TD 19 : Probabilités sur un univers fini

Connaître son cours :

- Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ un espace probabilisable fini, exprimer la probabilité uniforme. Donner un exemple de votre choix.
- Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbf{P})$ un espace probabilisé fini et $(A_k)_{k\leq n}$ une famille d'événements vérifiant $\mathbf{P}\left(\bigcap_{k\leq n} A_k\right) > 0$. Donner et démontrer la formule des probabilités composées.
- Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbf{P})$ un espace probabilisé fini et $(A_1, \ldots, A_n)_{k\leq n}$ une partition de Ω d'événements de probabilités non nulles. Soit $B \subset \Omega$, donner et démontrer la formule des probabilités totales.
- Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbf{P})$ un espace probabilisé fini, A et B deux éléments de $\mathcal{P}(\Omega)$ de probabilité non nulle. Donner et démontrer la formule de Bayes.

Probabilité, dénombrement et indépendance :

Exercice 1. (*)

Si 30 personnes sont présentes à un réveillon et si, à minuit, chaque personne fait 2 bises à toutes les autres, combien de bises se sont-elles échangées en tout ? (On appelle bise un contact entre deux joues...)

Exercice 2. (*)

Amédée, Barnabé, Charles tirent sur un oiseau ; si les probabilités indépendantes de succès sont pour Amédée : 70%, Barnabé : 50%, Charles : 90%, quelle est la probabilité que l'oiseau soit touché ?

Exercice 3. (*)

Dans un jeu de 52 cartes, on prend une carte au hasard : les événements «tirer un roi» et «tirer un pique» sont-ils indépendants ? quelle est la probabilité de «tirer un roi ou un pique» ?

Exercice 4. (**)

Soit A et B deux événements d'un espace probabilisé tels que $\mathbf{P}(A) = \mathbf{P}(B) = \frac{3}{4}$.
Déterminer le meilleur encadrement pour $\mathbf{P}(A \cap B)$.

Exercice 5. (**)

Soit $n \geq 1$. On lance n fois un dé parfaitement équilibré. Quelle est la probabilité d'obtenir

1. au moins une fois le chiffre 6 ?
2. au moins deux fois le chiffre 6 ?
3. au moins k fois le chiffre 6 ?

Exercice 6. (**)

On dispose d'un dé pipé tel que la probabilité d'obtenir une face soit proportionnelle au chiffre porté par cette face. On lance le dé pipé.

1. Donner un espace probabilisé modélisant l'expérience aléatoire.
2. Quelle est la probabilité d'obtenir un chiffre pair ?
3. Reprendre les questions si cette fois le dé est pipé de sorte que la probabilité d'une face paire soit le double de la probabilité d'une face impaire.

Exercice 7. (*)

Lors d'une loterie de Noël, 300 billets sont vendus aux enfants de l'école ; 4 billets sont gagnants. J'achète 10 billets, quelle est la probabilité pour que je gagne au moins un lot ?

Exercice 8. (***)

Soit $A_1, \dots, A_n$ des événements d'un espace probabilisé fini $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), \mathbf{P})$.

1. Montrer que $\mathbf{P}\left(A_1 \cap \dots \cap A_n\right) \geq \sum_{i=1}^n \mathbf{P}\left(A_i\right) - (n-1)$.
2. Montrer que $\mathbf{P}\left(A_1 \cap \dots \cap A_n\right) \leq \min_{1 \leq i \leq n} \mathbf{P}\left(A_i\right)$.
   Étudier le cas d'égalité.

Exercice 9. (**)

Soit $A_1, \dots, A_n$ des événements indépendants d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$. Montrer que

$$\mathbf{P}\left(\bigcap_{k=1}^n \bar{A}_k\right) \leq \exp\left(-\sum_{k=1}^n \mathbf{P}\left(A_k\right)\right).$$

Exercice 10. (**)

Une personne négligente extrait $2r$ chaussettes d'un tiroir où se trouvent n paires de chaussettes non triées. Quelle est la probabilité de n'obtenir aucune paire de chaussettes assortie ? d'obtenir $k \leq r$ paires assorties

---

Probabilité conditionnelle :

Exercice 11. (*)

