COLLE 12 = DIMENSIONS DES ESPACES VECTORIELS

Dimensions des espaces vectoriels :

Exercice 1.
Soit $E = \mathbb{C}_{n-1}[X]$ et soit $\alpha_1, ..., \alpha_n$ des nombres complexes deux à deux distincts. On pose, pour $k = 1, ...n$,

$$L_k = \frac{\prod_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{n} (X - \alpha_i)}{\prod_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{n} (\alpha_k - \alpha_i)}$$

Démontrer que $(L_k)_{k=1,...,n}$ est une base de E. Déterminer les coordonnées d'un élément $P \in E$ dans cette base.

Exercice 2.
Soit $E = \mathbb{R}_3[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à 3. On définit u l'application de E dans lui-même par

$$u(P) = P + (1 - X)P'$$

1. Montrer que u est un endomorphisme de E.
2. Déterminer une base de $Im(u)$.
3. Déterminer une base de $ker(u)$.
4. Montrer que $ker(u)$ et $Im(u)$ sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E.

Exercice 3.
Soient $\alpha \in \mathbb{R}$ et $F = \{P \in \mathbb{R}_n[X]; P(\alpha) = 0\}$.

Démontrer que $B = \{(X - \alpha)X^k; 0 \leq k \leq n - 1\}$ est une base de F. Quelle est la dimension de F ? Donner les coordonnées de $(X - \alpha)^n$ dans cette base.

Exercice 4.
Démontrer que les familles suivantes sont libres dans $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$:

1. $(x \longmapsto e^{ax})_{a\in\mathbb{R}}$;
2. $(x \longmapsto |x - a|)_{a\in\mathbb{R}}$;
3. $(x \longmapsto \cos(ax))_{a\in\mathbb{R}}$;
4. $(x \longmapsto (\sin x)^n)_{n\in\mathbb{N}}$;

Exercice 5.
Soit E l'ensemble des fonctions continues sur $[-1, 1]$ qui sont affines sur $[-1, 0]$ et sur $[0, 1]$. Démontrer que E est un espace vectoriel et en donner une base.

Exercice 6.
Soit E un espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E)$.

1. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :
   - ☐ $ker(f) = ker(f^2)$.
   - ☐ $Im(f) \cap ker(f) = \{0\}$.
2. On suppose maintenant que E est de dimension finie. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :
   - ☐ $ker(f) = ker(f^2)$.
   - ☐ $ker(f) \oplus Im(f) = E$.
   - ☐ $Im(f) = Im(f^2)$.

Exercice 7.
Démontrer que l'ensemble des suites arithmétiques complexes est un espace vectoriel. Quelle est sa dimension ?

Exercice 8.
Soit $n \geq 1$, $E = \mathbb{R}_n[X]$ et $\phi \in \mathcal{L}(E)$ défini par $\phi(P) = P(X + 1) - P(X)$. Déterminer le noyau et l'image de ϕ.

Exercice 9.
Soit E un espace vectoriel dans lequel tout sous-espace vectoriel admet un supplémentaire. Soit F un sous-espace vectoriel propre de E (c'est-à-dire que $F \neq \{0\}$ et que $E \neq F$). Démontrer que F admet au moins deux supplémentaires distincts.
