TD7 suites numériques

Exercice 1 - Suite homographique

Soit la suite réelle (u_n) définie par

$$u_0 = 3 \quad \text{et} \quad u_{n+1} = \frac{4u_n - 2}{u_n + 1}.$$

Pour $x \neq -1$, on pose $f(x) = \frac{4x-2}{x+1}$.

1. Étudier les variations de f sur $[1, +\infty[$.
2. Démontrer que, pour tout $n \geq 0$, on a $u_n > 1$.
3. On définit une suite (v_n) à partir de (u_n) en posant, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$v_n = \frac{u_n - 2}{u_n - 1}.$$
Démontrer que (v_n) est une suite géométrique, et donner l'expression de son terme général.
4. En déduire la valeur de u_n en fonction de n.
5. Justifier enfin que (u_n) converge et déterminer sa limite.

Exercice 2 - Limite infinie

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 3$ et $u_{n+1} = (u_n^2 + 2)/3$.

1. Démontrer que $u_n \geq 3$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. Démontrer que la suite (u_n) est croissante.
3. On suppose que la suite (u_n) converge. Quelles peuvent être les limites possibles de (u_n)?
4. En déduire que la suite (u_n) tend vers $+\infty$.

Exercice 3 - Approximation du nombre d'or

On appelle nombre d'or et on note ϕ la solution positive réelle de l'équation d'inconnue réelle x :

$$x^2 - x - 1 = 0.$$

En particulier, on a $\phi = \sqrt{1 + \phi}$.

1. Justifier, sans calculatrice, que $1 < \phi < 2$.
2. On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par
$$u_1 = \sqrt{1},\ u_2 = \sqrt{1 + \sqrt{1}},\ u_3 = \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1}}}$$
et ainsi de suite,
$$u_n = \sqrt{1 + \cdots + \sqrt{1 + \sqrt{1}}}$$
avec n radicaux.
Exprimer, pour tout entier n supérieur ou égal à 1, u_{n+1} en fonction de u_n.

3. Montrer que, pour tout $n \geq 1$,
$$1 \leq u_n \leq \phi.$$

4. Montrer que la suite (u_n) est croissante.

5. Démontrer que (u_n) converge vers ϕ.

6. Montrer que, pour tout entier $n \geq 1$,
$$|u_{n+1} - \phi| \leq \frac{1}{2}|u_n - \phi|.$$

7. En déduire que, pour tout $n \geq 1$,
$$|u_n - \phi| \leq \frac{1}{2^{n-1}}.$$

Exercice 4 - Suites récurrentes linéaires d'ordre 2

Donner l'expression du terme général des suites récurrentes (u_n) suivantes :

1. $u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n$, $u_0 = 3$, $u_1 = 5$.

2. $u_{n+2} = 4u_{n+1} - 4u_n$, $u_0 = 1$, $u_1 = 0$.

3. $u_{n+2} = u_{n+1} - u_n$, $u_0 = 1$ et $u_1 = 2$.

Exercice 5 - Nature

Étudier la nature des suites suivantes, et déterminer leur limite éventuelle :

1. $u_n = \dfrac{\ln(n!)}{n}$ **2**. $u_n = \dfrac{\lfloor nx \rfloor}{n^\alpha}$ en fonction de $x, \alpha \in \mathbb{R}$

3. $u_n = \dfrac{1}{n!}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k!$

Exercice 6 - Partie entière

Soit (u_n) une suite convergente. La suite $(\lfloor u_n \rfloor)$ est-elle convergente?

Exercice 7 - Somme et produit

Soit (u_n) et (v_n) deux suites de nombres réels. On suppose que $(u_n v_n)$ et que $(u_n + v_n)$ convergent vers 0.

1. Démontrer que $(u_n^2 + v_n^2)$ converge vers 0.

2. En déduire que (u_n) et (v_n) convergent vers 0.

Exercice 8 - Moyenne de Cesàro

Soit $(u_n)_{n \geq 1}$ une suite réelle. On pose $S_n = \frac{u_1 + \cdots + u_n}{n}$.

1. On suppose que (u_n) converge vers 0. Soient $\varepsilon > 0$ et $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que, pour $n \geq n_0$, on a $|u_n| \leq \varepsilon$.
   (a) Montrer qu'il existe une constante M telle que, pour $n \geq n_0$, on a
   $$|S_n| \leq \frac{M(n_0 - 1)}{n} + \varepsilon.$$
   (b) En déduire que (S_n) converge vers 0.

2. On suppose que $u_n=(-1)^n$. Que dire de (S_n)? Qu'en déduisez-vous?
3. On suppose que (u_n) converge vers l. Montrer que (S_n) converge vers l.
4. On suppose que (u_n) tend vers $+\infty$. Montrer que (S_n) tend vers $+\infty$.

Exercice 9 - Suite sur-additive

Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite de réels telle que, pour tout $(m,n)\in\mathbb{N}^2$,

$$u_{m+n}\geq u_m+u_n.$$

On suppose que l'ensemble $\left\{\frac{u_n}{n};\ n\in\mathbb{N}^*\right\}$ est majoré, et on note ℓ sa borne supérieure.

1. Soit $m,q,r\in\mathbb{N}$. On pose $n=mq+r$. Comparer u_n et qu_m+u_r.
2. On fixe $m\in\mathbb{N}^*$ et $\varepsilon>0$. En utilisant la division euclidienne de n par m, démontrer qu'il existe un entier N tel que, pour tout $n>N$,
$$\frac{u_n}{n}\geq\frac{u_m}{m}-\varepsilon.$$
3. Démontrer que $\lim_{n\to+\infty}\frac{u_n}{n}=\ell$.

Exercice 10 - Produit de Cauchy

Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles convergeant respectivement vers u et v. Montrer que la suite $w_n=\dfrac{u_0v_n+\dots+u_nv_0}{n+1}$ converge vers uv.

Exercice 11 - Convergence des suites extraites

Soit (u_n) une suite de nombres réels.

1. On suppose que (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent vers la même limite. Prouver que (u_n) est convergente.
2. Donner un exemple de suite telle que (u_{2n}) converge, (u_{2n+1}) converge, mais (u_n) n'est pas convergente.
3. On suppose que les suites (u_{2n}), (u_{2n+1}) et (u_{3n}) sont convergentes. Prouver que (u_n) est convergente.

Cette feuille d'exercices a été conçue à l'aide du site http://www.bibmath.net