COLLE 19 = ESPACES EUCLIDIENS

Espaces Euclidiens :

Exercice 1.

Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on définit :

$$\langle A|B\rangle = Tr({}^tAB)$$

1. Démontrer que cette formule définit un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$
2. En déduire que, pour tous $A, B \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, on a

$$(Tr(AB))^2 \leq Tr(A^2)Tr(B^2)$$

Exercice 2.

1. Donner la matrice de la projection orthogonale sur la droite d'équations $3x = 6y = 2z$ dans la base canonique orthonormée de $\mathbb{R}^3$ ainsi que de la symétrie orthogonale par rapport à cette même droite.
2. Donner de manière générale, la matrice de la projection orthogonale sur la droite engendrée par le vecteur unitaire $u = (a, b, c)$.

Exercice 3.

Soit E un espace préhilbertien, et $(e_1, ..., e_n)$ une famille de n vecteurs de E de norme 1 tels que, pour tout $x \in E$, on a :

$$\|x\|^2 = \sum_{k=1}^{n} \langle x|e_k\rangle^2$$

Démontrer que E est de dimension n et que $(e_1, ..., e_n)$ est une base orthonormale de E.

Exercice 4.

Soit E un espace vectoriel euclidien et x, y deux éléments de E. Montrer que x et y sont orthogonaux si et seulement si $\|x + \lambda y\| \geq \|x\|$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$.

Exercice 5.

Soit $\mathcal{B}$ une base orthonormée de E, espace euclidien de dimension n. Montrer que :

$$\forall (x_1, ..., x_n) \in E^n,\ |\det_{\mathcal{B}}(x_1, ..., x_n)| \leq ||x_1||...||x_n||$$

en précisant les cas d'égalité.

Exercice 6.

Déterminer une base orthonormale de $\mathbb{R}_2[X]$ muni du produit scalaire.

$$\langle P|Q\rangle = \int_{-1}^{1} P(t)Q(t)\,dt$$

Exercice 7.

Soit E un espace préhilbertien, et A et B deux parties de E. Démontrer les relations suivantes :

1. $A \subset B \Rightarrow B^\perp \subset A^\perp$.
2. $(A \cup B)^\perp = A^\perp \cap B^\perp$.
3. $A^\perp = vect(A)^\perp$.
4. $vect(A) \subset A^{\perp\perp}$
5. On suppose maintenant que E est de dimension finie. Démontrer que $vect(A) = A^{\perp\perp}$

Exercice 8.

Soit E un espace préhilbertien et soit $B = \{x \in E; \|x\| \leq 1\}$. Démontrer que B est strictement convexe, c'est-à-dire que, pour tous $x, y \in B$, $x \neq y$ et tout $t \in]0, 1[$, $\|tx + (1 - t)y\| < 1$.

Exercice 9.

Soit $E = \mathbb{R}^4$ muni de son produit scalaire canonique et de la base canonique $\beta = (e_1, e_2, e_3, e_4)$. On considère G le sous-espace vectoriel défini par les équations :

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

1. Déterminer une base orthonormale de G.
2. Déterminer la matrice dans β de la projection orthogonale p_G sur G.
3. Soit $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ un élément de E. Déterminer la distance de x à G.

Exercice 10.

Soit E un espace vectoriel euclidien, et p un projecteur de E. Montrer que p est un projecteur orthogonal si et seulement si pour tout x de E, on a $\|p(x)\| \leq \|x\|$.
