\neq 0}\frac{1}{k} - \sum_{p+1\leqslant k\leqslant N+p,\, k\neq 2p}\frac{1}{k}\right)$$
$$= \frac{1}{2p}\left(-\sum_{k=1}^{p-1}\frac{1}{k} + \sum_{k=1}^{N-p}\frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{N+p}\frac{1}{k} + \frac{1}{2p} + \sum_{k=1}^{p}\frac{1}{k}\right) = \frac{1}{2p}\left(\frac{3}{2p} - \sum_{k=N-p+1}^{N+p}\frac{1}{k}\right)$$

Maintenant, $\sum_{k=N-p+1}^{N+p}\frac{1}{k} = \frac{1}{N-p+1} + \ldots + \frac{1}{N+p}$ est une somme de $2p-1$ termes tendant vers 0 quand N tend vers $+\infty$. Puisque $2p-1$ est constant quand N varie, $\lim_{N\to+\infty}\sum_{k=N-p+1}^{N+p}\frac{1}{k} = 0$ et donc

$$\sum_{n\in\mathbb{N}^*,\, n\neq p}\frac{1}{n^2-p^2} = \frac{1}{2p} \times \frac{3}{2p} = \frac{3}{4p^2} \text{ puis } \sum_{p\in\mathbb{N}^*}\left(\sum_{n\in\mathbb{N}^*,\, n\neq p}\frac{1}{n^2-p^2}\right) = \sum_{p=1}^{+\infty}\frac{3}{4p^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ donné, on a aussi $\sum_{p\in\mathbb{N}^*,\, p\neq n}\frac{1}{n^2-p^2} = -\sum_{p\in\mathbb{N}^*,\, p\neq n}\frac{1}{p^2-n^2} = -\frac{3}{4n^2}$ et donc

$$\sum_{n\in\mathbb{N}^*}\left(\sum_{p\in\mathbb{N}^*,\ p\neq n}\frac{1}{n^2-p^2}\right)=-\frac{\pi^2}{8}.$$

On en déduit que la suite double $\left(\frac{1}{n^2-p^2}\right)_{(n,p)\in(\mathbb{N}^*)^2,\ n\neq p}$ n'est pas sommable.

Correction de l'exercice 23 ▲

La suite $\left((-1)^n\frac{1}{3n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est alternée en signe et sa valeur absolue tend vers 0 en décroissant. Donc la série de terme général $(-1)^n\frac{1}{3n+1}$, $n\geqslant 1$, converge en vertu du critère spécial aux séries alternées.
Soit $n\in\mathbb{N}$.

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{3k+1}=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\int_0^1 t^{3k}\,dt=\int_0^1\frac{1-(-t^3)^{n+1}}{1-(-t^3)}\,dt=\int_0^1\frac{1}{1+t^3}\,dt+(-1)^n\int_0^1\frac{t^{3n+3}}{1+t^3}\,dt.$$

Mais $\left|(-1)^n\int_0^1\frac{t^{3n+3}}{1+t^3}\,dt\right|=\int_0^1\frac{t^{3n+3}}{1+t^3}\,dt\leqslant\int_0^1 t^{3n+3}\,dt=\frac{1}{3n+4}$. On en déduit que $(-1)^n\int_0^1\frac{t^{3n+3}}{1+t^3}\,dt$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$ et donc que

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{3n+1}=\int_0^1\frac{1}{1+t^3}\,dt.$$

Calculons cette dernière intégrale.

$$\frac{1}{X^3+1}=\frac{1}{(X+1)(X+j)(X+j^2)}=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{X+1}+\frac{j}{X+j}+\frac{j^2}{X+j^2}\right)=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{X+1}+\frac{-X+2}{X^2-X+1}\right)$$
$$\frac{1}{3}\left(\frac{1}{X+1}-\frac{1}{2}\frac{2X-1}{X^2-X+1}+\frac{3}{2}\frac{1}{\left(X-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}\right).$$

Donc,

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{3n+1}=\frac{1}{3}\left[\ln(t+1)-\frac{1}{2}\ln(t^2-t+1)+\sqrt{3}\arctan\left(\frac{2t-1}{\sqrt{3}}\right)\right]_0^1=\frac{1}{3}\left(\ln 2+\sqrt{3}\left(\frac{\pi}{6}-\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right)\right)=\frac{3\ln 2+\pi\sqrt{3}}{9}.$$

$$\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{3n+1}=\frac{3\ln 2+\pi\sqrt{3}}{9}.}$$

