Chapitre 1 - Nombres réels

I Les ensembles de nombres

1 Les nombres entiers : entiers naturels et entiers relatifs

Définition 1.

Un entier naturel est un nombre entier . . . .

L'ensemble des entiers naturels est noté . . . . *(«* . . . . . . *» comme «* . . . . *»).*

Remarque 1. *En mathématiques, on écrit :*

. . . .

En particulier, ...

Définition 2.

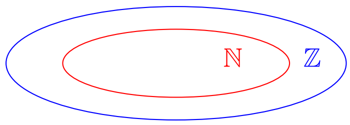
Un entier relatif est un nombre entier positif ou négatif ou nul.

L'ensemble des entiers relatifs est noté . . . . *(«* . . . . . . *» comme «* . . . . *» qui signifie « nombre » en allemand).*

Remarque 2. *En mathématiques, on écrit :*

. . . .

Propriété 1. *Tout entier naturel est un entier relatif. On dit que l'ensemble des entiers naturels* ***est inclus*** *dans l'ensemble des entiers relatifs et on note* . . . .



Démonstration.
Par définition, tout entier naturel est un entier positif ou nul. Donc, en particulier, c'est un entier positif ou négatif ou nul. □

Remarque 3. *L'inclusion réciproque est fausse :* $\mathbb{Z} \not\subset \mathbb{N}$ *(se lit «* . . . . *»). Pour le prouver, il suffit de trouver un élément de* $\mathbb{Z}$ *qui n'est pas un élément de* $\mathbb{N}$*. Le nombre* . . . . *convient (par exemple).*

Attention à ne pas confondre les deux symboles $\in$ et $\subset$.

Exercice 1. *Dans chacun des cas suivants, compléter les* . . . *à l'aide du symbole* $\in$ *ou du symbole* $\subset$*.*

- ◇ $12 \dots \mathbb{N}$
- ◇ *soit* (d) *une droite et* M *un point de cette droite. Alors* $M \dots (d)$.
- ◇ *soient* A *et* B *deux points distincts du plan. Alors* $[AB] \dots (AB)$.
- ◇ *soit* E *l'ensemble de tous les élèves du lycée et* S *l'ensemble des élèves de votre classe de seconde. Alors* $S \dots E$
- ◇ *soit* P *l'ensemble de tous les professeurs du lycée. Alors Mme Beudez* $\dots P$

Remarque 4. .
L'inclusion (symbole $\subset$*) est une relation entre deux ensembles. Il ne faut pas la confondre avec l'appartenance (symbole* $\in$*) qui est une relation entre un élément et un ensemble. Par exemple, comme* 3 *est un nombre et pas un ensemble de nombres, on dit que « 3 appartient à* $\mathbb{N}$ *», ce qui se note «* $3 \in \mathbb{N}$ *».*

2 Les nombres décimaux

Définition 3. *Un nombre* ***décimal*** *est un nombre pouvant s'écrire sous la forme* $\dfrac{a}{10^n}$ *où* a *est un entier* ***relatif*** *et* n *est un entier* ***naturel****.*

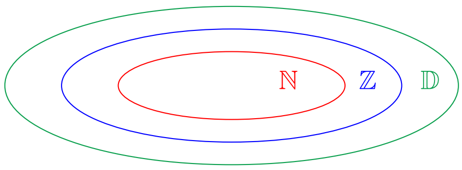
L'ensemble des nombres décimaux est noté .... *(«* ...... *» comme «* .... *»).*

Autrement dit, $\ldots\ldots = \Big\{$ .... $\Big\}$.

Exemple 1.

- $0,2$ *est un nombre décimal (donc* $0,2 \in \mathbb{D}$*). En effet,* $0,2 = \dfrac{\ldots\ldots}{\ldots\ldots}$ *avec* ...... *entier relatif et* ...... *entier naturel.*
- $-0,04$ *est un nombre décimal (donc* $-0,04 \in \mathbb{D}$*). En effet,* $-0,04 = \dfrac{\ldots\ldots}{\ldots\ldots}$ *avec* ...... *entier relatif et* ...... *entier naturel.*

Propriété 2. *Tout entier relatif est un nombre décimal. On a donc les inclusions suivantes :* $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D}$



Démonstration. L'inclusion $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$ a déjà été vue précédemment. Montrons que $\mathbb{Z} \subset \mathbb{D}$, autrement dit que tout entier relatif est un nombre décimal. Pour tout entier relatif k, on a :

$$k = \ldots\ldots\ldots\ldots$$

Ainsi, tout entier relatif k peut s'écrire sous la forme ....

