COLLE 3 = FONCTIONS USUELLES, PRIMITIVES ET ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

Connaître son cours :

1. Vérifier pour $x \neq 0$ que : $\arctan x + \arctan \frac{1}{x} = \operatorname{sgn}(x)\frac{\pi}{2}$.
2. Pour tout $a, b \in \mathbb{R}$ donner l'expression de $min(a,b)$ et $max(a,b)$ à l'aide de la fonction valeur absolue.
3. Soient $n \in \mathbb{N}$ et la fonction $f : x \mapsto -\ln(x)$. Donner les dérivées n-ième $f^{(n)}$ de la fonction f.

Fonctions usuelles :

Exercice 1.

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \cos(x) + \cos(\alpha x)$. On veut démontrer que f est périodique si et seulement si $\alpha \in \mathbb{Q}$.

1. On suppose que $\alpha = p/q \in \mathbb{Q}$. Démontrer que f est périodique.
2. On suppose que $\alpha \notin \mathbb{Q}$. Résoudre l'équation $f(x) = 2$. En déduire que f n'est pas périodique.

Exercice 2.
Soit f la fonction définie par

$$f(x) = \arcsin\left(2x\sqrt{1-x^2}\right).$$

1. Quel est l'ensemble de définition de f ?
2. En posant $x = \sin t$, simplifier l'écriture de f.

Exercice 3.
Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $f_n(x) = \cos(n \arccos x)$ et $g_n(x) = \frac{\sin(n \arccos x)}{\sqrt{1-x^2}}$. Prouver que f_n et g_n sont des fonctions polynomiales.

Primitives et équations différentielles :

Exercice 4.

1. Résoudre l'équation différentielle $(x^2+1)y' + 2xy = 3x^2 + 1$ sur $\mathbb{R}$. Tracer des courbes intégrales. Trouver la solution vérifiant $y(0) = 3$.
2. Résoudre l'équation différentielle $y' \sin x - y \cos x + 1 = 0$ sur $]0; \pi[$. Tracer des courbes intégrales. Trouver la solution vérifiant $y(\frac{\pi}{4}) = 1$.

Exercice 5.
On considère l'équation différentielle

$$y' - e^x e^y = a$$

Déterminer ses solutions, en précisant soigneusement leurs intervalles de définition, pour

1. $a = 0$
2. $a = -1$ (faire le changement de fonction inconnue $z(x) = x + y(x)$)

Exercice 6.
On considère $y'' - 4y' + 4y = d(x)$.
Résoudre l'équation homogène, puis trouver une solution particulière lorsque $d(x) = e^{-2x}$, puis $d(x) = e^{2x}$. Donner la forme générale des solutions quand $d(x) = \frac{1}{2}\text{ch}(2x)$.
