

Intégration

Exercices de Jean-Louis Rouget. Retrouver aussi cette fiche sur www.maths-france.fr

* très facile ** facile *** difficulté moyenne **** difficile ***** très difficile

I : Incontournable T : pour travailler et mémoriser le cours

Exercice 1 ****

Soient f et g deux fonctions continues et strictement positives sur $[a, b]$. Pour n entier naturel non nul donné, on pose $u_n = \left(\int_a^b (f(x))^n g(x) dx \right)^{1/n}$.

Montrer que la suite (u_n) converge et déterminer sa limite (commencer par le cas $g = 1$).

[Correction ▼](#)

[005444]

Exercice 2 **I

1. Soit f une application de classe C^1 sur $[0, 1]$ telle que $f(1) \neq 0$.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \int_0^1 t^n f(t) dt$. Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$ puis déterminer un équivalent simple de u_n quand n tend vers $+\infty$ (étudier $\lim_{n \rightarrow +\infty} n u_n$).

2. Mêmes questions en supposant que f est de classe C^2 sur $[0, 1]$ et que $f(1) = 0$ et $f'(1) \neq 0$.

[Correction ▼](#)

[005445]

Exercice 3 ***IT

Limites de

$$\begin{array}{llll} 1) \frac{1}{n^3} \sum_{k=1}^n k^2 \sin \frac{k\pi}{n} & 2) \left(\frac{1}{n!} \prod_{k=1}^n (a+k) \right)^{1/n} (a > 0 \text{ donné}) & 3) \sum_{k=1}^n \frac{n+k}{n^2+k} & 4) \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{n^2-k^2}} \\ 5) \frac{1}{n\sqrt{n}} \sum_{k=1}^n E(\sqrt{k}) & 6) \sum_{k=1}^n \frac{k^2}{8k^3+n^3} & 7) \sum_{k=n}^{2n-1} \frac{1}{2k+1} & 8) n \sum_{k=1}^n \frac{e^{-n/k}}{k^2} \end{array}$$

[Correction ▼](#)

[005446]

Exercice 4 ***I

Soit f une fonction de classe C^2 sur $[0, 1]$. Déterminer le réel a tel que :

$$\int_0^1 f(t) dt - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) = \frac{a}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

[Correction ▼](#)

[005447]

Exercice 5 **I Le lemme de LEBESGUE

1. On suppose que f est une fonction de classe C^1 sur $[a, b]$. Montrer que $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \int_a^b \sin(\lambda t) f(t) dt = 0$.

2. (***) Redémontrer le même résultat en supposant simplement que f est continue par morceaux sur $[a, b]$ (commencer par le cas des fonctions en escaliers).

[Correction ▼](#)

[005448]

Exercice 6 ***T

Soit E l'ensemble des fonctions continues strictement positives sur $[a, b]$.

$$\begin{array}{l} \text{Soit } \varphi : E \rightarrow \mathbb{R} \\ f \mapsto \left(\int_a^b f(t) dt \right) \left(\int_a^b \frac{1}{f(t)} dt \right) \end{array}$$

1. Montrer que $\varphi(E)$ n'est pas majoré.
2. Montrer que $\varphi(E)$ est minoré. Trouver $m = \inf\{\varphi(f), f \in E\}$. Montrer que cette borne inférieure est atteinte et trouver toutes les f de E telles que $\varphi(f) = m$.

[Correction ▼](#)

[005449]

Exercice 7 ***

Etude complète de la fonction $f(x) = \frac{1}{x-1} \int_1^x \frac{t^2}{\sqrt{1+t^8}} dt$.

[Correction ▼](#)

[005450]

Exercice 8 ***

Pour x réel, on pose $f(x) = e^{-x^2} \int_0^x e^{t^2} dt$.

1. Montrer que f est impaire et de classe C^∞ sur \mathbb{R} .
2. Montrer que f est solution de l'équation différentielle $y' + 2xy = 1$.
3. Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} 2xf(x) = 1$.
4. Soit $g(x) = \frac{e^{x^2}}{2x} f'(x)$. Montrer que g est strictement décroissante sur $]0, +\infty[$ et que g admet sur $]0, +\infty[$ un unique zéro noté x_0 vérifiant de plus $0 < x_0 < 1$.
5. Dresser le tableau de variations de f .

[Correction ▼](#)

[005451]

Exercice 9 ***

Soit f une fonction de classe C^1 sur $[0, 1]$ telle que $f(0) = 0$. Montrer que $2 \int_0^1 f^2(t) dt \leq \int_0^1 f'^2(t) dt$.

[Correction ▼](#)

[005452]

Exercice 10 ****

Soit f une fonction continue sur $[a, b]$. Pour x réel, on pose $F(x) = \int_a^b |t - x| f(t) dt$. Etudier la dérivabilité de F sur \mathbb{R} .

[Correction ▼](#)

[005453]

Exercice 11 ***

Soit a un réel strictement positif et f une application de classe C^1 et strictement croissante sur $[0, a]$ telle que $f(0) = 0$. Montrer que $\forall x \in [0, a], \forall y \in [0, f(a)], xy \leq \int_0^x f(t) dt + \int_0^y f^{-1}(t) dt$.

[Correction ▼](#)

[005454]

Exercice 12 **

Soit f continue sur $[0, 1]$ telle que $\int_0^1 f(t) dt = \frac{1}{2}$. Montrer que f admet un point fixe.

[Correction ▼](#)

[005455]

Exercice 13 **

Soient f et g deux fonctions continues par morceaux et positives sur $[0, 1]$ telles que $\forall x \in [0, 1], f(x)g(x) \geq 1$. Montrer que $(\int_0^1 f(t) dt)(\int_0^1 g(t) dt) \geq 1$.

[Correction ▼](#)

[005456]

Exercice 14 ***

Partie principale quand n tend vers $+\infty$ de $u_n = \sum_{k=1}^n \sin \frac{1}{(n+k)^2}$.

[Correction ▼](#)

[005457]

Exercice 15 **

Montrer que $\sum_{k=1}^n \sin \frac{k}{n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2n} + o(\frac{1}{n})$.

[Correction ▼](#)

[005458]

Exercice 16 **

Déterminer les limites quand n tend vers $+\infty$ de

$$1) u_n = \frac{1}{n!} \int_0^1 \arcsin^n x \, dx \quad 2) \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} \, dx \quad 3) \int_0^\pi \frac{n \sin x}{x+n} \, dx.$$

[Correction ▼](#)

[005459]

Exercice 17 ***

Etude complète de $F(x) = \int_x^{2x} \frac{dt}{\sqrt{t^4+t^2+1}}$.

[Correction ▼](#)

[005460]

Exercice 18 ***

Trouver toutes les applications continues sur \mathbb{R} vérifiant : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x)f(y) = \int_{x-y}^{x+y} f(t) \, dt$.

[Correction ▼](#)

[005461]

Exercice 19 ***

Soit f une fonction de classe C^1 sur $[a, b]$ telle que $f(a) = f(b) = 0$ et soit $M = \sup\{|f'(x)|, x \in [a, b]\}$. Montrer que $\left| \int_a^b f(x) \, dx \right| \leq M \frac{(b-a)^2}{4}$.

[Correction ▼](#)

[005462]

Exercice 20 **

Déterminer les fonctions f continues sur $[0, 1]$ vérifiant $\left| \int_0^1 f(t) \, dt \right| = \int_0^1 |f(t)| \, dt$.

[Correction ▼](#)

[005463]

Exercice 21 ***I

- Déterminer $\lim_{x \rightarrow 1} \int_x^{x^2} \frac{dt}{\ln t}$.
- Etude complète de $F(x) = \int_x^{x^2} \frac{dt}{\ln t}$.

[Correction ▼](#)

[005464]

Exercice 22 ****

Soit $f(t) = \frac{t^2}{e^t - 1}$ si $t \neq 0$ et 0 si $t = 0$.

1. Vérifier que f est continue sur \mathbb{R} .
2. Soit $F(x) = \int_0^x f(t) \, dt$. Montrer que F a une limite réelle ℓ quand x tend vers $+\infty$ puis que $\ell = 2 \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^3}$.

[Correction ▼](#)

[005465]

Correction de l'exercice 1 ▲

f est continue sur le segment $[a, b]$ et admet donc un maximum M sur ce segment. Puisque f est strictement positive sur $[a, b]$, ce maximum est strictement positif.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, posons $u_n = \left(\int_a^b (f(x))^n dx \right)^{1/n}$. Par croissance de l'intégrale, on a déjà

$$u_n \leq \left(\int_a^b M^n dx \right)^{1/n} = M(b-a)^{1/n},$$

(car $\forall x \in [a, b]$, $0 \leq f(x) \leq M \Rightarrow \forall x \in [a, b]$, $(f(x))^n \leq M^n$ par croissance de la fonction $t \mapsto t^n$ sur $[0, +\infty[$). D'autre part, par continuité de f en x_0 tel que $f(x_0) = M$, pour $\varepsilon \in]0, 2M[$ donné, $\exists [\alpha, \beta] \subset [a, b] / \alpha < \beta$ et $\forall x \in [\alpha, \beta]$, $f(x) \geq M - \frac{\varepsilon}{2}$.