Tout entier relatif est donc un nombre décimal, ce qui prouve que $\mathbb{Z} \subset \mathbb{D}$.

$\square$

Remarque 5. *Les nombres décimaux ont une écriture décimale finie (c'est-à-dire qu'ils s'écrivent avec un nombre fini de chiffres après la virgule). Réciproquement, un nombre ayant une écriture décimale finie est un nombre décimal.*

Propriété 3. *Le nombre* $\dfrac{1}{3}$ *n'est pas décimal.*

Démonstration.

Avant de commencer la démonstration, on rappelle le critère de divisibilité par 3 dont nous allons avoir besoin :

Un nombre est divisible par 3 si et seulement ....

On raisonne **par l'absurde** : supposons que $\dfrac{1}{3}$ soit décimal. Alors ....

....

....

....

....

....

....

....

$\square$

3 L'ensemble des nombres rationnels

Définition 4.

- *Un nombre **rationnel** est un nombre qui peut s'écrire sous la forme* $\frac{p}{q}$ *où* p *est un entier relatif et* q *un entier naturel non nul.*

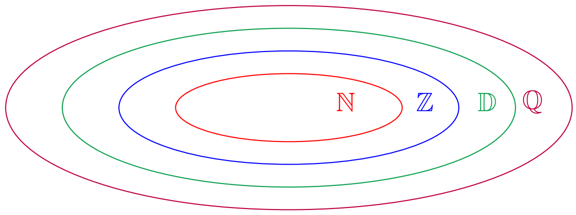
  L'ensemble des nombres rationnels est noté .... *(* « ...... » *comme* « .... »*).*

  Autrement dit, $\mathbb{Q} = \left\{ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \right\}$.

- *Un nombre qui n'est pas rationnel est dit **irrationnel**.*

Propriété 4. *On a les inclusions suivantes :*

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q}.$$



Démonstration. ....

....

....

....

□

Propriété 5. *Tout nombre rationnel s'écrit de manière unique sous forme irréductible. Autrement dit, pour tout nombre rationnel* r*, il existe un unique entier relatif* a *et un unique entier naturel non nul* b *tel que* $r = \frac{a}{b}$ *et tels que le seul diviseur positif commun à* a *et* b *soit* 1.

Démonstration. Admis □

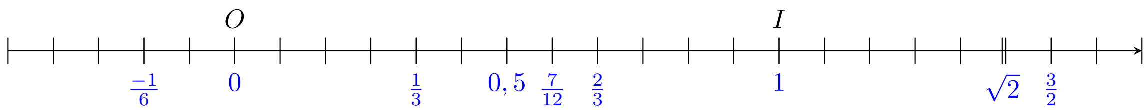
4 L'ensemble des réels, la droite réelle

Point historique :
La mesure des grandeurs est à l'origine de l'invention des nombres réels. Ils permettent d'associer à toute mesure une valeur. Une unité de longueur étant choisie :

- toute longueur de segment est mesurée par un réel nombre positif. Par exemple la longueur de la diagonale d'un carré de côté 1 est mesurée par le réel positif $\sqrt{2}$.
- inversement, tout réel positif est la mesure d'une longueur de segment.

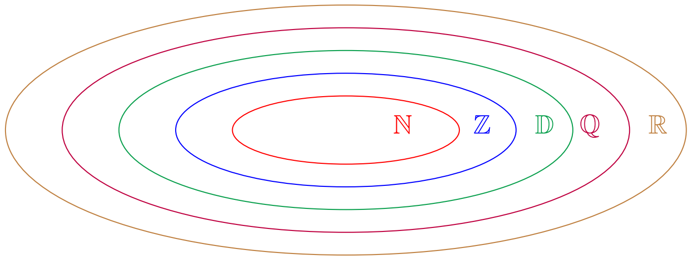
Définition 5.
On considère une droite munie d'un repère $(O; I)$.
*L'ensemble des nombres réels est l'ensemble des abscisses des points de cette droite, appelée **droite des réels**.*

On note cet ensemble ....



