Équations différentielles

Fiche de Léa Blanc-Centi.

1 Ordre 1

Exercice 1

Résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations différentielles suivantes :

1. $y' + 2y = x^2$ (E_1)
2. $y' + y = 2\sin x$ (E_2)
3. $y' - y = (x+1)e^x$ (E_3)
4. $y' + y = x - e^x + \cos x$ (E_4)

Correction ▼ Vidéo ■ [006991]

Exercice 2

Déterminer toutes les fonctions $f : [0;1] \to \mathbb{R}$, dérivables, telles que

$$\forall x \in [0;1],\ f'(x) + f(x) = f(0) + f(1)$$

Indication ▼ Correction ▼ Vidéo ■ [006992]

Exercice 3

1. Résoudre l'équation différentielle $(x^2+1)y' + 2xy = 3x^2 + 1$ sur $\mathbb{R}$. Tracer des courbes intégrales. Trouver la solution vérifiant $y(0) = 3$.
2. Résoudre l'équation différentielle $y' \sin x - y \cos x + 1 = 0$ sur $]0;\pi[$. Tracer des courbes intégrales. Trouver la solution vérifiant $y(\frac{\pi}{4}) = 1$.

Indication ▼ Correction ▼ Vidéo ■ [006993]

Exercice 4 Variation de la constante

Résoudre les équations différentielles suivantes en trouvant une solution particulière par la méthode de variation de la constante :

1. $y' - (2x - \frac{1}{x})y = 1$ sur $]0;+\infty[$
2. $y' - y = x^k \exp(x)$ sur $\mathbb{R}$, avec $k \in \mathbb{N}$
3. $x(1 + \ln^2(x))y' + 2\ln(x)y = 1$ sur $]0;+\infty[$

Indication ▼ Correction ▼ Vidéo ■ [006994]

Exercice 5

On considère l'équation différentielle

$$y' - e^x e^y = a$$

Déterminer ses solutions, en précisant soigneusement leurs intervalles de définition, pour

1. $a = 0$
2. $a = -1$ (faire le changement de fonction inconnue $z(x) = x + y(x)$)

Dans chacun des cas, construire la courbe intégrale qui passe par l'origine.

Indication ▼ Correction ▼ Vidéo ■ [006995]

Exercice 6

Pour les équations différentielles suivantes, trouver les solutions définies sur $\mathbb{R}$ tout entier :

1. $x^2y' - y = 0$ (E_1)
2. $xy' + y - 1 = 0$ (E_2)

Indication ▼ Correction ▼ Vidéo ■ [006996]

2 Second ordre

Exercice 7

Résoudre

1. $y'' - 3y' + 2y = 0$
2. $y'' + 2y' + 2y = 0$
3. $y'' - 2y' + y = 0$
4. $y'' + y = 2\cos^2 x$

Correction ▼ Vidéo ■ [006997]

Exercice 8

On considère $y'' - 4y' + 4y = d(x)$. Résoudre l'équation homogène, puis trouver une solution particulière lorsque $d(x) = e^{-2x}$, puis $d(x) = e^{2x}$. Donner la forme générale des solutions quand $d(x) = \frac{1}{2}\operatorname{ch}(2x)$.

Indication ▼ Correction ▼ Vidéo ■ [006998]

Exercice 9

Résoudre sur $]0;\pi[$ l'équation différentielle $y'' + y = \operatorname{cotan} x$, où $\operatorname{cotan} x = \frac{\cos x}{\sin x}$.

Indication ▼ Correction ▼ Vidéo ■ [006999]

Exercice 10

Résoudre les équations différentielles suivantes à l'aide du changement de variable suggéré.

1. $x^2y'' + xy' + y = 0$, sur $]0;+\infty[$, en posant $x = e^t$;
2. $(1+x^2)^2y'' + 2x(1+x^2)y' + my = 0$, sur $\mathbb{R}$, en posant $x = \tan t$ (en fonction de $m \in \mathbb{R}$).

Correction ▼ Vidéo ■ [007000]

3 Pour aller plus loin

Exercice 11 Équations de Bernoulli et Riccati

1. **Équation de Bernoulli**
   (a) Montrer que l'équation de Bernoulli
   $$y' + a(x)y + b(x)y^n = 0 \qquad n \in \mathbb{Z} \quad n \neq 0, n \neq 1$$
   se ramène à une équation linéaire par le changement de fonction $z(x) = 1/y(x)^{n-1}$.
   (b) Trouver les solutions de l'équation $xy' + y - xy^3 = 0$.
2. **Équation de Riccati**

(a) Montrer que si y_0 est une solution particulière de l'équation de Riccati

$$y' + a(x)y + b(x)y^2 = c(x)$$

alors la fonction définie par $u(x) = y(x) - y_0(x)$ vérifie une équation de Bernoulli (avec $n = 2$).

(b) Résoudre $x^2(y' + y^2) = xy - 1$ en vérifiant d'abord que $y_0(x) = \frac{1}{x}$ est une solution.

Indication ▼ Correction ▼ Vidéo ■ [007001]

Exercice 12

1. Montrer que toute solution sur $\mathbb{R}$ de $y' + e^{x^2} y = 0$ tend vers 0 en $+\infty$.
2. Montrer que toute solution sur $\mathbb{R}$ de $y'' + e^{x^2} y = 0$ est bornée. (*Indication :* étudier la fonction auxiliaire $u(x) = y(x)^2 + e^{-x^2} y'(x)^2$.)

Correction ▼ Vidéo ■ [007002]

Exercice 13

1. Résoudre sur $]0; +\infty[$ l'équation différentielle $x^2 y'' + y = 0$ (utiliser le changement de variable $x = e^t$).
2. Trouver toutes les fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ vérifiant

$$\forall x \neq 0, \; f'(x) = f\left(\frac{1}{x}\right)$$

Correction ▼ Vidéo ■ [007003]

Indication pour l'exercice 2 ▲

Une telle fonction f est solution d'une équation différentielle $y' + y = c$.

Indication pour l'exercice 3 ▲

1. x est solution particulière
2. cos est solution particulière

Indication pour l'exercice 4 ▲

Solution particulière :

1. $-\frac{1}{2x}$
2. $\frac{x^{k+1}}{k+1}\exp(x)$
3. $\frac{\ln x}{1+\ln^2(x)}$

Indication pour l'exercice 5 ▲

1. C'est une équation à variables séparées.

Indication pour l'exercice 6 ▲

1. une infinité de solutions
2. une solution

Indication pour l'exercice 8 ▲

Pour la fin : principe de superposition.

Indication pour l'exercice 9 ▲

Utiliser la méthode de variation de la constante.

