

# Nombres complexes

---

## 1 Forme cartésienne, forme polaire

### Exercice 1

Mettre sous la forme  $a + ib$  ( $a, b \in \mathbb{R}$ ) les nombres :

$$\frac{3+6i}{3-4i} \quad ; \quad \left(\frac{1+i}{2-i}\right)^2 + \frac{3+6i}{3-4i} \quad ; \quad \frac{2+5i}{1-i} + \frac{2-5i}{1+i}.$$

[Indication ▼](#)   [Correction ▼](#)   [Vidéo ■](#)

[000001]

### Exercice 2

Écrire sous la forme  $a + ib$  les nombres complexes suivants :

1. Nombre de module 2 et d'argument  $\pi/3$ .
2. Nombre de module 3 et d'argument  $-\pi/8$ .

[Indication ▼](#)   [Correction ▼](#)   [Vidéo ■](#)

[000003]

### Exercice 3

Calculer le module et l'argument de  $u = \frac{\sqrt{6}-i\sqrt{2}}{2}$  et  $v = 1 - i$ . En déduire le module et l'argument de  $w = \frac{u}{v}$ .

[Indication ▼](#)   [Correction ▼](#)   [Vidéo ■](#)

[000011]

### Exercice 4

Déterminer le module et l'argument des nombres complexes :

$$e^{e^{i\alpha}} \quad \text{et} \quad e^{i\theta} + e^{2i\theta}.$$

[Indication ▼](#)   [Correction ▼](#)   [Vidéo ■](#)

[000013]

## 2 Racines carrées, équation du second degré

### Exercice 5

Calculer les racines carrées de 1,  $i$ ,  $3 + 4i$ ,  $8 - 6i$ , et  $7 + 24i$ .

[Indication ▼](#)   [Correction ▼](#)   [Vidéo ■](#)

[000027]

### Exercice 6

1. Calculer les racines carrées de  $\frac{1+i}{\sqrt{2}}$ . En déduire les valeurs de  $\cos(\pi/8)$  et  $\sin(\pi/8)$ .
2. Calculer les valeurs de  $\cos(\pi/12)$  et  $\sin(\pi/12)$ .

[Indication ▼](#)   [Correction ▼](#)   [Vidéo ■](#)

[000029]

### Exercice 7

---

Résoudre dans  $\mathbb{C}$  les équations suivantes :

$$\begin{aligned} z^2 + z + 1 = 0 \quad ; \quad z^2 - (1 + 2i)z + i - 1 = 0 \quad ; \quad z^2 - \sqrt{3}z - i = 0 \quad ; \\ z^2 - (5 - 14i)z - 2(5i + 12) = 0 \quad ; \quad z^2 - (3 + 4i)z - 1 + 5i = 0 \quad ; \quad 4z^2 - 2z + 1 = 0 \quad ; \\ z^4 + 10z^2 + 169 = 0 \quad ; \quad z^4 + 2z^2 + 4 = 0. \end{aligned}$$

[Indication ▼](#)   [Correction ▼](#)   [Vidéo ■](#)

[000031]

### 3 Racine $n$ -ième

#### Exercice 8

Calculer la somme  $S_n = 1 + z + z^2 + \dots + z^n$ .

[Indication ▼](#)   [Correction ▼](#)   [Vidéo ■](#)

[000047]

#### Exercice 9

1. Résoudre  $z^3 = 1$  et montrer que les racines s'écrivent  $1, j, j^2$ . Calculer  $1 + j + j^2$  et en déduire les racines de  $1 + z + z^2 = 0$ .
2. Résoudre  $z^n = 1$  et montrer que les racines s'écrivent  $1, \varepsilon, \dots, \varepsilon^{n-1}$ . En déduire les racines de  $1 + z + z^2 + \dots + z^{n-1} = 0$ . Calculer, pour  $p \in \mathbb{N}$ ,  $1 + \varepsilon^p + \varepsilon^{2p} + \dots + \varepsilon^{(n-1)p}$ .

[Correction ▼](#)   [Vidéo ■](#)

[000048]

#### Exercice 10

Trouver les racines cubiques de  $2 - 2i$  et de  $11 + 2i$ .

[Correction ▼](#)   [Vidéo ■](#)

[000043]

#### Exercice 11

1. Soient  $z_1, z_2, z_3$  trois nombres complexes distincts ayant le même cube.  
Exprimer  $z_2$  et  $z_3$  en fonction de  $z_1$ .
2. Donner, sous forme polaire, les solutions dans  $\mathbb{C}$  de :

$$z^6 + (7 - i)z^3 - 8 - 8i = 0.$$

(Indication : poser  $Z = z^3$  ; calculer  $(9 + i)^2$ )

[Correction ▼](#)   [Vidéo ■](#)

[000056]

### 4 Géométrie

#### Exercice 12

Déterminer l'ensemble des nombres complexes  $z$  tels que :

1.  $\left| \frac{z-3}{z-5} \right| = 1,$
2.  $\left| \frac{z-3}{z-5} \right| = \frac{\sqrt{2}}{2}.$

**Exercice 13**

Montrer que pour  $u, v \in \mathbb{C}$ , on a  $|u+v|^2 + |u-v|^2 = 2(|u|^2 + |v|^2)$ . Donner une interprétation géométrique.

