RELATIONS BINAIRES

Exercice 1 - Nature des relations

Dire si les relations suivantes sont réflexives, symétriques, antisymétriques, transitives :

1. $E = \mathbb{Z}$ et $x\mathcal{R}y \iff x = -y$;
2. $E = \mathbb{R}$ et $x\mathcal{R}y \iff \cos^2 x + \sin^2 y = 1$;
3. $E = \mathbb{N}$ et $x\mathcal{R}y \iff \exists p, q \geq 1,\ y = px^q$ (p et q sont des entiers).

Quelles sont parmi les exemples précédents les relations d'ordre et les relations d'équivalence?

Exercice 2 - Relation d'équivalence et fonction

On définit sur $\mathbb{R}$ la relation $x\mathcal{R}y$ si et seulement si $x^2 - y^2 = x - y$.

1. Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.
2. Calculer la classe d'équivalence d'un élément x de $\mathbb{R}$. Combien y-a-t-il d'éléments dans cette classe?

Exercice 3 -

On munit l'ensemble $E = \mathbb{R}^2$ de la relation $\mathcal{R}$ définie par

$$(x, y)\ \mathcal{R}\ (x', y') \iff \exists a > 0,\ \exists b > 0 \mid x' = ax \text{ et } y' = by.$$

1. Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.
2. Donner la classe d'équivalence des éléments $A = (1, 0)$, $B = (0, -1)$ et $C = (1, 1)$.
3. Déterminer les classes d'équivalence de $\mathcal{R}$.

Exercice 4 - Ordre lexicographique

On définir sur $\mathbb{R}^2$ la relation $\prec$ par

$$(x, y) \prec (x', y') \iff \big((x < x') \text{ ou } (x = x' \text{ et } y \leq y')\big).$$

Démontrer que ceci définit une relation d'ordre sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 5 - Une relation d'ordre sur les entiers

On définit la relation $\mathcal{R}$ sur $\mathbb{N}^*$ par $p\mathcal{R}q \iff \exists k \in \mathbb{N}^*,\ q = p^k$. Montrer que $\mathcal{R}$ définit un ordre partiel sur $\mathbb{N}^*$. Déterminer les majorants de $\{2, 3\}$ pour cet ordre.

Exercice 6 - Pas d'élément maximal

Soit E un ensemble ordonné. Démontrer que toute partie de E admet un élément maximal si et seulement si toute suite croissante de E est stationnaire.

Cette feuille d'exercices a été conçue à l'aide du site http://www.bibmath.net