COLLE 17 = Dénombrement et espaces euclidiens

Dénombrement - Combinatoire :

Exercice 1.
Combien y a-t-il de nombres de 5 chiffres où 0 figure une fois et une seule ?

Exercice 2.
Dénombrer les anagrammes des mots suivants :

$$MATRICE, \quad ANALYSE, \quad ANANAS$$

Exercice 3.
On part du point de coordonnées $(0,0)$ pour rejoindre le point de coordonnées (p,q) (p et q entiers naturels donnés) en se déplaçant à chaque étape d'une unité vers la droite ou vers le haut. Combien y a-t-il de chemins possibles ?

Exercice 4.
Un damier est un plateau carré contenant 100 cases.

1. Combien y a-t-il de manières de placer 50 pièces blanches et 50 pièces noires sur ce damier ?
2. Soient $n_1, n_2, n_3, n_4 \in \mathbb{N}$ tels que $n_1 + n_2 + n_3 + n_4 = 100$. On dispose de n_1 pièces noires, n_2 pièces blanches, n_3 pièces bleus et n_4 pièces rouges. Combien y a-t-il de manières différentes différentes de placer toutes ces pièces sur un damier.

Exercice 5.
De combien de façons peut-on payer 100 euros avec des pièces de 10, 20 et 50 centimes ?

Probabilités sur un espace fini

Exercice 6.
Lors d'une loterie de Noël, 300 billets sont vendus aux enfants de l'école ; 4 billets sont gagnants. J'achète 10 billets, quelle est la probabilité pour que je gagne au moins un lot ?

Exercice 7.
Dans les barres de chocolat, on trouve des images équitablement réparties de cinq grands mathématiciens, une image par tablette. On veut avoir l'image de Denis Poisson : combien dois-je acheter de barres pour que la probabilité d'avoir la figurine attendue dépasse 80% ? Même question pour être sûr à 90%.

Exercice 8.
En cas de migraine trois patients sur cinq prennent de l'aspirine (ou équivalent), deux sur cinq prennent un médicament M présentant des effets secondaires :
Avec l'aspirine, 75% des patients sont soulagés.
Avec le médicament M, 90% des patients sont soulagés.

1. Quel est le taux global de personnes soulagées ?
2. Quel est la probabilité pour un patient d'avoir pris de l'aspirine sachant qu'il est soulagé ?

Exercice 9.
Dans l'ancienne formule du Loto il fallait choisir 6 numéros parmi 49.

1. Combien y-a-t-il de grilles possibles ? En déduire la probabilité de gagner en jouant une grille.
2. Quelle est la probabilité que la grille gagnante comporte 2 nombres consécutifs ?

Exercice 10.
Quelle est la probabilité p_n pour que dans un groupe de n personnes choisies au hasard, deux personnes au moins aient le même anniversaire (on considèrera que l'année a toujours 365 jours, tous équiprobables).
Montrer que pour $n \geq 23$, on a $p_n \geq \frac{1}{2}$.

Exercice 11.
Dans une salle 60% des personnes sont des femmes ; une femme sur trois porte des lunettes et un homme sur deux porte des lunettes : quelle est la probabilité pour qu'un porteur de lunettes pris au hasard soit une femme ?

Exercice 12.
Un professeur oublie fréquemment ses clés. Pour tout n, on note : E_n l'événement «le jour n, le professeur oublie ses clés», $P_n = P(E_n)$, $Q_n = P(\overline{E_n})$.
On suppose que : $P_1 = a$ est donné et que si le jour n il oublie ses clés, le jour suivant il les oublie avec la probabilité $\frac{1}{10}$; si le jour n il n'oublie pas ses clés, le jour suivant il les oublie avec la probabilité $\frac{4}{10}$.
Montrer que $P_{n+1} = \frac{1}{10}P_n + \frac{4}{10}Q_n$. En déduire une relation entre P_{n+1} et P_n
Quelle est la probabilité de l'événement «le jour n, le professeur oublie ses clés» ?

Exercice 13.
Soient Ω un ensemble fini, $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P}))$ un espace probabilisé et $A_1, ..., A_n$ des événements. Démontrer que :

$$\mathbb{P}(A_1 \cap ... \cap A_n) \geq \left(\sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i)\right) - (n-1)$$

Exercice supplémentaire :

Exercice 14.

1. Soit E un ensemble fini et non vide. Soient n un entier naturel non nul et A_1,..., A_n, n parties de E. Montrer la « formule du crible » :

$$\begin{aligned}\operatorname{card}(A_1 \cup ... \cup A_n) = &\sum_{i=1}^{n} \operatorname{card}(A_i) - \sum_{1 \leq i_1 < i_2 \leq n} \operatorname{card}(A_{i_1} \cap A_{i_2}) \\ &+ ... + (-1)^{k-1} \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < ... < i_k \leq n} \operatorname{card}(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap ... \cap A_{i_k}) \\ &+ ... + (-1)^{n-1} \operatorname{card}(A_1 \cap ... \cap A_n).\end{aligned}$$

2. Combien y a-t-il de permutations σ de $\{1, ..., n\}$ vérifiant $\forall i \in \{1, ..., n\},\ \sigma(i) \neq i$? (Ces permutations sont appelées dérangements (permutations sans point fixe)). Indication : noter A_i l'ensemble des permutations qui fixent i et utiliser 1).

   On peut alors résoudre un célèbre problème de probabilité, le problème des chapeaux. n personnes laissent leur chapeau à un vestiaire. En repartant, chaque personne reprend un chapeau au hasard. Montrer que la probabilité qu'aucune de ces personnes n'ait repris son propre chapeau est environ $\frac{1}{e}$ quand n est grand.

Espaces Euclidiens :

Exercice 15.
Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on définit :

$$\langle A|B\rangle = Tr({}^tAB)$$

1. Démontrer que cette formule définit un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$
2. En déduire que, pour tous $A, B \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, on a

$$(Tr(AB))^2 \leq Tr(A^2)Tr(B^2)$$

Exercice 16.
Soit E un espace vectoriel euclidien et x, y deux éléments de E. Montrer que x et y sont orthogonaux si et seulement si $\|x + \lambda y\| \geq \|x\|$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$.

Exercice 17.
Sur $\mathbb{R}[X]$, on pose $\langle P|Q\rangle = \int_0^1 P(t)Q(t)\,dt$. Existe-t-il A élément de $\mathbb{R}[X]$ tel que $\forall P \in \mathbb{R}[X],\ \langle P|A\rangle = P(0)$?

Exercice 18.

Dans $\mathbb{R}^4$ muni du produit scalaire usuel, on pose : $V_1 = (1, 2, -1, 1)$ et $V_2 = (0, 3, 1, -1)$.
On pose $F = \text{Vect}(V_1, V_2)$. Déterminer une base orthonormale de F et un système d'équations de $F^\perp$.

Exercice 19.

Pour $A = (a_{i,j})_{1\leq i,j\leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $N(A) = \text{Tr}({}^tAA)$. Montrer que N est une norme vérifiant de plus $N(AB) \leq N(A)N(B)$ pour toutes matrices carrées A et B. N est-elle associée à un produit scalaire ?

Exercice 20.

Soit E un espace préhilbertien et soit $B = \{x \in E; \|x\| \leq 1\}$. Démontrer que B est strictement convexe, c'est-à-dire que, pour tous $x, y \in B$, $x \neq y$ et tout $t \in]0, 1[$, $\|tx + (1-t)y\| < 1$.
