Centrale MP, Mathématiques I
Épreuve de 4 heures du 27 mai 1998
version α0.1 Mon 27 April 1998 14:33:49
version α0.2 Wed 29 April 1998 13:36:16

Joseph Di Valentin
Philippe Esperet

27 avril 1998

Introduction

1. Titre proposé : “ Fonctions absolument monotones ” (ce thème avait été abordé à l'X en 1969, puis à Saint-Cloud en 1982).
2. Épreuve un peu trop facile, qui classera assez mal les 500 premiers (les avis sont cependant partagés sur ce point). Les candidats sont guidés pas à pas et ont trop peu d'initiatives à prendre (les indications ne me semblent d'ailleurs pas toujours judicieuses).
3. Les calculatrices jouent un rôle négligeable.
4. La partie I (généralités d'analyse) peut-être donnée en Sup. Les parties II et III portent surtout sur les séries entières et (un peu) sur la sommabilité.
5. Erreurs ou imprécisions d'énoncé (une seule est vraiment gênante, mais on peut se demander pourquoi il en subsiste tant de petites) :
   (a) I-F-2) “ où $f_0(x) = 1$ ” : quel x ?
   (b) I-F-4) Quel n ? L'indication me paraît sans intérêt, focalisant l'attention sur un détail.
   (c) I-F-6) Si μ est solution, tout $\rho\mu$ également ($\rho \geq 0$), en particulier la forme linéaire nulle. Ce n'est sans doute pas ce que voulaient les auteurs du problème.
   (d) II-A-1 à II-A-4 : indications dans un ordre confus, je ne vois pas à quoi sert celle de II-A-4, la question se faisant en une ligne directement.
   (e) III-C $\Delta_h^n(f) \geq 0$: où ?
   (f) III-D L'intervalle est indûment fermé en a (détail), mais $(b-a)/0$ est tout de même très gênant car on ne peut se passer du cas $n = 0$ (ôter à f une constante suffisamment grande n'altère pas les Δ_i ($i \geq 1$)).

Première partie

1. (a) Immédiat par Leibniz dans le cas AM comme dans le cas CM. La composée de deux AM en est également une. En effet, $(g \circ f)^{(n)}$ est dans $\mathbf{N}[X_1, \ldots, X_n, Y_1, \ldots, Y_n]$, où il faut substituer au X_i les $g^{(i)} \circ f$ et aux Y_i les $f^{(i)}$.

   (b) Cas particulier de la remarque ci-dessus. On a aussi directement : $\exp \circ f \geq 0$, $(\exp \circ f)' = f' \cdot (\exp \circ f) \geq 0$.

   Supposons que pour tout $k \in \mathbf{N}_{n-1}$, $(\exp \circ f)^{(k)} \geq 0$, alors toujours en utilisant la formule de Leibniz : $(\exp \circ f)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^k f^{(k+1)} \cdot (\exp \circ f)^{(n-1-k)}$, qui est bien ≥ 0.

   (c) Immédiat.

   (d) $(-\log x)^{n)} = (-1)^n (n-1)!/x^n$.

   $(1/\sqrt{1-x^2})^{(n)} = P_n(x) \times (1-x^2)^{-n-\frac{1}{2}}$ où $P_n(x)$ est un polynôme de $\mathbf{N}_n[X]$, de la parité de n (il serait facile d'en savoir plus) grâce à la formule $P_{n+1} = P_n'(1-x^2) + (2n+1)\, P_n(x)$. La propriété de l'arcsin en découle (l'intégrale prise est bien positive).

   Une façon plus élégante d'agir consiste à remarquer que le développement en série entière de la fonction est à coefficients positifs.

   Enfin $(\tan x)^{(n)} \in \mathbf{N}_{n+1}[t]$ (où t désigne $\tan x$) permet de conclure.

   (e) C'est la théorème de la convergence monotone (croissante et minorée par 0 à la borne de gauche), puis le théorème classique conséquence des accroissement finis sur les limites de dérivées.

   (f) Récurrence. Cela ne s'étend pas en b : e^x en ∞ par exemple.

   (g) μ est croissante, et pour tout x on a $f(x) \leq |f(x)|$ à laquelle on applique μ. On conclut en changeant f en $-f$.

   (h) Notations $f_0(x) = 1$ douteuse : quel x ? Je prends quant à moi $\overline{1}$ la fonction constante et égale à 1. C'est alors la pour tout x, $f(x) \leq |f|_\infty \times \overline{1}(x)$ qui permet de conclure.

   (i) $|\mu(e_{x_2}) - \mu(e_{x_1})| \leq \mu(\overline{1}) \times \sup |e_{x_2} - e_{x_1}|$.

   Il n'y a plus qu'à utiliser l'uniforme continuité sur un compact de $f(x,t) = e^{-xt}$.

   Un calcul explicite est également possible en étudiant par Taylor-Lagrange la différence $e^{-xt} - e^{-yt}$.

   (j) L'indication (inutile) de l'énoncé se démontre *via* un Taylor global à l'ordre 2.

   (k) Même remarque : intervient l'uniforme continuité de f_x' (avec les notations ci-dessus). On termine par récurrence.

   (l) Question mal posée, 0 est déjà solution, et puis il y a stabilité par multiplication positive. On peut quand même prendre $\mu(f) = f((a+b)/2)$ et $\mu(f) = \int_{[a,b]} f$ (le second débouche sur une non banalité :

$(e^{-ax} - a^{-bx})/x$ convenablement prolongée en 0 est $\mathcal{C}^\infty$; oui, directement, car elle est analytique).

