DEVOIR MAISON N°4

(Temps : 3 heures)

Dans tout le problème :

— Pour tout entier naturel n, on note $\mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n

— On identifie le polynôme $P = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k X^k$ de $\mathbb{R}_n[X]$ avec la fonction polynomiale $x \mapsto \sum_{k=0}^{n} \lambda_k x^k$, avec la convention $0^0 = 1$

Dans la partie I, on étudie le cas des polynômes de Bernstein. La partie II est consacrée aux polynômes d'interpolation de Lagrange.

Partie I : Quelques propriétés des polynômes de Bernstein

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$ et tout entier $k \in [\![0, n]\!]$, on note $B_{n,k}$ le polynôme de $\mathbb{R}_n[X]$ défini par :

$$B_{n,k}(X) = \binom{n}{k} X^k (1 - X)^{n-k}$$

On pose pour tout $k \in [\![0, n]\!],\ A_k = X^k$ et on note $\mathcal{C}_n = (A_0, A_1, \dots, A_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$.
Soit T_n l'application définie sur $\mathbb{R}_n[X]$ telle que :

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X],\ (T_n(P))(X) = \sum_{k=0}^{n} P\left(\frac{k}{n}\right) B_{n,k}(X)$$

1. Dans cette question uniquement, on choisit $n = 2$.
   (a) Déterminer la matrice K_2 de la famille $(B_{2,0}, B_{2,1}, B_{2,2})$ dans la base $\mathcal{C}_2$.
   (b) En déduire que la famille $(B_{2,0}, B_{2,1}, B_{2,2})$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.
   (c) Calculer $T_2(A_0), T_2(A_1)$ et $T_2(A_2)$; déterminer la matrice H_2 de T_2 dans la base $\mathcal{C}_2$.
   (d) Donner les racines du polynôme $P_{T_2}(X) = \det(XI_3 - H_2)$.
   (e) Donner la dimension et une base pour chaque sous-espaces vectoriels suivants :
   $E_1 = \ker(T_2 - id)$ et $E_{\frac{1}{2}} = \ker\left(T_2 - \frac{1}{2}id\right)$
   (*ce sont les sous-espaces propres associés aux valeurs propres trouvées à la question précédente*)
   Attention : $E_1 \subset \mathbb{R}[X]$ et $E_{\frac{1}{2}} \subset \mathbb{R}[X]$
2. *On revient au cas général où n est un entier supérieur ou égal à 1.*
   (a) Montrer que la famille $(B_{n,0}, B_{n,1}, \dots, B_{n,n})$ est libre ; en déduire que cette famille est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.
   (b) Montrer que l'application T_n est un automorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
   (c) Calculer $T_n(A_0)$ et montrer que $T_n(A_1) = A_1$.
   (d) Montrer que pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, le degré du polynôme $T_n(A_k)$ est égal à k.
   Pour établir ce résultat, on pourra utiliser la propriété suivante que l'on ne demande pas de démontrer :
   $$\forall k \in [\![0, n-1]\!], (T_n(A_{k+1}))(X) = \frac{1}{n} X(1 - X)(T_n(A_k))'(X) + X(T_n(A_k))(X)$$
   où $(T_n(A_k))'$ est le polynôme dérivé de $T_n(A_k)$.
   (e) Pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, soit α_k le coefficient de X^k du polynôme $T_n(A_k)$. Calculer α_k en fonction de k et n et en déduire $\det(T_n)$.

I Partie II : Les polynômes d'interpolation de Lagrange

3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $x_0, x_1, \ldots, x_n$ des réels deux à deux distincts. Soit Φ l'application de $\mathbb{R}_n[X]$ dans $\mathbb{R}^{n+1}$ telle que :
$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X], \Phi(P) = (P(x_0), P(x_1), \ldots, P(x_n))$$
   (a) Montrer que l'application Φ est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

   (b) On note $(e_0, e_1, \ldots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^{n+1}$ avec $e_0 = (1, 0, 0, \ldots, 0)$, $e_1 = (0, 1, 0, \ldots, 0), \ldots\ldots, e_n = (0, 0, 0, \ldots, 1)$. Pour tout $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$, on note L_i le polynôme de $\mathbb{R}_n[X]$ tel que $\Phi(L_i) = e_i$.
   Pour tout $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$, donner l'expression de L_i en fonction des réels $x_0, x_1, \ldots, x_n$.

   (c) Soit Ψ l'application définie sur $(\mathbb{R}_n[X])^2$ par : $\forall (P, Q) \in (\mathbb{R}_n[X])^2, \Psi(P, Q) = \sum_{k=0}^{n} P(x_k) Q(x_k)$.
   Vérifier que Ψ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$. On munit alors $\mathbb{R}_n[X]$ de ce produit scalaire.

   (d) Montrer que $(L_0, L_1, \ldots, L_n)$ est une base orthonormée de $\mathbb{R}_n[X]$.

   (e) Expliciter la matrice A de passage de la base $(L_0, L_1, \ldots, L_n)$ à la base canonique $\mathcal{C}_n$ de $\mathbb{R}_n[X]$. Donner son déterminant en fonction des réels $x_0, x_1, \ldots, x_n$.

   (f) Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$ à valeurs réelles.
   Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe un unique polynôme de $\mathbb{R}_n[X]$, noté P_f, vérifiant les relations :
$$P_f(x_0) = f(x_0), P_f(x_1) = f(x_1), \ldots, P_f(x_n) = f(x_n)$$
   On dit que P_f est le polynôme d'interpolation de la fonction f aux points $x_0, x_1, \ldots, x_n$.
   Exprimer P_f dans la base $(L_0, L_1, \ldots, L_n)$.

4. Soit $x_0, x_1, \ldots, x_n$ des réels appartenant à un intervalle $[a, b]$ tels que $a \leqslant x_0 < x_1 < \cdots < x_n \leqslant b$.
Soit f une fonction de classe C^{n+1} sur $[a, b]$ et $\bar{x}$ un réel de $[a, b]$ différent de $x_0, x_1, \ldots, x_n$.
On note P_f le polynôme d'interpolation de la fonction f aux points $x_0, x_1, \ldots, x_n$ et Q_f le polynôme d'interpolation de la fonction f aux points $x_0, x_1, \ldots, x_n, \bar{x}$. On pose : $w(X) = \prod_{k=0}^{n} (X - x_k)$.

   (a) Établir l'existence d'un réel δ tel que pour tout $t \in [a, b]$, on a :
$$Q_f(t) - P_f(t) = \delta \times w(t)$$
   (*indication : quel est le degré du polynôme* Q_f ?)

   (b) Soit h la fonction définie sur $[a, b]$ par : $\forall t \in [a, b], h(t) = f(t) - Q_f(t)$.
   Montrer que la fonction h s'annule en les $(n+2)$ points $\bar{x}, x_0, x_1, \ldots, x_n$ et en déduire l'existence d'un réel $\theta \in]a, b[$ tel que $h^{(n+1)}(\theta) = 0$.

   (c) Établir l'égalité :
$$f(\bar{x}) - P_f(\bar{x}) = \frac{1}{(n+1)!} \times f^{(n+1)}(\theta) \times w(\bar{x})$$
   (d) En déduire que pour tout $t \in [a, b]$, on a :
$$|f(t) - P_f(t)| \leqslant \frac{1}{(n+1)!} \times |w(t)| \times \sup_{[a,b]} \left| f^{(n+1)} \right|$$