Une fête réunit 35 hommes, 40 femmes, 25 enfants. Il y a 3 urnes H, F, E contenant des boules de couleurs dont respectivement 10%, 40%, 80% de boules noires. Un présentateur aux yeux bandés désigne une personne au hasard et lui demande de tirer une boule dans l'urne H si cette personne est un homme, dans l'urne F si cette personne est une femme, dans l'urne E si cette personne est un enfant. La boule tirée est noire : quelle est la probabilité pour que la boule ait été tirée par un homme ? une femme ? un enfant ? Le présentateur pronostique le genre de la personne au hasard , que doit-il dire pour avoir le moins de risque d'erreur ?

Exercice 12. (*)

Dans les barres de chocolat N., on trouve des images équitablement réparties des cinq personnages du dernier Walt Disney, une image par tablette. Ma fille veut avoir le héros Prince charmant : combien dois-je acheter de barres pour que la probabilité d'avoir la figurine attendue dépasse 80% ? Même question pour être sûr à 90%.

Exercice 13. (*)

Un fumeur, après avoir lu une série de statistiques effrayantes sur les risques de cancer, problèmes cardio-vasculaires liés au tabac, décide d'arrêter de fumer ; toujours d'après des statistiques, on estime les probabilités suivantes : si cette personne n'a pas fumé un jour J_n, alors la probabilité pour qu'elle ne fume pas le jour suivant J_{n+1} est 0.3 ; mais si elle a fumé un jour J_n, alors la probabilité pour qu'elle ne fume pas le jour suivant J_{n+1} est 0.9 ; quelle est la probabilité P_{n+1} pour qu'elle fume le jour J_{n+1} en fonction de la probabilité P_n pour qu'elle fume le jour J_n ? Quelle est la limite de P_n ? Va-t-il finir par s'arrêter ?

Exercice 14. (**)

Soit $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), \mathbf{P})$ un espace probabilisé fini, $A \subset \Omega, A_1, \dots, A_n$ une partition de A d'événements de probabilités non nulles, et $B \subset \Omega$, telle que la probabilité $\mathbf{P}\left(B \mid A_k\right)$ ne dépende pas de k. Montrer que, pour tout $k \in [\![1, n]\!], \mathbf{P}\left(B \mid A_k\right) = \mathbf{P}(B \mid A)$.

Exercice 15. (**) *(Loi de* HARDY-WEINBERG)

Considérons un gène qui se présente sous deux allèles (c'est-à-dire deux variantes) A et a. Un individu dispose de deux allèles d'un même gène donc AA, Aa ou aa. Un individu reçoit un allèle de chacun de ses parents au hasard. Notons p, q et r les proportions des génotypes dans une génération et P, Q et R les proportions dans la génération suivante. Montrer que $Q^2 = 4PR$.

Exercice 16. (***) *(Succession de* LAPLACE)

Considérons $n+1$ urnes numérotées de 0 à n telle que l'urne numérotée k contienne $n-k$ boules colorées et k boules blanches. On choisit une urne au hasard et on effectue des tirages avec remises au hasard dans cette urne.

1. Déterminer la probabilité p_n que les N premiers tirages amènent des boules blanches. Déterminer la limite de p_n lorsque n tend vers $+\infty$.
2. Déterminer la probabilité q_n que la $(N+1)^{\text{ième}}$ boule tirée soit colorée sachant que les N premières boules tirées étaient blanches. Déterminer la limite de q_n lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice 17. (***)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ un entier fixé. Une urne contient b boules blanches et c boules colorées ; tirons les boules avec les règles suivantes
- si la boule est blanche, on la retire définitivement ;
- si la boule est colorée, on la replace dans l'urne.
Déterminer la probabilité d'obtenir exactement une boule blanche en n tirages.

Exercice 18. (****) *(Urne de* POLYA)

On considère une urne contenant a boules colorées et b boules blanches. Après chaque tirage, la boule extraite est remise dans l'urne avec c boules de la même couleur.

1. Pour $a = 3, b = 2, c = 4$, faire un schéma pour le premier tirage
2. Déterminer la probabilité que la n-ième boule tirée soit blanche.
