Chapitre 1 : Raisonnement et vocabulaire ensembliste

Table des matières

I Rédaction et quelques types de raisonnements

- Une copie est la seule chose que le correcteur connaîtra de vous lors d'une épreuve écrite, votre note dépendra seulement de celle-ci. Il tentera d'évaluer plusieurs éléments : votre compréhension du sujet, vos connaissances mathématiques, vos capacités à exposer ces connaissances, votre maîtrise de la langue française et enfin le soin dont vous saurez faire preuve.
- Les exemples introduits par le sigle ☺ sont des exemples où la rédaction est correcte.
- Ceux introduits par ☹ sont des exemples où la rédaction est incorrecte et sanctionnée.

1 Introduire tous les objets utilisés

- On présente toujours les nouveaux venus, tous les objets que l'on introduit dans la rédaction doivent être définis au préalable. Introduire un nouvel objet quelconque se fait simplement avec le mot « soit » ou « soient » quand il y en a plusieurs.

☹ $x \geq 0$. Si $x = 1$ alors vrai, sinon faux.
☺ Soit $x \in \mathbb{R}^+$. Si $x = 1$ la proposition $\mathscr{P}$ est vraie sinon elle est fausse.

☹ Cherchons les racines du polynôme $X^2 + X - 1$. $\Delta = 5$ donc les racines sont $\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$ et $\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}$.
☺ On note Δ le discriminant du polynôme $X^2 + X - 1$. On a $\Delta = 5$ donc. . .

a Quantification

- Quand vous énoncez une propriété en lien avec des objets mathématiques, il faut impérativement préciser si cette propriété est vérifiée par tous les objets de ce type, par une certaine partie de ces objets, ou par au moins un de ces objets. Pour cela on utilise les quantificateurs :

"Pour tout" : $\forall$ "Il existe" : $\exists$ "Il existe un unique" : $\exists!$ "Il n'existe pas" : $\nexists$

⚠ Utiliser un quantificateur n'introduit pas un objet. Par exemple si vous écrivez : $\exists x \in \mathbb{R} \mid x > 0$
Alors x n'est pas introduit pour autant, et vous ne pouvez pas utiliser la lettre x directement après :

☹ $\exists x \in \mathbb{R} \mid x > 1$. Alors $x \geq 0$.
☺ $\exists x \in \mathbb{R} \mid x > 1$. Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que $x > 1$, alors $x \geq 0$.

b Le choix des lettres

- Vous êtes libres de donner absolument tous les noms que vous voulez aux objets que vous introduisez. Les alphabets les plus utilisés sont les alphabets latins et grecs.
- En mathématiques il y a des *variables libres* qui sont des notations spécifiques et des *variables liées/muettes* qui peuvent être remplacées par une autre lettre sans incidence sur la véracité de ce qui est écrit.

Exemple 1.

— Soit $y \in \mathbb{R}$ et $f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = (y)$.

— Soit $x \in \mathbb{R}$ et f une fonction continue sur $[0,1]$ on définit le nombre $I_x = \int_0^1 f(u)x^2du$.

Les lettres grecques et leurs noms sont à connaître.

lettre majuscule	lettre minuscule	nom
A	α	alpha
B	β	bêta
Γ	γ	gamma
Δ	δ	delta
E	ε	epsilon
Z	ζ	zêta
H	η	êta
Θ	θ	thêta
I	ι	iota
K	κ	kappa
Λ	λ	lambda
M	μ	mu

lettre majuscule	lettre minuscule	nom
N	ν	nu
Ξ	ξ	ksi ou xi
O	o	omicron
Π	π	pi
P	ρ	rhô
Σ	σ	sigma
T	τ	tau
Υ	υ	upsilon
Φ	ϕ ou φ	phi
X	χ	khi
Ψ	ψ	psi
Ω	ω	omega

c Se faire comprendre

Rapport du jury concours Mines-Télécom 2021 :
- "Soignez la forme, soyez clair, rigoureux et honnête"
- "Les tentatives de bluff, moins nombreuses cette année, sont lourdement sanctionnées."

Rapport du jury concours Centrale-Supélec 2021 :
- "Pour les corrections des épreuves d'admissibilité, le concours Centrale-Supélec a décidé pour cette session et les suivantes de sanctionner les copies mal présentées"

Point Méthode à la rédaction :

* Annoncer ce que l'on va faire sans recopier la question :
Quelques mots simples suffisent, comme : « montrons que... », « il suffit de montrer que... ».

** Tout justifier :
Il faut toujours justifier chaque étape d'un raisonnement. Lancer des affirmations sans les étayer est tout simplement interprété comme une tentative de bluff.

*** Utiliser les théorèmes et les propositions :
N'oubliez jamais de vérifier toutes les hypothèses des théorèmes et propositions utilisés de manière explicite. Lorsque l'on utilise un théorème (exemple : le théorème des valeurs intermédiaires) qui possède un nom, il faut toujours le donner.

**** Écrire la conclusion et la souligner : *Précisez toujours le résultat auquel vous aboutissez et encadrez-le ou bien soulignez-le.*

Une articulation logique : Une démonstration mathématique est une succession d'arguments et de calculs. Pour que tout cela ait un sens, il faut relier ces arguments et ces calculs par l'utilisation des mots suivants : *d'où, alors, donc, par conséquent, ainsi, c'est-à-dire, ce qui équivaut à, ou encore, or, puisque, de plus...*

⚠ On ne mélange pas les quantificateurs et les symboles d'implication avec la rédaction en français :

☹ $\forall x \in \mathbb{N},\ x$ est positif.
☺ $\forall x \in \mathbb{N},\ x \geq 0$.
☺ Pour tout x dans $\mathbb{N}$, x est positif.
☺ Pour tout $x \in \mathbb{N}$, $x \geq 0$.

☹ Le module de $2e^{\frac{3\pi i}{2}}$ vaut 2 et celui de $2+i$ vaut $\sqrt{5} \Rightarrow 2e^{\frac{3\pi i}{2}} \neq 2+i$.
☺ Le module de $2e^{\frac{3\pi i}{2}}$ vaut 2 et celui de $2+i$ vaut $\sqrt{5}$ donc on a : $2e^{\frac{3\pi i}{2}} \neq 2+i$.

2 Quelques raisonnements

a implication et équivalence

Raisonner par implications : Quand on veut montrer que $p \Rightarrow q$ est vraie : « On suppose p vraie et on montre ce que cela implique dans le but de montrer que q est vraie. »

Exemple 2. Démontrer que : $\forall x \in [0,1],\ x - x^2 \in \mathbb{N} \Rightarrow x \in \{0,1\}$.

Exemple 3. Démontrer que : $\forall x, x' \in \mathbb{R}\backslash\{1\},\ x \neq x' \Rightarrow \dfrac{x+1}{x-1} \neq \dfrac{x'+1}{x'-1}$.

Exercice 1. Soit $n, k \in \mathbb{N}$. Montrons que si l'entier n est un multiple de k alors n^2 l'est également.

Raisonner par implications : Quand on veut montrer que $p \Rightarrow q$ est fausse : « On suppose p vraie et on montre ce que cela implique dans le but de montrer que (non q) qui se note aussi $\neg q$ est vraie. Donc que q est fausse. »

Exemple 4. Démontrer qu'il est faux d'affirmer : $\forall x, y \in \mathbb{R},\ x < y \Rightarrow \sin(x) < \sin(y)$.

Exercice 2. Démontrer qu'il est faux d'affirmer : $\forall x \in \mathbb{R},\ x^2 + x > 0 \Rightarrow x > 0$.

Raisonner par équivalence : Quand on veut montrer que $p \Leftrightarrow q$ est vraie, deux possibilités :

- Soit on raisonne par double implication :
  - ⋆ Supposons p vraie. Montrons que q est vraie.
  - ⋆ Réciproquement, supposons q vraie. Montrons que p est vraie.
- soit on raisonne directement par équivalences en changeant peu à peu p en q :

$$p \Leftrightarrow \ldots\ldots \Leftrightarrow \ldots\ldots \Leftrightarrow q$$

Exemple 5. Démontrer que : $\forall x, y \in \mathbb{R},\ x^2 + y^2 = 0 \Leftrightarrow x = y = 0$.

Exemple 6. Démontrer que : pour tout $x \in [-\pi, \pi]$, $\cos(2x) = \dfrac{1}{2}$ si et seulement si $x \in \left\{-\dfrac{5\pi}{6}, -\dfrac{\pi}{6}, \dfrac{\pi}{6}, \dfrac{5\pi}{6}\right\}$.

b Unicité d'un objet mathématique

Unicité d'un objet : Quand on veut montrer qu'un ensemble E contient au plus un élément vérifiant une propriété $\mathscr{P}$, on peut procéder ainsi :
Soient $x, x' \in E$. Faisons l'hypothèse que x et x' vérifies $\mathscr{P}$ et montrons que $x = x'$.

⚠ Ci-dessus, il n'est pas nécessaire de supposer x et x' différents et de raisonner par l'absurde.

Exemple 7. Démontrer : $\exists! x \in \mathbb{R}^+ \mid x^2 = 1$.

Exemple 8. Démontrer : $\forall n \in \mathbb{N}^*\ \exists!(p, q) \in \mathbb{N}^2 \mid n = (2p+1)2^q$.

Exercice 3. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une application contractante.
(ie : il existe $k \in [0, 1[$ tel que pour tout $(x, y) \in I^2$, $|f(x) - f(y)| \leq k|x - y|$).

S'il existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que $f(x_0) = x_0$ on dit que la fonction f admet un point fixe.

Montrer qu'il y a unicité de ce point fixe s'il y a existence de celui-ci.

c Existence d'un objet mathématique

Existence d'un objet : Quand on veut montrer qu'un ensemble E contient au moins un élément vérifiant une propriété $\mathscr{P}$, on peut procéder ainsi :

- Faire une preuve constructive qui fait apparaître l'objet vérifiant la propriété $\mathscr{P}$.
- Utiliser des propositions ou des théorèmes qui nous offrent l'existence de l'objet sans pour autant nous donner l'expression explicite de celui-ci.

Exemple 9. Démontrer que pour tout $z \in \mathbb{C}^*$ il existe $z_0 \in \mathbb{C}^*$ tel que : $|z_0| = 1$ et $Arg(z) = Arg(z_0)$.

Exemple 10. On considère $\forall x \in \mathbb{R}\ f(x) = 4x^3 - 3x^2 + 2x - 1$.
Démontrer que la fonction polynomiale f admet une racine réelle.