Correction de l'exercice 24 ▲

Pour tout entier $n\geqslant 2$, on a $nv_n-(n-1)v_{n-1}=u_n$ ce qui reste vrai pour $n=1$ si on pose de plus $v_0=0$. Par suite, pour $n\in\mathbb{N}^*$

$$\begin{aligned}v_n^2-2u_nv_n&=v_n^2-2(nv_n-(n-1)v_{n-1})v_n=-(2n-1)v_n^2+2(n-1)v_{n-1}v_n\\&\leqslant-(2n-1)v_n^2+(n-1)(v_{n-1}2+v_n^2)=(n-1)v_{n-1}^2-nv_n^2.\end{aligned}$$

Mais alors, pour $N\in\mathbb{N}^*$,

$$\sum_{n=1}^{N}(v_n^2-2u_nv_n)\leqslant\sum_{n=1}^{N}((n-1)v_{n-1}^2-nv_n^2)=-nv_n^2\leqslant 0.$$

Par suite,

$$\sum_{n=1}^{N}v_n^2\leqslant\sum_{n=1}^{N}2u_nv_n\leqslant 2\left(\sum_{n=1}^{N}u_n^2\right)^{1/2}\left(\sum_{n=1}^{N}v_n^2\right)^{1/2}\ \text{(inégalité de CAUCHY-SCHWARZ).}$$

Si $\left(\sum_{n=1}^{N}v_n^2\right)^{1/2}>0$, on obtient après simplification par $\left(\sum_{n=1}^{N}v_n^2\right)^{1/2}$ puis élévation au carré

$$\sum_{n=1}^{N}v_n^2\leqslant 4\sum_{n=1}^{N}u_n^2,$$

cette inégalité restant claire si $\left(\sum_{n=1}^N v_n^2\right)^{1/2} = 0$. Finalement,

$$\sum_{n=1}^N v_n^2 \leqslant 4\sum_{n=1}^N u_n^2 \leqslant 4\sum_{n=1}^{+\infty} u_n^2.$$

La suite des sommes partielles de la série de terme général $v_n^2 (\geqslant 0)$ est majorée. Donc la série de terme général v_n^2 converge et de plus, quand N tend vers l'infini, on obtient

$$\sum_{n=1}^{+\infty} v_n^2 \leqslant 4\sum_{n=1}^{+\infty} u_n^2.$$

Correction de l'exercice 25 ▲

Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$u_n = \frac{\pi}{4} - \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1} = \int_0^1 \frac{1}{1+t^2}\,dt - \sum_{k=0}^{n}(-1)^k \int_0^1 t^{2k}\,dt = \int_0^1 \frac{1}{1+t^2}\,dt - \int_0^1 \frac{1-(-t^2)^{n+1}}{1+t^2}\,dt$$
$$= (-1)^{n+1}\int_0^1 \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}\,dt.$$

Par suite, pour $N \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{n=0}^{N} u_n = \int_0^1 \sum_{n=0}^{N} \frac{(-t^2)^{n+1}}{1+t^2}\,dt = \int_0^1 (-t^2)\frac{1-(-t^2)^{N+1}}{(1+t^2)^2}\,dt = -\int_0^1 \frac{t^2}{(1+t^2)^2}\,dt + (-1)^{N+1}\int_0^1 \frac{t^{2N+2}}{(1+t^2)^2}\,dt.$$

Or $\left|(-1)^{N+1}\int_0^1 \frac{t^{2N+2}}{(1+t^2)^2}\,dt\right| = \int_0^1 \frac{t^{2N+2}}{(1+t^2)^2}\,dt \leqslant \int_0^1 t^{2N+2}\,dt = \frac{1}{2N+3}$. Comme $\frac{1}{2N+3}$ tend vers 0 quand N tend vers $+\infty$, il en est de même de $(-1)^{N+1}\int_0^1 \frac{t^{2N+2}}{(1+t^2)^2}\,dt$. On en déduit que la série de terme général u_n, $n \in \mathbb{N}$, converge et de plus

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = -\int_0^1 \frac{t^2}{(1+t^2)^2}\,dt = \int_0^1 \frac{t}{2} \times \frac{-2t}{(1+t^2)^2}\,dt$$
$$= \left[\frac{t}{2} \times \frac{1}{1+t^2}\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{2} \times \frac{1}{1+t^2}\,dt = \frac{1}{4} - \frac{\pi}{8}.$$

$$\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{\pi}{4} - \sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{2k+1}\right) = \frac{1}{4} - \frac{\pi}{8}.}$$
