Fonctions de plusieurs variables

Exercices de Jean-Louis Rouget. Retrouver aussi cette fiche sur www.maths-france.fr

* très facile ** facile *** difficulté moyenne **** difficile ***** très difficile
I : Incontournable T : pour travailler et mémoriser le cours

Exercice 1 **T

Etudier l'existence et la valeur éventuelle d'une limite en $(0,0)$ des fonctions suivantes :

1. $\frac{xy}{x+y}$
2. $\frac{xy}{x^2+y^2}$
3. $\frac{x^2y^2}{x^2+y^2}$
4. $\frac{1+x^2+y^2}{y}\sin y$
5. $\frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}$
6. $\frac{x^4+y^4}{x^2+y^2}$.

Correction ▼ [005553]

Exercice 2 ***

On pose $f_{x,y}\ :\ \begin{array}{ccc} [-1,1] & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & xt^2+yt \end{array}$ puis $F(x,y)=\sup\limits_{t\in[-1,1]} f_{x,y}(t)$. Etudier la continuité de F sur $\mathbb{R}^2$.

Correction ▼ [005554]

Exercice 3 ***T

Déterminer la classe de f sur $\mathbb{R}^2$ où $f(x,y)=\left\{\begin{array}{l} 0 \text{ si } (x,y)=(0,0) \\ \frac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2} \text{ si } (x,y)\neq(0,0) \end{array}\right.$.

Correction ▼ [005555]

Exercice 4 ***T

Soit $f\ :\ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & \left\{\begin{array}{l} 0 \text{ si } y=0 \\ y^2\sin\left(\frac{x}{y}\right) \text{ si } y\neq 0 \end{array}\right. \end{array}$.

1. Etudier la continuité de f.
2. Etudier l'existence et la valeur éventuelle de dérivées partielles d'ordre 1 et 2. On montrera en particulier que $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}$ sont définies en $(0,0)$ mais n'ont pas la même valeur.

Correction ▼ [005556]

Exercice 5 ***

Le laplacien d'une application g de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$, de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$ est $\Delta g=\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}$.
Déterminer une fontion de classe C^2 sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ à préciser à valeurs dans $\mathbb{R}$ telle que la fonction

$$g(x,y)=f\left(\frac{\cos 2x}{\operatorname{ch} 2y}\right)$$

soit non constante et ait un laplacien nul sur un sous-ensemble de $\mathbb{R}^2$ le plus grand possible (une fonction de Laplacien nul est dite harmonique).

Correction ▼ [005557]

Exercice 6 **T

Trouver les extrema locaux de

1. $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & x^2+xy+y^2+2x+3y \end{array}$
2. $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & x^4+y^4-4xy \end{array}$

Correction ▼ [005558]

Exercice 7 ***

Maximum du produit des distances aux cotés d'un triangle ABC du plan d'un point M intérieur à ce triangle (on admettra que ce maximum existe).

Correction ▼ [005559]

Exercice 8 **

Soit a un réel strictement positif donné. Trouver le minimum de $f(x,y) = \sqrt{x^2+(y-a)^2}+\sqrt{y^2+(x-a)^2}$.

Correction ▼ [005560]

Exercice 9 **

Trouver toutes les applications φ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ de classe C^2 telle que l'application f de $U = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2/\ x \neq 0\}$ dans $\mathbb{R}$ qui à (x,y) associe $\varphi\left(\frac{y}{x}\right)$ vérifie :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{y}{x^3}.$$

Correction ▼ [005561]

Exercice 10 **

Trouver toutes les applications f de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant

1. $2\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} = 0$ (en utilisant le changement de variables $u = x+y$ et $v = x+2y$)
2. $x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = \sqrt{x^2+y^2}$ sur $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2/\ x > 0\}$ (en passant en polaires).

Correction ▼ [005562]

Correction de l'exercice 1 ▲

On note f la fonction considérée.

