

# Intégration

Exercices de Jean-Louis Rouget. Retrouver aussi cette fiche sur [www.maths-france.fr](http://www.maths-france.fr)

\* très facile \*\* facile \*\*\* difficulté moyenne \*\*\*\* difficile \*\*\*\*\* très difficile

I : Incontournable T : pour travailler et mémoriser le cours

## Exercice 1 \*\*\*\*

Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions continues et strictement positives sur  $[a, b]$ . Pour  $n$  entier naturel non nul donné, on pose  $u_n = \left( \int_a^b (f(x))^n g(x) dx \right)^{1/n}$ .

Montrer que la suite  $(u_n)$  converge et déterminer sa limite (commencer par le cas  $g = 1$ ).

[Correction ▼](#)

[005444]

## Exercice 2 \*\*I

1. Soit  $f$  une application de classe  $C^1$  sur  $[0, 1]$  telle que  $f(1) \neq 0$ .

Pour  $n \in \mathbb{N}$ , on pose  $u_n = \int_0^1 t^n f(t) dt$ . Montrer que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$  puis déterminer un équivalent simple de  $u_n$  quand  $n$  tend vers  $+\infty$  (étudier  $\lim_{n \rightarrow +\infty} n u_n$ ).

2. Mêmes questions en supposant que  $f$  est de classe  $C^2$  sur  $[0, 1]$  et que  $f(1) = 0$  et  $f'(1) \neq 0$ .

[Correction ▼](#)

[005445]

## Exercice 3 \*\*\*IT

Limites de

$$\begin{array}{llll} 1) \frac{1}{n^3} \sum_{k=1}^n k^2 \sin \frac{k\pi}{n} & 2) \left( \frac{1}{n!} \prod_{k=1}^n (a+k) \right)^{1/n} (a > 0 \text{ donné}) & 3) \sum_{k=1}^n \frac{n+k}{n^2+k} & 4) \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{n^2-k^2}} \\ 5) \frac{1}{n\sqrt{n}} \sum_{k=1}^n E(\sqrt{k}) & 6) \sum_{k=1}^n \frac{k^2}{8k^3+n^3} & 7) \sum_{k=n}^{2n-1} \frac{1}{2k+1} & 8) n \sum_{k=1}^n \frac{e^{-n/k}}{k^2} \end{array}$$

[Correction ▼](#)

[005446]

## Exercice 4 \*\*\*I

Soit  $f$  une fonction de classe  $C^2$  sur  $[0, 1]$ . Déterminer le réel  $a$  tel que :

$$\int_0^1 f(t) dt - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) = \frac{a}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

[Correction ▼](#)

[005447]

## Exercice 5 \*\*I Le lemme de LEBESGUE

1. On suppose que  $f$  est une fonction de classe  $C^1$  sur  $[a, b]$ . Montrer que  $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \int_a^b \sin(\lambda t) f(t) dt = 0$ .

2. (\*\*\*) Redémontrer le même résultat en supposant simplement que  $f$  est continue par morceaux sur  $[a, b]$  (commencer par le cas des fonctions en escaliers).

[Correction ▼](#)

[005448]

## Exercice 6 \*\*\*T

Soit  $E$  l'ensemble des fonctions continues strictement positives sur  $[a, b]$ .

Soit  $\varphi : E \rightarrow \mathbb{R}$ .

$$f \mapsto \left( \int_a^b f(t) dt \right) \left( \int_a^b \frac{1}{f(t)} dt \right).$$

1. Montrer que  $\varphi(E)$  n'est pas majoré.
2. Montrer que  $\varphi(E)$  est minoré. Trouver  $m = \inf\{\varphi(f), f \in E\}$ . Montrer que cette borne inférieure est atteinte et trouver toutes les  $f$  de  $E$  telles que  $\varphi(f) = m$ .

[Correction ▼](#)

[005449]

### Exercice 7 \*\*\*

Etude complète de la fonction  $f(x) = \frac{1}{x-1} \int_1^x \frac{t^2}{\sqrt{1+t^8}} dt$ .

[Correction ▼](#)

[005450]

### Exercice 8 \*\*\*

Pour  $x$  réel, on pose  $f(x) = e^{-x^2} \int_0^x e^{t^2} dt$ .

1. Montrer que  $f$  est impaire et de classe  $C^\infty$  sur  $\mathbb{R}$ .
2. Montrer que  $f$  est solution de l'équation différentielle  $y' + 2xy = 1$ .
3. Montrer que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} 2xf(x) = 1$ .
4. Soit  $g(x) = \frac{e^{x^2}}{2x} f'(x)$ . Montrer que  $g$  est strictement décroissante sur  $]0, +\infty[$  et que  $g$  admet sur  $]0, +\infty[$  un unique zéro noté  $x_0$  vérifiant de plus  $0 < x_0 < 1$ .
5. Dresser le tableau de variations de  $f$ .

[Correction ▼](#)

[005451]

### Exercice 9 \*\*\*

Soit  $f$  une fonction de classe  $C^1$  sur  $[0, 1]$  telle que  $f(0) = 0$ . Montrer que  $2 \int_0^1 f^2(t) dt \leq \int_0^1 f'^2(t) dt$ .

[Correction ▼](#)

[005452]

### Exercice 10 \*\*\*\*

Soit  $f$  une fonction continue sur  $[a, b]$ . Pour  $x$  réel, on pose  $F(x) = \int_a^b |t - x| f(t) dt$ . Etudier la dérivabilité de  $F$  sur  $\mathbb{R}$ .

[Correction ▼](#)

[005453]

### Exercice 11 \*\*\*

Soit  $a$  un réel strictement positif et  $f$  une application de classe  $C^1$  et strictement croissante sur  $[0, a]$  telle que  $f(0) = 0$ . Montrer que  $\forall x \in [0, a], \forall y \in [0, f(a)], xy \leq \int_0^x f(t) dt + \int_0^y f^{-1}(t) dt$ .

[Correction ▼](#)

[005454]

### Exercice 12 \*\*

Soit  $f$  continue sur  $[0, 1]$  telle que  $\int_0^1 f(t) dt = \frac{1}{2}$ . Montrer que  $f$  admet un point fixe.

[Correction ▼](#)

[005455]

### Exercice 13 \*\*

Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions continues par morceaux et positives sur  $[0, 1]$  telles que  $\forall x \in [0, 1], f(x)g(x) \geq 1$ . Montrer que  $(\int_0^1 f(t) dt)(\int_0^1 g(t) dt) \geq 1$ .

[Correction ▼](#)

[005456]

### Exercice 14 \*\*\*

Partie principale quand  $n$  tend vers  $+\infty$  de  $u_n = \sum_{k=1}^n \sin \frac{1}{(n+k)^2}$ .

[Correction ▼](#)

[005457]

### Exercice 15 \*\*

---

Montrer que  $\sum_{k=1}^n \sin \frac{k}{n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2n} + o(\frac{1}{n})$ .

[Correction ▼](#)

[005458]

---

**Exercice 16** \*\*

Déterminer les limites quand  $n$  tend vers  $+\infty$  de

$$1) u_n = \frac{1}{n!} \int_0^1 \arcsin^n x \, dx \quad 2) \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} \, dx \quad 3) \int_0^\pi \frac{n \sin x}{x+n} \, dx.$$

[Correction ▼](#)

[005459]

---

**Exercice 17** \*\*\*

Etude complète de  $F(x) = \int_x^{2x} \frac{dt}{\sqrt{t^4+t^2+1}}$ .

[Correction ▼](#)

[005460]

---

**Exercice 18** \*\*\*

Trouver toutes les applications continues sur  $\mathbb{R}$  vérifiant :  $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x)f(y) = \int_{x-y}^{x+y} f(t) \, dt$ .

[Correction ▼](#)

[005461]

---

**Exercice 19** \*\*\*

Soit  $f$  une fonction de classe  $C^1$  sur  $[a, b]$  telle que  $f(a) = f(b) = 0$  et soit  $M = \sup\{|f'(x)|, x \in [a, b]\}$ . Montrer que  $\left| \int_a^b f(x) \, dx \right| \leq M \frac{(b-a)^2}{4}$ .

[Correction ▼](#)

[005462]

---

**Exercice 20** \*\*

Déterminer les fonctions  $f$  continues sur  $[0, 1]$  vérifiant  $\left| \int_0^1 f(t) \, dt \right| = \int_0^1 |f(t)| \, dt$ .

[Correction ▼](#)

[005463]

---

**Exercice 21** \*\*\*I

- Déterminer  $\lim_{x \rightarrow 1} \int_x^{x^2} \frac{dt}{\ln t}$ .
- Etude complète de  $F(x) = \int_x^{x^2} \frac{dt}{\ln t}$ .

[Correction ▼](#)

[005464]

---

**Exercice 22** \*\*\*\*

Soit  $f(t) = \frac{t^2}{e^t - 1}$  si  $t \neq 0$  et 0 si  $t = 0$ .

1. Vérifier que  $f$  est continue sur  $\mathbb{R}$ .
2. Soit  $F(x) = \int_0^x f(t) \, dt$ . Montrer que  $F$  a une limite réelle  $\ell$  quand  $x$  tend vers  $+\infty$  puis que  $\ell = 2 \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^3}$ .

[Correction ▼](#)

[005465]

### Correction de l'exercice 1 ▲

$f$  est continue sur le segment  $[a, b]$  et admet donc un maximum  $M$  sur ce segment. Puisque  $f$  est strictement positive sur  $[a, b]$ , ce maximum est strictement positif.

Pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , posons  $u_n = \left( \int_a^b (f(x))^n dx \right)^{1/n}$ . Par croissance de l'intégrale, on a déjà

$$u_n \leq \left( \int_a^b M^n dx \right)^{1/n} = M(b-a)^{1/n},$$

(car  $\forall x \in [a, b]$ ,  $0 \leq f(x) \leq M \Rightarrow \forall x \in [a, b]$ ,  $(f(x))^n \leq M^n$  par croissance de la fonction  $t \mapsto t^n$  sur  $[0, +\infty[$ ).

