Concours Blanc : Mathématiques

(Temps : 4 heures)

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les étudiants sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs. Les réponses doivent toutes être soigneusement justifiées. Les calculatrices sont interdites.

Barème indicatif :

- Exercice 1 .... 10 points
- Exercice 2 .... 8 points
- Exercice 3 .... 12 points

Exercice 1. *(Polynômes de Legendre)*

Dans tout l'exercice, n désigne un entier naturel, $\mathbb{R}[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels et $\mathbb{R}_n[X]$ l'ensemble des polynômes réels de degré inférieur ou égal à n. On identifiera polynômes et fonctions polynomiales associées. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on note $P^{(k)}$ la dérivée k-ème du polynôme P.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère les polynômes définis par :

$$U_n = \left(X^2 - 1\right)^n \text{ et } L_n = \frac{1}{2^n n!} U_n^{(n)}$$

La famille (L_n) est appelée la famille des polynômes de Legendre.
Pour tout polynôme P, on note $\mathscr{L}(P)$ le polynôme :

$$\mathscr{L}(P) = \left[\left(X^2 - 1\right) P'\right]'$$

I Préliminaires

1. (a) Calculer L_0, L_1, L_2 et L_3.
   (b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, déterminer le degré et le coefficient dominant de L_n.
   (c) En déduire que la famille $(L_0, \ldots, L_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.
2. Montrer que L_{2n} (respectivement L_{2n+1}) est une fonction paire (respectivement impaire).
3. (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $L_n = \dfrac{1}{2^n} \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 (X-1)^k (X+1)^{n-k}$.
   (b) En déduire les valeurs de $L_n(-1)$ et de $L_n(1)$.
   (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$U_{n+1}' - 2(n+1) X U_n = 0$$
$$\left(X^2-1\right) U_n' - 2nXU_n = 0$$
   (b) En dérivant les égalités polynomiales précédentes, montrer que la suite (L_n) vérifie :
$$L_{n+1}' = XL_n' + (n+1) L_n$$
$$\mathscr{L}\left(L_n\right) = n(n+1) L_n$$
   (c) En déduire que la restriction de $\mathscr{L}$ à $\mathbb{R}_n[X]$ est un endomorphisme que nous noterons $\mathscr{L}_n$. Exprimer la matrice de $\mathscr{L}_n$ dans la base $(L_0, \ldots, L_n)$.

II Étude d'un produit scalaire et d'une base orthogonale

Pour tous $P, Q \in \mathbb{R}[X]$, on pose :
$$\langle P, Q\rangle = \int_{-1}^{1} P(x) Q(x) dx$$

4. Montrer que $\langle\cdot, \cdot\rangle$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$. On notera $\|\cdot\|$ la norme euclidienne associée.
5. Montrer que pour tous $P, Q \in \mathbb{R}[X]$: $\langle\mathscr{L}(P), Q\rangle = \langle P, \mathscr{L}(Q)\rangle$. On dit que $\mathscr{L}$ est un endomorphisme auto-adjoint.
6. (a) Montrer que pour tout $m \in \mathbb{N}$, la famille $(L_n)_{n \in \llbracket 0, m \rrbracket}$ est une base orthogonale de $\mathbb{R}_m[X]$.
   (b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}, L_{n+1} \in \mathbb{R}_n[X]^{\perp}$.
7. Montrer que $\|L_n\|^2 = \frac{2}{2n+1}$.

III Deux propriétés supplémentaires

8. En considérant un polynôme $Q = \displaystyle\prod_{i=1}^{k} (X - a_i)$ de $\mathbb{R}_n[X]$, montrer que L_{n+1} possède $n+1$ racines réelles distinctes, toutes dans l'intervalle $]-1, 1[$.
9. Calculer la distance de X^{n+1} au sous-espace vectoriel $\mathbb{R}_n[X]$.

Exercice 2. *(Temps d'arrêt)*

Pour tout entier n tel que $n \geqslant 2$, on considère une urne U_n contenant n boules numérotées de 1 à n. On effectue, dans U_n, des tirages indépendants d'une boule avec remise. On suppose que tous les tirages dans U_n sont équiprobables. On s'arrête dès que l'on obtient une boule déjà obtenue.
On suppose l'expérience modélisée par un espace probabilisé fini (Ω, P) et on note T_n la variable aléatoire égale au nombre de tirages effectués.

1. Déterminer $T_n(\Omega)$ et justifier que :
$$P(T_n > n+1) = 0$$

2. Prouver que pour tout entier naturel k tel que $k \leqslant n$, on a :
$$P(T_n > k) = \frac{n!}{(n-k)!n^k}$$

Pour tout $n \geqslant 2$, on considère la variable aléatoire $Y_n = \dfrac{T_n}{\sqrt{n}}$. Soit $y \in]0, +\infty[$ fixé.
Pour tout entier $n \geqslant 2$, on note $k_n(y)$ l'entier naturel égal à la partie entière de $y\sqrt{n}$ de sorte que l'on a :
$$k_n(y) \leqslant y\sqrt{n} < 1 + k_n(y)$$

3. Justifier que pour tout entier $n \geqslant 2$:
$$P(Y_n > y) = P(T_n > k_n(y))$$

4. Rappeler la formule de Stirling et montrer que :
$$P(Y_n > y) \underset{n\to+\infty}{\sim} e^{-k_n(y)}\left(1 - \frac{k_n(y)}{n}\right)^{k_n(y)-n}$$

5. (a) Déterminer le développement limité à l'ordre 2 au voisinage de 0 de la fonction $f : t \longmapsto -t + (t-1)\ln(1-t)$.
   (b) En déduire que :
$$\lim_{n\to+\infty}\left(-k_n(y) + (k_n(y) - n)\ln\left(1 - \frac{k_n(y)}{n}\right)\right) = -\frac{y^2}{2}$$

6. Montrer que :
$$\lim_{n\to+\infty} P(Y_n \leqslant y) = 1 - e^{-\frac{y^2}{2}}$$

Exercice 3. *(Matrices symplectiques)*

Dans tout le problème, n désigne un entier naturel non nul : $n \in \mathbb{N}^*$.

