

Produit scalaire, espaces euclidiens

Exercices de Jean-Louis Rouget. Retrouver aussi cette fiche sur www.maths-france.fr

* très facile ** facile *** difficulté moyenne **** difficile ***** très difficile

I : Incontournable T : pour travailler et mémoriser le cours

Exercice 1 ***

Pour $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $N(A) = \text{Tr}(^tAA)$. Montrer que N est une norme vérifiant de plus $N(AB) \leq N(A)N(B)$ pour toutes matrices carrées A et B . N est-elle associée à un produit scalaire ?

[Correction ▼](#)

[005482]

Exercice 2 ***

Soit E un \mathbb{R} espace vectoriel de dimension finie. Soit $\| \cdot \|$ une norme sur E vérifiant l'identité du parallélogramme, c'est-à-dire : $\forall (x,y) \in E^2$, $\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$. On se propose de démontrer que $\| \cdot \|$ est associée à un produit scalaire. On définit sur E^2 une application f par : $\forall (x,y) \in E^2$, $f(x,y) = \frac{1}{4}(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2)$.

1. Montrer que pour tout (x,y,z) de E^3 , on a : $f(x+z,y) + f(x-z,y) = 2f(x,y)$.

2. Montrer que pour tout (x,y) de E^2 , on a : $f(2x,y) = 2f(x,y)$.

3. Montrer que pour tout (x,y) de E^2 et tout rationnel r , on a : $f(rx,y) = rf(x,y)$.

On admettra que pour tout réel λ et tout (x,y) de E^2 on a : $f(\lambda x,y) = \lambda f(x,y)$ (ce résultat provient de la continuité de f).

4. Montrer que pour tout (u,v,w) de E^3 , $f(u,w) + f(v,w) = f(u+v,w)$.

5. Montrer que f est bilinéaire.

6. Montrer que $\| \cdot \|$ est une norme euclidienne.

[Correction ▼](#)

[005483]

Exercice 3 **IT

Dans \mathbb{R}^4 muni du produit scalaire usuel, on pose : $V_1 = (1, 2, -1, 1)$ et $V_2 = (0, 3, 1, -1)$. On pose $F = \text{Vect}(V_1, V_2)$. Déterminer une base orthonormale de F et un système d'équations de F^\perp .

[Correction ▼](#)

[005484]

Exercice 4 **

Sur $\mathbb{R}[X]$, on pose $P|Q = \int_0^1 P(t)Q(t) dt$. Existe-t-il A élément de $\mathbb{R}[X]$ tel que $\forall P \in \mathbb{R}[X]$, $P|A = P(0)$?

[Correction ▼](#)

[005485]

Exercice 5 ***I Matrices et déterminants de GRAM

Soit E un espace vectoriel euclidien de dimension p sur \mathbb{R} ($p \geq 2$). Pour (x_1, \dots, x_n) donné dans E^n , on pose $G(x_1, \dots, x_n) = (x_i|x_j)_{1 \leq i,j \leq n}$ (matrice de GRAM) et $\gamma(x_1, \dots, x_n) = \det(G(x_1, \dots, x_n))$ (déterminant de GRAM).

1. Montrer que $\text{rg}(G(x_1, \dots, x_n)) = \text{rg}(x_1, \dots, x_n)$.

2. Montrer que (x_1, \dots, x_n) est liée si et seulement si $\gamma(x_1, \dots, x_n) = 0$ et que (x_1, \dots, x_n) est libre si et seulement si $\gamma(x_1, \dots, x_n) > 0$.

3. On suppose que (x_1, \dots, x_n) est libre dans E (et donc $n \leq p$). On pose $F = \text{Vect}(x_1, \dots, x_n)$.

Pour $x \in E$, on note $p_F(x)$ la projection orthogonale de x sur F puis $d_F(x)$ la distance de x à F (c'est-à-dire $d_F(x) = \|x - p_F(x)\|$). Montrer que $d_F(x) = \sqrt{\frac{\gamma(x, x_1, \dots, x_n)}{\gamma(x_1, \dots, x_n)}}$.

[Correction ▼](#)

[005486]

Exercice 6 **I

Soit a un vecteur non nul de l'espace euclidien \mathbb{R}^3 . On définit f de \mathbb{R}^3 dans lui-même par : $\forall x \in \mathbb{R}^3, f(x) = a \wedge (a \wedge x)$. Montrer que f est linéaire puis déterminer les vecteurs non nuls colinéaires à leur image par f .

[Correction ▼](#)

[005487]

Exercice 7 **I

Matrice de la projection orthogonale sur la droite d'équations $3x = 6y = 2z$ dans la base canonique orthonormée de \mathbb{R}^3 ainsi que de la symétrie orthogonale par rapport à cette même droite. De manière générale, matrice de la projection orthogonale sur le vecteur unitaire $u = (a, b, c)$ et de la projection orthogonale sur le plan d'équation $ax + by + cz = 0$ dans la base canonique orthonormée de \mathbb{R}^3 .

[Correction ▼](#)

[005488]

Exercice 8 **

$E = \mathbb{R}^3$ euclidien orienté rapporté à une base orthonormée directe \mathcal{B} . Etudier les endomorphismes de matrice A dans \mathcal{B} suivants :

$$1) A = -\frac{1}{3} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix} \quad 2) A = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 3 & 1 & \sqrt{6} \\ 1 & 3 & -\sqrt{6} \\ -\sqrt{6} & \sqrt{6} & 2 \end{pmatrix} \quad 3) A = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 8 & 1 & 4 \\ -4 & 4 & 7 \\ 1 & 8 & -4 \end{pmatrix}.$$

[Correction ▼](#)

[005489]

Exercice 9 ***

Soit $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix}$ avec a, b et c réels. Montrer que M est la matrice dans la base canonique orthonormée

directe de \mathbb{R}^3 d'une rotation si et seulement si a, b et c sont les solutions d'une équation du type $x^3 - x^2 + k = 0$ où $0 \leq k \leq \frac{4}{27}$. En posant $k = \frac{4 \sin^2 \varphi}{27}$, déterminer explicitement les matrices M correspondantes ainsi que les axes et les angles des rotations qu'elles représentent.

[Correction ▼](#)

[005490]

Exercice 10 **

\mathcal{B} est une base orthonormée directe de \mathbb{R}^3 donnée. Montrer que $\det_{\mathcal{B}}(u \wedge v, v \wedge w, w \wedge u) = (\det_{\mathcal{B}}(u, v, w))^2$ pour tous vecteurs u, v et w .

[Correction ▼](#)

[005491]

Exercice 11 ***I Inégalité de HADAMARD

Soit \mathcal{B} une base orthonormée de E , espace euclidien de dimension n . Montrer que : $\forall (x_1, \dots, x_n) \in E^n, |\det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n)| \leq \|x_1\| \dots \|x_n\|$ en précisant les cas d'égalité.

[Correction ▼](#)

[005492]

Exercice 12 **

Montrer que $u \wedge v | w \wedge s = (u | w)(v | s) - (u | s)(v | w)$ et $(u \wedge v) \wedge (w \wedge s) = [u, v, s]w - [u, v, w]s$.

[Correction ▼](#)

[005493]

Exercice 13 **I

Existence, unicité et calcul de a et b tels que $\int_0^1 (x^4 - ax - b)^2 dx$ soit minimum (trouver deux démonstrations, une dans la mentalité du lycée et une dans la mentalité maths sup).