Exercice 4. Soit $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$.
Montrer que toute application continue $f : [a, b] \longrightarrow [a, b]$ admet un point fixe.

d Inclusion et égalité d'ensembles

Quand on veut montrer une inclusion $E \subset F$, on écrit : Soit $x \in E$ et on montre que $x \in F$.

Exemple 11. Démontrer : $\{x \in \mathbb{R} \mid \exists y \in \mathbb{R}^+, x > y\} \subset \mathbb{R}^+$.

Exemple 12. On note $2\mathbb{N}$ l'ensemble des entiers naturels pairs et on pose $E = \{k(k+1) \mid k \in \mathbb{N}\}$. Montrer que $E \subset 2\mathbb{N}$.

Quand on veut montrer une égalité d'ensembles $E = F$, deux possibilités :

- Soit on raisonne par double inclusion :
  - ⋆ Soit $x \in E$. Montrons que $x \in F$.
  - ⋆ Réciproquement, soit $x \in F$. Montrons que $x \in E$.
- Soit on raisonne directement par équivalences :
  « Pour tout $x \in E$: $x \in E \Leftrightarrow \ldots\ldots \Leftrightarrow \ldots\ldots \Leftrightarrow x \in F$.»

Exemple 13. Montrer que : $\mathbb{R}^- = \{x \in \mathbb{R} \mid \forall y \in \mathbb{R}^+, x \leq y\}$.

Exemple 14. Soient E un ensemble et A, B deux sous-ensembles de E.
Pour $X \subset E$ on note $\overline{X}$ le complémentaire de X dans E défini par : $\overline{X} = \{x \in E \mid x \notin F\}$.
Montrer que : $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$.

Exercice 5. Soit $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ 4x - y = 1\}$ et $C = \{(t+1, 4t+3);\ t \in \mathbb{R}\}$. Démontrer que $A = C$.

e Le raisonnement par récurrence

- Le raisonnement par récurrence repose sur le principe suivant :

$$\text{Si } \underbrace{\mathscr{P}_0 \text{ est vraie}}_{\text{Initialisation}} \text{ et si } \underbrace{(\forall n \in \mathbb{N},\ \mathscr{P}_n \Rightarrow \mathscr{P}_{n+1})}_{\text{Hérédité}} \text{ alors } (\forall n \in \mathbb{N},\ \mathscr{P}_n).$$

Récurrence simple.

Quand on veut montrer par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N}\ ,\ \mathscr{P}_n)$, on rédige ainsi :

- Expliciter $\mathscr{P}_n$: Pour $n \in \mathbb{N}$ on note $\mathscr{P}_n$: " . . . . "
- Initialisation : Vérification que $\mathscr{P}_0$ est vraie.
- Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons $\mathscr{P}_n$ vraie. Montrons que $\mathscr{P}_{n+1}$ est vraie.
- Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}\ ,\ \mathscr{P}_n$

⚠ Supposer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathscr{P}_n$ est vraie à l'hérédité est une erreur. En effet, c'est ce que nous cherchons à démontrer.

Exemple 15. Notons, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, S_n la somme des cubes des entiers entre 1 et n et montrons par récurrence sur $\mathbb{N}^*$ que $S_n = \left(\dfrac{n(n+1)}{2}\right)^2$.

Exemple 16. (*Inégalité de Bernoulli*)
Pour tout entier $n > 1$ et tout réel x non nul et supérieur ou égal à -1.

$$(1+x)^n > 1 + nx$$

Exercice 6.

1. Montrer que : pour n dans N^*, la somme des n premiers entiers est donnée par la formule :

$$1 + 2 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

2. Montrer que : pour n dans N^*, la somme des n premiers entiers au carré est donnée par la formule :

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

3. Montrons par récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 1 + \frac{1}{2^2} + 1 + \frac{1}{3^2} + ... + 1 + \frac{1}{n^2} \leq 2 - \frac{1}{n}$$

- Il arrive parfois qu'on ne sache pas déduire $\mathscr{P}_{n+1}$ de $\mathscr{P}_n$, mais seulement $\mathscr{P}_{n+2}$ de $\mathscr{P}_n$ et $\mathscr{P}_{n+1}$. Le principe du raisonnement par récurrence prend dans ce cas la forme suivante :

$$\text{Si } \underbrace{\mathscr{P}_0 \text{ et } \mathscr{P}_1 \text{ sont vraies}}_{\text{Initialisation}} \text{ et si } \underbrace{(\forall n \in \mathbb{N},\ \mathscr{P}_n \text{ et } \mathscr{P}_{n+1} \Rightarrow \mathscr{P}_{n+2})}_{\text{Hérédité}} \text{ alors } (\forall n \in \mathbb{N},\ \mathscr{P}_n).$$

Récurrence double.

Quand on veut montrer par récurrence double que : $(\forall n \in \mathbb{N}\ ,\ \mathscr{P}_n)$, on rédige ainsi :

- Expliciter $\mathscr{P}_n$: Pour $n \in \mathbb{N}$ on note $\mathscr{P}_n$: "...........".
- Initialisation : Vérification que $\mathscr{P}_0$ et $\mathscr{P}_1$ sont vraies.
- Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons $\mathscr{P}_n$ et $\mathscr{P}_{n+1}$ vraies. Montrons que $\mathscr{P}_{n+2}$ est vraie.
- Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}\ ,\ \mathscr{P}_n$

Exemple 17. On note $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite réelle définie par $u_0 = 4$, $u_1 = 5$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n$. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n = 2^n + 3$.

- Il arrive parfois aussi qu'on ne sache déduire $\mathscr{P}_{n+1}$ que de **toutes** les propositions antérieures $\mathscr{P}_n, \mathscr{P}_{n-1}, ..., \mathscr{P}_2, \mathscr{P}_1, \mathscr{P}_0$. Le principe du raisonnement par récurrence prend dans ce cas la forme suivante :

$$\text{Si } \underbrace{\mathscr{P}_0 \text{ est vraie}}_{\text{Initialisation}} \text{ et si } \underbrace{(\forall n \in \mathbb{N},\ (\forall k \in [\![0,n]\!], \mathscr{P}_k) \Rightarrow \mathscr{P}_{n+1})}_{\text{Hérédité}} \text{ alors } (\forall n \in \mathbb{N},\ \mathscr{P}_n).$$

Récurrence forte.

Quand on veut montrer par récurrence forte que : $(\forall n \in \mathbb{N}\ ,\ \mathscr{P}_n)$, on rédige ainsi :

- Expliciter $\mathscr{P}_n$: Pour $n \in \mathbb{N}$ on note $\mathscr{P}_n$: "...........".
- Initialisation : Vérification que $\mathscr{P}_0$ est vraie.
- Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons pour tout $k \in [\![0,n]\!]$ que $\mathscr{P}_k$ est vraie.
  Montrons que $\mathscr{P}_{n+1}$ est vraie.
- Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}\ ,\ \mathscr{P}_n$.

Exemple 18. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle. On suppose que $u_0 \in \mathbb{R}^+$ et que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} \leq \sum_{k=0}^{n} u_k$.

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n \leq 2^n u_0$.

Exemple 19. Montrons que tout entier supérieur à 2 admet une décomposition comme produit de nombres premiers.

f Le raisonnement par l'absurde

- Pour établir une propriété $\mathscr{P}$, on peut raisonner par l'absurde, c'est-à-dire supposer que $\mathscr{P}$ est fausse et arriver à une contradiction.

Quand on veut montrer qu'une proposition $\mathscr{P}$ est vraie, on peut raisonner par l'absurde de la manière suivante : « Faisons l'hypothèse que $\mathscr{P}$ est fausse. Contradiction !
Par conséquent $\mathscr{P}$ est vraie. »

Exemple 20. Montrer que $\sqrt{3}$ est un irrationnel. Généraliser pour tout p premier, montrer que $\sqrt{p}$ est un irrationnel.

Exemple 21. Soient a, b, c, d des nombres rationnels tels que $a + b\sqrt{2} = c + d\sqrt{2}$.
Montrer que $a = c$ et $b = d$.

Exemple 22. Montrer qu'il existe une infinité de nombres premiers.

Exercice 7. Démontrer que $\log_{10}(2)$ est irrationnel.

Exercice 8. (*Une version faible du théorème de la progression arithmétique*)

1. Montrer qu'il existe une infinité de nombres premiers de la forme $4k + 3$.
2. Montrer qu'il existe une infinité de nombres premiers de la forme $6k + 5$.

g Le raisonnement par analyse-synthèse

Quand on veut déterminer l'ensemble des éléments d'un ensemble E qui satisfont une propriété $\mathscr{P}$, on peut raisonner par analyse-synthèse de la manière suivante :

- **Analyse :** Soit $x \in E$. Faisons l'hypothèse que $\mathscr{P}(x)$.
- **Synthèse :** Posons $x = ...$ Vérifions que $x \in E$ et que $\mathscr{P}(x)$.

Remarque 1. *Dans l'**analyse**, on part d'un élément quelconque de E et on montre que s'il satisfait la propriété $\mathscr{P}$, alors il a forcément telle ou telle forme. Dans l'analyse, on restreint le champ des solutions possibles. Dans la **synthèse**, on vérifie que les possibilités obtenues dans l'analyse sont bel et bien des solutions (parfois ce sera le cas, parfois non).*

Exemple 23. Déterminer l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ pour lesquelles :
$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $f(y - f(x)) = 2 - x - y$.

Exemple 24. Déterminer l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ pour lesquelles :
$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $f(y - f(x)) = 2 - x^2 - y$.

- Le raisonnement par analyse-synthèse est souvent employé pour montrer les propositions de la forme :

$$\exists ! x \in E \mid \mathscr{P}(x)$$

Démontrer une telle proposition, revient à chercher l'ensemble des éléments de E qui satisfont la propriété $\mathscr{P}$ et obtenir qu'il en existe un et un seul.

Analyse $\Leftrightarrow$ Unicité.
Synthèse $\Leftrightarrow$ Existence.

Exemple 25. Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Montrer qu'existe un unique couple (p,i) de fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant les conditions suivantes :

— p est paire, i est impaire.

— $f = p + i$.