Pour n élément de \mathbb{N}^* , on a alors

$$u_n \geq \left(\int_\alpha^\beta (f(x))^n dx \right)^{1/n} \geq \left(\int_\alpha^\beta \left(M - \frac{\varepsilon}{2}\right)^n dx \right)^{1/n} = \left(M - \frac{\varepsilon}{2}\right)(\beta - \alpha)^{1/n}.$$

En résumé,

$$\forall \varepsilon \in]0, 2M[, \exists (\alpha, \beta) \in [a, b]^2 / \alpha < \beta \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}^*, \left(M - \frac{\varepsilon}{2}\right)(\beta - \alpha)^{1/n} \leq u_n \leq M(b-a)^{1/n}.$$

Mais, $\lim_{n \rightarrow +\infty} M(b-a)^{1/n} = M$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(M - \frac{\varepsilon}{2}\right)(\beta - \alpha)^{1/n} = \left(M - \frac{\varepsilon}{2}\right)(\beta - \alpha)^{1/n}$.

Par suite, $\exists n_1 \in \mathbb{N}^* / \forall n \geq n_1$, $M(b-a)^{1/n} < M + \varepsilon$ et $\exists n_2 \in \mathbb{N}^* / \forall n \geq n_2$, $\left(M - \frac{\varepsilon}{2}\right)(\beta - \alpha)^{1/n} > M - \varepsilon$.

Soit $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$. Pour $n \geq n_0$, on a $M - \varepsilon < u_n < M + \varepsilon$. On a montré que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}^* / \forall n \in \mathbb{N}, (n \geq n_0 \Rightarrow |u_n - M| < \varepsilon),$$

et donc que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = M$.

Plus généralement, si g continue sur $[a, b]$, g admet un minimum m_1 et un maximum M_1 sur cet intervalle, tous deux strictement positifs puisque g est strictement positive. Pour n dans \mathbb{N}^* , on a

$$m_1^{1/n} \left(\int_a^b (f(x))^n dx \right)^{1/n} \leq \left(\int_a^b (f(x))^n g(x) dx \right)^{1/n} \leq M_1^{1/n} \left(\int_a^b (f(x))^n dx \right)^{1/n},$$

et comme d'après l'étude du cas $g = 1$, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} m_1^{1/n} \left(\int_a^b (f(x))^n dx \right)^{1/n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} M_1^{1/n} \left(\int_a^b (f(x))^n dx \right)^{1/n} = M$, le théorème de la limite par encadrements permet d'affirmer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\int_a^b (f(x))^n g(x) dx \right)^{1/n} = M$. On a montré que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\int_a^b (f(x))^n g(x) dx \right)^{1/n} = \max\{f(x), x \in [a, b]\}.$$

Correction de l'exercice 2 ▲

1. f est continue sur le segment $[0, 1]$ et est donc bornée sur ce segment. Soit M un majorant de $|f|$ sur $[0, 1]$. Pour $n \in \mathbb{N}$,

$$|u_n| \leq \int_0^1 t^n |f(t)| dt \leq M \int_0^1 t^n dt = \frac{M}{n+1},$$

et comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{M}{n+1} = 0$, on a montré que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Puisque f est de classe C^1 sur $[0, 1]$, on peut effectuer une intégration par parties qui fournit

$$u_n = \left[\frac{t^{n+1}}{n+1} f(t) \right]_0^1 - \frac{1}{n+1} \int_0^1 t^{n+1} f'(t) dt = \frac{f(1)}{n+1} - \frac{1}{n+1} \int_0^1 t^{n+1} f'(t) dt.$$

Puisque f' est continue sur $[0, 1]$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 t^{n+1} f'(t) dt = 0$ ou encore $-\frac{1}{n+1} \int_0^1 t^{n+1} f'(t) dt = o(\frac{1}{n})$. D'autre part, puisque $f(1) \neq 0$, $\frac{f(1)}{n+1} \sim \frac{f(1)}{n}$ ou encore $\frac{f(1)}{n+1} = \frac{f(1)}{n} + o(\frac{1}{n})$. Finalement, $u_n = \frac{f(1)}{n} + o(\frac{1}{n})$, ou encore

$$u_n \sim \frac{f(1)}{n}.$$

2. Puisque f est de classe C^1 sur $[0, 1]$ et que $f(1) = 0$, une intégration par parties fournit

$u_n = -\frac{1}{n+1} \int_0^1 t^{n+1} f'(t) dt$. Puisque f' est de classe C^1 sur $[0, 1]$ et que $f'(1) \neq 0$, le 1) appliqué à f' fournit

$$u_n = -\frac{1}{n+1} \int_0^1 t^{n+1} f'(t) dt \sim -\frac{1}{n} \frac{f'(1)}{n} = -\frac{f'(1)}{n^2}.$$

Par exemple, $\int_0^1 t^n \sin \frac{\pi t}{2} dt \sim \frac{1}{n}$ et $\int_0^1 t^n \cos \frac{\pi t}{2} dt \sim \frac{\pi}{2n^2}$

Correction de l'exercice 3 ▲

1. Pour $n \geq 1$,

$$u_n = \frac{1}{n^3} \sum_{k=1}^n k^2 \sin \frac{k\pi}{n} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left(\frac{k}{n}\right)^2 \sin \frac{k\pi}{n} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right),$$

où $f(x) = x^2 \sin(\pi x)$. u_n est donc une somme de RIEMANN à pas constant associée à la fonction continue f sur $[0, 1]$. Quand n tend vers $+\infty$, le pas $\frac{1}{n}$ tend vers 0 et on sait que u_n tend vers

$$\begin{aligned} \int_0^1 x^2 \sin(\pi x) dx &= \left[-\frac{1}{\pi} x^2 \cos(\pi x) \right]_0^1 + \frac{2}{\pi} \int_0^1 x \cos(\pi x) dx = \frac{1}{\pi} + \frac{2}{\pi} \left(\left[\frac{1}{\pi} x \sin(\pi x) \right]_0^1 - \frac{1}{\pi} \int_0^1 \sin(\pi x) dx \right) \\ &= \frac{1}{\pi} - \frac{2}{\pi^2} \left[-\frac{1}{\pi} \cos(\pi x) \right]_0^1 = \frac{1}{\pi} - \frac{2}{\pi^2} \left(\frac{1}{\pi} + \frac{1}{\pi} \right) \\ &= \frac{1}{\pi} - \frac{4}{\pi^3}. \end{aligned}$$

2. On peut avoir envie d'écrire :

$$\ln(u_n) = \frac{1}{n} \left(\sum_{k=1}^n (\ln(a+k) - \ln k) \right) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \ln\left(1 + \frac{a}{k}\right).$$

La suite de nombres $a, \frac{a}{2}, \dots, \frac{a}{n}$ « est une subdivision (à pas non constant) de $[0, a]$ » mais malheureusement son pas $a - \frac{a}{2} = \frac{a}{2}$ ne tend pas vers 0 quand n tend vers $+\infty$. On n'est pas dans le même type de problèmes.

Rappel. (exo classique) Soit v une suite strictement positive telle que la suite $(\frac{v_{n+1}}{v_n})$ tend vers un réel positif ℓ , alors la suite $(\sqrt[n]{v_n})$ tend encore vers ℓ .

Posons $v_n = \frac{1}{n!} \prod_{k=1}^n (a+k)$ puis $u_n = \sqrt[n]{v_n}$.

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{a+n+1}{n+1} \rightarrow 1,$$

et donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$.

3. Encore une fois, ce n'est pas une somme de RIEMANN. On tente un encadrement assez large : pour $1 \leq k \leq n$,

$$\frac{n+k}{n^2+n} \leq \frac{n+k}{n^2+k} \leq \frac{n+k}{n^2}.$$

En sommant ces inégalités, il vient

$$\frac{1}{n^2+n} \sum_{k=1}^n (n+k) \leq \sum_{k=1}^n \frac{n+k}{n^2+k} \leq \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n (n+k),$$

et donc ((premier terme + dernier terme) × nombre de termes/2),

$$\frac{1}{n^2+n} \frac{((n+1)+2n)n}{2} \leq u_n \leq \frac{1}{n^2} \frac{((n+1)+2n)n}{2},$$

et finalement, $\frac{3n+1}{2(n+1)} \leq u_n \leq \frac{3n+1}{2n}$. Or, $\frac{3n+1}{2(n+1)}$ et $\frac{3n+1}{2n}$ tendent tous deux vers $\frac{3}{2}$. Donc, u_n tend vers $\frac{3}{2}$.

4. Tout d'abord

$$u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{n^2-k^2}} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{1-(\frac{k}{n})^2}} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right),$$

où $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ pour $x \in [0, 1[$. u_n est donc effectivement une somme de RIEMANN à pas constant associée à la fonction f mais malheureusement, cette fonction n'est pas continue sur $[0, 1]$, ou même prolongeable par continuité en 1. On s'en sort néanmoins en profitant du fait que f est croissante sur $[0, 1[$.

