Examen n°1

(Temps : 4 heures)

1. La présentation, la lisibilité, l'orthographe, **la qualité de la rédaction et la précision des raisonnements** entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Autrement dit, toute rédaction "fumeuse" ou toute justification bancale n'apportera qu'une faible quantité de points.
2. Les étudiants sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs. **Les réponses doivent toutes être soigneusement justifiées**
3. Les calculatrices sont interdites.

Exercice 1. *Autour de la suite de Fibonacci*
On définit la suite de Fibonacci $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ et la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$$

1. Déterminer la liste des 10 premiers nombres de Fibonacci (de F_1 à F_{10}).
2. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 6 \Rightarrow F_n > n$.
   Que peut-on en déduire pour la suite $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$?
3. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ n \geq 2 \Rightarrow F_n < F_{n+1} \leq 2F_n$.
4. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum\limits_{k=1}^{n} F_k = F_{n+2} - 1$
5. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum\limits_{k=1}^{n} F_k^2 = F_n F_{n+1}$
6. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum\limits_{k=1}^{2n-1} F_k F_{k+1} = F_{2n}^2$
7. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, F_{2n} = F_{n+1}^2 - F_{n-1}^2$ et $F_{2n+1} = F_{n+1}^2 + F_n^2$.
8. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{2n-k}{k} = F_{2n+1}$ et $\sum\limits_{k=0}^{n} \binom{2n+1-k}{k} = F_{2n+2}$
9. Montrer que si l'on pose : $\varphi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$: $\forall n \in \mathbb{N}^*, F_{n-1} + \varphi F_n = \varphi^n$.
10. Montrer que si l'on pose : $\overline{\varphi} = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$: $\forall n \in \mathbb{N}, F_n = \dfrac{\varphi^n - \overline{\varphi}^n}{\varphi - \overline{\varphi}}$.

Exercice 2. *Des petites questions*

1. Soit A, B et C trois parties d'un ensemble E
   (a) Montrer que $A \cup B = A \cap C \iff B \subset A \subset C$
   (b) Montrer que $B \subset A \iff \forall X \in \mathcal{P}(E), (A \cap X) \cup B = A \cap (X \cup B)$
2. Résoudre l'équation suivante :
   $$\sqrt{x+1} - \sqrt{2x+3} = 1$$
3. (a) Montrer que toute fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ peut s'écrire comme la somme d'une fonction polynomiale de degré au plus 2 et d'une fonction s'annulant en -1, 0 et 1. Y a-t-il unicité ?
   (b) Montrer que toute fonction continue $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ est la somme d'une fonction linéaire $(x \longmapsto ax)$ et d'une fonction d'intégrale nulle sur $[0,1]$. Y a-t-il unicité ?
4. Démontrer que si vous rangez $(n+1)$ paires de chaussettes dans n tiroirs distincts, alors il y a au moins un tiroir contenant au moins 2 paires de chaussettes.
5. (a) Montrer qu'il existe une infinité de nombres premiers.
   (b) Montrer qu'il existe une infinité de nombres premiers de la forme $4k+3$.
   (c) Montrer qu'il existe une infinité de nombres premiers de la forme $6k+5$.

Exercice 3. *$\mathbb{N}$ et $\mathbb{N}^2$ sont en bijection*

1. Construire une bijection entre $\mathbb{N}$ et $\mathbb{N}^*$
2. Construire une bijection entre $\mathbb{N}$ et $3\mathbb{N} = \{n \in \mathbb{N}, 3 \text{ divise } n\}$
3. Construire une bijection entre $\mathbb{N}$ et $\mathbb{Z}$
4. Le but de cette question est de montrer qu'il existe une bijection entre $\mathbb{N}$ et $\mathbb{N}^2$. Soit $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}^2$ l'application définie de la manière suivante :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \forall n \in [[\frac{k(k+1)}{2}, \frac{(k+1)(k+2)}{2} - 1|], f(n) = \left(n - \frac{k(k+1)}{2}, k - n + \frac{k(k+1)}{2}\right)$$

(a) Calculer $f(i)$ pour tout i compris entre 0 et 10 et les tracer sur un quadrillage.

(b) Montrer que f est bien définie sur $\mathbb{N}$ (autrement dit, tout entier n dans $\mathbb{N}$ a une image et il n'y a pas plusieurs images possibles pour n)

(c) Montrer que f est injective

(d) En résolvant l'équation $f(n) = (p, q)$ pour $(p, q) \in \mathbb{Z}^2$, montrer que f est surjective. *Indication :* penser à $p + q$

(e) Conclure

Exercice 4. Existe t-il une bijection entre E et $\mathcal{P}(E)$?

Soit E un ensemble. On rappelle que $\mathcal{P}(E)$ est l'ensemble des sous-ensembles de E. Par exemple, si $E = \{1, 2, 3\}$, $\mathcal{P}(E) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$. C'est donc un ensemble d'ensembles.

1. Démontrer qu'il existe une surjection de $\mathcal{P}(E)$ sur E
2. Soit $f : E \longrightarrow \mathcal{P}(E)$ une application et $A = \{x \in E | x \notin f(x)\}$. Prouver que $A \notin f(E)$
   Indication : On pourra raisonner par l'absurde en considérant un antécédent x de A et en discutant selon que $x \in A$ ou $x \notin A$.
3. Est-ce qu'il peut exister une bijection entre E et $\mathcal{P}(E)$?