Optimal Sup Spé, groupe IPESUP **Année 2021-2022**
Niveau : Première année de PCSI
M.Botcazou **mail : ibotca52@gmail.com**

COLLE 2 = FONCTIONS USUELLES, SOMMES, PRODUITS ET ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

Fonctions usuelles :

Exercice 1. Résoudre l'équation $\cosh(x) = 2$.

Exercice 2. Montrer que pour tout $x \neq 0$,

$$\sum_{k=0}^{n} \cosh(kx) \; = \; \frac{\cosh\left(\frac{nx}{2}\right)\sinh\left(\frac{(n+1)x}{2}\right)}{\sinh\left(\frac{x}{2}\right)}$$

Exercice 3. Montrer que la fonction $x \longmapsto \dfrac{1}{\cosh(x)}$ possède un unique point fixe.

Exercice 4. Montrer que pour tout $n \geq 2$:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \; \leq \; e \; \leq \; \left(1-\frac{1}{n}\right)^n$$

Exercice 5. Démontrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $n \geq 1$, on a

$$\left(\frac{1+\tanh(x)}{1-\tanh(x)}\right)^n \; = \; \frac{1+\tanh(nx)}{1-\tanh(nx)}$$

Exercice 6. Résoudre l'équation :

$$2x\ln(x) + 3(x-1) \; = \; 0$$

Sommes et Produits :

Exercice 7.
Pour $n \in \mathbb{N}$ montrer que :

$$\sum_{k=0}^{n}\sum_{l=0}^{n} \min(k,l) \; = \; \frac{n}{6}\left(2n^2+3n+1\right)$$

Exercice 8.
Calculer $\sum\limits_{k=1}^{n} k\ln\left(1+\dfrac{1}{k}\right)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ en faisant apparaître un téléscopage.

Exercice 9.
On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$H_n \; = \; \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \; \sum_{i=1}^{n} H_i \; = \; (n+1)H_n - n$$

Exercice 10.

1. Factoriser (k^3-1) par $(k-1)$ et (k^3+1) par $(k+1)$ pour tout $k \geq 2$
2. En déduire une simplification du produit

$$\prod_{k=2}^{n} \frac{k^3-1}{k^3+1}$$

3. En déduire l'existence et la valeur de

$$\lim_{n\to+\infty} \prod_{k=2}^{n} \frac{k^3-1}{k^3+1}$$

que l'on notera aussi $\prod\limits_{k=2}^{+\infty} \dfrac{k^3-1}{k^3+1}$

Exercice 11.
Montrer que pour tout $n \geq 2, n \in \mathbb{N}$ on a :

$$\prod_{k=1}^{n}\prod_{l=1}^{n} \min(k,l) \; = \; n! \prod_{k=1}^{n-1} k!(n-k)^k$$

Équations différentielles :

Exercice 12. Résoudre les équations différentielles suivantes :

1. $y' + 2y = x^2 - 2x + 3$ sur $\mathbb{R}$;
2. $y' + y = \dfrac{1}{1+e^x}$ sur $\mathbb{R}$;
3. $y' - 2xy = -(2x-1)e^x$ sur $\mathbb{R}$;

Exercice 13. Donner une équation différentielle dont les solutions sont les fonctions de la forme

$$x \longmapsto \frac{C+x}{1+x^2},\ C \in \mathbb{R}$$

Exercice 14.
Donner l'ensemble solution des équations différentielles suivantes :

1. $y'' - 2y' + y \ = \ 0\ ,\ y(0) = y'(0) = 1;$
2. $y'' + 9y \ = \ 0\ ,\ y(0) = 0;$
3. $y'' + y' - y \ = \ 0$

Exercice 15.
Déterminer une équation différentielle vérifiée par la famille de fonctions

$$y(x) \ = \ C_1 e^{2x} + C_2 e^{-x} + x\cosh(x)\ ,\ \ C_1, C_2 \in \mathbb{R}$$

Exercice supplémentaire :

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $a_1, ...a_n, b_1, ..., b_n$ des nombres réels.
On définit la fonction f par :

$$\forall x \in \mathbb{R}\ ,\ f(x) \ = \ \sum_{i=1}^{n} (a_i x + b_i)^2$$

Montrer l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\left| \sum_{i=1}^{n} a_i b_i \right| \ \leq \ \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2} \times \sqrt{\sum_{i=1}^{n} b_i^2}$$

(*<u>Indication</u> : remarquer que la fonction f est à valeur dans* $\mathbb{R}^+$)