Puisque f est croissante sur $[0, 1[$, pour $1 \leq k \leq n-2$, on a $\frac{1}{n} \frac{1}{\sqrt{1-(\frac{k}{n})^2}} \leq \int_{k/n}^{(k+1)/n} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$, et pour $1 \leq k \leq n-1$, $\frac{1}{n} \frac{1}{\sqrt{1-(\frac{k}{n})^2}} \geq \int_{(k-1)/n}^{k/n} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$. En sommant ces inégalités, on obtient

$$u_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{1-(\frac{k}{n})^2}} \geq \sum_{k=1}^{n-1} \int_{(k-1)/n}^{k/n} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \int_0^{1-\frac{1}{n}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin\left(1 - \frac{1}{n}\right),$$

et

$$\begin{aligned} u_n &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-2} \frac{1}{\sqrt{1-(\frac{k}{n})^2}} + \frac{1}{\sqrt{n^2-(n-1)^2}} \leq \int_{\frac{1}{n}}^{1-\frac{1}{n}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx + \frac{1}{\sqrt{2n-1}} \\ &= \arcsin\left(1 - \frac{1}{n}\right) - \arcsin \frac{1}{n} + \frac{1}{\sqrt{2n-1}}. \end{aligned}$$

Quand n tend vers $+\infty$, les deux membres de cet encadrement tendent vers $\arcsin 1 = \frac{\pi}{2}$, et donc u_n tend vers $\frac{\pi}{2}$.

5. Pour $1 \leq k \leq n$, $\sqrt{k} - 1 \leq E(\sqrt{k}) \leq \sqrt{k}$, et en sommant,

$$\frac{1}{n\sqrt{n}} \sum_{k=1}^n \sqrt{k} - \frac{1}{\sqrt{n}} \leq u_n \leq \frac{1}{n\sqrt{n}} \sum_{k=1}^n \sqrt{k}.$$

Quand n tend vers $+\infty$, $\frac{1}{\sqrt{n}}$ tend vers 0 et la somme de RIEMANN $\frac{1}{n\sqrt{n}} \sum_{k=1}^n \sqrt{k} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sqrt{\frac{k}{n}}$ tend vers $\int_0^1 \sqrt{x} dx = \frac{2}{3}$. Donc, u_n tend vers $\frac{2}{3}$.

6. $u_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{(k/n)^2}{1+8(k/n)^3}$ tend vers $\int_0^1 \frac{x^2}{8x^3+1} dx = \left[\frac{1}{24} \ln |8x^3+1| \right]_0^1 = \frac{\ln 3}{12}$.

7. $u_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2(k+n)+1} = \frac{1}{2} \frac{2}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2+\frac{2k+1}{n}}$ tend vers $\frac{1}{2} \int_0^2 \frac{1}{2+x} dx = \frac{1}{2} (\ln 4 - \ln 2) = \ln 2$.

8. Soit $f(x) = \frac{1}{x^2} e^{-1/x}$ si $x > 0$ et 0 si $x = 0$. f est continue sur $[0, 1]$ (théorèmes de croissances comparées). Donc, $u_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right)$ tend vers $\int_0^1 f(x) dx$. Pour $x \in [0, 1]$, posons $F(x) = \int_x^1 f(t) dt$. Puisque f est continue sur $[0, 1]$, F l'est et

$$\int_0^1 f(x) dx = F(0) = \lim_{x \rightarrow 0, x > 0} F(x) = \lim_{x \rightarrow 0, x > 0} \left[e^{-1/t} \right]_x^1 = \lim_{x \rightarrow 0, x > 0} (e^{-1} - e^{-1/x}) = \frac{1}{e}.$$

Donc, u_n tend vers $\frac{1}{e}$ quand n tend vers $+\infty$.

Correction de l'exercice 4 ▲

Supposons f de classe C^2 sur $[0, 1]$. Soit F une primitive de f sur $[0, 1]$. Soit n un entier naturel non nul.

$$u_n = \int_0^1 f(t) dt - \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) = \sum_{k=0}^{n-1} \left(\int_{k/n}^{(k+1)/n} f(t) dt - \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \right) = \sum_{k=0}^{n-1} \left(F\left(\frac{k+1}{n}\right) - F\left(\frac{k}{n}\right) - \frac{1}{n} F'\left(\frac{k}{n}\right) \right).$$

f est de classe C^2 sur le segment $[0, 1]$. Par suite, $F^{(3)} = f''$ est définie et bornée sur ce segment. En notant M_2 la borne supérieure de $|f''|$ sur $[0, 1]$, l'inégalité de TAYLOR-LAGRANGE à l'ordre 3 appliquée à F sur le segment $[0, 1]$ fournit

$$\left| F\left(\frac{k+1}{n}\right) - F\left(\frac{k}{n}\right) - \frac{1}{n} F'\left(\frac{k}{n}\right) - \frac{1}{2n^2} F''\left(\frac{k}{n}\right) \right| \leq \frac{(1/n)^3 M_2}{6},$$

et donc,

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=0}^{n-1} \left[F\left(\frac{k+1}{n}\right) - F\left(\frac{k}{n}\right) - \frac{1}{n} F'\left(\frac{k}{n}\right) - \frac{1}{2n^2} F''\left(\frac{k}{n}\right) \right] \right| &\leq \sum_{k=0}^{n-1} \left| F\left(\frac{k+1}{n}\right) - F\left(\frac{k}{n}\right) - \frac{1}{n} F'\left(\frac{k}{n}\right) - \frac{1}{2n^2} F''\left(\frac{k}{n}\right) \right| \\ &\leq \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(1/n)^3 M_2}{6} = \frac{M_2}{6n^2}. \end{aligned}$$

Ainsi, $\sum_{k=0}^{n-1} \left[F\left(\frac{k+1}{n}\right) - F\left(\frac{k}{n}\right) - \frac{1}{n} F'\left(\frac{k}{n}\right) - \frac{1}{2n^2} F''\left(\frac{k}{n}\right) \right] = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$, ou encore $\sum_{k=0}^{n-1} \left[F\left(\frac{k+1}{n}\right) - F\left(\frac{k}{n}\right) - \frac{1}{n} F'\left(\frac{k}{n}\right) - \frac{1}{2n^2} F''\left(\frac{k}{n}\right) \right] = o\left(\frac{1}{n}\right)$, ou enfin,

$$u_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2n^2} F''\left(\frac{k}{n}\right) + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

Maintenant,

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2n^2} F''\left(\frac{k}{n}\right) = \frac{1}{2n} \cdot \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f'\left(\frac{k}{n}\right).$$

Or, la fonction f' est continue sur le segment $[0, 1]$. Par suite, la somme de RIEMANN $\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f'\left(\frac{k}{n}\right)$ tend vers $\int_0^1 f'(t) dt = f(1) - f(0)$ et donc

$$\frac{1}{2n} \cdot \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f'\left(\frac{k}{n}\right) = \frac{1}{2n} (f(1) - f(0) + o(1)) = \frac{f(1) - f(0)}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

Finalement,

$$\int_0^1 f(t) dt - \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) = \frac{f(1) - f(0)}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

Correction de l'exercice 5 ▲

1. Puisque f est de classe C^1 sur $[a, b]$, on peut effectuer une intégration par parties qui fournit pour $\lambda > 0$:

$$\left| \int_a^b f(t) \sin(\lambda t) dt \right| = \left| \frac{1}{\lambda} (-[\cos(\lambda t) f(t)]_a^b + \int_a^b f'(t) \cos(\lambda t) dt) \right| \leq \frac{1}{\lambda} (|f(a)| + |f(b)| + \int_a^b |f'(t)| dt).$$

Cette dernière expression tend vers 0 quand λ tend vers $+\infty$, et donc $\int_a^b f(t) \sin(\lambda t) dt$ tend vers 0 quand λ tend vers $+\infty$.

2. Si f est simplement supposée continue par morceaux, on ne peut donc plus effectuer une intégration par parties.

Le résultat est clair si $f = 1$, car pour $\lambda > 0$, $\left| \int_a^b \sin(\lambda t) dt \right| = \dots \leq \frac{2}{\lambda}$.

Le résultat s'étend aux fonctions constantes par linéarité de l'intégrale puis aux fonctions constantes par morceaux par additivité par rapport à l'intervalle d'intégration, c'est-à-dire aux fonctions en escaliers.

Soit alors f une fonction continue par morceaux sur $[a, b]$.

Soit $\varepsilon > 0$. On sait qu'il existe une fonction en escaliers g sur $[a, b]$ telle que $\forall x \in [a, b], |f(x) - g(x)| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$.