[Correction ▼](#)

[005494]

Exercice 14 ***

Soit (e_1, \dots, e_n) une base quelconque de E euclidien. Soient a_1, \dots, a_n n réels donnés. Montrer qu'il existe un unique vecteur x tel que $\forall i \in \{1, \dots, n\}, x|e_i = a_i$.

[Correction ▼](#)

[005495]

Exercice 15 ****

Soit E un espace vectoriel euclidien de dimension $n \geq 1$. Une famille de p vecteurs (x_1, \dots, x_p) est dite obtusangle si et seulement si pour tout (i, j) tel que $i \neq j, x_i | x_j < 0$. Montrer que l'on a nécessairement $p \leq n + 1$.

[Correction ▼](#)

[005496]

Exercice 16 ***

Soit $P \in \mathbb{R}_3[X]$ tel que $\int_{-1}^1 P^2(t) dt = 1$. Montrer que $\sup\{|P(x)|, |x| \leq 1\} \leq 2$. Cas d'égalité ?

[Correction ▼](#)

[005497]

Exercice 17 **IT

Soit r la rotation de \mathbb{R}^3 , euclidien orienté, dont l'axe est orienté par k unitaire et dont une mesure de l'angle est θ . Montrer que pour tout x de $\mathbb{R}^3, r(x) = (\cos \theta)x + (\sin \theta)(k \wedge x) + 2(x.k) \sin^2(\frac{\theta}{2})k$. Application : écrire la matrice dans la base canonique (orthonormée directe de \mathbb{R}^3) de la rotation autour de $k = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_1 + e_2)$ et d'angle $\theta = \frac{\pi}{3}$.

[Correction ▼](#)

[005498]

Exercice 18 **

Soit f continue strictement positive sur $[0, 1]$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \int_0^1 f^n(t) dt$. Montrer que la suite $u_n = \frac{I_{n+1}}{I_n}$ est définie et croissante.

[Correction ▼](#)

[005499]

Exercice 19 **I**

Sur $E = \mathbb{R}_n[X]$, on pose $P|Q = \int_{-1}^1 P(t)Q(t) dt$.

1. Montrer que $(E, |)$ est un espace euclidien.
2. Pour p entier naturel compris entre 0 et n , on pose $L_p = ((X^2 - 1)^p)^{(p)}$. Montrer que $\left(\frac{L_p}{\|L_p\|}\right)_{0 \leq p \leq n}$ est l'orthonormalisée de SCHMIDT de la base canonique de E .
Déterminer $\|L_p\|$.

[Correction ▼](#)

[005500]

Correction de l'exercice 1 ▲

Posons $\varphi : (A, B) \mapsto \text{Tr}(^tAB)$. Montrons que φ est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. **1ère solution.** • φ est symétrique. En effet, pour $(A, B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))^2$,

$$\varphi(A, B) = \text{Tr}(^tAB) = \text{Tr}(^t(^tAB)) = \text{Tr}(^tBA) = \varphi(B, A).$$

• φ est bilinéaire par linéarité de la trace et de la transposition. • Si $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$, alors

$$\varphi(A, A) = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n a_{i,j} a_{i,j} \right) = \sum_{i,j} a_{i,j}^2 > 0$$

car au moins un des réels de cette somme est strictement positif. φ est donc définie, positive.

2ème solution. Posons $A = (a_{i,j})$ et $B = (b_{i,j})$. On a

$$\text{Tr}(^tAB) = \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^n a_{i,j} b_{i,j} \right) = \sum_{1 \leq i,j \leq n} a_{i,j} b_{i,j}.$$

Ainsi, φ est le produit scalaire canonique sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et en particulier, φ est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. N n'est autre que la norme associée au produit scalaire φ (et en particulier, N est une norme). Soit $(A, B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))^2$.

$$\begin{aligned} N(AB)^2 &= \sum_{i,j} \left(\sum_{k=1}^n a_{i,k} b_{k,j} \right)^2 \\ &\leq \sum_{i,j} \left(\sum_{k=1}^n a_{i,k}^2 \right) \left(\sum_{l=1}^n b_{l,j}^2 \right) \quad (\text{d'après l'inégalité de CAUCHY-SCHWARZ}) \\ &= \sum_{i,j,k,l} a_{i,k}^2 b_{l,j}^2 = \left(\sum_{i,k} a_{i,k}^2 \right) \left(\sum_{l,j} b_{l,j}^2 \right) = N(A)^2 N(B)^2, \end{aligned}$$

et donc,

$$\forall (A, B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))^2, N(AB) \leq N(A)N(B).$$

Correction de l'exercice 2 ▲

1. Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

$$\begin{aligned} f(x+z, y) + f(x-z, y) &= \frac{1}{4} (||x+z+y||^2 + ||x-z+y||^2 - ||x+z-y||^2 - ||x-z-y||^2) \\ &= \frac{1}{4} (2(||x+y||^2 + ||z||^2) - 2(||x-y||^2 + ||z||^2)) = 2f(x, y). \end{aligned}$$

2. $2f(x, y) = f(x+x, y) + f(x-x, y) = f(2x, y) + f(0, y)$ mais $f(0, y) = (||y||^2 - ||-y||^2) = 0$ (définition d'une norme).

3. • Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}, f(nx, y) = nf(x, y)$. C'est clair pour $n = 0$ et $n = 1$. Soit $n \geq 0$. Si l'égalité est vraie pour n et $n+1$ alors d'après 1),

$$f((n+2)x, y) + f(nx, y) = f((n+1)x+x, y) + f((n+1)x-x, y) = 2f((n+1)x, y),$$

et donc, par hypothèse de récurrence,

$$f((n+2)x, y) = 2f((n+1)x, y) - f(nx, y) = 2(n+1)f(x, y) - nf(x, y) = (n+2)f(x, y).$$

Le résultat est démontré par récurrence. • Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $f(x, y) = f(n \times \frac{1}{n}x, y) = nf(\frac{1}{n}x, y)$ et donc $f(\frac{1}{n}x, y) = \frac{1}{n}f(x, y)$. • Soit alors $r = \frac{p}{q}$, $p \in \mathbb{N}, q \in \mathbb{N}^*$, $f(rx, y) = \frac{1}{q}f(px, y) = p\frac{1}{q}f(x, y) = rf(x, y)$ et donc, pour tout rationnel positif r , $f(rx, y) = rf(x, y)$. Enfin, si $r \leq 0$, $f(rx, y) + f(-rx, y) = 2f(0, y) = 0$ (d'après 1)) et donc $f(-rx, y) = -f(rx, y) = rf(x, y)$.

$$\forall (x, y) \in E^2, \forall r \in \mathbb{Q}, f(rx, y) = rf(x, y).$$

4. On pose $x = \frac{1}{2}(u + v)$ et $y = \frac{1}{2}(u - v)$.

$$f(u, w) + f(v, w) = f(x + y, w) + f(x - y, w) = 2f(x, w) = 2f\left(\frac{1}{2}(u + v), w\right) = f(u + v, w).$$

5. f est symétrique (définition d'une norme) et linéaire par rapport à sa première variable (d'après 3) et 4)).
Donc f est bilinéaire.

6. f est une forme bilinéaire symétrique. Pour $x \in E$, $f(x, x) = \frac{1}{4}(\|x + x\|^2 + \|x - x\|^2) = \frac{1}{4}\|2x\|^2 = \|x\|^2$ (définition d'une norme) ce qui montre tout à la fois que f est définie positive et donc un produit scalaire, et que $\|\cdot\|$ est la norme associée. $\|\cdot\|$ est donc une norme euclidienne.

