TD 15 : Matrices et applications linéaires

Connaître son cours :

- Soit E, F deux espaces vectoriels de dimension finie, β une base de E et ζ une base de F. Montrer que pour tout $u \in \mathcal{L}(E,F)$ et tout $x \in E$ on a : $\text{Mat}_\zeta(u(x)) = \text{Mat}_{\beta,\zeta}(u) \cdot \text{Mat}_\beta(x)$.
- Soit E, F, G trois espaces vectoriels de dimension finie, β une base de E , ζ une base de F et γ une base de G. Montrer que pour tout $u \in \mathcal{L}(E,F)$ et tout $v \in \mathcal{L}(F,G)$, on a : $\text{Mat}_{\beta,\gamma}(v \circ u) = \text{Mat}_{\zeta,\gamma}(v) \cdot \text{Mat}_{\beta,\zeta}(u)$
- Soit E un espace vectoriel de dimension finie, $\beta = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ et $\beta' = (e'_1, e'_2, \dots, e'_n)$ deux bases de E. Exprimer la matrice de passage $P_\beta^{\beta'}$ en lien avec une représentation matricielle de l'endomorphisme Id_E. En déduire que pour tout $x \in E$, on a : $\text{Mat}_\beta(x) = P_\beta^{\beta'} \cdot \text{Mat}_{\beta'}(x)$
- Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions respectives p et n et $u \in \mathcal{L}(E,F)$ de rang r. Montrer qu'il existe une base β de E et une base ζ de F tel que : $\text{Mat}_{\beta,\zeta}(u) = J_r = \begin{pmatrix} I_r & 0_{r,p-r} \\ 0_{n-r,r} & 0_{n-r,p-r} \end{pmatrix}$.

Matrice d'une application linéaire dans une base :

Exercice 1. (*)

Soient S et T les deux endomorphismes de $\mathbb{R}^2$ définis par

$$S(x,y) = (2x-5y,\ -3x+4y) \text{ et } T(x,y) = (-8y,\ 7x+y).$$

1. Déterminer les matrices de S et T dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$.
2. Déterminer les applications linéaires $S+T$, $S \circ T$, $T \circ S$ et $S \circ S$ ainsi que leurs matrices dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$.

Exercice 2. (*)

On considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -3 & -3 & 3 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Donner une base de $\ker(f)$ et de $\text{Im}(f)$.
En déduire que $M^n = 0$ pour tout $n \geq 2$.

Exercice 3. (*)

Soient

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

et f l'application de $M_2(\mathbb{R})$ dans $M_2(\mathbb{R})$ définie par $f(M) = AM$.

1. Montrer que f est linéaire.
2. Déterminer sa matrice dans la base canonique de $M_2(\mathbb{R})$.

Exercice 4. (*)

Soit

$$A = \begin{pmatrix} 0 & & \dots & 0 & 1 \\ \vdots & & & 1 & 0 \\ & & \iddots & & \\ 0 & 1 & & & \vdots \\ 1 & 0 & & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

En utilisant l'application linéaire associée de $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$, calculer A^p pour $p \in \mathbb{Z}$.

Exercice 5. (*)

Soit E un espace vectoriel et f une projection sur E.

1. Montrer que $E = \mathrm{Ker} f \oplus \mathrm{Im} f$.
2. Supposons que E soit de dimension finie n. Posons $r = \mathrm{rg}(f)$. Montrer qu'il existe une base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ de E telle que : $f(e_i) = e_i$ si $i \leq r$ et $f(e_i) = 0$ si $i > r$.

   Déterminer la matrice de f dans cette base $\mathcal{B}$.

Exercice 6. (*)

1. Montrer que si f est un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension n, M sa matrice par rapport à une base e, M' sa matrice par rapport à une base e', alors $\mathrm{tr}\, M = \mathrm{tr}\, M'$. On note $\mathrm{tr}\, f$ la valeur commune de ces quantités.
2. Montrer que si g est un autre endomorphisme de E, $\mathrm{tr}(f \circ g - g \circ f) = 0$.

