L'objectif de ce devoir est de vous amener à calculer trois « belles » limites :

- $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$ (***zêta de Riemann en 2***)
- $\lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{n}}{2^{2n}} \binom{2n}{n} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}$ (***formule de Wallis***)
- $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2n\pi} = 1$ (***formule de Stirling***)

Partie I : Préliminaires

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $a_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(t)\,dt$ (*intégrales de Wallis*).

1. (a) Calculer a_0 et a_1, puis montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $a_n > 0$.

   (b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $a_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} a_n$.

Partie II : Calcul de la valeur en 2 de la fonction zêta de Riemann

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $b_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} t^2 \cos^{2n}(t)\,dt$.

2. (a) Montrer que pour tout $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$: $t \leqslant \frac{\pi}{2}\sin(t)$.

   (b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $0 \leqslant b_n \leqslant \frac{\pi^2}{4}\left(a_{2n} - a_{2n+2}\right)$.

   (c) En déduire enfin la limite : $\lim_{n\to+\infty} \frac{b_n}{a_{2n}} = 0$.

3. (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $a_{2n+2} = (2n+2)\int_0^{\frac{\pi}{2}} t\sin(t)\cos^{2n+1}(t)\,dt$.