Exemple 26. Trouver les fonctions f de $\mathbb{R}^{+*}$ dans $\mathbb{R}$ dérivables et telles que :
$\forall (x,y) \in {\mathbb{R}^{+*}}^2,\ f(xy) = f(x) + f(y).$

Exercice 9. Trouver les fonctions f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ dérivables telles que :
$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x+y) = f(x) + f(y).$

Exercice 10. On cherche toutes les isométries de $\mathbb{R}$, i.e. toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ pour lesquelles :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ |f(x) - f(y)| = |x - y|$$

Indication : Soit f une isométrie. On note δ la fonction $x \longmapsto f(x) - f(0)$ sur $\mathbb{R}$.
Montrer, en étudiant la quantité $(f(x) - f(y))^2$, que pour tous $x, y \in \mathbb{R},\ \delta(x)\delta(y) = xy$.

II Rudiments de logique et vocabulaire ensembliste

1 Connecteurs logiques et quantificateurs

a Table de vérité

Définition 1. On appelle *proposition* toute phrase $\mathscr{P}$ au sujet de laquelle on peut poser la question : « $\mathscr{P}$ est-elle vraie » ? La *valeur de vérité* d'une proposition est le vrai **(1)** ou le faux **(0)**, mais pas les deux ! Deux propositions de même valeur de vérité sont dites *équivalentes.*

Exemple 27. « Le nombre entier n est impair » et « Le nombre entier n n'est pas pair » sont deux propositions équivalentes. Démontrer l'une c'est démontrer l'autre.

Définition 2. A partir de propositions, on peut en construire de nouvelles. On appellera *connecteur logique* tout procédé de construction d'une proposition à partir d'une ou plusieurs autres propositions.

Définition 3.

- La proposition « non $\mathscr{P}$ » est vraie si $\mathscr{P}$ est fausse, et fausse si $\mathscr{P}$ est vraie. **(Négation)**
- La proposition « $\mathscr{P}$ et Q » est vraie si $\mathscr{P}$ et Q sont vraies toutes les deux, et fausse sinon. **(Conjonction)**
- La proposition « $\mathscr{P}$ ou Q » est vraie si l'une au moins des propositions $\mathscr{P}$ et Q est vraie (éventuellement les deux donc), et fausse dans le seul cas où $\mathscr{P}$ et Q sont fausses toutes les deux. **(Disjonction)**

Exemple 28.

$\mathscr{P}$	$\neg\mathscr{P}$

$\mathscr{P}$	Q	$\mathscr{P}$ et Q

$\mathscr{P}$	Q	$\mathscr{P}$ ou Q

Théorème 1. ***Règles de calcul sur la négation, la conjonction, la disjonction***

- *La proposition $\mathscr{P}$ et (non $\mathscr{P}$) est fausse.* ***(principe de non-contradiction)***
- *La proposition $\mathscr{P}$ ou (non $\mathscr{P}$) est vraie.* ***(principe du tiers exclu)***
- *Les propositions $\mathscr{P}$ et « non (non $\mathscr{P}$) » sont équivalentes.* ***(double négation)***
- *Les propositions « non ($\mathscr{P}$ et Q) » et « (non $\mathscr{P}$) ou (non Q) » sont équivalentes.* ***(négation d'une conjonction)***
- *Les propositions « non ($\mathscr{P}$ ou Q) » et « (non $\mathscr{P}$) et (non Q) » sont équivalentes.* ***(négation d'une disjonction)***

Démonstration. □

b Implication, équivalence, contraposée

Définition 4.

- La proposition « $\mathscr{P} \Rightarrow Q$ » qu'on lit « $\mathscr{P}$ implique Q » ou bien « si $\mathscr{P}$ alors Q », est fausse dans le seul cas où $\mathscr{P}$ est vraie et Q est fausse.
- La proposition « $\mathscr{P} \Leftrightarrow Q$» qu'on lit « $\mathscr{P}$ équivaut à Q » ou bien « $\mathscr{P}$ si et seulement si Q », est vraie si $\mathscr{P}$ et Q ont la même valeur de vérité, et fausse sinon.

Exemple 29.

$\mathscr{P}$	Q	$\mathscr{P} \Rightarrow Q$

$\mathscr{P}$	Q	$\mathscr{P} \Leftrightarrow Q$

⚠ Affirmer que l'implication « $\mathscr{P} \Rightarrow Q$ » est vraie n'entraîne pas que $\mathscr{P}$ soit vraie, ni que Q soit vraie. La signification est la suivante : si $\mathscr{P}$ est vraie, alors Q l'est aussi. L'implication « $\mathscr{P} \Rightarrow Q$ » est toujours vraie quand $\mathscr{P}$ est fausse.

Définition 5.

- On appelle *réciproque* de l'implication « $\mathscr{P} \Rightarrow Q$ » la proposition « $Q \Rightarrow \mathscr{P}$ ».
- On appelle *contraposée* de l'implication « $\mathscr{P} \Rightarrow Q$ » la proposition « (non Q) $\Rightarrow$ (non $\mathscr{P}$) ».

Exemple 30. Soit $(u_n)_{n\geq 0} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Considérons les propositions suivantes
$\mathscr{P}$: "La suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est monotone et bornée".
Q : "La suite $(u_n)_{n\geq 0}$ admet une limite dans $\mathbb{R}$".
On sait que l'implication ($\mathscr{P} \Rightarrow Q$) est vraie. Donner la contraposée de cette implication.

Théorème 2. ***Règles de calcul sur l'implication et l'équivalence***

- *Toute implication est équivalente à sa contraposée.*
  Les propositions « $\mathscr{P} \Rightarrow Q$ » et « (non Q) $\Rightarrow$ (non $\mathscr{P}$) » sont équivalentes.
- *L'équivalence est une double implication.*
  Les propositions « $\mathscr{P} \Leftrightarrow Q$ » et « ($\mathscr{P} \Rightarrow Q$) et ($Q \Rightarrow \mathscr{P}$) » sont équivalentes.

Démonstration. □

Exemple 31. Le rectangle et le carré (quadrilatère).

Définition 6.

- La proposition : « $\forall x,\ \mathscr{P}(x)$ » est vraie si tout objet mathématique possède la propriété $\mathscr{P}$, et fausse sinon, c'est-à-dire si au moins un objet ne possède pas la propriété $\mathscr{P}$.
- La proposition : « $\exists x,\ \mathscr{P}(x)$ » est vraie si au moins un objet mathématique possède la propriété $\mathscr{P}$, et fausse sinon, c'est-à-dire si aucun objet ne possède la propriété $\mathscr{P}$.

Théorème 3. ***Négation des quantificateurs***

- *Les propositions « non $\forall x \in E,\ \mathscr{P}(x)$ » et « $\exists x \in E$, non $\mathscr{P}(x)$ » sont équivalentes.*
- *Les propositions « non $\exists x \in E,\ \mathscr{P}(x)$ » et « $\forall x \in E$, non $\mathscr{P}(x)$ » sont équivalentes.*

Remarque 2. *Pour nier une phrase contenant un ou plusieurs quantificateurs, on réécrit cette phrase en remplaçant tous les « $\forall$ » par des « $\exists$ » et tous les « $\exists$» par des « $\forall$ », puis on nie le prédicat final.*

Exemple 32. Donner la négation de la proposition « $\forall \epsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in \mathbb{R}, |x-1| \leq \alpha \Rightarrow |\sqrt{x}-1| \leq \epsilon$ ».

Remarque 3.
On peut toujours permuter les quantificateurs « $\forall$ » entre eux, et les quantificateurs « $\exists$ » entre eux.

Exemple 33.
Les propositions « $\forall x \in \mathbb{R}^+, \forall y \in \mathbb{R}^-, x > y$ » et « $\forall y \in \mathbb{R}^-, \forall x \in \mathbb{R}^+, x > y$ » sont équivalentes.
Les propositions « $\exists x \in \mathbb{R}^+, \exists y \in \mathbb{R}^-, x > y$ » et « $\exists y \in \mathbb{R}^-, \exists x \in \mathbb{R}^+, x > y$ » sont équivalentes.

⚠ En revanche, la permutation d'un « $\forall$ » et d'un « $\exists$ » n'est pas automatique.

Exemple 34. « $\forall n \in \mathbb{N}, \exists p \in \mathbb{N} \mid n \leq p$ » est une proposition vraie (pour chaque entier n, l'entier $p = n+1$ convient par exemple). Mais « $\exists p \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N} \mid n \leq p$ » est une proposition fausse car aucun entier est supérieur à tout autre entier (l'ensemble $\mathbb{N}$ n'est pas majoré).

2 Vocabulaire ensembliste

a Notion d'ensemble

Définition 7.

- Un *ensemble* est une « collection » d'éléments. Il peut être défini par la liste de ses éléments (ensemble défini en extension) ou par une propriété (ensemble défini en compréhension).
- L'*ensemble vide* noté $\varnothing$ est l'ensemble qui ne contient aucun élément.
- Un ensemble ne contenant qu'un seul élément est appelé *singleton*.

Exemple 35. $\{3,5,7\}$ $\{n^2,\ n \in \mathbb{Z}\}$ $\{\ n \in \mathbb{N}\ /\ 7 \mid n\}$ $\{0\}$

Définition 8. On dit que x *appartient* à E et on note $x \in E$ si x est un élément de E . Sinon, on note $x \notin E$.

Définition 9. Si A et B sont deux ensembles, on dit que A est inclus dans B ou que A est une partie de B ou un sous-ensemble de B et on note $A \subset B$ si tout élément de A est un élément de B . Sinon, on note $A \not\subset B$.

Exemple 36. $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$

Exemple 37. Soient $\mathscr{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et $\mathscr{D}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions dérivables de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Quelle inclusion y a-t-il entre ces deux ensembles ?

Exercice 11. Soit $\mathscr{C}$ l'ensemble des suites constantes et $\mathscr{G}$ l'ensemble des suites géométriques. A-t-on $\mathscr{C} = \mathscr{G}$?

Propriété 1. *Soient A et B deux ensembles. Alors :*

$$A \subset B \Leftrightarrow \forall x \in A, x \in B$$

Remarque 4. *On a donc $A \not\subset B$ si et seulement si ...*

b Applications

Définition 10. Le *produit cartésien* de deux ensembles E et F est l'ensemble $E \times F$ des couples formés d'un élément de E puis d'un élément de F, c'est-à-dire : $\{(x, y),\ x \in E,\ y \in F\}$.
Si $E = F$, on note $E^2 = E \times E$.

