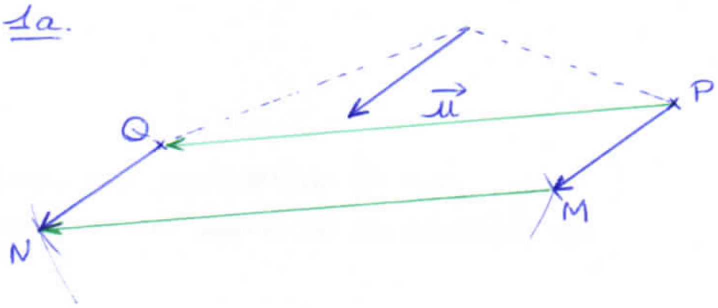
CORRECTION DE LA FEUILLE D'EXERCICES VECTEURS NIVEAU 2.

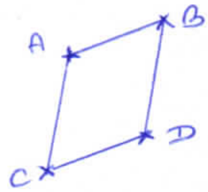
- Exercice 1 :

1a.



1b. $\overrightarrow{PM} = \overrightarrow{QN}$ donc PMNQ est un parallélogramme, d'où $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{MN}$.

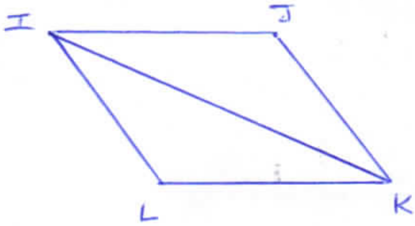
2.



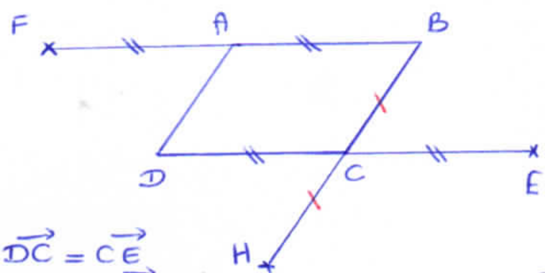
$\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AC}$; $\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{DB}$; $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$; $\overrightarrow{CC} = \overrightarrow{DD}$

- Exercice 2 :

1. $\overrightarrow{IJ} + \overrightarrow{IL} = \overrightarrow{IK} \iff$ IJKL est un parallélogramme.



2.a.



Comme C est le milieu de [DE] par construction, on a $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{CE}$.

Comme A est le milieu de [FB] par construction, $\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{BA}$.

2b.
$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{CE} \\ \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB} \text{ (car ABCD parallélogramme)} \\ \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{FA} \end{array}\right\}$$
donc $\overrightarrow{CE} = \overrightarrow{FA}$
donc CEAF est un parallélogramme.

2c. $\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DB}$ donc $P = B$.

$\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{CA}$ donc $Q = A$.

2d. Voir figure

2e. $\overrightarrow{DH} = \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CH}$
$= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$
$= \overrightarrow{AC}$

car $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB}$ puisque ABCD parallélogramme
et $\overrightarrow{CH} = \overrightarrow{BC}$ puisque C milieu de [BH]

- Exercice 3 :

1a. $\overrightarrow{KJ} = \overrightarrow{BI} = \overrightarrow{IC}$, (rmq : pour le démontrer, on utiliserait le théorème de la droite des milieux).

1b. $\overrightarrow{JC} = \overrightarrow{AJ} = \overrightarrow{KI}$

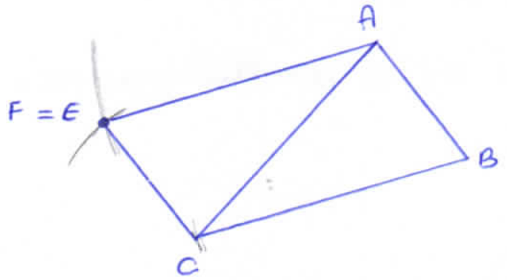
1c. $\overrightarrow{KA} = \overrightarrow{BK} = \overrightarrow{IJ}$

2a. $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{FE} = \overrightarrow{ED} = \overrightarrow{IH} = \overrightarrow{HG}$

2b. $\overrightarrow{DB} = \overrightarrow{EA} = \overrightarrow{HF} = \overrightarrow{GE}$

- Exercice 4 :

* Sans quadrillage :

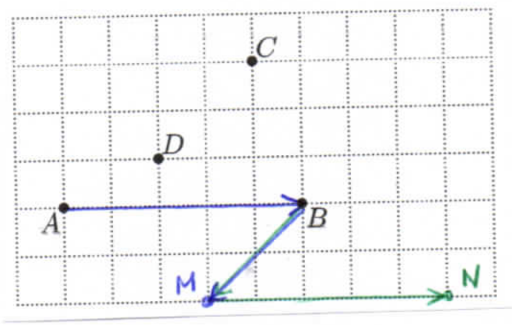


E et F sont confondus.