D'autre part, par continuité de  $f$  en  $x_0$  tel que  $f(x_0) = M$ , pour  $\varepsilon \in ]0, 2M[$  donné,  $\exists [\alpha, \beta] \subset [a, b] / \alpha < \beta$  et  $\forall x \in [\alpha, \beta]$ ,  $f(x) \geq M - \frac{\varepsilon}{2}$ .

Pour  $n$  élément de  $\mathbb{N}^*$ , on a alors

$$u_n \geq \left( \int_\alpha^\beta (f(x))^n dx \right)^{1/n} \geq \left( \int_\alpha^\beta \left(M - \frac{\varepsilon}{2}\right)^n dx \right)^{1/n} = \left(M - \frac{\varepsilon}{2}\right)(\beta - \alpha)^{1/n}.$$

En résumé,

$$\forall \varepsilon \in ]0, 2M[, \exists (\alpha, \beta) \in [a, b]^2 / \alpha < \beta \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}^*, \left(M - \frac{\varepsilon}{2}\right)(\beta - \alpha)^{1/n} \leq u_n \leq M(b-a)^{1/n}.$$

Mais,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} M(b-a)^{1/n} = M$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(M - \frac{\varepsilon}{2}\right)(\beta - \alpha)^{1/n} = \left(M - \frac{\varepsilon}{2}\right)(\beta - \alpha)^{1/n}$ .

Par suite,  $\exists n_1 \in \mathbb{N}^* / \forall n \geq n_1$ ,  $M(b-a)^{1/n} < M + \varepsilon$  et  $\exists n_2 \in \mathbb{N}^* / \forall n \geq n_2$ ,  $\left(M - \frac{\varepsilon}{2}\right)(\beta - \alpha)^{1/n} > M - \varepsilon$ .

Soit  $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$ . Pour  $n \geq n_0$ , on a  $M - \varepsilon < u_n < M + \varepsilon$ . On a montré que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}^* / \forall n \in \mathbb{N}, (n \geq n_0 \Rightarrow |u_n - M| < \varepsilon),$$

et donc que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = M$ .

Plus généralement, si  $g$  continue sur  $[a, b]$ ,  $g$  admet un minimum  $m_1$  et un maximum  $M_1$  sur cet intervalle, tous deux strictement positifs puisque  $g$  est strictement positive. Pour  $n$  dans  $\mathbb{N}^*$ , on a

$$m_1^{1/n} \left( \int_a^b (f(x))^n dx \right)^{1/n} \leq \left( \int_a^b (f(x))^n g(x) dx \right)^{1/n} \leq M_1^{1/n} \left( \int_a^b (f(x))^n dx \right)^{1/n},$$

et comme d'après l'étude du cas  $g = 1$ , on a  $\lim_{n \rightarrow +\infty} m_1^{1/n} \left( \int_a^b (f(x))^n dx \right)^{1/n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} M_1^{1/n} \left( \int_a^b (f(x))^n dx \right)^{1/n} =$

$M$ , le théorème de la limite par encadrements permet d'affirmer que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \int_a^b (f(x))^n g(x) dx \right)^{1/n} = M$ . On a montré que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \int_a^b (f(x))^n g(x) dx \right)^{1/n} = \max\{f(x), x \in [a, b]\}.$$

### Correction de l'exercice 2 ▲

1.  $f$  est continue sur le segment  $[0, 1]$  et est donc bornée sur ce segment. Soit  $M$  un majorant de  $|f|$  sur  $[0, 1]$ . Pour  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$|u_n| \leq \int_0^1 t^n |f(t)| dt \leq M \int_0^1 t^n dt = \frac{M}{n+1},$$

et comme  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{M}{n+1} = 0$ , on a montré que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$ .

Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Puisque  $f$  est de classe  $C^1$  sur  $[0, 1]$ , on peut effectuer une intégration par parties qui fournit

$$u_n = \left[ \frac{t^{n+1}}{n+1} f(t) \right]_0^1 - \frac{1}{n+1} \int_0^1 t^{n+1} f'(t) dt = \frac{f(1)}{n+1} - \frac{1}{n+1} \int_0^1 t^{n+1} f'(t) dt.$$

Puisque  $f'$  est continue sur  $[0, 1]$ ,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 t^{n+1} f'(t) dt = 0$  ou encore  $-\frac{1}{n+1} \int_0^1 t^{n+1} f'(t) dt = o(\frac{1}{n})$ . D'autre part, puisque  $f(1) \neq 0$ ,  $\frac{f(1)}{n+1} \sim \frac{f(1)}{n}$  ou encore  $\frac{f(1)}{n+1} = \frac{f(1)}{n} + o(\frac{1}{n})$ . Finalement,  $u_n = \frac{f(1)}{n} + o(\frac{1}{n})$ , ou encore

$$u_n \sim \frac{f(1)}{n}.$$

2. Puisque  $f$  est de classe  $C^1$  sur  $[0, 1]$  et que  $f(1) = 0$ , une intégration par parties fournit

$u_n = -\frac{1}{n+1} \int_0^1 t^{n+1} f'(t) dt$ . Puisque  $f'$  est de classe  $C^1$  sur  $[0, 1]$  et que  $f'(1) \neq 0$ , le 1) appliqué à  $f'$  fournit

$$u_n = -\frac{1}{n+1} \int_0^1 t^{n+1} f'(t) dt \sim -\frac{1}{n} \frac{f'(1)}{n} = -\frac{f'(1)}{n^2}.$$

Par exemple,  $\int_0^1 t^n \sin \frac{\pi t}{2} dt \sim \frac{1}{n}$  et  $\int_0^1 t^n \cos \frac{\pi t}{2} dt \sim \frac{\pi}{2n^2}$

### Correction de l'exercice 3 ▲

1. Pour  $n \geq 1$ ,

$$u_n = \frac{1}{n^3} \sum_{k=1}^n k^2 \sin \frac{k\pi}{n} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left(\frac{k}{n}\right)^2 \sin \frac{k\pi}{n} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right),$$

où  $f(x) = x^2 \sin(\pi x)$ .  $u_n$  est donc une somme de RIEMANN à pas constant associée à la fonction continue  $f$  sur  $[0, 1]$ . Quand  $n$  tend vers  $+\infty$ , le pas  $\frac{1}{n}$  tend vers 0 et on sait que  $u_n$  tend vers

$$\begin{aligned} \int_0^1 x^2 \sin(\pi x) dx &= \left[ -\frac{1}{\pi} x^2 \cos(\pi x) \right]_0^1 + \frac{2}{\pi} \int_0^1 x \cos(\pi x) dx = \frac{1}{\pi} + \frac{2}{\pi} \left( \left[ \frac{1}{\pi} x \sin(\pi x) \right]_0^1 - \frac{1}{\pi} \int_0^1 \sin(\pi x) dx \right) \\ &= \frac{1}{\pi} - \frac{2}{\pi^2} \left[ -\frac{1}{\pi} \cos(\pi x) \right]_0^1 = \frac{1}{\pi} - \frac{2}{\pi^2} \left( \frac{1}{\pi} + \frac{1}{\pi} \right) \\ &= \frac{1}{\pi} - \frac{4}{\pi^3}. \end{aligned}$$

2. On peut avoir envie d'écrire :

$$\ln(u_n) = \frac{1}{n} \left( \sum_{k=1}^n (\ln(a+k) - \ln k) \right) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \ln\left(1 + \frac{a}{k}\right).$$

La suite de nombres  $a, \frac{a}{2}, \dots, \frac{a}{n}$  « est une subdivision (à pas non constant) de  $[0, a]$  » mais malheureusement son pas  $a - \frac{a}{2} = \frac{a}{2}$  ne tend pas vers 0 quand  $n$  tend vers  $+\infty$ . On n'est pas dans le même type de problèmes.

Rappel. (exo classique) Soit  $v$  une suite strictement positive telle que la suite  $(\frac{v_{n+1}}{v_n})$  tend vers un réel positif  $\ell$ , alors la suite  $(\sqrt[n]{v_n})$  tend encore vers  $\ell$ .

Posons  $v_n = \frac{1}{n!} \prod_{k=1}^n (a+k)$  puis  $u_n = \sqrt[n]{v_n}$ .

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{a+n+1}{n+1} \rightarrow 1,$$

et donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$ .

3. Encore une fois, ce n'est pas une somme de RIEMANN. On tente un encadrement assez large : pour  $1 \leq k \leq n$ ,

$$\frac{n+k}{n^2+n} \leq \frac{n+k}{n^2+k} \leq \frac{n+k}{n^2}.$$

En sommant ces inégalités, il vient

$$\frac{1}{n^2+n} \sum_{k=1}^n (n+k) \leq \sum_{k=1}^n \frac{n+k}{n^2+k} \leq \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n (n+k),$$

et donc ((premier terme + dernier terme) × nombre de termes/2),

$$\frac{1}{n^2+n} \frac{((n+1)+2n)n}{2} \leq u_n \leq \frac{1}{n^2} \frac{((n+1)+2n)n}{2},$$

et finalement,  $\frac{3n+1}{2(n+1)} \leq u_n \leq \frac{3n+1}{2n}$ . Or,  $\frac{3n+1}{2(n+1)}$  et  $\frac{3n+1}{2n}$  tendent tous deux vers  $\frac{3}{2}$ . Donc,  $u_n$  tend vers  $\frac{3}{2}$ .