Indication ▼ Correction ▼ Vidéo ■

[000069]

**Exercice 14**

Soit  $(A_0, A_1, A_2, A_3, A_4)$  un pentagone régulier. On note  $O$  son centre et on choisit un repère orthonormé  $(O, \vec{u}, \vec{v})$  avec  $\vec{u} = \overrightarrow{OA_0}$ , qui nous permet d'identifier le plan avec l'ensemble des nombres complexes  $\mathbb{C}$ .

1. Donner les affixes  $\omega_0, \dots, \omega_4$  des points  $A_0, \dots, A_4$ . Montrer que  $\omega_k = \omega_1^k$  pour  $k \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$ . Montrer que  $1 + \omega_1 + \omega_1^2 + \omega_1^3 + \omega_1^4 = 0$ .
2. En déduire que  $\cos(\frac{2\pi}{5})$  est l'une des solutions de l'équation  $4z^2 + 2z - 1 = 0$ . En déduire la valeur de  $\cos(\frac{2\pi}{5})$ .
3. On considère le point  $B$  d'affixe  $-1$ . Calculer la longueur  $BA_2$  en fonction de  $\sin \frac{\pi}{10}$  puis de  $\sqrt{5}$  (on remarquera que  $\sin \frac{\pi}{10} = \cos \frac{2\pi}{5}$ ).
4. On considère le point  $I$  d'affixe  $\frac{i}{2}$ , le cercle  $\mathcal{C}$  de centre  $I$  de rayon  $\frac{1}{2}$  et enfin le point  $J$  d'intersection de  $\mathcal{C}$  avec la demi-droite  $[BI)$ . Calculer la longueur  $BI$  puis la longueur  $BJ$ .
5. **Application :** Dessiner un pentagone régulier à la règle et au compas. Expliquer.

Correction ▼ Vidéo ■

[000077]

## 5 Trigonométrie

**Exercice 15**

Soit  $z$  un nombre complexe de module  $\rho$ , d'argument  $\theta$ , et soit  $\bar{z}$  son conjugué. Calculer  $(z + \bar{z})(z^2 + \bar{z}^2) \dots (z^n + \bar{z}^n)$  en fonction de  $\rho$  et  $\theta$ .

Indication ▼ Correction ▼ Vidéo ■

[000020]

**Exercice 16**

En utilisant les nombres complexes, calculer  $\cos 5\theta$  et  $\sin 5\theta$  en fonction de  $\cos \theta$  et  $\sin \theta$ .

Indication ▼ Correction ▼ Vidéo ■

[000080]

## 6 Divers

**Exercice 17**

Soit  $\mathbb{Z}[i] = \{a + ib ; a, b \in \mathbb{Z}\}$ .

1. Montrer que si  $\alpha$  et  $\beta$  sont dans  $\mathbb{Z}[i]$  alors  $\alpha + \beta$  et  $\alpha\beta$  le sont aussi.
2. Trouver les éléments inversibles de  $\mathbb{Z}[i]$ , c'est-à-dire les éléments  $\alpha \in \mathbb{Z}[i]$  tels qu'il existe  $\beta \in \mathbb{Z}[i]$  avec  $\alpha\beta = 1$ .
3. Vérifier que quel que soit  $\omega \in \mathbb{C}$  il existe  $\alpha \in \mathbb{Z}[i]$  tel que  $|\omega - \alpha| < 1$ .
4. Montrer qu'il existe sur  $\mathbb{Z}[i]$  une division euclidienne, c'est-à-dire que, quels que soient  $\alpha$  et  $\beta$  dans  $\mathbb{Z}[i]$  il existe  $q$  et  $r$  dans  $\mathbb{Z}[i]$  vérifiant :

$$\alpha = \beta q + r \quad \text{avec} \quad |r| < |\beta|.$$

(Indication : on pourra considérer le complexe  $\frac{\alpha}{\beta}$ )



**Indication pour l'exercice 1 ▲**

---

Pour se “débarrasser” d’un dénominateur écrivez  $\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1}{z_2} \cdot \frac{\bar{z}_2}{\bar{z}_2} = \frac{z_1 \bar{z}_2}{|z_2|^2}$ .

---

**Indication pour l'exercice 2 ▲**

---

Il faut bien connaître ses formules trigonométriques. En particulier si l’on connaît  $\cos(2\theta)$  ou  $\sin(2\theta)$  on sait calculer  $\cos \theta$  et  $\sin \theta$ .

---

**Indication pour l'exercice 3 ▲**

---

Passez à la forme trigonométrique. Souvenez-vous des formules sur les produits de puissances :

$$e^{ia}e^{ib} = e^{i(a+b)} \text{ et } e^{ia}/e^{ib} = e^{i(a-b)}.$$

---

**Indication pour l'exercice 4 ▲**

---

Pour calculer une somme du type  $e^{iu} + e^{iv}$  il est souvent utile de factoriser par  $e^{i\frac{u+v}{2}}$ .

---

**Indication pour l'exercice 5 ▲**

---

Pour  $z = a + ib$  on cherche  $\omega = \alpha + i\beta$  tel que  $(\alpha + i\beta)^2 = a + ib$ . Développez et identifiez. Utilisez aussi que  $|\omega|^2 = |z|$ .

---

**Indication pour l'exercice 6 ▲**

---

Il s’agit de calculer les racines carrées de  $\frac{1+i}{\sqrt{2}} = e^{i\frac{\pi}{4}}$  de deux façons différentes.