— Dans $\mathscr{E}_n = \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ espace vectoriel réel de dimension n, on utilisera le produit scalaire canonique défini par :
$$\forall U, V \in \mathscr{E}_n,\ (U \mid V) = U^\top V$$

— On notera $\mathscr{M}_n = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, l'espace vectoriel des matrices carrées de taille n à coefficients réels.

— Dans $\mathcal{M}_n$, on notera 0_n la matrice nulle et I_n la matrice unité. Le déterminant est noté det.

— $\mathscr{G}_n = GL_n(\mathbb{R}) = \{M \in \mathscr{M}_n,\ \det(M) \neq 0\}$ désigne le groupe linéaire des matrices inversibles de $\mathscr{M}_n$.

— On sera enfin amené à utiliser des décompositions par blocs. On rappelle en particulier que si $A, B, C, D, A', B', C', D' \in \mathcal{M}_n$ on a alors dans $\mathcal{M}_{2n}$:
$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A' & B' \\ C' & D' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AA' + BC' & AB' + BD' \\ CA' + DC' & CB' + DD' \end{pmatrix}$$
$$\det\begin{pmatrix} A & C \\ 0_n & D \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} A & 0_n \\ C & D \end{pmatrix} = \det(A)\det(D)$$

I Propriétés sur les matrices symplectiques

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soit J_n ou simplement J la matrice de $\mathscr{M}_{2n}$ définie par :

$$J = \begin{pmatrix} 0_n & -I_n \\ I_n & 0_n \end{pmatrix}$$

On note :

$$\mathscr{S}p_{2n} = \left\{ M \in \mathscr{M}_{2n}, M^\top J M = J \right\}$$

1. Calculer J^2 et $J^\top$ en fonction de I_{2n} et J. Montrer que J est inversible et identifier son inverse.
2. Vérifier que $J \in \mathscr{S}p_{2n}$ et que pour tout réel α,

$$K(\alpha) = \begin{pmatrix} I_n & 0_n \\ -\alpha I_n & I_n \end{pmatrix} \in \mathscr{S}p_{2n}$$

3. Pour tout $U \in \mathscr{G}_n$, vérifier que $L_U = \begin{pmatrix} U & 0_n \\ 0_n & \left(U^{-1}\right)^\top \end{pmatrix}$ est dans $\mathscr{S}p_{2n}$.
4. Si $M \in \mathscr{S}p_{2n}$, préciser les valeurs possibles de $\det(M)$.
5. Montrer que le produit de deux éléments de $\mathscr{S}p_{2n}$ est un élément de $\mathscr{S}p_{2n}$.
6. Montrer qu'un élément de $\mathscr{S}p_{2n}$ est inversible et que son inverse appartient à $\mathscr{S}p_{2n}$.
7. Montrer que si $M \in \mathscr{S}p_{2n}$ alors $M^\top \in \mathscr{S}p_{2n}$.
   Soit M une matrice de $\mathscr{M}_{2n}$ écrite sous la forme :

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \text{ avec } A, B, C, D \in \mathcal{M}_n$$

8. Déterminer les relations sur A, B, C, D caractérisant l'appartenance de M à $\mathscr{S}p_{2n}$.

II Centre de $\mathscr{S}p_{2n}$

On s'intéresse ici au centre $\mathscr{Z}$ de $\mathscr{S}p_{2n}$ c'est-à-dire : $\mathscr{Z} = \{M \in \mathscr{S}p_{2n}, \forall N \in \mathscr{S}p_{2n}, MN = NM\}$.

9. Justifier l'inclusion suivante : $\{-I_{2n}, I_{2n}\} \subset \mathscr{Z}$.
   Réciproquement, soit $M \in \mathscr{Z}$ écrite sous la forme :

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \text{ avec } A, B, C, D \in \mathscr{M}_n$$

10. En utilisant $L = \begin{pmatrix} I_n & I_n \\ 0_n & I_n \end{pmatrix}$ et sa transposée, obtenir $B = C = 0_n$ et $D = A$, A étant inversible.
11. Soit $U \in \mathscr{G}_n$. En utilisant $L_U = \begin{pmatrix} U & 0_n \\ 0_n & \left(U^{-1}\right)^\top \end{pmatrix}$, montrer que A commute avec toute matrice $U \in \mathscr{G}_n$.
12. Conclure que $A \in \{-I_n, I_n\}$ et $\mathscr{Z} = \{-I_{2n}, I_{2n}\}$.
    Indication : on montrera d'abord que les matrices $I_n + E_{i,j}$ commutent avec A, où $(E_{i,j}, 1 \leqslant i, j \leqslant n)$ est la base canonique de $\mathscr{M}_n$.