4. Tout d'abord

$$u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{n^2-k^2}} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{1-(\frac{k}{n})^2}} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right),$$

où  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$  pour  $x \in [0, 1[$ .  $u_n$  est donc effectivement une somme de RIEMANN à pas constant associée à la fonction  $f$  mais malheureusement, cette fonction n'est pas continue sur  $[0, 1]$ , ou même prolongeable par continuité en 1. On s'en sort néanmoins en profitant du fait que  $f$  est croissante sur  $[0, 1[$ .

Puisque  $f$  est croissante sur  $[0, 1[$ , pour  $1 \leq k \leq n-2$ , on a  $\frac{1}{n} \frac{1}{\sqrt{1-(\frac{k}{n})^2}} \leq \int_{k/n}^{(k+1)/n} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$ , et pour  $1 \leq k \leq n-1$ ,  $\frac{1}{n} \frac{1}{\sqrt{1-(\frac{k}{n})^2}} \geq \int_{(k-1)/n}^{k/n} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$ . En sommant ces inégalités, on obtient

$$u_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{1-(\frac{k}{n})^2}} \geq \sum_{k=1}^{n-1} \int_{(k-1)/n}^{k/n} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \int_0^{1-\frac{1}{n}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin\left(1 - \frac{1}{n}\right),$$

et

$$\begin{aligned} u_n &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-2} \frac{1}{\sqrt{1-(\frac{k}{n})^2}} + \frac{1}{\sqrt{n^2-(n-1)^2}} \leq \int_{\frac{1}{n}}^{1-\frac{1}{n}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx + \frac{1}{\sqrt{2n-1}} \\ &= \arcsin\left(1 - \frac{1}{n}\right) - \arcsin \frac{1}{n} + \frac{1}{\sqrt{2n-1}}. \end{aligned}$$

Quand  $n$  tend vers  $+\infty$ , les deux membres de cet encadrement tendent vers  $\arcsin 1 = \frac{\pi}{2}$ , et donc  $u_n$  tend vers  $\frac{\pi}{2}$ .

5. Pour  $1 \leq k \leq n$ ,  $\sqrt{k} - 1 \leq E(\sqrt{k}) \leq \sqrt{k}$ , et en sommant,

$$\frac{1}{n\sqrt{n}} \sum_{k=1}^n \sqrt{k} - \frac{1}{\sqrt{n}} \leq u_n \leq \frac{1}{n\sqrt{n}} \sum_{k=1}^n \sqrt{k}.$$

Quand  $n$  tend vers  $+\infty$ ,  $\frac{1}{\sqrt{n}}$  tend vers 0 et la somme de RIEMANN  $\frac{1}{n\sqrt{n}} \sum_{k=1}^n \sqrt{k} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sqrt{\frac{k}{n}}$  tend vers  $\int_0^1 \sqrt{x} dx = \frac{2}{3}$ . Donc,  $u_n$  tend vers  $\frac{2}{3}$ .

6.  $u_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{(k/n)^2}{1+8(k/n)^3}$  tend vers  $\int_0^1 \frac{x^2}{8x^3+1} dx = \left[ \frac{1}{24} \ln |8x^3+1| \right]_0^1 = \frac{\ln 3}{12}$ .

7.  $u_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2(k+n)+1} = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2+\frac{2k+1}{n}}$  tend vers  $\frac{1}{2} \int_0^2 \frac{1}{2+x} dx = \frac{1}{2} (\ln 4 - \ln 2) = \ln 2$ .

8. Soit  $f(x) = \frac{1}{x^2} e^{-1/x}$  si  $x > 0$  et 0 si  $x = 0$ .  $f$  est continue sur  $[0, 1]$  (théorèmes de croissances comparées). Donc,  $u_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right)$  tend vers  $\int_0^1 f(x) dx$ . Pour  $x \in [0, 1]$ , posons  $F(x) = \int_x^1 f(t) dt$ . Puisque  $f$  est continue sur  $[0, 1]$ ,  $F$  l'est et

$$\int_0^1 f(x) dx = F(0) = \lim_{x \rightarrow 0, x > 0} F(x) = \lim_{x \rightarrow 0, x > 0} \left[ e^{-1/t} \right]_x^1 = \lim_{x \rightarrow 0, x > 0} (e^{-1} - e^{-1/x}) = \frac{1}{e}.$$

Donc,  $u_n$  tend vers  $\frac{1}{e}$  quand  $n$  tend vers  $+\infty$ .

---

**Correction de l'exercice 4 ▲**

---

Supposons  $f$  de classe  $C^2$  sur  $[0, 1]$ . Soit  $F$  une primitive de  $f$  sur  $[0, 1]$ . Soit  $n$  un entier naturel non nul.

$$u_n = \int_0^1 f(t) dt - \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) = \sum_{k=0}^{n-1} \left( \int_{k/n}^{(k+1)/n} f(t) dt - \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \right) = \sum_{k=0}^{n-1} \left( F\left(\frac{k+1}{n}\right) - F\left(\frac{k}{n}\right) - \frac{1}{n} F'\left(\frac{k}{n}\right) \right).$$

$f$  est de classe  $C^2$  sur le segment  $[0, 1]$ . Par suite,  $F^{(3)} = f''$  est définie et bornée sur ce segment. En notant  $M_2$  la borne supérieure de  $|f''|$  sur  $[0, 1]$ , l'inégalité de TAYLOR-LAGRANGE à l'ordre 3 appliquée à  $F$  sur le segment  $[0, 1]$  fournit

$$\left| F\left(\frac{k+1}{n}\right) - F\left(\frac{k}{n}\right) - \frac{1}{n} F'\left(\frac{k}{n}\right) - \frac{1}{2n^2} F''\left(\frac{k}{n}\right) \right| \leq \frac{(1/n)^3 M_2}{6},$$

et donc,

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=0}^{n-1} \left[ F\left(\frac{k+1}{n}\right) - F\left(\frac{k}{n}\right) - \frac{1}{n} F'\left(\frac{k}{n}\right) - \frac{1}{2n^2} F''\left(\frac{k}{n}\right) \right] \right| &\leq \sum_{k=0}^{n-1} \left| F\left(\frac{k+1}{n}\right) - F\left(\frac{k}{n}\right) - \frac{1}{n} F'\left(\frac{k}{n}\right) - \frac{1}{2n^2} F''\left(\frac{k}{n}\right) \right| \\ &\leq \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(1/n)^3 M_2}{6} = \frac{M_2}{6n^2}. \end{aligned}$$

Ainsi,  $\sum_{k=0}^{n-1} \left[ F\left(\frac{k+1}{n}\right) - F\left(\frac{k}{n}\right) - \frac{1}{n} F'\left(\frac{k}{n}\right) - \frac{1}{2n^2} F''\left(\frac{k}{n}\right) \right] = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ , ou encore  $\sum_{k=0}^{n-1} \left[ F\left(\frac{k+1}{n}\right) - F\left(\frac{k}{n}\right) - \frac{1}{n} F'\left(\frac{k}{n}\right) - \frac{1}{2n^2} F''\left(\frac{k}{n}\right) \right] = o\left(\frac{1}{n}\right)$ , ou enfin,

$$u_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2n^2} F''\left(\frac{k}{n}\right) + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

Maintenant,

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2n^2} F''\left(\frac{k}{n}\right) = \frac{1}{2n} \cdot \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f'\left(\frac{k}{n}\right).$$

Or, la fonction  $f'$  est continue sur le segment  $[0, 1]$ . Par suite, la somme de RIEMANN  $\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f'\left(\frac{k}{n}\right)$  tend vers  $\int_0^1 f'(t) dt = f(1) - f(0)$  et donc

$$\frac{1}{2n} \cdot \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f'\left(\frac{k}{n}\right) = \frac{1}{2n} (f(1) - f(0) + o(1)) = \frac{f(1) - f(0)}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

Finalement,

$$\int_0^1 f(t) dt - \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) = \frac{f(1) - f(0)}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

---

**Correction de l'exercice 5 ▲**

---

1. Puisque  $f$  est de classe  $C^1$  sur  $[a, b]$ , on peut effectuer une intégration par parties qui fournit pour  $\lambda > 0$  :

$$\left| \int_a^b f(t) \sin(\lambda t) dt \right| = \left| \frac{1}{\lambda} (-[\cos(\lambda t) f(t)]_a^b + \int_a^b f'(t) \cos(\lambda t) dt) \right| \leq \frac{1}{\lambda} (|f(a)| + |f(b)| + \int_a^b |f'(t)| dt).$$

Cette dernière expression tend vers 0 quand  $\lambda$  tend vers  $+\infty$ , et donc  $\int_a^b f(t) \sin(\lambda t) dt$  tend vers 0 quand  $\lambda$  tend vers  $+\infty$ .

2. Si  $f$  est simplement supposée continue par morceaux, on ne peut donc plus effectuer une intégration par parties.

Le résultat est clair si  $f = 1$ , car pour  $\lambda > 0$ ,  $\left| \int_a^b \sin(\lambda t) dt \right| = \dots \leq \frac{2}{\lambda}$ .

Le résultat s'étend aux fonctions constantes par linéarité de l'intégrale puis aux fonctions constantes par morceaux par additivité par rapport à l'intervalle d'intégration, c'est-à-dire aux fonctions en escaliers.

Soit alors  $f$  une fonction continue par morceaux sur  $[a, b]$ .

Soit  $\varepsilon > 0$ . On sait qu'il existe une fonction en escaliers  $g$  sur  $[a, b]$  telle que  $\forall x \in [a, b], |f(x) - g(x)| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$ .

