TD 18

Espaces vectoriels

Exercice 1

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et soit A, B et C des sous-espaces.

1. Montrer que $(A \cap B) + (A \cap C) \subseteq A \cap (B + C)$.
2. A-t-on toujours l'égalité ?
3. Montrer que $(A \cap B) + (A \cap C) = A \cap (B + A \cap C)$.

Exercice 2

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et soit A, B et C des sous-espaces vectoriels de E tels que $A \cap B = A \cap C$, $A + B = A + C$, et $B \subseteq C$. Montrer que $B = C$.

Exercice 3

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et soit A, B et C des sous-espaces. Montrer que :

$$(A \cap B) + (B \cap C) + (C \cap A) \subseteq (A + B) \cap (B + C) \cap (C + A)$$

Exercice 4

Montrer que $\left\{ f \in \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R}) \mid \int_0^1 f = 0 \right\}$ est un hyperplan de $\mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R})$ dont un supplémentaire est l'ensemble des fonctions constantes sur $[0,1]$.

Exercice 5

Soit $e_1 = (1,2,3,4)$, $e_2 = (1,1,1,3)$, $e_3 = (2,1,1,1)$, $e_4 = (-1,0,-1,2)$, et $e_5 = (2,3,0,1)$ des vecteurs dans $\mathbb{R}^4$. Soit $F = \mathrm{Vect}(e_1, e_2, e_3)$ et $G = \mathrm{Vect}(e_4, e_5)$. Déterminer les dimensions de F, G, $F \cap G$ et $F + G$.

Exercice 6 – Tout sev admet une infinité de supplémentaires

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, F un sous-espace (non nul et distinct de E) et G un supplémentaire de F dans E.

1. Justifier l'existence d'un vecteur $x \in E \setminus (F \cup G)$.
2. Montrer que $F \cap \mathrm{Vect}(x) = \{0\}$.
3. On se donne $\tilde{G}_1$ un supplémentaire de $F \oplus \mathrm{Vect}(x)$ dans E et on pose $G_1 = \tilde{G}_1 + \mathrm{Vect}(x)$.
   Montrer que $G_1 = \tilde{G}_1 \oplus \mathrm{Vect}(x)$ est un supplémentaire de F dans E distinct de G.
4. Montrer que F admet une infinité de supplémentaires dans E.

Exercice 7 – Image réciproque d'image directe et vice-versa

Soit E un $\mathbb{K}$-ev, F un sev de E et $u \in \mathcal{L}(E)$. Déterminer $u^{-1}(u(F))$ et $u(u^{-1}(F))$ en fonction de F, $\mathrm{Im}\, u$ et $\mathrm{Ker}\, u$.

Exercice 8

Soit E, E', E'', F, F' et F'' des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. Soit f, f', f'', φ, φ', ψ et ψ' des applications linéaires suivant :

$$\begin{array}{ccccc} E & \xrightarrow{\varphi} & E' & \xrightarrow{\psi} & E'' \\ {\scriptstyle f}\downarrow & & {\scriptstyle f'}\downarrow & & {\scriptstyle f''}\downarrow \\ F & \xrightarrow{\varphi'} & F' & \xrightarrow{\psi'} & F'' \end{array}$$

On suppose que $f' \circ \varphi = \varphi' \circ f$, $f'' \circ \psi = \psi' \circ f'$, $\operatorname{Im}\varphi = \operatorname{Ker}\psi$ et $\operatorname{Im}\varphi' = \operatorname{Ker}\psi'$.

1. Montrer que si φ', f et f'' sont injectives alors f' l'est aussi.
2. Montrer que si ψ, f et f'' sont surjectives alors f' l'est aussi.

Exercice 9 – Endomorphismes nilpotents

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel non nul et $f \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme nilpotent. On note p l'indice de nilpotence de f, i.e. le plus petit entier naturel vérifiant $f^p = 0$.

1. f peut-il être un automorphisme ?
2. Montrer qu'il existe $x \in E$ tel que $(x, f(x), \dots, f^{p-1}(x))$ est libre.
3. En déduire que si E est de dimension finie alors $p \leq \dim E$.

Exercice 10 – Suite des noyaux itérés et suite des images itérées

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E)$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$ on note $N_k = \operatorname{Ker} f^k$ et $I_k = \operatorname{Im} f^k$.

1. Montrer que $(N_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite strictement croissante ou bien strictement croissante puis constante.
2. Montrer que $(I_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite strictement décroissante ou bien strictement décroissante puis constante.
3. À partir de la question 1, retrouver que si E est de dimension finie et f nilpotent d'indice p alors $p \leq n$.

Exercice 11 – Caractérisation des applications linéaires injectives

Soient E, F, G des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et soient $u \in \mathcal{L}(E, G)$, $v \in \mathcal{L}(E, F)$.

1. Montrer que : $\operatorname{Ker} v \subseteq \operatorname{Ker} u \Leftrightarrow \exists w \in \mathcal{L}(F, G) \,:\, u = w \circ v$.
2. En déduire que : v injective $\Leftrightarrow \exists w \in \mathcal{L}(F, E) \,:\, w \circ v = \mathrm{Id}_E$.

Exercice 12 – Caractérisation des applications linéaires surjectives

Soient E, F, G des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et soient $u \in \mathcal{L}(E, G)$, $v \in \mathcal{L}(F, G)$.

1. Montrer que : $\operatorname{Im} v \subseteq \operatorname{Im} u \Leftrightarrow \exists w \in \mathcal{L}(F, E) : v = u \circ w$.
2. En déduire que : u surjective $\Leftrightarrow \exists w \in \mathcal{L}(G, E) : u \circ w = \mathrm{Id}_G$.

Exercice 13 – Centre de $\mathcal{L}(E)$

1. Soit E un $\mathbb{K}$-ev et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\forall u \in E, \exists \lambda \in \mathbb{K} : f(u) = \lambda u$. Montrer que f est une homothétie.
2. Déterminer l'ensemble des endomorphismes de E qui commutent avec tous les endomorphismes de E.

Exercice 14 – Lemme de Fitting

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E)$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$ on note $N_k = \operatorname{Ker} f^k$ et $I_k = \operatorname{Im} f^k$.

