Préparer sa colle = Algèbre linéaire, espaces euclidiens

Exercices mixtes :

Exercice 1.

Soit E l'ensemble des fonctions continues strictement positives sur $[a,b]$.
Soit $\begin{array}{rcl} \varphi : E & \to & \mathbb{R} \\ f & \mapsto & \left(\int_a^b f(t)\,dt\right)\left(\int_a^b \frac{1}{f(t)}\,dt\right) \end{array}$.

1. Montrer que $\varphi(E)$ n'est pas majoré.
2. Montrer que $\varphi(E)$ est minoré. Trouver $m = \mathrm{Inf}\{\varphi(f),\ f \in E\}$. Montrer que cette borne infèrieure est atteinte et trouver toutes les f de E telles que $\varphi(f) = m$.

Exercice 2. (Concours communs Polytechniques 2018)

On note E l'espace vectoriel des applications continues sur le segment $[-1,1]$ et à valeurs réelles.

1. Démontrer que l'on définit un produit scalaire sur E en posant pour f et g éléments de E :
$$(f|g) = \int_{-1}^{1} f(t)g(t)dt$$
2. On note $u : t \mapsto 1$, $v : t \mapsto t$ et $F = vect\{u,v\}$, déterminer une base orthonormée de F.
3. Déterminer le projeté orthogonal de la fonction $w : t \mapsto e^t$ sur le sous-espace F et en déduire la valeur du réel :
$$\underset{(a,b)\in\mathbb{R}^2}{inf}\left[\int_{-1}^{1}\left(e^t-(a+bt)\right)^2 dt\right]$$

Exercice 3.

Soit E un $\mathbb{R}$ espace vectoriel de dimension finie. Soit $||\ ||$ une norme sur E vérifiant l'identité du parallèlogramme, c'est-à-dire : $\forall (x,y) \in E^2,\ ||x+y||^2 + ||x-y||^2 = 2(||x||^2 + ||y||^2)$. On se propose de démontrer que $||\ ||$ est associée à un produit scalaire. On définit sur E^2 une application f par : $\forall (x,y) \in E^2,\ f(x,y) = \frac{1}{4}(||x+y||^2 - ||x-y||^2)$.

1. Montrer que pour tout (x,y,z) de E^3, on a : $f(x+z,y) + f(x-z,y) = 2f(x,y)$.
2. Montrer que pour tout (x,y) de E^2, on a : $f(2x,y) = 2f(x,y)$.
3. Montrer que pour tout (x,y) de E^2 et tout rationnel r, on a : $f(rx,y) = rf(x,y)$.
   On admettra que pour tout réel λ et tout (x,y) de E^2 on a : $f(\lambda x,y) = \lambda f(x,y)$ (ce résultat provient de la continuité de f).
4. Montrer que pour tout (u,v,w) de E^3, $f(u,w) + f(v,w) = f(u+v,w)$.
5. Montrer que f est bilinéaire.
6. Montrer que $||\ ||$ est une norme euclidienne.

---

 mail: ibotca52@gmail.com