Pour  $\lambda > 0$ , on a alors

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b f(t) \sin(\lambda t) dt \right| &= \left| \int_a^b (f(t) - g(t)) \sin(\lambda t) dt + \int_a^b g(t) \sin(\lambda t) dt \right| \\ &\leq \int_a^b |f(t) - g(t)| dt + \left| \int_a^b g(t) \sin(\lambda t) dt \right| \leq (b-a) \frac{\varepsilon}{2(b-a)} + \left| \int_a^b g(t) \sin(\lambda t) dt \right| \\ &= \frac{\varepsilon}{2} + \left| \int_a^b g(t) \sin(\lambda t) dt \right|. \end{aligned}$$

Maintenant, le résultat étant établi pour les fonctions en escaliers,

$$\exists A > 0 / \forall \lambda \in \mathbb{R}, (\lambda > A \Rightarrow \left| \int_a^b g(t) \sin(\lambda t) dt \right| < \frac{\varepsilon}{2}).$$

Pour  $\lambda > A$ , on a alors  $\left| \int_a^b f(t) \sin(\lambda t) dt \right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$ . On a montré que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists A > 0 / \forall \lambda \in \mathbb{R}, (\lambda > A \Rightarrow \left| \int_a^b f(t) \sin(\lambda t) dt \right| < \varepsilon),$$

et donc que  $\int_a^b f(t) \sin(\lambda t) dt$  tend vers 0 quand  $\lambda$  tend vers  $+\infty$ .

## Correction de l'exercice 6 ▲

1. Soient  $m$  un réel strictement positif et, pour  $t \in \mathbb{R}$ ,  $f_m(t) = e^{mt}$ .  $f_m$  est bien un élément de  $E$  et de plus,

$$\begin{aligned} \varphi(f_m) &= \frac{1}{m^2} (e^{mb} - e^{ma})(e^{-ma} - e^{-mb}) \\ &= \frac{1}{m^2} e^{m(a+b)/2} (e^{m(b-a)/2} + e^{-m(b-a)/2}) e^{-m(a+b)/2} (e^{m(b-a)/2} + e^{-m(b-a)/2}) \\ &= \frac{4 \operatorname{sh}^2(m(b-a)/2)}{m^2}. \end{aligned}$$

Cette expression tend vers  $+\infty$  quand  $m$  tend vers  $+\infty$  et  $\varphi(E)$  n'est pas majoré.

2. Soit  $f$  continue et strictement positive sur  $[a, b]$ . L'inégalité de CAUCHY-SCHWARZ montre que :

$$\varphi(f) = \int_a^b (\sqrt{f(t)})^2 dt \int_a^b \left( \frac{1}{\sqrt{f(t)}} \right)^2 dt \geq \left( \int_a^b \sqrt{f(t)} \frac{1}{\sqrt{f(t)}} dt \right)^2 = (b-a)^2,$$

avec égalité si et seulement si la famille de fonctions  $(\sqrt{f(t)}, \frac{1}{\sqrt{f(t)}})$  est liée ou encore si et seulement

si  $\exists \lambda \in \mathbb{R}_+^* / \forall t \in [a, b], \sqrt{f(t)} = \lambda \frac{1}{\sqrt{f(t)}}$  ou enfin si et seulement si  $\exists \lambda \in \mathbb{R}_+^* / \forall t \in [a, b], f(t) = \lambda$ , c'est-à-dire que  $f$  est une constante strictement positive.

Tout ceci montre que  $\varphi(E)$  admet un minimum égal à  $(b-a)^2$  et obtenu pour toute fonction  $f$  qui est une constante strictement positive.



---

### Correction de l'exercice 7 ▲

Pour  $t$  réel, posons  $g(t) = \frac{t^2}{\sqrt{1+t^8}}$  puis, pour  $x$  réel,  $G(x) = \int_1^x g(t) dt$ . Puisque  $g$  est définie et continue sur  $\mathbb{R}$ ,  $G$  est définie sur  $\mathbb{R}$  et de classe  $C^1$  et  $G' = g$  ( $G$  est la primitive de  $g$  sur  $\mathbb{R}$  qui s'annule en 1). Plus précisément,  $g$  est de classe  $C^\infty$  sur  $\mathbb{R}$  et donc  $G$  est de classe  $C^\infty$  sur  $\mathbb{R}$ .

Finalement,  $f$  est définie et de classe  $C^\infty$  sur  $] -\infty, 1[ \cup ]1, +\infty[$ .

#### Etude en 1.

Pour  $x \neq 1$ ,

$$f(x) = \frac{G(x)}{x-1} = \frac{G(1) + G'(1)(x-1) + \frac{G''(1)}{2}(x-1)^2 + o((x-1)^2)}{x-1} = g(1) + g'(1)(x-1) + o((x-1)).$$

Donc,  $f$  admet en 1 un développement limité d'ordre 1. Par suite,  $f$  se prolonge par continuité en 1 en posant  $f(1) = g(1) = \frac{1}{\sqrt{2}}$  puis le prolongement est dérivable en 1 et  $f'(1) = \frac{1}{2}g'(1)$ . Or, pour tout réel  $x$ ,  $g'(x) = 2x \frac{1}{\sqrt{1+x^8}} + x2 \cdot \left(-\frac{4x^7}{(1+x^8)\sqrt{1+x^8}}\right) = 2x \frac{1-x^8}{(1+x^8)\sqrt{1+x^8}}$  et  $g'(1) = 0$ . Donc,  $f'(1) = 0$ .

#### Dérivée. Variations

Pour  $x \neq 1$ ,  $f'(x) = \frac{G'(x)(x-1) - G(x)}{(x-1)^2}$ .

$f'(x)$  est du signe de  $h(x) = G'(x)(x-1) - G(x)$  dont la dérivée est  $h'(x) = G''(x)(x-1) + G'(x) - G'(x) = (x-1)g'(x)$ .  $h'$  est du signe de  $2x(1-x^8)(x-1)$  ou encore du signe de  $-2x(1+x)$ .  $h$  est donc décroissante sur  $] -\infty, -1]$  et sur  $[0, +\infty[$  et croissante sur  $[-1, 0]$ .

Maintenant, quand  $x$  tend vers  $+\infty$  (ou  $-\infty$ ),  $G'(x)(x-1) = g(x)(x-1) \sim x \frac{1}{x^2} = \frac{1}{x}$  et donc  $G'(x)(x-1)$  tend vers 0. Ensuite, pour  $x \geq 1$

$$0 \leq G(x) \leq \int_1^x \frac{t^2}{\sqrt{t^8}} dt = 1 - \frac{1}{x} \leq 1,$$

et  $G$  est bornée au voisinage de  $+\infty$  (ou de  $-\infty$ ). Comme  $G$  est croissante sur  $\mathbb{R}$ ,  $G$  a une limite réelle en  $+\infty$  et en  $-\infty$ . Cette limite est strictement positive en  $+\infty$  et strictement négative en  $-\infty$ . Par suite,  $h$  a une limite strictement positive en  $-\infty$  et une limite strictement négative en  $+\infty$ . Sur  $[0, +\infty[$ ,  $h$  est décroissante et s'annule en 1. Donc,  $h$  est positive sur  $[0, 1]$  et négative sur  $[1, +\infty[$ .

Ensuite,

$$h(-1) = \int_{-1}^1 \frac{t^2}{\sqrt{1+t^8}} dt - \sqrt{2} = 2 \int_0^1 \frac{t^2}{\sqrt{1+t^8}} dt - \sqrt{2} < 2 \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{2}} dt - \sqrt{2} = 0,$$

et  $h(-1) < 0$ .  $h$  s'annule donc, une et une seule fois sur  $] -\infty, -1[$  en un certain réel  $\alpha$  et une et une seule fois sur  $] -1, 0[$  en un certain réel  $\beta$ . De plus,  $h$  est strictement positive sur  $] -\infty, \alpha[$ , strictement négative sur  $] \alpha, \beta[$ , strictement positive sur  $] \beta, 1[$  et strictement négative sur  $] 1, +\infty[$ .

$f$  est strictement croissante sur  $] -\infty, \alpha]$ , strictement décroissante sur  $[\alpha, \beta]$ , strictement croissante sur  $[\beta, 1]$  et strictement décroissante sur  $[1, +\infty[$ .

#### Etude en l'infini.

En  $+\infty$  ou  $-\infty$ ,  $G$  a une limite réelle et donc  $f$  tend vers 0.

---

### Correction de l'exercice 8 ▲

1. La fonction  $t \mapsto e^{t^2}$  est de classe  $C^\infty$  sur  $\mathbb{R}$ . Donc, la fonction  $x \mapsto \int_0^x e^{t^2} dt$  est de classe  $C^\infty$  sur  $\mathbb{R}$  et il en est de même de  $f$ .

La fonction  $t \mapsto e^{t^2}$  est paire et donc la fonction  $x \mapsto \int_0^x e^{t^2} dt$  est impaire. Comme la fonction  $x \mapsto e^{-x^2}$  est paire,  $f$  est impaire.

2. Pour  $x$  réel,  $f'(x) = -2xe^{-x^2} \int_0^x e^{t^2} dt + e^{-x^2} e^{x^2} = -2xf(x) + 1$ .

3. Pour  $x \geq 1$ , une intégration par parties fournit :

$$\int_1^x e^{t^2} dt = \int_1^x \frac{1}{2t} \cdot 2te^{t^2} dt = \left[ \frac{1}{2t} e^{t^2} \right]_1^x + \frac{1}{2} \int_1^x \frac{e^{t^2}}{t^2} dt = \frac{e^{x^2}}{2x} - \frac{e}{2} + \frac{1}{2} \int_1^x \frac{e^{t^2}}{t^2} dt,$$

et donc,

$$\begin{aligned} |1 - 2xf(x)| &= \left| 1 - 2xe^{-x^2} \int_1^x e^{t^2} dt - 2xe^{-x^2} \int_0^1 e^{t^2} dt \right| \\ &\leq xe^{-x^2} \int_1^x \frac{e^{t^2}}{t^2} dt + exe^{-x^2} + 2xe^{-x^2} \int_0^1 e^{t^2} dt. \end{aligned}$$

Les deux derniers termes tendent vers 0 quand  $x$  tend vers  $+\infty$ . Il reste le premier.

