COLLE 26 = ALGÈBRE LINÉAIRE, ANALYSE ASYMPTOTIQUE ET ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

Exercices mixtes :

Exercice 1.

Soit n un entier naturel tel que $n \geq 2$. Soit E l'espace vectoriel des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$) de degré inférieur ou égal à n. On pose : $\forall P \in E,\ f(P) = P - P'$

1. Justifier que f est un automorphisme sans utiliser de matrice de f.
2. Donner la matrice A de f dans la base canonique de E.
3. Soit $Q \in E$. Trouver P tel que $f(P) = Q$.
   (*Indication : si $P \in E$, quel est le polynôme $P^{(n+1)}$?*)
4. Existe-t-il une base β de E telle que la matrice de f dans cette base soit la matrice I_{n+1}.

Exercice 2.

Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension finie n.

1. Démontrer que : $E = \operatorname{Im} f \oplus Ker f \Rightarrow \operatorname{Im} f = \operatorname{Im} f^2$.
2. (a) Démontrer que : $\operatorname{Im} f = \operatorname{Im} f^2 \Longleftrightarrow Ker f = Ker f^2$.
   (b) Démontrer que : $\operatorname{Im} f = \operatorname{Im} f^2 \Rightarrow E = \operatorname{Im} f \oplus Ker f$.
   (c) Que pouvez-vous conclure ?

Exercice 3.

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ et f l'endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ défini par : $f(M) = AM$.

1. Déterminer une base de $Ker f$.
2. f est-il surjectif ?
3. Déterminer une base de $\operatorname{Im} f$.
4. A-t-on $\mathcal{M}_2(\mathbb{R}) = Ker f \oplus \operatorname{Im} f$?

Exercice 4.

Soit $n \in \mathbb{N}$, on note (u_n) la suite définie par $u_0 = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} = \sqrt{u_n + n^2}$.
Montrer que :

$$u_n \underset{n \to +\infty}{=} n - \frac{1}{2} - \frac{3}{8n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

Exercice 5.

Soit $n \in \mathbb{N}$, on note (u_n) la suite définie par $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} = u_n + \dfrac{1}{u_n}$.
Montrer que :

$$u_n \underset{n \to +\infty}{=} \sqrt{2n} + O\left(\frac{\ln(n)}{\sqrt{n}}\right)$$

Exercice 6.

1. Justifier que pour tout $\varepsilon > 0$, l'équation $e^{-\varepsilon x} = x$ d'inconnue x possède une et une seule solution x_ε dans R^+.
2. Montrer que :

$$x_\varepsilon \underset{\varepsilon \to 0}{=} 1 - \varepsilon + \frac{3\varepsilon^2}{2} + o(\varepsilon^2)$$

Exercice 7.

1. Déterminer une primitive de $x \longmapsto \cos^4(x)$
2. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle : $y'' + y = \cos^3(x)$ en utilisant la méthode de variation des constantes.