TD 22 : Variables aléatoires et moments

Connaître son cours :

- Soit X_1 et X_2 deux variables indépendantes à valeurs dans E_1 et E_2 , $f_1 : E_1 \to F_1$ et $f_2 : E_2 \to F_2$. Montrer que les variables $f_1(X_1)$ et $f_2(X_2)$ sont indépendantes.
- Soit X une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ à valeurs dans E et $f : E \to F$. Donner et démontrer la formule de transfert.
- Montrer que la somme de n variables indépendantes de loi de Bernoulli de paramètre p est une variable aléatoire de loi binomiale de paramètres n et p.
- Soit X une variable aléatoire réelle, rappeler la définition de l'espérance de X. Donner l'espérance d'une variable aléatoire suivant une loi binomiale de paramètre (n, p).
- Rappeler l'inégalité de Markov et donner la démonstration. En déduire l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.
- Montrer que la variance d'une somme de variables aléatoires indépendantes est la somme des variances de ces variables.
- Soient X et Y deux variables aléatoires réelles qui admettent un moment d'ordre 2. Démontrer la formule de Huygens.

Variables aléatoires discrètes et espérances :

Exercice 1. (*)

Soit $X, Y \sim \mathcal{U}(\llbracket 0; n \rrbracket)$ indépendantes.

1. Donner la loi de $Z_1 = X + Y$.
2. Donner la loi de $Z_2 = n - X$.
3. Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$, donner la loi de $Z_3 = aX$.
4. Donner l'espérance des variables aléatoires précédentes.

Exercice 2. (**)

1. Donner une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}$ qui n'admet pas d'espérance finie.
2. Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ qui admet une espérance et telle que $\mathbb{P}(X > n) \underset{\sim +\infty}{=} o\left(\frac{1}{n}\right)$.
   Montrer que
   $$\mathbb{E}(X) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X > k)$$

Exercice 3. (*)

Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant des lois de Poisson de paramètre respectif λ et μ. Déterminer par deux méthodes différentes la loi de $Z = X + Y$ et en déduire l'espérance de Z.

Exercice 4. (**)

Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes géométriques de paramètres p et q à valeurs dans $]0; 1[$. Calculer l'espérance de $Z = \max(X, Y)$.

Exercice 5. (**)

Soit $N \in \mathbb{N}^*$ et $(U_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées selon une loi uniforme sur $\llbracket 1; N \rrbracket$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$M_n = \max(U_1, \dots, U_n).$$

Déterminer les limites de $\mathbb{E}(M_n)$ et de $\mathbb{V}(M_n)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice 6. (**)

On suppose qu'à la roulette d'un Casino, on obtient la couleur noire avec la probabilité $\frac{1}{2}$, la couleur rouge sinon (on ne suppose qu'il n'y a pas de 0 vert). Un joueur fortuné joue selon le protocole suivant :

— il mise initialement 1 brouzouf sur la couleur noire.

— s'il gagne, il arrête de jouer et empoche le double de sa mise.

— s'il perd, il double sa mise et rejoue.

1. On suppose la fortune du joueur infinie. Montrer que le jeu s'arrête presque sûrement. Déterminer l'espérance de gain du joueur.
2. On suppose toujours la fortune du joueur infinie. Que se passe-t-il si au lieu de doubler, il décide de tripler sa mise lorsqu'il rejoue ?
3. Le joueur n'est en fait pas si fortuné qu'il le prétend : il ne possède que $2^n - 1$ brouzoufs ce qui l'autorise à ne pouvoir jouer que n parties. Que devient son espérance de gain ?

Exercice 7. (**)

Dans une urne figurent N boules numérotées de 1 à N (avec $N \geq 2$). Dans celle-ci on opère des tirages successifs (avec remise) jusqu'à l'obtention d'une série de k boules consécutives identiques ($k \geq 2$). On admet qu'il est presque sûr que ce processus s'arrête et on note T la variable aléatoire déterminant le nombre de tirages opérés à l'arrêt du processus.

1. Déterminer $\mathrm{P}(T = k)$ et $\mathrm{P}(T = k+1)$.
2. Soit $n \geq 1$, établir $\mathrm{P}(T = n+k) = \dfrac{N-1}{N^k}\mathrm{P}(T > n)$
3. En déduire que la variable T admet une espérance et déterminer celle-ci.

Exercice 8. (**)

Soit X une variable aléatoire suivant une loi géométrique de paramètre p.
Calculer $\mathrm{E}\left(\dfrac{1}{X}\right)$.

Exercice 9. (**)

On lance une pièce équilibrée jusqu'à ce que celle-ci ait produit au moins une fois «face et une fois «pile ».

1. Justifier qu'il est presque sûr que le jeu s'arrête.
2. On note X le nombre de lancers avant que le jeu cesse. Montrer que X admet une espérance et déterminer celle-ci.