Correction de l'exercice 3 ▲

La famille (V_1, V_2) est clairement libre et donc une base de F . Son orthonormalisée (e_1, e_2) est une base orthonormée de F . $\|V_1\| = \sqrt{1 + 4 + 1 + 1} = \sqrt{7}$ et $e_1 = \frac{1}{\sqrt{7}}V_1 = \frac{1}{\sqrt{7}}(1, 2, -1, 1)$. $(V_2|e_1) = \frac{1}{\sqrt{7}}(0 + 6 - 1 - 1) = \frac{4}{\sqrt{7}}$ puis $V_2 - (V_2|e_1)e_1 = (0, 3, 1, -1) - \frac{4}{7}(1, 2, -1, 1) = \frac{1}{7}(-4, 13, 11, -11)$ puis $e_2 = \frac{1}{\sqrt{427}}(-4, 13, 11, -11)$. Une base orthonormée de F est (e_1, e_2) où $e_1 = \frac{1}{\sqrt{7}}(1, 2, -1, 1)$ et $e_2 = \frac{1}{\sqrt{427}}(-4, 13, 11, -11)$. Soit $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$.

$$(x, y, z, t) \in F^\perp \Leftrightarrow (x, y, z, t) \in (V_1, V_2)^\perp \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y - z + t = 0 \\ 3y + z - t = 0 \end{cases}.$$

Correction de l'exercice 4 ▲

Soit A un éventuel polynôme solution c'est à dire tel que $\forall P \in \mathbb{R}[X], \int_0^1 P(t)A(t) dt = P(0)$.

$P = 1$ fournit $\int_0^1 A(t) dt = 1$ et donc nécessairement $A \neq 0$. $P = XA$ fournit $\int_0^1 tA^2(t) dt = P(0) = 0$. Mais alors, $\forall t \in [0, 1], tA^2(t) = 0$ (fonction continue positive d'intégrale nulle) puis $A = 0$ (polynôme ayant une infinité de racines deux à deux distinctes). A n'existe pas.

Correction de l'exercice 5 ▲

1. Soit \mathcal{B} une base orthonormée de E et $M = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n)$ (M est une matrice de format (p, n)). Puisque \mathcal{B} est orthonormée, le produit scalaire usuel des colonnes C_i et C_j est encore $x_i|x_j$. Donc, $\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$, ${}^tC_iC_j = x_i|x_j$ ou encore

$$G = {}^tMM.$$

Il s'agit alors de montrer que $\text{rg}(M) = \text{rg}({}^tMM)$. Ceci provient du fait que M et tMM ont même noyau. En effet, pour $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$,

$$X \in \text{Ker}M \Rightarrow MX = 0 \Rightarrow {}^tM \times MX = 0 \Rightarrow ({}^tMM)X = 0 \Rightarrow X \in \text{Ker}({}^tMM)$$

et

$$\begin{aligned} X \in \text{Ker}({}^tMM) &\Rightarrow {}^tMMX = 0 \Rightarrow {}^tX{}^tMMX = 0 \Rightarrow {}^t(MX)MX = 0 \Rightarrow \|MX\|^2 = 0 \Rightarrow MX = 0 \\ &\Rightarrow X \in \text{Ker}M. \end{aligned}$$

Ainsi, $\text{Ker}(M) = \text{Ker}({}^tMM) = \text{Ker}(G(x_1, \dots, x_n))$. Mais alors, d'après le théorème du rang, $\text{rg}(x_1, \dots, x_n) = \text{rg}(M) = \text{rg}(G(x_1, \dots, x_n))$.

$$\text{rg}(G(x_1, \dots, x_n)) = \text{rg}(x_1, \dots, x_n).$$

2. Si la famille (x_1, \dots, x_n) est liée, $\text{rg}(G) = \text{rg}(x_1, \dots, x_n) < n$, et donc, puisque G est une matrice carrée de format n , $\gamma(x_1, \dots, x_n) = \det(G) = 0$. Si la famille (x_1, \dots, x_n) est libre, (x_1, \dots, x_n) engendre un espace F de dimension n . Soient \mathcal{B} une base orthonormée de F et M la matrice de la famille (x_1, \dots, x_n) dans \mathcal{B} . D'après 1), on a $G = {}^tMM$ et d'autre part, M est une matrice carrée. Par suite,

$$\gamma(x_1, \dots, x_n) = \det({}^tMM) = \det({}^tM)\det(M) = (\det M)^2 > 0.$$

3. On écrit $x = x - p_F(x) + p_F(x)$. La première colonne de $\gamma(x, x_1, \dots, x_n)$ s'écrit :

$$\begin{pmatrix} \|x\|^2 \\ x|x_1 \\ x|x_2 \\ \vdots \\ x|x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \|x - p_F(x) + p_F(x)\|^2 \\ x - p_F(x) + p_F(x)|x_1 \\ x - p_F(x) + p_F(x)|x_2 \\ \vdots \\ x - p_F(x) + p_F(x)|x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \|x - p_F(x)\|^2 \\ 0|x_1 \\ 0|x_2 \\ \vdots \\ 0|x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \|p_F(x)\|^2 \\ p_F(x)|x_1 \\ p_F(x)|x_2 \\ \vdots \\ p_F(x)|x_n \end{pmatrix}.$$

(en 1ère ligne, c'est le théorème de PYTHAGORE et dans les suivantes, $x - p_F(x) \in F^\perp$). Par linéarité par rapport à la première colonne, $\gamma(x, x_1, \dots, x_n)$ est somme de deux déterminants. Le deuxième est $\gamma(p_F(x), x_1, \dots, x_n)$ et est nul car la famille $(p_F(x), x_1, \dots, x_n)$ est liée. On développe le premier suivant sa première colonne et on obtient :

$$\gamma(x, x_1, \dots, x_n) = \|x - p_F(x)\|^2 \gamma(x_1, \dots, x_n),$$

ce qui fournit la formule désirée.

$$\forall x \in E, d(x, F) = \|x - p_F(x)\| = \sqrt{\frac{\gamma(x, x_1, \dots, x_n)}{\gamma(x_1, \dots, x_n)}}.$$

Correction de l'exercice 6 ▲

Je vous laisse vérifier la linéarité. Si x est colinéaire à a , $f(x) = 0$ et les vecteurs de $\text{Vect}(a) \setminus \{0\}$ sont des vecteurs non nuls colinéaires à leur image. Si x n'est pas colinéaire à a , $a \wedge x$ est un vecteur non nul orthogonal à a et il en est de même de $f(x) = a \wedge (a \wedge x)$. Donc, si x est colinéaire à $f(x)$, x est nécessairement orthogonal à a . Réciproquement, si x est un vecteur non nul orthogonal à a , $f(x) = (a.x)a - \|a\|^2 x = -\|a\|^2 x$ et x est colinéaire à $f(x)$. Les vecteurs non nuls colinéaires à leur image sont les vecteurs non nuls de $\text{Vect}(a)$ et de a^\perp .