Indication pour l'exercice 11 ▲

1. (a) Se ramener à $\frac{1}{1-n}z' + a(x)z + b(x) = 0$.
   (b) $y = \pm\frac{1}{\sqrt{\lambda x^2+2x}}$ ou $y = 0$.
2. (a) Remplacer y par $u + y_0$.
   (b) $y = \frac{1}{x} + \frac{1}{x\ln|x|+\lambda x}$ ou $y = \frac{1}{x}$.

Correction de l'exercice 1 ▲

1. Il s'agit d'une équation différentielle linéaire d'ordre 1, à coefficients constants, avec second membre.

   On commence par résoudre l'équation homogène associée $y' + 2y = 0$: les solutions sont les $y(x) = \lambda e^{-2x}$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

   Il suffit ensuite de trouver une solution particulière de (E_1). Le second membre étant polynomial de degré 2, on cherche une solution particulière de la même forme :
   $y_0(x) = ax^2 + bx + c$ est solution de (E_1)
   $\iff \forall x \in \mathbb{R},\ y_0'(x) + 2y_0(x) = x^2$
   $\iff \forall x \in \mathbb{R},\ 2ax^2 + (2a+2b)x + b + 2c = x^2$
   Ainsi, en identifiant les coefficients, on voit que $y_0(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}$ convient.
   Les solutions de (E_1) sont obtenues en faisant la somme de cette solution particulière et des solutions de l'équation homogène :
   $$y(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{4} + \lambda e^{-2x} \quad (x \in \mathbb{R})$$
   où λ est un paramètre réel.

2. Il s'agit d'une équation différentielle linéaire d'ordre 1, à coefficients constants, avec second membre.

   Les solutions de l'équation homogène associée $y' + y = 0$ sont les $y(x) = \lambda e^{-x}$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

   Il suffit ensuite de trouver une solution particulière de (E_2). Le second membre est cette fois une fonction trigonométrique, on cherche une solution particulière sous la forme d'une combinaison linéaire de cos et sin :
   $y_0(x) = a\cos x + b\sin x$ est solution de (E_2)
   $\iff \forall x \in \mathbb{R},\ y_0'(x) + y_0(x) = 2\sin x$
   $\iff \forall x \in \mathbb{R},\ (a+b)\cos x + (-a+b)\sin x = 2\sin x$
   Ainsi, en identifiant les coefficients, on voit que $y_0(x) = -\cos x + \sin x$ convient.
   Les solutions de (E_2) sont obtenues en faisant la somme de cette solution particulière et des solutions de l'équation homogène :
   $$y(x) = -\cos x + \sin x + \lambda e^{-x} \quad (x \in \mathbb{R})$$
   où λ est un paramètre réel.

3. Les solutions de l'équation homogène associée $y' - y = 0$ sont les $y(x) = \lambda e^{x}$, $\lambda \in \mathbb{R}$. On remarque que le second membre est le produit d'une fonction exponentielle par une fonction polynomiale de degré $d = 1$: or la fonction exponentielle du second membre est la même (e^x) que celle qui apparaît dans les solutions de l'équation homogène. On cherche donc une solution particulière sous la forme d'un produit de e^x par une fonction polynomiale de degré $d + 1 = 2$:
   $y_0(x) = (ax^2 + bx + c)e^x$ est solution de (E_3)
   $\iff \forall x \in \mathbb{R},\ y_0'(x) - y_0(x) = (x+1)e^x$
   $\iff \forall x \in \mathbb{R},\ (2ax + b)e^x = (x+1)e^x$
   Ainsi, en identifiant les coefficients, on voit que $y_0(x) = (\frac{1}{2}x^2 + x)e^x$ convient.
   Les solutions de (E_3) sont obtenues en faisant la somme de cette solution particulière et des solutions de l'équation homogène :
   $$y(x) = (\frac{1}{2}x^2 + x + \lambda)e^x \quad (x \in \mathbb{R})$$
   où λ est un paramètre réel.

4. Les solutions de l'équation homogène associée $y' + y = 0$ sont les $y(x) = \lambda e^{-x}$, $\lambda \in \mathbb{R}$. On remarque que le second membre est la somme d'une fonction polynomiale de degré 1, d'une fonction exponentielle (différente de e^{-x}) et d'une fonction trigonométrique. D'après le principe de superposition, on cherche donc une solution particulière sous la forme d'une telle somme :

$y_0(x) = ax + b + \mu e^x + \alpha\cos x + \beta\sin x$ est solution de (E_4)
$\iff \forall x \in \mathbb{R},\ y_0'(x) + y_0(x) = x - e^x + \cos x$
$\iff \forall x \in \mathbb{R},\ ax + a + b + 2\mu e^x + (\alpha+\beta)\cos x + (-\alpha+\beta)\sin x = x - e^x + \cos x$
Ainsi, en identifiant les coefficients, on voit que

$$y_0(x) = x - 1 - \frac{1}{2}e^x + \frac{1}{2}\cos x + \frac{1}{2}\sin x$$

convient.
Les solutions de (E_4) sont obtenues en faisant la somme de cette solution particulière et des solutions de l'équation homogène :

$$y(x) = x - 1 - \frac{1}{2}e^x + \frac{1}{2}\cos x + \frac{1}{2}\sin x + \lambda e^{-x} \quad (x \in \mathbb{R})$$

où λ est un paramètre réel.

Correction de l'exercice 2 ▲

Une fonction $f : [0;1] \to \mathbb{R}$ convient si et seulement si
- f est dérivable
- f est solution de $y' + y = c$
- f vérifie $f(0) + f(1) = c$ (où c est un réel quelconque)

Or les solutions de l'équation différentielle $y' + y = c$ sont exactement les $f : x \mapsto \lambda e^{-x} + c$, où $\lambda \in \mathbb{R}$ (en effet, on voit facilement que la fonction constante égale à c est une solution particulière de $y' + y = c$). Évidemment ces fonctions sont dérivables, et $f(0) + f(1) = \lambda(1 + e^{-1}) + 2c$, donc la troisième condition est satisfaite si et seulement si $-\lambda(1 + e^{-1}) = c$.
Ainsi les solutions du problème sont exactement les

$$f(x) = \lambda(e^{-x} - 1 - e^{-1})$$

pour $\lambda \in \mathbb{R}$.

Correction de l'exercice 3 ▲

1. Comme le coefficient de y' ne s'annule pas, on peut réécrire l'équation sous la forme

$$y' + \frac{2x}{x^2+1}y = \frac{3x^2+1}{x^2+1}$$

   (a) Les solutions de l'équation homogène associée sont les $y(x) = \lambda e^{A(x)}$, où A est une primitive de $a(x) = -\frac{2x}{x^2+1}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Puisque $a(x)$ est de la forme $-\frac{u'}{u}$ avec $u > 0$, on peut choisir $A(x) = -\ln(u(x))$ où $u(x) = x^2 + 1$. Les solutions sont donc les $y(x) = \lambda e^{-\ln(x^2+1)} = \dfrac{\lambda}{x^2+1}$.

