TD 23 : Fonctions à plusieurs variables

Connaître son cours :

- Dessinez le domaine de définition de $f := (x,y) \mapsto x\ln(x+y) - y\sqrt{y-x}$..
- Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, donner la signification de : f admet des dérivées partielles en un point $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$.
  Donner les dérivées partielles de la fonction $f := (x,y) \mapsto xy + y^2 + \cos(xy)$.
- Calculez le gradient de $f := (x,y) \mapsto xe^y - 3yx^2$ en $(1,1)$.
- Soit f une fonction à deux variables sur U un ouvert de $\mathbb{R}^2$, admettant des dérivées partielles en tout point de U. Rappeler la définition d'un point critique pour la fonction f.
  Donner les points critiques de la fonction $f := (x,y) \mapsto x^3 - 3x + y^2$.

Continuité et dérivées partielles :

Exercice 1. (*)

Étudier les limites en $(0,0)$ des fonctions suivantes :

1. $f(x,y) = \frac{x^3}{y}$
2. $f(x,y) = \frac{x+2y}{x^2-y^2}$
3. $f(x,y) = \frac{1-\cos(xy)}{xy^2}$
4. $f(x,y) = \frac{\sin xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$

Exercice 2. (*)

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ et
$F : \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ définie par

$$F(x,y) = \frac{f\left(x^2+y^2\right) - f(0)}{x^2+y^2}$$

Déterminer $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} F(x,y)$.

Exercice 3. (*)

Soit A une partie convexe non vide de $\mathbb{R}^2$ et
$f : A \to \mathbb{R}$ une fonction continue.
Soit a et b deux points de A et y un réel tels que

$$f(a) \leq y \leq f(b).$$

Montrer qu'il existe $x \in A$ tel que $f(x) = y$.

Exercice 4. (*)

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{2}x^2 + y^2 - 1 & \text{si } x^2+y^2 > 1 \\ -\frac{1}{2}x^2 & \text{sinon} \end{cases}$$

Montrer que f est continue.

Exercice 5. (**)

Pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ avec $(x,y) \neq (0,0)$ on pose

$$f(x,y) = \frac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2}$$

1. Par quelle valeur peut-on prolonger f par continuité en $(0,0)$?
   On note encore f cette fonction définie par prolongement.
2. Calculer les dérivées partielles de f en $(x,y) \neq (0,0)$.
3. Calculer les dérivées partielles de f en $(0,0)$.
4. Montrer que la fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 6. (*)

Justifier l'existence des dérivées partielles des fonctions suivantes et les calculer. En déduire respectivement un développement limité à l'ordre 1 en $(0;\frac{\pi}{3})$, $(0,0)$ et $(\sqrt{3},\sqrt{2})$.

1. $f(x,y) = e^x \cos y$.
2. $f(x,y) = (x^2+y^2)\cos(xy)$.
3. $f(x,y) = \sqrt{1+x^2y^2}$.

Exercice 7. (**)

(Continue sans une des dérivées partielles)

On définit $f : \mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ par

$$f(x,y) = \frac{x^2}{(x^2+y^2)^{3/4}}.$$

Justifier que l'on peut prolonger f en une fonction continue sur $\mathbb{R}^2$. Étudier l'existence de dérivées partielles en $(0,0)$ pour ce prolongement.

Exercice 8. (**)

(Des dérivées partielles sans la continuité)

Pour les fonctions suivantes, démontrer qu'elles admettent une dérivée suivant tout vecteur en $(0,0)$ sans pour autant y être continue.

1. $f(x,y) = \begin{cases} y^2 \ln|x| & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$
2. $g(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y}{x^4+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

Exercice 9. (**)

Les fonctions suivantes, définies sur $\mathbb{R}^2$, sont-elles de classe C^1 ?

1. $f(x,y) = \dfrac{x^2y^3}{x^2+y^2}$ si $(x,y) \neq (0,0)$ et $f(0,0) = 0$;
2. $f(x,y) = x^2y^2\ln(x^2+y^2)$ si $(x,y) \neq (0,0)$ et $f(0,0) = 0$.
3. $f(x,y) = x\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ si $(x,y) \neq (0,0)$ et $f(0,0) = 0$;
4. $f(x,y) = e^{-\frac{1}{x^2+y^2}}$ si $(x,y) \neq (0,0)$ et $f(0,0) = 0$.