Correction de l'exercice 7 ▲

Un vecteur engendrant D est $\vec{u} = (2, 1, 3)$. Pour $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$,

$$p((x, y, z)) = \frac{(x, y, z)|(2, 1, 3)|}{\|(2, 1, 3)\|^2} (2, 1, 3) = \frac{2x + y + 3z}{14} (2, 1, 3).$$

On en déduit que $\text{Mat}_{\mathcal{B}} p = P = \frac{1}{14} \begin{pmatrix} 4 & 2 & 6 \\ 2 & 1 & 3 \\ 6 & 3 & 9 \end{pmatrix}$, puis $\text{Mat}_{\mathcal{B}} s = 2P - I = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} -3 & 2 & 6 \\ 2 & -6 & 3 \\ 6 & 3 & 2 \end{pmatrix}$. Plus générale-

ment, la matrice de la projection orthogonale sur le vecteur unitaire (a, b, c) dans la base canonique orthonormée est $P = \begin{pmatrix} a^2 & ab & ac \\ ab & b^2 & bc \\ ac & bc & c^2 \end{pmatrix}$ et la matrice de la projection orthogonale sur le plan $ax + by + cz = 0$ dans la base

canonique orthonormée est $I - P = \begin{pmatrix} 1 - a^2 & -ab & -ac \\ -ab & 1 - b^2 & -bc \\ -ac & -bc & 1 - c^2 \end{pmatrix}$.

Correction de l'exercice 8 ▲

1. $\|C_1\| = \|C_2\| = \frac{1}{3}\sqrt{4+4+1} = 1$ et $C_1|C_2 = \frac{1}{9}(-2+4-2) = 0$. Enfin,

$$C_1 \wedge C_2 = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} -6 \\ -3 \\ -6 \end{pmatrix} = -\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = C_3.$$

Donc, $A \in O_3^+(\mathbb{R})$ et f est une rotation (distincte de l'identité). **Axe de f .** Soit $X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

$$AX = X \Leftrightarrow \begin{cases} -x-y-2z=0 \\ -2x-5y-z=0 \\ -x+2y-5z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z=-2x-5y \\ 3x+9y=0 \\ 9x+27y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-3y \\ z=y \end{cases}.$$

L'axe D de f est $\text{Vect}(\vec{u})$ où $\vec{u} = (-3, 1, 1)$. D est dorénavant orienté par \vec{u} . **Angle de f .** Le vecteur $\vec{v} = \frac{1}{\sqrt{2}}(0, 1, -1)$ est un vecteur unitaire orthogonal à l'axe. Donc,

$$\cos \theta = \vec{v} \cdot f(\vec{v}) = \frac{1}{\sqrt{2}}(0, 1, -1) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{-1}{3}(-1, 1, -4) = -\frac{1}{6} \times 5 = -\frac{5}{6},$$

et donc, $\theta = \pm \arccos(-\frac{5}{6}) (2\pi)$. (Si on sait que $\text{Tr}(A) = 2 \cos \theta + 1$, c'est plus court : $2 \cos \theta + 1 = \frac{2}{3} -$

$\frac{2}{3} - \frac{2}{3}$ fournit $\cos \theta = -\frac{5}{6}$). Le signe de $\sin \theta$ est le signe de $[\vec{i}, f(\vec{i}), \vec{u}] = \begin{vmatrix} 1 & \frac{2}{3} & -3 \\ 0 & -\frac{2}{3} & 1 \\ 0 & -\frac{1}{3} & 1 \end{vmatrix} = -\frac{1}{3} < 0$.

Donc,

f est la rotation d'angle $-\arccos(-\frac{5}{6})$ autour de $u = (-3, 1, 1)$.

2. $\|C_1\| = \|C_2\| = \frac{1}{4}\sqrt{9+1+6} = 1$ et $C_1|C_2 = \frac{1}{16}(3+3-6) = 0$. Enfin,

$$C_1 \wedge C_2 = \frac{1}{16} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -\sqrt{6} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ \sqrt{6} \end{pmatrix} = \frac{1}{16} \begin{pmatrix} 4\sqrt{6} \\ -4\sqrt{6} \\ 8 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} \sqrt{6} \\ -\sqrt{6} \\ 2 \end{pmatrix} = C_3.$$

Donc, $A \in O_3^+(\mathbb{R})$ et f est une rotation. **Axe de f .** Soit $X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

$$AX = X \Leftrightarrow \begin{cases} -x+y+\sqrt{6}z=0 \\ x-y-\sqrt{6}z=0 \\ -\sqrt{6}x+\sqrt{6}y-2z=0 \end{cases} \Leftrightarrow x-y=\sqrt{6}z = \frac{2}{\sqrt{6}}z \Leftrightarrow x=y \text{ et } z=0.$$

L'axe D de f est $\text{Vect}(\vec{u})$ où $\vec{u} = (1, 1, 0)$. D est dorénavant orienté par \vec{u} . **Angle de f .** $\vec{k} = [0, 0, 1]$ est un vecteur unitaire orthogonal à \vec{u} . Par suite,

$$\cos \theta = \vec{k} \cdot f(\vec{k}) = (0, 0, 1) \cdot \frac{1}{4}(\sqrt{6}, -\sqrt{6}, 2) = \frac{1}{2},$$

et donc $\cos \theta = \pm \frac{\pi}{3} (2\pi)$. Le signe de $\sin \theta$ est le signe de $[\vec{i}, f(\vec{i}), \vec{u}] = \begin{vmatrix} 1 & 3/4 & 1 \\ 0 & 1/4 & 1 \\ 0 & -\sqrt{6}/4 & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{\sqrt{6}} >$

0. Donc,

f est la rotation d'angle $\frac{\pi}{3}$ autour de $\vec{u} = (1, 1, 0)$.

3. $\|C_1\| = \|C_2\| = \frac{1}{9}\sqrt{64+16+1} = 1$ et $C_1|C_2 = \frac{1}{81}(8-16+8) = 0$. Enfin,

$$C_1 \wedge C_2 = \frac{1}{81} \begin{pmatrix} 8 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix} = \frac{1}{81} \begin{pmatrix} -36 \\ -63 \\ 36 \end{pmatrix} = -\frac{1}{9} \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ -4 \end{pmatrix} = -C_3.$$

Donc, $A \in O_3^-(\mathbb{R})$. A n'est pas symétrique, et donc f n'est pas une réflexion. f est donc la composée commutative $s \circ r$ d'une rotation d'angle θ autour d'un certain vecteur unitaire \vec{u} et de la réflexion de plan \vec{u}^\perp où \vec{u} et θ sont à déterminer. **Axe de r .** L'axe de r est $\text{Ker}(f + \text{Id}_E)$ (car $f \neq -\text{Id}_E$).

$$AX = -X \Leftrightarrow \begin{cases} 17x + y + 4z = 0 \\ -4x + 13y + 7z = 0 \\ x + 8y + 5z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -17x - 4z \\ -225x - 45z = 0 \\ -135x - 27z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = -5x \\ y = 3x \end{cases}$$

$\text{Ker}(f + \text{Id}_E) = \text{Vect}(\vec{u}) = D$ où $u = (1, 3, -5)$. D est dorénavant orienté par \vec{u} . s est la réflexion par rapport au plan $P = u^\perp$ dont une équation est $x + 3y - 5z = 0$. On écrit alors la matrice S de s dans la base de départ. On calcule $S^{-1}A = SA$ qui est la matrice de r et on termine comme en 1) et 2).

