TD 6 : Primitives et équations différentielles

Primitives et intégration :

Exercice 1. (*)

Calculer les primitives des fonctions suivantes

1. $x \mapsto e^x \cos x$
2. $x \mapsto \sqrt{e^x - 1}$
3. $x \mapsto x\sqrt[3]{1+x}$
4. $x \longmapsto e^{ax}\sin bx$

Exercice 2. (**)

Calculer les intégrales suivantes :

1. $\int_0^1 x\tan(x^2)dx$
2. $\int_0^1 \sqrt{1-y^2}dy$

Exercice 3. (**)

Calculer les intégrales suivantes :

1. $\displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{1+e^t}$ en posant $x = e^t$;
2. $\displaystyle\int_1^3 \frac{\sqrt{t}}{t+1}dt$ en posant $x = \sqrt{t}$;
3. $\displaystyle\int_{-1}^1 \sqrt{1-t^2}dt$ en posant $t = \sin\theta$.

Exercice 4. (**)

1. Calculer $\displaystyle\int_0^2 \frac{2u}{\sqrt{1+u}}du$.
2. En déduire $\displaystyle\int_0^3 \frac{dt}{\sqrt{1+\sqrt{1+t}}}$.

Exercice 5. (**)

Calculer les intégrales suivantes :

$$\int_0^{\pi/4} \frac{\sin^3(t)}{1+\cos^2 t}dt \qquad \int_{\pi/3}^{\pi/2} \frac{dx}{\sin x}$$

$$\int_0^{\pi/3} \big(1+\cos(x)\big)\tan(x)dx.$$

Exercice 6. (**)

Calculer les intégrales suivantes :

$$\int_0^{\pi/4} \frac{\tan x}{\sqrt{2}\cos x + 2\sin^2 x}dx \qquad \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{2+\sin x}.$$

Exercice 7. (*)

Déterminer une primitive des fonctions suivantes :

$$x \mapsto \arctan(x) \qquad x \mapsto (\ln x)^2 \qquad x \mapsto \sin(\ln x).$$

Exercice 8. (**)

Calculer les intégrales suivantes :

$$I = \int_1^2 \frac{\ln(1+t)}{t^2}dt \qquad J = \int_0^1 x(\arctan x)^2 dx$$

$$K = \int_0^1 \frac{x\ln x}{(x^2+1)^2}dx$$

Exercice 9. (**)

Soient $(\alpha,\beta,n) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{N}$. Calculer

$$\int_\alpha^\beta (t-\alpha)^n(t-\beta)^n dt.$$

Exercice 10. (***)

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(t)dt$.

1. Calculer I_0 et I_1
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, trouver une relation entre I_{n+2} et I_n.
3. En déduire que pour tout $p \in \mathbb{N}$:

$$I_{2p} = \frac{(2p)!}{(2^p p!)^2}.\frac{\pi}{2} \qquad I_{2p+1} = \frac{(2^p p!)^2}{(2p+1)!}.$$

Équations différentielles linéaires d'ordre 1 :

Exercice 11. **(*)**

La fonction $x \mapsto \arccos x$ est-elle solution de

$$y' + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} y = 0$$

Exercice 12. **(*)**

Résoudre l'équation $y' - \arctan(x)y = 0$.

Exercice 13. **(*)**

Résoudre $y'(x) - y(x) = x^2 - 1$ avec la condition initiale $y(0) = \alpha$ en cherchant une solution polynomiale $ax^2 + bx + c$.

Exercice 14. **(**)**

Existe-t-il une fonction bornée définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ solution de l'équation $y' + y = \ln x$?

Exercice 15. **(**)**

Résoudre $y'(x) - y(x) = e^{-2x}$ avec la condition initiale $y(0) = a$ par la méthode de variation de la constante.

Exercice 16. **(**)**

Résoudre les équations d'ordre 1 suivantes :

1. $y' - 3y = 2e^{3x}$;
2. $y' - y = x + e^x$;

Équations différentielles linéaires d'ordre 2 à coefficients constants :

Exercice 17. **(**)**

Résoudre les équations différentielles suivantes :

1. $y'' - y = e^{2x} - e^x$;
2. $y'' + y' + y = \cos(x)$;
3. $y'' - 2y' + y = \sin^2 x$;
4. $y'' + y' + y = e^x \cos(x)$.

Exercice 18. **(**)**

Déterminer les fonctions $y, z : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivables et qui vérifient le système suivant :

$$\begin{cases} y' - y &= z \\ z' + z &= 3y \end{cases}$$

Exercice 19. **(**)**

Résoudre l'équation $y''' - 2y'' + y' - 2y = 0$ en se ramenant à une équation d'ordre 2.

Exercice 20. **(**)**

On cherche à résoudre sur $\mathbb{R}_+^*$ l'équation différentielle :

$$x^2 y'' - 3xy' + 4y = 0. \ (E)$$

1. Cette équation est-elle linéaire ?
2. Analyse. Soit y une solution de (E) sur $\mathbb{R}_+^*$. Pour $t \in \mathbb{R}$, on pose $z(t) = y(e^t)$.
   (a) Calculer pour $t \in \mathbb{R}$, $z'(t)$ et $z''(t)$.
   (b) En déduire que z vérifie une équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants que l'on précisera (on pourra poser $x = e^t$ dans (E)).
   (c) Résoudre l'équation différentielle trouvée à la question précédente.
   (d) En déduire les expressions possibles de y.
3. Synthèse. Vérifier que, réciproquement, les fonctions trouvées sont bien toutes les solutions de (E) et conclure.

Exercices complémentaires :

Exercice 21. (***)

Soit $a \in \mathbb{R}$. Trouver les fonctions f de classe $\mathscr{C}^2$ vérifiant $f'(x) = f(a-x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Exercice 22. (***) *(Lemme de Gronwall)*

Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, $g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ continues et $A \geq 0$ tels que

$$\forall x \in \mathbb{R}^{*+}, \quad f(x) \leq A + \int_0^x f(t)g(t)dt.$$

Montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R}^{*+}, \quad f(x) \leq A \exp\left(\int_0^x g(t)dt\right).$$

Exercice 23. (***) *(Oscillateurs linéaires)*

Un oscillateur linéaire (ou harmonique) est un système gouverné par une équation différentielle de la forme

$$(E) \qquad y'' + 2\lambda y' + \omega_0^2 y = e(x),$$

avec $\lambda \geq 0$ et $\omega_0 > 0$. Le second membre est appelé excitation du système ; si l'équation est homogène, le système est appelé oscillateur libre. Le terme $2\lambda y'$ est le terme d'amortissement.
L'objectif est désormais de décrire quelques oscillateurs linéaires de conditions initiales

$$y(0) = a \quad \text{et} \quad y'(0) = 0.$$

1. Résoudre (E) associée aux conditions initiales données dans le cas d'un oscillateur libre $(e = 0)$, non amorti $(\lambda = 0)$.
2. Résoudre (E) associée aux conditions initiales données dans le cas d'un oscillateur libre $(e = 0)$, amorti.
   On introduit quelquefois la quantité $Q = \frac{\omega_0}{2\lambda}$ appelée facteur de qualité ; on remarque que Q est décroissant en λ donc qu'un fort taux d'amortissement implique un faible facteur de qualité.
3. Résoudre (E) associée aux conditions initiales données dans le cas d'un oscillateur avec une excitation sinusoïdale $e(x) = \cos(\omega x)$ avec $\omega \neq 0$.
   Chercher une solution particulière sous la forme d'un polynôme trigonométrique

---