Exercice 1 - D'un produit à l'autre

Soit $A \in \mathcal{M}_{3,2}(\mathbb{R})$, $B \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$ tels que

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Démontrer que $BA = I_2$.

Exercice 2 - Base adaptée à un endomorphisme dont le carré est nul

Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ tel que $f \neq 0$ et $f^2 = 0$.

1. Démontrer que $\dim(\ker(f)) = 2$.
2. En déduire qu'il existe une base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de f est $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 3 - Intégration par parties itérée

1. Soient $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ deux fonctions de classe C^n. Montrer que
$$\int_a^b f^{(n)} g = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \big(f^{(n-k-1)}(b) g^{(k)}(b) - f^{(n-k-1)}(a) g^{(k)}(a) \big) + (-1)^n \int_a^b f g^{(n)}.$$
2. Application : On pose $Q_n(x) = (1 - x^2)^n$ et $P_n(x) = Q_n^{(n)}(x)$. Justifier que P_n est un polynôme de degré n, puis prouver que $\int_{-1}^1 QP_n = 0$ pour tout polynôme Q de degré inférieur ou égal à $n - 1$.

Exercice 4 - Retrouver la fonction

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue telle que $|f(x)| \leq 1$ pour tout $x \in [a, b]$ et $\int_a^b f(x)dx = b - a$. Que dire de f?

Exercice 5 - Valeur moyenne

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue. Démontrer que sa valeur moyenne est atteinte : il existe $c \in [a, b]$ tel que

$$f(c) = \frac{1}{b - a} \int_a^b f(t)dt.$$

Cette feuille d'exercices a été conçue à l'aide du site https://www.bibmath.net