Exercice 10. (***)

Soit $\mathbb{R}^2$ munit de la base canonique ainsi que du produit scalaire usuel $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Soit u un endomorphisme symétrique de $\mathbb{R}^2$.

1. Montrer que l'application $f : x \mapsto \langle u(x), x\rangle$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$. Donner un développement limiter à l'ordre 1 en $a \in \mathbb{R}^2$.
2. Soit $a \neq (0,0)$ donner $\nabla F(a)$ pour la fonction $F : x \in \mathbb{R}^2\backslash(0,0) \mapsto \dfrac{\langle u(x), x\rangle}{\langle x, x\rangle}$.
3. Montrer que $\nabla F(a) = 0$ si et seulement si il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ telle que $u(a) = \lambda a$.

Formule de la chaîne

Exercice 11. (*)

Soit f une application de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ à valeur da $\mathbb{R}$. Calculer les dérivées (éventuellement partielles) des fonctions suivantes :

1. $g(x,y) = f(y,x)$.
2. $g(x) = f(x,x)$.
3. $g(x,y) = f(y, f(x,x))$.
4. $g(x) = f(x, f(x,x))$.

Exercice 12. (**)

Soit f une application de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$ à valeur da $\mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $g(u,v) = f(uv, u^2+v^2)$

1. Exprimer les dérivées partielles de g en fonction de celles de f.
2. Exprimer les dérivées partielles d'ordre 2 de g en fonction de celles de f.

Exercice 13. (**)

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe C^1 et $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $g(r,\theta) = f(r\cos(\theta), r\sin(\theta))$.

Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}$ et $(r,\theta) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ tels que $x = r\cos(\theta)$ et $y = r\sin(\theta)$.

Exprimer

$\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ avec $\dfrac{\partial g}{\partial r}(r,\theta)$ et $\dfrac{\partial g}{\partial \theta}(r,\theta)$.

Extrema :

Exercice 14. (*)

On pose
$$f(x,y) = x^2 + y^2 + xy + 1$$
et
$$g(x,y) = x^2 + y^2 + 4xy - 2$$

1. Déterminer les points critiques de f, de g.
2. En reconnaissant le début du développement d'un carré, étudier les extrema locaux de f.
3. En étudiant les valeurs de g sur deux droites vectorielles bien choisies, étudier les extrema locaux de g.

Exercice 15. (**)

Déterminer les extrema locaux des fonctions $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ suivantes :

1. $f(x,y) = x^2 + 2y^2 - 2xy - 2y + 1$
2. $f(x,y) = x^3 + y^3$
3. $f(x,y) = (x-y)^2 + (x+y)^3$

Exercice 16. (**)

Calculer
$$\inf_{x,y>0} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + xy \right).$$

Équations de dérivées partielles :

Exercice 17. (*)

Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe C^1 solutions des systèmes suivants :

$$\mathbf{1.} \begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = xy^2 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = yx^2. \end{cases} \qquad \mathbf{2.} \begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = e^x y \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = e^x + 2y. \end{cases}$$

Exercice 18. (**)

Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe C^1 vérifiant l'équation aux dérivées partielles
$$(E) : \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = f(x,y).$$
On opérera le changement de variables de la forme
$$\begin{cases} u = x + y \\ v = x - y \end{cases}$$

Exercice 19. (**) *(Équation des ondes)*

Soit $c \neq 0$. Chercher les solutions de classe C^2 de l'équation aux dérivées partielles suivantes
$$(E) : \quad c^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,t) = \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}(x,t),$$
à l'aide d'un changement de variables de la forme
$$u = x + at,\ v = x + bt.$$

Exercice 20. (***)

Chercher toutes les fonctions f de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ vérifiant
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) - 3\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0.$$
(penser à un changement de variables linéaire à l'aide d'une matrice inversible)