Pour $\lambda > 0$, on a alors

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b f(t) \sin(\lambda t) dt \right| &= \left| \int_a^b (f(t) - g(t)) \sin(\lambda t) dt + \int_a^b g(t) \sin(\lambda t) dt \right| \\ &\leq \int_a^b |f(t) - g(t)| dt + \left| \int_a^b g(t) \sin(\lambda t) dt \right| \leq (b-a) \frac{\varepsilon}{2(b-a)} + \left| \int_a^b g(t) \sin(\lambda t) dt \right| \\ &= \frac{\varepsilon}{2} + \left| \int_a^b g(t) \sin(\lambda t) dt \right|. \end{aligned}$$

Maintenant, le résultat étant établi pour les fonctions en escaliers,

$$\exists A > 0 / \forall \lambda \in \mathbb{R}, (\lambda > A \Rightarrow \left| \int_a^b g(t) \sin(\lambda t) dt \right| < \frac{\varepsilon}{2}).$$

Pour $\lambda > A$, on a alors $\left| \int_a^b f(t) \sin(\lambda t) dt \right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$. On a montré que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists A > 0 / \forall \lambda \in \mathbb{R}, (\lambda > A \Rightarrow \left| \int_a^b f(t) \sin(\lambda t) dt \right| < \varepsilon),$$

et donc que $\int_a^b f(t) \sin(\lambda t) dt$ tend vers 0 quand λ tend vers $+\infty$.

Correction de l'exercice 6 ▲

1. Soient m un réel strictement positif et, pour $t \in \mathbb{R}$, $f_m(t) = e^{mt}$. f_m est bien un élément de E et de plus,

$$\begin{aligned} \varphi(f_m) &= \frac{1}{m^2} (e^{mb} - e^{ma})(e^{-ma} - e^{-mb}) \\ &= \frac{1}{m^2} e^{m(a+b)/2} (e^{m(b-a)/2} + e^{-m(b-a)/2}) e^{-m(a+b)/2} (e^{m(b-a)/2} + e^{-m(b-a)/2}) \\ &= \frac{4 \operatorname{sh}^2(m(b-a)/2)}{m^2}. \end{aligned}$$

Cette expression tend vers $+\infty$ quand m tend vers $+\infty$ et $\varphi(E)$ n'est pas majoré.

2. Soit f continue et strictement positive sur $[a, b]$. L'inégalité de CAUCHY-SCHWARZ montre que :

$$\varphi(f) = \int_a^b (\sqrt{f(t)})^2 dt \int_a^b \left(\frac{1}{\sqrt{f(t)}} \right)^2 dt \geq \left(\int_a^b \sqrt{f(t)} \frac{1}{\sqrt{f(t)}} dt \right)^2 = (b-a)^2,$$

avec égalité si et seulement si la famille de fonctions $(\sqrt{f(t)}, \frac{1}{\sqrt{f(t)}})$ est liée ou encore si et seulement

si $\exists \lambda \in \mathbb{R}_+^* / \forall t \in [a, b], \sqrt{f(t)} = \lambda \frac{1}{\sqrt{f(t)}}$ ou enfin si et seulement si $\exists \lambda \in \mathbb{R}_+^* / \forall t \in [a, b], f(t) = \lambda$, c'est-à-dire que f est une constante strictement positive.

Tout ceci montre que $\varphi(E)$ admet un minimum égal à $(b-a)^2$ et obtenu pour toute fonction f qui est une constante strictement positive.

Correction de l'exercice 7 ▲

Pour t réel, posons $g(t) = \frac{t^2}{\sqrt{1+t^8}}$ puis, pour x réel, $G(x) = \int_1^x g(t) dt$. Puisque g est définie et continue sur \mathbb{R} , G est définie sur \mathbb{R} et de classe C^1 et $G' = g$ (G est la primitive de g sur \mathbb{R} qui s'annule en 1). Plus précisément, g est de classe C^∞ sur \mathbb{R} et donc G est de classe C^∞ sur \mathbb{R} .

Finalement, f est définie et de classe C^∞ sur $] -\infty, 1[\cup]1, +\infty[$.

Etude en 1.

Pour $x \neq 1$,

$$f(x) = \frac{G(x)}{x-1} = \frac{G(1) + G'(1)(x-1) + \frac{G''(1)}{2}(x-1)^2 + o((x-1)^2)}{x-1} = g(1) + g'(1)(x-1) + o((x-1)).$$

Donc, f admet en 1 un développement limité d'ordre 1. Par suite, f se prolonge par continuité en 1 en posant $f(1) = g(1) = \frac{1}{\sqrt{2}}$ puis le prolongement est dérivable en 1 et $f'(1) = \frac{1}{2}g'(1)$. Or, pour tout réel x , $g'(x) = 2x \frac{1}{\sqrt{1+x^8}} + x2 \cdot \left(-\frac{4x^7}{(1+x^8)\sqrt{1+x^8}}\right) = 2x \frac{1-x^8}{(1+x^8)\sqrt{1+x^8}}$ et $g'(1) = 0$. Donc, $f'(1) = 0$.

Dérivée. Variations

Pour $x \neq 1$, $f'(x) = \frac{G'(x)(x-1) - G(x)}{(x-1)^2}$.

$f'(x)$ est du signe de $h(x) = G'(x)(x-1) - G(x)$ dont la dérivée est $h'(x) = G''(x)(x-1) + G'(x) - G'(x) = (x-1)g'(x)$. h' est du signe de $2x(1-x^8)(x-1)$ ou encore du signe de $-2x(1+x)$. h est donc décroissante sur $] -\infty, -1]$ et sur $[0, +\infty[$ et croissante sur $[-1, 0]$.

Maintenant, quand x tend vers $+\infty$ (ou $-\infty$), $G'(x)(x-1) = g(x)(x-1) \sim x \frac{1}{x^2} = \frac{1}{x}$ et donc $G'(x)(x-1)$ tend vers 0. Ensuite, pour $x \geq 1$

$$0 \leq G(x) \leq \int_1^x \frac{t^2}{\sqrt{t^8}} dt = 1 - \frac{1}{x} \leq 1,$$

et G est bornée au voisinage de $+\infty$ (ou de $-\infty$). Comme G est croissante sur \mathbb{R} , G a une limite réelle en $+\infty$ et en $-\infty$. Cette limite est strictement positive en $+\infty$ et strictement négative en $-\infty$. Par suite, h a une limite strictement positive en $-\infty$ et une limite strictement négative en $+\infty$. Sur $[0, +\infty[$, h est décroissante et s'annule en 1. Donc, h est positive sur $[0, 1]$ et négative sur $[1, +\infty[$.

Ensuite,

$$h(-1) = \int_{-1}^1 \frac{t^2}{\sqrt{1+t^8}} dt - \sqrt{2} = 2 \int_0^1 \frac{t^2}{\sqrt{1+t^8}} dt - \sqrt{2} < 2 \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{2}} dt - \sqrt{2} = 0,$$

et $h(-1) < 0$. h s'annule donc, une et une seule fois sur $] -\infty, -1[$ en un certain réel α et une et une seule fois sur $] -1, 0[$ en un certain réel β . De plus, h est strictement positive sur $] -\infty, \alpha[$, strictement négative sur $] \alpha, \beta[$, strictement positive sur $] \beta, 1[$ et strictement négative sur $] 1, +\infty[$.

f est strictement croissante sur $] -\infty, \alpha]$, strictement décroissante sur $[\alpha, \beta]$, strictement croissante sur $[\beta, 1]$ et strictement décroissante sur $[1, +\infty[$.

Etude en l'infini.

En $+\infty$ ou $-\infty$, G a une limite réelle et donc f tend vers 0.

Correction de l'exercice 8 ▲

1. La fonction $t \mapsto e^{t^2}$ est de classe C^∞ sur \mathbb{R} . Donc, la fonction $x \mapsto \int_0^x e^{t^2} dt$ est de classe C^∞ sur \mathbb{R} et il en est de même de f .

La fonction $t \mapsto e^{t^2}$ est paire et donc la fonction $x \mapsto \int_0^x e^{t^2} dt$ est impaire. Comme la fonction $x \mapsto e^{-x^2}$ est paire, f est impaire.

2. Pour x réel, $f'(x) = -2xe^{-x^2} \int_0^x e^{t^2} dt + e^{-x^2} e^{x^2} = -2xf(x) + 1$.

3. Pour $x \geq 1$, une intégration par parties fournit :

$$\int_1^x e^{t^2} dt = \int_1^x \frac{1}{2t} \cdot 2te^{t^2} dt = \left[\frac{1}{2t} e^{t^2} \right]_1^x + \frac{1}{2} \int_1^x \frac{e^{t^2}}{t^2} dt = \frac{e^{x^2}}{2x} - \frac{e}{2} + \frac{1}{2} \int_1^x \frac{e^{t^2}}{t^2} dt,$$

et donc,

$$\begin{aligned} |1 - 2xf(x)| &= \left| 1 - 2xe^{-x^2} \int_1^x e^{t^2} dt - 2xe^{-x^2} \int_0^1 e^{t^2} dt \right| \\ &\leq xe^{-x^2} \int_1^x \frac{e^{t^2}}{t^2} dt + exe^{-x^2} + 2xe^{-x^2} \int_0^1 e^{t^2} dt. \end{aligned}$$

Les deux derniers termes tendent vers 0 quand x tend vers $+\infty$. Il reste le premier.

