COLLE 5 = SUITES NUMÉRIQUES ET FONCTIONS CONTINUES

Questions de cours :

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(u'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ trois suites réelles ou complexes et $\lambda \in \mathbb{C}$.

1. Démontrer les affirmations suivantes :
   (a) Si $u_n = o(u'_n)$ et $v_n = o(u'_n)$ alors $u_n + v_n = o(u'_n)$
   (b) Si $u_n = o(u'_n)$ alors $\lambda u_n = o(u'_n)$
   (c) Si $u_n = o(u'_n)$ alors $u_n v_n = o(u'_n v_n)$
2. Rappeler le théorème de Cesàro et donner sa démonstration
3. Démontrer les affirmations suivantes :
   (a) Si $u_n \sim_{+\infty} u'_n$ alors $u'_n \sim_{+\infty} u_n$
   (b) Si $u_n \sim_{+\infty} u'_n$ et $v_n \sim_{+\infty} v'_n$ alors $u_n v_n \sim_{+\infty} u'_n v'_n$
   (c) Si $u_n \sim_{+\infty} u'_n$ alors $\dfrac{1}{u_n} \sim_{+\infty} \dfrac{1}{u'_n}$
   (d) Si $u_n \sim_{+\infty} u'_n$ et $v_n \sim_{+\infty} v'_n$ alors $\dfrac{u_n}{v_n} \sim_{+\infty} \dfrac{u'_n}{v'_n}$
4. Rappeler la formule de Stirling et donner un équivalent de $\dbinom{2n}{n}$
5. Démontrer la propriété suivante :
   Propriété.
   f tend vers l en a si et seulement si pour toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergeant vers a, $(f(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers l

Suites numériques :

Exercice 1.
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à termes réels strictement positifs telle que $\left(\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel $l \in \mathbb{R}^+$.

1. On suppose $l < 1$ et on fixe $\epsilon > 0$ tel que $l + \epsilon < 1$.
   (a) Démontrer qu'il existe un entier $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que, pour $n \geq n_0$, on a
   $$u_n \leq (l+\epsilon)^{n-n_0}\, u_{n_0}$$
   (b) En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et donner sa limite.
2. On suppose $l > 1$. Démontrer que (u_n) diverge vers $+\infty$.
3. Étudier le cas $l = 1$
   (*Indication : étudier les suites* $(n^\alpha)_{n\in\mathbb{N}^*}$)

Exercice 2.
Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles convergeant respectivement vers u et v. Montrer que la suite $w_n = \dfrac{u_0 v_n + ... + u_n v_0}{n+1}$ converge vers uv.

(*Indication : on coupera ici la somme en 3 en isolant les bords*)

Exercice 3.
Soit (u_n) une suite de réels positifs vérifiant
$$u_n \leq \frac{1}{k} + \frac{k}{n}$$
pour tous $(k,n) \in (\mathbb{N}^*)^2$.
Démontrer que (u_n) tend vers 0.

Exercice 4.
Démontrer que

1. $\ln(n + e^n) \sim_{+\infty} n$
2. $b^n - a^n \sim_{+\infty} a^n + b^n,\ \ 0 < a < b$
3. $4\ln(1+\sqrt{n}) \sim_{+\infty} \ln(1+n^2)$

Exercice 5.
Montrer que
$$\sum_{k=1}^{n-1} k! \ =_{+\infty}\ o(n!)$$
En déduire que
$$\sum_{k=1}^{n} k! \sim_{+\infty} n!$$

Fonctions continues :

Exercice 6.
Soit $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x) = x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}$$

La fonction f admet-elle un prolongement par continuité en 0 ?

Exercice 7.
Donner si elles existe les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\lfloor 2x\rfloor}{\lfloor x\rfloor}$
2. $\lim\limits_{x\to 0} \left\lfloor \frac{1}{x}\right\rfloor$
3. $\lim\limits_{x\to 0} x\left\lfloor \frac{1}{x}\right\rfloor$
4. $\lim\limits_{x\to 0} x^2\left\lfloor \frac{1}{x}\right\rfloor$

Exercice 8.
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x) = \lfloor x\rfloor + \sqrt{x-\lfloor x\rfloor}$$

Montrer que la fonction f est continue sur $\mathbb{R}$.
(*Indication : Étudier* $f(x+1)$)

Exercice 9.
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Montrer que la fonction f est discontinue en tout point de $\mathbb{R}$.

Exercice 10.
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ périodique et admettant une limite finie l en $+\infty$. Montrer que f est constante.

Exercice 11.
Étudier les limites suivantes

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^{3x}+2x+7}{e^x+e^{-x}}$
2. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-\left(1+\frac{x}{2}\right)}{x^2}$

Exercice 12.
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{Si } x \text{ est irrationnel ou } x = 0. \\ \frac{1}{q} & \text{Si } x = \frac{p}{q},\ \text{avec } p \in \mathbb{Z}, q \geq 1 \text{ et } pgcd(p,q) = 1 \end{cases}$$

Montrer que la fonction f est continue sur $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$, discontinue sur $\mathbb{Q}^*$