1. Soient $N = \bigcup\limits_{k\in\mathbb{N}} N_k$ et $I = \bigcap\limits_{k\in\mathbb{N}} I_k$. Montrer que N et I sont des sous-espaces vectoriels de E.

On suppose désormais que E est de dimension finie.

2. Montrer que $N_k = N_{k+1} \Leftrightarrow I_k = I_{k+1}$ quelque soit $k \in \mathbb{N}$.
3. Montrer que $E = N \oplus I$.

Solutions

Exercice 1

1. Comme $B \subseteq B+C$ alors $A \cap B \subseteq A \cap (B+C)$. De même, comme $C \subseteq B+C$ alors $A \cap C \subseteq A \cap (B+C)$. Comme $A \cap (B+C)$ est un sous-espace vectoriel de E (en tant qu'intersection de sous-espaces vectoriels) alors :
$$(A \cap B) + (A \cap C) \subseteq A \cap (B+C)$$
2. Pas toujours, par exemple si $E = \mathbb{R}^2$ et A, B, C trois droites vectorielles distinctes de E :
$$(A \cap B) + (A \cap C) = \{0\} + \{0\} + \{0\} \subsetneq A = A \cap E = A \cap (B+C)$$
3. Par double inclusion.

   $\boxed{\subseteq}$ **:** Comme $B \subseteq B + A \cap C$ alors $A \cap B \subseteq A \cap (B + A \cap C)$.
   Mais aussi $A \cap C \subseteq B + A \cap C$ et $A \cap C \subseteq A$ alors $A \cap C \subseteq A \cap (B + A \cap C)$.
   Comme $A \cap (B + A \cap C)$ est un sous-espace vectoriel alors :
$$(A \cap B) + (A \cap C) \subseteq A \cap (B + A \cap C)$$
   $\boxed{\supseteq}$ **:** On se donne $x \in A \cap (B + A \cap C)$. Comme $x \in B + A \cap C$ alors il existe $u \in B$ et $v \in A \cap C$ tels que $x = u + v$. Comme $x \in A$ alors $u = x - v \in A$ en tant que différence d'éléments de A. Mais par ailleurs $u \in B$ donc $u \in A \cap B$. Ainsi $x = u + v \in (A \cap B) + (A \cap C)$. D'où :
$$A \cap (B + A \cap C) \subseteq (A \cap B) + (A \cap C)$$
   Conclusion : $\boxed{(A \cap B) + (A \cap C) = A \cap (B + A \cap C)}$

Exercice 2

On sait déjà que $B \subseteq C$, il suffit donc de montrer que $C \subseteq B$.

Soit $x \in C$ alors $x \in A + C = A + B$ donc il existe $a \in A$ et $b \in B$ tels que $x = a + b$. Comme $B \subseteq C$ alors $b \in C$ et comme $x \in C$ alors $a = x - b \in C$ donc $a \in A \cap C = A \cap B$ donc $a \in B$ et donc $x = a + b \in B$ comme somme d'éléments de B.

On a bien montré $C \subseteq B$ d'où :
$$\boxed{B = C}$$

Exercice 3

On remarque que A est inclus dans $A + B$, $B + C$ et $C + A$ donc :
$$A \cap B \subseteq (A+B) \cap (B+C) \cap (C+A)$$
Mais par symétrie des rôles de A, B, C on obtient de la même manière :
$$B \cap C \subseteq (A+B) \cap (B+C) \cap (C+A)$$
$$C \cap A \subseteq (A+B) \cap (B+C) \cap (C+A)$$
Comme $(A+B) \cap (B+C) \cap (C+A)$ est un sous-espace vectoriel de E on en déduit :
$$\boxed{(A \cap B) + (B \cap C) + (C \cap A) \subseteq (A+B) \cap (B+C) \cap (C+A)}$$

Exercice 4

On notera $H = \left\{f \in \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R}) \mid \int_0^1 f = 0\right\}$, D l'ensemble des fonctions constantes et $\mathbb{1} : x \longmapsto 1$.

On peut commencer par remarquer que H est un hyperplan de $\mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$ en tant que noyau de la forme linéaire non nulle $f \longmapsto \int_0^1 f$.

L'unique fonction constante d'intégrale nulle sur $[0,1]$ est la fonction nulle donc $H \cap D = \{0\}$.

Pour toute fonction $f \in \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$ on a $f = f - \left(\int_0^1 f\right)\mathbb{1} + \left(\int_0^1 f\right)\mathbb{1}$ avec $f - (\int_0^1 f)\mathbb{1}$ d'intégrale nulle sur $[0,1]$ donc appartenant à H et $\left(\int_0^1 f\right)\mathbb{1}$ fonction constante donc appartenant à D. Donc $f \in H + D$.

Comme H et D sont des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$ ceci montre :

$$\mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R}) = H + D$$

Finalement :

$$\boxed{\mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R}) = H \oplus D}$$

Exercice 5

Comme e_1 et e_2 sont non colinéaires la famille (e_1,e_2) est libre. Comme (e_1,e_2) est une sous-famille libre à deux éléments d'une famille génératrice de F alors :

$$\dim F \geq 2$$

Par ailleurs F est engendré par une famille à trois éléments donc :

$$\dim F \leq 3$$

Reste à voir si $e_3 \in \mathrm{Vect}(e_1,e_2)$ auquel cas (e_1,e_2) engendre F et alors $\dim F = 2$ ou si $e_3 \notin \mathrm{Vect}(e_1,e_2)$ auquel cas (e_1,e_2,e_3) est libre et alors $\dim F = 3$.