Correction de l'exercice 9 ▲

Soit f l'endomorphisme de \mathbb{R}^3 de matrice M dans la base canonique de \mathbb{R}^3 .

$$f \text{ est une rotation} \Leftrightarrow M \in O_3^+(\mathbb{R}) \Leftrightarrow \|C_1\| = \|C_2\| = \|C_3\| = 1 \text{ et } C_1|C_2 = C_1|C_3 = C_2|C_3 = 0 \text{ et } \det M = 1 \\ \Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 = 1 \text{ et } ab + bc + ca = 0 \text{ et } a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = 1.$$

Posons $\sigma_1 = a + b + c$, $\sigma_2 = ab + bc + ca$ et $\sigma_3 = abc$. On a $a^2 + b^2 + c^2 = (a + b + c)^2 - 2(ab + ac + bc) = \sigma_1^2 - 2\sigma_2$. Ensuite,

$$\sigma_1^3 = (a + b + c)^3 = a^3 + b^3 + c^3 + 3(a^2b + ba^2 + a^2c + ca^2 + b^2c + c^2b) + 6abc,$$

et

$$\sigma_1(\sigma_1^2 - 2\sigma_2) = (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2) = a^3 + b^3 + c^3 + (a^2b + b^2a + a^2c + c^2a + b^2c + c^2b).$$

Donc,

$$\sigma_1^3 - 3\sigma_1(\sigma_1^2 - 2\sigma_2) = -2(a^3 + b^3 + c^3) + 6\sigma_3$$

et finalement, $a^3 + b^3 + c^3 = \sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2 + 3\sigma_3$.

$$M \in O_3^+(\mathbb{R}) \Leftrightarrow \sigma_2 = 0 \text{ et } \sigma_1^2 - 2\sigma_2 = 1 \text{ et } \sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2 = 1$$

$$\Leftrightarrow \sigma_2 = 0 \text{ et } \sigma_1 = 1$$

$$\Leftrightarrow a, b \text{ et } c \text{ sont les solutions réelles d'une équation du type } x^3 - x^2 + k = 0 \text{ (où } k = -\sigma_3).$$

Posons $P(x) = x^3 - x^2 + k$ et donc $P'(x) = 3x^2 - 2x = x(2x - 3)$. Sur $] -\infty, 0]$, P est strictement croissante, strictement décroissante sur $[0, \frac{3}{2}]$ et strictement croissante sur $[\frac{3}{2}, +\infty[$. P admet donc au plus une racine dans chacun de ces trois intervalles. **1er cas.** Si $P(0) = k > 0$ et $P(\frac{2}{3}) = k - \frac{4}{27} < 0$ ou ce qui revient au même, $0 < k < \frac{4}{27}$, P admet trois racines réelles deux à deux distinctes (P étant d'autre part continue sur \mathbb{R}), nécessairement toutes simples. **2ème cas.** Si $k \in \{0, \frac{4}{27}\}$, P et P' ont une racine réelle commune (à savoir 0 ou $\frac{4}{27}$) et P admet une racine réelle d'ordre au moins 2. La troisième racine est alors nécessairement réelle. **3ème cas.** Si $k < 0$ ou $k > \frac{4}{27}$, P admet une racine réelle exactement. Celle-ci est nécessairement simple au vu du 2ème cas et donc P admet deux autres racines non réelles. En résumé, P a toutes ses racines réelles si et seulement si $0 \leq k \leq \frac{4}{27}$ et donc, f est une rotation si et seulement si a, b et c sont les solutions d'une équation du type $x^3 - x^2 + k = 0$ où $0 \leq k \leq \frac{4}{27}$.

Correction de l'exercice 10 ▲

$$\begin{aligned} [u \wedge v, v \wedge w, w \wedge u] &= ((u \wedge v) \wedge (v \wedge w))(w \wedge u) = (((u \wedge v)|w)v - ((u \wedge v)|v)w)(w \wedge u) \\ &= (((u \wedge v)|w)v)(w \wedge u) = ((u \wedge v)w) \times (v|(w \wedge u)) = [u, v, w][w, u, v] \\ &= [u, v, w]^2. \end{aligned}$$

Correction de l'exercice 11 ▲

Si la famille $(x_i)_{1 \leq i \leq n}$ est une famille liée, l'inégalité est claire et de plus, on a l'égalité si et seulement si l'un des vecteurs est nuls. Si la famille $(x_i)_{1 \leq i \leq n}$ est une famille libre et donc une base de E , considérons $\mathcal{B}' = (e_1, \dots, e_n)$ son orthonormalisée de SCHMIDT. On a

$$|\det_{\mathcal{B}}(x_i)_{1 \leq i \leq n}| = |\det_{\mathcal{B}'}(x_i)_{1 \leq i \leq n} \times \det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}')| = |\det_{\mathcal{B}'}(x_i)_{1 \leq i \leq n}|,$$

car $\det_{\mathcal{B}'} \mathcal{B}'$ est le déterminant d'une base orthonormée dans une autre et vaut donc 1 ou -1 . Maintenant, la matrice de la famille $(x_i)_{1 \leq i \leq n}$ dans \mathcal{B}' est triangulaire supérieure et son déterminant est le produit des coefficients diagonaux à savoir les nombres $x_i|e_i$ (puisque \mathcal{B}' est orthonormée). Donc

$$|\det_{\mathcal{B}}(x_i)_{1 \leq i \leq n}| = |\det_{\mathcal{B}'}(x_i)_{1 \leq i \leq n}| = \left| \prod_{i=1}^n (x_i|e_i) \right| \leq \prod_{i=1}^n \|x_i\| \times \|e_i\| = \prod_{i=1}^n \|x_i\|,$$

d'après l'inégalité de CAUCHY-SCHWARZ. De plus, on a l'égalité si et seulement si, pour tout i , $|x_i|e_i| = \|x_i\| \times \|e_i\|$ ou encore si et seulement si, pour tout i , x_i est colinéaire à e_i ou enfin si et seulement si la famille $(x_i)_{1 \leq i \leq n}$ est orthogonale.

Correction de l'exercice 12 ▲

$(u \wedge v)|(w \wedge s) = [u, v, w \wedge s] = [w \wedge s, u, v] = ((w \wedge s) \wedge u)|v = ((u|w)s - (u|s)w)|v = (u|w)(v|s) - (u|s)(v|w)$. De même, $(u \wedge v) \wedge (w \wedge s) = ((u \wedge v)|s)w - ((u \wedge v)|w)s = [u, v, s]w - [u, v, w]s$.

Correction de l'exercice 13 ▲

1ère solution.

$$\begin{aligned} \int_0^1 (x^4 - ax - b)^2 dx &= \frac{1}{9} + \frac{1}{3}a^2 + b^2 - \frac{1}{3}a - \frac{2}{5}b + ab = \frac{1}{3} \left(a + \frac{1}{2}(3b-1) \right)^2 - \frac{1}{12}(3b-1)^2 + b^2 - \frac{2}{5}b + \frac{1}{9} \\ &= \frac{1}{3} \left(a + \frac{1}{2}(3b-1) \right)^2 + \frac{1}{4}b^2 + \frac{1}{10}b + \frac{1}{36} = \frac{1}{3} \left(a + \frac{1}{2}(3b-1) \right)^2 + \frac{1}{4} \left(b + \frac{1}{5} \right)^2 + \frac{4}{225} \geq \frac{4}{225}, \end{aligned}$$

avec égalité si et seulement si $a + \frac{1}{2}(3b-1) = b + \frac{1}{5} = 0$ ou encore $b = -\frac{1}{5}$ et $a = \frac{4}{5}$.

$\int_0^1 (x^4 - ax - b)^2 dx$ est minimum pour $a = \frac{4}{5}$ et $b = -\frac{1}{5}$ et ce minimum vaut $\frac{4}{225}$.

