

Exercice 1 :

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par :

$$u_n = \int_0^1 \frac{e^{-nx}}{1 + e^{-x}} dx.$$

1.
 - a. Montrer que $u_0 + u_1 = 1$.
 - b. Calculer u_1 . En déduire u_0 .
2. Montrer que pour tout entier naturel n , $u_n \geq 0$.
3.
 - a. Montrer que pour tout $n > 0$, $u_{n+1} + u_n = \frac{1-e^{-n}}{n}$.
 - b. En déduire que pour tout $n > 0$, $u_n \leq \frac{1-e^{-n}}{n}$.
4. Déterminer la limite de la suite (u_n) .