Seconde partie

(a) Je ne suis pas l'énoncé en détail, l'indication de II-A-4 m'échappant. On suppose $0 < x < b$ et l'on intercale strictement un y entre x et b. Le cas $x = 0$ se rajoutera après coup. On change de variable dans le reste intégral pour aboutir à :

$$f(x) - \sum_0^n x^s\, f^{(s)}(0)/s! = R_n(x) = \frac{x^{n+1}}{n!} \cdot \int_0^1 (1-u)^n\, f^{(n+1)}(xu)\, du \tag{1}$$

La croissance en z de $R_n(z)/z^n$ est claire, d'où $R_n(x) \leq R_n(y) \times (x/y)^n \leq f(y) \times (x/y)^n$. Alors le reste tend vers 0, et l'on conclut en passant à la limite que f est somme de sa série de Taylor sur $]0, b[$, puis en fait sur $[0, b[$.

Supposons pour fixer les idées $r \leq b$, et soit $x' \in]-r, 0[$, il est simple de montrer que $|R_n(x')| \leq R_n(-x')$ car pour tout u on a $f^{(n+1)}(x'u) \leq f^{(n+1)}(-x'u)$ (croissance de la dérivée $n+1$-ième). Ainsi $|R_n(x')|$ tend également vers 0, et l'on peut conclure.

REMARQUE : si l'on veut respecter l'énoncé à la lettre, on a besoin de $\lim_{x \to 0} x \times \int_{[0,1]} (1-u)^n\, f^{(n+1)}(xu)\, du = 0$, ce qui est acquis car la fonction sous l'intégrale est continue de deux variables et $\int_{[0,1]} (1-u)^n\, f^{(n+1)}(0)\, du = 0$ – il suffit d'ailleurs de $f^{(n+1)}$ bornée au voisinage de 0 pour conclure.

REMARQUE : l'indication avec h_ε peut s'utiliser en remarquant que $h_\varepsilon^{(n)}$ est positive sur $[0, r[$ (monotonie de la dérivée n-ième). On peut donc utiliser la question précédente. Enfin, h_1 est paire tandis que h_{-1} est impaire, ce qui permet d'étendre les formules à $|x| < r$.

(b) Arrive la question la plus délicate du problème. La formule $f^{(s)}(x) = \sum x^p/p!\, f^{(s+p)}(0)$ se prolonge en a. En effet le membre de gauche est borné au voisinage de a par un M_s, donc les sommes partielles de la série entière sont majorées par ce M_s, et l'on peut passer à la limite quand $x \to a$ (les sommes partielles sont des polynômes). Ainsi la série entière converge quand $x = a$. Comme tout est positif, il est sans souci de montrer que sa limite en a^+ de la somme est la valeur qu'elle prend en a.

Il reste à regarder la famille positive $\sum_{s,p} (x-a)^s/s!\, a^p/p!\, f^{(s+p)}(0)$ qui est sommable car elle l'est en sommant le long des $s + p = n_0 =$ cste ; ceci donne accès à la somme : $f(x)$.

REMARQUE :

REMARQUE : la fin de la démonstration est exactement celle qui permet d'avoir l'analyticité d'une somme de série entière dans son disque ouvert de convergence.

(c) Le seul cas possible est que toutes les dérivées en a soit nulles, mais alors f est nulle.

(d) D'après la question précédente f est un polynôme de degré $p-1$, plus précisément un $\sum_0^{p-1} \alpha_k\,(x-a)^k$ avec les $\alpha_i \geq 0$.

Troisième partie

(a) $]a, b-nh[$ (le vide si $b-nh \leq a$)

(b) Récurrence, ou plus élégamment calculer $(\tau_h - Id)^n$ où τ_h est la translation de h (elle commute avec l'identité).

(c) Question imprécise, il manque " sur le domaine de définition de $\Delta_h^n f$ ". Si l'on suit l'indication, $X'(h) = \Delta_h^n(f')(x+h)$ (car $\Delta_h^n(f)(x)$ disparaît dans la dérivation par rapport à h). Comme f' est tout autant AM que f, on peut appliquer l'hypothèse de récurrence, X croît (sur $[0, b-a[$) et est nul en 0, donc reste positif.

(d) La division par 0 est gênante (de plus l'intervalle devrait être ouvert en a et non fermé).

On a besoin de $n=0$ pour pouvoir dire quoi que soit sur f (sinon, on peut toujours ôter à f une constante assez grande sans altérer les Δ_i pour i plus grand que un).

Je comprends qu'il faut supposer f positive (mais la moitié de la question posée s'évapore alors), et je me donne $a < \alpha < \beta < b$, je choisis $h = (\beta-\alpha)/K$ avec K entier assez grand pour que $h < b-\beta$. Alors $]a, b-h[\supset]a, \beta[$ et je peux joindre α à β par des petits pas d'amplitude h, avec à chaque fois $0 \leq f(\alpha_i + h) - f(\alpha_i)$. On ajoute ces inégalités pour conclure.

(e) Par théorèmes d'opération sur les séries produit, $(e^t-1)^n$ est développable en série entière sur $\mathbf{R}$, et le premier terme est t^n (qui se dérivera n fois en $n!$).

REMARQUE : un développement limité va bien sûr également donner la réponse.

Mais on peut également développer la puissance par le binôme avant de dériver. Identifier les deux points de vue donne le résultat.

(f) On écrit un Taylor-Young pour f en x_0, à l'ordre n, dans la formule qui donne la définition de Δ (question III-B). En permutant les sommes (finies cette fois), on a (en omettant le $o(h^n)$),

$$\Delta_h^n(f)(x_0) = \sum_s \frac{h^s}{s!}\, f^{(s)} \left(\sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{k}{n}\, k^s \right).$$

Dans la somme interne, seule subsiste la contribution de $s=n$, qui donne que $\Delta_h^n(f)(x_0)/h^n \to f^{(n)}(x_0)$ et cette dernière quantité se trouve donc être positive.