Exercice 7. (**)

Soit $\mathbb{R}^2$ muni de la base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la projection sur l'axe des abscisses $\mathrm{Vect}(e_1)$ parallèlement à $\mathrm{Vect}(e_1 + e_2)$. Déterminer $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(f)$, la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$.
Même question avec $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(f)$ où $\mathcal{B}'$ est la base $(e_1 - e_2, -2e_1 + 3e_2)$ de $\mathbb{R}^2$. Même question avec $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}'}(f)$.

Exercice 8. (**)

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice par rapport à la base canonique (e_1, e_2, e_3) est

$$A = \begin{pmatrix} 15 & -11 & 5 \\ 20 & -15 & 8 \\ 8 & -7 & 6 \end{pmatrix}.$$

Montrer que les vecteurs : $e_1' = 2e_1 + 3e_2 + e_3$, $e_2' = 3e_1 + 4e_2 + e_3$, $e_3' = e_1 + 2e_2 + 2e_3$
forment une base de $\mathbb{R}^3$ et calculer la matrice de f par rapport à cette base.

Exercice 9. (**)

Soient trois vecteurs e_1, e_2, e_3 formant une base de $\mathbb{R}^3$. On note ϕ l'application linéaire définie par $\phi(e_1) = e_3$, $\phi(e_2) = -e_1 + e_2 + e_3$ et $\phi(e_3) = e_3$.

1. Écrire la matrice A de ϕ dans la base (e_1, e_2, e_3).

   Déterminer le noyau de cette application.
2. On pose $f_1 = e_1 - e_3$, $f_2 = e_1 - e_2$, $f_3 = -e_1 + e_2 + e_3$.

   Calculer e_1, e_2, e_3 en fonction de f_1, f_2, f_3.

   Les vecteurs f_1, f_2, f_3 forment-ils une base de $\mathbb{R}^3$?
3. Calculer $\phi(f_1), \phi(f_2), \phi(f_3)$ en fonction de f_1, f_2, f_3. Écrire la matrice B de ϕ dans la base (f_1, f_2, f_3) et trouver la nature de l'application ϕ.
4. On pose $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Vérifier que P est inversible et calculer P^{-1}.

   Quelle relation lie A, B, P et P^{-1} ?

Exercice 10. (***)

Soit f l'application de $\mathbb{R}_n[X]$ dans $\mathbb{R}[X]$ définie en posant pour tout

$$P \in \mathbb{R}_n[X],\ f(P)(X) = P(X+1) + P(X-1) - 2P(X).$$

1. Montrer que f est linéaire et que son image est incluse dans $\mathbb{R}_n[X]$.
2. Dans le cas où $n = 3$, donner la matrice de f dans la base $1, X, X^2, X^3$. Déterminer ensuite, pour une valeur de n quelconque, la matrice de f dans la base $1, X, \dots, X^n$.
3. Déterminer le noyau et l'image de f.

   Calculer leur dimension respective.
4. Soit Q un élément de l'image de f. Montrer qu'il existe un unique $P \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que : $f(P) = Q$ et $P(0) = P'(0) = 0$.

Exercice 11. (**)

Soit $E = \mathbb{K}_n[X]$. u est l'endomorphisme de E défini par : $\forall P \in E,\ u(P)(X) = P(X+1) - P(X)$.