Pour  $x \geq 2$ ,

$$\begin{aligned} 0 &\leq xe^{-x^2} \int_1^x \frac{e^{t^2}}{t^2} dt = xe^{-x^2} \int_1^{x-1} \frac{e^{t^2}}{t^2} dt + xe^{-x^2} \int_{x-1}^x \frac{e^{t^2}}{t^2} dt \\ &\leq x(x-1)e^{-x^2} \frac{e^{(x-1)^2}}{1^2} + xe^{-x^2} e^{x^2} \int_{x-1}^x \frac{1}{t^2} dt \\ &= x(x-1)e^{-2x+1} + x \left( \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x} \right) = x(x-1)e^{-2x+1} + \frac{1}{x-1}. \end{aligned}$$

Cette dernière expression tend vers 0 quand  $x$  tend vers  $+\infty$ . On en déduit que  $xe^{-x^2} \int_1^x \frac{e^{t^2}}{t^2} dt$  tend vers 0 quand  $x$  tend vers  $+\infty$ . Finalement,  $1 - 2xf(x)$  tend vers 0 quand  $x$  tend vers  $+\infty$ , ou encore,  $f(x) \sim \frac{1}{2x}$ .

4. Pour  $x > 0$ ,  $g(x) = \frac{e^{x^2}}{2x} (1 - 2xf(x)) = \frac{e^{x^2}}{2x} - \int_0^x e^{t^2} dt$  puis,

$$g'(x) = e^{x^2} - \frac{e^{x^2}}{2x^2} - e^{x^2} = -\frac{e^{x^2}}{2x^2} < 0.$$

$g$  est donc strictement décroissante sur  $]0, +\infty[$  et donc,  $g$  s'annule au plus une fois sur  $]0, +\infty[$ . Ensuite,  $f'(1) = 1 - 2f(1) = 1 - 2e^{-1} \int_0^1 e^{t^2} dt$ . Or, la méthode des rectangles fournit  $\int_0^1 e^{t^2} dt = 1,44... > 1,35... = \frac{e}{2}$ , et donc  $f'(1) < 0$  puis  $g(1) < 0$ . Enfin, comme en  $0^+$ ,  $g(x) \sim \frac{1}{2x} f'(0) = \frac{1}{2x}$ ,  $g(0^+) = +\infty$ . Donc,  $g$  s'annule exactement une fois sur  $]0, +\infty[$  en un certain réel  $x_0$  de  $]0, 1[$ .

5.  $g$  est strictement positive sur  $]0, x_0[$  et strictement négative sur  $]x_0, +\infty[$ . Il en est de même de  $f'$ .  $f$  est ainsi strictement croissante sur  $[0, x_0]$  et strictement décroissante sur  $[x_0, +\infty[$ .

### Correction de l'exercice 9 ▲

Pour  $t \in [0, 1]$ ,

$$\begin{aligned} f^2(t) &= \left( \int_0^t f'(u) du \right)^2 \leq \left( \int_0^t f'^2(u) du \right) \left( \int_0^t 1 du \right) \quad (\text{CAUCHY - SCHWARZ}) \\ &= t \int_0^t f'^2(u) du \leq t \int_0^1 f'^2(u) du, \end{aligned}$$

et donc, par croissance de l'intégrale,

$$\int_0^1 f^2(t) dt \leq \int_0^1 t \left( \int_0^1 f'^2(u) du \right) dt = \left( \int_0^1 f'^2(u) du \right) \int_0^1 t dt = \frac{1}{2} \int_0^1 f'^2(u) du.$$

### Correction de l'exercice 10 ▲

Pour  $x$  réel donné, la fonction  $t \mapsto |t-x|f(t)$  est continue sur  $[a, b]$  et donc  $F(x)$  existe. Pour  $x \leq a$ ,  $F(x) = \int_a^b (t-x)f(t) dt = -x \int_a^b f(t) dt + \int_a^b t f(t) dt$ .  $F$  est donc de classe  $C^1$  sur  $] -\infty, a]$  en tant que fonction affine et, pour  $x < a$ ,  $F'(x) = -\int_a^b f(t) dt$  (en particulier  $F'_g(a) = -\int_a^b f(t) dt$ ).

De même, pour  $x \geq b$ ,  $F(x) = x \int_a^b f(t) dt - \int_a^b t f(t) dt$ .  $F$  est donc de classe  $C^1$  sur  $[b, +\infty[$  en tant que fonction affine et, pour  $x \geq b$ ,  $F'(x) = \int_a^b f(t) dt$  (en particulier  $F'_d(b) = \int_a^b f(t) dt$ ).

Enfin, si  $a \leq x \leq b$ ,

$$F(x) = \int_a^x (x-t)f(t) dt + \int_x^b (t-x)f(t) dt = x \left( \int_a^x f(t) dt - \int_x^b f(t) dt \right) - \int_a^x t f(t) dt + \int_x^b t f(t) dt.$$

$F$  est donc de classe  $C^1$  sur  $[a, b]$  et, pour  $a \leq x \leq b$ ,

$$\begin{aligned} F'(x) &= \int_a^x f(t) dt - \int_x^b f(t) dt + x(f(x) - (-f(x))) - xf(x) - xf(x) \\ &= \int_a^x f(t) dt - \int_x^b f(t) dt. \end{aligned}$$

(et en particulier,  $F'_d(a) = -\int_a^b f(t) dt = F'_g(a)$  et  $F'_g(b) = \int_a^b f(t) dt = F'_d(b)$ ).

$F$  est continue sur  $] -\infty, a]$ ,  $[a, b]$  et  $[b, +\infty[$  et donc sur  $\mathbb{R}$ .  $F$  est de classe  $C^1$  sur  $] -\infty, a]$ ,  $[a, b]$  et  $[b, +\infty[$ . De plus,  $F'_g(a) = F'_d(a)$  et  $F'_g(b) = F'_d(b)$ .  $F$  est donc de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}$ .

### Correction de l'exercice 11 ▲

Puisque  $f$  est continue et strictement croissante sur  $[0, a]$ ,  $f$  réalise une bijection de  $[0, a]$  sur  $f([0, a]) = [0, f(a)]$ . Soit  $x \in [0, a]$ . Pour  $y \in [0, f(a)]$ , posons  $g(y) = \int_0^x f(t) dt + \int_0^y f^{-1}(t) dt - xy$ . Puisque  $f$  est continue sur  $[0, a]$ , on sait que  $f^{-1}$  est continue sur  $[0, f(a)]$  et donc la fonction  $y \mapsto \int_0^y f^{-1}(t) dt$  est définie et de classe  $C^1$  sur  $[0, f(a)]$ . Donc  $g$  est de classe  $C^1$  sur  $[0, f(a)]$  et pour  $y \in [0, f(a)]$ ,  $g'(y) = f^{-1}(y) - x$ .

Or,  $f$  étant strictement croissante sur  $[0, a]$ ,  $g'(y) > 0 \Leftrightarrow f^{-1}(y) > x \Leftrightarrow y > f(x)$ . Par suite,  $g'$  est strictement négative sur  $[0, f(x)[$  et strictement positive sur  $]f(x), f(a)]$ , et  $g$  est strictement décroissante sur  $[0, f(x)]$  et strictement croissante sur  $[f(x), f(a)]$ .  $g$  admet en  $y = f(x)$  un minimum global égal à  $g(f(x)) = \int_0^x f(t) dt + \int_0^{f(x)} f^{-1}(t) dt - xf(x)$ . Notons  $h(x)$  cette expression.

$f$  est continue sur  $[0, a]$ . Donc,  $x \mapsto \int_0^x f(t) dt$  est de classe  $C^1$  sur  $[0, a]$ . Ensuite  $f$  est de classe  $C^1$  sur  $[0, a]$  à valeurs dans  $[0, f(a)]$  et  $y \mapsto \int_0^y f^{-1}(t) dt$  est de classe  $C^1$  sur  $[0, f(a)]$  (puisque  $f^{-1}$  est continue sur  $[0, f(a)]$ ).

On en déduit que  $x \mapsto \int_0^{f(x)} f^{-1}(t) dt$  est de classe  $C^1$  sur  $[0, a]$ . Il en est de même de  $h$  et pour  $x \in [0, a]$ ,

$$h'(x) = f(x) + f'(x)f^{-1}(f(x)) - f(x) - xf'(x) = 0.$$

$h$  est donc constante sur  $[0, a]$  et pour  $x \in [0, a]$ ,  $h(x) = h(0) = 0$ .

On a montré que

$$\forall (x, y) \in [0, a] \times [0, f(a)], \int_0^x f(t) dt + \int_0^y f^{-1}(t) dt - xy \geq \int_0^x f(t) dt + \int_0^{f(x)} f^{-1}(t) dt - xf(x) = 0.$$

### Correction de l'exercice 12 ▲

Soit, pour  $x \in [0, 1]$ ,  $g(x) = f(x) - x$ .  $g$  est continue sur  $[0, 1]$  et

$$\int_0^1 g(x) dx = \int_0^1 f(x) dx - \int_0^1 x dx = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0.$$

Si  $g$  est de signe constant,  $g$  étant de plus continue sur  $[0, 1]$  et d'intégrale nulle sur  $[0, 1]$ , on sait que  $g$  est nulle. Sinon,  $g$  change de signe sur  $[0, 1]$  et le théorème des valeurs intermédiaires montre que  $g$  s'annule au moins

une fois. Dans tous les cas,  $g$  s'annule au moins une fois sur  $[0, 1]$  ou encore,  $f$  admet au moins un point fixe dans  $[0, 1]$ .