2ème solution. $(P, Q) \mapsto \int_0^1 P(t)Q(t) dt$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_4[X]$ et $\int_0^1 (x^4 - ax - b)^2 dx$ est, pour ce produit scalaire, le carré de la distance du polynôme X^4 au polynôme de degré inférieur ou égal à 1, $aX + b$. On doit calculer $\inf \left\{ \int_0^1 (x^4 - ax - b)^2 dx, (a, b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$ qui est le carré de la distance de X^4 à $F = \mathbb{R}_1[X]$. On sait que cette borne inférieure est un minimum, atteint une et une seule fois quand $aX + b$ est la projection orthogonale de X^4 sur F . Trouvons une base orthonormale de F . L'orthonormalisée (P_0, P_1) de $(1, X)$ convient. $\|1\|^2 = \int_0^1 1 dt = 1$ et $P_0 = 1$. Puis $X - (X|P_0)P_0 = X - \int_0^1 t dt = X - \frac{1}{2}$, et comme $\|X - (X|P_0)P_0\|^2 = \int_0^1 \left(t - \frac{1}{2}\right)^2 dt = \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$, $P_1 = 2\sqrt{3} \left(X - \frac{1}{2}\right) = \sqrt{3}(2X - 1)$. La projection orthogonale de X^4 sur F est alors $(X^4|P_0)P_0 + (X^4|P_1)P_1$ avec $(X^4|P_0) = \int_0^1 t^4 dt = \frac{1}{5}$ et $(X^4|P_1) = \sqrt{3} \int_0^1 t^4(2t-1) dt = \sqrt{3} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) = \frac{2\sqrt{3}}{15}$. Donc, la projection orthogonale de X^4 sur F est $\frac{1}{5} + \frac{2\sqrt{3}}{15} \sqrt{3}(2X-1) = \frac{1}{5}(4X-1)$. Le minimum cherché est alors $\int_0^1 \left(t^4 - \frac{1}{5}(4t-1)\right)^2 dt = \dots = \frac{4}{225}$.

Correction de l'exercice 14 ▲

Soit $\varphi : E \rightarrow \mathbb{R}^n$. φ est clairement linéaire et $\text{Ker} \varphi$ est $(e_1, \dots, e_n)^\perp = E^\perp = \{0\}$. Comme

$$x \mapsto (x|e_1, \dots, x|e_n)$$

E et \mathbb{R}^n ont mêmes dimensions finies, φ est un isomorphisme d'espaces vectoriels. En particulier, pour tout n -uplet (a_1, \dots, a_n) de réels, il existe un unique vecteur x tel que $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, x|e_i = a_i$.

Correction de l'exercice 15 ▲

1ère solution. Montrons par récurrence que sur $n = \dim(E)$ que, si $(x_i)_{1 \leq i \leq p}$ est obtusangle, $p \leq n + 1$. • Pour $n = 1$, une famille obtusangle ne peut contenir au moins trois vecteurs car si elle contient les vecteurs x_1 et x_2 vérifiant $x_1 \cdot x_2 < 0$, un vecteur x_3 quelconque est soit nul (auquel cas $x_3 \cdot x_1 = 0$), soit de même sens que x_1 (auquel cas $x_1 \cdot x_3 > 0$) soit de même sens que x_2 (auquel cas $x_2 \cdot x_3 > 0$). Donc $p \leq 2$. • Soit $n \geq 1$. Supposons que toute famille obtusangle d'un espace de dimension n a un cardinal inférieur ou égal à $n + 1$. Soit $(x_i)_{1 \leq i \leq p}$ une famille obtusangle d'un espace E de dimension $n + 1$. Si $p = 1$, il n'y a plus rien à dire. Supposons $p \geq 2$. x_p n'est pas nul et $H = x_p^\perp$ est un hyperplan de E et donc est de dimension n . Soit, pour $1 \leq i \leq p - 1$, $y_i = x_i - \frac{(x_i|x_p)}{\|x_p\|^2} x_p$ le projeté orthogonal de x_i sur H . Vérifions que la famille $(y_i)_{1 \leq i \leq p-1}$ est une famille obtusangle. Soit $(i, j) \in \llbracket 1, p - 1 \rrbracket$ tel que $i \neq j$.

$$y_i \cdot y_j = x_i \cdot x_j - \frac{(x_i|x_p)(x_j|x_p)}{\|x_p\|^2} - \frac{(x_j|x_p)(x_i|x_p)}{\|x_p\|^2} + \frac{(x_i|x_p)(x_j|x_p)(x_p|x_p)}{\|x_p\|^4} = x_i \cdot x_j - \frac{(x_i|x_p)(x_j|x_p)}{\|x_p\|^2} < 0.$$

Mais alors, par hypothèse de récurrence, $p - 1 \leq 1 + \dim H = n + 1$ et donc $p \leq n + 2$. Le résultat est démontré par récurrence. **2ème solution.** Montrons que si la famille $(x_i)_{1 \leq i \leq p}$ est obtusangle, la famille $(x_i)_{1 \leq i \leq p-1}$ est libre. Supposons par l'absurde, qu'il existe une famille de scalaires $(\lambda_i)_{1 \leq i \leq p-1}$ non tous nuls tels que $\sum_{i=1}^{p-1} \lambda_i x_i = 0$ (*). Quite à multiplier les deux membres de (*) par -1 , on peut supposer qu'il existe au moins un réel $\lambda_i > 0$. Soit I l'ensemble des indices i tels que $\lambda_i > 0$ et J l'ensemble des indices i tels que $\lambda_i \leq 0$ (éventuellement J est vide). I et J sont disjoints. (*) s'écrit $\sum_{i \in I} \lambda_i x_i = -\sum_{i \in J} \lambda_i x_i$ (si J est vide, le second membre est nul). On a

$$0 \leq \left\| \sum_{i \in I} \lambda_i x_i \right\|^2 = \left(\sum_{i \in I} \lambda_i x_i \right) \cdot \left(-\sum_{i \in J} \lambda_i x_i \right) = \sum_{(i,j) \in I \times J} \lambda_i (-\lambda_j) x_i \cdot x_j \leq 0.$$

Donc, $\left\| \sum_{i \in I} \lambda_i x_i \right\|^2 = 0$ puis $\sum_{i \in I} \lambda_i x_i = 0$. Mais, en faisant le produit scalaire avec x_p , on obtient $(\sum_{i \in I} \lambda_i x_i) \cdot x_p = \sum_{i \in I} \lambda_i (x_i \cdot x_p) < 0$ ce qui est une contradiction. La famille $(x_i)_{1 \leq i \leq p-1}$ est donc libre. Mais alors son cardinal $p - 1$ est inférieur ou égal à la dimension n et donc $p \leq n + 1$.

