

1. EX0 7

Soient  $x, y$  deux vecteurs non nuls d'un espace préhilbertien réel. Établir

$$\left\| \frac{x}{\|x\|^2} - \frac{y}{\|y\|^2} \right\| = \frac{\|x - y\|}{\|x\| \|y\|}.$$

2. EX0 12

Soient  $x_1, \dots, x_n > 0$  tels que  $x_1 + \dots + x_n = 1$ .

Montrer que

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{x_k} \geq n^2.$$

Préciser les cas d'égalité.

3. EX0 15

Soient  $A, B \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ . Montrer

$$(\operatorname{tr}(AB + BA))^2 \leq 4 \operatorname{tr}(A^2) \operatorname{tr}(B^2).$$

4. EX0 16

Soit  $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$  une matrice réelle vérifiant

$$\forall i \in \{1, \dots, n\}, a_{i,i} \geq 1 \text{ et } \sum_{i=1}^n \sum_{j=1, j \neq i}^n a_{i,j}^2 < 1.$$

(a) Montrer

$$\forall X \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, {}^t X A X > 0.$$

(b) En déduire que la matrice  $A$  est inversible.