TD 14 : Dimension des espaces vectoriels

Connaître son cours :

- Soit $(P_k)_{k\in[\![1,n]\!]}$ une famille de polynômes échelonnée en degré, montrer que cette famille est libre. Donner un exemple de famille libre de polynômes qui n'est pas échelonnée en degré.
- Montrer qu'une famille $(x_i)_{i\in I}$ est une base si, et seulement si, tout vecteur de E admet une unique écriture comme combinaison linéaire des vecteurs $(x_i)_{i\in I}$.
- Soit F et G deux sous-espaces supplémentaires d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E. Montrer que la famille obtenue par concaténation d'une base de F et d'une base de G est une base de E.
- Montrer que toute famille de $n+1$ vecteurs d'un espace vectoriel admettant une base de cardinal n est liée.
- Montrer que deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie sont isomorphes si, et seulement s'ils ont la même dimension.
- Soit E et F deux espaces vectoriels de dimension finie, donner la dimension de l'espace vectoriel $\mathcal{L}(E,F)$. En déduire la dimension de E^*.
- Énoncer le formule de Grassmann pour E un espace vectoriel de dimension finie et F_1 , F_2 deux sous-espaces de E et en donner une démonstration.
- Soit $u\in\mathcal{L}(E,F)$ et $v\in\mathcal{L}(F,G)$ où E , F sont de dimension finie. Montrer que $rg(v\circ u)\le\min(rg(u),rg(v))$.

Bases et dimension :

Exercice 1. (*)

Pour $E=\mathbb{R}^4$, dire si les familles de vecteurs suivantes peuvent être complétées en une base de E. Si oui, le faire.

1. (u,v,w) avec $u=(1,2,-1,0)$, $v=(0,1,-4,1)$ et $w=(2,5,-6,1)$;
2. (u,v,w) avec $u=(1,0,2,3)$, $v=(0,1,2,3)$ et $w=(1,2,0,3)$;

Exercice 2. (*)

Soit E l'ensemble des fonctions continues sur $[-1,1]$ qui sont affines sur $[-1,0]$ et sur $[0,1]$. Démontrer que E est un espace vectoriel et en donner une base.

Exercice 3. (*)

Montrer que $P_1(X)=(X-1)^2$, $P_2(X)=X^2$ et $P_3(X)=(X+1)^2$ forment une base de $\mathbb{R}_2[X]$ et donner les coordonnées de X^2+X+1 dans cette base.

Exercice 4. (*)

Soient F et G les s.e.v. suivants de $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{array}{lcl} F &=& \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3;\ x-y-2z=0\} \\ G &=& \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3;\ x=2y=x+z\}. \end{array}$$

1. Déterminer la dimension de F, puis la dimension de G.
2. Calculer $F\cap G$. En déduire que F et G sont supplémentaires.

Exercice 5. (*)

Montrer que tout sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel de dimension finie est de dimension finie.

Exercice 6. (**)

Soit $F=\{P\in\mathbb{R}_n[X];\ P(\alpha)=0\}$.
Démontrer que $\mathcal{B}=\{(X-\alpha)X^k;\ 0\le k\le n-1\}$ est une base de F.
Quelle est la dimension de F ?
Donner les coordonnées de $(X-\alpha)^n$ dans cette base.

Exercice 7. (**)

Démontrer que les familles suivantes sont libres dans $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$:

1. $(x \mapsto e^{ax})_{a\in\mathbb{R}}$;
2. $(x \mapsto |x-a|)_{a\in\mathbb{R}}$;
3. $(x \mapsto \cos(ax))_{a>0}$;
4. $(x \mapsto (\sin x)^n)_{n\geq 1}$.

Exercice 8. (**) *(Polynômes de Bernstein)*

Pour $0 \leq k \leq n$, on note $P_k(X) = X^k(1-X)^{n-k}$. Démontrer que la famille $(P_0,\dots,P_n)$ forme une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

Exercice 9. (**)

Dans $\mathbb{R}^3$, on considère les 3 vecteurs suivants :

$$v_1 = (1,0,-1),\ v_2 = (0,1,2) \text{ et } v_3 = (1,2,3).$$

1. La famille (v_1,v_2,v_3) est-elle libre ?
2. On pose $F = \text{vect}(v_1,v_2,v_3)$. Déterminer une base de F et sa dimension.
3. Déterminer trois réels a,b,c tels que l'on ait
$$F = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 :\ ax+by+cz=0\}.$$
4. Déterminer un vecteur w tel que (v_1,v_2,w) soit une base de $\mathbb{R}^3$.
5. Déterminer un supplémentaire de F dans $\mathbb{R}^3$.
6. On considère $G = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 :\ x+3y+2z=0\}$. Déterminer une base de G. Quelle est sa dimension ?
7. Déterminer une base de $F\cap G$. Quelle est sa dimension ?
8. F et G sont-ils en somme directe ?
9. Sans chercher à déterminer une base de $F+G$, donner la dimension de $F+G$.
10. En déduire que $F+G=\mathbb{R}^3$.