1. Pour $x \neq 0$, $f(x, -x+x^3) = \frac{x(-x+x^3)}{x-x+x^3} \underset{x\to 0^+}{\sim} -\frac{1}{x}$. Quand x tend vers 0, $-x+x^3$ tend vers 0 puis $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ x>0,\ y=-x+x^3}} f(x,y) = -\infty$. f n'a de limite réelle en $(0,0)$.
2. Pour $x \neq 0$, $f(x,0) = \frac{x\times 0}{x^2+0^2} = 0$ puis $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=0}} f(x,y) = 0$. Mais aussi, pour $x \neq 0$, $f(x,x) = \frac{x\times x}{x^2+x^2} = \frac{1}{2}$ puis $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ x=y}} f(x,y) = \dfrac{1}{2}$. Donc si f a une limite réelle, cette limite doit être égale à 0 et à $\frac{1}{2}$ ce qui est impossible. f n'a pas de limite réelle en $(0,0)$.
3. Pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $x^2 - 2|xy| + y^2 = (|x|-|y|)^2 \geqslant 0$ et donc $|xy| \leqslant \frac{1}{2}(x^2+y^2)$. Par suite, pour $(x,y) \neq (0,0)$,
$$|f(x,y)| = \tfrac{x^2y^2}{x^2+y^2} \leqslant \tfrac{(x^2+y^2)^2}{4(x^2+y^2)} = \tfrac{1}{4}(x^2+y^2).$$
Comme $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1}{4}(x^2+y^2) = 0$, on a aussi $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$.
4. $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin y}{y} = 1$ et $\lim_{(x,y)\to(0,0)}(1+x^2+y^2) = 1$. Donc $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 1$.
5. Pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $|x^3+y^3| = |x+y|(x^2+xy+y^2) \leqslant \frac{3}{2}|x+y|(x^2+y^2)$ et donc pour $(x,y) \neq (0,0)$,
$$|f(x,y)| = \tfrac{|x^3+y^3|}{x^2+y^2} \leqslant \tfrac{3}{2}|x+y|.$$
Comme $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{3}{2}|x+y| = 0$, on a aussi $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$.
6. Pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $|x^4+y^4| = (x^2+y^2)^2 - 2x^2y^2 \leqslant (x^2+y^2)^2 + 2\times\left(\frac{1}{2}(x^2+y^2)\right)^2 = \frac{3}{2}(x^2+y^2)^2$ et donc pour $(x,y) \neq (0,0)$,
$$|f(x,y)| = \tfrac{|x^4+y^4|}{x^2+y^2} \leqslant \tfrac{3}{2}(x^2+y^2).$$
Comme $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{3}{2}(x^2+y^2) = 0$, on a aussi $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$.

Correction de l'exercice 2 ▲

Déterminons tout d'abord $F(x,y)$ pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. • Pour $y \in \mathbb{R}$, $F(x,y) = \text{Max}\{f_{0,y}(-1), f_{0,y}(1)\} = \text{Max}\{y, -y\} = |y|$. • Si $x \neq 0$, $F(x,y) = \text{Max}\left\{f_{x,y}(-1), f_{x,y}\left(-\frac{y}{2x}\right), f_{x,y}(1)\right\} = \text{Max}\left\{x+y, x-y, -\frac{y^2}{4x}\right\} = \text{Max}\left\{x+|y|, -\frac{y^2}{4x}\right\}$. Plus précisément, si $x > 0$, on a $x+|y| > 0$ et $-\frac{y^2}{4x} \leqslant 0$. Donc $F(x,y) = x+|y|$ ce qui reste vrai quand $x = 0$. Si $x < 0$, $x+|y| - \left(-\frac{y^2}{4x}\right) = \frac{4x^2+4x|y|+y^2}{4x} = \frac{(2x+|y|)^2}{4x} < 0$ et donc $F(x,y) = -\frac{y^2}{4x}$.

$$\boxed{\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ F(x,y) = \begin{cases} x+|y| \text{ si } x \geqslant 0 \\ -\frac{y^2}{4x} \text{ si } x < 0 \end{cases}.}$$

En vertu de théorèmes généraux, F est continue sur $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x > 0\}$ et $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x < 0\}$. Soit $y_0 \neq 0$. $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0,y_0)\\ x<0,\ y=y_0}} F(x,y) = +\infty \neq |y_0| = F(0,y_0)$ et donc F n'est pas continue en $(0,y_0)$. Enfin, $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ x<0,\ y=\sqrt{-x}}} F(x,y) = \dfrac{1}{4} \neq 0 = F(0,0)$ et donc F n'est pas continue en $(0,0)$.

$$\boxed{F \text{ est continue sur } \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,y),\ y \in \mathbb{R}\} \text{ et est discontinue en tout } (0,y),\ y \in \mathbb{R}.}$$

Correction de l'exercice 3 ▲

• Pour $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, $x^2+y^2=0\Leftrightarrow x=y=0$ et donc f est définie sur $\mathbb{R}^2$. • f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ en tant que quotient de fonctions de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ dont le dénominateur ne s'annule pas sur $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$.

