COLLE 21 = PROBABILITÉ ET VARIABLES ALÉATOIRES

Connaître son cours :

1. Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbf{P})$ un espace probabilisé fini, A et B deux éléments de $\mathcal{P}(\Omega)$ de probabilité non nulle. Donner et démontrer la formule de Bayes.
2. Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbf{P})$ un espace probabilisé fini et $(A_k)_{k\leq n}$ une famille d'événements vérifiant $\mathbf{P}\left(\bigcap_{k\leq n} A_k\right) > 0$. Donner et démontrer la formule des probabilités composées.
3. Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbf{P})$ un espace probabilisé fini et $(A_1, \ldots, A_n)_{k\leq n}$ une partition de Ω d'événements de probabilités non nulles. Soit $B \subset \Omega$, donner et démontrer la formule des probabilités totales.

Exercices :

Exercice 1. (*)

On prend au hasard, en même temps, trois ampoules dans un lot de 15 dont 5 sont défectueuses. Calculer la probabilité des événements :
A : au moins une ampoule est défectueuse ;
B : les 3 ampoules sont défectueuses ;
C : exactement une ampoule est défectueuse.

Exercice 2. (**)

Une urne contient des boules blanches et noires en proportion p et q (avec $p + q = 1$). On opère à des tirages successifs avec remise.

1. Quelle est la probabilité que la première boule blanche tirée apparaisse lors du n-ième tirage ?
2. Quelle est la probabilité que la k-ième boule blanche tirée apparaisse lors du n-ième tirage ?

Exercice 3. (**)

Dans une population, une personne sur 10 000 souffre d'une pathologie. Un laboratoire pharmaceutique met sur le marché un test sanguin. Celui-ci est positif chez 99 % des malades mais aussi faussement positif chez 0,1 % des personnes non atteintes. Un individu passe ce test et obtient un résultat positif. Quelle est sa probabilité d'être malade ? Qu'en conclure ?

Exercice 4. (*)

L'oral d'un concours comporte au total 100 sujets ; les candidats tirent au sort trois sujets et choisissent alors le sujet traité parmi ces trois sujets. Un candidat se présente en ayant révisé 60 sujets sur les 100.

1. Quelle est la probabilité pour que le candidat ait révisé :
   (a) les trois sujets tirés ;
   (b) exactement deux sujets sur les trois sujets ;
   (c) aucun des trois sujets.
2. Définir une variable aléatoire associée à ce problème et donner sa loi de probabilité, son espérance.

Exercice 5. (***)

Une urne contient $n \in \mathbb{N}^*$ boules numérotées de 1 à n. On tire avec remise des boules dans cette urne jusqu'à ce qu'une boule ait été tirée deux fois. On note T la variable aléatoire à valeurs dans $[\![2; n+1]\!]$ précisant le nombre de tirages alors effectués.

1. Proposer un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbf{P})$ modélisant cette expérience.
2. Calculer $\mathbf{P}(T = 2)$.
3. Soit $k \in [\![1; n+1]\!]$. Exprimer $\mathbf{P}(T > k \mid T > k-1)$.
4. Donner un expression de $\mathbf{P}(T = k)$ pour tout $k \in [\![1; n+1]\!]$

Exercice 6. (**)

Un industriel doit vérifier l'état de marche de ses machines et en remplacer certaines le cas échéant. D'après des statistiques précédentes, il évalue à 30% la probabilité pour une machine de tomber en panne en 5 ans ; parmi ces dernières, la probabilité de devenir hors d'usage suite à une panne plus grave est évaluée à 75% ; cette probabilité est de 40% pour une machine n'ayant jamais eu de panne.

1. Quelle est la probabilité pour une machine donnée de plus de cinq ans d'être hors d'usage ?
2. Quelle est la probabilité pour une machine hors d'usage de n'avoir jamais eu de panne auparavant ?
3. Soit X la variable aléatoire «nombre de machines qui tombent en panne au bout de 5 ans, parmi 10 machines choisies au hasard». Quelle est la loi de probabilité de X, (on donnera le type de loi et les formules de calcul), son espérance, sa variance et son écart-type ?
4. Calculer $P[X = 5]$.

Exercice 7. (****) *(Urne de* Polya)

On considère une urne contenant a boules colorées et b boules blanches. Après chaque tirage, la boule extraite est remise dans l'urne avec c boules de la même couleur.

1. Pour $a = 2, b = 2, c = 5$, faire un schéma pour le premier tirage
2. Déterminer la probabilité que la n-ième boule tirée soit blanche.