Remarque 5. *Le produit cartésien $E \times F$ est un ensemble de couples d'éléments donc, en particulier, ne contient ni E ni F.*

Définition 11. Une application d'un ensemble E dans un ensemble F est un ensemble de couples $G \subset E \times F$ tel que, pour tout $x \in E$, il existe un unique $y \in F$ vérifiant $(x, y) \in G$. L'ensemble des applications de E dans F est noté F^E ou $\mathscr{F}(E, F)$.

Remarque 6. *On note $f(x)$, l'unique $y \in F$ tel que $(x, y) \in G$ et on adopte la notation plus simple pour une application :*

$$f : \begin{cases} E \longrightarrow F \\ x \longmapsto f(x) \end{cases}$$

Définition 12. Soient $f : E \longrightarrow F$ une application et E' un sous-ensemble E. On note $f_{|E'}$ la restriction de f à E'.

$$f_{|E'} : \begin{cases} E' \longrightarrow F \\ x \longmapsto f(x) \end{cases}$$

Définition 13. Soient $f : E \longrightarrow F$ et $g : F \longrightarrow G$ deux applications. La composée $g \circ f$ est l'application de E dans G qui associe, à tout $x \in E$, l'élément $g(f(x)) \in G$.

Propriété 2. *Soit $f, g, h \in E^E$. Alors*

$$f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h \qquad f \circ Id_E = Id_E \circ f = f$$

Remarque 7. *En général, on ne peut pas permuter les applications, ou en d'autres termes, la composition n'est pas commutative.*

Exemple 38. Trouver deux applications $f, g \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ telles que $f \circ g \neq g \circ f$.

Définition 14. Soit $f : E \longrightarrow F$ une application.

- L'*image d'un élément* $x \in E$ par l'application f est l'élément $f(x) \in F$.
- L'*image* (directe) d'une partie $E' \subset E$ est la partie de F définie par

$$f(E') = \{f(x), x \in E'\}$$

c'est-à-dire l'ensemble des images des éléments de E'.

Exemple 39. Soit $f : \begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto x^2 \end{cases}$

Donner l'image des sous-ensembles suivants $E_1 : [0,1]$, $E_2 : [-2,3[$ et $E_3 : \mathbb{R}^+$ par l'application f.

Définition 15. Soit $f : E \longrightarrow F$ une application.

- Un *antécédent* d'un élément $y \in F$ est un élément $x \in E$ tel que $f(x) = y$.
- L'*image réciproque* d'une partie $F' \subset F$ est la partie de E définie par

$$f^{-1}(F') = \{x \in E,\ f(x) \in F'\}$$

c'est-à-dire l'ensemble de tous les antécédents des éléments de F'.

Exemple 40. Soit $f : \begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto x^2 \end{cases}$

Donner l'image réciproque des ensembles suivants par la fonction f :

- $F_1 : \mathbb{R}^+$
- $F_2 : \{-2\}$
- $F_3 : \{4\}$
- $F_4 : [0;9]$
- $F_5 : \mathbb{R}$
- $F_6 : \{0\}$

Propriété 3. *Soit $f : E \longrightarrow F$ une application.*

1. $\forall A \in \mathscr{P}(E),\ \ A \subset f^{-1}(f(A))$

2. $\forall B \in \mathscr{P}(F),\ \ f(f^{-1}(B)) \subset B$

Démonstration. □

Il faut faire attention à ne pas « simplifier » sans réfléchir les expressions avec images directes et réciproques.

Exercice 12. Avec l'application f de l'exemple précédent, avons-nous "$f^{-1}(f([0,1])) = f(f^{-1}([0,1]))$" ?

Définition 16. Soit $f : E \longrightarrow F$ une application.

- **Injection :** l'application f est *injective* si tout élément $y \in F$ a au plus un antécédent $x \in E$.

$$\forall x, x' \in E,\ \ f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'$$

- **Surjection :** l'application f est *surjective* si tout élément $y \in F$ a au moins un antécédent $x \in E$.

$$\forall y \in F, \exists x \in E \quad f(x) = y$$

- **Bijection :** l'application f est *bijective* si tout élément $y \in F$ a exactement un antécédent $x \in E$.

$$\forall y \in F, \exists! x \in E \quad f(x) = y$$

Remarque 8. *f est bijective si, et seulement si, f est injective et surjective.*

- Pour démontrer la **surjectivité**, on cherche si pour tout $y \in F$ l'équation $y = f(x)$ admet une solution x.
- Pour l'**injectivité**, on étudie l'équation $f(x) = f(x')$ et, dans le cas d'une application injective, on doit en déduire $x = x'$.

Remarque 9. *Les caractères injectifs, surjectifs et donc bijectifs dépendent des ensembles de départ et d'arrivée :*

Exemple 41.

- ☐ $k : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array} \right.$ n'est ni injective, ni surjective.
- ☐ $l : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array} \right.$ est surjective mais pas injective.
- ☐ $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array} \right.$ est injective mais pas surjective.
- ☐ $g : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array} \right.$ est injective et surjective donc bijective.

Exercice 13. Intéressez-vous a fonction cube et faite le même type d'exercice que dans l'exemple précédent.

Exemple 42. La fonction $x \longmapsto \dfrac{x+1}{x-1}$ est injective sur $\mathbb{R} \backslash \{1\}$.

Exemple 43. Soit E un ensemble et A une partie non vide de E. L'application

$$\varphi : \left| \begin{array}{ccc} \mathscr{P}(E) & \longrightarrow & \mathscr{P}(E) \\ X & \longmapsto & X \cup A \end{array} \right.$$

Est-elle injective ? Surjective ?

Exercice 14. Trouver une bijection de $\mathbb{N}^2$ dans $\mathbb{N} \backslash \{0\}$.

Définition 17. Une application $f : E \longrightarrow F$ est inversible s'il existe une application $g : F \longrightarrow E$ qui satisfait les deux conditions suivantes : $f \circ g = Id_F$, et $g \circ f = Id_E$. Cette application g est appelée inverse de f.

Propriété 4. *Une application est bijective si, et seulement si, elle est inversible. L'inverse d'une application f bijective est appelé bijection réciproque de f et noté f^{-1}.*

Démonstration. ☐

Remarque 10. *Il convient de ne pas confondre $f^{-1}(\{y\})$ l'ensemble des antécédents de y (qui est toujours défini) et $f^{-1}(y)$ l'élément image de y par la bijection réciproque (qui n'est définie que si f est bijective).*

Propriété 5. *La composée de deux applications injectives (respectivement surjectives, bijectives) est injective (respectivement surjective, bijective).*

Démonstration. ☐

Exemple 44. La fonction $x \longmapsto \ln(x+3)$ est bijective de $]-3, +\infty]$ sur $\mathbb{R}$.

Définition 18. Soient $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction et A une partie de E. On dit que A est stable par f si $f(A) \subset A$, c'est-à-dire si pour tout $x \in A$, $f(x) \in A$.

Exemple 45. L'ensemble $\mathbb{R}_+^*$ est stable par la fonction $x \longmapsto \dfrac{1}{x}$.

Exemple 46. L'intervalle $[0,1]$ est stable par la fonction $x \longmapsto \sqrt{1-x}$.

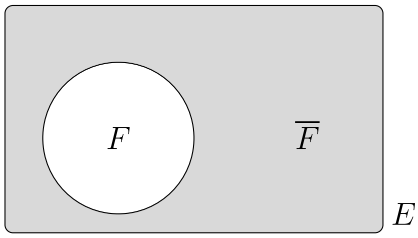
c Opérations ensemblistes

Définition 19.

- L'*ensemble des parties* de E est noté $\mathscr{P}(E)$.
- Si $F \subset E$, alors le *complémentaire* de F dans E est l'ensemble $\overline{F}$ défini par

$$\forall x \in E, \qquad x \in \overline{F} \Leftrightarrow x \notin F$$

Sur la figure ci-dessous, le complémentaire de F correspond à la zone grisée.



D'autres notations sont possibles pour le complémentaire de F dans E : $F^{\complement}$, $E \setminus F$ (notation à privilégier s'il y a une ambiguïté sur l'ensemble dans lequel on prend le complémentaire) ou encore $\complement_E^F$.

Exemple 47. Donner l'ensemble des parties de $\{0,1\}$.

Exercice 15. Soit $a, b, c \in \mathbb{R}$, expliciter l'ensemble $\mathscr{P}(\{a,b,c\})$.

Exemple 48. L'ensemble des suites convergeant vers 0 est une partie de l'ensemble des suites réelles.

Propriété 6. *Soient E un ensemble et A une partie de E. Alors :*

$$\overline{E} = \varnothing \qquad \overline{\varnothing} = E \qquad \overline{\overline{A}} = A$$

Exemple 49. Soient A et B deux parties d'un ensemble E . Montrer que si $A \subset B$ alors : $\overline{B} \subset \overline{A}$.

Définition 20. Pour tout ensemble fini E , on appelle *cardinal* de E et on note $Card(E)$ (ou $\#E$ ou $|E|$) le nombre d'éléments de E .

Exemple 50. Pour tous $a, b \in \mathbb{Z}$, on note $[\![a,b]\!]$ l'ensemble des entiers compris entre a et b :
$[\![a,b]\!] \;=\; \{n \in \mathbb{Z} \backslash a \leq n \leq b\}$. Si $a \leq b$ alors $Card([\![a,b]\!]) = b - a + 1$.

Propriété 7. *Soient E un ensemble et $n \in \mathbb{N}$ tels que $Card(E) = n$. Alors $Card(\mathscr{P}(E)) = 2^n$.*

Démonstration. □

Exercice 16. Donner la valeur de $Card(\mathscr{P}([\![0,3]\!]))$.

Exercice 17. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, E un ensemble de cardinal n. Soit B un sous-ensemble de E de cardinal r avec r un entier entre 0 et n. Montrer que le nombre de sous-ensembles A de E tel que $A \subseteq B$ vaut 2^r.

Définition 21. Soient F et G deux parties d'un ensemble E.

- L'intersection de F et G est la partie de E , notée $F \cap G$, formée des éléments communs à F et G, c'est-à-dire la partie définie par
$$\forall x \in E, \quad x \in F \cap G \Leftrightarrow (x \in F \text{ et } x \in G)$$
- L'union de F et G est la partie de E , notée $F \cup G$, formée des éléments appartenant à F ou appartenant à G, c'est-à-dire la partie définie par
$$\forall x \in E, \quad x \in F \cup G \Leftrightarrow (x \in F \text{ ou } x \in G)$$

Exemple 51. Soient F et G deux parties d'un ensemble E telles que $F \cap G = F \cup G$. Montrer que $F = G$.

