Exercice 1 - Majorée par une fonction affine - avec détails

Soit $F:[0,+\infty[\to\mathbb{R}$ une application uniformément continue. On se propose de démontrer qu'il existe deux réels a et b tels que, pour tout $x\in[0,+\infty[$, on ait $F(x)\leq ax+b$. Pour cela, on commence par fixer $\eta_1>0$ tel que

$$\forall (x,y)\in([0,+\infty[)^2,\ \big(|x-y|<\eta_1\implies |F(x)-F(y)|\leq 1\big).$$

On fixe également $x_0\in[0,+\infty[$.

1. Soit n_0 le plus petit entier tel que $\frac{x_0}{n_0}\leq\eta_1$; justifier l'existence de n_0 et démontrer que $n_0\leq\frac{x_0}{\eta_1}+1$.
2. Montrer que
$$|F(x)-F(x_0)|\leq\sum_{k=0}^{n_0-1}\left|F\left(\frac{(k+1)x_0}{n_0}\right)-F\left(\frac{kx_0}{n_0}\right)\right|.$$
3. Conclure.
4. La fonction exponentielle est-elle uniformément continue sur $[0,+\infty[$?

Exercice 2 - Majorée par une fonction affine

Soit $f:[0,+\infty[\to\mathbb{R}$ une fonction uniformément continue. Montrer qu'il existe deux réels a et b tels que $|f(x)|\leq ax+b$ pour tout $x\geq 0$.

Exercice 3 - Une fonction définie "par morceaux"

Soit $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ deux fonctions continues. On définit une fonction $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ par

$$h(x)=\begin{cases} f(x) & \text{si } x\in\mathbb{Q}\\ g(x) & \text{si } x\in\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}.\end{cases}$$

Démontrer que h est continue en $x_0\in\mathbb{R}$ si et seulement si $f(x_0)=g(x_0)$.

Cette feuille d'exercices a été conçue à l'aide du site https://www.bibmath.net