Propriété 6. *On a les inclusions suivantes :*

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}.$$



Remarque 6. *Il existe des nombres réels qui ne sont pas rationnels :* . . . .

Propriété 7. *Le nombre* $\sqrt{2}$ *est irrationnel.*

Démonstration. Admise pour l'instant. La démonstration sera faite plus tard lorsque nous aurons vu la notion de nombre pair et de nombre impair et leurs propriétés. □

Remarque 7. *Les calculatrices et logiciels utilisent des valeurs décimales approchées des nombres réels.*
Par exemple, ne serait-ce qu'en terme d'affichage, si vous tapez à la calculatrice $1 \div 3$*, elle affichera seulement* 0.3333333333 *(le chiffre* 3 *est écrit* 10 *fois après la virgule). De même, si vous faites ce calcul dans le shell Python, il affiche* 0.3333333333333333 *(le chiffre* 3 *est écrit* 16 *fois après la virgule). Pourtant,* $\frac{1}{3}$ *n'étant pas un nombre décimal (on le démontrera plus tard),* $\frac{1}{3}$ *n'est égal à aucun des deux nombres précédents. En fait,* $\frac{1}{3} = 0.3\underline{3}...$ *.*
Limites de la calculatrice : Déclic Maths Seconde Hachette 2000 p.24 et 32.

◇ exercice résolu 1 p.25 (en cachant la correction ;-))

5 Encadrement décimal d'un nombre réel à 10^{-n} près

Propriété-définition 1. *Soit* x *un nombre réel et* n *un entier relatif. Il existe un unique nombre entier relatif* a *tel que :*

$$\frac{a}{10^n} \leqslant x < \frac{a+1}{10^n}$$

*Cet encadrement est appelé l'**encadrement décimal de*** x ***à*** 10^{-n} ***près**.*

L'arrondi de x ***à*** 10^{-n} ***près** est celui des deux nombres* $\frac{a}{10^n}$ *ou* $\frac{a+1}{10^n}$ *qui est le plus proche de* x *(lorsqu'il existe).*

Dans le cas où x *est à égale distance de* $\frac{a}{10^n}$ *et de* $\frac{a+1}{10^n}$*, par convention, l'arrondi est alors* $\frac{a+1}{10^n}$*.*

Démonstration. Admis. □

Exercice 2. *Encadrer* π *par deux nombre décimaux à* 10^{-2} *près, puis à* 10^{-4} *près.*

◇ exercice 10 p.59

◇ exercices 49, 50, 51, 52 et 53 p.66

◇ exercices 54 et 55 p.67

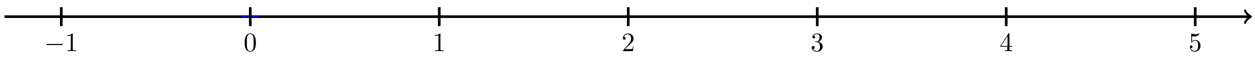
6 Quelques exemples de constructions géométriques de nombres réels

Il est très facile de placer un entier sur la droite des réels : il suffit de reporter l'unité de longueur autant de fois que nécessaire sur la droite, en faisant bien attention à l'orientation de la droite.
En revanche, placer un nombre rationnel ou un nombre irrationnel est moins évident. Nous allons voir quelques constructions dans l'activité indiquée ci-dessous.

II Intervalles de $\mathbb{R}$

Exemple introductif : On considère l'ensemble des nombres compris au sens large entre 2 et 5. Comment écrire cet ensemble plus simplement ?
On ne peut pas écrire la liste de tous les nombres appartenant à cet ensemble car ....

On peut représenter cet ensemble sur la droite graduée ci-dessous en coloriant :



Cet ensemble de nombres se note $\big[2;5\big]$. Les crochets indiquent ici que 2 et 5 appartiennent à cet ensemble. On peut se les représenter comme des mains qui tiennent les nombres 2 et 5 : Un tel ensemble est appelé un **intervalle** (du latin ≪ intervallum ≫ qui désignait la distance entre deux pieux).
Les nombres 2 et 5 sont appelés les **bornes** de l'intervalle $[2;5]$.