Définition 22. Soient I un ensemble et $(A_i)_{i \in I}$ une famille d'ensembles indicé sur I (e.i. pour tout $i \in I$, A_i est un ensemble).

- On appelle *réunion* des A_i et on note $\bigcup\limits_{i \in I} A_i$ l'ensemble :
$$\bigcup_{i \in I} A_i \;=\; \{x \mid \exists i \in I \text{ tel que } \; x \in A_i\}$$
- On appelle *intersection* des A_i et on note $\bigcap\limits_{i \in I} A_i$ l'ensemble :
$$\bigcup_{i \in I} A_i \;=\; \{x \mid \forall i \in I,\; x \in A_i\}$$

Exemple 52. Si $a \in \mathbb{Z}$, on note $a\mathbb{Z} = \{an,\; n \in \mathbb{Z}\}$ l'ensemble des multiples de a. Que vaut $2\mathbb{Z} \cap 3\mathbb{Z}$?

d Loi de composition interne

Définition 23. Une *loi de composition interne* sur un ensemble E est une application de E^2 dans E.
$$\begin{array}{rccc} \star : & E \times E & \longrightarrow & E \\ & (x,y) & \longmapsto & x \star y \end{array}$$

Exemple 53.

- Les opérations $+, \times$ définissent des lois de composition interne sur les ensembles de nombres usuels $(\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C})$.
- La composition $\circ$ est une loi de composition interne sur $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

Définition 24. Soit $\star$ une loi de composition interne sur un ensemble E.

- La loi $\star$ est *commutative* si
$$\forall (x,y) \in E^2, \quad x \star y = y \star x$$
- La loi $\star$ est *associative* si
$$\forall (x,y,z) \in E^3, \quad (x \star y) \star z = x \star (y \star z)$$
- La loi $\star$ admet *un élément neutre* si
$$\exists e \in E,\; \forall x \in E, \quad x \star e = e \star x = x$$
- Si la loi $\star$ admet un élément neutre $e \in E$, un élément $x \in E$ admet *un symétrique* dans E pour $\star$ si
$$\exists y \in E, \quad x \star y = y \star x = e$$

Exemple 54. Étudier les caractéristiques des lois de l'exemple précédent.

Remarque 11.

- *Toutes les lois ne sont pas commutatives : la composition des fonctions est un contre-exemple.*
- *L'associativité indique qu'il n'y a pas d'ordre de priorité dans les calculs qui n'impliquent que $\star$: on peut donc les mener dans l'ordre que l'on veut.*

Propriété 8. *Soit $\star$ une loi de composition interne sur un ensemble E.*

- *L'élément neutre $e \in E$, lorsqu'il existe, est unique.*
- *Lorsqu'une loi associative $\star$ admet un élément neutre $e \in E$ et qu'un élément x admet un symétrique, ce symétrique est unique.*

Démonstration. □

Définition 25. Soit E un ensemble muni de deux lois de composition interne $\diamond$ et $\star$.
La loi $\star$ est *distributive* sur la loi $\diamond$ si

$$\forall (x,y,z) \in E^3, \quad z \star (x \diamond y) = (z \star x) \diamond (z \star y)$$

$$\forall (x,y,z) \in E^3, \quad (x \diamond y) \star z = (x \star z) \diamond (y \star z)$$

Exemple 55. Sur les ensembles de nombres usuels, la multiplication $\times$ des nombres est distributive sur l'addition $+$.

Propriété 9. *Soit E un ensemble.*

- *L'opération $\cup$ est une loi de composition interne commutatives et associatives de $\mathscr{P}(E)$, d'élément neutre $\varnothing$.*
- *L'opération $\cap$ est une loi de composition interne commutatives et associatives de $\mathscr{P}(E)$, d'élément neutre E.*

Démonstration. □

Propriété 10. *Soit A une partie de E et $(A_i)_{i \in I}$ une famille de parties de E. Alors*

- *La loi $\bigcup$ est distributive sur la loi $\bigcap$.*

$$A \bigcup \left(\bigcap_{i \in I} A_i \right) = \bigcap_{i \in I} (A \cup A_i)$$

- *La loi $\bigcap$ est distributive sur la loi $\bigcup$.*

$$A \bigcap \left(\bigcup_{i \in I} A_i \right) = \bigcup_{i \in I} (A \cap A_i)$$

Démonstration. □

On prendra garde de toujours laisser les parenthèses quand il y a des $\cap$ et des $\cup$ à la fois.
Ainsi $F \cup G \cap H$ n'a pas de sens.

Définition 26. La *fonction indicatrice* d'une partie F de E est l'application $\mathbb{1}_F : E \longrightarrow \{0,1\}$ définie, pour tout $x \in E$, par

$$\begin{array}{rccl} \mathbb{1}_F : & E & \longrightarrow & \{0,1\} \\ & x & \longmapsto & \begin{cases} 1 & \text{si } x \in F \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \end{array}$$

Exemple 56.

- Les fonctions indicatrices de E et de $\varnothing$ sont respectivement les fonctions constantes sur E égales à 1 et à 0 respectivement.
- Tracer la fonction $\mathbb{1}_{[0,1]}$ sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Exemple 57. Soient E un ensemble, A et B deux parties de E. Exprimer les fonctions $\mathbb{1}_{\overline{A}}$, $\mathbb{1}_{A\cap B}$ et $\mathbb{1}_{A\cup B}$ à l'aide des fonctions $\mathbb{1}_A$ et $\mathbb{1}_B$.

Remarque 12. $F = \{x \in E,\ \mathbb{1}_F(x) = 1\}$. *On en déduit que deux parties ayant la même fonction indicatrice sont égales. Pour montrer une égalité entre ensembles, il suffit de montrer l'égalité des fonctions indicatrices.*

Propriété 11. ***(Les formules de De Morgan)***
Soient E un ensemble, F et G deux parties de E.

$$\overline{F \cap G} = \overline{F} \cup \overline{G}, \qquad \overline{F \cup G} = \overline{F} \cap \overline{G}.$$

Démonstration. □

Exercice 18. Soit A et B deux parties d'un ensemble E. Résoudre l'équation (d'inconnue $X \in \mathscr{P}(E)$) $A \cap X = B$ puis l'équation $A \cup X = B$.

Exercice 19. Soit E un ensemble. La différence symétrique de deux parties F et G de E est la partie

$$F \Delta G = (\overline{F} \cap G) \cup (F \cap \overline{G}).$$

1. Faire un schéma pour représenter la différence symétrique de F et G.
2. Montrer que, pour toutes parties F et G de E, $F\Delta G = (F \cup G) \cap \overline{F \cap G}$.
3. Vérifier que, pour toutes parties F et G de E, la fonction indicatrice de $F\Delta G$ est égale à

$$\mathbb{1}_F + \mathbb{1}_G - 2\mathbb{1}_F\mathbb{1}_G.$$

4. Montrer que Δ est une loi de composition interne sur $\mathscr{P}(E)$ associative, commutative, d'élément neutre $\varnothing$ et telle que toute partie admette un symétrique.
5. Montrer que la loi $\cap$ est distributive sur Δ.

Définition 27. Soient E un ensemble et $(A_i)_{i\in I}$ une famille de parties de E. La famille est une *partition* de E si

- Aucune partie n'est vide
$$\forall i \in I, \quad A_i \neq \varnothing.$$
- Deux parties distinctes sont disjointes
$$\forall (i,j) \in I^2, \quad i \neq j \ \Rightarrow\ A_i \cap A_j = \varnothing.$$
- La réunion est égale à E
$$\bigcup_{i\in I} A_i \ = \ E.$$

Exemple 58. La famille $([n, n+1[)_{n\in\mathbb{Z}}$ est une partition de $\mathbb{R}$: les parties sont non vides, disjointes et de réunion $\mathbb{R}$. Il s'agit de partitionner l'ensemble des réels selon leur partie entière. Proposer des recouvrements de $\mathbb{R}$ qui ne forment pas une partition.

III Relations binaires

1 Introduction et définitions

- Dès que l'on compare deux objets, qu'on les met en rapport les uns avec les autres, qu'on les classe, on utilise des relations binaires. Par exemple, toutes les phrases suivantes établissent des liens entre des objets :

□ $4 \leq 9$.

□ 12 divise 48.

□ $3+2i$ et $3-2i$ ont le même module.

□ (u_n) et (v_n) ont la même limite.

Exemple 59. La relation $<$ sur $[\![1,3]\!]$ est entièrement caractérisée par les affirmations $1<2, 1<3$ et $2<3$. On peut définir la relation $<$ sur $[\![1,3]\!]$ comme l'ensemble $\{(1,2),(1,3),(2,3)\}$ des couples $(x,y) \in [\![1,3]\!]^2$ pour lesquels $x<y$.

Exemple 60. La relation de divisibilité sur $[\![1,7]\!]$ serait l'ensemble :

$$\{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6),(1,7),(2,2),(2,4),(2,6),(3,3),(3,6),(4,4),(5,5),(6,6),(7,7)\}$$

des couples $(x,y) \in [\![1,7]\!]^2$ pour lesquels $x \mid y$.
On peut aussi représenter par un tableau à double entrée cette relation. Une croix dans la case (x,y) indique alors que x divise y :

x \ y	1	2	3	4	5	6	7
1	×	×	×	×	×	×	×
2		×		×		×	
3			×			×	
4				×			
5					×		
6						×	
7							×

Définition 28. Soit E un ensemble. On appelle *relation binaire* sur E toute partie $\mathscr{R}$ de $E \times E$. Si $\mathscr{R}$ est une relation binaire sur E, la proposition $(x,y) \in \mathscr{R}$ sera notée $x\mathscr{R}y$ et on lira « x est en relation avec y par la relation $\mathscr{R}$ ».

Exemple 61. Représenter graphiquement les relations binaires $=$, $<$ et $>$ sur $[0,1]$.

Exemple 62. Si E est l'ensemble des droites du plan, on peut définir la relation « être parallèles » par $D \mathscr{R} D' \Leftrightarrow D \mathbin{//} D'$.

Définition 29. Soit $\mathscr{R}$ une relation binaire sur E.