   (b) Il suffit ensuite de trouver une solution particulière de l'équation avec second membre : on remarque que $y_0(x) = x$ convient.

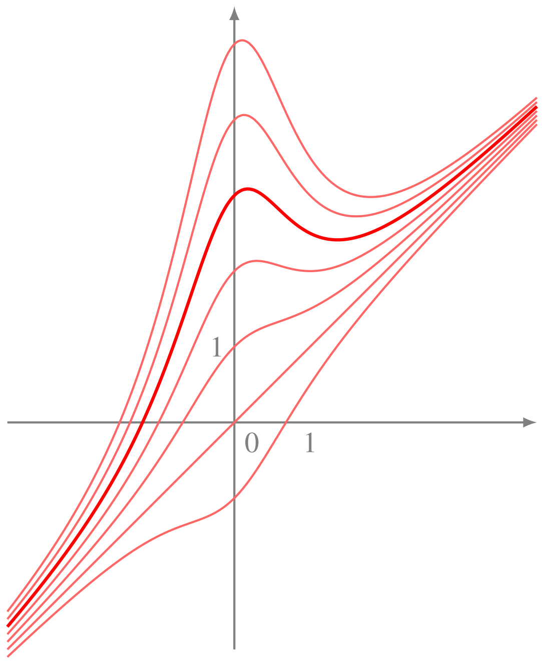
   (c) Les solutions sont obtenues en faisant la somme :

$$y(x) = x + \frac{\lambda}{x^2+1} \quad (x \in \mathbb{R})$$

   où λ est un paramètre réel.

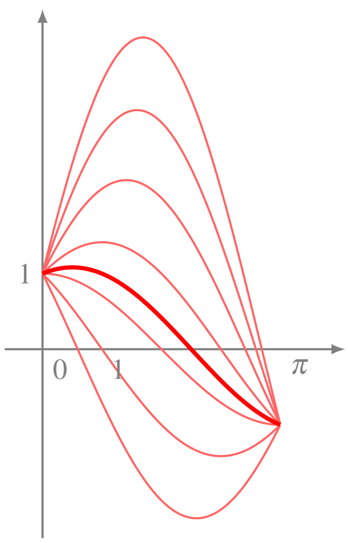
   (d) $y(0) = 3$ si et seulement si $\lambda = 3$. La solution cherchée est donc $y(x) = x + \frac{3}{x^2+1}$.

   Voici les courbes intégrales pour $\lambda = -1, 0, \ldots, 5$.



2. On commence par remarquer que $y_0(x) = \cos x$ est une solution particulière. Pour l'équation homogène : sur l'intervalle considéré, le coefficient de y' ne s'annule pas, et l'équation se réécrit
$$y' - \frac{\cos x}{\sin x} y = 0$$
Les solutions sont les $y(x) = \lambda e^{A(x)}$, où $\lambda \in \mathbb{R}$ et A est une primitive de $a(x) = \frac{\cos x}{\sin x}$. Puisque $a(x)$ est de la forme $\frac{u'}{u}$ avec $u > 0$, on peut choisir $A(x) = \ln(u(x))$ avec $u(x) = \sin x$. Les solutions de l'équation sont donc les $y(x) = \lambda e^{\ln(\sin x)} = \lambda \sin x$.
Finalement, les solutions de l'équation sont les
$$y(x) = \cos x + \lambda \sin x$$
où λ est un paramètre réel.
3. On a
$$y(\frac{\pi}{4}) = 1 \iff \cos\frac{\pi}{4} + \lambda \sin\frac{\pi}{4} = 1 \iff \frac{\sqrt{2}}{2}(1+\lambda) = 1 \iff \lambda = \frac{2}{\sqrt{2}} - 1$$
La solution cherchée est $y(x) = \cos x + \left(\frac{2}{\sqrt{2}} - 1\right) \sin x$

Voici les courbes intégrales pour $\lambda = -2, -1, 0, \ldots, 4$ et $\frac{2}{\sqrt{2}} - 1$ (en gras).



Correction de l'exercice 4 ▲

1. $y' - (2x - \frac{1}{x})y = 1$ sur $]0;+\infty[$

   (a) **Résolution de l'équation homogène $y' - (2x - \frac{1}{x})y = 0$.**
   Une primitive de $a(x) = 2x - \frac{1}{x}$ est $A(x) = x^2 - \ln x$, donc les solutions de l'équation homogène sont les $y(x) = \lambda \exp(x^2 - \ln x) = \lambda \frac{1}{x} \exp(x^2)$, pour λ une constante réelle quelconque.

   (b) **Recherche d'une solution particulière.**
   Nous allons utiliser la méthode de variation de la constante pour trouver une solution particulière à l'équation $y' - (2x - \frac{1}{x})y = 1$. On cherche une telle solution sous la forme $y_0(x) = \lambda(x)\frac{1}{x}\exp(x^2)$ où $x \mapsto \lambda(x)$ est maintenant une fonction.
   On calcule d'abord
   $$y_0'(x) = \lambda'(x)\frac{1}{x}\exp(x^2) + \lambda(x)\left(-\frac{1}{x^2} + 2\right)\exp(x^2)$$
   Maintenant :
   $$\begin{aligned} & y_0 \quad \text{est solution de } y' - (2x + \frac{1}{x})y = 1 \\ \iff & y_0' - (2x - \frac{1}{x})y_0 = 1 \\ \iff & \lambda'(x)x\exp(x^2) + \lambda(x)\left(-\frac{1}{x^2} + 2\right)\exp(x^2) - (2x - \frac{1}{x})\lambda(x)\frac{1}{x}\exp(x^2) = 1 \\ \iff & \lambda'(x)\frac{1}{x}\exp(x^2) = 1 \qquad \text{cela doit se simplifier !} \\ \iff & \lambda'(x) = x\exp(-x^2) \end{aligned}$$
   Ainsi on peut prendre $\lambda(x) = -\frac{1}{2}\exp(x^2)$, ce qui fournit la solution particulière :
   $$y_0(x) = \lambda(x)\frac{1}{x}\exp(x^2) = -\frac{1}{2}\exp(-x^2)\frac{1}{x}\exp(x^2) = -\frac{1}{2x}$$
   Pour se rassurer, on n'oublie pas de vérifier que c'est bien une solution !