• Pour $(x,y)\neq(0,0)$, $|f(x,y)|\leqslant\frac{|xy|(x^2+y^2)}{x^2+y^2}=|xy|$. Comme $\lim_{(x,y)\to(0,0)}|xy|=0$, on en déduit que $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x,y)\neq(0,0)}}f(x,y)=0=f(0,0)$. Ainsi, f est continue en $(0,0)$ et donc sur $\mathbb{R}^2$. • **Existence de $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$.** Pour $x\neq0$,

$$\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0}=\frac{x\times0\times(x^2-0^2)}{x\times(x^2+0^2)}=0,$$

et donc $\lim_{x\to0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0}=0$. Ainsi, f admet une dérivée partielle par rapport à sa première variable en $(0,0)$ et $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=0$. • Pour $(x,y)\neq(0,0)$, $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=y\frac{(3x^2-y^2)(x^2+y^2)-(x^3-y^2x)(2x)}{(x^2+y^2)^2}=\frac{y(x^4+4x^2y^2-y^4)}{(x^2+y^2)^2}$.
Finalement, f admet sur $\mathbb{R}^2$ une dérivée partielle par rapport à sa première variable définie par

$$\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\begin{cases}0 \text{ si } (x,y)=(0,0)\\ \frac{y(x^4+4x^2y^2-y^4)}{(x^2+y^2)^2} \text{ si } (x,y)\neq(0,0)\end{cases}.$$

• Pour $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, $f(y,x)=-f(x,y)$. Par suite, $\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=-\frac{\partial f}{\partial x}(y,x)$. En effet, pour (x_0,y_0) donné dans $\mathbb{R}^2$

$$\frac{f(x_0,y)-f(x_0,y_0)}{y-y_0}=\frac{-f(y,x_0)+f(y_0,x_0)}{y-y_0}=-\frac{f(y,x_0)-f(y_0,x_0)}{y-y_0}\underset{y\to y_0}{\to}-\frac{\partial f}{\partial x}(y_0,x_0).$$

Donc, f admet sur $\mathbb{R}^2$ une dérivée partielle par rapport à sa deuxième variable définie par

$$\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=-\frac{\partial f}{\partial x}(y,x)=\begin{cases}0 \text{ si } (x,y)=(0,0)\\ \frac{x(x^4-4x^2y^2-y^4)}{(x^2+y^2)^2} \text{ si } (x,y)\neq(0,0)\end{cases}.$$

• **Continuité de $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ en $(0,0)$.** Pour $(x,y)\neq(0,0)$,

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)-\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)\right|=\frac{|y(x^4+4x^2y^2-y^4)|}{(x^2+y^2)^2}\leqslant\frac{|y|(x^4+4x^2y^2+y^4)}{(x^2+y^2)^2}\leqslant\frac{|y|(2x^4+4x^2y^2+2y^4)}{(x^2+y^2)^2}=2|y|.$$

Comme $2|y|$ tend vers 0 quand (x,y) tend vers $(0,0)$, $\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)-\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)\right|$ tend vers 0 quand (x,y) tend vers $(0,0)$. On en déduit que l'application $\frac{\partial f}{\partial x}$ est continue en $(0,0)$ et donc sur $\mathbb{R}^2$. Enfin, puisque $\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=-\frac{\partial f}{\partial x}(y,x)$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ est continue sur $\mathbb{R}^2$. f est donc au moins de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$. • Pour $x\neq0$, $\frac{\frac{\partial f}{\partial y}(x,0)-\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)}{x-0}=\frac{x^4}{x^4}=1$ et donc $\lim_{x\to0}\frac{\frac{\partial f}{\partial y}(x,0)-\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)}{x-0}=1$. Donc $\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(0,0)$ existe et $\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(0,0)=1$. Pour $y\neq0$, $\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(y,0)-\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)}{y-0}=-\frac{y^4}{y^4}=-1$ et donc $\lim_{y\to0}\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(y,0)-\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)}{y-0}=-1$. Donc $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0)$ existe et $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0)=-1$. $\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(0,0)\neq\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0)$ et donc f n'est pas de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$ d'après le théorème de SCHWARZ.

$$\boxed{f \text{ est de classe } C^1 \text{ exactement sur } \mathbb{R}^2.}$$

Correction de l'exercice 4 ▲

1. Posons $\Delta=\{(x,y)/\ y\neq0\}$. f est continue sur $\mathbb{R}^2\setminus\Delta$ en vertu de théorèmes généraux. Soit $x_0\in\mathbb{R}$.

$$|f(x,y)-f(x_0,0)| = \begin{cases} 0 \text{ si } y=0 \\ y^2\left|\sin\left(\frac{x}{y}\right)\right| \text{ si } y\neq 0 \end{cases} \leqslant y^2.$$