- On dit que la relation $\mathscr{R}$ est *réflexive* si et seulement si : $\forall x \in E,\quad x\mathscr{R}x$.
- On dit que la relation $\mathscr{R}$ est *symétrique* si et seulement si : $\forall (x,y) \in E^2,\quad x\mathscr{R}y \Rightarrow y\mathscr{R}x$.
- On dit que la relation $\mathscr{R}$ est *transitive* si et seulement si : $\forall (x,y,z) \in E^3,\quad (x\mathscr{R}y \text{ et } y\mathscr{R}z) \Rightarrow x\mathscr{R}z$.
- On dit que la relation $\mathscr{R}$ est *antisymétrique* si et seulement si : $\forall (x,y) \in E^2,\quad (x\mathscr{R}y \text{ et } y\mathscr{R}x) \Rightarrow x=y$.

⚠ Une relation binaire **antisymétrique** n'est pas le contraire d'une relation binaire symétrique. Si cela était le cas, une relation antisymétrique ne pourrait pas être réflexive. Penser à la relation $\leq$ sur $\mathbb{R}$.

Remarque 13. *Soit $\mathscr{R}$ une relation binaire sur E à la fois symétrique et antisymétrique, alors $\mathscr{R}$ est la relation d'égalité sur E.*

Exemple 63. Donner les propriétés des relations binaires des exemples suivants dans un tableau.

1. Si E est un ensemble quelconque, on dispose de la relation d'égalité : $x\mathscr{R}_1 y \Leftrightarrow x = y$.
2. Si $E = \mathbb{R}$, on définit la relation $\leq$ par $x\mathscr{R}_2 y \Leftrightarrow x \leq y$.
3. Si E est l'ensemble des droites du plan, on définit la relation : $D\ \mathscr{R}_3\ D' \Leftrightarrow D\ //\ D'$.
4. Si $E = \mathbb{R}$, on définit la relation $>$ par $x\mathscr{R}_4 y \Leftrightarrow x > y$.
5. Si $E = \mathbb{Z}$, on définit la relation de divisibilité : $x\mathscr{R}_5 y$ si et seulement si x divise y.
6. Si $E = \mathbb{Z}$ et si $n \in \mathbb{N}^*$, on a la relation $x\mathscr{R}_6 y \Leftrightarrow x \equiv y\ [n]$.
7. Soit X est un ensemble. Si $E = \mathscr{P}(X)$ on définit la relation d'inclusion : $A\mathscr{R}_7 B$ si et seulement si $A \subset B$.

Exercice 20. Donner les propriétés des relations binaires des exemples suivants dans un tableau.

1. Si $E = \mathbb{R}$ et si $\alpha \in \mathbb{R}^*$, on a la relation $x\mathscr{R}_8 y \Leftrightarrow x \equiv y\ [\alpha] \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}|\ x = y + k\alpha \Leftrightarrow x - y \in \alpha\mathbb{Z}$.
2. Si $E = \mathbb{R}^*$, on définit la relation « avoir le même signe » par : $x\mathscr{R}_9 y \Leftrightarrow x \times y > 0$.
3. Si $E = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, on définit la relation $\preccurlyeq$ par $f \preccurlyeq g \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \leq g(x)$.

Définition 30. Soit $\mathscr{R}$ une relation binaire sur E.

- Deux éléments $x, y \in E$ sont dits *comparables* si : $x\mathscr{R}y$ ou $y\mathscr{R}x$.
- La relation $\mathscr{R}$ est *totale* si deux éléments de E sont toujours comparables, c'est-à-dire si :

$$\forall x, y \in E,\ x\mathscr{R}y \text{ ou } y\mathscr{R}x$$

- Si la relation $\mathscr{R}$ n'est pas totale, la relation est dite *partielle*.

Exemple 64. La relation $\leq$ sur $\mathbb{R}$ est totale car pour tout $x, y \in \mathbb{R}$, ces deux nombres sont comparables pour la relation $\leq$. La relation $\preccurlyeq$ sur $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ est partielle. La relation $|$ de divisibilité sur $\mathbb{Z}$ est partielle. La relation d'inclusion $\subset$ sur $E = \mathscr{P}(X)$ est partielle dès que X contient au moins deux éléments.

2 Relations d'équivalence, partition et ensemble quotient

Définition 31. Une relation binaire $\mathscr{R}$ sur un ensemble E est appelée *relation d'équivalence* si et seulement si elle est réflexive, symétrique et transitive. Les relations d'équivalence sont généralement notées $=$ ou $\sim$ ou $\simeq$ ou $\approx$ ou $\equiv$ . . .

Schémas :

Exemple 65.

- La relation d'égalité sur un ensemble quelconque est une relation d'équivalence.
- Les relations de congruence sont des relations d'équivalence.
- La relation « avoir le même signe » sur $\mathbb{R}^*$ est une relation d'équivalence.
- La relation de parallélisme sur les droites du plan est une relation d'équivalence.

Définition 32. Soit E un ensemble muni d'une relation d'équivalence $\mathscr{R}$. Si $x \in E$, on appelle *classe d'équivalence* de x la partie de E notée $\overline{x}$ ou $\mathring{x}$ ou $cl(x)$ définie par :

$$cl(x) = \{y \in E \mid x\mathscr{R}y\}$$

Exemple 66. Sur $\mathbb{C}$ pour de la relation d'équivalence "avoir le même module", tracer les classes d'équivalence.

Exemple 67. Quelles sont les classes d'équivalence pour la relation d'égalité sur E ?

Exemple 68. Quelles sont les classes d'équivalence pour la relation de congruence modulo 2 sur $\mathbb{Z}$?
Soit $n \in \mathbb{N}^*$, quelles sont les classes d'équivalence pour la relation de congruence modulo n sur $\mathbb{Z}$?

Exercice 21. Soit $f : E \longrightarrow F$. On définit la relation $\sim$ sur E par :

$$\forall a, b \in E,\ a \sim b \Leftrightarrow f(a) = f(b)$$

Montrer qu'il s'agit d'une relation d'équivalence et décrire les classes d'équivalence.

Théorème 4. *Ensemble quotient*
Soit $\sim$ une relation d'équivalence sur un ensemble E.

- *Les classes d'équivalence pour $\sim$ forment une partition de E, c'est-à-dire qu'elles sont non vides, leur réunion est E tout entier et elles sont deux à deux disjointes.*
- *L'ensemble des classes d'équivalences de E pour $\sim$ est appelé l'**ensemble quotient** de E par $\sim$ et noté $E/_\sim$.*

Démonstration. □

Remarque 14. *Pour tout $x \in E$, la classe d'équivalence de x est un élément de $\mathscr{P}(E)$.*

Exemple 69. La relation « avoir le même signe » sur $\mathbb{R}^*$ possède deux classes d'équivalence, la classe $\mathbb{R}^{*+}$ et la classe $\mathbb{R}^{*-}$. L'ensemble quotient associé est donc l'ensemble d'ensembles $\{\mathbb{R}^{*-}, \mathbb{R}^{*+}\}$

Exercice 22. On définit une relation $\mathscr{R}$ sur $\mathbb{R}$ par $x\mathscr{R}y$ si $\cos^2(x) + \sin^2(y) = 1$
Montrer que $\mathscr{R}$ est une relation d'équivalence puis déterminer ses classes d'équivalence.

Exercice 23. Montrer que la relation $(a,b)\mathscr{R}(c,d) \Leftrightarrow a + d = b + c$ est une relation d'équivalence sur $\mathbb{N}^2$. Construire une bijection entre $\mathbb{Z}$ et l'ensemble des classes d'équivalence $\mathbb{N}^2/_{\mathscr{R}}$. Ceci est en fait la définition de $\mathbb{Z}$.

3 Relation d'ordre

Définition 33. Une relation binaire $\mathscr{R}$ sur un ensemble E est appelée *relation d'ordre* si et seulement si elle est réflexive, antisymétrique et transitive. Le couple $(E, \mathscr{R})$ est alors appelé un ensemble ordonné. Les relations d'ordre sont généralement notées $\leq$ ou $\preccurlyeq$ ou $\lesssim$ ou $\leqslant$ . . .

Exemple 70. La relation $\leq$ sur $\mathbb{R}$ est une relation d'ordre, la relation est totale comme nous l'avons vu dans l'**exemple 64**. Donc $\mathbb{R}$ est dit *totalement ordonné* par la relation d'ordre $\leq$.

Exemple 71. Soit X un ensemble avec au moins deux éléments. La relation $\subset$ sur $\mathscr{P}(X)$ est une relation d'ordre, la relation est partielle comme nous nous l'avons vu dans l'exemple 64. Donc $\mathscr{P}(X)$ est dit *partiellement ordonné* par la relation d'ordre $\subset$.

Exemple 72. La relation | de divisibilité sur $\mathbb{Z}$ est-elle une relation d'ordre ? Donner une relation d'ordre sur $\mathbb{N}$ qui ordonne partiellement cet ensemble.

Exemple 73. Soit $E = \mathscr{F}([0,1],\mathbb{R})$, on définit la relation $\preccurlyeq$ sur E $f \preccurlyeq g$ si et seulement si pour tout $x \in [0,1]$, $f(x) \leq g(x)$. Montrer qu'il s'agit d'une relation d'ordre et justifier que E est partiellement ordonné.

Définition 34. Soit $\leq$ est une relation d'ordre sur E, la relation $<$ est définie sur E par : $x < y \Leftrightarrow x \leq y$ et $x \neq y$
Cette relation $<$ est appelée la *relation stricte* associée à $\leq$.

Propriété 12. *Soient $\leq$ une relation d'ordre sur E et $<$ la relation stricte associée à $\leq$.*
La relation $<$ est transitive et antisymétrique.

Démonstration. □

⚠ La relation $<$ n'est plus une relation d'ordre sur E, la relation $<$ n'est pas réflexive.

4 Majorants/minorants, plus grand/plus petit élément, borne supérieure/inférieure

Définition 35. Soient $(E,\leq)$ un ensemble ordonné et $A \subset E$ une partie de E.

- On dit que $x \in E$ est un *majorant* de A si et seulement si pour tout $a \in A$, $a \leq x$.
  On dit alors que A est *majorée* par x.
- On dit que $x \in E$ est un *minorant* de A si et seulement si pour tout $a \in A$, $x \leq a$.
  On dit alors que A est *minoré* par x.
- On dit que A est *bornée* pour $\leq$ si A est à la fois majorée et minorée.
- On dit que A possède un *plus grand élément* x (ou un *maximum*) si et seulement si x est un majorant de A et si $x \in A$. On note alors $x = maxA$.
- On dit que A possède un *plus petit élément* x (ou un *minimum*) si et seulement si x est un minorant de A et si $x \in A$. On note alors $x = minA$.