   (c) **Solution générale.**
   L'ensemble des solutions s'obtient par la somme de la solution particulière avec les solutions de l'équation homogène. Autrement dit, les solutions sont les :
   $$y(x) = -\frac{1}{2x} + \lambda\frac{1}{x}\exp(x^2) \qquad (\lambda \in \mathbb{R}).$$

2. $y' - y = x^k \exp(x)$ sur $\mathbb{R}$, avec $k \in \mathbb{N}$

   (a) **Résolution de l'équation homogène $y' - y = 0$.**
   Les solutions de l'équation homogène sont les $y(x) = \lambda \exp(x)$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

   (b) **Recherche d'une solution particulière.**
   On cherche une solution particulière sous la forme $y_0(x) = \lambda(x)\exp(x)$ où $x \mapsto \lambda(x)$ est maintenant une fonction.
   Comme $y_0'(x) = \lambda'(x)\exp(x) + \lambda(x)\exp(x)$ alors
   $$\begin{aligned} & y_0 \quad \text{est solution de } y' - y = x^k\exp(x) \\ \iff & \lambda'(x)\exp(x) + \lambda(x)\exp(x) - \lambda(x)\exp(x) = x^k\exp(x) \\ \iff & \lambda'(x)\exp(x) = x^k\exp(x) \\ \iff & \lambda'(x) = x^k \end{aligned}$$

On fixe $\lambda(x) = \frac{x^{k+1}}{k+1}$, ce qui conduit à la solution particulière :

$$y_0(x) = \frac{x^{k+1}}{k+1}\exp(x)$$

(c) **Solution générale.**
L'ensemble des solutions est formé des

$$y(x) = \frac{x^{k+1}}{k+1}\exp(x) + \lambda\exp(x) \qquad (\lambda \in \mathbb{R}).$$

3. $x(1+\ln^2(x))y' + 2\ln(x)y = 1$ sur $]0;+\infty[$
Le coefficient de y' ne s'annule pas sur $]0;+\infty[$, l'équation peut donc se mettre sous la forme

$$y' + \frac{2\ln x}{x(1+\ln^2(x))}y = \frac{1}{x(1+\ln^2(x))}$$

(a) Les solutions de l'équation homogène associée sont les $y(x) = \lambda e^{A(x)}$, où A est une primitive de $a(x) = -\frac{2\ln x}{x(1+\ln^2(x))}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On peut donc choisir $A(x) = -\ln(u(x))$ avec $u(x) = 1+\ln^2(x)$. Les solutions de l'équation sont les $y(x) = \lambda e^{-\ln(1+\ln^2(x))} = \dfrac{\lambda}{1+\ln^2(x)}$.

(b) Utilisons la méthode de variation de la constante pour trouver une solution particulière de l'équation avec second membre. On cherche $y_0(x) = \frac{\lambda(x)}{1+\ln^2(x)}$, avec λ une fonction dérivable. Or $z(x) = \frac{1}{1+\ln^2(x)}$ est solution de l'équation homogène et $y_0(x) = \lambda(x)z(x)$:

$$\begin{aligned}
& y_0 \quad \text{est solution} \\
\iff\ & y_0' + \frac{2\ln x}{x(1+\ln^2(x))}y_0 = \frac{1}{x(1+\ln^2(x))} \\
\iff\ & \lambda'(x)z(x) + \lambda(x)\underbrace{\left[z'(x) + \frac{2\ln x}{x(1+\ln^2(x))}z(x)\right]}_{=0} = \frac{1}{x(1+\ln^2(x))} \\
\iff\ & \frac{\lambda'(x)}{1+\ln^2(x)} = \frac{1}{x(1+\ln^2(x))} \\
\iff\ & \lambda'(x) = \frac{1}{x}
\end{aligned}$$

On peut donc choisir $\lambda(x) = \ln x$, ce qui donne la solution particulière $y_0(x) = \frac{\ln x}{1+\ln^2(x)}$.

(c) Les solutions sont obtenues en faisant la somme de cette solution particulière et des solutions de l'équation homogène : ce sont les

$$y(x) = \frac{\ln x + \lambda}{1+\ln^2(x)} \qquad (\lambda \in \mathbb{R})$$

où λ est un paramètre réel.

Remarque : le choix d'une primitive de λ' se fait à constante additive près. Si on avait choisi par exemple $\lambda(x) = \ln x + 1$, la solution particulière aurait été différente, mais les solutions de l'équation avec second membre auraient été les

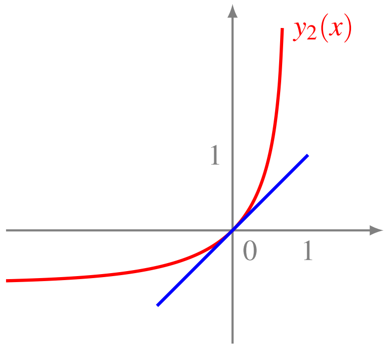
$$y(x) = \frac{\ln x + 1 + \lambda}{1+\ln^2(x)} \qquad (x \in \mathbb{R})$$

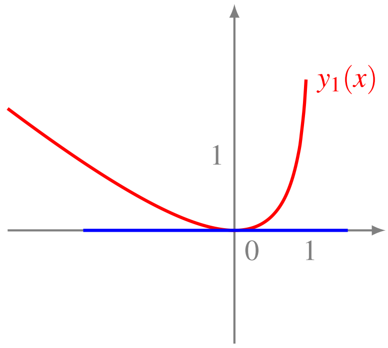
Quitte à poser $\lambda_0' = 1+\lambda$, ce sont évidemment les mêmes que celles trouvées précédemment !

Correction de l'exercice 5 ▲

---

1. L'équation différentielle $y' - e^x e^y = 0$ est à variables séparées : en effet, en divisant par e^y, on obtient $-y'e^{-y} = -e^x$. Le terme de gauche est la dérivée de e^{-y} (y est une fonction de x), celui de droite est la dérivée de $x \mapsto -e^x$:
$$\frac{e^{-y}}{x} = \frac{(-e^x)}{x}$$
Les dérivées étant égales, cela implique que les deux fonctions sont égales à une constante additive près : ainsi y est solution sur I si et seulement si elle est dérivable sur I et $\exists c \in \mathbb{R}$, $\forall x \in I$, $e^{-y} = -e^x + c$. À c fixé, cette égalité n'est possible que si $-e^x + c > 0$, c'est-à-dire si $c > 0$ et $x < \ln c$. On obtient ainsi les solutions :
$$y_c(x) = -\ln(c - e^x) \quad (\text{pour } x \in I_c =]-\infty; \ln c[)$$
où c est un paramètre réel strictement positif.
Pour que l'une des courbes intégrales passe par l'origine, il faut qu'il existe $c > 0$ tel que $0 \in I_c$ et $y_c(0) = 0$: autrement dit, $c > 1$ et $c - 1 = 1$. Il s'agit donc de $y_2 : x \mapsto -\ln(2 - e^x)$, la courbe intégrale cherchée est son graphe, au-dessus de l'intervalle $I_2 =]-\infty; \ln 2[$. Sa tangente en l'origine a pour pente $y_2'(0) = e^0 e^{y(0)} = 1$, c'est la première bissectrice. Comme par construction y_2' est à valeurs strictement positives, la fonction y_2 est strictement croissante.