Soient λ, μ des réels. Alors :

$$\begin{aligned}\lambda e_1 + \mu e_2 = e_3 &\Leftrightarrow (\lambda+\mu, 2\lambda+\mu, 3\lambda+\mu, 4\lambda+3\mu) = (2,1,1,1)\\ &\Leftrightarrow \begin{cases}\lambda+\mu = 2\\ 2\lambda+\mu = 1\\ 3\lambda+\mu = 1\\ 4\lambda+3\mu = 1\end{cases}\end{aligned}$$

Les deux premières lignes de ce système équivalent à $\lambda = -1$ et $\mu = 3$ ce qui est incompatible avec la troisième ligne : $3(-1)+3 \neq 1$. De tels réels λ, μ ne peuvent donc pas exister et alors $e_3 \notin \mathrm{Vect}(e_1,e_2)$. Ainsi :

$$\dim F = 3$$

Comme e_4 et e_5 sont non colinéaires la famille (e_4,e_5) est libre. Comme $G = \mathrm{Vect}(e_4,e_5)$ alors c'est une base de G et donc :

$$\dim G = 2$$

On sait que $\dim(F\cap G) \geq 1$ car $F \cap G \neq \{0\}$ car autrement $\dim(F+G) = \dim F + \dim G = 3+2 = 5 > \dim \mathbb{R}^4$. Comme $F \cap G \subseteq G$ avec $\dim G = 2$ alors $\dim(F \cap G) \leq 2$.

Si $G \subseteq F$ alors $F \cap G = G$ est de dimension 2 et si $G \nsubseteq F$ alors $F \cap G \subsetneq G$ et alors $\dim(F\cap G) = 1$.

Soient α, β, γ des réels.

$$\alpha e_1 + \beta e_2 + \gamma e_3 = e_4 \Leftrightarrow \begin{cases}\alpha+\beta+2\gamma = -1\\ 2\alpha+\beta+\gamma = 0\\ 3\alpha+\beta+\gamma = -1\\ 4\alpha+3\beta+\gamma = 2\end{cases}$$

Des lignes 2 et 3 on déduit que $\alpha = -1$ et $\beta + \gamma = 2$, la ligne 1 donne alors que $\gamma = -2$ donc $\beta = 2 - \gamma = 4$. La ligne 4 donne alors $4(-1) + 3(4) - 2 = 2$ i.e. $6 = 2$, ce qui est faux. Ce système n'admet donc pas de solution, ce qui prouve que $e_4 \notin \mathrm{Vect}(e_1, e_2, e_3)$ et donc $G \not\subseteq F$. Ainsi :

$$\dim(F \cap G) = 1$$

La formule de Grassmann $\dim(F + G) = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G)$ donne enfin :

$$\dim(F + G) = 4$$

C'est-à-dire :

$$F + G = \mathbb{R}^4$$

Exercice 6 – Tout sev admet une infinité de supplémentaires

1. Il s'agit de montrer que $F \cup G \neq E$.

   On sait que $F \cup G$ est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si $F \subseteq G$ ou $G \subseteq F$ i.e. $F \cap G = F$ ou $F \cap G = G$.
   Ici $E = F \oplus G$ donc $F \cap G = \{0\}$ donc $F \cap G \neq F$ et $F \cap G \neq G$ (car $F \neq \{0\}$ et donc $F \neq E$ i.e. $G \neq \{0\}$).
   Donc $F \cup G$ n'est pas un sous-espace vectoriel de E et en particulier $F \cup G \neq E$.

2. Soit $y \in F \cap \mathrm{Vect}(x)$. Comme $y \in \mathrm{Vect}(x)$ il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $y = \lambda x$. Comme $x \neq 0$ (car $E \setminus (F \cup G)$ ne contient pas 0 puisque $0 \in F \cup G$) alors $y = 0 \Leftrightarrow \lambda = 0$.

   Si $\lambda \neq 0$ alors $x = \dfrac{1}{\lambda} y \in F$ car $y \in F$. Comme $x \notin F$ alors $\lambda = 0$ i.e. $y = 0$. D'où :

   $$\boxed{F \cap G = \{0\}}$$

3. Comme $\tilde{G}_1 \cap \mathrm{Vect}(x) \subseteq \tilde{G}_1 \cap (F \oplus \mathrm{Vect}(x)) = \{0\}$ alors $\tilde{G}_1 \cap \mathrm{Vect}(x) = \{0\}$. Autrement dit :

   $$G_1 = \tilde{G}_1 \oplus \mathrm{Vect}(x)$$

   Vérifions maintenant que G_1 et F sont en somme directe.
   Soit $y \in F \cap G_1$. Comme $y \in G_1$ il existe un unique $(g, \lambda) \in \tilde{G}_1 \times \mathbb{K}$ tel que $y = g + \lambda x$.
   Alors $g = y - \lambda x \in \tilde{G}_1 \cap (F \oplus \mathrm{Vect}(x)) = \{0\}$ donc $g = 0$ i.e. $y = \lambda x$. Si $y \neq 0$ alors $\lambda \neq 0$ et alors $x = \dfrac{1}{\lambda} y \in F$.
   Comme $x \notin F$ alors $y = 0$. D'où :

   $$F \cap G_1 = \{0\}$$

   Par ailleurs :

   $$E = (F + \mathrm{Vect}(x)) + \tilde{G}_1 = F + (\mathrm{Vect}(x) + \tilde{G}_1) = F + G_1$$

   Finalement :

   $$\boxed{E = F \oplus G_1}$$

   Reste à vérifier que $G_1 \neq G$ ce qui vient immédiatement du fait que $x \in G_1$ mais $x \notin G$.

4. **<u>Lemme</u> : Un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E n'est pas réunion de sous-espaces stricts de E.**

   Preuve : Par l'absurde, supposons que $E = F_1 \cup \cdots \cup F_n$ où $F_1, \ldots, F_n$ sont des sous-espaces vectoriels stricts de E distincts.

   Si $F_n \subseteq F_1 \cup \cdots \cup F_{n-1}$ alors $E = F_1 \cup \cdots \cup F_{n-1}$. On itère ce raisonnement jusqu'à avoir $E = F_1 \cup \cdots \cup F_k$ avec $F_k \not\subseteq F_1 \cup \cdots \cup F_{k-1}$ (nécessairement $k \geq 2$ puisque $E \neq \varnothing$ $(k \neq 0)$ et $E \neq E_1$ $(k \neq 1)$). Quitte à renommer k en n (i.e. à supposer n minimal) on peut écrire $E = F_1 \cup \cdots \cup F_n$ avec $F_n \not\subseteq F_1 \cup \cdots \cup F_{n-1}$.