Exercice 10. (**)

Soit $(v_1,\dots,v_n)$ une famille libre d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E. Pour $k=1,\dots,n-1$, on pose $w_k = v_k + v_{k+1}$ et $w_n = v_n + v_1$. Etudier l'indépendance linéaire de la famille $(w_1,\dots,w_n)$.

Exercice 11. (**) *(Polynômes de Lagrange)*

Soit $E = \mathbb{C}_{n-1}[X]$ et soit $\alpha_1,\dots,\alpha_n$ des nombres complexes deux à deux distincts.
On pose, pour $k=1,\dots,n$,
$$L_k = \frac{\prod_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^{n}(X-\alpha_i)}{\prod_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^{n}(\alpha_k-\alpha_i)}.$$
Démontrer que $(L_k)_{k=1,\dots,n}$ est une base de E. Déterminer les coordonnées d'un élément $P\in E$ dans cette base.

Exercice 12. (**)

Soit $n\geq 1$ et $P\in\mathbb{R}_n[X]$ non nul.

1. Montrer que l'ensemble F_P des polynômes de $\mathbb{R}_n[X]$ multiples de P est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_n[X]$.
2. En déduire la dimension de F_P en fonction du degré de P.

Exercice 13. (**)

Soit E un espace vectoriel de dimension finie n des sous-espaces $E_1,\dots,E_p,F_1,\dots,F_p$ tels que

- Pour tout $i\in[\![1,p]\!]$, $F_i\subset E_i$
- $\displaystyle\bigoplus_{i=1}^{p} F_i = \bigoplus_{i=1}^{p} E_i$

Montrer que, pour tout $i\in[\![1,p]\!]$, $F_i = E_i$.

Exercice 14. (***)

Soit E un espace vectoriel de dimension finie n, et F, G deux sous-espaces vectoriels de E de même dimension $p<n$. Montrer que F et G ont un supplémentaire commun, c'est-à-dire qu'il existe un sous-espace H de E tel que $F\oplus H = G\oplus H = E$.

Exercice 15. (***)

E est un espace vectoriel de dimension $n \geq 2$ sur $\mathbb{K}$.

1. Montrer que si F et G sont deux sous-espaces vectoriels de E :
$$\dim(F \cap G) \geqslant \dim F + \dim G - n$$
2. Déterminer la dimension de l'intersection de deux hyperplans distincts de E.
3. Soient $H_1, H_2, \ldots, H_r$ des hyperplans de E. Montrer que
$$\dim\left(H_1 \cap H_2 \cap \ldots \cap H_r\right) \;\geqslant\; n - r$$
4. Montrer que si p appartient à $[\![1, n]\!]$ et si F est un sous-espace vectoriel de dimension $n-p$ alors F est l'intersection de p hyperplans de E.

Exercice 16. (***)

Un polynôme trigonométrique de degré au plus n est une fonction
$$T : \begin{cases} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}\left(a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)\right) \end{cases}$$
avec $(a_0, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n) \in \mathbb{R}^{2n+1}$. Définissons $\mathscr{T}_n$ l'ensemble des polynômes trigonométriques de degré au plus n.

1. Montrer que $\mathscr{T}_n$ est un espace vectoriel.
2. Soit $T \in \mathscr{T}_n$. Calculer, pour tout entier k, les intégrales
$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(kx)T(x)\mathrm{d}x \text{ et } \int_{-\pi}^{\pi} \cos(kx)T(x)\mathrm{d}x.$$
3. Montrer que la famille composée des fonctions $x \mapsto \cos(kx)$ pour $k \in [\![0, n]\!]$ et des fonctions $x \mapsto \sin(jx)$ pour $j \in [\![1, n]\!]$ est une base de $\mathscr{T}_n$. En déduire la dimension de $\mathscr{T}_n$.

Applications linéaires et propriétés :

Exercice 17. (*)

Soit $E = \mathbb{R}^3$. On note $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, e_3\}$ la base canonique de E et u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par la donnée des images des vecteurs de la base :
$$u(e_1) = -2e_1 + 2e_3 \;, u(e_2) = 3e_2 \;, u(e_3) = -4e_1 + 4e_3.$$

1. Déterminer une base de ker u. u est-il injectif ? peut-il être surjectif ? Pourquoi ?
2. Déterminer une base de Im u. Quel est le rang de u ?
3. Montrer que $E = \ker u \oplus \operatorname{Im} u$.

Exercice 18. (*)

Soit $E = \mathbb{R}^4$ et $F = \mathbb{R}^2$. On considère
$H = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4;\ x = y = z = t\}$.
Existe-t-il des applications linéaires de E dans F dont le noyau est H ?

