COLLE 17 = Calcul intégral

Connaître son cours :

1. Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue, monter qu'il existe $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = \dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(t)dt$.
2. Soit f une fonction continue sur $[a, b]$, positive et non nulle en au moins un point de $[a, b]$.
3. Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur I un intervalle réel et $a \in I$. Donner la formule de Taylor avec reste intégral en a.

Exercices :

Exercice 1. (**)

Soit

$$I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x}dx$$

1. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = 0$.
2. Calculer $I_n + I_{n+1}$.
3. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k}\right)$

Exercice 2. (***)

Soit $n \in \mathbb{N}$, déterminer la borne inférieure de la partie de $\mathbb{R}$ définie par

$$E = \left\{c \in \mathbb{R},\ \forall f \in \mathscr{C}^0([0,1], \mathbb{R}^+),\ \int_0^1 f(\sqrt[n]{t})dt \ \leq\ c\int_0^1 f(t)dt\right\}.$$

Exercice 3. (**)

Considérons les intégrales

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(x)}{\sqrt{1+2\cos(x)\sin(x)}}dx \qquad J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(x)}{\sqrt{1+2\cos(x)\sin(x)}}dx$$

1. Calculer $I + J$
2. Montrer que $I = J$ par un judicieux changement de variables.
3. En déduire la valeur de I.

Exercice 4. (***)

Soit x_n l'argument du premier maximum local de $f_n : x \mapsto \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{\sin(kx)}{k}$ sur $\mathbb{R}^+$. Montrer que

$$f_n(x_n) \to \int_0^{\pi} \frac{\sin(t)}{t}dt$$