Correction de l'exercice 16 ▲

L'application $(P, Q) \mapsto \int_0^1 P(t)Q(t) dt$ est un produit scalaire sur $E = \mathbb{R}_3[X]$. Déterminons une base orthonormée de E . Pour cela, déterminons (Q_0, Q_1, Q_2, Q_3) l'orthonormalisée de la base canonique $(P_0, P_1, P_2, P_3) =$

$(1, X, X^2, X^3)$. • $\|P_0\|^2 = \int_{-1}^1 1^2 dt = 2$ et on prend $Q_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}$. • $P_1|Q_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{-1}^1 t dt = 0$ puis $P_1 - (P_1|Q_0)Q_0 =$

X puis $\|P_1 - (P_1|Q_0)Q_0\|^2 = \int_{-1}^1 t^2 dt = \frac{2}{3}$ et $Q_1 = \sqrt{\frac{3}{2}}X$. • $P_2|Q_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{-1}^1 t^2 dt = \frac{\sqrt{2}}{3}$ et $P_2|Q_1 = 0$. Donc,

$P_2 - (P_2|Q_0)Q_0 - (P_2|Q_1)Q_1 = X^2 - \frac{1}{3}$, puis $\|P_2 - (P_2|Q_0)Q_0 - (P_2|Q_1)Q_1\|^2 = \int_{-1}^1 (t^2 - \frac{1}{3})^2 dt = 2(\frac{1}{5} - \frac{2}{9} + \frac{1}{9}) =$

$\frac{8}{45}$ et $Q_2 = \frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}(3X^2 - 1)$. • $P_3|Q_0 = P_3|Q_2 = 0$ et $P_3|Q_1 = \sqrt{\frac{3}{2}} \int_{-1}^1 t^4 dt = \frac{\sqrt{6}}{5}$ et $P_3 - (P_3|Q_0)Q_0 - (P_3|Q_1)Q_1 =$

$(P_3|Q_2)Q_2 = X^3 - \frac{3}{5}X$, puis $\|X^3 - \frac{3}{5}X\|^2 = \int_{-1}^1 (t^3 - \frac{3}{5}t)^2 dt = 2(\frac{1}{7} - \frac{6}{25} + \frac{3}{25}) = 2\frac{25-21}{175} = \frac{8}{175}$, et $Q_3 = \frac{\sqrt{7}}{2\sqrt{2}}(5X^3 - 3X)$.

Une base orthonormée de E est (Q_0, Q_1, Q_2, Q_3) où $Q_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $Q_1 = \sqrt{\frac{3}{2}}X$, $Q_2 = \frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}(3X^2 - 1)$ et $Q_3 = \frac{\sqrt{7}}{2\sqrt{2}}(5X^3 - 3X)$. Soit alors P un élément quelconque de $E = \mathbb{R}_3[X]$ tel que $\int_{-1}^1 P^2(t) dt = 1$. Posons $P = aQ_0 + bQ_1 + cQ_2 + dQ_3$. Puisque (Q_0, Q_1, Q_2, Q_3) est une base orthonormée de E , $\int_{-1}^1 P^2(t) dt = \|P\|^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1$. Maintenant, pour $x \in [-1, 1]$, en posant $M_i = \text{Max}\{|Q_i(x)|, x \in [-1, 1]\}$, on a :

$$|P(x)| \leq |a| \times |Q_0(x)| + |b| \times |Q_1(x)| + |c| \times |Q_2(x)| + |d| \times |Q_3(x)| \leq |a|M_0 + |b|M_1 + |c|M_2 + |d|M_3 \\ \leq \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2} \sqrt{M_0^2 + M_1^2 + M_2^2 + M_3^2} = \sqrt{M_0^2 + M_1^2 + M_2^2 + M_3^2}.$$

Une étude brève montre alors que chaque $|P_i|$ atteint son maximum sur $[-1, 1]$ en 1 (et -1) et donc

$$\sqrt{M_0^2 + M_1^2 + M_2^2 + M_3^2} = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{3}{2} + \frac{5}{2} + \frac{7}{2}} = 2\sqrt{2}.$$

Ainsi, $\forall x \in [-1, 1]$, $|P(x)| \leq 2\sqrt{2}$ et donc $\text{Max}\{|P(x)|, x \in [-1, 1]\} \leq 2\sqrt{2}$. Etudions les cas d'égalité. Soit $P \in \mathbb{R}_3[X]$ un polynôme éventuel tel que $\text{Max}\{|P(x)|, x \in [-1, 1]\} \leq 2\sqrt{2}$. Soit $x_0 \in [-1, 1]$ tel que $\text{Max}\{|P(x)|, x \in [-1, 1]\} = |P(x_0)|$. Alors :

$$2\sqrt{2} = |P(x_0)| \leq |a| \times |Q_0(x_0)| + |b| \times |Q_1(x_0)| + |c| \times |Q_2(x_0)| + |d| \times |Q_3(x_0)| \leq |a|M_0 + |b|M_1 + |c|M_2 + |d|M_3 \\ \leq \sqrt{M_0^2 + M_1^2 + M_2^2 + M_3^2} = 2\sqrt{2}.$$

Chacune de ces inégalités est donc une égalité. La dernière (CAUCHY-SCHWARZ) est une égalité si et seulement si $(|a|, |b|, |c|, |d|)$ est colinéaire à $(1, \sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{7})$ ou encore si et seulement si P est de la forme $\lambda(\pm Q_0 \pm \sqrt{3}Q_1 \pm \sqrt{5}Q_2 \pm \sqrt{7}Q_3)$ où $\lambda^2(1 + 3 + 5 + 7) = 1$ et donc $\lambda = \pm \frac{1}{4}$, ce qui ne laisse plus que 16 polynômes possibles. L'avant-dernière inégalité est une égalité si et seulement si $x_0 \in \{-1, 1\}$ (clair). La première inégalité est une égalité si et seulement si

$$|aQ_0(1) + bQ_1(1) + cQ_2(1) + dQ_3(1)| = |a|Q_0(1) + |b|Q_1(1) + |c|Q_2(1) + |d|Q_3(1),$$

ce qui équivaut au fait que a, b, c et d aient même signe et P est l'un des deux polynômes

$$\pm \frac{1}{4}(Q_0 + \sqrt{3}Q_1 + \sqrt{5}Q_2 + \sqrt{7}Q_3) = \pm \frac{1}{4\sqrt{2}} \left(1 + 3X + \frac{5}{2}(3X^2 - 1) + \frac{7}{2}(5X^3 - 3X) \right) \\ = \pm \frac{1}{8\sqrt{2}}(35X^3 + 15X^2 - 15X - 3)$$

Correction de l'exercice 17 ▲

Si x est colinéaire à k , $r(x) = x$, et si $x \in k^\perp$, $r(x) = (\cos \theta)x + (\sin \theta)k \wedge x$. Soit $x \in E$. On écrit $x = x_1 + x_2$ où $x_1 \in k^\perp$ et $x_2 \in \text{Vect}(k)$. On a $x_2 = (x.k)k$ (car k est unitaire) et $x_1 = x - (x.k)k$. Par suite,

$$r(x) = r(x_1) + r(x_2) = (\cos \theta)x_1 + (\sin \theta)k \wedge x_1 + x_2 = (\cos \theta)(x - (x.k)k) + (\sin \theta)k \wedge x + (x.k)k \\ = (\cos \theta)x + (1 - \cos \theta)(x.k)k + \sin \theta(k \wedge x) = (\cos \theta)x + 2\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)(x.k)k + \sin \theta(k \wedge x)$$

Application. Si $k = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_1 + e_2)$ et $\theta = \frac{\pi}{3}$, pour tout vecteur x , on a :

$$r(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}(x.k)k + \frac{\sqrt{3}}{2}(k \wedge x),$$

$$\text{puis, } r(e_1) = \frac{1}{2}e_1 + \frac{1}{4}(e_1 + e_2) - \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}e_3 = \frac{1}{4}(3e_1 + e_2 - \sqrt{6}e_3)$$

$$r(e_2) = \frac{1}{2}e_2 + \frac{1}{4}(e_1 + e_2) + \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}e_3 = \frac{1}{4}(e_1 + 3e_2 + \sqrt{6}e_3)$$

$$r(e_3) = \frac{1}{2}e_3 + \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}(-e_2 + e_1) = \frac{1}{4}(\sqrt{6}e_1 - \sqrt{6}e_2 + 2e_3).$$

$$\text{La matrice cherchée est } \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 3 & 1 & \sqrt{6} \\ 1 & 3 & -\sqrt{6} \\ -\sqrt{6} & \sqrt{6} & 2 \end{pmatrix}.$$

