colle 15 = Matrices et applications linéaires

Connaître son cours :

1. Soit E, F deux espaces vectoriels de dimension finie, β une base de E et ζ une base de F. Montrer que pour tout $u \in \mathcal{L}(E,F)$ et tout $x \in E$ on a : $\mathrm{Mat}_\zeta(u(x)) = \mathrm{Mat}_{\beta,\zeta}(u) \cdot \mathrm{Mat}_\beta(x)$.
2. Soit E, F, G trois espaces vectoriels de dimension finie, β une base de E , ζ une base de F et γ une base de G. Montrer que pour tout $u \in \mathcal{L}(E,F)$ et tout $v \in \mathcal{L}(F,G)$, on a :
$\mathrm{Mat}_{\beta,\gamma}(v \circ u) = \mathrm{Mat}_{\zeta,\gamma}(v) \cdot \mathrm{Mat}_{\beta,\zeta}(u)$
3. Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions respectives p et n et $u \in \mathcal{L}(E,F)$ de rang r.
Montrer qu'il existe une base β de E et une base ζ de F tel que : $\mathrm{Mat}_{\beta,\zeta}(u) = J_r = \begin{pmatrix} I_r & 0_{r,p-r} \\ 0_{n-r,r} & 0_{n-r,p-r} \end{pmatrix}$.

Exercices :

Exercice 1. (**)

Soit E un espace vectoriel de dimension finie n des sous-espaces $E_1, \ldots, E_p, F_1, \ldots, F_p$ tels que

- Pour tout $i \in [\![1,p]\!]$, $F_i \subset E_i$
- $\displaystyle\bigoplus_{i=1}^{p} F_i = \bigoplus_{i=1}^{p} E_i$

Montrer que, pour tout $i \in [\![1,p]\!]$, $F_i = E_i$.

Exercice 2. (***)

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2 et $\omega = e^{2i\pi/n}$.
Soit $A = (\omega^{(j-1)(k-1)})_{1\leqslant j,k\leqslant n}$. Montrer que A est inversible et calculer A^{-1}.

Exercice 3. (**)

Soit E un espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$. On suppose que, pour tout $x \in E$, il existe un entier $n_x \in \mathbb{N}$ tel que $f^{n_x}(x) = 0$. Montrer qu'il existe un entier n tel que $f^n = 0$.

Exercice 4. (***)

Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Soient f et g deux endomorphismes de E telles que $f \circ g - g \circ f = f$. Calculer la trace de f^{2010}.

Exercice 5. (**)

Soient E, F, G des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et soient $u \in \mathcal{L}(E,G), v \in \mathcal{L}(F,G)$.

1. Montrer que : $\operatorname{Im} v \subseteq \operatorname{Im} u \Leftrightarrow \exists w \in \mathcal{L}(F,E) : v = u \circ w$.
2. En déduire que :

   u surjective $\Leftrightarrow \exists w \in \mathcal{L}(G,E) : u \circ w = \mathrm{Id}_G$.

Exercice 6. (***)

Soient E un espace vectoriel de dimension 2 muni d'une base $\beta = (e_1, e_2)$, $a \in \mathbb{R}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on définit $f_n \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f_n(e_1) = e_1 + \dfrac{a}{n} e_2,\ f_n(e_2) = -\dfrac{a}{n} e_2 + e_2$.
Justifier que la suite $(f_n^n)_{n \geq 0}$ converge dans $\mathcal{L}(E)$ et déterminer son expression suivant la base β.