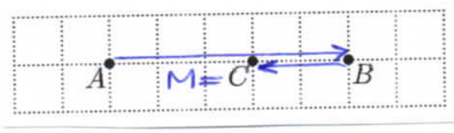
En effet, $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{BC}$ donc ABCE est un parallélogramme.
Donc $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CE}$ d'où $E = F$.

* Avec deux vecteurs et quadrillage :

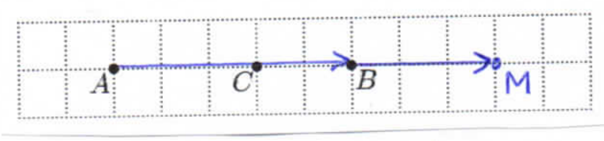
1.



2.

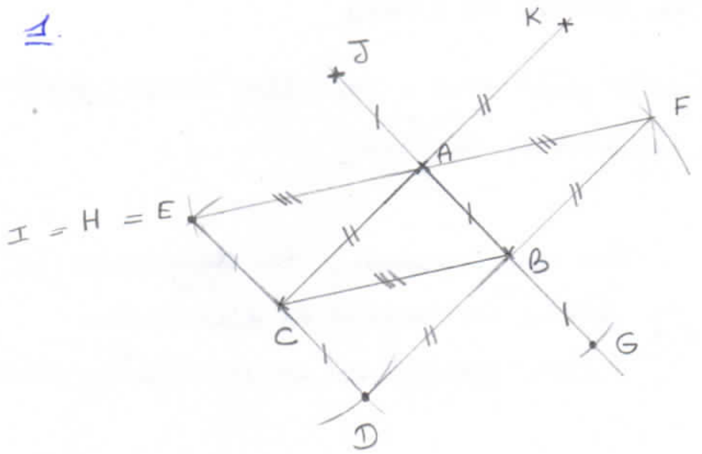


3.

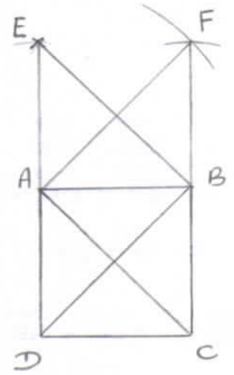


- Avec deux vecteurs et sans quadrillage.

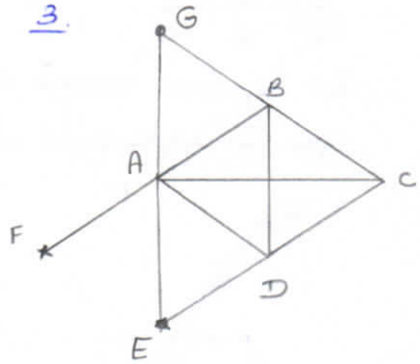
1.



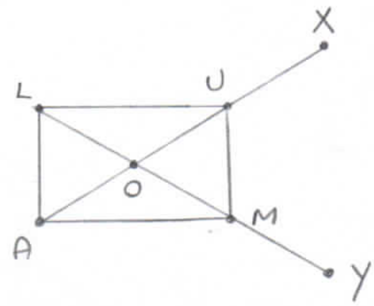
2.



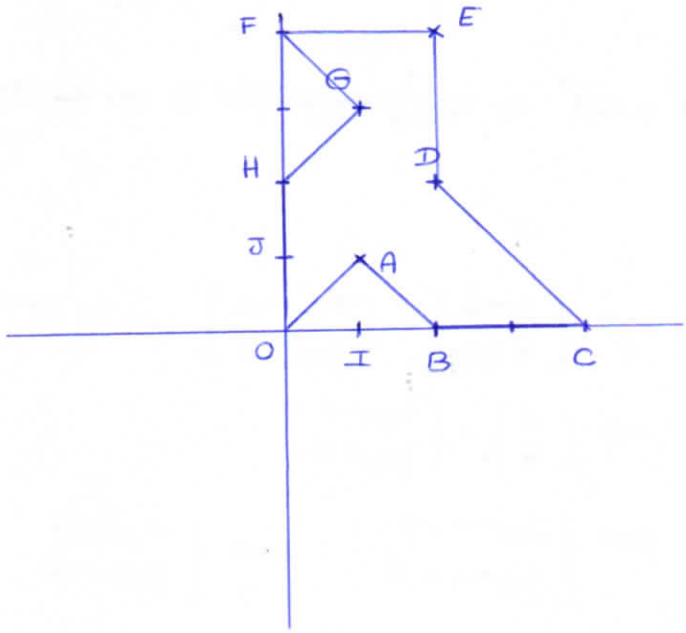
3.