Exercice 10. (**)

Soient X et Y deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$. On suppose que la loi conjointe de X et Y vérifie

$$\forall (j,k) \in \mathbb{N}^2, \mathrm{P}(X = j, Y = k) = a\frac{j+k}{2^{j+k}} \text{ avec } a \in \mathbb{R}.$$

1. Déterminer la valeur de a pour que la somme des probabilités soit égale à 1.
2. Déterminer les lois marginales de X et de Y.
3. Les variables X et Y sont elles indépendantes ?
4. Calculer $\mathrm{P}(X = Y)$.

Exercice 11. (***)

Soit T une variable aléatoire à valeurs naturelles vérifiant pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\quad \mathrm{P}(T > n) > 0$.
On appelle taux de panne associé à T la suite $(\theta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ déterminée par

$$\theta_n = \mathrm{P}(T = n \mid T \geq n)$$

Typiquement, si T est la variable aléatoire indiquant l'instant où un matériel tombe à panne, la quantité θ_n indique la probabilité qu'il tombe en panne à l'instant présent alors qu'il est actuellement fonctionnel.

1. Justifier $\forall n \in \mathbb{N}, \theta_n \in [0;1[$
2. Exprimer en fonction des termes de la suite $(\theta_n)_{n\in\mathbb{N}}$, la probabilité $\mathrm{P}(T \geq n)$. En déduire la divergence de la série $\sum \theta_n$.

Moments d'ordre 2 d'une variable aléatoire :

Exercice 12. (*)

Soit X une variable aléatoire admettant un moment d'ordre 2. Faire une étude de la fonction $a \mapsto E\big((X-a)^2\big)$ et donner une interprétation de la variance de X.

Exercice 13. (*)

On dit qu'une variable aléatoire discrète réelle X est quasi-certaine lorsqu'il existe un réel a tel que $P(X=a)=1$. Soit X une variable aléatoire discrète réelle telle que $X(\Omega)$. Démontrer que X est quasi-certaine si et seulement si $V(X)=0$.

Exercice 14. (**)

Soient X et Y deux variables aléatoires réelles admettant chacune une variance. On suppose $\mathbb{V}(X)>0$. Déterminer $a,b\in\mathbb{R}$ minimisant la quantité

$$\mathrm{E}\left((Y-(aX+b))^2\right)$$

Exercice 15. (**)

Soit X une variable aléatoire discrète à valeurs dans $[a;b]$.

1. Montrer que X admet une espérance m et que celle-ci est élément de $[a;b]$. La variable X admet aussi une variance σ^2 que l'on se propose de majorer. On introduit la variable aléatoire $Y=X-m$ et les quantités

$$t=\sum_{y\geq 0} yP(Y=y),\ s=\sum_{y\geq 0} y^2\mathrm{P}(Y=y) \text{ et } u=\mathrm{P}(Y\geq 0).$$

2. Vérifier $t^2\leq su$
3. Calculer espérance et variance de Y.
   En déduire $t^2\leq\left(\sigma^2-s\right)(1-u)$
4. En exploitant les deux majorations précédentes, obtenir

$$t^2\leq\sigma^2/4$$

5. Conclure

$$\sigma^2\leq(b-a)^2/4$$

Inégalités de Markov et de Bienaymé-Tchebychev :

Exercice 16. (*)

Soit X une variable aléatoire réelle finie à valeurs dans $\mathbb{R}_+$, $f:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}_+^*$ une fonction croissante. Démontrer que

$$P(X\geq a)\leq\frac{E(f(X))}{f(a)}.$$

Exercice 17. (**)

On jette 3600 fois un dé équilibré. Minorer la probabilité que le nombre d'apparitions du numéro 1 soit compris entre 480 et 720.

Exercice 18. (**)

Une usine fabrique des pièces dont une proportion inconnue p est défectueuse, et on souhaite trouver une valeur approchée de p.

On effectue un prélèvement de n pièces. On suppose que le prélèvement se fait sur une population très grande, et donc qu'il peut s'apparenter à une suite de n tirages indépendants avec remise. On note X_n la variable aléatoire égale au nombre de pièces défectueuses et on souhaite quantifier le fait que $\dfrac{X_n}{n}$ approche p.

1. Quelle est la loi de X_n ? Sa moyenne ? Sa variance ?
2. Démontrer que, pour tout $\varepsilon>0$,

$$P\left(\left|\frac{X_n}{n}-p\right|\geq\varepsilon\right)\leq\frac{1}{4n\varepsilon^2}.$$

3. En déduire une condition sur n pour que X_n/n soit une valeur approchée de p à 10^{-2} près avec une probabilité supérieure ou égale à 95%.