---

**Indication pour l'exercice 7 ▲**

---

Pour les équation du type  $az^4 + bz^2 + c = 0$ , poser  $Z = z^2$ .

---

**Indication pour l'exercice 8 ▲**

---

Calculer  $(1 - z)S_n$ .

---

**Indication pour l'exercice 12 ▲**

---

Le premier ensemble est une droite le second est un cercle.

---

**Indication pour l'exercice 13 ▲**

---

Pour l’interprétation géométrique cherchez le parallélogramme.

---

**Indication pour l'exercice 15 ▲**

---

Utiliser la formule d’Euler pour faire apparaître des cosinus.

---

**Indication pour l'exercice 16 ▲**

---

Appliquer deux fois la formule de Moivre en remarquant  $e^{i5\theta} = (e^{i\theta})^5$ .

---

### Correction de l'exercice 1 ▲

Remarquons d'abord que pour  $z \in \mathbb{C}$ ,  $z\bar{z} = |z|^2$  est un nombre réel, ce qui fait qu'en multipliant le dénominateur par son conjugué nous obtenons un nombre réel.

$$\frac{3+6i}{3-4i} = \frac{(3+6i)(3+4i)}{(3-4i)(3+4i)} = \frac{9-24+12i+18i}{9+16} = \frac{-15+30i}{25} = -\frac{3}{5} + \frac{6}{5}i.$$

Calculons

$$\frac{1+i}{2-i} = \frac{(1+i)(2+i)}{5} = \frac{1+3i}{5},$$

et

$$\left(\frac{1+i}{2-i}\right)^2 = \left(\frac{1+3i}{5}\right)^2 = \frac{-8+6i}{25} = -\frac{8}{25} + \frac{6}{25}i.$$

Donc

$$\left(\frac{1+i}{2-i}\right)^2 + \frac{3+6i}{3-4i} = -\frac{8}{25} + \frac{6}{25}i - \frac{3}{5} + \frac{6}{5}i = -\frac{23}{25} + \frac{36}{25}i.$$

Soit  $z = \frac{2+5i}{1-i}$ . Calculons  $z + \bar{z}$ , nous savons déjà que c'est un nombre réel, plus précisément :  $z = -\frac{3}{2} + \frac{7}{2}i$  et donc  $z + \bar{z} = -3$ .

### Correction de l'exercice 2 ▲

1.  $z_1 = 2e^{i\frac{\pi}{3}} = 2(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}) = 2(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}) = 1 + i\sqrt{3}.$

2.  $z_2 = 3e^{-i\frac{\pi}{8}} = 3\cos \frac{\pi}{8} - 3i\sin \frac{\pi}{8} = \frac{3\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} - \frac{3i\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}.$

Il nous reste à expliquer comment nous avons calculé  $\cos \frac{\pi}{8}$  et  $\sin \frac{\pi}{8}$  : posons  $\theta = \frac{\pi}{8}$ , alors  $2\theta = \frac{\pi}{4}$  et donc  $\cos(2\theta) = \frac{\sqrt{2}}{2} = \sin(2\theta)$ . Mais  $\cos(2\theta) = 2\cos^2 \theta - 1$ . Donc  $\cos^2 \theta = \frac{\cos(2\theta)+1}{2} = \frac{1}{4}(2 + \sqrt{2})$ . Et ensuite  $\sin^2 \theta = 1 - \cos^2 \theta = \frac{1}{4}(2 - \sqrt{2})$ . Comme  $0 \leq \theta = \frac{\pi}{8} \leq \frac{\pi}{2}$ ,  $\cos \theta$  et  $\sin \theta$  sont des nombres positifs. Donc

$$\cos \frac{\pi}{8} = \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}} \quad , \quad \sin \frac{\pi}{8} = \frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}.$$

### Correction de l'exercice 3 ▲

Nous avons

$$u = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}i}{2} = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}\right) = \sqrt{2}\left(\cos \frac{\pi}{6} - i\sin \frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{6}}.$$

puis

$$v = 1 - i = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}.$$

Il ne reste plus qu'à calculer le quotient :

$$\frac{u}{v} = \frac{\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{6}}}{\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}} = e^{-i\frac{\pi}{6}+i\frac{\pi}{4}} = e^{i\frac{\pi}{12}}.$$

### Correction de l'exercice 4 ▲

D'après la formule de Moivre pour  $e^{i\alpha}$  nous avons :

$$e^{e^{i\alpha}} = e^{\cos \alpha + i \sin \alpha} = e^{\cos \alpha} e^{i \sin \alpha}.$$

Or  $e^{\cos \alpha} > 0$  donc l'écriture précédente est bien de la forme "module-argument".

De façon générale pour calculer une somme du type  $e^{iu} + e^{iv}$  il est souvent utile de factoriser par  $e^{i\frac{u+v}{2}}$ . En effet

$$\begin{aligned} e^{iu} + e^{iv} &= e^{i\frac{u+v}{2}} \left( e^{i\frac{u-v}{2}} + e^{-i\frac{u-v}{2}} \right) \\ &= e^{i\frac{u+v}{2}} 2 \cos \frac{u-v}{2} \\ &= 2 \cos \frac{u-v}{2} e^{i\frac{u+v}{2}}. \end{aligned}$$

Ce qui est proche de l'écriture en coordonnées polaires.