Exemple 74. La partie $]-\infty,\pi]$ pour la relation d'ordre $\leq$ sur $\mathbb{R}$ est majorée par 4 ou 1789 mais aussi par π. En revanche, elle n'est pas minorée.

Exemple 75. Soit X un ensemble. $(\mathscr{P}(X),\subset)$ admet-il un plus grand élément ? un plus petit élément ?

Exemple 76. L'ensemble $\mathbb{N}$ muni de la relation de divisibilité admet-il un plus petit élément ? Un plus grand élément ? Et si on considère l'ensemble $\mathbb{N}\backslash\{0,1\}$?

Exemple 77. Traiter la partie $\{8,10,12\}$ de $\mathbb{N}$ pour la relation de divisibilité $|$
(minorant, majorant, minimum, maximum).

Propriété 13. *Soient $(E,\leq)$ un ensemble ordonné et $A \subset E$ une partie de E. Si un plus grand élément ou un plus petit élément existe, il est unique. Ceci justifie les notations* max *et* min *de la* ***définition 35****.*

Démonstration. □

Remarque 15. *Soit E un ensemble. Le plus petit élément et le plus grand élément d'un sous-ensemble de E n'existent pas forcément.*

Exemple 78. L'ensemble $]0,1[$ muni de la relation $\leq$ n'admet ni plus grand ni plus petit éléments.

Exercice 24. Soit E un ensemble avec au moins deux éléments. Sur l'ensemble ordonné $(\mathscr{P}(E),\subset)$, montrer que l'ensemble des singletons de E qui est une partie de $\mathscr{P}(E)$ ne possède pas de plus grand élément.

Propriété 14. *Soient A et B deux parties d'un ensemble ordonné $(E, \leq)$ admettant chacune un plus grand élément et telles que $A \subset B$. Alors, $maxA \leq maxB$.*

Démonstration. □

Théorème 5. ***(Propriétés fondamentales des entiers naturels)***
L'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers est un ensemble non vide ordonné tel que :

- *toute partie non vide de $\mathbb{N}$ admet un plus petit élément.*
- *toute partie non vide majorée admet un plus grand élément.*
- *$\mathbb{N}$ n'admet pas de plus grand élément.*

Démonstration. **Admis.** □

Exercice 25. Donner des énoncés similaires pour $\mathbb{Z}$.

⚠ Ceci est faux dans $\mathbb{R}$.

Définition 36. Soit A une partie d'un ensemble ordonné $(E, \leq)$.

- Si A est majorée, la *borne supérieure* de A notée $supA$ est, lorsqu'elle existe, le plus petit majorant de A dans E.
- Si A est minorée, la *borne inférieure* de A notée $infA$ est, lorsqu'elle existe, le plus grand minorant de A dans E.

Remarque 16. *On remarque que contrairement à $maxA$ et $minA$, $supA$ et $infA$ ne sont a priori pas des éléments de A.*

Exemple 79.
Soit $A = \{x \in \mathbb{Q}, x^2 < 2\}$, la borne supérieure dans $\mathbb{R}$ est $supA = \sqrt{2} \notin A$.
L'ensemble A n'a pas de borne supérieure dans $\mathbb{Q}$.
Soit $B = \{x \in \mathbb{Z}, x^2 < 2\}$, la borne supérieure dans $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ ou $\mathbb{R}$ est $supB = 1 \in B$.

Exemple 80. Soit E un ensemble, tout sous-ensemble A de $\mathscr{P}(E)$ possède une borne supérieure et une borne inférieure pour la relation d'inclusion $\subset$.

Exercice 26. Pour la relation de divisibilité $|$ sur $\mathbb{N}$, donner la borne inférieure et la borne supérieure de l'ensemble $\{6, 8, 10\}$. Y a-t-il un maximum ? un minimum ?

Propriété 15. *Soient A et B deux parties d'un ensemble ordonné $(E, \leq)$ admettant chacune une borne supérieure et telles que $A \subset B$. Alors, $supA \leq supB$.*

Démonstration. □

IV Compléments sur les nombres réels

1 Les nombres réels et propriété de la borne supérieure

- La construction de $\mathbb{N}$ est axiomatique, nous allons admettre son existence. Les lois internes sur $\mathbb{N}$ suivantes : l'addition + et la multiplication $\times$ ne seront pas définies et seront supposées admises.

- Pour les entiers relatifs $\mathbb{Z}$, on peut les définir comme vu dans l'**exercice 23** par les classes d'équivalences sur $\mathbb{N}^2$ de la manière suivante : pour (a,b) et (c,d) appartenant à $\mathbb{N}^2$, on pose

$$(a,b) \sim (c,d) \Leftrightarrow a+d=c+b \qquad (\text{en secret : } a-b=c-d)$$

Le nombre -5 représente alors la classe d'équivalence de $(0,5)$ qui contient aussi $(1,6)$, $(2,7)$ etc.
Le nombre 7 représente pour sa part la classe d'équivalence de $(7,0)$ qui contient aussi $(8,1)$,$(9,2)$ etc.

$$"(a,b) = (\text{Gain , Perte})"$$

On définit l'addition sur $\mathbb{Z}$ par :

$$(a,b)+(c,d)=(a+c,b+d)$$

On définit la multiplication sur $\mathbb{Z}$ par :

$$(a,b)\times(c,d)=(ac+bd,bc+ad)$$

Remarque 17.

- ☐ *Pour comprendre la multiplication sur $\mathbb{Z}$ il suffit de développer l'expression littéral $(a-b)\times(c-d)$.*
- ☐ *Nous admettrons que la somme et la multiplication sur $\mathbb{Z}$ qui revient à faire la somme et la multiplication entre deux classes d'équivalence sur $\mathbb{N}^2$ ne dépendent pas des représentants respectifs de chaque classe.*

Exemple 81. Retrouver avec ce qui précède que $(0,1)\times(0,1)=(1,0)$ et expliquer ainsi la règle des signes que vous avez appris au collège.

- Pour construire les rationnels $\mathbb{Q}$, on procède de la même manière via les classes d'équivalences sur $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}^*$ de la relation : pour (a,b) et (c,d) appartenant à $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}^*$, on pose

$$(a,b)\sim(c,d) \Leftrightarrow ad=cb \qquad \left(\text{en secret : } \frac{a}{b}=\frac{c}{d}\right)$$

Exercice 27. Montrer que la relation précédente sur $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}^*$ est une relation d'équivalence.

- La construction de $\mathbb{R}$ à partir de $\mathbb{Q}$ est plus difficile mais se fait également par une relation d'équivalence sur un ensemble de suites à valeurs dans $\mathbb{Q}$.
- L'ensemble des décimaux $\mathcal{D}$ est un cas particuliers des rationnels. Ce sont les nombres de la forme $\dfrac{a}{10^n}$ avec $a\in\mathbb{Z}$ et $n\in\mathbb{N}$. L'utilisation de 10 n'a rien de particulier mais se justifie uniquement par nos habitudes de calcul en base 10. On pourrait aussi prendre par exemple 2 et on obtient les nombres dyadiques.
- Les nombres réels qui ne sont pas rationnels sont appelés irrationnels $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$.

Rappel. Dans $\mathbb{R}$, une partie non vide et majorée n'a pas toujours de plus grand élément. C'est par exemple le cas de $A=]0,1[$. Cependant, l'ensemble de ses majorants est $[1,+\infty[$ qui lui admet 1 comme plus petit élément.

Définition 37. Soit A une partie de $\mathbb{R}$.

- Si A est majorée on note $\mathscr{M}(A)$ l'ensemble de ses majorants, c'est-à-dire $\{x\in\mathbb{R} \mid \forall a\in A, a\leq x\}$.
  Si $\mathscr{M}(A)$ possède un plus petit élément alors il s'agit de $supA$.
- Si A est minorée on note $m(A)$ l'ensemble de ses minorants, c'est-à-dire $\{x\in\mathbb{R} \mid \forall a\in A, a\geq x\}$.
  Si $m(A)$ possède un plus grand élément alors il s'agit de $infA$.

Remarque 18. *Soient $A \subset \mathbb{R}$ et $x \in \mathbb{R}$.*
$x = supA$ si et seulement si x est le plus petit des majorants de A

si et seulement si $\begin{cases} x \text{ majore } A. \\ \text{Si } y \text{ majore } A \text{alors} x \leq y. \end{cases}$ *si et seulement si* $\begin{cases} \forall a \in A, \ a \leq x. \\ (\forall y \in \mathbb{R}, \ x > y) \text{ alors } y \text{ ne majore pas } A. \end{cases}$

si et seulement si $\begin{cases} \forall a \in A, \ a \leq x. \\ \forall y \in \mathbb{R}, \ x > y, \ \exists a \in A, \ y < a. \end{cases}$ *si et seulement si* $\begin{cases} \forall a \in A, \ a \leq x. \\ \forall \epsilon > 0, \ \exists a \in A, \ x - \epsilon < a \leq x. \end{cases}$

Exemple 82. L'ensemble vide $\varnothing$ admet tout réel pour majorant, donc ne possède pas de borne supérieure car $\mathbb{R}$ n'est pas minoré.

Théorème 6. ***(Opérations sur les bornes supérieures)***
Soient A et B deux parties de $\mathbb{R}$ possédant chacune une borne supérieure.

- *La partie $A \cup B$ possède une borne supérieure et $sup(A \cup B) = max(supA, supB)$.*
- *L'ensemble $A + B = \{a + b \mid a \in A \text{ et } b \in B\}$ possède une borne supérieure et $sup(A + B) = supA + supB$.*
- *Pour tout $\lambda > 0$, l'ensemble $\lambda A = \{\lambda a \mid a \in A\}$ possède une borne supérieure et $sup(\lambda A) = \lambda supA$.*

Démonstration. □

Exercice 28. Donner des résultats analogues pour la *borne inférieure* et donner les démonstrations associées.

Exemple 83. Donner lorsqu'elles existent la borne inférieure et la borne supérieure dans $\mathbb{R}$ des ensembles $]-1, 1]$ et $]-1, +\infty[$.