Pour $x \geq 2$,

$$\begin{aligned} 0 &\leq xe^{-x^2} \int_1^x \frac{e^{t^2}}{t^2} dt = xe^{-x^2} \int_1^{x-1} \frac{e^{t^2}}{t^2} dt + xe^{-x^2} \int_{x-1}^x \frac{e^{t^2}}{t^2} dt \\ &\leq x(x-1)e^{-x^2} \frac{e^{(x-1)^2}}{1^2} + xe^{-x^2} e^{x^2} \int_{x-1}^x \frac{1}{t^2} dt \\ &= x(x-1)e^{-2x+1} + x \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x} \right) = x(x-1)e^{-2x+1} + \frac{1}{x-1}. \end{aligned}$$

Cette dernière expression tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$. On en déduit que $xe^{-x^2} \int_1^x \frac{e^{t^2}}{t^2} dt$ tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$. Finalement, $1 - 2xf(x)$ tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$, ou encore, $f(x) \sim \frac{1}{2x}$.

4. Pour $x > 0$, $g(x) = \frac{e^{x^2}}{2x} (1 - 2xf(x)) = \frac{e^{x^2}}{2x} - \int_0^x e^{t^2} dt$ puis,

$$g'(x) = e^{x^2} - \frac{e^{x^2}}{2x^2} - e^{x^2} = -\frac{e^{x^2}}{2x^2} < 0.$$

g est donc strictement décroissante sur $]0, +\infty[$ et donc, g s'annule au plus une fois sur $]0, +\infty[$. Ensuite, $f'(1) = 1 - 2f(1) = 1 - 2e^{-1} \int_0^1 e^{t^2} dt$. Or, la méthode des rectangles fournit $\int_0^1 e^{t^2} dt = 1,44... > 1,35... = \frac{e}{2}$, et donc $f'(1) < 0$ puis $g(1) < 0$. Enfin, comme en 0^+ , $g(x) \sim \frac{1}{2x} f'(0) = \frac{1}{2x}$, $g(0^+) = +\infty$. Donc, g s'annule exactement une fois sur $]0, +\infty[$ en un certain réel x_0 de $]0, 1[$.

5. g est strictement positive sur $]0, x_0[$ et strictement négative sur $]x_0, +\infty[$. Il en est de même de f' . f est ainsi strictement croissante sur $[0, x_0]$ et strictement décroissante sur $[x_0, +\infty[$.

Correction de l'exercice 9 ▲

Pour $t \in [0, 1]$,

$$\begin{aligned} f^2(t) &= \left(\int_0^t f'(u) du \right)^2 \leq \left(\int_0^t f'^2(u) du \right) \left(\int_0^t 1 du \right) \quad (\text{CAUCHY - SCHWARZ}) \\ &= t \int_0^t f'^2(u) du \leq t \int_0^1 f'^2(u) du, \end{aligned}$$

et donc, par croissance de l'intégrale,

$$\int_0^1 f^2(t) dt \leq \int_0^1 t \left(\int_0^1 f'^2(u) du \right) dt = \left(\int_0^1 f'^2(u) du \right) \int_0^1 t dt = \frac{1}{2} \int_0^1 f'^2(u) du.$$

Correction de l'exercice 10 ▲

Pour x réel donné, la fonction $t \mapsto |t-x|f(t)$ est continue sur $[a, b]$ et donc $F(x)$ existe. Pour $x \leq a$, $F(x) = \int_a^b (t-x)f(t) dt = -x \int_a^b f(t) dt + \int_a^b t f(t) dt$. F est donc de classe C^1 sur $] -\infty, a]$ en tant que fonction affine et, pour $x < a$, $F'(x) = -\int_a^b f(t) dt$ (en particulier $F'_g(a) = -\int_a^b f(t) dt$).

De même, pour $x \geq b$, $F(x) = x \int_a^b f(t) dt - \int_a^b t f(t) dt$. F est donc de classe C^1 sur $[b, +\infty[$ en tant que fonction affine et, pour $x \geq b$, $F'(x) = \int_a^b f(t) dt$ (en particulier $F'_d(b) = \int_a^b f(t) dt$).

Enfin, si $a \leq x \leq b$,

$$F(x) = \int_a^x (x-t)f(t) dt + \int_x^b (t-x)f(t) dt = x \left(\int_a^x f(t) dt - \int_x^b f(t) dt \right) - \int_a^x t f(t) dt + \int_x^b t f(t) dt.$$

F est donc de classe C^1 sur $[a, b]$ et, pour $a \leq x \leq b$,

$$\begin{aligned} F'(x) &= \int_a^x f(t) dt - \int_x^b f(t) dt + x(f(x) - (-f(x))) - xf(x) - xf(x) \\ &= \int_a^x f(t) dt - \int_x^b f(t) dt. \end{aligned}$$

(et en particulier, $F'_d(a) = -\int_a^b f(t) dt = F'_g(a)$ et $F'_g(b) = \int_a^b f(t) dt = F'_d(b)$).

F est continue sur $] -\infty, a]$, $[a, b]$ et $[b, +\infty[$ et donc sur \mathbb{R} . F est de classe C^1 sur $] -\infty, a]$, $[a, b]$ et $[b, +\infty[$. De plus, $F'_g(a) = F'_d(a)$ et $F'_g(b) = F'_d(b)$. F est donc de classe C^1 sur \mathbb{R} .

Correction de l'exercice 11 ▲

Puisque f est continue et strictement croissante sur $[0, a]$, f réalise une bijection de $[0, a]$ sur $f([0, a]) = [0, f(a)]$. Soit $x \in [0, a]$. Pour $y \in [0, f(a)]$, posons $g(y) = \int_0^x f(t) dt + \int_0^y f^{-1}(t) dt - xy$. Puisque f est continue sur $[0, a]$, on sait que f^{-1} est continue sur $[0, f(a)]$ et donc la fonction $y \mapsto \int_0^y f^{-1}(t) dt$ est définie et de classe C^1 sur $[0, f(a)]$. Donc g est de classe C^1 sur $[0, f(a)]$ et pour $y \in [0, f(a)]$, $g'(y) = f^{-1}(y) - x$.

Or, f étant strictement croissante sur $[0, a]$, $g'(y) > 0 \Leftrightarrow f^{-1}(y) > x \Leftrightarrow y > f(x)$. Par suite, g' est strictement négative sur $[0, f(x)[$ et strictement positive sur $]f(x), f(a)]$, et g est strictement décroissante sur $[0, f(x)]$ et strictement croissante sur $[f(x), f(a)]$. g admet en $y = f(x)$ un minimum global égal à $g(f(x)) = \int_0^x f(t) dt + \int_0^{f(x)} f^{-1}(t) dt - xf(x)$. Notons $h(x)$ cette expression.

f est continue sur $[0, a]$. Donc, $x \mapsto \int_0^x f(t) dt$ est de classe C^1 sur $[0, a]$. Ensuite f est de classe C^1 sur $[0, a]$ à valeurs dans $[0, f(a)]$ et $y \mapsto \int_0^y f^{-1}(t) dt$ est de classe C^1 sur $[0, f(a)]$ (puisque f^{-1} est continue sur $[0, f(a)]$).

On en déduit que $x \mapsto \int_0^{f(x)} f^{-1}(t) dt$ est de classe C^1 sur $[0, a]$. Il en est de même de h et pour $x \in [0, a]$,

$$h'(x) = f(x) + f'(x)f^{-1}(f(x)) - f(x) - xf'(x) = 0.$$

h est donc constante sur $[0, a]$ et pour $x \in [0, a]$, $h(x) = h(0) = 0$.

On a montré que

$$\forall (x, y) \in [0, a] \times [0, f(a)], \int_0^x f(t) dt + \int_0^y f^{-1}(t) dt - xy \geq \int_0^x f(t) dt + \int_0^{f(x)} f^{-1}(t) dt - xf(x) = 0.$$

Correction de l'exercice 12 ▲

Soit, pour $x \in [0, 1]$, $g(x) = f(x) - x$. g est continue sur $[0, 1]$ et

$$\int_0^1 g(x) dx = \int_0^1 f(x) dx - \int_0^1 x dx = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0.$$

Si g est de signe constant, g étant de plus continue sur $[0, 1]$ et d'intégrale nulle sur $[0, 1]$, on sait que g est nulle. Sinon, g change de signe sur $[0, 1]$ et le théorème des valeurs intermédiaires montre que g s'annule au moins

une fois. Dans tous les cas, g s'annule au moins une fois sur $[0, 1]$ ou encore, f admet au moins un point fixe dans $[0, 1]$.