Comme $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,0)} y^2 = 0$, $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,0)} |f(x,y)-f(x_0,0)| = 0$ et donc f est continue en $(x_0,0)$. Finalement,

$$\boxed{f \text{ est continue sur } \mathbb{R}^2.}$$

2. • f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2\setminus\Delta$. En particulier, d'après le théorème de SCHWARZ, $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}$ sur Δ. pour $(x,y)\in\mathbb{R}^2\setminus\Delta$,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = y\cos\left(\frac{x}{y}\right) \text{ et } \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2y\sin\left(\frac{x}{y}\right) - x\cos\left(\frac{x}{y}\right),$$

puis

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = -\sin\left(\frac{x}{y}\right),\ \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y) = \cos\left(\frac{x}{y}\right) - \frac{x}{y}\sin\left(\frac{x}{y}\right),$$

et enfin

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 2\sin\left(\frac{x}{y}\right) - 2\frac{x}{y}\cos\left(\frac{x}{y}\right) - \frac{x^2}{y^2}\sin\left(\frac{x}{y}\right).$$

• **Existence de $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,0)$.** Pour $x\neq x_0$, $\frac{f(x,0)-f(x_0,0)}{x-x_0} = 0$ et donc $\frac{f(x,0)-f(x_0,0)}{x-x_0} \underset{x\to x_0}{\to} 0$. On en déduit que $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,0)$ existe et $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,0) = 0$. En résumé, f admet une dérivée partielle par rapport à sa première variable sur $\mathbb{R}^2$ définie par

$$\boxed{\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2,\ \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \begin{cases} 0 \text{ si } y=0 \\ y\cos\left(\frac{x}{y}\right) \text{ si } y\neq 0 \end{cases}.}$$

• **Existence de $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,0)$.** Soit $x_0\in\mathbb{R}$. Pour $y\neq 0$,

$$\left|\frac{f(x_0,y)-f(x_0,0)}{y-0}\right| = \begin{cases} 0 \text{ si } y=0 \\ y\left|\sin\left(\frac{x_0}{y}\right)\right| \text{ si } y\neq 0 \end{cases} \leqslant |y|.$$

et donc $\frac{f(x_0,y)-f(x_0,0)}{y-0} \underset{y\to 0}{\to} 0$. On en déduit que $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,0)$ existe et $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,0) = 0$. En résumé, f admet une dérivée partielle par rapport à sa deuxième variable sur $\mathbb{R}^2$ définie par

$$\boxed{\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2,\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \begin{cases} 0 \text{ si } y=0 \\ 2y\sin\left(\frac{x}{y}\right) - x\cos\left(\frac{x}{y}\right) \text{ si } y\neq 0 \end{cases}.}$$

• **Existence de $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0)$.** Pour $x\neq 0$,

$$\frac{\frac{\partial f}{\partial y}(x,0) - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)}{x-0} = 0$$

et donc $\frac{\frac{\partial f}{\partial y}(x,0) - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)}{x-0}$ tend vers 0 quand x tend vers 0. On en déduit que $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0)$ existe et

$$\boxed{\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0) = 0.}$$

• **Existence de $\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(0,0)$.** Pour $y\neq 0$,

$$\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(0,y) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)}{y-0} = \frac{y\cos\left(\frac{0}{y}\right)}{y} = 1$$

et donc $\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(0,y) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)}{y-0}$ tend vers 1 quand y tend vers 0. On en déduit que $\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(0,0)$ existe et

$$\boxed{\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(0,0)=1.}$$

Correction de l'exercice 5 ▲

Pour $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, $\frac{\cos(2x)}{\mathrm{ch}(2y)}\in[-1,1]$. Plus précisément, quand x décrit $\mathbb{R}$, $\frac{\cos(2x)}{\mathrm{ch}(2\times 0)}$ décrit $[-1,1]$ et donc quand (x,y) décrit $\mathbb{R}^2$, $\frac{\cos(2x)}{\mathrm{ch}(2y)}$ décrit $[-1,1]$. On suppose déjà que f est de classe C^2 sur $[-1,1]$. L'application g est alors de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$ et pour $(x,y)\in\mathbb{R}^2$,

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x,y)=-\frac{2\sin(2x)}{\mathrm{ch}(2y)}f'\left(\frac{\cos 2x}{\mathrm{ch}\,2y}\right)\text{ puis }\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x,y)=-\frac{4\cos(2x)}{\mathrm{ch}(2y)}f'\left(\frac{\cos 2x}{\mathrm{ch}\,2y}\right)+\frac{4\sin^2(2x)}{\mathrm{ch}^2(2y)}f''\left(\frac{\cos 2x}{\mathrm{ch}\,2y}\right).$$

