COLLE 22 = Variables aléatoires et calculs différentiels

Variables aléatoires :

Exercice 1.
On dispose de n urnes numérotées de 1 à n, l'urne numérotée k comprenant k boules numérotées de 1 à k. On choisit d'abord une urne, puis une boule dans cette urne, et on note Y la variable aléatoire du numéro obtenu. Quelle est la loi de Y ? Son espérance ?

Exercice 2.
On jette 3600 fois un dé équilibré. Minorer la probabilité que le nombre d'apparitions du numéro 1 soit compris entre 480 et 720.

Exercice 3.
Soit X une variable aléatoire réelle définie sur un espace probabilisé fini. Démontrer que

$$E(X)^2 \leq E(X^2)$$

Exercice 4.
Soit X une variable aléatoire prenant ses valeurs dans $\{0, 1, ..., N\}$. Démontrer que

$$E(X) = \sum_{n=0}^{N-1} P(X > n)$$

Exercice 5.

Soit X, Y deux variables aléatoires indépendantes suivant la loi uniforme sur $\{1, ..., n\}$.

1. Déterminer $P(X = Y)$.
2. Déterminer $P(X \geq Y)$.
3. Déterminer la loi de $X + Y$.

Exercice 6.

Une entreprise souhaite recrute un cadre. n personnes se présentent pour le poste. Chacun d'entre eux passe à tour de rôle un test, et le premier qui réussit le test est engagé. La probabilité de réussir le test est $p \in]0, 1[$. On pose également $q = 1 - p$. On définit la variable aléatoire X par $X = k$ si le k-ième candidat qui réussit le test est engagé, et $X = n + 1$ si personne n'est engagé.

1. Déterminer la loi de X.
2. En dérivant la fonction $x \mapsto \sum_{k=0}^{n} x^k$.
   En déduire l'espérance de X.
3. Quelle est la valeur minimale de p pour avoir plus d'une chance sur deux de recruter l'un des candidats ?

Fonctions à plusieurs variables :

Exercice 7.

Etudier l'existence et la valeur éventuelle des limites suivantes :

1. $\frac{xy}{x^2+y^2}$ en $(0, 0)$
2. $\frac{x^3+y^3}{x^2+y^4}$ en $(0, 0)$
3. $\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{|x|\sqrt{|y|}+|y|\sqrt{|x|}}$ en $(0, 0)$
4. $\frac{x^2y^2}{x^2+y^2}$ en $(0, 0)$
5. $\frac{1-\cos\sqrt{|xy|}}{|y|}$ en $(0, 0)$

Exercice 8.

Soit $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y) & \mapsto & \left\{ \begin{array}{l} 0 \text{ si } y = 0 \\ y^2 \sin\left(\frac{x}{y}\right) \text{ si } y \neq 0 \end{array} \right. \end{array}$.

1. Etudier la continuité de f.
2. Etudier l'existence et la valeur éventuelle de dérivées partielles d'ordre 1 sur $\mathbb{R}^2$.
3. Étudier $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ en $(0, 0)$.

Exercice 9.

Pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on pose

$$f(x, y) = \left\{ \begin{array}{l} \frac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2} \text{ si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 \text{ si } (x, y) = (0, 0) \end{array} \right. .$$

Montrer que f est de classe C^1 (au moins) sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 10.

Soit a un réel strictement positif donné. Trouver le minimum de
$f(x, y) = \sqrt{x^2 + (y - a)^2} + \sqrt{y^2 + (x - a)^2}$.

Exercice 11.

Trouver les extrema locaux de

1. $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x, y) & \mapsto & x^2 + xy + y^2 + 2x + 3y \end{array}$
2. $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x, y) & \mapsto & x^4 + y^4 - 4xy \end{array}$