Vecteurs - Feuille d'exercices niveau 3

Exercice 1 :

Soient A et B deux points du plan. Soit O le milieu de $[AB]$.

1. Noah a réussi à tracer deux points E et F vérifiant les deux conditions suivantes :

$$\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AB} \quad \text{et} \quad (EF) \perp (AB).$$

   a. Quelle conclusion sur la nature de $AEFB$ peut-on en déduire de la relation $\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AB}$?

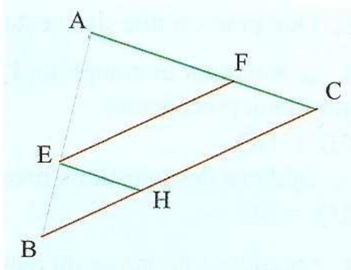
   b. Quelle est la nature exacte du quadrilatère $AEBF$?

2. Construire un tel quadrilatère $AEBF$.

Exercice 2 :

Sur la figure ci-contre, les droites (EF) et (BC) sont parallèles, ainsi que les droites (EH) et (AC).

1. Quelle est la nature du quadrilatère $CFEH$?
2. Démontrer que $\overrightarrow{BH} + \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{BC}$ et que $\overrightarrow{EH} + \overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AC}$.



Exercice 3 :

Soit $ABCD$ un carré de centre O.

1. Construire le point M tel que $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$. Quelle est la nature du quadrilatère $OAMB$?
2. Construire les points N, P et Q définis par

$$\overrightarrow{ON} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} \quad , \quad \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OA}.$$

3. Quelle est la nature exacte du quadrilatère $MNPQ$?

Exercice 4 :

Soient A, B et C trois points donnés. Déterminer le point M tel que $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BC}$.

Exercice 5 :

Soient A, B et C trois points donnés. On considère le point M tel que $\overrightarrow{CM} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CA}$.

1. Démontrer que $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{BA}$.
2. Que peut-on en déduire pour le point M ?

Exercice 6 :

Soit ABC un triangle équilatéral, D un point quelconque du plan, I le milieu de $[DB]$ et J le milieu de $[DC]$.

1. Construire le symétrique E de A par rapport à I et F le symétrique de A par rapport à J.
2. Démontrer que $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BE}$ et que $\overrightarrow{CF} = \overrightarrow{AD}$.
3. Quelle transformation amène ABC sur DEF ? Quelle est la nature du triangle DEF ?

Exercice 7 :

Soient A, B, C et D quatre points du plan vérifiant :

$$\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{DB} - \overrightarrow{CD}.$$

Démontrer que les points B et D sont confondus.

Exercice 8 :

Soient A, B, C et D quatre points du plan. Soient I, J, K et L les milieux respectifs des segments $[AC]$, $[BD]$, $[AD]$ et $[BC]$.

1. Montrer que $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB} = 2\overrightarrow{IJ}$.
   (Remarque : $2\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{IJ} + \overrightarrow{IJ}$)
2. Montrer que $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BD} = 2\overrightarrow{KL}$.
   (Remarque : $2\overrightarrow{KL} = \overrightarrow{KL} + \overrightarrow{KL}$)

Exercice 9 :

Soit $ABCD$ un parallélogramme. Soit E le milieu de $[BC]$ et F le milieu de $[DC]$.

1. Montrer que $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = 2\overrightarrow{BC}$.
2. Montrer que $\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AF} = \dfrac{3}{2}\overrightarrow{AC}$.

Exercice 10 :

Soit ABC un triangle.

1. Construire les points E et F vérifiant :

$$\overrightarrow{AE} = -\overrightarrow{AC} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{BF} - \overrightarrow{CF} = \overrightarrow{0}.$$

2. Démontrer que $AFBC$ et $AEFB$ sont des parallélogrammes.

Exercice 11 :

Soit ABC un triangle. Construire les points E et F vérifiant :

$$\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{CE} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{AF} + 2\overrightarrow{BF} = \overrightarrow{CF}$$

Exercice 12 :

Soit ABC un triangle.

1. Placer le point D tel que $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC}$.
2. Placer le point E tel que $\overrightarrow{AE} + 2\overrightarrow{BE} - \overrightarrow{CE} = \overrightarrow{0}$.
3. Placer le point F tel que $\overrightarrow{BF} = \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{CF}$.
4. Que peut-on dire du quadrilatère $AFCB$? Le démontrer.

Exercice 13 :

Soit $ABCD$ un quadrilatère quelconque. Soit I le milieu de $[AB]$ et J le milieu de $[CD]$. Soit E le point vérifiant :

$$\overrightarrow{EA} + \overrightarrow{EB} + \overrightarrow{EC} + \overrightarrow{ED} = \overrightarrow{0}.$$

Montrer que E est le milieu de $[IJ]$.

Exercice 14 :

Soit ABC un triangle. Soit I le milieu de $[AB]$ et J le milieu de $[IC]$.
Montrer que $\overrightarrow{JA} + \overrightarrow{JB} + \overrightarrow{JC} = \overrightarrow{JI}$.