TD 11 : Polynômes et fractions rationnelles

Connaître son cours :

- Soit $P, Q \in \mathbb{K}[X]$, rappeler la définition du produit de P et Q le polynôme noté $P.Q$.
  Montrer que $\deg(P.Q) = \deg(P) + \deg(Q)$.
- Montrer qu'un complexe a est une racine de $P \in \mathbb{K}[X]$ si, et seulement si, $X - a$ divise P. (2 démonstrations)
- Soit $a_1, ..., a_n$ des complexes deux à deux distincts et $b_1, .., bn$ des complexes. Montrer qu'il existe un unique polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$ de degré au plus $n-1$ tel que $P(a_k) = b_k$ pour tout $k \in [\![0, n]\!]$. Y a-t-il toujours unicité si on ne fixe plus le degré de P plus petit ou égale à $n-1$?
- Soit $P \in \mathbb{K}_n[X]$ et $a \in \mathbb{K}$. Alors, $P(X) = \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(a)}{k!}(X-a)^k$. En déduire qu'une racine a de P est de multiplicité r si, et seulement si, $P^{(k)}(a) = 0$ pour tout $k \leq r-1$ et $P^{(r)}(a) \neq 0$.
- Rappeler le Théorème de d'*Alembert-Gauss* et montrer qu'un polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$ non constant est surjectif de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$. Est-ce vrai de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$?

Arithmétique des polynômes et racines :

Exercice 1. (*)

À quelle condition sur $a, b, c \in \mathbb{R}$ le polynôme $X^4 + aX^2 + bX + c$ est-il divisible par $X^2 + X + 1$?

Exercice 2. (*)

Trouver tous les polynômes P vérifiant

$$P(2X) = P'(X)P''(X)$$

Exercice 3. (*)

Soit P un polynôme différent de X.
Montrer que $P(X) - X$ divise $P(P(X)) - X$.

Exercice 4. (*)

Pour quelles valeurs de l'entier naturel n le polynôme $(X+1)^n - X^n - 1$ est-il divisible par $X^2 + X + 1$?

Exercice 5. (**)

Trouver tous les polynômes P qui vérifient la relation

$$P(X^2) = P(X)P(X+1)$$

Exercice 6. (**)

Soient a_1,..., a_n et b_1,..., b_n, $2n$ nombres complexes.
(Inégalité de CAUCHY-SCHWARZ).

$$\left|\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right| \leq \sum_{k=1}^{n} |a_k b_k| \leq \sqrt{\sum_{k=1}^{n} |a_k|^2}\sqrt{\sum_{k=1}^{n} |b_k|^2}$$

Trouver une démonstration à l'aide d'une fonction polynomiale du second degré.

Exercice 7. (**)

Quels sont les polynômes $P \in \mathbb{C}[X]$ tels que P' divise P ?

Exercice 8. (***)

Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer qu'il existe un unique $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que

$$\forall z \in \mathbb{C}^* \qquad P\left(z + \frac{1}{z}\right) = z^n + \frac{1}{z^n}$$

Montrer alors que toutes les racines de P sont réelles, simples, et appartiennent à l'intervalle $[-2, 2]$.

Exercice 9. (**)

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$. On note, pour $p < n$, u_p la somme des racines de $P^{(p)}$. Démontrer que $u_0, \ldots, u_{n-1}$ forme une progression arithmétique.

Exercice 10. (**)

Soit P un polynôme à coefficients réels tel que $\forall x \in \mathbb{R},\ P(x) \geq 0$. Montrer qu'il existe deux polynômes R et S à coefficients réels tels que $P = R^2 + S^2$.

Exercice 11. (**)

Soit $P(X) = a_n X^n + \cdots + a_0$ un polynôme à coefficients dans $\mathbb{Z}$, avec $a_n \neq 0$ et $a_0 \neq 0$.

1. On suppose que P admet une racine rationnelle p/q avec $p \wedge q = 1$. Démontrer que $p | a_0$ et que $q | a_n$.
2. Le polynôme $P(X) = X^5 - X^2 + 1$ admet-il des racines dans $\mathbb{Q}$?

Exercice 12. (**)

Soit $P \in \mathbb{Z}[X]$ de degré supérieur ou égal à 1. Soit n un entier relatif et $m = P(n)$.

1. Montrer que $\forall k \in \mathbb{Z},\ P(n + km)$ est un entier divisible par m.
2. Montrer qu'il n'existe pas de polynômes non constants à coefficients entiers tels que $P(n)$ soit premier pour tout entier n.