1. Donner la représentation matricielle de cet endomorphisme dans la base canonique de E.
2. Déterminer $\mathrm{Ker}u$ et $\mathrm{Im}u$.
3. Déterminer explicitement une base dans laquelle la matrice de u est

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

4. En déduire que u est nilpotent et donner son indice de nilpotence.

Exercice 12. (**)

Calculer l'inverse de la matrice suivante :

$$\begin{pmatrix} \binom{0}{0} & \binom{1}{0} & \binom{2}{0} & \dots & \binom{n-1}{0} & \binom{n}{0} \\ 0 & \binom{1}{1} & \binom{2}{1} & \dots & \dots & \binom{n}{1} \\ \vdots & \ddots & \binom{2}{2} & & & \vdots \\ & & & \ddots & & \\ \vdots & & & \ddots & \binom{n-1}{n-1} & \vdots \\ 0 & \dots & & \dots & 0 & \binom{n}{n} \end{pmatrix}$$

Exercice 13. (**)

Soient E un espace vectoriel de dimension finie, a un réel non nul et $u, v \in \mathcal{L}(E)$.
Résoudre dans $\mathcal{L}(E)$ l'équation d'inconnue w :

$$a \cdot w + \mathrm{Tr}(w) \cdot u = v$$

Exercice 14. (**)

Soit f une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $\forall (A,B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{C}))^2,\ f(AB) = f(BA)$.
Montrer qu'il existe un complexe a tel que $f = a\mathrm{Tr}$.

Exercice 15. (***)

Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ définie par $a_{i,j} = 1$ si $i = j$, j si $i = j-1$ et 0 sinon.
Montrer que A est inversible et calculer A^{-1}.

Exercice 16. (***) (*Matrice de* Vandermonde)

Soient $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{K}$.

$$(x_i^{j-1})_{1 \le i,j \le n} = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^{n-1} \end{pmatrix}$$

Montrer que cette matrice est inversible si et seulement si les scalaires $x_1, \dots, x_n$ sont deux à deux distincts.

Rang d'une matrice et propriétés :

Exercice 17. (**)

Soient α, β deux réels et

$$M_{\alpha,\beta} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & \alpha & \beta \\ 2 & -1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Déterminer les valeurs de α et β pour lesquelles l'application linéaire associée à $M_{\alpha,\beta}$ est surjective.

Exercice 18. (**)

Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \\ 5 & 6 & 1 \\ 7 & 8 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 & 7 \\ 4 & 3 & -1 & 11 \\ 0 & -1 & 2 & -4 \\ 3 & 3 & -2 & 11 \end{pmatrix}$.

Calculer $\mathrm{rg}(A)$ et $\mathrm{rg}(B)$. Déterminer une base du noyau et une base de l'image pour chacune des applications linéaires associées f_A et f_B.

Exercice 19. (*)

Soient A, B deux matrices semblables (i.e. il existe P inversible telle que $B = P^{-1}AP$). Montrer que si l'une est inversible, l'autre aussi ; que si l'une est idempotente, l'autre aussi ; que si l'une est nilpotente, l'autre aussi ; que si $A = \lambda I$, alors $A = B$.

Exercice 20. (**)

Trouver toutes les matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ qui vérifient

1. $M^2 = 0$;
2. $M^2 = M$;
3. $M^2 = I$.

Exercice 21. (**)

Prouver qu'une matrice A de $M_{n,p}(\mathbb{K})$ de rang r s'écrit comme somme de r matrices de rang 1.

Exercice 22. (***)

Montrer qu'une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ qui n'est pas inversible est équivalente à une matrice nilpotente.

Exercice 23. (**)

Soit B la matrice diagonale par blocs

$$B = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & A_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \dots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & A_n \end{pmatrix}.$$

Calculer le rang de B en fonction du rang des A_i.

Exercice 24. (**) (*Théorème de* HADAMARD)

Soit $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $|a_{i,i}| > \sum_{j\neq i} |a_{i,j}|$. Montrer que $A \in \mathcal{G}l_n(\mathbb{C})$.

Exercice 25. (**)

Donner le rang de la matrice $(i + j + ij)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$.

Exercice 26. (***)

Soit $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Montrer que les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

$$(1)\ M^2 = 0 \text{ et } (2)\ \mathrm{rg}M \leqslant 1 \text{ et } \mathrm{tr}M = 0.$$
