COLLE 13 = ESPACES VECTORIELS, APPLICATIONS LINÉAIRES ET REPRÉSENTATIONS MATRICIELLE

Espaces vectoriels et applications linéaires :

Exercice 1.
Soit E un espace vectoriel et soient E_1 et E_2 deux sous-espaces vectoriels de dimension finie de E, on définit l'application $f\colon E_1 \times E_2 \to E$ par $f(x_1, x_2) = x_1 + x_2$.

1. Montrer que f est linéaire.
2. Déterminer le noyau et l'image de f.
3. Que donne le théorème du rang ?

Exercice 2.
Soit E un espace vectoriel de dimension n et ϕ une application linéaire de E dans lui-même telle que $\phi^n = 0$ et $\phi^{n-1} \neq 0$. Soit $x \in E$ tel que $\phi^{n-1}(x) \neq 0$. Montrer que la famille $\{x, \phi(x), \phi^2(x), \ldots, \phi^{n-1}(x)\}$ est une base de E.

Exercice 3.
Soient f et g deux endomorphismes de E tels que $f \circ g = g \circ f$. Montrer que $Kerf$ et Imf sont stables par g.

Exercice 4.
Soit E l'espace vectoriel des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Soient P le sous-espace des fonctions paires et I le sous-espace des fonctions impaires. Montrer que $E = P \bigoplus I$. Donner l'expression du projecteur sur P de direction I.

Exercice 5.
Pour les applications linéaires suivantes, déterminer $Kerf_i$ et Imf_i. En déduire si f_i est injective, surjective, bijective.

$$\begin{array}{ll} f_2 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 & f_2(x,y,z) = (2x+y+z, y-z, x+y) \\ f_3 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4 & f_3(x,y) = (y, 0, x-7y, x+y) \\ f_4 : \mathbb{R}_3[X] \to \mathbb{R}^3 & f_4(P) = \big(P(-1), P(0), P(1)\big) \end{array}$$

Exercice 6.
Soit E un espace vectoriel de dimension 3, $\{e_1, e_2, e_3\}$ une base de E, et t un paramètre réel.
Démontrer que la donnée de $\left\{\begin{array}{lcl} \phi(e_1) & = & e_1 + e_2 \\ \phi(e_2) & = & e_1 - e_2 \\ \phi(e_3) & = & e_1 + te_3 \end{array}\right.$
définit une application linéaire ϕ de E dans E. Écrire le transformé du vecteur $x = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3$. Comment choisir t pour que ϕ soit injective ? surjective ?

Exercice 7.
Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes de degré $\leq n$, et $f : E \to E$ définie par :

$$f(P) = P + (1-X)P'.$$

Montrer que f est une application linéaire et donner une base de Imf et de $Kerf$.

Espaces vectoriels et applications linéaires :

Exercice 8.
Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ dont la matrice par rapport à la base canonique (e_1, e_2) est

$$A = \begin{pmatrix} 11 & -6 \\ 12 & -6 \end{pmatrix}.$$

Montrer que les vecteurs

$$e'_1 = 2e_1 + 3e_2, \quad e'_2 = 3e_1 + 4e_2,$$

forment une base de $\mathbb{R}^2$ et calculer la matrice de f par rapport à cette base.

Exercice 9.
Soit $\mathbb{R}^2$ muni de la base canonique $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j})$.
Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la projection sur l'axe des abscisses $\mathbb{R}\vec{i}$ parallèlement à $\mathbb{R}(\vec{i} + \vec{j})$. Déterminer $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(f)$, la matrice de f dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$.
Même question avec $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(f)$ où $\mathcal{B}'$ est la base $(\vec{i} - \vec{j}, -2\vec{i} + 3\vec{j})$ de $\mathbb{R}^2$. Même question avec $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}'}(f)$.

Exercice 10.
Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ de matrice

$A = \begin{pmatrix} 2 & \frac{2}{3} \\ -\frac{5}{2} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$ dans la base canonique. Soient

$e_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $e_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que $\mathcal{B}' = (e_1, e_2)$ est une base de $\mathbb{R}^2$ et déterminer $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(f)$.
2. Calculer A^n pour $n \in \mathbb{N}$.
3. Déterminer l'ensemble des suites réelles qui

   vérifient $\forall n \in \mathbb{N}$ $\begin{cases} x_{n+1} = 2x_n + \dfrac{2}{3}y_n \\ y_{n+1} = -\dfrac{5}{2}x_n - \dfrac{2}{3}y_n \end{cases}$.

Exercice 11.
Trouver toutes les matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ qui vérifient

1. $M^2 = 0$;
2. $M^2 = M$;
3. $M^2 = I$.
