Partie B – Exemple avec projecteur

Notons $E = \mathbb{R}[X]$ l'ensemble des polynômes réels, $\mathscr{P}$ et $\mathscr{I}$ les sous-espaces vectoriels des polynômes pairs et impairs respectivement.

1. Montrer que $\mathscr{I}$ est un supplémentaire de $\mathscr{P}$ dans E.
2. Soit l'application linéaire

$$\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ P & \longmapsto & \frac{P(X)+P(-X)}{2} + X\,\frac{P(X)-P(-X)}{2} \end{array} \right.$$

   a. Déterminer $\operatorname{Im}\varphi$ puis établir que

$$\operatorname{Ker}\varphi = \{(1-X)P(X),\ P \in \mathscr{I}\}.$$

   b. Montrer que φ est un projecteur de E.
   c. En déduire que $\operatorname{Ker}\varphi$ est un supplémentaire de $\mathscr{P}$.

Partie C – Condition suffisante

Soit E un espace vectoriel, F_1 et F_2 deux sous-espaces vectoriels de E

1. Supposons, dans cette question, que F_1 et F_2 sont supplémentaires dans E et qu'il existe un isomorphisme $u : F_1 \to F_2$.
   Montrer que $G = \{x - u(x),\ x \in F_1\}$ est un espace vectoriel puis qu'il est un supplémentaire commun à F_1 et F_2.
2. Réciproquement supposons dans cette question que F_1 et F_2 admettent un supplémentaire commun G.
   a. Montrer que F_1 et F_2 sont isomorphes.
   b. Exhiber des contre-exemples pour chacune des deux propriétés suivantes
      - $F_1 \cap F_2 = \{0\}$,
      - $F_1 + F_2 = E$.