2. Posons $z(x) = x + y(x)$: z a le même domaine de définition que y et est dérivable si et seulement si y l'est. En remplaçant $y(x)$ par $z(x) - x$ dans l'équation différentielle $y' - e^x e^y = -1$, on obtient $z' - e^z = 0$, c'est-à-dire $z'e^{-z} = 1$. Il s'agit de nouveau d'une équation à variables séparées : en intégrant cette égalité, on obtient que z est solution sur J si et seulement si elle est dérivable sur J et $\exists c \in \mathbb{R}$, $\forall x \in J$, $e^{-z} = -x + c$. À c fixé, cette égalité n'est possible que si $c > x$. On obtient ainsi les solutions :
$$y_c(x) = z_c(x) - x = -x - \ln(c - x) \quad (\text{pour } x \in J_c =]-\infty; c[)$$
où c est un paramètre réel.
Pour que l'une des courbes intégrales passe par l'origine, il faut qu'il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $0 \in J_c$ et $y_c(0) = 0$: autrement dit, $c > 0$ et $c = 1$. Il s'agit donc de $y_1 : x \mapsto -x - \ln(1 - x)$, la courbe intégrale cherchée est son graphe, au-dessus de l'intervalle $J_1 =]-\infty; 1[$. Sa tangente en l'origine a pour pente $y_1'(0) = e^0 e^{y(0)} - 1 = 0$: elle est horizontale.

Correction de l'exercice 6 ▲

1. $x^2 y' - y = 0$ (E_1)
Pour se ramener à l'étude d'une équation différentielle de la forme $y' + ay = b$, on résout d'abord sur les intervalles où le coefficient de y' ne s'annule pas : on se place donc sur $]-\infty; 0[$ ou $]0; +\infty[$.

   (a) **Résolution sur** $]-\infty; 0[$ **ou** $]0; +\infty[$**.**
   Sur chacun de ces intervalles, l'équation différentielle se réécrit
   $$y' - \frac{1}{x^2} y = 0$$
   qui est une équation différentielle linéaire homogène d'ordre 1 à coefficients non constants. Ses solutions sont de la forme $y(x) = \lambda e^{-1/x}$ (en effet, sur $]-\infty; 0[$ ou $]0; +\infty[$, une primitive de $\frac{1}{x^2}$ est $\frac{-1}{x}$).

(b) **Recollement en 0.**

Une solution y de (E_1) sur $\mathbb{R}$ doit être solution sur $]-\infty;0[$ et $]0;+\infty[$, il existe donc $\lambda_+,\ \lambda_- \in \mathbb{R}$ tels que

$$y(x) = \begin{cases} \lambda_+ e^{-1/x} \text{ si } x > 0 \\ \lambda_- e^{-1/x} \text{ si } x < 0 \end{cases}$$

Il reste à voir si l'on peut recoller les deux expressions pour obtenir une solution sur $\mathbb{R}$: autrement dit, pour quels choix de $\lambda_+,\ \lambda_-$ la fonction y se prolonge-t-elle en 0 en une fonction dérivable vérifiant (E_1) ?

— $e^{-1/x} \xrightarrow[x\to 0^-]{} +\infty$ et $e^{-1/x} \xrightarrow[x\to 0^+]{} 0$, donc y est prolongeable par continuité en 0 si et seulement si $\boxed{\lambda_- = 0}$. On peut alors poser $\boxed{y(0) = 0}$, quel que soit le choix de λ_+.

— Pour voir si la fonction ainsi prolongée est dérivable en 0, on étudie son taux d'accroissement :

$$\begin{cases} \text{pour } x > 0,\ \frac{y(x)-y(0)}{x-0} = \frac{\lambda_+ e^{-1/x}}{x} = -\lambda_+ (\frac{-1}{x}) e^{-1/x} \xrightarrow[x\to 0^+]{} 0 \\ \\ \text{pour } x < 0,\ \frac{y(x)-y(0)}{x-0} = 0 \xrightarrow[x\to 0^-]{} 0 \end{cases}$$

Ainsi la fonction y est dérivable en 0 et $\boxed{y'(0) = 0}$.

— Par construction, l'équation différentielle (E_1) est satisfaite sur $\mathbb{R}^*$. Vérifions qu'elle est également satisfaite au point $x = 0$: $0^2 \cdot y'(0) - y(0) = -y(0) = 0$.

(c) **Conclusion.**

Finalement, les solutions sur $\mathbb{R}$ sont exactement les fonctions suivantes :

$$y(x) = \begin{cases} \lambda e^{-1/x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leqslant 0 \end{cases} \qquad (\lambda \in \mathbb{R})$$

2. $xy' + y - 1 = 0$ (E_2)

Pour se ramener à l'étude d'une équation différentielle de la forme $y' + ay = b$, on résout d'abord sur les intervalles où le coefficient de y' ne s'annule pas : on se place donc sur $I =]-\infty;0[$ ou $I =]0;+\infty[$.

(a) **Résolution sur I.**

Sur l'intervalle I, l'équation différentielle se réécrit

$$y' + \frac{1}{x} y = \frac{1}{x}$$

qui est une équation différentielle linéaire d'ordre 1 à coefficients non constants.

— Pour l'équation homogène $y' + \frac{1}{x} y = 0$ une primitive de $-\frac{1}{x}$ sur I, est $-\ln|x|$. Les solutions de l'équation homogène sont donc les $\lambda e^{-\ln|x|} = \lambda \frac{1}{|x|}$. Quitte à changer λ en $-\lambda$ si $I =]-\infty;0[$, on peut écrire les solutions de l'équation homogène sous la forme $y(x) = \lambda \frac{1}{x}$.

— Pour trouver les solutions de l'équation avec second membre, on applique la méthode de variation de la constante en cherchant $y(x) = \lambda(x) \frac{1}{x}$: en remplaçant, on voit que y est solution sur I si et seulement si $\lambda'(x) = 1$. En intégrant, on obtient $\lambda(x) = x$. Une solution particulière en donc $y_0(x) = 1$.

— Sur I les solutions de (E_2) sont les $y(x) = 1 + \frac{\lambda}{x}$ où λ est un paramètre réel.