   De plus, si $F_1 \cup \cdots \cup F_{n-1} \subseteq F_n$ alors $E = F_n$ ce qui est impossible puisque $F_n \subsetneq E$. Ainsi :

$$F_n \not\subseteq F_1 \cup \cdots \cup F_{n-1} \text{ et } F_1 \cup \cdots \cup F_{n-1} \not\subseteq F_n$$

Il existe donc $x \in F_1 \cup \cdots \cup F_{n-1}$ tel que $x \notin F_n$ et il existe $y \in F_n$ tel que $y \notin F_1 \cup \cdots \cup F_{n-1}$.
Comme $x \in F_1 \cup \cdots \cup F_{n-1}$ alors il existe $i \in [\![1, n-1]\!]$ tel que $x \in F_i$.
Comme $E = F_1 \cup \cdots \cup F_n$ alors pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$ on a $x + \lambda y \in F_1 \cup \cdots \cup F_n$. Autrement dit :

$$\forall \lambda \in \mathbb{K}, \exists j \in [\![1, n]\!] : x + \lambda y \in F_j$$

Comme $\mathbb{K}$ est infini et $[\![1, n]\!]$ est fini alors par principe des tiroirs il existe λ, μ distincts dans $\mathbb{K}$ tels qu'il existe $j \in [\![1, n]\!]$ pour lequel $x + \lambda y \in F_j$ et $x + \mu y \in F_j$. En faisant leur différence :

$$(\lambda - \mu) y \in F_j$$

Comme $\lambda - \mu \neq 0$ on en déduit :

$$y \in F_j$$

Ce qui contredit le fait que $y \notin F_1 \cup \cdots \cup F_{n-1}$ (puisque $j \in [\![1, n-1]\!]$).

□

On pose $G_0 = G$ et on construit par récurrence une suite $(G_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de supplémentaires de F dans E distincts.

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel qu'on ait $G_0, \ldots, G_n$ des supplémentaires de F dans E distincts.
D'après le lemme ci-dessus :

$$\bigcup_{k=0}^{n} G_k \cup F \neq E$$

Il existe donc $x_{n+1} \in E \setminus \big(\bigcup_{k=0}^{n} G_k \cup F\big)$.
Vérifions que $F \cap \mathrm{Vect}(x_{n+1}) = \{0\}$. Soit $y \in F \cap \mathrm{Vect}(x_{n+1})$ alors il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $y = \lambda x_{n+1}$. Comme $x_{n+1} \neq 0$ (car $x_{n+1} \notin F$) alors $y = 0 \Leftrightarrow \lambda = 0$. Si $\lambda \neq 0$ alors $x_{n+1} = \dfrac{1}{\lambda} y \in F$. Comme $x_{n+1} \notin F$ alors $\lambda = 0$ i.e. $y = 0$. D'où :

$$F \cap \mathrm{Vect}(x_{n+1}) = \{0\}$$

On se donne un supplémentaire $\tilde{G}_{n+1}$ de $F \oplus \mathrm{Vect}(x_{n+1})$ dans E et on pose :

$$G_{n+1} = \tilde{G}_{n+1} + \mathrm{Vect}(x_{n+1})$$

Alors $\tilde{G}_{n+1} \cap \mathrm{Vect}(x_{n+1}) \subseteq G_{n+1} \cap (F + \mathrm{Vect}(x_{n+1})) = \{0\}$ donc $\tilde{G}_{n+1} \cap \mathrm{Vect}(x_{n+1}) = \{0\}$ i.e. :

$$G_{n+1} = \tilde{G}_{n+1} \oplus \mathrm{Vect}(x_{n+1})$$

Par ailleurs :

$$E = (F + \mathrm{Vect}(x_{n+1})) + \tilde{G}_{n+1} = F + (\mathrm{Vect}(x_{n+1}) + \tilde{G}_{n+1} = F + G_{n+1}$$

Finalement :

$$E = F \oplus G_{n+1}$$

De plus G_{n+1} est distinct de chaque G_k ($k \in [\![0, n]\!]$) car $x_{n+1} \in G_{n+1}$ mais $x_{n+1} \notin G_k$.

On a donc bien construit un supplémentaire G_{n+1} de F distinct de $G_1, \ldots, G_n$ ce qui achève la construction par récurrence.

On a construit une suite $(G_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de supplémentaires de F dans E distincts. En particulier :

$$\boxed{F \text{ admet une infinité de supplémentaires}}$$

Exercice 7 – Image réciproque d'image directe et vice-versa

On remarque d'abord que $F \subseteq u^{-1}(u(F))$ (vrai quelle que soit l'application u car pour tout $x \in F$ on a $u(x) \in u(F)$).
De plus, $\operatorname{Ker} u \subseteq u^{-1}(u(F))$ car si $x \in \operatorname{Ker} u$ alors $u(x) = 0 = u(0) \in u(F)$ (car $0 \in F$).
Comme $u^{-1}(u(F))$ est un sous-espace vectoriel de E alors :

$$F + \operatorname{Ker} u \subseteq u^{-1}(u(F))$$

Réciproquement soit $x \in u^{-1}(u(F))$. Alors $u(x) \in u(F)$ i.e. il existe $y \in F$ tel que $u(x) = u(y)$. Alors :

$$x = y + (x - y)$$

avec $y \in F$ et $x - y \in \operatorname{Ker} u$. Donc $x \in F + \operatorname{Ker} u$. D'où l'inclusion :

$$u^{-1}(u(F)) \subseteq F + \operatorname{Ker} u$$

Finalement :

$$\boxed{u^{-1}(u(F)) = F + \operatorname{Ker} u}$$

On remarque de même que $u(u^{-1}(F)) \subseteq F$ (vrai quelle que soit l'application u car pour tout $y \in u(u^{-1}(F))$ il existe $x \in u^{-1}(F)$ tel que $y = u(x)$ et alors $y \in F$). De plus, $u(u^{-1}(F)) \subseteq \operatorname{Im} u = u(E)$ puisque $u^{-1}(F) \subseteq E$.
Ainsi :

$$u(u^{-1}(F)) \subseteq F \cap \operatorname{Im} u$$

Réciproquement soit $y \in F \cap \operatorname{Im} u$. Comme $y \in \operatorname{Im} u$ il existe $x \in E$ tel que $y = u(x)$ et comme $y \in F$ alors $x \in u^{-1}(F)$ et donc $y \in u(u^{-1}(F))$. D'où l'inclusion :