1 Les intervalles de $\mathbb{R}$

Le tableau suivant donne les différents types d'intervalles que vous pouvez rencontrer (a et b sont deux réels tels que $a < b$).

Intervalle	Description	Ensemble des réels x tels que	Représentation
$[a;b]$	tous les nombres compris au sens large entre a et b		
$]a;b[$	tous les nombres strictement compris entre a et b		
$[a;b[$	tous les nombres compris entre a et b, b exclus		
$]a;b]$	tous les nombres compris entre a et b, a exclus		
$[a;+\infty[$	tous les nombres supérieurs ou égaux à a		
$]a;+\infty[$	tous les nombres strictement supérieurs à a		
$]-\infty;b]$	tous les nombres inférieurs ou égaux à b		
$]-\infty;b[$	tous les nombres strictement inférieurs à b		

Exemple 2. *Compléter les ... à l'aide de l'un des symbole $\in$ ou $\notin$:*

◇ $1 \in \big[-3;2\big]$ *et* $1 \in \big]-3;2\big[$.

◇ $-3 \in \big[-3;2\big]$ *mais* $-3 \notin \big]-3;2\big]$.

◇ $2 \in \big[-3;2\big]$ *mais* $2 \notin \big[-3;2\big[$.

Remarque 8.

◇ *Quand le crochet « tient » le nombre, on dit qu'il est .... et le nombre ....*

◇ *Quand le crochet « ne tient pas » le nombre, on dit qu'il est .... et le nombre ....*

◇ *Du côté de $-\infty$ et de $+\infty$, le crochet est **toujours** .... En effet, $-\infty$ et $+\infty$ ne désignent pas des nombres réels et ne peuvent pas être atteints.*

◇ *L'ensemble $\mathbb{R}$ est lui-aussi un intervalle, c'est l'intervalle ....*

Définition 6.

◇ *L'ensemble des réels positifs (ou nuls) est l'intervalle $\left[0;+\infty\right[$. On le note aussi ....*

◇ *L'ensemble des réels négatifs (ou nuls) est l'intervalle $\left]-\infty;0\right]$. On le note aussi ....*

◇ exercice résolu 1 p.27 (en cachant la correction ;-)) ;
◇ exercices 1 et 2 de la feuille d'exercices du chapitre ;
◇ exercices 41, 42, 43, 44 p.40. Indication pour l'exercice 43 : on appelle amplitude d'un intervalle sa longueur. Par exemple, l'intervalle $[1;3]$ a pour amplitude 2 ;
◇ exercice 46 p.40 (sauf les questions 7 et 8) ;
◇ exercice 84 p.44.

2 Intersection et réunion d'intervalles

Définition 7. *Soient I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$.*

◇ *L'**intersection** de I et de J est l'ensemble des nombres qui appartiennent à la fois à I et à J. On la note $I \cap J$, ce qui se lit « I inter J ».*

◇ *La **réunion** de I et de J est l'ensemble des nombres qui appartiennent à I ou à J (éventuellement aux deux à la fois). On la note $I \cap J$, ce qui se lit "I union J".*

Remarque 9. *Lorsque les intervalles I et J n'ont aucun nombre en commun, leur intersection est l'ensemble vide, noté $\emptyset$. On dit alors que les intervalles I et J sont **disjoints**.*

Remarque 10. *On a l'inclusion $I \cap J \subset I \cup J$.*

Méthode pour représenter l'intersection et l'union de deux intervalles :

On commence par représenter ces deux intervalles sur la même droite avec deux couleurs différentes.

◇ L'intersection des deux intervalles est la partie de la droite qui a été coloriée **des deux couleurs à la fois**.

◇ La réunion des deux intervalles est la partie de la droite qui a été coloriée **d'au moins une des deux couleurs** (soit d'une couleur uniquement, soit des deux couleurs à la fois).

Exercice 3.