Ensuite,

$$\frac{\partial g}{\partial y}(x,y)=-\frac{2\cos(2x)\,\mathrm{sh}(2y)}{\mathrm{ch}^2(2y)}f'\left(\frac{\cos 2x}{\mathrm{ch}\,2y}\right)$$

puis

$$\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}(x,y)=-\frac{4\cos(2x)}{\mathrm{ch}(2y)}f'\left(\frac{\cos 2x}{\mathrm{ch}\,2y}\right)-2\cos(2x)\,\mathrm{sh}(2y)\frac{-4\,\mathrm{sh}(2y)}{\mathrm{ch}^3(2y)}f'\left(\frac{\cos 2x}{\mathrm{ch}\,2y}\right)+\frac{4\cos^2(2x)\,\mathrm{sh}^2(2y)}{\mathrm{ch}^4(2y)}f''\left(\frac{\cos 2x}{\mathrm{ch}\,2y}\right).$$

Mais alors

$$\begin{aligned}
\Delta g(x,y)&=\frac{-8\cos(2x)\,\mathrm{ch}^2(2y)+8\cos(2x)\,\mathrm{sh}^2(2y)}{\mathrm{ch}^3(2y)}f'\left(\frac{\cos 2x}{\mathrm{ch}\,2y}\right)+\frac{4\sin^2(2x)\,\mathrm{ch}^2(2y)+4\cos^2(2x)\,\mathrm{sh}^2(2y)}{\mathrm{ch}^4(2y)}f''\left(\frac{\cos 2x}{\mathrm{ch}\,2y}\right)\\
&=\frac{-8\cos(2x)}{\mathrm{ch}^3(2y)}f'\left(\frac{\cos 2x}{\mathrm{ch}\,2y}\right)+\frac{4(1-\cos^2(2x))\,\mathrm{ch}^2(2y)+4\cos^2(2x)(\mathrm{ch}^2(2y)-1)}{\mathrm{ch}^4(2y)}f''\left(\frac{\cos 2x}{\mathrm{ch}\,2y}\right)\\
&=\frac{-8\cos(2x)}{\mathrm{ch}^3(2y)}f'\left(\frac{\cos 2x}{\mathrm{ch}\,2y}\right)+\frac{4\,\mathrm{ch}^2(2y)-4\cos^2(2x)}{\mathrm{ch}^4(2y)}f''\left(\frac{\cos 2x}{\mathrm{ch}\,2y}\right)\\
&=\frac{4}{\mathrm{ch}^2(2y)}\left(-2\frac{\cos(2x)}{\mathrm{ch}(2y)}f'\left(\frac{\cos 2x}{\mathrm{ch}\,2y}\right)+\left(1-\frac{\cos^2(2x)}{\mathrm{ch}^2(2y)}\right)f''\left(\frac{\cos 2x}{\mathrm{ch}\,2y}\right)\right).
\end{aligned}$$

Par suite,

$$\begin{aligned}
\Delta g=0&\Leftrightarrow\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ -2\frac{\cos(2x)}{\mathrm{ch}(2y)}f'\left(\frac{\cos 2x}{\mathrm{ch}\,2y}\right)+\left(1-\frac{\cos^2(2x)}{\mathrm{ch}^2(2y)}\right)f''\left(\frac{\cos 2x}{\mathrm{ch}\,2y}\right)=0\\
&\Leftrightarrow\forall t\in[-1,1],\ -2tf'(t)+(1-t^2)f''(t)=0\Leftrightarrow\forall t\in[-1,1],((1-t^2)f')'(t)=0\\
&\Leftrightarrow\exists\lambda\in\mathbb{R},\ \forall t\in[-1,1],\ (1-t^2)f'(t)=\lambda.
\end{aligned}$$

Le choix $\lambda\neq 0$ ne fournit pas de solution sur $[-1,1]$. Donc $\lambda=0$ puis $f'=0$ puis f constante ce qui est exclu. Donc, on ne peut pas poursuivre sur $[-1,1]$. On cherche dorénavant f de classe C^2 sur $]-1,1[$ de sorte que g est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2\setminus\left\{\left(\frac{k\pi}{2},0\right),\ k\in\mathbb{Z}\right\}$.

$$\begin{aligned}
f\text{ solution}&\Leftrightarrow\exists\lambda\in\mathbb{R}^*,\ \forall t\in]-1,1[,\ (1-t^2)f'(t)=\lambda\Leftrightarrow\exists\lambda\in\mathbb{R}^*/\ \forall t\in]-1,1[,\ f'(t)=\frac{\lambda}{1-t^2}\\
&\Leftrightarrow\exists(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^*\times\mathbb{R}/\ \forall t\in]-1,1[,\ f(t)=\lambda\,\mathrm{argth}\,t+\mu.
\end{aligned}$$