Pour le cas qui nous concerne :

$$z = e^{i\theta} + e^{2i\theta} = e^{i\frac{3\theta}{2}} \left[ e^{-i\frac{\theta}{2}} + e^{i\frac{\theta}{2}} \right] = 2 \cos \frac{\theta}{2} e^{i\frac{3\theta}{2}}.$$

Attention le module dans une décomposition en forme polaire doit être positif ! Donc si  $\cos \frac{\theta}{2} \geq 0$  alors  $2 \cos \frac{\theta}{2}$  est le module de  $z$  et  $3\theta/2$  est son argument ; par contre si  $\cos \frac{\theta}{2} < 0$  le module est  $2|\cos \frac{\theta}{2}|$  et l'argument  $3\theta/2 + \pi$  (le  $+\pi$  compense le changement de signe car  $e^{i\pi} = -1$ ).

---

### Correction de l'exercice 5 ▲

**Racines carrées.** Soit  $z = a + ib$  un nombre complexe avec  $a, b \in \mathbb{R}$  ; nous cherchons les complexes  $\omega \in \mathbb{C}$  tels que  $\omega^2 = z$ . Écrivons  $\omega = \alpha + i\beta$ . Nous raisonnons par équivalence :

$$\begin{aligned} \omega^2 = z &\Leftrightarrow (\alpha + i\beta)^2 = a + ib \\ &\Leftrightarrow \alpha^2 - \beta^2 + 2i\alpha\beta = a + ib \end{aligned}$$

Soit en identifiant les parties réelles entre elles ainsi que les parties imaginaires :

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha^2 - \beta^2 = a \\ 2\alpha\beta = b \end{cases}$$

Sans changer l'équivalence nous rajoutons la condition  $|\omega|^2 = |z|$ .

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha^2 + \beta^2 = \sqrt{a^2 + b^2} \\ \alpha^2 - \beta^2 = a \\ 2\alpha\beta = b \end{cases}$$

Par somme et différence des deux premières lignes :

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha^2 = \frac{a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2} \\ \beta^2 = \frac{-a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2} \\ 2\alpha\beta = b \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \pm \sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}} \\ \beta = \pm \sqrt{\frac{-a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}} \\ \alpha\beta \text{ est du même signe que } b \end{cases} \end{aligned}$$

Cela donne deux couples  $(\alpha, \beta)$  de solutions et donc deux racines carrées (opposées)  $\omega = \alpha + i\beta$  de  $z$ .

En pratique on répète facilement ce raisonnement, par exemple pour  $z = 8 - 6i$ ,

$$\begin{aligned}
 \omega^2 = z &\Leftrightarrow (\alpha + i\beta)^2 = 8 - 6i \\
 &\Leftrightarrow \alpha^2 - \beta^2 + 2i\alpha\beta = 8 - 6i \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha^2 - \beta^2 = 8 \\ 2\alpha\beta = -6 \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha^2 + \beta^2 = \sqrt{8^2 + (-6)^2} = 10 \text{ le module de } z \\ \alpha^2 - \beta^2 = 8 \\ 2\alpha\beta = -6 \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} 2\alpha^2 = 18 \\ \beta^2 = 1 \\ 2\alpha\beta = -6 \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \pm\sqrt{9} = \pm 3 \\ \beta = \pm 1 \\ \alpha \text{ et } \beta \text{ de signes opposés} \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 3 \text{ et } \beta = -1 \\ \text{ou} \\ \alpha = -3 \text{ et } \beta = +1 \end{cases}
 \end{aligned}$$

Les racines de  $z = 8 - 6i$  sont donc  $\omega_1 = 3 - i$  et  $\omega_2 = -\omega_1 = -3 + i$ .

Pour les autres :

- Les racines carrées de 1 sont :  $+1$  et  $-1$ .
- Les racines carrées de  $i$  sont :  $\frac{\sqrt{2}}{2}(1 + i)$  et  $-\frac{\sqrt{2}}{2}(1 + i)$ .
- Les racines carrées de  $3 + 4i$  sont :  $2 + i$  et  $-2 - i$ .
- Les racines carrées de  $7 + 24i$  sont :  $4 + 3i$  et  $-4 - 3i$ .

### Correction de l'exercice 6 ▲

Par la méthode usuelle nous calculons les racines carrées  $\omega, -\omega$  de  $z = \frac{1+i}{\sqrt{2}}$ , nous obtenons

$$\omega = \sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2\sqrt{2}}} + i\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}}},$$

qui peut aussi s'écrire :

$$\omega = \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}} + i\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}.$$

Mais nous remarquons que  $z$  s'écrit également

$$z = e^{i\frac{\pi}{4}}$$

et  $e^{i\frac{\pi}{8}}$  vérifie

$$\left(e^{i\frac{\pi}{8}}\right)^2 = e^{\frac{2i\pi}{8}} = e^{i\frac{\pi}{4}}.$$

Cela signifie que  $e^{i\frac{\pi}{8}}$  est une racine carrée de  $z$ , donc  $e^{i\frac{\pi}{8}} = \cos \frac{\pi}{8} + i \sin \frac{\pi}{8}$  est égal à  $\omega$  ou  $-\omega$ . Comme  $\cos \frac{\pi}{8} > 0$  alors  $e^{i\frac{\pi}{8}} = \omega$  et donc par identification des parties réelles et imaginaires :

$$\cos \frac{\pi}{8} = \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}} \quad \text{et} \quad \sin \frac{\pi}{8} = \frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}.$$



### Correction de l'exercice 7 ▲

**Équations du second degré.** La méthode générale pour résoudre les équations du second degré  $az^2 + bz + c = 0$  (avec  $a, b, c \in \mathbb{C}$  et  $a \neq 0$ ) est la suivante : soit  $\Delta = b^2 - 4ac$  le discriminant complexe et  $\delta$  une racine carrée de  $\Delta$  ( $\delta^2 = \Delta$ ) alors les solutions sont :

$$z_1 = \frac{-b + \delta}{2a} \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{-b - \delta}{2a}.$$

Dans le cas où les coefficients sont réels, on retrouve la méthode bien connue. Le seul travail dans le cas complexe est de calculer une racine  $\delta$  de  $\Delta$ .