### Correction de l'exercice 13 ▲

D'après l'inégalité de CAUCHY-SCHWARZ,

$$\left(\int_0^1 f(t) dt\right) \left(\int_0^1 g(t) dt\right) = \left(\int_0^1 (\sqrt{f(t)})^2 dt\right) \left(\int_0^1 (\sqrt{g(t)})^2 dt\right) \geq \left(\int_0^1 \sqrt{f(t)}\sqrt{g(t)} dt\right)^2 \geq \left(\int_0^1 1 dt\right)^2 = 1.$$

### Correction de l'exercice 14 ▲

Soit  $x \in [0, 1] \subset [0, \frac{\pi}{2}]$ .

D'après la formule de TAYLOR-LAPLACE à l'ordre 1 fournit

$$\sin x = x - \int_0^x (x-t) \sin t dt \leq x,$$

car pour  $t \in [0, x]$ ,  $(x-t) \geq 0$  et pour  $t \in [0, x] \subset [0, \frac{\pi}{2}]$ ,  $\sin t \geq 0$ .

De même, la formule de TAYLOR-LAPLACE à l'ordre 3 fournit

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \int_0^x \frac{(x-t)^3}{6} \sin t dt \geq x - \frac{x^3}{6}.$$

Donc,  $\forall x \in [0, 1]$ ,  $x - \frac{x^3}{6} \leq \sin x \leq x$ .

Soient alors  $n \geq 1$  et  $k \in \{1, \dots, n\}$ . On a  $0 \leq \frac{1}{(n+k)^2} \leq 1$  et donc

$$\frac{1}{(n+k)^2} - \frac{1}{6(n+k)^6} \leq \sin \frac{1}{(n+k)^2} \leq \frac{1}{(n+k)^2},$$

puis en sommant

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{(n+k)^2} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{6(n+k)^6} \leq \sum_{k=1}^n \sin \frac{1}{(n+k)^2} \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{(n+k)^2}.$$

Maintenant, quand  $n$  tend vers  $+\infty$ ,

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{(n+k)^2} = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{(1+\frac{k}{n})^2} = \frac{1}{n} \left( \int_0^1 \frac{1}{(1+x)^2} dx + o(1) \right) = \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

D'autre part,

$$0 \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{6(n+k)^6} \leq n \cdot \frac{1}{6n^6} = \frac{1}{6n^5},$$

et donc,  $\sum_{k=1}^n \frac{1}{6(n+k)^6} = o\left(\frac{1}{n}\right)$ .

On en déduit que  $2n\left(\frac{1}{(n+k)^2} - \frac{1}{6(n+k)^6}\right) = 2n\left(\frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) = 1 + o(1)$  et que  $2n\frac{1}{(n+k)^2} = 1 + o(1)$ . Mais alors, d'après le théorème des gendarmes,  $2n \sum_{k=1}^n \sin \frac{1}{(n+k)^2}$  tend vers 1 quand  $n$  tend vers  $+\infty$ , ou encore

$$\sum_{k=1}^n \sin \frac{1}{(n+k)^2} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{2n}.$$

### Correction de l'exercice 15 ▲

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ .

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^n \sin \frac{k}{n^2} &= \operatorname{Im} \left( \sum_{k=1}^n e^{ik/n^2} \right) = \operatorname{Im} \left( e^{i/n^2} \frac{1 - e^{ni/n^2}}{1 - e^{i/n^2}} \right) = \operatorname{Im} \left( e^{i(1+\frac{n}{2}-\frac{1}{2})/n^2} \frac{\sin \frac{1}{2n}}{\sin \frac{1}{2n^2}} \right) = \frac{\sin \frac{n+1}{2n^2} \sin \frac{1}{2n}}{\sin \frac{1}{2n^2}} \\ &\underset{n \rightarrow +\infty}{=} \left( \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \right) \left( \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \right) \left( \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^3}\right) \right)^{-1} \\ &= \left( 1 + \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \right) \left( \frac{1}{2} + o\left(\frac{1}{n}\right) \right) \left( 1 + o\left(\frac{1}{n}\right) \right)^{-1} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right),\end{aligned}$$

(on peut aussi partir de l'encadrement  $\frac{k}{n^2} - \frac{k^3}{6n^6} \leq \sin \frac{k}{n^2} \leq \frac{k}{n^2}$ ).

### Correction de l'exercice 16 ▲

1. Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Pour  $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ ,  $0 \leq \arcsin x \leq (\frac{\pi}{2})^n$  et donc, par croissance de l'intégrale,

$$0 \leq u_n \leq \frac{1}{n!} \int_0^1 \left(\frac{\pi}{2}\right)^n dx = \frac{1}{n!} \left(\frac{\pi}{2}\right)^n.$$

D'après un théorème de croissances comparées,  $\frac{1}{n!} \left(\frac{\pi}{2}\right)^n$  tend vers 0 quand  $n$  tend vers  $+\infty$ . D'après le théorème des gendarmes,  $u_n$  tend vers 0 quand  $n$  tend vers  $+\infty$ .

2.  $0 \leq \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx \leq \int_0^1 \frac{x^n}{1+0} dx = \frac{1}{n+1}$ . Comme  $\frac{1}{n+1}$  tend vers 0 quand  $n$  tend vers  $+\infty$ ,  $\int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx$  tend vers 0 quand  $n$  tend vers  $+\infty$ .
3. Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ .

$$\left| \int_0^\pi \frac{n \sin x}{x+n} dx - \int_0^\pi \sin x dx \right| = \left| \int_0^\pi \frac{-x \sin x}{x+n} dx \right| \leq \int_0^\pi \left| \frac{-x \sin x}{x+n} \right| dx \leq \int_0^\pi \frac{\pi}{0+n} dx = \frac{\pi^2}{n}.$$

Or,  $\frac{\pi^2}{n}$  tend vers 0 quand  $n$  tend vers  $+\infty$ , et donc  $\int_0^\pi \frac{n \sin x}{x+n} dx$  tend vers  $\int_0^\pi \sin x dx = 2$  quand  $n$  tend vers  $+\infty$ .

### Correction de l'exercice 17 ▲

Pour  $t \in \mathbb{R}$ , posons  $g(t) = \frac{1}{\sqrt{t^4+t^2+1}}$ .  $g$  est continue sur  $\mathbb{R}$  et admet donc des primitives sur  $\mathbb{R}$ . Soit  $G$  une primitive de  $g$  sur  $\mathbb{R}$ .

#### Définition, dérivabilité, dérivée.

Puisque  $g$  est continue sur  $\mathbb{R}$ ,  $F$  est définie sur  $\mathbb{R}$  et pour tout réel  $x$ ,  $F(x) = G(2x) - G(x)$ .  $G$  est de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}$  et donc  $F$  est de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}$  et pour tout réel  $x$ ,

$$F'(x) = 2G'(2x) - G'(x) = 2g(2x) - g(x) = \frac{2}{\sqrt{16x^4 - 4x^2 + 1}} - \frac{1}{\sqrt{x^4 + x^2 + 1}}.$$

#### Parité.

Soit  $x \in \mathbb{R}$ . En posant  $t = -u$  et donc  $dt = -du$ , on obtient, en notant que  $g$  est paire

$$F(-x) = \int_{-x}^{-2x} g(t) dt = \int_x^{2x} g(-u) \cdot -du = - \int_x^{2x} g(u) du = -F(x).$$

$F$  est donc impaire.

#### Variations.

Pour  $x$  réel,

$$\begin{aligned}\operatorname{sgn}(F'(x)) &= \operatorname{sgn}\left(\frac{2}{\sqrt{16x^4 - 4x^2 + 1}} - \frac{1}{\sqrt{x^4 + x^2 + 1}}\right) = \operatorname{sgn}(2\sqrt{x^4 + x^2 + 1} - \sqrt{16x^4 - 4x^2 + 1}) \\ &= \operatorname{sgn}(4(x^4 + x^2 + 1) - (16x^4 + 4x^2 + 1)) \text{ (par croissance de } t \mapsto t^2 \text{ sur } \mathbb{R}^+) \\ &= \operatorname{sgn}(-12x^4 + 3) = \operatorname{sgn}(1 - 4x^4) = \operatorname{sgn}(1 - 2x^2).\end{aligned}$$

$F$  est donc strictement croissante sur  $[-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}]$  et strictement décroissante sur  $]-\infty, -\frac{1}{\sqrt{2}}]$  et sur  $[\frac{1}{\sqrt{2}}, +\infty[$ .

**Etude en  $+\infty$ .**

Pour  $x > 0$ ,  $0 \leq F(x) \leq \int_x^{2x} \frac{1}{\sqrt{t^4}} dt = \frac{2x-x}{x^2} = \frac{1}{x}$ . Comme  $\frac{1}{x}$  tend vers 0 quand  $x$  tend vers  $+\infty$ , le théorème des gendarmes permet d'affirmer que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 0$ .

**Graphes.**

### Correction de l'exercice 18 ▲

$f$  est continue sur  $\mathbb{R}$  et admet donc des primitives sur  $\mathbb{R}$ . Soit  $F$  une primitive donnée de  $f$  sur  $\mathbb{R}$ . Notons  $(*)$  la relation :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x)f(y) = F(x+y) - F(x-y).$$

Pour  $x = y = 0$ , on obtient  $\forall x \in \mathbb{R}, f(0) = 0$ . Puis  $x = 0$  fournit  $\forall y \in \mathbb{R}, F(y) - F(-y) = 0$ .  $F$  est donc nécessairement paire et sa dérivée  $f$  est nécessairement impaire.

La fonction nulle est solution du problème. Soit  $f$  une éventuelle solution non nulle. Il existe alors un réel  $y_0$  tel que  $f(y_0) \neq 0$ . Pour tout réel  $x$ , on a alors

$$f(x) = \frac{1}{f(y_0)} \int_{x-y_0}^{x+y_0} f(t) dt = \frac{1}{f(y_0)} (F(x+y_0) - F(x-y_0)).$$

$f$  est continue sur  $\mathbb{R}$  et donc  $F$  est de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}$ . Il en est de même de la fonction  $x \mapsto \frac{1}{f(y_0)} (F(x+y_0) - F(x-y_0))$  et donc de  $f$ . Mais alors,  $F$  est de classe  $C^2$  sur  $\mathbb{R}$  et donc  $f$  l'est aussi ( $f$  est en fait de classe  $C^\infty$  par récurrence).