$$F \cap \operatorname{Im} u \subseteq u(u^{-1}(F))$$

Finalement :

$$\boxed{u(u^{-1}(F)) = F \cap \operatorname{Im} u}$$

Exercice 8

1. Supposons φ', f et f'' injectives, montrons que f' l'est aussi.

   Soit $x' \in \operatorname{Ker} f'$. Autrement dit $f'(x') = 0$. Donc $\psi' \circ f'(x') = 0$. Comme $\psi' \circ f' = f'' \circ \psi$ alors $f'' \circ \psi(x') = 0$. Comme f'' est injective alors $\psi(x') = 0$ i.e. $x \in \operatorname{Ker} \psi = \operatorname{Im} \varphi$ donc il existe $x \in E$ tel que $x' = \varphi(x)$. Ainsi $f'(x') = 0$ devient $f' \circ \varphi(x) = 0$ i.e. $\varphi' \circ f(x) = 0$. Mais comme φ' et f sont injectives $\varphi' \circ f$ l'est aussi et alors $x = 0$ d'où $x' = \varphi(0) = 0$.

   Ceci prouve que $\operatorname{Ker} f' = \{0\}$ autrement dit $\underline{f' \text{ injective}}$.

2. Supposons ψ, f et f'' surjectives, montrons que f' l'est aussi.

   Soit $y' \in F'$. Comme $\psi'(y') \in F''$ alors par surjectivité de $f'' \circ \psi$ il existe $x' \in E'$ tel que $\psi'(y') = f'' \circ \psi(x')$.
   Mais alors $\psi'(y') = \psi' \circ f'(x')$ i.e. $y' - f(x') \in \operatorname{Ker} \psi'$.
   Comme $\operatorname{Ker} \psi' = \operatorname{Im} \varphi'$ il existe $y \in F$ tel que $y' - f'(x') = \varphi'(y)$. Par surjectivité de f il existe alors $x \in E$ tel que $y = f(x)$ et donc $y' = f'(x') + \varphi' \circ f(x) = f'(x') + f' \circ \varphi(x) = f'(x' + \varphi(x)) \in \operatorname{Im} f'$.

   Ce qui prouve que $\underline{f' \text{ est surjective}}$.

Exercice 9 – Endomorphismes nilpotents

1. Si f était bijectif alors $f^p = 0$ le serait aussi. Or l'endomorphisme nul n'est pas bijectif (puisque $E \neq \{0\}$) donc f n'est pas bijectif. En particulier, f ne peut pas être un automorphisme.

2. Comme $f^{p-1} \neq 0$ il existe $x \in E$ tel que $f^{p-1}(x) \neq 0$. Montrons que $(x, f(x), \dots, f^{p-1}(x))$ est libre.

   Soient $\lambda_0, \dots, \lambda_{p-1}$ des scalaires tels que $\sum_{k=0}^{p-1} \lambda_k f^k(x) = 0$ $(*)$. On montre par récurrence forte descendante sur k que :
$$\forall k \in [\![0, p-1]\!], \lambda_k = 0$$
   On initialise la récurrence en appliquant f^{p-1} à $(*)$ ce qui donne par linéarité de f^{p-1} : $\sum_{k=0}^{p-1} \lambda_k f^{p-1+k}(x) = 0$. Or $f^{p-1+k} = 0$ dès que $p-1+k \geq p$ i.e. dès que $k \geq 1$. L'égalité devient donc $\lambda_p f^{p-1}(x) = 0$. Comme $f_{p-1}(x) \neq 0$:
$$\lambda_p = 0$$
   On effectue l'hérédité en supposant $\lambda_p = \cdots = \lambda_k = 0$ pour un certain $k \in [\![1, p-1]\!]$ et on montre que $\lambda_{k-1} = 0$. La relation $(*)$ devient $\sum_{j=0}^{k-1} \lambda_j f^j(x) = 0$ et en appliquant f^{p-k} on obtient $\lambda_{k-1} f^{p-1}(x) = 0$. Comme $f_{p-1}(x) \neq 0$:
$$\lambda_{k-1} = 0$$
   Ce qui conclut la récurrence :
$$\forall k \in [\![0, p-1]\!],\ \lambda_k = 0$$
   Finalement :
$$\boxed{(x, f(x), \dots, f^{p-1}(x)) \text{ est libre}}$$

3. La famille $(x, f(x), \dots, f^{p-1}(x))$ est libre de cardinal p. Comme le cardinal d'une famille libre est toujours inférieur à la dimension de l'espace :
$$\boxed{p \leq \dim E}$$

Exercice 10 – Suite des noyaux itérés et suite des images itérées

1. On commence par montrer que $(N_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est croissante pour l'inclusion.

   Soit $k \in \mathbb{N}$. Pour tout $x \in N_k$ on a $f^{k+1}(x) = f(f^k(x)) = f(0) = 0$ donc $x \in N_{k+1}$. D'où :
$$\forall k \in \mathbb{N},\ N_k \subseteq N_{k+1}$$
   Reste à montrer que :
$$\forall k \in \mathbb{N},\ N_k = N_{k+1} \Rightarrow N_{k+1} = N_{k+2}$$
   Soit $k \in \mathbb{N}$. On suppose $N_k = N_{k+1}$, montrons que $N_{k+1} = N_{k+2}$.

   Comme on sait déjà que $N_{k+1} \subseteq N_{k+2}$ il suffit de montrer $N_{k+2} \subseteq N_{k+1}$. Soit $x \in N_{k+2}$. Alors $f^{k+1}(f(x)) = f^{k+2}(x) = 0$ i.e. $f(x) \in N_{k+1}$. Comme $N_{k+1} = N_k$ alors $f(x) \in N_k$ i.e. $f^k(f(x)) = f^{k+1}(x) = 0$ i.e. $x \in N_{k+1}$. D'où $N_{k+2} \subseteq N_{k+1}$ et ainsi $N_{k+1} = N_{k+2}$.

   On a bien montré :
$$\forall k \in \mathbb{N},\ N_k = N_{k+1} \Rightarrow N_{k+1} = N_{k+2}$$
   Deux cas se présentent donc : la suite $(N_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est strictement croissante ou bien non strictement croissante, auquel cas en notant $p = \min\{k \in \mathbb{N} \mid N_k = N_{k+1}\}$ la suite $(N_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est strictement croissante jusqu'au rang p puis constante.