Exemple : pour  $z^2 - \sqrt{3}z - i = 0$ ,  $\Delta = 3 + 4i$ , dont une racine carrée est  $\delta = 2 + i$ , les solutions sont donc :

$$z_1 = \frac{\sqrt{3} + 2 + i}{2} \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{\sqrt{3} - 2 - i}{2}.$$

Les solutions des autres équations sont :

- L'équation  $z^2 + z + 1 = 0$  a pour solutions :  $\frac{1}{2}(-1 + i\sqrt{3})$ ,  $\frac{1}{2}(-1 - i\sqrt{3})$ .
- L'équation  $z^2 - (1 + 2i)z + i - 1 = 0$  a pour solutions :  $1 + i$ ,  $i$ .
- L'équation  $z^2 - \sqrt{3}z - i = 0$  a pour solutions :  $\frac{1}{2}(2 - \sqrt{3} + i)$ ,  $\frac{1}{2}(-2 - \sqrt{3} - i)$ .
- L'équation  $z^2 - (5 - 14i)z - 2(5i + 12) = 0$  a pour solutions :  $5 - 12i$ ,  $-2i$ .
- L'équation  $z^2 - (3 + 4i)z - 1 + 5i = 0$  a pour solutions :  $2 + 3i$ ,  $1 + i$ .
- L'équation  $4z^2 - 2z + 1 = 0$  a pour solutions :  $\frac{1}{4}(1 + i\sqrt{3})$ ,  $\frac{1}{4}(1 - i\sqrt{3})$ .
- L'équation  $z^4 + 10z^2 + 169 = 0$  a pour solutions :  $2 + 3i$ ,  $-2 - 3i$ ,  $2 - 3i$ ,  $-2 + 3i$ .
- L'équation  $z^4 + 2z^2 + 4 = 0$  a pour solutions :  $\frac{\sqrt{2}}{2}(1 + i\sqrt{3})$ ,  $\frac{\sqrt{2}}{2}(1 - i\sqrt{3})$ ,  $\frac{\sqrt{2}}{2}(-1 + i\sqrt{3})$ ,  $\frac{\sqrt{2}}{2}(-1 - i\sqrt{3})$ .

### Correction de l'exercice 8 ▲

$$S_n = 1 + z + z^2 + \dots + z^n = \sum_{k=0}^n z^k.$$

Nous devons retrouver le résultat sur la somme  $S_n = \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z}$  d'une suite géométrique dans le cas où  $z \neq 1$  est un réel. Soit maintenant  $z \neq 1$  un nombre complexe. Calculons  $S_n(1 - z)$ .

$$\begin{aligned} S_n(1 - z) &= (1 + z + z^2 + \dots + z^n)(1 - z) \text{ développons} \\ &= 1 + z + z^2 + \dots + z^n - z - z^2 - \dots - z^{n+1} \text{ les termes intermédiaires s'annulent} \\ &= 1 - z^{n+1}. \end{aligned}$$

Donc

$$S_n = \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z}, \text{ pour } z \neq 1.$$

### Correction de l'exercice 9 ▲

**Calcul de racine  $n$ -ième.** Soit  $z \in \mathbb{C}$  tel que  $z^n = 1$ , déjà  $|z|^n = 1$  et donc  $|z| = 1$ . Écrivons  $z = e^{i\theta}$ . L'équation devient

$$e^{in\theta} = e^0 = 1 \Leftrightarrow n\theta = 0 + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \theta = \frac{2k\pi}{n}, k \in \mathbb{Z}.$$

Les solutions sont donc

$$\mathcal{S} = \left\{ e^{\frac{2ik\pi}{n}}, k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Comme le polynôme  $z^n - 1$  est de degré  $n$  il a au plus  $n$  racines. Nous choisissons pour représentants :

$$\mathcal{S} = \left\{ e^{\frac{2ik\pi}{n}}, k = 0, \dots, n-1 \right\}.$$

De plus si  $\varepsilon = e^{\frac{2i\pi}{n}}$  alors  $\mathcal{S} = \{\varepsilon^k, k = 0, \dots, n-1\}$ . Ces racines sont les sommets d'un polygone régulier à  $n$  côtés inscrit dans le cercle unité.

Soit  $P(z) = \sum_{k=0}^{n-1} z^k = \frac{1-z^n}{1-z}$  pour  $z \neq 1$ . Donc quelque soit  $z \in \mathcal{S} \setminus \{1\}$   $P(z) = 0$ , nous avons ainsi trouver  $n-1$  racines pour  $P$  de degré  $n-1$ , donc l'ensemble des racines de  $P$  est exactement  $\mathcal{S} \setminus \{1\}$ .