En dérivant  $(*)$  à  $y$  fixé, on obtient  $f'(x)f(y) = f(x+y) - f(x-y)$  (\*\*), mais en dérivant à  $x$  fixé, on obtient aussi  $f(x)f'(y) = f(x+y) + f(x-y)$  (\*\*\*) . En redérivant (\*\*) à  $y$  fixé, on obtient  $f''(x)f(y) = f'(x+y) - f'(x-y)$  et en dérivant (\*\*\*) à  $x$  fixé, on obtient  $f(x)f''(y) = f'(x+y) - f'(x-y)$ . Mais alors,

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f''(x)f(y) = f(x)f''(y),$$

et en particulier,

$$\forall x \in \mathbb{R}, f''(x) - \frac{f''(y_0)}{f(y_0)} f(x) = 0.$$

On a montré que si  $f$  est solution du problème, il existe un réel  $\lambda$  tel que  $f$  est solution de l'équation différentielle  $y'' - \lambda y = 0$  ( $E$ ).

- si  $\lambda > 0$ , en posant  $k = \sqrt{\lambda}$ , ( $E$ ) s'écrit  $y'' - k^2 y = 0$ . Les solutions de ( $E$ ) sont les fonctions de la forme  $x \mapsto A \operatorname{sh}(kx) + B \operatorname{ch}(kx)$ ,  $(A, B) \in \mathbb{R}^2$  et les solutions impaires de ( $E$ ) sont les fonctions de la forme  $x \mapsto A \operatorname{sh}(kx)$ ,  $A \in \mathbb{R}$ .

Réciproquement, soit  $k$  un réel strictement positif. Pour  $A \in \mathbb{R}^*$  (on sait que la fonction nulle est solution) et  $x \in \mathbb{R}$ , posons  $f(x) = A \operatorname{sh}(kx)$ . Alors

$$\int_{x-y}^{x+y} f(t) dt = \frac{A}{k} (\operatorname{ch}(k(x+y)) - \operatorname{ch}(k(x-y))) \frac{2A}{k} \operatorname{sh}(kx) \operatorname{sh}(ky) = \frac{2}{kA} f(x)f(y).$$

$f$  est solution si et seulement si  $\frac{2}{kA} = 1$  ou encore  $A = \frac{2}{k}$ .

- si  $\lambda < 0$ , en posant  $k = \sqrt{-\lambda}$ , ( $E$ ) s'écrit  $y'' + k^2 y = 0$ . Les solutions de ( $E$ ) sont les fonctions de la forme  $x \mapsto A \sin(kx) + B \cos(kx)$ ,  $(A, B) \in \mathbb{R}^2$  et les solutions impaires de ( $E$ ) sont les fonctions de la forme  $x \mapsto A \sin(kx)$ ,  $A \in \mathbb{R}$ .

Réciproquement, soit  $k$  un réel strictement positif. Pour  $A \in \mathbb{R}^*$  et  $x \in \mathbb{R}$ , posons  $f(x) = A \sin(kx)$ . Alors

$$\int_{x-y}^{x+y} f(t) dt = \frac{A}{k} (\cos(k(x-y)) - \cos(k(x+y))) = \frac{2A}{k} \sin(kx) \sin(ky) = \frac{2}{kA} f(x)f(y).$$

$f$  est solution si et seulement si  $\frac{2}{kA} = 1$  ou encore  $A = \frac{2}{k}$ .

- si  $\lambda = 0$ ,  $(E)$  s'écrit  $y'' = 0$ . Les solutions de  $(E)$  sont les fonctions affines et les solutions impaires de  $(E)$  sont les fonctions de la forme  $x \mapsto Ax$ ,  $A \in \mathbb{R}$ .  
Réciproquement, si  $f(x) = Ax$

$$\int_{x-y}^{x+y} f(t) dt = \frac{A}{2}((x+y)^2 - (x-y)^2) = 2Axy = \frac{2}{A}f(x)f(y),$$

et  $f$  est solution si et seulement si  $A = 2$ .

Les solutions sont la fonction nulle, la fonction  $x \mapsto 2x$ , les fonctions  $x \mapsto \frac{2}{k} \sin(kx)$ ,  $k > 0$  et les fonctions  $x \mapsto \frac{2}{k} \operatorname{sh}(kx)$ ,  $k > 0$ .

### Correction de l'exercice 19 ▲

Soit  $F$  une primitive de  $f$  sur  $[a, b]$ .  $F$  est de classe  $C^2$  sur le segment  $[a, b]$  et l'inégalité de TAYLOR-LAGRANGE permet d'écrire

$$\left| F\left(\frac{a+b}{2}\right) - F(a) - \frac{b-a}{2}F'(a) \right| \leq \frac{1}{2} \frac{(b-a)^2}{4} \sup\{|F''(x)|, x \in [a, b]\}.$$

Mais  $F'(a) = f(a) = 0$  et  $F'' = f'$ . Donc,

$$\left| F\left(\frac{a+b}{2}\right) - F(a) \right| \leq \frac{1}{2} M \frac{(b-a)^2}{4}.$$

De même, puisque  $F'(b) = f(b) = 0$ ,

$$\left| F\left(\frac{a+b}{2}\right) - F(b) \right| \leq \frac{1}{2} M \frac{(b-a)^2}{4}.$$

Mais alors,

$$\left| \int_a^b f(t) dt \right| = |F(b) - F(a)| \leq |F(b) - F\left(\frac{a+b}{2}\right)| + \left| F\left(\frac{a+b}{2}\right) - F(a) \right| \leq \frac{1}{2} M \frac{(b-a)^2}{4} + \frac{1}{2} M \frac{(b-a)^2}{4} = M \frac{(b-a)^2}{4}.$$

### Correction de l'exercice 20 ▲

Si  $\int_0^1 f(t) dt \geq 0$ ,

$$\begin{aligned} \left| \int_0^1 f(t) dt \right| &= \int_0^1 |f(t)| dt \Leftrightarrow \int_0^1 f(t) dt = \int_0^1 |f(t)| dt \Leftrightarrow \int_0^1 (|f(t)| - f(t)) dt = 0 \\ &\Leftrightarrow |f| - f = 0 \text{ (fonction continue positive d'intégrale nulle)} \\ &\Leftrightarrow f = |f| \Leftrightarrow f \geq 0. \end{aligned}$$

Si  $\int_0^1 f(t) dt \leq 0$ , alors  $\int_0^1 -f(t) dt \geq 0$  et d'après ce qui précède,  $f$  est solution si et seulement si  $-f = |-f|$  ou encore  $f \leq 0$ .

En résumé,  $f$  est solution si et seulement si  $f$  est de signe constant sur  $[0, 1]$ .

### Correction de l'exercice 21 ▲

1. Si  $x > 1$ ,  $[x, x^2] \subset ]1, +\infty[$  et  $t \mapsto \frac{1}{\ln t}$  est continue sur  $]1, +\infty[$ . Par suite,  $\int_x^{x^2} \frac{dt}{\ln t}$  existe. De plus,

$$x \int_x^{x^2} \frac{1}{t \ln t} dt \leq \int_x^{x^2} \frac{1}{\ln t} dt = \int_x^{x^2} t \frac{1}{t \ln t} dt \leq x^2 \int_x^{x^2} \frac{1}{t \ln t} dt.$$

Mais,

$$\int_x^{x^2} \frac{1}{t \ln t} dt = [\ln |\ln t|]_x^{x^2} = \ln |\ln(x^2)| - \ln |\ln(x)| = \ln \left| \frac{2 \ln x}{\ln x} \right| = \ln 2.$$

Donc,  $\forall x > 1$ ,  $x \ln 2 \leq F(x) \leq x^2 \ln 2$ . On en déduit que  $\lim_{x \rightarrow 1, x > 1} F(x) = \ln 2$ .

Si  $0 < x < 1$ , on a  $x^2 < x$  puis  $[x^2, x] \subset ]0, 1[$ . Donc,  $t \mapsto \frac{1}{\ln t}$  est continue sur  $[x^2, x]$  et  $F(x) = -\int_{x^2}^x \frac{1}{\ln t} dt$  existe.

Pour  $t \in [x^2, x]$ , on a  $t \ln t < 0$  et  $x^2 \leq t \leq x$ . Par suite,

$$x \frac{1}{t \ln t} \leq t \frac{1}{t \ln t} = \frac{1}{\ln t} \leq x^2 \frac{1}{t \ln t},$$

puis,  $\int_{x^2}^x x \frac{1}{t \ln t} dt \leq \int_{x^2}^x \frac{1}{\ln t} dt \leq \int_{x^2}^x x^2 \frac{1}{t \ln t} dt$ , et finalement,

$$x^2 \ln 2 = \int_x^{x^2} x^2 \frac{1}{t \ln t} dt \leq F(x) = \int_x^{x^2} \frac{1}{\ln t} dt \leq \int_x^{x^2} x \frac{1}{t \ln t} dt = x \ln 2.$$

On obtient alors  $\lim_{x \rightarrow 1, x < 1} F(x) = \ln 2$  et finalement,  $\lim_{x \rightarrow 1} F(x) = \ln 2$ . On en déduit que  $F$  se prolonge par continuité en 1 en posant  $F(1) = \ln 2$  (on note encore  $F$  le prolongement obtenu).