Correction de l'exercice 18 ▲

L'application $(f, g) \mapsto \int_0^1 f(t)g(t) dt$ est un produit scalaire sur $C^0([0, 1], \mathbb{R})$. D'après l'inégalité de CAUCHY-SCHWARZ,

$$\begin{aligned} I_n I_{n+2} &= \int_0^1 f^n(t) dt \int_0^1 f^{n+2}(t) dt = \int_0^1 \left(\sqrt{(f(t))^n} \right)^2 dt \int_0^1 \left(\sqrt{(f(t))^{n+2}} \right)^2 dt \\ &\geq \left(\int_0^1 \sqrt{(f(t))^n} \sqrt{(f(t))^{n+2}} dt \right)^2 = \left(\int_0^1 f^{n+1}(t) dt \right)^2 = I_{n+1}^2 \end{aligned}$$

Maintenant, comme f est continue et strictement positive sur $[0, 1]$, I_n est strictement positif pour tout naturel n . On en déduit que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\frac{I_{n+1}}{I_n} \leq \frac{I_{n+2}}{I_{n+1}}$ et donc que

$$\text{la suite } \left(\frac{I_{n+1}}{I_n} \right)_{n \in \mathbb{N}} \text{ est définie et croissante.}$$

Correction de l'exercice 19 ▲

1. La symétrie, la bilinéarité et la positivité sont claires. Soit alors $P \in \mathbb{R}_n[X]$.

$$\begin{aligned} P|P = 0 &\Rightarrow \int_0^1 P^2(t) dt = 0 \\ &\Rightarrow \forall t \in [0, 1], P^2(t) = 0 \text{ (fonction continue, positive, d'intégrale nulle)} \\ &\Rightarrow P = 0 \text{ (polynôme ayant une infinité de racines)}. \end{aligned}$$

Ainsi, l'application $(P, Q) \mapsto \int_0^1 P(t)Q(t) dt$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$.

2. Pour vérifier que la famille $\left(\frac{L_p}{\|L_p\|} \right)_{0 \leq p \leq n}$ est l'orthonormalisée de SCHMIDT de la base canonique de E , nous allons vérifier que

$$(a) \quad \forall p \in \llbracket 0, n \rrbracket, \text{Vect}(L_0, L_1, \dots, L_p) = \text{Vect}(1, X, \dots, X^p),$$

$$(b) \quad \text{la famille } \left(\frac{L_p}{\|L_p\|} \right)_{0 \leq p \leq n} \text{ est orthonormale,}$$

$$(c) \quad \forall p \in \llbracket 0, n \rrbracket, L_p|X^p > 0.$$

Pour a), on note que L_p est un polynôme de degré p (et de coefficient dominant $\frac{(2p)!}{p!}$). Par suite, (L_0, L_1, \dots, L_p) est une base de $\mathbb{R}_p[X]$, ou encore, $\forall p \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $\text{Vect}(L_0, L_1, \dots, L_p) = \text{Vect}(1, X, \dots, X^p)$. Soit $p \in \llbracket 0, n \rrbracket$. Soit P un polynôme de degré inférieur ou égal à p . Si $p \geq 1$, une intégration par parties fournit :

$$\begin{aligned} L_p|P &= \int_{-1}^1 ((t^2 - 1)^p)^{(p)} P(t) dt = \left[((t^2 - 1)^p)^{(p-1)} P(t) \right]_{-1}^1 - \int_{-1}^1 ((t^2 - 1)^p)^{(p-1)} P'(t) dt \\ &= - \int_{-1}^1 ((t^2 - 1)^p)^{(p-1)} P'(t) dt. \end{aligned}$$

En effet, 1 et -1 sont racines d'ordre p de $(t^2 - 1)^p$ et donc d'ordre $p - k$ de $((t^2 - 1)^p)^{(k)}$ pour $0 \leq k \leq p$ et en particulier, racines de chaque $((t^2 - 1)^p)^{(k)}$ pour $0 \leq k \leq p - 1$. En réitérant, on obtient pour tout $k \in \llbracket 0, p \rrbracket$, $L_p|P = (-1)^k \int_{-1}^1 ((t^2 - 1)^p)^{(p-k)} P^{(k)}(t) dt$ et pour $k = p$, on obtient enfin $L_p|P = (-1)^p \int_{-1}^1 (t^2 - 1)^p P^{(p)}(t) dt$, cette formule restant vraie pour $p = 0$. Soient p et q deux entiers tels que $0 \leq q < p \leq n$. D'après ce qui précède, $L_p|L_q = (-1)^p \int_{-1}^1 (t^2 - 1)^p L_q^{(p)}(t) dt = 0$ car $q = \deg(L_q) < p$. Ainsi, la famille $(L_p)_{0 \leq p \leq n}$ est donc une famille orthogonale de $n + 1$ polynômes tous non nuls et est par suite est une base orthogonale de $\mathbb{R}_n[X]$. On en déduit que la famille $\left(\frac{L_p}{\|L_p\|}\right)_{0 \leq p \leq n}$ est une base orthonormale de $\mathbb{R}_n[X]$. Enfin, $L_p|X^p = (-1)^p \int_{-1}^1 (t^2 - 1)^p (t^p)^{(p)} dt = p! \int_{-1}^1 (1 - t^2)^p dt > 0$. On a montré que

la famille $\left(\frac{L_p}{\|L_p\|}\right)_{0 \leq p \leq n}$ est l'orthonormalisée de la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$.

Calculons $\|L_p\|$. On note que $L_p \in (L_0, \dots, L_{p-1})^\perp = (\mathbb{R}_{p-1}[X])^\perp$. Par suite,

$$\begin{aligned} \|L_p\|^2 &= L_p|L_p = L_p|\text{dom}(L_p)X^p \text{ (car } L_p \in (\mathbb{R}_{p-1}[X])^\perp) \\ &= \frac{(2p)!}{p!} L_p|X^p = \frac{(2p)!}{p!} p! \int_{-1}^1 (1 - t^2)^p dt = 2(2p)! \int_0^1 (1 - t^2)^p dt \\ &= 2(2p)! \int_{\pi/2}^0 (1 - \cos^2 u)^p (-\sin u) du = 2(2p)! \int_0^{\pi/2} \sin^{2p+1} u du \\ &= 2(2p)! W_{2p+1} \text{ (intégrales de WALLIS)} \\ &= 2(2p)! \frac{2^{2p}(p!)^2}{(2p+1)!} \text{ (à revoir)} \\ &= \frac{2}{2p+1} 2^{2p}(p!)^2. \end{aligned}$$

Donc, $\forall p \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $\|L_p\| = \sqrt{\frac{2}{2p+1}} 2^p p!$. On en déduit que la famille $\left(\sqrt{\frac{2}{2p+1}} \frac{1}{2^p p!} ((X^2 - 1)^p)^{(p)}\right)_{0 \leq p \leq n}$ est une base orthonormale de $\mathbb{R}_n[X]$ (pour le produit scalaire considéré).