2. On commence par montrer que $(I_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est décroissante pour l'inclusion.

   Soit $k \in \mathbb{N}$. Pour tout $y \in I_{k+1}$ il existe $x \in E$ tel que $y = f^{k+1}(x) = f^k(f(x))$ donc $y \in I_k$. D'où ;

   $$\forall k \in \mathbb{N},\ I_{k+1} \subseteq I_k$$

   Reste à montrer que :
   $$\forall k \in \mathbb{N},\ I_k = I_{k+1} \Rightarrow I_{k+1} = I_{k+2}$$

   Soit $k \in \mathbb{N}$. On suppose $I_k = I_{k+1}$, montrons que $I_{k+1} = I_{k+2}$.

   Comme on sait déjà que $I_{k+2} \subseteq I_{k+1}$ il suffit de montrer que $I_{k+1} \subseteq I_{k+2}$. Soit $y \in I_{k+1}$ il existe alors $x \in E$ tel que $y = f^{k+1}(x)$. Comme $f^k(x) \in I_k = I_{k+1}$ il existe $x' \in E$ tel que $f^k(x) = f^{k+1}(x')$ et alors :

   $$y = f^{k+1}(x) = f(f^k(x)) = f(f^{k+1}(x')) = f^{k+2}(x') \in I_{k+2}$$

   D'où $I_{k+1} \subseteq I_{k+1}$.

   On a bien montré :
   $$\forall k \in \mathbb{N},\ I_k = I_{k+1} \Rightarrow I_{k+1} = I_{k+2}$$

   Deux cas se présentent donc : la suite $(I_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est strictement décroissante ou bien non strictement décroissante, auquel cas en notant $p = \min\{k \in \mathbb{N} \,|\, I_k = I_{k+1}\}$ la suite $(I_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est strictement décroissante jusqu'au rang p puis constante.

3. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ nilpotent d'indice p. Autrement dit :

   $$f^p = 0 \text{ et } \forall k \in [\![0, p-1]\!],\ f^k \neq 0$$

   C'est-à-dire :

   $$N_p = E \text{ et } \forall k \in [\![0, p-1]\!],\ N_k \neq E$$

   En particulier la suite $(N_k)_{k\in\mathbb{N}}$ n'est pas strictement croissante. On observe alors que $N_p = N_{p+1} = E$ et $N_{p-1} \neq N_p$ donc $p = \min\{k \in \mathbb{N} \,|\, N_k = N_{k+1}\}$. D'après la question 1 on en déduit :

   $$N_0 \subsetneq \cdots \subsetneq N_{p-1} \subsetneq N_p = E$$

   Ce qui donne :
   $$\dim N_0 < \cdots < \dim N_{p-1} < \dim N_p = n$$

   C'est-à-dire étant donné qu'il s'agit d'entiers :

   $$p + \dim N_0 \leq \cdots \leq 1 + \dim N_{p-1} \leq \dim N_p = n$$

   Comme $N_0 = \operatorname{Ker} f^0 = \operatorname{Ker} \mathrm{Id}_E = \{0_E\}$ on a $\dim N_0 = 0$ et alors :

   $$\boxed{p \leq n}$$

Exercice 11 – Caractérisation des applications linéaires injectives

1. Par double implication.

   $\boxed{\Leftarrow}$ **:** Supposons qu'il existe $w \in \mathcal{L}(F, G)$ tel que $u = w \circ v$. Alors pour tout $x \in \operatorname{Ker} v$ on a :

   $$u(x) = w(v(x)) = w(0) = 0$$

   et donc $x \in \operatorname{Ker} u$. D'où $\operatorname{Ker} v \subseteq \operatorname{Ker} u$.

$\boxed{\Rightarrow}$ **:** Supposons $\operatorname{Ker} v \subseteq \operatorname{Ker} u$. Soit F_0 un supplémentaire de $\operatorname{Im} v$ dans F. On va définir une application linéaire w de $F = F_0 \oplus \operatorname{Im} v$ vers G en définissant $w_0 = w_{|F_0} \in \mathcal{L}(F_0, G)$ et $w_1 = w_{|\operatorname{Im} v} \in \mathcal{L}(\operatorname{Im} v, G)$.

Commençons par définir w_1. Pour tout $y \in \operatorname{Im} v$ il existe $x \in E$ tel que $y = v(x)$. On pose alors $w_1(y) = u(x)$. Ceci définit bien une fonction $w_1 : \operatorname{Im} v \longrightarrow G$ puisque $w_1(y)$ ne dépend pas du choix de l'antécédent x de y par v : si $x, x' \in E$ vérifient $y = v(x) = v(x')$ alors $x - x' \in \operatorname{Ker} v \subseteq \operatorname{Ker} u$ et donc $u(x) = u(x')$.
Reste à vérifier que w_1 est linéaire. Soient $y, y' \in \operatorname{Im} v$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Il existe $x, x' \in E$ tels que $y = v(x)$ et $y' = v(x')$. Alors :

$$w_1(\lambda y + y') = w_1(\lambda v(x) + v(x')) = w_1(v(\lambda x + x')) = u(\lambda x + x') = \lambda u(x) + u(x') = \lambda w_1(y) + w_1(y')$$

D'où la linéarité de w_1.