Pour conclure soit  $Q_p(z) = \sum_{k=0}^{n-1} \varepsilon^{kp}$ .

Si  $p = 0 + \ell n$ ,  $\ell \in \mathbb{Z}$  alors  $\varepsilon^{kp} = \varepsilon^{k\ell n} = (\varepsilon^n)^{k\ell} = 1^{k\ell} = 1$ . Donc  $Q_p(z) = \sum_{k=0}^{n-1} 1 = n$ .

Sinon  $Q_p(z)$  est la somme d'une suite géométrique de raison  $\varepsilon^p$  :

$$Q_p(z) = \frac{1 - (\varepsilon^p)^n}{1 - \varepsilon^p} = \frac{1 - (\varepsilon^n)^p}{1 - \varepsilon^p} = \frac{1 - 1}{1 - \varepsilon^p} = 0.$$

### Correction de l'exercice 10 ▲

1. Les trois racines cubiques ont même module  $\sqrt[3]{2}$ , et leurs arguments sont  $-\pi/12$ ,  $7\pi/12$  et  $5\pi/4$ . Des valeurs approchées sont  $1,36603 - 0,36603i$ ,  $-0,36603 + 1,36603i$  et  $-1 - i$ .
2.  $-1 - 2i$ ,  $(-1 - 2i)^j$  et  $(-1 - 2i)^{j^2}$  où  $j = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$  (racine cubique de 1).

### Correction de l'exercice 11 ▲

Soient  $z_1, z_2, z_3$  trois nombres complexes *distincts* ayant le même cube.

1.  $z_1 \neq 0$  car sinon on aurait  $z_1 = z_2 = z_3 = 0$ . Ainsi  $(\frac{z_2}{z_1})^3 = (\frac{z_3}{z_1})^3 = 1$ . Comme les trois nombres  $1, (\frac{z_2}{z_1})$  et  $(\frac{z_3}{z_1})$  sont distincts on en déduit que ce sont les trois racines cubiques de 1. Ces racines sont  $1, j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$  et  $j^2 = e^{-\frac{2i\pi}{3}}$ . A une permutation près des indices 2 et 3 on a donc :

$$z_2 = jz_1 \quad \text{et} \quad z_3 = j^2z_1.$$

2. Soit  $z \in \mathbb{C}$ . On a les équivalences suivantes :

$$z^6 + (7-i)z^3 - 8 - 8i = 0 \Leftrightarrow z^3 \text{ est solution de } Z^2 + (7-i)Z - 8 - 8i = 0$$

Etudions l'équation  $Z^2 + (7-i)Z - 8 - 8i = 0$ .  $\Delta = (7-i)^2 + 4(8+8i) = 80 + 18i = (9+i)^2$ . Les solutions sont donc  $-8$  et  $1+i$ . Nous pouvons reprendre notre suite d'équivalences :

$$\begin{aligned} z^6 + (7-i)z^3 - 8 - 8i = 0 &\Leftrightarrow z^3 \in \{-8, 1+i\} \\ &\Leftrightarrow z^3 = (-2)^3 \quad \text{ou} \quad z^3 = (\sqrt[6]{2}e^{i\frac{\pi}{12}})^3 \\ &\Leftrightarrow z \in \{-2, -2e^{\frac{2i\pi}{3}}, -2e^{-\frac{2i\pi}{3}}\} \quad \text{ou} \quad z \in \{\sqrt[6]{2}e^{i\frac{\pi}{12}}, \sqrt[6]{2}e^{i\frac{9\pi}{12}}, \sqrt[6]{2}e^{i\frac{17\pi}{12}}\} \\ &\Leftrightarrow z \in \{-2, 2e^{\frac{i\pi}{3}}, 2e^{-\frac{i\pi}{3}}, \sqrt[6]{2}e^{i\frac{\pi}{12}}, \sqrt[6]{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}, \sqrt[6]{2}e^{i\frac{17\pi}{12}}\}. \end{aligned}$$

L'ensemble des solutions est donc :

$$\{-2, 2e^{\frac{i\pi}{3}}, 2e^{-\frac{i\pi}{3}}, \sqrt[6]{2}e^{i\frac{\pi}{12}}, \sqrt[6]{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}, \sqrt[6]{2}e^{i\frac{17\pi}{12}}\}.$$

### Correction de l'exercice 12 ▲

Nous identifions  $\mathbb{C}$  au plan affine et  $z = x + iy$  à  $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ .

Remarquons que pour les deux ensembles  $z = 5$  n'est pas solution, donc

$$\left| \frac{z-3}{z-5} \right| = 1 \Leftrightarrow |z-3| = |z-5|.$$

Ce qui signifie précisément que les points d'affixe  $z$  sont situés à égale distance des points  $A, B$  d'affixes respectives  $3 = (3, 0)$  et  $5 = (5, 0)$ . L'ensemble solution est la médiatrice du segment  $[A, B]$ .

Ensuite pour

$$\begin{aligned}\left|\frac{z-3}{z-5}\right| &= \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow |z-3|^2 = \frac{1}{2}|z-5|^2 \\ &\Leftrightarrow (z-3)\overline{(z-3)} = \frac{1}{2}(z-5)\overline{(z-5)} \\ &\Leftrightarrow z\bar{z} - (z+\bar{z}) = 7 \\ &\Leftrightarrow |z-1|^2 = 8 \\ &\Leftrightarrow |z-1| = 2\sqrt{2}\end{aligned}$$

L'ensemble solution est donc le cercle de centre le point d'affixe  $1 = (1, 0)$  et de rayon  $2\sqrt{2}$ .