Correction de l'exercice 13 ▲

D'après l'inégalité de CAUCHY-SCHWARZ,

$$\left(\int_0^1 f(t) dt\right) \left(\int_0^1 g(t) dt\right) = \left(\int_0^1 (\sqrt{f(t)})^2 dt\right) \left(\int_0^1 (\sqrt{g(t)})^2 dt\right) \geq \left(\int_0^1 \sqrt{f(t)}\sqrt{g(t)} dt\right)^2 \geq \left(\int_0^1 1 dt\right)^2 = 1.$$

Correction de l'exercice 14 ▲

Soit $x \in [0, 1] \subset [0, \frac{\pi}{2}]$.

D'après la formule de TAYLOR-LAPLACE à l'ordre 1 fournit

$$\sin x = x - \int_0^x (x-t) \sin t dt \leq x,$$

car pour $t \in [0, x]$, $(x-t) \geq 0$ et pour $t \in [0, x] \subset [0, \frac{\pi}{2}]$, $\sin t \geq 0$.

De même, la formule de TAYLOR-LAPLACE à l'ordre 3 fournit

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \int_0^x \frac{(x-t)^3}{6} \sin t dt \geq x - \frac{x^3}{6}.$$

Donc, $\forall x \in [0, 1]$, $x - \frac{x^3}{6} \leq \sin x \leq x$.

Soient alors $n \geq 1$ et $k \in \{1, \dots, n\}$. On a $0 \leq \frac{1}{(n+k)^2} \leq 1$ et donc

$$\frac{1}{(n+k)^2} - \frac{1}{6(n+k)^6} \leq \sin \frac{1}{(n+k)^2} \leq \frac{1}{(n+k)^2},$$

puis en sommant

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{(n+k)^2} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{6(n+k)^6} \leq \sum_{k=1}^n \sin \frac{1}{(n+k)^2} \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{(n+k)^2}.$$

Maintenant, quand n tend vers $+\infty$,

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{(n+k)^2} = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{(1+\frac{k}{n})^2} = \frac{1}{n} \left(\int_0^1 \frac{1}{(1+x)^2} dx + o(1) \right) = \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

D'autre part,

$$0 \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{6(n+k)^6} \leq n \cdot \frac{1}{6n^6} = \frac{1}{6n^5},$$

et donc, $\sum_{k=1}^n \frac{1}{6(n+k)^6} = o\left(\frac{1}{n}\right)$.

On en déduit que $2n\left(\frac{1}{(n+k)^2} - \frac{1}{6(n+k)^6}\right) = 2n\left(\frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) = 1 + o(1)$ et que $2n\frac{1}{(n+k)^2} = 1 + o(1)$. Mais alors, d'après le théorème des gendarmes, $2n \sum_{k=1}^n \sin \frac{1}{(n+k)^2}$ tend vers 1 quand n tend vers $+\infty$, ou encore

$$\sum_{k=1}^n \sin \frac{1}{(n+k)^2} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{2n}.$$

Correction de l'exercice 15 ▲

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^n \sin \frac{k}{n^2} &= \operatorname{Im} \left(\sum_{k=1}^n e^{ik/n^2} \right) = \operatorname{Im} \left(e^{i/n^2} \frac{1 - e^{ni/n^2}}{1 - e^{i/n^2}} \right) = \operatorname{Im} \left(e^{i(1+\frac{n}{2}-\frac{1}{2})/n^2} \frac{\sin \frac{1}{2n}}{\sin \frac{1}{2n^2}} \right) = \frac{\sin \frac{n+1}{2n^2} \sin \frac{1}{2n}}{\sin \frac{1}{2n^2}} \\ &\underset{n \rightarrow +\infty}{=} \left(\frac{1}{2n} + \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \right) \left(\frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \right) \left(\frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^3}\right) \right)^{-1} \\ &= \left(1 + \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \right) \left(\frac{1}{2} + o\left(\frac{1}{n}\right) \right) \left(1 + o\left(\frac{1}{n}\right) \right)^{-1} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right),\end{aligned}$$

(on peut aussi partir de l'encadrement $\frac{k}{n^2} - \frac{k^3}{6n^6} \leq \sin \frac{k}{n^2} \leq \frac{k}{n^2}$).

Correction de l'exercice 16 ▲

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $0 \leq \arcsin x \leq (\frac{\pi}{2})^n$ et donc, par croissance de l'intégrale,

$$0 \leq u_n \leq \frac{1}{n!} \int_0^1 \left(\frac{\pi}{2}\right)^n dx = \frac{1}{n!} \left(\frac{\pi}{2}\right)^n.$$

D'après un théorème de croissances comparées, $\frac{1}{n!} \left(\frac{\pi}{2}\right)^n$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$. D'après le théorème des gendarmes, u_n tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$.

2. $0 \leq \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx \leq \int_0^1 \frac{x^n}{1+0} dx = \frac{1}{n+1}$. Comme $\frac{1}{n+1}$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$, $\int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$.
3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\left| \int_0^\pi \frac{n \sin x}{x+n} dx - \int_0^\pi \sin x dx \right| = \left| \int_0^\pi \frac{-x \sin x}{x+n} dx \right| \leq \int_0^\pi \left| \frac{-x \sin x}{x+n} \right| dx \leq \int_0^\pi \frac{\pi}{0+n} dx = \frac{\pi^2}{n}.$$

Or, $\frac{\pi^2}{n}$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$, et donc $\int_0^\pi \frac{n \sin x}{x+n} dx$ tend vers $\int_0^\pi \sin x dx = 2$ quand n tend vers $+\infty$.

Correction de l'exercice 17 ▲

Pour $t \in \mathbb{R}$, posons $g(t) = \frac{1}{\sqrt{t^4+t^2+1}}$. g est continue sur \mathbb{R} et admet donc des primitives sur \mathbb{R} . Soit G une primitive de g sur \mathbb{R} .

Définition, dérivabilité, dérivée.

Puisque g est continue sur \mathbb{R} , F est définie sur \mathbb{R} et pour tout réel x , $F(x) = G(2x) - G(x)$. G est de classe C^1 sur \mathbb{R} et donc F est de classe C^1 sur \mathbb{R} et pour tout réel x ,

$$F'(x) = 2G'(2x) - G'(x) = 2g(2x) - g(x) = \frac{2}{\sqrt{16x^4 - 4x^2 + 1}} - \frac{1}{\sqrt{x^4 + x^2 + 1}}.$$

Parité.

Soit $x \in \mathbb{R}$. En posant $t = -u$ et donc $dt = -du$, on obtient, en notant que g est paire

$$F(-x) = \int_{-x}^{-2x} g(t) dt = \int_x^{2x} g(-u) \cdot -du = - \int_x^{2x} g(u) du = -F(x).$$

F est donc impaire.

Variations.

Pour x réel,

$$\begin{aligned}\operatorname{sgn}(F'(x)) &= \operatorname{sgn}\left(\frac{2}{\sqrt{16x^4 - 4x^2 + 1}} - \frac{1}{\sqrt{x^4 + x^2 + 1}}\right) = \operatorname{sgn}(2\sqrt{x^4 + x^2 + 1} - \sqrt{16x^4 - 4x^2 + 1}) \\ &= \operatorname{sgn}(4(x^4 + x^2 + 1) - (16x^4 + 4x^2 + 1)) \text{ (par croissance de } t \mapsto t^2 \text{ sur } \mathbb{R}^+) \\ &= \operatorname{sgn}(-12x^4 + 3) = \operatorname{sgn}(1 - 4x^4) = \operatorname{sgn}(1 - 2x^2).\end{aligned}$$

F est donc strictement croissante sur $[-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}]$ et strictement décroissante sur $]-\infty, -\frac{1}{\sqrt{2}}]$ et sur $[\frac{1}{\sqrt{2}}, +\infty[$.

Etude en $+\infty$.

Pour $x > 0$, $0 \leq F(x) \leq \int_x^{2x} \frac{1}{\sqrt{t^4}} dt = \frac{2x-x}{x^2} = \frac{1}{x}$. Comme $\frac{1}{x}$ tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$, le théorème des gendarmes permet d'affirmer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 0$.

Graphes.

Correction de l'exercice 18 ▲

f est continue sur \mathbb{R} et admet donc des primitives sur \mathbb{R} . Soit F une primitive donnée de f sur \mathbb{R} . Notons $(*)$ la relation :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x)f(y) = F(x+y) - F(x-y).$$

Pour $x = y = 0$, on obtient $\forall x \in \mathbb{R}, f(0) = 0$. Puis $x = 0$ fournit $\forall y \in \mathbb{R}, F(y) - F(-y) = 0$. F est donc nécessairement paire et sa dérivée f est nécessairement impaire.

La fonction nulle est solution du problème. Soit f une éventuelle solution non nulle. Il existe alors un réel y_0 tel que $f(y_0) \neq 0$. Pour tout réel x , on a alors

$$f(x) = \frac{1}{f(y_0)} \int_{x-y_0}^{x+y_0} f(t) dt = \frac{1}{f(y_0)} (F(x+y_0) - F(x-y_0)).$$

f est continue sur \mathbb{R} et donc F est de classe C^1 sur \mathbb{R} . Il en est de même de la fonction $x \mapsto \frac{1}{f(y_0)} (F(x+y_0) - F(x-y_0))$ et donc de f . Mais alors, F est de classe C^2 sur \mathbb{R} et donc f l'est aussi (f est en fait de classe C^∞ par récurrence).