On définit ensuite $w_0 \in \mathcal{L}(F_0, G)$ comme étant l'application nulle et on note w l'unique application linéaire de F vers G telle que :

$$w_{|F_0} = w_0 \text{ et } w_{|\operatorname{Im} v} = w_1$$

On a bien $u = w \circ v$ car pour tout $x \in E$ on a :

$$u(x) = w_1(v(x)) = w(v(x))$$

2. On se place dans le cas où $G = E$ et $u = \operatorname{Id}_E$. D'après la question précédente :

$$\operatorname{Ker} v \subseteq \operatorname{Ker} \operatorname{Id}_E \Leftrightarrow \exists w \in \mathcal{L}(F, E) : w \circ v = \operatorname{Id}_E$$

Or $\operatorname{Ker} \operatorname{Id}_E = \{0_E\}$ et comme $\operatorname{Ker} v$ est un sous-espace vectoriel de E alors :

$$\operatorname{Ker} v \subseteq \operatorname{Ker} \operatorname{Id}_E \Leftrightarrow \operatorname{Ker} v = \{0_E\} \Leftrightarrow v \text{ injective}$$

Finalement :

$$\boxed{v \text{ injective} \Leftrightarrow \exists w \in \mathcal{L}(F, E) : w \circ v = \operatorname{Id}_E}$$

Exercice 12 – Caractérisation des applications linéaires surjectives

1. Par double implication.

$\boxed{\Leftarrow}$ **:** Supposons qu'il existe $w \in \mathcal{L}(F, E)$ tel que $v = u \circ w$. Soit $y \in \operatorname{Im} v$. Alors il existe $x \in F$ tel que $y = v(x) = u(w(x))$ donc $y \in \operatorname{Im} u$. D'où $\operatorname{Im} v \subseteq \operatorname{Im} u$.

$\boxed{\Rightarrow}$ **:** Supposons $\operatorname{Im} v \subseteq \operatorname{Im} u$. Soit E_0 un supplémentaire de $\operatorname{Ker} u$ dans E.

Définissons $w : F \longrightarrow E$. Soit $x \in F$. Comme $v(x) \in \operatorname{Im} v \subseteq \operatorname{Im} u$ alors $v(x)$ admet au moins un antécédent par u.

On va définir $w(x)$ comme l'unique antécédent de $v(x)$ par u qui soit dans E_0. Pour cela, il faut d'abord vérifier que $v(x)$ admet un unique antécédent dans E_0 par u. Soient $y_0, y_0' \in E_0$ des antécédents de $v(x)$ par u. On a donc :

$$v(x) = u(y_0) = u(y_0')$$

Ce qui donne $y_0 - y_0' \in \operatorname{Ker} u$. Comme par ailleurs y_0 et y_0' sont dans E_0 alors $y_0 - y_0' \in E_0 \cap \operatorname{Ker} u = \{0\}$ et donc $y_0 - y_0' = 0$ i.e. $y_0 = y_0'$. D'où l'unicité de y_0 en tant qu'antécédent de $v(x)$ dans E_0 par u. On pose alors :

$$w(x) = y_0$$

Ce qui définit $w(x)$ de façon unique par rapport à x. On obtient ainsi une fonction $w : F \longrightarrow E$.

Vérifions que w est linéaire. Soient $x, x' \in F$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. On doit vérifier que $w(\lambda x + x') = \lambda w(x) + w(x')$, i.e. que l'unique antécédent de $v(\lambda x + x')$ par u qui soit dans E_0 est $\lambda w(x) + w(x')$ i.e. que :

$$v(\lambda x + x') = u(\lambda w(x) + w(x')) \text{ avec } \lambda w(x) + w(x') \in E_0$$

Le fait que $\lambda w(x) + w(x') \in E_0$ est directement assuré par le fait que $w(x)$ et $w(x')$ appartiennent à E_0 qui est un sous-espace vectoriel de E. De plus on a bien :

$$v(\lambda x + x') = \lambda v(x) + v(x') = \lambda u(w(x)) + u(w(x')) = u(\lambda w(x) + w(x'))$$

Ce qui prouve que $w(\lambda x + x') = \lambda w(x) + w(x')$ et donc la linéarité de w.

Enfin, w vérifie bien $v = u \circ w$ car pour tout $x \in E$, $w(x)$ étant un antécédent de $v(x)$ par u on a $v(x) = u(w(x))$.

2. On se place dans le cas où $F = G$ et $v = \mathrm{Id}_G$. D'après la question précédente :

$$\mathrm{Im}\,\mathrm{Id}_G \subseteq \mathrm{Im}\,u \Leftrightarrow \exists w \in \mathcal{L}(G, E) : u \circ w = \mathrm{Id}_G$$

Or $\mathrm{Im}\,\mathrm{Id}_G = G$ et comme $\mathrm{Im}\,u \subseteq G$ alors :

$$\mathrm{Im}\,\mathrm{Id}_G \subseteq \mathrm{Im}\,u \Leftrightarrow \mathrm{Im}\,u = G \Leftrightarrow u \text{ surjective}$$

Finalement :

$$\boxed{u \text{ surjective} \Leftrightarrow \exists w \in \mathcal{L}(G, E) : u \circ w = \mathrm{Id}_G}$$

Exercice 13 – Centre de $\mathcal{L}(E)$

1. On sait que pour tout $u \in E$ il existe $\lambda_u \in \mathbb{K}$ tel que $f(u) = \lambda_u u$. On va montrer que λ_u est unique, i.e. ne dépend pas de u pour $u \neq 0$.

Soient u, v des éléments non nuls de E et $\lambda_u, \lambda_v \in \mathbb{K}$ tels que :

$$\begin{cases} f(u) = \lambda_u u \\ f(v) = \lambda_v v \end{cases}$$

Montrons que $\lambda_u = \lambda_v$.

1$^{\text{er}}$ cas : (u, v) libre

Soit $\lambda_{u+v} \in \mathbb{K}$ tel que $f(u + v) = \lambda_{u+v}(u + v)$. Par linéarité de f on obtient alors :

$$\lambda_u u + \lambda_v v = \lambda_{u+v} u + \lambda_{u+v} v$$

Par unicité de la décomposition d'un vecteur selon la famille libre (u, v) on en déduit :

$$\lambda_u = \lambda_v = \lambda_{u+v}$$

2$^{\text{nd}}$ cas : (u, v) liée

Il existe alors $\mu \in \mathbb{K}$ tel que $u = \mu v$. Par linéarité de f on obtient $f(u) = \mu f(v)$ i.e. :

$$\lambda_u u = \mu \lambda_v v$$

C'est-à-dire comme $u = \mu v$:

$$\lambda_u \mu v = \mu \lambda_v v$$

Comme $v \neq 0$ on en déduit $\lambda_u \mu = \mu \lambda_v$. Comme $u \neq 0$ et $u = \mu v$ on en déduit que $\mu \neq 0$ ce qui donne :

$$\lambda_u = \lambda_v$$

Dans tous les cas on a montré que $\lambda_u = \lambda_v$, ce qui prouve qu'il existe un $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $\forall u \in E\backslash\{0\},\ f(u) = \lambda u$. Comme par ailleurs $f(0) = 0 = \lambda 0$ on a bien :

$$\forall u \in E,\ f(u) = \lambda u$$

Ce qui prouve que $f = \lambda \mathrm{Id}_E$ est l'homothétie vectorielle de rapport λ.