4.



5.



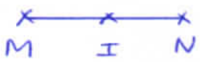
- Exercice 5 :

C'est l'image du point E par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$ puisque $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DB} = \overrightarrow{AB}$.

Or $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{EF}$. Donc l'image cherchée est F.

Exercice 6 :

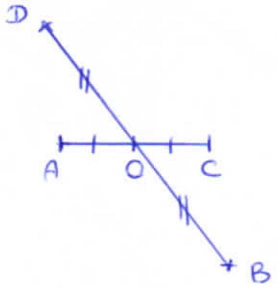
1.



I est le milieu de [MN].

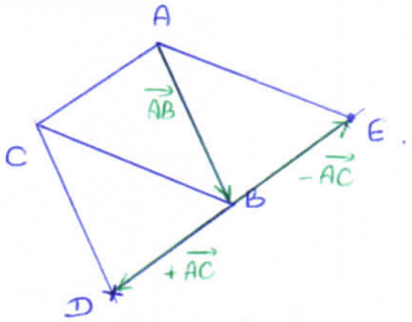
La réponse serait différente pour $MI = IN$. On aurait seulement que I appartient à la médiatrice de [MN].

2.



Par construction, les diagonales [AC] et [DB] se coupent en leur milieu.
Donc ABCD est un parallélogramme.

3.

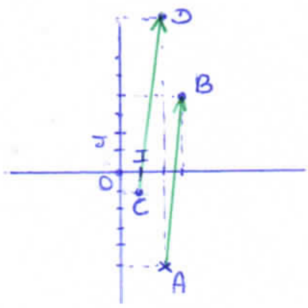


$$\vec{BE} = \vec{BA} + \vec{AE}$$
$$= \vec{BA} + \vec{AB} - \vec{AC}$$
$$= \vec{0} + \vec{CA}$$

et
$$\vec{DB} = \vec{DA} + \vec{AB}$$
$$= -\vec{AD} + \vec{AB}$$
$$= -(\vec{AB} + \vec{AC}) + \vec{AB}$$
$$= -\cancel{\vec{AB}} - \vec{AC} + \cancel{\vec{AB}}$$
$$= \vec{CA}$$

Donc $\vec{BE} = \vec{DB}$ ce qui prouve que B est le milieu de [DE]

Exercice 7 :



1. $\vec{AB} = \vec{CD} \iff \begin{pmatrix} 3-2 \\ 4+5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_D - 1 \\ y_D + 1 \end{pmatrix}$

$$\iff \begin{pmatrix} 1 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_D - 1 \\ y_D + 1 \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{cases} x_D - 1 = 1 \\ y_D + 1 = 9 \end{cases} \iff \begin{cases} x_D = 2 \\ y_D = 8 \end{cases}$$ donc $D(2;8)$.

2. a. $M\left(\frac{x_E + x_F}{2} ; \frac{y_E + y_F}{2}\right)$

$M\left(\frac{-1+3}{2} ; \frac{2+(-1)}{2}\right)$

$M\left(1 ; \frac{1}{2}\right)$

b. E milieu de [HF]

$$\iff (-1;2) = \left(\frac{x_H + 3}{2} ; \frac{y_H + (-1)}{2}\right)$$

$$\iff \frac{x_H + 3}{2} = -1 \text{ et } \frac{y_H - 1}{2} = 2$$

$$\iff x_H + 3 = -2 \text{ et } y_H - 1 = 4$$

$$\iff x_H = -5 \text{ et } y_H = 5$$

Donc $H(-5;5)$

2c. $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{FK} \iff \begin{pmatrix} 3+1 \\ -1-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_K - 3 \\ y_K + 1 \end{pmatrix}$

$\iff \begin{cases} x_K - 3 = 4 \\ y_K + 1 = -3 \end{cases} \iff K(7\,;-4)$

2d. Je vous laisse faire !