Exercice 13. (*)

Soient $a_1, \ldots, a_n$ des réels deux à deux distincts. Pour tout $i = 1, \ldots, n$, on pose

$$L_i(X) = \prod_{\substack{1 \leq j \leq n \\ j \neq i}} \frac{X - a_j}{a_i - a_j}$$

1. Calculer $L_i(a_j)$ pour $j = 1, \ldots, n$.
2. Soient $b_1, \ldots, b_n$ des réels fixés. Montrer que $P(X) = \sum_{i=0}^{n} b_i L_i(X)$ est l'unique polynôme de degré inférieur ou égal à $n - 1$ qui vérifie : $P(a_j) = b_j$ pour tout $j = 1, \ldots, n$.
3. Trouver le polynôme P de degré inférieur ou égal à 3 tel que $P(0) = 1$, $P(1) = 0$, $P(-1) = -2$ et $P(2) = 4$.

Exercice 14. (**)

On pose $\omega_k = e^{2ik\pi/n}$ et $Q = 1 + 2X + ... + nX^{n-1}$. Calculer $\prod_{k=0}^{n-1} Q(\omega_k)$.

Exercice 15. (***)

Soient $x_0 = 0 < x_1 < \cdots < x_n$ et des réels donnés $y_i, 0 \leq i \leq n$. On considère le polynôme d'interpolation satisfaisant :

$$P(x_0) = y_0, P(-x_i) = P(x_i) = y_i, \text{ pour tout } 1 \leq i \leq n.$$

1. Montrer que le polynôme P est pair.
2. En déduire en un minimum de calculs le polynôme d'interpolation vérifiant $P(-1) = 2,\ P(0) = 4,\ P(1) = 2$.

Exercice 16. (***) *"Polynômes de* TCHÉBYCHEV*"*

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer qu'il existe un unique polynôme T_n de $\mathbb{R}[X]$ tel que :
$$\forall x \in \mathbb{R},\ T_n(\cos x) = \cos(nx).$$
2. Montrer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, que $T_n + T_{n+2} = 2XT_{n+1}$. Déterminer le terme de plus haut degré de T_n.
3. Déterminer les racines de T_n et montrer qu'elles sont réelles et simples.
4. Déterminer les $x \in [-1, 1]$ en lesquels $|T_n(x)| = 1$.

Fractions rationnelles, décomposition en éléments simples sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$:

Exercice 17. **(*)**

1. Décomposer en éléments simples la fraction rationnelle $\dfrac{1}{X(X+1)(X+2)}$.
2. En déduire la limite de la suite (S_n) suivante : $S_n = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k(k+1)(k+2)}$.

Exercice 18. **(**)**

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme de degré $n \geq 1$ possédant n racines distinctes $x_1, \ldots, x_n$ non-nulles.

1. Décomposer en éléments simples la fraction rationnelle $\dfrac{1}{XP(X)}$.
2. En déduire que $\sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{x_k P'(x_k)} = \dfrac{-1}{P(0)}$.

Exercice 19. **(*)**

Décomposer en éléments simples les fractions rationnelles suivantes :

1. $\dfrac{1}{X^3 - X}$ **2.** $\dfrac{X^3}{(X-1)(X-2)(X-3)}$

Exercice 20. **(**)**

Décomposer sur $\mathbb{R}$ les fractions rationnelles suivantes :

1. $\dfrac{X^2+2X+5}{X^2-3X+2}$ **2.** $\dfrac{X^2+3X+1}{(X-1)^2(X-2)}$

3. $\dfrac{1}{X^4-1}$ **4.** $\dfrac{X^4+1}{(X+1)^2(X^2+1)}$

Exercice 21. **(**)**

Décomposer en éléments simples les fractions rationnelles suivantes :

1. $\dfrac{2X^2+1}{(X^2-1)^2}$ **2.** $\dfrac{X^3+1}{(X-1)^3}$

Exercice 22. **(***)** *"Théorème de* LUCAS*"*

Soit $P \in \mathbb{C}_n[X]$ admettant n racines simples $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$. Soient $A_1, \ldots, A_n$ les points du plan complexe d'affixe respectives $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$.

1. Décomposer la fraction rationnelle P'/P en éléments simples.
2. Soit β une racine de P', et soit B son image dans le plan complexe. Déduire de la question précédente que
$$\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{\beta - \alpha_j} = 0.$$
3. En déduire que B est un barycentre de la famille de points $(A_1, \ldots, A_n)$, avec des coefficients positifs. Interpréter géométriquement cette propriété.

Exercice 23. **(***)**

Décomposer en éléments simples la fraction rationnelle suivante :

$$\frac{1}{T_n}$$

où T_n est le n-ième polynôme de Tchebychev.