2. Montrons que les endomorphismes qui commutent avec tous les endomorphismes de E sont les homothéties.

   Dans un premier temps on constate que les homothéties commutent bien avec tous les endomorphismes de E. En effet, pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$ et $f \in \mathcal{L}(E)$ on a :

   $$(\lambda \mathrm{Id}_E) \circ f = f \circ (\lambda \mathrm{Id}_E) = \lambda f$$

   Reste à vérifier que si un endomorphisme commute avec tous les endomorphismes de E alors c'est une homothétie. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que :

   $$\forall g \in \mathcal{L}(E),\ f \circ g = g \circ f$$

   Montrons que f est une homothétie. D'après la question 1 il suffit de vérifier que, quel que soit $u \in E$, $f(u)$ est colinéaire à u. On se donne donc $u \in E$ et on vérifie que $f(u) \in \mathrm{Vect}(u)$.

   Soit $p \in \mathcal{L}(E)$ le projecteur sur $\mathrm{Vect}(u)$ parallèlement à un supplémentaire F de $\mathrm{Vect}(u)$ dans E. Par définition de f on a :

   $$p \circ f = f \circ p$$

   En particulier, $p(f(u)) = f(p(u)) = f(u)$ puisque $p(u) = u$. Autrement dit :

   $$f(u) \in \mathrm{Ker}\,(p - \mathrm{Id}_E) = \mathrm{Im}\, p = \mathrm{Vect}(u)$$

   On a bien montré que $\forall u \in E$, $f(u) \in \mathrm{Vect}(u)$ donc f est une homothétie d'après la question précédente.

   Conclusion : En notant $Z(\mathcal{L}(E)) = \{f \in \mathcal{L}(E) \,|\, \forall g \in \mathcal{L}(E), f \circ g = g \circ f\}$, on a montré que $Z(\mathcal{L}(E))$ est l'ensemble des homothéties. Autrement dit :

   $$\boxed{Z(\mathcal{L}(E)) = \mathrm{Vect}(\mathrm{Id}_E)}$$

Exercice 14 – Lemme de Fitting

1. $I = \bigcap\limits_{k\in\mathbb{N}} I_k$ est un sous-espace vectoriel de E en tant qu'intersection de sous-espaces vectoriels de E.

   Soient $x, y \in N$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Il existe alors $k, l \in \mathbb{N}$ tels que $x \in N_k$ et $y \in N_m$ et alors :

   $$f^{\max(k,l)}(\lambda x + y) = \lambda f^{\max(k,l)}(x) + f^{\max(k,l)}(y) = \lambda 0 + 0 = 0$$

   Donc $\lambda x + y \in N_{\max(k,l)}$ et alors $\lambda x + y \in N$. Ce qui prouve que N est un sous-espace vectoriel de E.

2. Par double implication. Soit $k \in \mathbb{N}$ fixé.

   $\boxed{\Rightarrow}$ **:** Supposons $N_k = N_{k+1}$. On sait déjà que $I_{k+1} \subseteq I_k$, il suffit donc de vérifier que $\dim I_k = \dim I_{k+1}$.

   D'après le théorème du rang appliqué aux endomorphismes f^k et f^{k+1} :

   $$\begin{aligned} \dim E &= \dim N_k + \dim I_k \\ &= \dim N_{k+1} + \dim I_{k+1} \end{aligned}$$

   Comme $N_k = N_{k+1}$ alors $\dim N_k = \dim N_{k+1}$ et on déduit de ce qui précède que $\dim I_k = \dim I_{k+1}$. D'où :

   $$I_k = I_{k+1}$$

$\boxed{\Leftarrow}$ **:** Supposons $I_k = I_{k+1}$. On sait déjà que $N_k \subseteq N_{k+1}$, il suffit donc de vérifier que $\dim N_k = \dim N_{k+1}$.

D'après le théorème du rang appliqué aux endomorphismes f^k et f^{k+1} :

$$\begin{aligned}\dim E &= \dim N_k + \dim I_k \\ &= \dim N_{k+1} + \dim I_{k+1}\end{aligned}$$

Comme $I_k = I_{k+1}$ alors $\dim I_k = \dim I_{k+1}$ et on déduit de ce qui précède que $\dim N_k = \dim N_{k+1}$. D'où :

$$N_k = N_{k+1}$$

3. La suite $(N_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est croissante dans E donc $(\dim N_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est croissante dans $[\![0, \dim E]\!]$. En particulier elle est stationnaire et donc $(N_k)_{k\in\mathbb{N}}$ aussi. Notons :

$$p = \min\{k \in \mathbb{N} \mid N_k = N_{k+1}\}$$

D'après la question précédente :

$$p = \min\{k \in \mathbb{N} \mid I_k = I_{k+1}\}$$

Comme $(N_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est croissante et $(I_k)_{k\in\mathbb{N}}$ décroissante on en déduit :

$$\begin{cases} N = N_p \\ I = I_p \end{cases}$$

Il s'agit donc de vérifier que $E = N_p \oplus I_p$.

D'après le théorème du rang on sait déjà que $\dim E = \dim N_p + \dim I_p$, il suffit donc de vérifier $N_p \cap I_p = \{0\}$. Soit $y \in N_p \cap I_p$. Comme $y \in I_p$ il existe $x \in E$ tel que $y = f^p(x)$ et comme $y \in N_p$ alors $f^p(y) = 0$ i.e. :

$$f^{2p}(x) = 0$$

Ainsi $x \in N_{2p}$. Mais par définition de p on a $N_{2p} = N_p$ (car $2p \geq p$) et donc $x \in N_p$ i.e. $f^p(x) = 0$ i.e. $y = 0$.

On vient de montrer :

$$N_p \cap I_p = \{0\}$$

Ce qui prouve finalement :

$$E = N_p \oplus I_p$$

Autrement dit :

$$\boxed{E = N \oplus I}$$