En dérivant $(*)$ à y fixé, on obtient $f'(x)f(y) = f(x+y) - f(x-y)$ (**), mais en dérivant à x fixé, on obtient aussi $f(x)f'(y) = f(x+y) + f(x-y)$ (***) . En redérivant (**) à y fixé, on obtient $f''(x)f(y) = f'(x+y) - f'(x-y)$ et en dérivant (***) à x fixé, on obtient $f(x)f''(y) = f'(x+y) - f'(x-y)$. Mais alors,

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f''(x)f(y) = f(x)f''(y),$$

et en particulier,

$$\forall x \in \mathbb{R}, f''(x) - \frac{f''(y_0)}{f(y_0)} f(x) = 0.$$

On a montré que si f est solution du problème, il existe un réel λ tel que f est solution de l'équation différentielle $y'' - \lambda y = 0$ (E).

- si $\lambda > 0$, en posant $k = \sqrt{\lambda}$, (E) s'écrit $y'' - k^2 y = 0$. Les solutions de (E) sont les fonctions de la forme $x \mapsto A \operatorname{sh}(kx) + B \operatorname{ch}(kx)$, $(A, B) \in \mathbb{R}^2$ et les solutions impaires de (E) sont les fonctions de la forme $x \mapsto A \operatorname{sh}(kx)$, $A \in \mathbb{R}$.

Réciproquement, soit k un réel strictement positif. Pour $A \in \mathbb{R}^*$ (on sait que la fonction nulle est solution) et $x \in \mathbb{R}$, posons $f(x) = A \operatorname{sh}(kx)$. Alors

$$\int_{x-y}^{x+y} f(t) dt = \frac{A}{k} (\operatorname{ch}(k(x+y)) - \operatorname{ch}(k(x-y))) \frac{2A}{k} \operatorname{sh}(kx) \operatorname{sh}(ky) = \frac{2}{kA} f(x)f(y).$$

f est solution si et seulement si $\frac{2}{kA} = 1$ ou encore $A = \frac{2}{k}$.

- si $\lambda < 0$, en posant $k = \sqrt{-\lambda}$, (E) s'écrit $y'' + k^2 y = 0$. Les solutions de (E) sont les fonctions de la forme $x \mapsto A \sin(kx) + B \cos(kx)$, $(A, B) \in \mathbb{R}^2$ et les solutions impaires de (E) sont les fonctions de la forme $x \mapsto A \sin(kx)$, $A \in \mathbb{R}$.

Réciproquement, soit k un réel strictement positif. Pour $A \in \mathbb{R}^*$ et $x \in \mathbb{R}$, posons $f(x) = A \sin(kx)$. Alors

$$\int_{x-y}^{x+y} f(t) dt = \frac{A}{k} (\cos(k(x-y)) - \cos(k(x+y))) = \frac{2A}{k} \sin(kx) \sin(ky) = \frac{2}{kA} f(x)f(y).$$

f est solution si et seulement si $\frac{2}{kA} = 1$ ou encore $A = \frac{2}{k}$.

- si $\lambda = 0$, (E) s'écrit $y'' = 0$. Les solutions de (E) sont les fonctions affines et les solutions impaires de (E) sont les fonctions de la forme $x \mapsto Ax$, $A \in \mathbb{R}$.
Réciproquement, si $f(x) = Ax$

$$\int_{x-y}^{x+y} f(t) dt = \frac{A}{2}((x+y)^2 - (x-y)^2) = 2Axy = \frac{2}{A}f(x)f(y),$$

et f est solution si et seulement si $A = 2$.

Les solutions sont la fonction nulle, la fonction $x \mapsto 2x$, les fonctions $x \mapsto \frac{2}{k} \sin(kx)$, $k > 0$ et les fonctions $x \mapsto \frac{2}{k} \operatorname{sh}(kx)$, $k > 0$.

Correction de l'exercice 19 ▲

Soit F une primitive de f sur $[a, b]$. F est de classe C^2 sur le segment $[a, b]$ et l'inégalité de TAYLOR-LAGRANGE permet d'écrire

$$\left| F\left(\frac{a+b}{2}\right) - F(a) - \frac{b-a}{2} F'(a) \right| \leq \frac{1}{2} \frac{(b-a)^2}{4} \sup\{|F''(x)|, x \in [a, b]\}.$$

Mais $F'(a) = f(a) = 0$ et $F'' = f'$. Donc,

$$\left| F\left(\frac{a+b}{2}\right) - F(a) \right| \leq \frac{1}{2} M \frac{(b-a)^2}{4}.$$

De même, puisque $F'(b) = f(b) = 0$,

$$\left| F\left(\frac{a+b}{2}\right) - F(b) \right| \leq \frac{1}{2} M \frac{(b-a)^2}{4}.$$

Mais alors,

$$\left| \int_a^b f(t) dt \right| = |F(b) - F(a)| \leq |F(b) - F\left(\frac{a+b}{2}\right)| + \left| F\left(\frac{a+b}{2}\right) - F(a) \right| \leq \frac{1}{2} M \frac{(b-a)^2}{4} + \frac{1}{2} M \frac{(b-a)^2}{4} = M \frac{(b-a)^2}{4}.$$

Correction de l'exercice 20 ▲

Si $\int_0^1 f(t) dt \geq 0$,

$$\begin{aligned} \left| \int_0^1 f(t) dt \right| &= \int_0^1 |f(t)| dt \Leftrightarrow \int_0^1 f(t) dt = \int_0^1 |f(t)| dt \Leftrightarrow \int_0^1 (|f(t)| - f(t)) dt = 0 \\ &\Leftrightarrow |f| - f = 0 \text{ (fonction continue positive d'intégrale nulle)} \\ &\Leftrightarrow f = |f| \Leftrightarrow f \geq 0. \end{aligned}$$

Si $\int_0^1 f(t) dt \leq 0$, alors $\int_0^1 -f(t) dt \geq 0$ et d'après ce qui précède, f est solution si et seulement si $-f = |-f|$ ou encore $f \leq 0$.

En résumé, f est solution si et seulement si f est de signe constant sur $[0, 1]$.

Correction de l'exercice 21 ▲

1. Si $x > 1$, $[x, x^2] \subset]1, +\infty[$ et $t \mapsto \frac{1}{\ln t}$ est continue sur $]1, +\infty[$. Par suite, $\int_x^{x^2} \frac{dt}{\ln t}$ existe. De plus,

$$x \int_x^{x^2} \frac{1}{t \ln t} dt \leq \int_x^{x^2} \frac{1}{\ln t} dt = \int_x^{x^2} t \frac{1}{t \ln t} dt \leq x^2 \int_x^{x^2} \frac{1}{t \ln t} dt.$$

Mais,

$$\int_x^{x^2} \frac{1}{t \ln t} dt = [\ln |\ln t|]_x^{x^2} = \ln |\ln(x^2)| - \ln |\ln(x)| = \ln \left| \frac{2 \ln x}{\ln x} \right| = \ln 2.$$

Donc, $\forall x > 1$, $x \ln 2 \leq F(x) \leq x^2 \ln 2$. On en déduit que $\lim_{x \rightarrow 1, x > 1} F(x) = \ln 2$.

Si $0 < x < 1$, on a $x^2 < x$ puis $[x^2, x] \subset]0, 1[$. Donc, $t \mapsto \frac{1}{\ln t}$ est continue sur $[x^2, x]$ et $F(x) = -\int_{x^2}^x \frac{1}{\ln t} dt$ existe.

Pour $t \in [x^2, x]$, on a $t \ln t < 0$ et $x^2 \leq t \leq x$. Par suite,

$$x \frac{1}{t \ln t} \leq t \frac{1}{t \ln t} = \frac{1}{\ln t} \leq x^2 \frac{1}{t \ln t},$$

puis, $\int_{x^2}^x x \frac{1}{t \ln t} dt \leq \int_{x^2}^x \frac{1}{\ln t} dt \leq \int_{x^2}^x x^2 \frac{1}{t \ln t} dt$, et finalement,

$$x^2 \ln 2 = \int_x^{x^2} x^2 \frac{1}{t \ln t} dt \leq F(x) = \int_x^{x^2} \frac{1}{\ln t} dt \leq \int_x^{x^2} x \frac{1}{t \ln t} dt = x \ln 2.$$

On obtient alors $\lim_{x \rightarrow 1, x < 1} F(x) = \ln 2$ et finalement, $\lim_{x \rightarrow 1} F(x) = \ln 2$. On en déduit que F se prolonge par continuité en 1 en posant $F(1) = \ln 2$ (on note encore F le prolongement obtenu).