2. On a déjà vu que  $F$  est définie (au moins) sur  $]0, +\infty[$  ( $F$  désignant le prolongement). Il ne paraît pas encore possible de donner un sens à  $F(0)$  et encore moins à  $F(x)$  quand  $x < 0$ , car alors  $[x, 0]$  est un intervalle de longueur non nulle contenu dans  $[x, x^2]$ , sur lequel la fonction  $t \mapsto \frac{1}{\ln t}$  n'est même pas définie.

$$D_F = ]0, +\infty[.$$

Pour  $t \in ]0, 1[ \cup ]1, +\infty[$ , posons  $g(t) = \frac{1}{\ln t}$  et notons  $G$  une primitive de  $g$  sur cet ensemble. Alors, pour  $x$  dans  $]0, 1[ \cup ]1, +\infty[$ ,  $F(x) = G(x^2) - G(x)$ . On en déduit que  $F$  est dérivable (et même de classe  $C^1$ ) sur  $]0, 1[ \cup ]1, +\infty[$  et que pour  $x$  dans  $]0, 1[ \cup ]1, +\infty[$ ,

$$F'(x) = 2xg(x^2) - g(x) = \frac{2x}{\ln(x^2)} - \frac{1}{\ln x} = \frac{x-1}{\ln x}.$$

Maintenant, quand  $x$  tend vers 1,  $\frac{x-1}{\ln x}$  tend vers 1. Ainsi,  $F$  est continue sur  $]0, +\infty[$ , de classe  $C^1$  sur  $]0, 1[ \cup ]1, +\infty[$  et  $F'$  a une limite réelle en 1. Un théorème classique d'analyse permet d'affirmer que  $F$  est de classe  $C^1$  sur  $D_F$  et en particulier, dérivable en 1 avec  $F'(1) = 1$ .

$$\forall x \in ]0, +\infty[, F'(x) = \begin{cases} \frac{x-1}{\ln x} & \text{si } x \neq 1 \\ 1 & \text{si } x = 1. \end{cases}$$

Si  $x > 1$ ,  $x-1 > 0$  et  $\ln x > 0$  et si  $0 < x < 1$ ,  $x-1 < 0$  et  $\ln x < 0$ . Dans tous les cas ( $0 < x < 1$ ,  $x = 1$ ,  $x > 1$ )  $F'(x) > 0$ .  $F$  est strictement croissante sur  $]0, +\infty[$ .

On a vu que  $\forall x > 1$ ,  $F(x) > x \ln 2$  et donc  $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = +\infty$ . Plus précisément, pour  $x > 1$ ,

$$\frac{F(x)}{x} = \frac{1}{x} \int_x^{x^2} \frac{1}{\ln t} dt \geq \frac{x^2 - x}{x \ln x} = \frac{x-1}{\ln x}.$$

Comme  $\frac{x-1}{\ln x}$  tend vers  $+\infty$  quand  $x$  tend vers  $+\infty$ , on en déduit que  $\frac{F(x)}{x}$  tend vers  $+\infty$  quand  $x$  tend vers  $+\infty$  et donc que la courbe représentative de  $F$  admet en  $+\infty$  une branche parabolique de direction  $(Oy)$ .

Pour  $x \in ]0, 1[$  et  $t \in [x^2, x]$ , on a  $2 \ln x = \ln(x^2) \leq \ln t \leq \ln x < 0$  et donc  $\frac{1}{\ln x} \leq \frac{1}{\ln t} \leq \frac{1}{2 \ln x}$ , puis  $(x-x^2) \frac{1}{\ln x} \leq \int_{x^2}^x \frac{1}{\ln t} dt \leq (x-x^2) \frac{1}{2 \ln x}$  et finalement,

$$\forall x \in ]0, 1[, \frac{x-x^2}{-2 \ln x} \leq F(x) \leq \frac{x-x^2}{-\ln x}.$$

On obtient déjà  $\lim_{x \rightarrow 0} F(x) = 0$ . On peut prolonger  $F$  par continuité en 0 en posant  $F(0) = 0$ . Ensuite,  $\frac{F(x)-F(0)}{x-0} = \frac{F(x)}{x}$  est compris entre  $\frac{1-x}{-2 \ln x}$  et  $\frac{1-x}{-\ln x}$ . Comme ces deux expressions tendent vers 0 quand  $x$  tend vers 0, on en déduit que  $\frac{F(x)-F(0)}{x-0}$  tend vers 0 quand  $x$  tend vers 0.  $F$  est donc dérivable en 0 et  $F'(0) = 0$ .



## Correction de l'exercice 22 ▲

1.  $f$  est continue sur  $\mathbb{R}^*$  en tant que quotient de fonctions continues sur  $\mathbb{R}^*$  dont le dénominateur ne s'annule pas sur  $\mathbb{R}^*$ . D'autre part, quand  $t$  tend vers 0,  $f(t) \sim \frac{t^2}{t} = t$  et  $\lim_{t \rightarrow 0, t \neq 0} f(t) = 0 = f(0)$ . Ainsi,  $f$  est continue en 0 et donc sur  $\mathbb{R}$ .
2.  $f$  est continue sur  $\mathbb{R}$  et donc  $F$  est définie et de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}$ . De plus,  $F' = f$  est positive sur  $[0, +\infty[$ , de sorte que  $F$  est croissante sur  $[0, +\infty[$ . On en déduit que  $F$  admet en  $+\infty$  une limite dans  $]-\infty, +\infty]$ . Vérifions alors que  $F$  est majorée sur  $\mathbb{R}$ . On constate que  $t^2 \cdot \frac{t^2}{e^t - 1}$  tend vers 0 quand  $t$  tend vers  $+\infty$ , d'après un théorème de croissances comparées. Par suite, il existe un réel  $A$  tel que pour  $t \geq A$ ,  $0 \leq t^2 \cdot \frac{t^2}{e^t - 1} \leq 1$  ou encore  $0 \leq f(t) \leq \frac{1}{t^2}$ . Pour  $x \geq A$ , on a alors

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_0^A f(t) dt + \int_A^x \frac{t^2}{e^t - 1} dt \leq \int_0^A f(t) dt + \int_A^x \frac{1}{t^2} dt \\ &= \int_0^A f(t) dt + \frac{1}{A} - \frac{1}{x} \leq \int_0^A f(t) dt + \frac{1}{A}. \end{aligned}$$

$F$  est croissante et majorée et donc a une limite réelle  $\ell$  quand  $n$  tend vers  $+\infty$ .

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Pour  $t \in ]0, +\infty[$ ,

$$\begin{aligned} f(t) &= t^2 e^{-t} \frac{1}{1 - e^{-t}} = t^2 e^{-t} \left( \sum_{k=0}^{n-1} (e^{-t})^k + \frac{(e^{-t})^n}{1 - e^{-t}} \right) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} t^2 e^{-(k+1)t} + \frac{t^2 e^{-t}}{1 - e^{-t}} e^{-nt} = \sum_{k=1}^n t^2 e^{-kt} + f_n(t) \quad (*), \end{aligned}$$

où  $f_n(t) = \frac{t^2 e^{-t}}{1 - e^{-t}} e^{-nt}$  pour  $t > 0$ . En posant de plus  $f_n(0) = 0$ , d'une part,  $f_n$  est continue sur  $[0, +\infty[$  et d'autre part, l'égalité (\*) reste vraie quand  $t = 0$ . En intégrant, on obtient

$$\forall x \in [0, +\infty[, \forall n \in \mathbb{N}^*, F(x) = \sum_{k=1}^n \int_0^x t^2 e^{-kt} dt + \int_0^x f_n(t) dt \quad (**).$$

Soient alors  $k \in \mathbb{N}^*$  et  $x \in [0, +\infty[$ . Deux intégrations par parties fournissent :

$$\begin{aligned} \int_0^x t^2 e^{-kt} dt &= \left[ -\frac{1}{k} t^2 e^{-kt} \right]_0^x + \frac{2}{k} \int_0^x t e^{-kt} dt = -\frac{1}{k} x^2 e^{-kx} + \frac{2}{k} \left( \left[ -\frac{1}{k} t e^{-kt} \right]_0^x + \frac{1}{k} \int_0^x e^{-kt} dt \right) \\ &= -\frac{1}{k} x^2 e^{-kx} - \frac{2}{k^2} x e^{-kx} - \frac{2}{k^3} e^{-kx} + \frac{2}{k^3}. \end{aligned}$$

Puisque  $k > 0$ , quand  $x$  tend vers  $+\infty$ , on obtient  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^x t^2 e^{-kt} dt = \frac{2}{k^3}$ . On fait alors tendre  $x$  vers  $+\infty$  dans (\*\*) et on obtient

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \ell - 2 \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^x f_n(t) dt \quad (***)$$

Vérifions enfin que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^x f_n(t) dt) = 0$ . La fonction  $t \mapsto \frac{t^2 e^{-t}}{1 - e^{-t}}$  est continue sur  $]0, +\infty[$ , se prolonge par continuité en 0 et a une limite réelle en  $+\infty$ . On en déduit que cette fonction est bornée sur  $]0, +\infty[$ . Soit  $M$  un majorant de cette fonction sur  $]0, +\infty[$ . Pour  $x \in [0, +\infty[$  et  $n \in \mathbb{N}^*$ , on a alors

$$0 \leq \int_0^x f_n(t) dt \leq M \int_0^x e^{-nt} dt = \frac{M}{n} (1 - e^{-nx}).$$

A  $n \in \mathbb{N}^*$  fixé, on passe à la limite quand  $n$  tend vers  $+\infty$  et on obtient

$$0 \leq \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^x f_n(t) dt \leq \frac{M}{n},$$

puis on passe à la limite quand  $n$  tend vers  $+\infty$  et on obtient

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^x f_n(t) dt \right) = 0.$$

Par passage à la limite quand  $x$  tend vers  $+\infty$  puis quand  $n$  tend vers  $+\infty$  dans  $(***)$ , on obtient enfin

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^x \frac{t^2}{e^t - 1} dt = 2 \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^3}.$$

---