Correction de l'exercice 6 ▲

1. f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ qui est un ouvert de $\mathbb{R}^2$. Donc si f admet un extremum local en un point (x_0,y_0) de $\mathbb{R}^2$, (x_0,y_0) est un point critique de f. Or, pour $(x,y)\in\mathbb{R}^2$,

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=0 \\ \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+y+2=0 \\ x+2y+3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-\frac{1}{3} \\ y=-\frac{4}{3} \end{cases}.$$

Donc si f admet un extremum local, c'est nécessairement en $\left(-\frac{1}{3},\frac{4}{3}\right)$ avec $f\left(-\frac{1}{3},\frac{4}{3}\right)=-\frac{7}{3}$. D'autre part,

$$\begin{aligned} f(x,y) &= x^2+xy+y^2+2x+3y = \left(x+\frac{y}{2}+1\right)^2-\left(\frac{y}{2}+1\right)^2+y^2+3y = \left(x+\frac{y}{2}+1\right)^2+\frac{3y^2}{4}+2y-1 \\ &= \left(x+\frac{y}{2}+1\right)^2+\frac{3}{4}\left(y+\frac{4}{3}\right)^2-\frac{7}{3} \geqslant -\frac{7}{3} = f\left(-\frac{1}{3},\frac{4}{3}\right). \end{aligned}$$

Donc f admet un minimum local en $\left(-\frac{1}{3},\frac{4}{3}\right)$ égal à $-\frac{7}{3}$ et ce minimum local est un minimum global. D'autre part, f n'admet pas de maximum local.

2. f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ qui est un ouvert de $\mathbb{R}^2$. Donc si f admet un extremum local en un point (x_0,y_0) de $\mathbb{R}^2$, (x_0,y_0) est un point critique de f. Or, pour $(x,y)\in\mathbb{R}^2$,

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=0 \\ \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x^3-4y=0 \\ 4y^3-4x=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=x^3 \\ x^9-x=0 \end{cases} \Leftrightarrow (x,y)\in\{(0,0),(1,1),(-1,-1).$$

Les points critiques de f sont $(0,0)$, $(1,1)$ et $(-1,-1)$. Maintenant, pour $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, $f(-x,-y)=f(x,y)$. Ceci permet de restreindre l'étude aux deux points $(0,0)$ et $(1,1)$. • Pour $x\in\mathbb{R}$, $f(x,0)=x^4>0$ sur $\mathbb{R}^*$ et $f(x,x)=-4x^2+2x^4=2x^2(-2+x^2)<0$ sur $]-\sqrt{2},0[\cup]0,\sqrt{2}[$. Donc f change de signe dans tous voisinage de $(0,0)$ et puisque $f(0,0)=0$, f n'admet pas d'extremum local en $(0,0)$. • Pour $(h,k)\in\mathbb{R}^2$,

$$\begin{aligned} f(1+h,1+k)-f(1,1) &= (1+h)^4+(1+k)^4-4(1+h)(1+k)+2 = 6h^2+6k^2-4hk+4h^3+4k^3+h^4+k^4 \\ &\geqslant 6h^2+6k^2-2(h^2+k^2)+4h^3+4k^3+h^4+k^4 = 4h^2+4h^3+h^4+4k^2+4k^3+k^4 \\ &= h^2(2h^2+1)^2+k^2(2k^2+1)^2 \geqslant 0. \end{aligned}$$

f admet donc un minimum global en $(1,1)$ (et en $(-1,-1)$) égal à -2.

Correction de l'exercice 7 ▲

Soit M un point intérieur au triangle ABC. On pose $a=BC$, $b=CA$ et $c=AB$. On note x, y, z et $\mathscr{A}$ les aires respectives des triangles MBC, MCA, MAB et ABC. On a

$$d(M,(BC))d(M,(CA))d(M(AB)) = \frac{2\text{aire}(MBC)}{a}\frac{2\text{aire}(MCA)}{b}\frac{2\text{aire}(MAB)}{c} = \frac{8xyz}{abc} = \frac{8}{abc}xy(\mathscr{A}-x-y).$$

On doit donc déterminer le maximum de la fonction $f(x,y)=xy(\mathscr{A}-x-y)$ quand (x,y) décrit le triangle ouvert $T=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ x>0,\ y>0,\ x+y<\mathscr{A}\}$. On admet que f admet un maximum global sur le triangle fermé $T'=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ x\geqslant 0,\ y\geqslant 0,\ x+y\leqslant\mathscr{A}\}$ (cela résulte d'un théorème de math Spé : « une fonction numérique continue sur un compact admet un minimum et un maximum »). Ce maximum est atteint dans l'intérieur T de T' car f est nulle au bord de T' et strictement positive à l'intérieur de T'.