2. On a déjà vu que F est définie (au moins) sur $]0, +\infty[$ (F désignant le prolongement). Il ne paraît pas encore possible de donner un sens à $F(0)$ et encore moins à $F(x)$ quand $x < 0$, car alors $[x, 0]$ est un intervalle de longueur non nulle contenu dans $[x, x^2]$, sur lequel la fonction $t \mapsto \frac{1}{\ln t}$ n'est même pas définie.

$$D_F =]0, +\infty[.$$

Pour $t \in]0, 1[\cup]1, +\infty[$, posons $g(t) = \frac{1}{\ln t}$ et notons G une primitive de g sur cet ensemble. Alors, pour x dans $]0, 1[\cup]1, +\infty[$, $F(x) = G(x^2) - G(x)$. On en déduit que F est dérivable (et même de classe C^1) sur $]0, 1[\cup]1, +\infty[$ et que pour x dans $]0, 1[\cup]1, +\infty[$,

$$F'(x) = 2xg(x^2) - g(x) = \frac{2x}{\ln(x^2)} - \frac{1}{\ln x} = \frac{x-1}{\ln x}.$$

Maintenant, quand x tend vers 1, $\frac{x-1}{\ln x}$ tend vers 1. Ainsi, F est continue sur $]0, +\infty[$, de classe C^1 sur $]0, 1[\cup]1, +\infty[$ et F' a une limite réelle en 1. Un théorème classique d'analyse permet d'affirmer que F est de classe C^1 sur D_F et en particulier, dérivable en 1 avec $F'(1) = 1$.

$$\forall x \in]0, +\infty[, F'(x) = \begin{cases} \frac{x-1}{\ln x} & \text{si } x \neq 1 \\ 1 & \text{si } x = 1. \end{cases}$$

Si $x > 1$, $x-1 > 0$ et $\ln x > 0$ et si $0 < x < 1$, $x-1 < 0$ et $\ln x < 0$. Dans tous les cas ($0 < x < 1$, $x = 1$, $x > 1$) $F'(x) > 0$. F est strictement croissante sur $]0, +\infty[$.

On a vu que $\forall x > 1$, $F(x) > x \ln 2$ et donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = +\infty$. Plus précisément, pour $x > 1$,

$$\frac{F(x)}{x} = \frac{1}{x} \int_x^{x^2} \frac{1}{\ln t} dt \geq \frac{x^2 - x}{x \ln x} = \frac{x-1}{\ln x}.$$

Comme $\frac{x-1}{\ln x}$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$, on en déduit que $\frac{F(x)}{x}$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$ et donc que la courbe représentative de F admet en $+\infty$ une branche parabolique de direction (Oy) .

Pour $x \in]0, 1[$ et $t \in [x^2, x]$, on a $2 \ln x = \ln(x^2) \leq \ln t \leq \ln x < 0$ et donc $\frac{1}{\ln x} \leq \frac{1}{\ln t} \leq \frac{1}{2 \ln x}$, puis $(x-x^2) \frac{1}{\ln x} \leq \int_{x^2}^x \frac{1}{\ln t} dt \leq (x-x^2) \frac{1}{2 \ln x}$ et finalement,

$$\forall x \in]0, 1[, \frac{x-x^2}{-2 \ln x} \leq F(x) \leq \frac{x-x^2}{-\ln x}.$$

On obtient déjà $\lim_{x \rightarrow 0} F(x) = 0$. On peut prolonger F par continuité en 0 en posant $F(0) = 0$. Ensuite, $\frac{F(x)-F(0)}{x-0} = \frac{F(x)}{x}$ est compris entre $\frac{1-x}{-2 \ln x}$ et $\frac{1-x}{-\ln x}$. Comme ces deux expressions tendent vers 0 quand x tend vers 0, on en déduit que $\frac{F(x)-F(0)}{x-0}$ tend vers 0 quand x tend vers 0. F est donc dérivable en 0 et $F'(0) = 0$.

Correction de l'exercice 22 ▲

1. f est continue sur \mathbb{R}^* en tant que quotient de fonctions continues sur \mathbb{R}^* dont le dénominateur ne s'annule pas sur \mathbb{R}^* . D'autre part, quand t tend vers 0, $f(t) \sim \frac{t^2}{t} = t$ et $\lim_{t \rightarrow 0, t \neq 0} f(t) = 0 = f(0)$. Ainsi, f est continue en 0 et donc sur \mathbb{R} .
2. f est continue sur \mathbb{R} et donc F est définie et de classe C^1 sur \mathbb{R} . De plus, $F' = f$ est positive sur $[0, +\infty[$, de sorte que F est croissante sur $[0, +\infty[$. On en déduit que F admet en $+\infty$ une limite dans $]-\infty, +\infty]$. Vérifions alors que F est majorée sur \mathbb{R} . On constate que $t^2 \cdot \frac{t^2}{e^t - 1}$ tend vers 0 quand t tend vers $+\infty$, d'après un théorème de croissances comparées. Par suite, il existe un réel A tel que pour $t \geq A$, $0 \leq t^2 \cdot \frac{t^2}{e^t - 1} \leq 1$ ou encore $0 \leq f(t) \leq \frac{1}{t^2}$. Pour $x \geq A$, on a alors

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_0^A f(t) dt + \int_A^x \frac{t^2}{e^t - 1} dt \leq \int_0^A f(t) dt + \int_A^x \frac{1}{t^2} dt \\ &= \int_0^A f(t) dt + \frac{1}{A} - \frac{1}{x} \leq \int_0^A f(t) dt + \frac{1}{A}. \end{aligned}$$

F est croissante et majorée et donc a une limite réelle ℓ quand n tend vers $+\infty$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour $t \in]0, +\infty[$,

$$\begin{aligned} f(t) &= t^2 e^{-t} \frac{1}{1 - e^{-t}} = t^2 e^{-t} \left(\sum_{k=0}^{n-1} (e^{-t})^k + \frac{(e^{-t})^n}{1 - e^{-t}} \right) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} t^2 e^{-(k+1)t} + \frac{t^2 e^{-t}}{1 - e^{-t}} e^{-nt} = \sum_{k=1}^n t^2 e^{-kt} + f_n(t) (*), \end{aligned}$$

où $f_n(t) = \frac{t^2 e^{-t}}{1 - e^{-t}} e^{-nt}$ pour $t > 0$. En posant de plus $f_n(0) = 0$, d'une part, f_n est continue sur $[0, +\infty[$ et d'autre part, l'égalité (*) reste vraie quand $t = 0$. En intégrant, on obtient

$$\forall x \in [0, +\infty[, \forall n \in \mathbb{N}^*, F(x) = \sum_{k=1}^n \int_0^x t^2 e^{-kt} dt + \int_0^x f_n(t) dt (**).$$

Soient alors $k \in \mathbb{N}^*$ et $x \in [0, +\infty[$. Deux intégrations par parties fournissent :

$$\begin{aligned} \int_0^x t^2 e^{-kt} dt &= \left[-\frac{1}{k} t^2 e^{-kt} \right]_0^x + \frac{2}{k} \int_0^x t e^{-kt} dt = -\frac{1}{k} x^2 e^{-kx} + \frac{2}{k} \left(\left[-\frac{1}{k} t e^{-kt} \right]_0^x + \frac{1}{k} \int_0^x e^{-kt} dt \right) \\ &= -\frac{1}{k} x^2 e^{-kx} - \frac{2}{k^2} x e^{-kx} - \frac{2}{k^3} e^{-kx} + \frac{2}{k^3}. \end{aligned}$$

Puisque $k > 0$, quand x tend vers $+\infty$, on obtient $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^x t^2 e^{-kt} dt = \frac{2}{k^3}$. On fait alors tendre x vers $+\infty$ dans (**) et on obtient

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \ell - 2 \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^x f_n(t) dt (***)$$

Vérifions enfin que $\lim_{n \rightarrow +\infty} (\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^x f_n(t) dt) = 0$. La fonction $t \mapsto \frac{t^2 e^{-t}}{1 - e^{-t}}$ est continue sur $]0, +\infty[$, se prolonge par continuité en 0 et a une limite réelle en $+\infty$. On en déduit que cette fonction est bornée sur $]0, +\infty[$. Soit M un majorant de cette fonction sur $]0, +\infty[$. Pour $x \in [0, +\infty[$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on a alors

$$0 \leq \int_0^x f_n(t) dt \leq M \int_0^x e^{-nt} dt = \frac{M}{n} (1 - e^{-nx}).$$

A $n \in \mathbb{N}^*$ fixé, on passe à la limite quand n tend vers $+\infty$ et on obtient

$$0 \leq \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^x f_n(t) dt \leq \frac{M}{n},$$

puis on passe à la limite quand n tend vers $+\infty$ et on obtient

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^x f_n(t) dt \right) = 0.$$

Par passage à la limite quand x tend vers $+\infty$ puis quand n tend vers $+\infty$ dans $(***)$, on obtient enfin

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^x \frac{t^2}{e^t - 1} dt = 2 \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^3}.$$