$\diamond$ *$I = \big[3;7\big]$ et $J = \big[4;9\big[$. Alors $I \cap J = \ldots\ldots.$*

$\diamond$ *$I = [3;7]$ et $J = [4;9[$. Alors $I \cup J = \ldots\ldots$*

$\diamond$ *$I = \big[-5;2\big[$ et $J = \big]3;4\big[$. Alors $I \cap J = \ldots\ldots.$*

$\diamond$ *$I = [1;3]$ et $J = [-2;10]$. Alors $I \cup J = \ldots\ldots$*

$\diamond$ *$I = \big[2;6\big]$ et $J = \big]3;+\infty\big[$. Alors $I \cap J = \ldots\ldots.$*

$\diamond$ *$I = [-5;2[$ et $J =]3;4[$. Alors $I \cup J = \ldots\ldots$*

$\diamond$ *$I =]-2;3]$ et $J = [3;7]$. Alors $I \cap J = \ldots\ldots.$*

$\diamond$ *$I = [0;4]$ et $J =]-\infty;1]$. Alors $I \cup J = \ldots\ldots$*

III Valeur absolue d'un nombre réel. Distance entre deux nombres réels.

Définition 8. *Soit x un nombre réel.*
*On appelle **valeur absolue** de x, et on note $|x|$, le nombre réel égal à :* $\begin{cases} x & si\ x \geqslant 0 \\ -x & si\ x < 0 \end{cases}$.

Exemple 3.
$|6| = \ldots\ldots$; $|-5| = \ldots\ldots$; $|-3,2| = \ldots\ldots$; $|0| = \ldots\ldots$; $|-\pi| = \ldots\ldots$

Définition 9. *Soient a et b deux nombres réels.*
*On appelle **distance entre les réels** a **et** b le nombre $|b-a|$ (aussi égal à $|a-b|$).*

Exemple 4. *La distance entre les nombres 1 et 6 est* ....
La distance entre les nombres 5 et 0,3 est ....
La distance entre les nombres -2 et 4 est ....

Exercice 4. *On considère les réels suivants :*

$$a = -4 \quad ; \quad b = -1 \quad ; \quad c = 2 \quad ; \quad d = 3,6$$

1. *Calculer :*
   - $\diamond$ *la distance entre a et b ;* ....
   - $\diamond$ *la distance entre c et d ;* ....
   - $\diamond$ *la distance entre a et c.* ....
2. *Sur une droite de repère $(O;I)$, placer les points A, B, C et D d'abscisses respectives a, b, c et d.*

   Que semblent représenter géométriquement les résultats obtenus à la question 1 ?

   ....

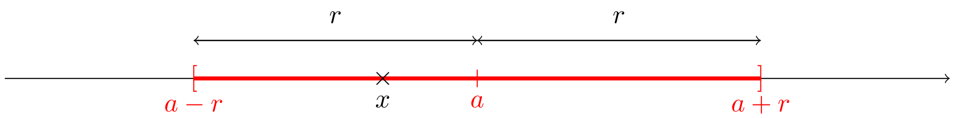
Interprétation géométrique de $|b-a|$ avec a et b deux réels :

On considère une droite graduée (d). On note A le point d'abscisse a et B le point d'abscisse b. Alors la distance $|b-a|$ entre les nombres a et b s'interprète géométriquement comme ....

Propriété 8. *Soient a, x et r trois nombres réels avec $r \geqslant 0$. Alors :*

$$x \in [a-r; a+r] \quad \textit{équivaut à} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Démonstration. admis



□

Exercice 5. *Sur une droite graduée, A est le point d'abscisse 2.*

1. *Représenter l'ensemble des points M tels que $AM \leqslant 4$.*

2. *On note x l'abscisse du point M. Compléter l'inégalité caractérisant x :*

$$|x - \ldots\ldots| \leqslant \ldots\ldots$$

Exercice 6. *Dans chacun des cas suivants, représenter sur une droite graduée l'ensemble des réels x vérifiant l'inégalité donnée :*

◇ $|x-3| < 1$

◇ $|x+4| < 2$

◇ $|5-x| < 3$

◇ exercices résolus 2 et 3 p.27 (en cachant la correction ;-))
◇ exercice 8 p.33
◇ exercice 45 p.40
◇ questions 7 et 8 de l'exercice 46 puis l'exercice 47 p.40
◇ exercice 72 p.43
◇ exercice 104 p.47