---

### Correction de l'exercice 13 ▲

---

$$|u+v|^2 + |u-v|^2 = (u+v)(\bar{u}+\bar{v}) + (u-v)(\bar{u}-\bar{v}) = 2u\bar{u} + 2v\bar{v} = 2|u|^2 + 2|v|^2.$$

Géométriquement il s'agit de l'identité du parallélogramme. Les points d'affixes  $0, u, v, u+v$  forment un parallélogramme.  $|u|$  et  $|v|$  sont les longueurs des cotés, et  $|u+v|$ ,  $|u-v|$  sont les longueurs des diagonales. Il n'est pas évident de montrer ceci sans les nombres complexes !!

---

### Correction de l'exercice 14 ▲

---

1. Comme  $(A_0, \dots, A_4)$  est un pentagone régulier, on a  $OA_0 = OA_1 = OA_2 = OA_3 = OA_4 = 1$  et  $(\overrightarrow{OA_0}, \overrightarrow{OA_1}) = \frac{2\pi}{5}[2\pi]$ ,  $(\overrightarrow{OA_0}, \overrightarrow{OA_2}) = \frac{4\pi}{5}[2\pi]$ ,  $(\overrightarrow{OA_0}, \overrightarrow{OA_3}) = -\frac{4\pi}{5}[2\pi]$ ,  $(\overrightarrow{OA_0}, \overrightarrow{OA_4}) = -\frac{2\pi}{5}[2\pi]$ . On en déduit :  $\omega_0 = 1$ ,  $\omega_1 = e^{\frac{2i\pi}{5}}$ ,  $\omega_2 = e^{\frac{4i\pi}{5}}$ ,  $\omega_3 = e^{-\frac{4i\pi}{5}} = e^{\frac{6i\pi}{5}}$ ,  $\omega_4 = e^{-\frac{2i\pi}{5}} = e^{\frac{8i\pi}{5}}$ . On a bien  $\omega_i = \omega_i^j$ . Enfin, comme  $\omega_1 \neq 0$ ,  $1 + \omega_1 + \dots + \omega_1^4 = \frac{1-\omega_1^5}{1-\omega_1} = \frac{1-1}{1-\omega_1} = 0$ .
  2.  $\operatorname{Re}(1 + \omega_1 + \dots + \omega_1^4) = 1 + 2\cos(\frac{2\pi}{5}) + 2\cos(\frac{4\pi}{5})$ . Comme  $\cos(\frac{4\pi}{5}) = 2\cos^2(\frac{2\pi}{5}) - 1$  on en déduit :  $4\cos^2(\frac{2\pi}{5}) + 2\cos(\frac{2\pi}{5}) - 1 = 0$ .  $\cos(\frac{2\pi}{5})$  est donc bien une solution de l'équation  $4z^2 + 2z - 1 = 0$ . Etudions cette équation :  $\Delta = 20 = 2^2 \cdot 5$ . Les solutions sont donc  $\frac{-1-\sqrt{5}}{4}$  et  $\frac{-1+\sqrt{5}}{4}$ . Comme  $\cos(\frac{2\pi}{5}) > 0$ , on en déduit que  $\cos(\frac{2\pi}{5}) = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$ .
  3.  $BA_2^2 = |\omega_2 + 1|^2 = |\cos(\frac{4\pi}{5}) + i\sin(\frac{4\pi}{5}) + 1|^2 = 1 + 2\cos(\frac{4\pi}{5}) + \cos^2(\frac{4\pi}{5}) + \sin^2(\frac{4\pi}{5}) = 4\cos^2(\frac{2\pi}{5})$ . Donc  $BA_2 = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ .
  4.  $BI = |i/2 + 1| = \frac{\sqrt{5}}{2}$ .  $BJ = BI - 1/2 = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ .
  5. Pour tracer un pentagone régulier, on commence par tracer un cercle  $C_1$  et deux diamètres orthogonaux, qui jouent le rôle du cercle passant par les sommets et des axes de coordonnées. On trace ensuite le milieu d'un des rayons : on obtient le point  $I$  de la question 4. On trace le cercle de centre  $I$  passant par le centre de  $C_1$  : c'est le cercle  $\mathcal{C}$ . On trace le segment  $BI$  pour obtenir son point  $J$  d'intersection avec  $\mathcal{C}$ . On trace enfin le cercle de centre  $B$  passant par  $J$  : il coupe  $C_1$  en  $A_2$  et  $A_3$ , deux sommets du pentagone. Il suffit pour obtenir tous les sommets de reporter la distance  $A_2A_3$  sur  $C_1$ , une fois depuis  $A_2$ , une fois depuis  $A_3$ . (en fait le cercle de centre  $B$  et passant par  $J'$ , le point de  $\mathcal{C}$  diamétralement opposé à  $J$ , coupe  $C_1$  en  $A_1$  et  $A_4$ , mais nous ne l'avons pas justifié par le calcul : c'est un exercice !)
- 