Exemple 84. Déterminer sup et inf de $A = \left\{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}^*\right\}$

Exemple 85. Déterminer sup et inf de $B = \left\{\frac{1}{n} + \frac{1}{m} \mid n, m \in \mathbb{N}^*\right\}$

Exercice 29. Déterminer sup et inf de $C = \left\{(-1)^n - \frac{(-1)^n}{n} \mid n \in \mathbb{N}^*\right\}$

Remarque 19. *Le théorème suivant est à la base de nombreux résultats d'analyse de première année : théorème de la limite monotone, théorème des suites adjacentes, théorème de Bolzano-Weierstrass, théorème des valeurs intermédiaires, théorème des bornes atteintes, théorème de Heine...*

Théorème 7. ***(Propriété de la borne supérieure/inférieure)***

- ***Propriété de la borne supérieure*** *: Toute partie non vide majorée de $\mathbb{R}$ possède une borne supérieure.*
- ***Propriété de la borne inférieure*** *: Toute partie non vide minorée de $\mathbb{R}$ possède une borne inférieure.*

Démonstration. **Admis.** □

⚠ La propriété de la borne sup n'est pas valable pour $\mathbb{Q}$. $\{x \in \mathbb{Q}^+ \mid x^2 \leq 2\}$ est une partie majorée non vide de $\mathbb{Q}$ mais qu'elle n'admet pas de borne supérieure dans $\mathbb{Q}$.

Exemple 86. Montrons que tout réel positif admet une racine carrée.

2 Droite numérique achevée $\overline{\mathbb{R}}$

Définition 38. L'ensemble $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ est appelé *droite numérique achevée*.

On prolonge l'ordre de $\mathbb{R}$ à $\overline{\mathbb{R}}$ par : $\forall x \in \mathbb{R}, -\infty \leq x \leq +\infty$.
On a $sup\ \overline{\mathbb{R}} = +\infty = sup\ \mathbb{R}$ est le plus grand élément de $\overline{\mathbb{R}}$ et $inf\ \overline{\mathbb{R}} = -\infty = inf\ \mathbb{R}$ est le plus petit élément de $\overline{\mathbb{R}}$.
On a ainsi que toute partie de $\overline{\mathbb{R}}$ admet un *sup* et un *inf*, éventuellement $\pm\infty$.

Exemple 87.

☐ $sup\ ]0,+\infty[= +\infty$ dans $\overline{\mathbb{R}}$.

☐ $sup\ \varnothing = -\infty$ dans $\overline{\mathbb{R}}$.

☐ $inf\ ]-\infty,3] = -\infty$ dans $\overline{\mathbb{R}}$.

Exercice 30. Que vaut $inf\ \varnothing$ dans $\overline{\mathbb{R}}$?

Propriété-définition 1. ***(Extension des lois internes de $\mathbb{R}$ à $\overline{\mathbb{R}}$)***

- *On peut prolonger l'addition + sur $\mathbb{R}$ à $\overline{\mathbb{R}}$.*

  ☐ $\forall x \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\},\ x + (-\infty) = -\infty$

  ☐ $\forall x \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\},\ x + (+\infty) = +\infty$

- *On peut prolonger la multiplication × sur $\mathbb{R}$ à $\overline{\mathbb{R}}$*

  ☐ $\forall x \in \mathbb{R}_+^* \cup \{+\infty\},\ x \times (+\infty) = +\infty$

  ☐ $\forall x \in \mathbb{R}_+^* \cup \{+\infty\},\ x \times (-\infty) = -\infty$

  ☐ $\forall x \in \mathbb{R}_-^* \cup \{-\infty\},\ x \times (+\infty) = -\infty$

  ☐ $\forall x \in \mathbb{R}_-^* \cup \{-\infty\},\ x \times (-\infty) = +\infty$

  ☐ $\dfrac{1}{-\infty} = \dfrac{1}{+\infty} = 0$

⚠ Les expressions suivantes restent des formes indéterminées dont on ne donnera aucun sens :

$$+\infty + (-\infty), \qquad -\infty - (-\infty), \qquad 0 \times (\pm\infty), \qquad \frac{\pm\infty}{\pm\infty}.$$

3 Partie entière

Propriété-définition 2. ***(Partie entière)***
Soit $x \in \mathbb{R}$. Il existe un unique entier $n \in \mathbb{Z}$ pour lequel : $n \le x < n+1$, appelé la partie entière *de x et noté $\lfloor x \rfloor$ ou $E(x)$. Cet entier $\lfloor x \rfloor$ est donc le plus grand entier relatif inférieur ou égal à x.*

Démonstration. **Admis.** ☐

Exemple 88. $\lfloor 11 \rfloor = 11$, $\lfloor 5,2 \rfloor = 5$, $\lfloor 3 \rfloor = -3$, MAIS ATTENTION $\lfloor -6,6 \rfloor = -7$ (et non pas -6).

Exemple 89. Tracer la fonction partie entière sur l'intervalle $[-3,4]$.

Remarque 20. *Soit $x \in \mathbb{R}$, $\lfloor x \rfloor = sup\{n \in \mathbb{Z} \mid n \le x\}$.*
On a les encadrements suivants :

$$\boxed{\lfloor x \rfloor \le x < \lfloor x \rfloor + 1} \qquad \& \qquad \boxed{x - 1 < \lfloor x \rfloor \le x}$$

Exemple 90. Que vaut $\lfloor -x \rfloor$ en fonction de $\lfloor x \rfloor$?

Exemple 91. Déterminer pour tout $x \in \mathbb{R}$ la limite de la suite a définie par : $a_n = \dfrac{\lfloor 10^n x \rfloor}{10^n}$.

Exemple 92. Montrer que pour tout réel x, on a : $\left\lfloor \dfrac{1}{2}x \right\rfloor + \left\lfloor \dfrac{1}{2}(x+1) \right\rfloor = \lfloor x \rfloor$

Exercice 31. Trouver une condition nécessaire et suffisante sur $x \in \mathbb{R}$ pour que $\lfloor 2x \rfloor = 2\lfloor x \rfloor$.

Exemple 93. Soient $T > 0$ et $x \in \mathbb{R}$. Montrer que l'on peut toujours ramener x dans l'intervalle $[0, T[$ en lui ajoutant/retranchant un certain nombre $n_T \in \mathbb{N}$ de fois T. Expliciter la valeur de n_T.

Exemple 94. Soient $\epsilon > 0$ et $A > 0$ fixés. Le mot « rang » désigne un entier naturel.

- ☐ À partir de quel rang a-t-on $\dfrac{1}{n} < \epsilon$?
- ☐ À partir de quel rang a-t-on $n^2 > A$?
- ☐ À partir de quel rang a-t-on $\dfrac{1}{2^n} < \epsilon$?

4 Rudiments de topologie de $\mathbb{R}$

Le concept de *voisinage* n'est pas au programme de MPSI, mais il éclairera les chapitres d'analyse de l'année donc nous allons l'introduire ci-dessous.

Définition 39. (Voisinage d'un point de $\overline{\mathbb{R}}$ dans $\mathbb{R}$)

- Soit $a \in \mathbb{R}$. On appelle *voisinage de a* (dans $\mathbb{R}$) toute partie V de $\mathbb{R}$ pour laquelle : $\exists \epsilon > 0,\ ]a - \epsilon, a + \epsilon[\ \subset\ V$.
- On appelle *voisinage de $+\infty$* (dans $\mathbb{R}$) toute partie V de $\mathbb{R}$ pour laquelle : $\exists A > 0,\ ]A, +\infty[\ \subset\ V$.
- On appelle *voisinage de $-\infty$* (dans $\mathbb{R}$) toute partie V de $\mathbb{R}$ pour laquelle : $\exists A < 0,\ ]-\infty, A[\ \subset\ V$.

Exemple 95.

- ☐ Les ensembles $[-1, 1]$, $\{0\}$, $]-10^{-12}, 0.5] \cup \{3\}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\varnothing$, sont-t-ils des voisinages de 0 ?
- ☐ Donner deux voisinages de $+\infty$ et $-\infty$.

Théorème 8. ***(Propriétés des voisinages)***

- *Pour tout $a \in \overline{\mathbb{R}}$, l'intersection de deux voisinages de a est un voisinage de a.*
- *Deux points distincts de $\overline{\mathbb{R}}$ possèdent des voisinages disjoints. En d'autres termes, pour tous $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$ distincts, il existe un voisinage V_a de a et un voisinage V_b de b pour lesquels $V_a \cap V_b = \varnothing$.*

Démonstration. ☐

Définition 40. (Point intérieur/adhérent à une partie de $\mathbb{R}$)
Soient $A \subset \mathbb{R}$ et $x \in \mathbb{R}$.

- **Point intérieur :** On dit que x est *intérieur* à A si A contient un voisinage de x, (i.e. si : $\exists \epsilon > 0,\ ]x - \epsilon, x + \epsilon[\ \subset\ A$).
- **Point adhérent :** On dit que x est *adhérent* à A si A rencontre tout voisinage de x, (i.e. si : $\forall \epsilon > 0,\ ]x - \epsilon, x + \epsilon[\ \cap A \neq \varnothing$).

Schémas :

Exemple 96. Donner les points intérieurs et les points adhérents de l'ensemble $[0, 1[$.

Définition 41. (Partie dense de $\mathbb{R}$)
Une partie A de $\mathbb{R}$ est dite *dense* dans $\mathbb{R}$ si et seulement si

$$\forall x, y \in \mathbb{R},\ x < y \ \Rightarrow\ (\exists a \in A,\ x < a < y)$$

Remarque 21. *A « rencontre » tout intervalle ouvert non vide, c'est-à-dire que dans tout intervalle ouvert non vide il y a au moins un élément de A, il y en a même une infinité.*

Propriété 16. *Une partie A de $\mathbb{R}$ est dense dans $\mathbb{R}$ si et seulement si tout réel est adhérent à A.*

Démonstration. □

Propriété 17. ***(Caractérisation séquentielle de la densité)***
Une partie A de $\mathbb{R}$ est dense dans $\mathbb{R}$ si et seulement si tout réel est limite d'une suite d'éléments de A.

Démonstration. □

Propriété 18. ***(Densité de l'ensemble des rationnels/irrationnels)*** *$\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ sont denses dans $\mathbb{R}$.*

Démonstration. □

Exemple 97. l'ensemble $\{r^3,\ r \in \mathbb{Q}\}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

Exemple 98. Montrer que l'ensemble des nombres dyadiques $\left\{\dfrac{p}{2^n},\ p \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\right\}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

Exercice 32. Montrer que l'ensemble des nombres décimaux $\mathbb{D}$ est dense dans $\mathbb{R}$.