Exercice 19. (*)

Soit E le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ engendré par les vecteurs $u = (1, 0, 0)$ et $v = (1, 1, 1)$. Trouver un endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ dont le noyau est E.

Exercice 20. (**)

Soit E un espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$. On suppose que, pour tout $x \in E$, il existe un entier $n_x \in \mathbb{N}$ tel que $f^{n_x}(x) = 0$. Montrer qu'il existe un entier n tel que $f^n = 0$.

Exercice 21. (**)

Soit E, F deux espaces vectoriels de dimension finie et $u \in \mathscr{L}(E)$. Déterminer la dimension du sous espace
$$\left\{v \in \mathscr{L}(E, F),\ v \circ u = 0_{\mathscr{L}(E,F)}\right\}.$$

Exercice 22. (***)

Soient $E_0, \dots, E_n$ des espaces vectoriels de dimensions finies respectivement égales à $a_0, \dots, a_n$. On suppose qu'il existe n applications linéaires $f_0, \dots, f_{n-1}$ telles que, pour chaque $k \in \{0, \dots, n-1\}$, f_k est une application linéaire de E_k dans E_{k+1} et

1. f_0 est injective ;
2. $\ker(f_k) = \operatorname{Im}(f_{k-1})$ pour tout $k = 1, \dots, n-1$;
3. f_{n-1} est surjective.

Prouver que $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k a_k = 0$.

Exercice 23. (**)

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel non nul et $f \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme nilpotent. On note p l'indice de nilpotence de f, i.e. le plus petit entier naturel vérifiant $f^p = 0$.

1. f peut-il être un automorphisme ?
2. Montrer qu'il existe $x \in E$ tel que $\left(x, f(x), \dots, f^{p-1}(x)\right)$ est libre.
3. En déduire que si E est de dimension finie alors $p \leq \dim E$.

Exercice 24. (**)

Soient E, F, G des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et soient $u \in \mathcal{L}(E, G), v \in \mathcal{L}(E, F)$.

1. Montrer que :
   $\operatorname{Ker} v \subseteq \operatorname{Ker} u \Leftrightarrow \exists w \in \mathcal{L}(F, G) : u = w \circ v$.
2. En déduire que :
   v injective $\Leftrightarrow \exists w \in \mathcal{L}(F, E) : w \circ v = \mathrm{Id}_E$.

Exercice 25. (**)

Soient E, F, G des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et soient $u \in \mathcal{L}(E, G), v \in \mathcal{L}(F, G)$.

1. Montrer que :
   $\operatorname{Im} v \subseteq \operatorname{Im} u \Leftrightarrow \exists w \in \mathcal{L}(F, E) : v = u \circ w$.
2. En déduire que :
   u surjective $\Leftrightarrow \exists w \in \mathcal{L}(G, E) : u \circ w = \mathrm{Id}_G$.

Exercice 26. (**)

Soit E de dimension finie et $u, v \in \mathscr{L}(E)$ vérifiant $u^2 + u \circ v = \mathrm{Id}$. Montrer que u et v commutent.

Exercice 27. (**)

Soit E, E', E'', F, F' et F'' des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. Soit $f, f', f'', \varphi, \varphi', \psi$ et ψ' des applications linéaires suivant :

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "f"'] & E' \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "f'"'] & E'' \arrow[d, "f''"'] \\ F \arrow[r, "\varphi'"] & F' \arrow[r, "\psi'"] & F'' \end{tikzcd}$$

On suppose que $f' \circ \varphi = \varphi' \circ f$, $f'' \circ \psi = \psi' \circ f'$, $\operatorname{Im} \varphi = \operatorname{Ker} \psi$ et $\operatorname{Im} \varphi' = \operatorname{Ker} \psi'$.

1. Montrer que si φ', f et f'' sont injectives alors f' l'est aussi.
2. Montrer que si ψ, f et f'' sont surjectives alors f' l'est aussi.

Exercice 28. (****)

Soit E un espace vectoriel de dimension finie, $u \in \mathscr{L}(E)$ nilpotent d'indice p (tel que $u^p = 0_{\mathscr{L}(E)}$ et $u^{p-1} \neq 0_{\mathscr{L}(E)}$) et $\Phi : v \in \mathscr{L}(E) \mapsto u \circ v - v \circ u$.

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $v \in \mathscr{L}(E)$,
$$\Phi^n(\nu) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} u^{n-k} \circ \nu \circ u^k.$$
2. Montrer que Φ est nilpotente et majorer son indice de nilpotence.
3. Soit $a \in \mathscr{L}(E)$.
   Montrer qu'il existe $b \in \mathscr{L}(E)$ tel que $a \circ b \circ a = a$.
4. En déduire l'indice de nilpotence de Φ.