3a. $G(-3\,;-3)$ $\quad H(0\,;-1)$ $\quad K(5\,;0)$ $\quad L(2\,;-2)$

3b. $\overrightarrow{HK}\begin{pmatrix} 5-0 \\ 0+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{GL}\begin{pmatrix} 2+3 \\ -2+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}$

donc $\overrightarrow{HK} = \overrightarrow{GL}$ donc GHKL est un parallélogramme.

4. $-2\overrightarrow{MP} + 5\overrightarrow{PN} = \vec{0}$

$\iff -2\begin{pmatrix} x_P + 2 \\ y_P + 3 \end{pmatrix} + 5\begin{pmatrix} -1 - x_P \\ 2 - y_P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\iff \begin{pmatrix} -2(x_P+2) \\ -2(y_P+3) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5(-1-x_P) \\ 5(2-y_P) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

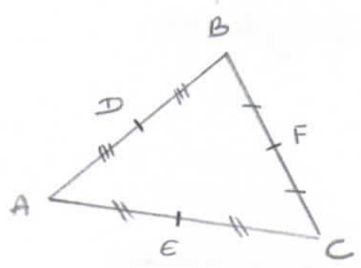
$\iff \begin{cases} -2x_P - 4 - 5 - 5x_P = 0 \\ -2y_P - 6 + 10 - 5y_P = 0 \end{cases}$

$\iff \begin{cases} -7x_P - 9 = 0 \\ -7y_P + 4 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x_P = -\frac{9}{7} \\ y_P = \frac{4}{7} \end{cases}$ donc $P\left(-\frac{9}{7}\,;\frac{4}{7}\right)$

Exercice 8 :

1. $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{BN}$ $\qquad \overrightarrow{AP} + \overrightarrow{QR} + \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{AR}$ $\qquad \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD}$

2.a.



$\overrightarrow{EB} = \overrightarrow{EC} + \overrightarrow{CB}$

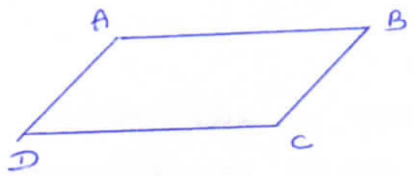
$\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{BC}$

2.b $\overrightarrow{EB} + \overrightarrow{DC} = (\overrightarrow{EC} + \overrightarrow{CB}) + (\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{BC})$

$= \overrightarrow{EC} + \underbrace{\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BC}}_{=\vec{0}} + \overrightarrow{DB}$

$= \overrightarrow{EC} + \overrightarrow{DB}.$

3.



a. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \vec{0}$

$\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DA} = \vec{0}$

$\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{BD}$

$\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{CC} = \vec{0}.$

3b. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DM} = \underbrace{\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA}}_{=\vec{0}} + \overrightarrow{DM} = \overrightarrow{DM}$

4. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AA} = \vec{0}$

$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CA}$

$\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{EB} = \underbrace{\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EB} + \overrightarrow{BA}} + \overrightarrow{AE}$
$= \overrightarrow{AA} + \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AE}$

$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DO} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{DD} = \vec{0}$.

5. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{RI} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{BR} = \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CI} = \overrightarrow{DI}$

$\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{IR} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DA} = \vec{0}$

$\overrightarrow{IC} + \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{IC} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{IB}$

$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{RI} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD}$.

6. $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB}$

$\iff \overrightarrow{AB} + \cancel{\overrightarrow{BC}} + \overrightarrow{AD} - \cancel{\overrightarrow{BC}} = \overrightarrow{AB}$

$\iff \overrightarrow{AD} = \vec{0}$

$\iff A = D$.

⚠ erreur d'énoncé

7. $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{BC} + \cancel{\overrightarrow{CA}} + \overrightarrow{DA} + \cancel{\overrightarrow{AC}} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DA}$.