(b) **Recollement en 0.**

Une solution y de (E_2) sur $\mathbb{R}$ doit être solution sur $]-\infty;0[$ et $]0;+\infty[$, il existe donc $\lambda_+,\ \lambda_- \in \mathbb{R}$ tels que

$$y(x) = \begin{cases} 1 + \frac{\lambda_+}{x} & \text{si } x > 0 \\ 1 + \frac{\lambda_-}{x} & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Il reste à voir si l'on peut recoller les deux expressions pour obtenir une solution sur $\mathbb{R}$. On voit tout de suite que y a une limite (finie) en 0 si et seulement si $\boxed{\lambda_+ = \lambda_- = 0}$. Dans ce cas, on peut alors poser $\boxed{y(0) = 1}$ et y est la fonction constante égale à 1, qui est bien sûr dérivable sur $\mathbb{R}$. De plus, (E_2) est bien satisfaite au point $x = 0$.

(c) **Conclusion.**
Finalement, (E_2) admet sur $\mathbb{R}$ une unique solution, qui est la fonction constante égale à 1.

Correction de l'exercice 7 ▲

1. Il s'agit d'une équation homogène du second ordre. L'équation caractéristique associée est $r^2-3r+2=0$, qui admet deux solutions : $r=2$ et $r=1$. Les solutions sont donc les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $y(x)=\lambda e^{2x}+\mu e^x$ $(\lambda,\mu\in\mathbb{R})$.
2. L'équation caractéristique associée est $r^2+2r+2=0$, qui admet deux solutions : $r=-1+i$ et $r=-1-i$. On sait alors que les solutions sont donc les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $y(x)=e^{-x}(A\cos x+B\sin x)$ $(A,B\in\mathbb{R})$. Remarquons que, en utilisant l'expression des fonctions cos et sin à l'aide d'exponentielles, ces solutions peuvent aussi s'écrire sous la forme $\lambda e^{(-1+i)x}+\mu e^{(-1-i)x}$ $(\lambda,\mu\in\mathbb{R})$.
3. L'équation caractéristique est $r^2-2r+1=0$, dont 1 est racine double. Les solutions de l'équation homogène sont donc de la forme $(\lambda x+\mu)e^x$.
4. Les solutions de l'équation homogène sont les $\lambda\cos x+\mu\sin x$. Le second membre peut en fait se réécrire $\cos^2 x=1+\cos(2x)$: d'après le principe de superposition, on cherche une solution particulière sous la forme $a+b\cos(2x)+c\sin(2x)$. En remplaçant, on trouve qu'une telle fonction est solution si $a=1$, $b=-\frac{1}{3}$, $c=0$. Les solutions générales sont donc les $\lambda\cos x+\mu\sin x-\frac{1}{3}\cos(2x)+1$.

Correction de l'exercice 8 ▲

L'équation caractéristique associée à l'équation homogène est $r^2-4r+4=0$, pour laquelle $r=2$ est racine double. Les solutions de l'équation homogène sont donc les $(\lambda x+\mu)e^{2x}$.
Lorsque $d(x)=e^{-2x}$, on cherche une solution particulière sous la forme ae^{-2x}, qui convient si $a=\frac{1}{16}$.
Lorsque $d(x)=e^{2x}$, comme 2 est la racine double de l'équation caractéristique, on cherche une solution comme le produit de e^{2x} par un polynôme de degré 2. Comme on sait déjà que $(\lambda x+\mu)e^{2x}$ est solution de l'équation homogène, il est inutile de faire intervenir des termes de degré 1 et 0 : on cherche donc une solution de la forme ax^2e^{2x}, qui convient si et seulement si $a=\frac{1}{2}$.
Puisque $\frac{1}{2}\operatorname{ch}(2x)=\frac{1}{4}(e^{2x}+e^{-2x})$, les solutions générales sont obtenues sous la forme $y(x)=\frac{1}{64}e^{-2x}+\frac{1}{8}x^2e^{2x}+(\lambda x+\mu)e^{2x}$.

Correction de l'exercice 9 ▲

Les solutions de l'équation homogène sont les $\lambda\cos x+\mu\sin x$. En posant $y_1(x)=\cos x$ et $y_2(x)=\sin x$, on va chercher les solutions sous la forme $\lambda y_1+\mu y_2$, vérifiant *to*
$\left\{\begin{array}{l}\lambda' y_1+\mu' y_2=0\\ \lambda' y_1'+\mu' y_2'=\operatorname{cotan} x\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l}\lambda'\cos x+\mu'\sin x=0\\ \lambda'(-\sin x)+\mu'\cos x=\operatorname{cotan} x\end{array}\right.$
$\iff \left\{\begin{array}{l}\lambda'(x)=\dfrac{\begin{vmatrix}0 & \sin x\\ \operatorname{cotan} x & \cos x\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}\cos x & \sin x\\ -\sin x & \cos x\end{vmatrix}}\\ \\ \mu'(x)=\dfrac{\begin{vmatrix}\cos x & 0\\ -\sin x & \operatorname{cotan} x\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}\cos x & \sin x\\ -\sin x & \cos x\end{vmatrix}}\end{array}\right.$ $d'aprslesformulesdeCramer, o\begin{vmatrix}\cos x & \sin x\\ -\sin x & \cos x\end{vmatrix}=1. Onobtientdonc\left\{\begin{array}{l}\lambda'(x)=-\cos x\\ \mu'(x)=\frac{\cos^2 x}{\sin x}\end{array}\right.$ c
$-\sin x$.
Pour μ, on cherche à primitiver $\frac{\cos^2 x}{\sin x}$ à l'aide du changement de variable $t=\cos x$ (et donc $t=-\sin t x$), on calcule une primitive

$$\begin{aligned}\int\frac{\cos^2 x}{\sin x}x &= -\int\frac{t^2}{1-t^2}t=t-\int\frac{1}{1-t^2}t\\ &= t+\frac{1}{2}\ln(1-t)-\frac{1}{2}\ln(1-t)=\cos x+\frac{1}{2}\ln(1-\cos x)-\frac{1}{2}\ln(1-\cos x)\end{aligned}$$

En remplaçant, les solutions générales sont les

$$y(x) = c_1\cos x + c_2\sin x + (-\sin x)\cos x + \left(\cos x + \frac{1}{2}\ln(1-\cos x) - \frac{1}{2}\ln(1-\cos x)\right)\sin x$$

qui se simplifie $y(x) = c_1\cos x + c_2\sin x + \frac{1}{2}\sin x \ln\frac{1-\cos x}{1+\cos x}$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