Puisque f est de classe C^1 sur T qui est un ouvert de $\mathbb{R}^2$, f atteint son maximum sur T en un point critique de f. Or, pour $(x,y)\in T^2$,

$$\begin{aligned} \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} y(\mathscr{A}-x-y)-xy=0 \\ y(\mathscr{A}-x-y)-xy=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y(\mathscr{A}-2x-y)=0 \\ x(\mathscr{A}-x-2y)=0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 2x+y=\mathscr{A} \\ x+2y=\mathscr{A} \end{cases} \Leftrightarrow x=y=\frac{\mathscr{A}}{3}. \end{aligned}$$

Le maximum cherché est donc égal à $\frac{8}{abc}\times\frac{\mathscr{A}}{3}\times\frac{\mathscr{A}}{3}\times\left(\mathscr{A}-\frac{\mathscr{A}}{3}-\frac{\mathscr{A}}{3}\right)=\frac{8\mathscr{A}^3}{27abc}$. (On peut montrer que ce maximum est obtenu quand M est le centre de gravité du triangle ABC).

Correction de l'exercice 8 ▲

Soient $\mathscr{R}$ un repère orthonormé de $\mathbb{R}^2$ muni de sa structure euclidienne canonique puis M, A et B les points de coordonnées respectives (x,y), $(0,a)$ et $(a,0)$ dans $\mathscr{R}$. Pour $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, $f(x,y)=MA+MB\geqslant AB=a\sqrt{2}$ avec égalité si et seulement si $M\in[AB]$. Donc

$$\boxed{\text{Le minimum de } f \text{ sur } \mathbb{R}^2 \text{ existe et vaut } a\sqrt{2}.}$$

Correction de l'exercice 9 ▲

Soit φ une application de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ puis f l'application définie sur U par $\forall(x,y)\in U,\ f(x,y)=\varphi\left(\frac{y}{x}\right)$ vérifie :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=\frac{y}{x^3}.$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}&=\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\varphi\left(\frac{y}{x}\right)\right)-\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\varphi\left(\frac{y}{x}\right)\right)\\&=\frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{y}{x^2}\varphi'\left(\frac{y}{x}\right)\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{x}\varphi'\left(\frac{y}{x}\right)\right)=\frac{2y}{x^3}\varphi'\left(\frac{y}{x}\right)+\frac{y^2}{x^4}\varphi''\left(\frac{y}{x}\right)-\frac{1}{x^2}\varphi''\left(\frac{y}{x}\right)\\&=\frac{1}{x^2}\left(\frac{2y}{x}\varphi'\left(\frac{y}{x}\right)+\left(\frac{y^2}{x^2}-1\right)\varphi''\left(\frac{y}{x}\right)\right).\end{aligned}$$

Puis, quand (x,y) décrit U, $\frac{y}{x}$ décrit $\mathbb{R}$ (car $\frac{y}{1}$ décrit déjà $\mathbb{R}$)

$$\begin{aligned}\forall(x,y)\in U,\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)-\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)=\frac{y}{x^3}&\Leftrightarrow\forall(x,y)\in U,\ \frac{2y}{x}\varphi'\left(\frac{y}{x}\right)+\left(\frac{y^2}{x^2}-1\right)\varphi''\left(\frac{y}{x}\right)=\frac{y}{x}\\&\Leftrightarrow\forall t\in\mathbb{R},\ 2t\varphi'(t)+(t^2-1)\varphi''(t)=t\\&\Leftrightarrow\exists\lambda\in\mathbb{R}/\ \forall t\in\mathbb{R},\ (t^2-1)\varphi'(t)=\frac{t^2}{2}+\lambda\quad(*)\end{aligned}$$

Maintenant, $\frac{t^2}{2}+\lambda$ ne s'annule pas en ±1, l'égalité $(*)$ fournit une fonction φ telle que φ' n'a pas une limite réelle en ±1. Une telle solution n'est pas de classe C^2 sur $\mathbb{R}$. Donc nécessairement $\lambda=-\frac{1}{2}$ puis

$$\begin{aligned}\forall(x,y)\in U,\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)-\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)=\frac{y}{x^3}&\Leftrightarrow\forall t\in\mathbb{R},\ (t^2-1)\varphi'(t)=\frac{t^2-1}{2}\Leftrightarrow\forall t\in\mathbb{R}\setminus\{-1,1\},\ \varphi'(t)=\frac{1}{2}\\&\Leftrightarrow\forall t\in\mathbb{R},\ \varphi'(t)=\frac{1}{2}\ \text{(par continuité de } \varphi' \text{ en } \pm1)\\&\Leftrightarrow\exists\lambda\in\mathbb{R}/\ \forall t\in\mathbb{R},\ \varphi(t)=\frac{t}{2}+\lambda.\end{aligned}$$

