

Partie A – Exemples

1. Montrer que tout point fixe d'une application $f : [a, b] \rightarrow [a, b]$ est un point fixe de f^n pour $n > 0$.
2. Donner un exemple d'application continue $f : [a, b] \rightarrow [a, b]$ qui admet un 2-cycle.
3. Donner un exemple d'application continue $f : [a, b] \rightarrow [a, b]$ qui n'admet pas de 2-cycle.
4. Déterminer, selon la valeur de $\lambda \in]0, 4]$, les points fixes et les 2-cycles de l'application

$$f : \begin{cases} [0, 1] & \rightarrow & [0, 1] \\ x & \mapsto & \lambda x(1-x) \end{cases}$$

Partie B – Résultats d'existence

1. Montrer que toute application continue $f : [a, b] \rightarrow [a, b]$ admet un point fixe.
2. Soit un segment $[c, d] \subset [a, b]$ et une application continue $f : [a, b] \rightarrow [a, b]$ telle que

$$[c, d] \subset f([c, d]).$$

Montrer que f admet un point fixe dans $[c, d]$.

Indication : on pourra introduire des antécédents de c et d par f dans $[c, d]$.

3. Soit un segment $[c, d] \subset [a, b]$ et une application continue $f : [a, b] \rightarrow [a, b]$ telle que

$$[c, d] \subset f([a, b]).$$

Montrer qu'il existe un intervalle $[c', d'] \subset [a, b]$ tel que $[c, d] = f([c', d'])$.