Correction de l'exercice 10 ▲

1. Puisqu'on cherche y fonction de $x \in]0;+\infty[$, et que l'application $t \mapsto e^t$ est bijective de $\mathbb{R}$ sur $]0;+\infty[$, on peut poser $x = e^t$ et $z(t) = y(e^t)$. On a alors $t = \ln x$ et $y(x) = z(\ln x)$. Ce qui donne :
$$\begin{aligned} y(x) &= z(\ln x) = z(t) \\ y'(x) &= \frac{1}{x}z'(\ln x) = e^{-t}z'(t) \\ y''(x) &= -\frac{1}{x^2}z'(\ln x) + \frac{1}{x^2}z''(\ln x) = -e^{-2t}z'(t) + e^{-2t}z''(t) \end{aligned}$$
En remplaçant, on obtient donc que
$$\forall x \in]0;+\infty[,\ x^2y'' + xy' + y = 0 \iff \forall t \in \mathbb{R},\ z''(t) + z(t) = 0$$
autrement dit, $z(t) = \lambda\cos t + \mu\sin t$ où $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Finalement, les solutions de l'équation de départ sont de la forme
$$y(x) = z(\ln x) = \lambda\cos(\ln x) + \mu\sin(\ln x)$$
où $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.
2. L'application $t \mapsto \tan t$ étant bijective de $]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}[$ sur $\mathbb{R}$, on peut poser $x = \tan t$ et $z(t) = y(\tan t)$. On a alors $t = \arctan x$ et ainsi :
$$\begin{aligned} y(x) &= z(\arctan x) = z(t) \\ y'(x) &= \frac{1}{1+x^2}z'(\arctan x) \\ y''(x) &= \frac{1}{(1+x^2)^2}\big(z''(\arctan x) - 2xz'(\arctan x)\big) \end{aligned}$$
En remplaçant, on obtient que z est solution de l'équation différentielle $z'' + mz = 0$. Pour résoudre cette équation, on doit distinguer trois cas :
— $m < 0$: alors $z(t) = \lambda e^{\sqrt{-m}t} + \mu e^{-\sqrt{-m}t}$ et donc
$$y(x) = \lambda e^{\sqrt{-m}\arctan x} + \mu e^{-\sqrt{-m}\arctan x},$$
— $m = 0$: $z'' = 0$ et donc $z(t) = \lambda t + \mu$ et $y(x) = \lambda\arctan x + \mu$,
— $m > 0$: alors $z(t) = \lambda\cos(\sqrt{m}t) + \mu\sin(\sqrt{m}t)$ et donc
$$y(x) = \lambda\cos(\sqrt{m}\arctan x) + \mu\sin(\sqrt{m}\arctan x)$$
où $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

Correction de l'exercice 11 ▲

1. **Équation de Bernoulli**
   (a) On suppose qu'une solution y ne s'annule pas. On divise l'équation $y' + a(x)y + b(x)y^n = 0$ par y^n, ce qui donne
   $$\frac{y'}{y^n} + a(x)\frac{1}{y^{n-1}} + b(x) = 0.$$
   On pose $z(x) = \frac{1}{y^{n-1}}$ et donc $z'(x) = (1-n)\frac{y'}{y^n}$. L'équation de Bernoulli devient une équation différentielle linéaire :
   $$\tfrac{1}{1-n}z' + a(x)z + b(x) = 0$$

(b) Équation $xy' + y - xy^3 = 0$.

Cherchons les solutions y qui ne s'annulent pas. On peut alors diviser par y^3 pour obtenir :

$$x\frac{y'}{y^3} + \frac{1}{y^2} - x = 0$$

On pose $z(x) = \frac{1}{y^2(x)}$, et donc $z'(x) = -2\frac{y'(x)}{y(x)^3}$. L'équation différentielle s'exprime alors $\frac{-1}{2}xz' + z - x = 0$, c'est-à-dire :

$$xz' - 2z = -2x.$$

Les solutions sur $\mathbb{R}$ de cette dernière équation sont les

$$z(x) = \begin{cases} \lambda_+ x^2 + 2x \text{ si } x \geqslant 0 \\ \lambda_- x^2 + 2x \text{ si } x < 0 \end{cases} \quad , \quad \lambda_+, \lambda_- \in \mathbb{R}$$

Comme on a posé $z(x) = \frac{1}{y^2(x)}$, on se retreint à un intervalle I sur lequel $z(x) > 0$: nécessairement $0 \notin I$, donc on considère $z(x) = \lambda x^2 + 2x$, qui est strictement positif sur I_λ où

$$I_\lambda = \begin{cases}]0;+\infty[\quad \text{si } \lambda = 0 \\ ]0;-\frac{2}{\lambda}[\quad \text{si } \lambda < 0 \\ ]-\infty;-\frac{2}{\lambda}[\text{ ou }]0;+\infty[\quad \text{si } \lambda > 0 \end{cases}$$

On a $(y(x))^2 = \frac{1}{z(x)}$ pour tout $x \in I_\lambda$ et donc $y(x) = \varepsilon(x)\frac{1}{\sqrt{z(x)}}$, où $\varepsilon(x) = \pm 1$. Or y est continue sur l'intervalle I_λ, et ne s'annule pas par hypothèse : d'après le théorème des valeurs intermédiaires, y ne peut pas prendre à la fois des valeurs strictement positives et des valeurs strictement négatives, donc $\varepsilon(x)$ est soit constant égal à 1, soit constant égal à -1. Ainsi les solutions cherchées sont les :

$$y(x) = \frac{1}{\sqrt{\lambda x^2 + 2x}} \text{ ou } y(x) = \frac{-1}{\sqrt{\lambda x^2 + 2x}} \quad \text{sur } I_\lambda \qquad (\lambda \in \mathbb{R})$$

Noter que la solution nulle est aussi solution.

2. **Équation de Riccati**

(a) Soit y_0 une solution de $y' + a(x)y + b(x)y^2 = c(x)$. Posons $u(x) = y(x) - y_0(x)$, donc $y = u + y_0$. L'équation devient :

$$u' + y_0' + a(x)(u + y_0) + b(x)(u^2 + 2uy_0 + y_0^2) = c(x)$$

Comme y_0 est une solution particulière alors

$$y_0' + a(x)y_0 + b(x)y_0^2 = c(x)$$

Et donc l'équation se simplifie en :

$$u' + \big(a(x) + 2y_0(x)b(x)\big)u + b(x)u^2 = 0$$

qui est une équation du type Bernoulli.

(b) Équation $x^2(y' + y^2) = xy - 1$.

— Après division par x^2 c'est bien une équation de Riccati sur $I =]-\infty;0[$ ou $I =]0;+\infty[$.

— $y_0 = \frac{1}{x}$ est bien une solution particulière.