Correction de l'exercice 10 ▲

1. $\left\{\begin{array}{l}u=x+y\\v=x+2y\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}x=2u-v\\y=-u+v\end{array}\right.$. L'application $(x,y)\mapsto(u,v)$ est un C^1-difféomorphisme de $\mathbb{R}^2$ sur lui-même. Pour $(u,v)\in\mathbb{R}^2$, posons alors $g(u,v)=f(2u-v,u+v)=f(x,y)$ de sorte que $\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2$,

$f(x,y) = g(x+y, x+2y) = g(u,v)$. f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ si et seulement si g est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ et

$$\begin{aligned}
2\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= 2\frac{\partial}{\partial x}\left(g(x+y,x+2y)\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(g(x+y,x+2y)\right) \\
&= 2\left(\frac{\partial u}{\partial x}\times\frac{\partial g}{\partial u}(u,v) + \frac{\partial v}{\partial x}\times\frac{\partial g}{\partial v}(u,v)\right) - \left(\frac{\partial u}{\partial y}\times\frac{\partial g}{\partial u}(u,v) + \frac{\partial v}{\partial y}\times\frac{\partial g}{\partial v}(u,v)\right) \\
&= 2\left(\frac{\partial g}{\partial u}(u,v) + \frac{\partial g}{\partial v}(u,v)\right) - \left(\frac{\partial g}{\partial u}(u,v) + 2\frac{\partial g}{\partial v}(u,v)\right) = \frac{\partial g}{\partial u}(u,v).
\end{aligned}$$

Par suite,

$$\begin{aligned}
\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2,\ 2\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0 &\Leftrightarrow \forall (u,v)\in\mathbb{R}^2,\ \frac{\partial g}{\partial u}(u,v) = 0 \\
&\Leftrightarrow \exists F\ :\ \mathbb{R}\to\mathbb{R} \text{ de classe } C^1 \text{ telle que } \forall (u,v)\in\mathbb{R}^2,\ g(u,v) = F(v) \\
&\Leftrightarrow \exists F\ :\ \mathbb{R}\to\mathbb{R} \text{ de classe } C^1 \text{ telle que } \forall (x,y)\in\mathbb{R}^2,\ f(x,y) = F(x+2y).
\end{aligned}$$

2. On pose $r = \sqrt{x^2+y^2}$ et $\theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$ de sorte que $x = r\cos\theta$ et $y = r\sin\theta$. On pose $f(x,y) = f(r\cos\theta, r\sin\theta) = g(r,\theta)$. On sait que $\frac{\partial r}{\partial x} = \cos\theta$, $\frac{\partial r}{\partial y} = \sin\theta$, $\frac{\partial \theta}{\partial x} = -\frac{\sin\theta}{r}$, $\frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{\cos\theta}{r}$

$$x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = r\cos\theta\left(\cos\theta\frac{\partial g}{\partial r} - \frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial g}{\partial \theta}\right) + r\sin\theta\left(\sin\theta\frac{\partial g}{\partial r} + \frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial g}{\partial \theta}\right) = r\frac{\partial g}{\partial r},$$

puis

$$\begin{aligned}
\forall (x,y)\in D,\ x\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + y\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \sqrt{x^2+y^2} &\Leftrightarrow \forall r>0,\ r\frac{\partial g}{\partial r}(r,\theta) = r \Leftrightarrow \forall r>0,\ \frac{\partial g}{\partial r}(r,\theta) = 1 \\
&\Leftrightarrow \exists\varphi \text{ de classe } C^1 \text{ sur } \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[\,/\ \forall (r,\theta)\in]0,+\infty[\times\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[,\ g(r,\theta) = r+\varphi(\theta) \\
&\Leftrightarrow \exists\varphi \text{ de classe } C^1 \text{ sur } \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[\,/\ \forall (x,y)\in D,\ f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2} + \varphi\left(\arctan\frac{y}{x}\right) \\
&\Leftrightarrow \exists\psi \text{ de classe } C^1 \text{ sur } \mathbb{R}/\ \forall (x,y)\in D,\ f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2} + \psi\left(\frac{y}{x}\right).
\end{aligned}$$