### Correction de l'exercice 15 ▲

---

Écrivons  $z = \rho e^{i\theta}$ , alors  $\bar{z} = \rho e^{-i\theta}$ . Donc

$$\begin{aligned}
 P &= \prod_{k=1}^n (z^k + \bar{z}^k) \\
 &= \prod_{k=1}^n \rho^k ((e^{i\theta})^k + (e^{-i\theta})^k) \\
 &= \prod_{k=1}^n \rho^k (e^{ik\theta} + e^{-ik\theta}) \\
 &= \prod_{k=1}^n 2\rho^k \cos k\theta \\
 &= 2^n \cdot \rho \cdot \rho^2 \cdot \dots \cdot \rho^n \prod_{k=1}^n \cos k\theta \\
 &= 2^n \rho^{\frac{n(n+1)}{2}} \prod_{k=1}^n \cos k\theta.
 \end{aligned}$$

### Correction de l'exercice 16 ▲

Nous avons par la formule de Moivre

$$\cos 5\theta + i \sin 5\theta = e^{i5\theta} = (e^{i\theta})^5 = (\cos \theta + i \sin \theta)^5.$$

On développe ce dernier produit, puis on identifie parties réelles et parties imaginaires. On obtient :

$$\begin{aligned}
 \cos 5\theta &= \cos^5 \theta - 10 \cos^3 \theta \sin^2 \theta + 5 \cos \theta \sin^4 \theta \\
 \sin 5\theta &= 5 \cos^4 \theta \sin \theta - 10 \cos^2 \theta \sin^3 \theta + \sin^5 \theta
 \end{aligned}$$

Remarque : Grâce à la formule  $\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$ , on pourrait continuer les calculs et exprimer  $\cos 5\theta$  en fonction de  $\cos \theta$ , et  $\sin 5\theta$  en fonction de  $\sin \theta$ .

### Correction de l'exercice 17 ▲

1. Soit  $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}[i]$ . Notons  $\alpha = a + ib$  et  $\beta = c + id$  avec  $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ . Alors  $\alpha + \beta = (a + c) + i(b + d)$  et  $a + c \in \mathbb{Z}$ ,  $b + d \in \mathbb{Z}$  donc  $\alpha + \beta \in \mathbb{Z}[i]$ . De même,  $\alpha\beta = (ac - bd) + i(ad + bc)$  et  $ac - bd \in \mathbb{Z}$ ,  $ad + bc \in \mathbb{Z}$  donc  $\alpha\beta \in \mathbb{Z}[i]$ .
2. Soit  $\alpha \in \mathbb{Z}[i]$  inversible. Il existe donc  $\beta \in \mathbb{Z}[i]$  tel que  $\alpha\beta = 1$ . Ainsi,  $\alpha \neq 0$  et  $\frac{1}{\alpha} \in \mathbb{Z}[i]$ . Remarquons que tout élément non nul de  $\mathbb{Z}[i]$  est de module supérieur ou égal à 1 : en effet  $\forall z \in \mathbb{C}$ ,  $|z| \geq \sup(|\operatorname{Re}(z)|, |\operatorname{Im}(z)|)$  et si  $z \in \mathbb{Z}[i] \setminus \{0\}$ ,  $\sup(|\operatorname{Re}(z)|, |\operatorname{Im}(z)|) \geq 1$ . Si  $|\alpha| \neq 1$  alors  $|\alpha| > 1$  et  $|1/\alpha| < 1$ . On en déduit  $1/\alpha = 0$  ce qui est impossible. Ainsi  $|\alpha| = 1$ , ce qui implique  $\alpha \in \{1, -1, i, -i\}$ . Réciproquement,  $1^{-1} = 1 \in \mathbb{Z}[i]$ ,  $(-1)^{-1} = -1 \in \mathbb{Z}[i]$ ,  $i^{-1} = -i \in \mathbb{Z}[i]$ ,  $(-i)^{-1} = i \in \mathbb{Z}[i]$ . Les éléments inversibles de  $\mathbb{Z}[i]$  sont donc  $1, -1, i$  et  $-i$ .
3. Soit  $\omega \in \mathbb{C}$ . Notons  $\omega = x + iy$  avec  $x, y \in \mathbb{R}$ . soit  $E(x)$  la partie entière de  $x$ , i.e. le plus grand entier inférieur ou égal à  $x$  :  $E(x) \leq x < E(x) + 1$ . Si  $x \leq E(x) + 1/2$ , notons  $n_x = E(x)$ , et si  $x > E(x) + 1/2$ , notons  $n_x = E(x) + 1$ .  $n_x$  est le, ou l'un des s'il y en a deux, nombre entier le plus proche de  $x$  :  $|x - n_x| \leq 1/2$ . Notons  $n_y$  l'entier associé de la même manière à  $y$ . Soit alors  $\alpha = n_x + i \cdot n_y$ .  $z \in \mathbb{Z}[i]$  et  $|\omega - \alpha|^2 = (x - n_x)^2 + (y - n_y)^2 \leq 1/4 + 1/4 = 1/2$ . Donc  $|\omega - \alpha| < 1$ .
4. Soit  $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}[i]$ , avec  $\beta \neq 0$ . Soit alors  $q \in \mathbb{Z}[i]$  tel que  $|\frac{\alpha}{\beta} - q| < 1$ . Soit  $r = \alpha - \beta q$ . Comme  $\alpha \in \mathbb{Z}[i]$  et  $\beta q \in \mathbb{Z}[i]$ ,  $r \in \mathbb{Z}[i]$ . De plus  $|\frac{r}{\beta}| = |\frac{\alpha}{\beta} - q| < 1$  donc  $|r| < |\beta|$ .