— On a $u(x) = y(x) - y_0(x)$ et donc $y = u + \frac{1}{x}$. L'équation $x^2(y' + y^2) = xy - 1$ devient

$$x^2\left(u' - \frac{1}{x^2} + u^2 + 2\frac{u}{x} + \frac{1}{x^2}\right) = x\left(u + \frac{1}{x}\right) - 1$$

qui se simplifie en

$$x^2\left(u' + u^2 + 2\frac{u}{x}\right) = xu$$

ce qui correspond à l'équation de Bernoulli :

$$u' + \frac{1}{x}u + u^2 = 0.$$

— Si u ne s'annule pas, en divisant par u^2, cette équation devient $\frac{u'}{u^2}+\frac{1}{x}\frac{1}{u}+1=0$. On pose $z(x)=\frac{1}{u}$, l'équation devient $-z'+\frac{1}{x}z+1=0$. Ses solutions sur I sont les $z(x)=\lambda x+x\ln|x|$, $\lambda\in\mathbb{R}$. Ainsi $u(x)=\frac{1}{z(x)}=\frac{1}{\lambda x+x\ln|x|}$ mais il y a aussi la solution nulle $u(x)=0$.

— Conclusion. Comme $y=u+\frac{1}{x}$, on obtient alors des solutions de l'équation de départ sur $]-\infty;0[$ et $]0;+\infty[$:

$$y(x)=\frac{1}{x}\qquad\text{ou}\qquad y(x)=\frac{1}{x}+\frac{1}{\lambda x+x\ln|x|}\qquad(\lambda\in\mathbb{R}).$$

Correction de l'exercice 12 ▲

1. Notons $A(x)=\int_0^x e^{t^2}t$, une primitive de e^{x^2}. On ne sait pas expliciter cette primitive. Les solutions de $y'+e^{x^2}y=0$ s'écrivent $f(x)=\lambda e^{-A(x)}$.
   Si $x\geqslant 1$, on a par positivité de l'intégrale $A(x)=\int_0^x e^{t^2}t\geqslant 0$ et comme $e^{t^2}\geqslant 1$ alors
   $$A(x)=\int_0^x e^{t^2}t\geqslant\int_0^x 1t=x$$
   En conséquence :
   $$0\leqslant e^{-A(x)}\leqslant e^{-x}$$
   Ainsi,
   $$0\leqslant|f(x)|\leqslant|\lambda|e^{-x}$$
   et $f(x)\xrightarrow[x\to+\infty]{}0$.
2. Supposons que y vérifie sur $\mathbb{R}$ l'équation, et posons $u(x)=y(x)^2+e^{-x^2}y'(x)^2$. La fonction u est à valeurs positives, dérivable, et
   $$u'(x)=2y'(x)y(x)+e^{-x^2}2y''(x)y'(x)-2xe^{-x^2}y'(x)^2$$
   en utilisant que $e^{-x^2}y''(x)=-y(x)$ (car y est solution de l'équation différentielle) on obtient :
   $$u'(x)=-2xe^{-x^2}y'^2.$$
   Ainsi la fonction u est croissante sur $]-\infty;0[$ et décroissante sur $]0;+\infty[$, donc pour tout $x\in\mathbb{R}$, $0\leqslant u(x)\leqslant u(0)$. Or $y^2(x)\leqslant u(x)$ par construction, donc
   $$\forall x\in\mathbb{R},\qquad|y(x)|\leqslant\sqrt{u(0)}=\sqrt{y(0)^2+y'(0)^2}$$

Correction de l'exercice 13 ▲

1. En faisant le changement de variable $x=e^t$ (donc $t=\ln x$) et en posant $z(t)=y(e^t)$ (donc $y(x)=z(\ln x)$, l'équation $x^2y''+y=0$ devient $z''-z'+z=0$, dont les solutions sont les $z(t)=e^{t/2}\cdot\left(\lambda\cos(\frac{\sqrt3}{2}t)+\mu\sin(\frac{\sqrt3}{2}t)\right)$, $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$. Autrement dit,
   $$y(x)=\sqrt{x}\left(\lambda\cos(\frac{\sqrt3}{2}\ln x)+\mu\sin(\frac{\sqrt3}{2}\ln x)\right)$$
2. Supposons que f convienne : par hypothèse, f est de classe $\mathscr{C}^1$, donc $x\mapsto f(\frac{1}{x})$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$ et par conséquent f' aussi. Ainsi f est nécessairement de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}^*$ (en fait, en itérant le raisonnement, on montrerait facilement que f est $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^*$).
   En dérivant l'équation $f'(x)=f\left(\frac{1}{x}\right)$, on obtient
   $$f''(x)=-\frac{1}{x^2}f'\left(\frac{1}{x}\right)$$

et en réutilisant l'équation :

$$f''(x) = -\frac{1}{x^2} f'\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{1}{x^2} f(x).$$

Ainsi on obtient que f est solution de $x^2 y'' + y = 0$ sur $\mathbb{R}^*$. Nécessairement, il existe $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tels que

$$\forall x > 0,\ f(x) = \sqrt{x}\left(\lambda \cos(\frac{\sqrt{3}}{2} \ln x) + \mu \sin(\frac{\sqrt{3}}{2} \ln x)\right)$$

Par hypothèse, f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, en particulier elle se prolonge en 0 de façon $\mathscr{C}^1$. Cherchons à quelle condition sur λ, μ cela est possible. Déjà, $f(x) = \sqrt{x}\left(\lambda \cos(\frac{\sqrt{3}}{2} \ln x) + \mu \sin(\frac{\sqrt{3}}{2} \ln x)\right) \xrightarrow[x \to 0^+]{} 0$ pour tous λ, μ ; donc $f(0) = 0$. Mais

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{1}{\sqrt{x}}\left(\lambda \cos(\frac{\sqrt{3}}{2} \ln x) + \mu \sin(\frac{\sqrt{3}}{2} \ln x)\right)$$

n'a pas de limite en 0 si $\lambda \neq 0$ ou $\mu \neq 0$. En effet, pour $x_n = e^{\frac{2}{\sqrt{3}}(-2n\pi)}$, on a $x_n \to 0$ mais $\frac{f(x_n) - f(0)}{x_n - 0} = \frac{\lambda}{\sqrt{x_n}}$ qui admet une limite finie seulement si $\lambda = 0$. De même avec $x'_n = e^{\frac{2}{\sqrt{3}}(-2n\pi + \frac{\pi}{2})}$ qui donne $\frac{f(x'_n) - f(0)}{x'_n - 0} = \frac{\mu}{\sqrt{x'_n}}$ et implique donc $\mu = 0$.

Par conséquent, la seule possibilité est $\lambda = \mu = 0$. Ainsi f est la fonction nulle, sur $[0, +\infty[$. Le même raisonnement s'applique sur $]-\infty, 0]$. La fonction est donc nécessairement nulle sur $\mathbb{R}$. Réciproquement, la fonction constante nulle est bien solution du problème initial.