- Exercice 9

1. $K\left(\dfrac{7+(-3)}{2} ; \dfrac{5+3}{2}\right)$ donc $K(2;4)$

$L\left(\dfrac{-3+(-1)}{2} ; \dfrac{3+(-3)}{2}\right)$ donc $L(-2;0)$

donc $\overrightarrow{KL}\begin{pmatrix}-2-2\\0-4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-4\\-4\end{pmatrix}$

$M\left(\dfrac{-1+7}{2} ; \dfrac{-3+(-5)}{2}\right)$ donc $M(3;-4)$

$N\left(\dfrac{7+7}{2} ; \dfrac{-5+5}{2}\right)$ donc $N(7;0)$

donc $\overrightarrow{NM}\begin{pmatrix}3-7\\-4-0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-4\\-4\end{pmatrix}$

On a $\overrightarrow{KL} = \overrightarrow{MN}$ donc KLMN est un parallélogramme.

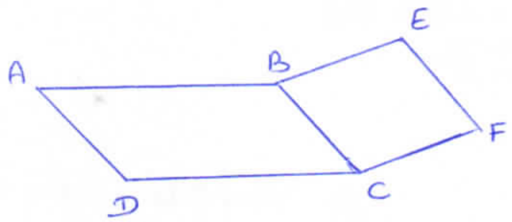
2. $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{CE}$ car C est le milieu de [DE]

$\overrightarrow{FD} = \overrightarrow{DC}$ D est le milieu de [FC]

Donc $\overrightarrow{FD} = \overrightarrow{CE}$ d'où FDEC est un parallélogramme.

On en déduit que ses diagonales [FE] et [CD] ont le même milieu.

3.



$\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BE}$
$= \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CF}$
$= \overrightarrow{DF}$

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ car ABCD parallélogramme

et $\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{CF}$ car BEFC parallélogramme.

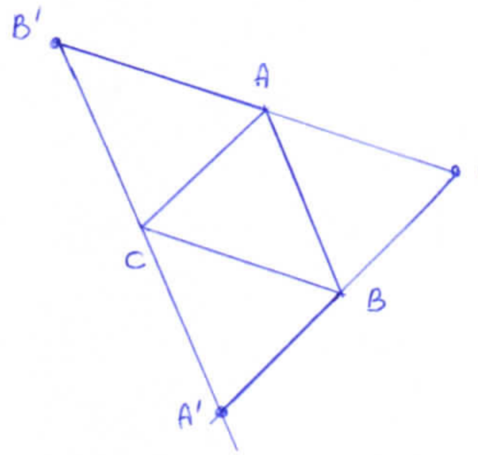
4 a. ABCDEF est un hexagone régulier donc les angles au centre sont égaux à $\frac{360}{6} = 60°$.
De plus, $OD = OC = OB = OA = OF = OE$. Donc tous les triangles sont isocèles, donc équilatéraux (puisque l'angle au centre vaut 60°).
Donc $\widehat{EOB} = 180°$ d'où $(EO) // (DC)$.
Comme $\overrightarrow{DC}$ et $\overrightarrow{EO}$ ont même direction, même sens et même norme, ils sont égaux.
$\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{EO} = \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{FA}$

b. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{FO} = \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{ED}$

c. $\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{ED} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{EC}$

d. BCO et ODE : translation de vecteur $\overrightarrow{AO}$.
translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$

5a



5b. CAC'B est un parallélogramme.

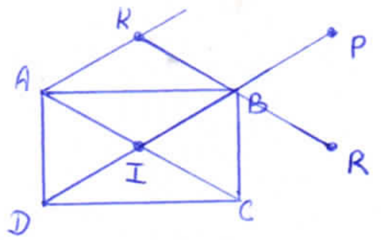
5c. donc $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{C'A}$

5d. $\overrightarrow{C'A} = \overrightarrow{BC}$
$= \overrightarrow{AB'}$ car ABCB' est un parallélogramme par construction.

5e. $\overrightarrow{C'A} = \overrightarrow{AB'}$ donc A milieu de [C'B'].
Donc (AA') est une médiane du triangle A'B'C'.

5f. On montre de même que (BB') et (CC') sont des médianes du triangle A'B'C'.
On en déduit que (AA'), (BB') et (CC') sont bien concourantes.

6a.



$\overrightarrow{IK} = \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB}$ donc IBKA est un parallélogramme.
De plus, comme ABCD est un rectangle, $AI = IB$ d'où AKBI est un losange.

6b. Par construction, $BK = BR$ et $BI = BP$.
Donc I, K, P et R appartiennent au cercle de centre B et de rayon BI.
Le triangle IKP est rectangle en K car K appartient au cercle de

diamètre [IP].

De plus IKPR est un parallélogramme puisque ses diagonales se coupent en leur milieu.

Donc IKPR est un rectangle.