TD 8 : Fonctions continues

Études locales et manipulations :

Exercice 1. (*)

Montrer en revenant à la définition que $f(x) = \frac{3x-1}{x-5}$ est continue en tout point de $\mathbb{R} \setminus \{5\}$.

Exercice 2. (*)

Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$. Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $f(x) = \mathrm{Inf}\{|y-x|,\ y \in A\}$. Montrer que f est continue en tout point de $\mathbb{R}$.

Exercice 3. (**)

1. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \lfloor x \rfloor + \sqrt{x - \lfloor x \rfloor}$. Étudier la continuité de f sur $\mathbb{R}$.
2. Soit $g \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R})$, à quelle condition la fonction f définie par $f(x) = \lfloor x \rfloor + g(x - \lfloor x \rfloor)$ est-elle continue ?

Exercice 4. (**)

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ x+1 & \text{si } x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Montrer que f est discontinue en tout point.

Exercice 5. (*)

Dire si les fonctions suivantes sont prolongeables par continuité à $\mathbb{R}$ tout entier :

1. $f(x) = \sin(1/x)$ si $x \neq 0$;
2. $g(x) = \sin(x)\sin(1/x)$ si $x \neq 0$;
3. $h(x) = \cos(x)\cos(1/x)$ si $x \neq 0$.

Exercice 6. (**)

Trouver pour $(a,b) \in (\mathbb{R}^{+*})^2$: $\lim\limits_{x \to 0^+} \left(\frac{a^x + b^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}$.

Exercice 7. (*)

Les fonctions suivantes sont-elles prolongeables par continuité sur $\mathbb{R}$?

$$a)\ g(x) = \frac{1}{x} \ln \frac{e^x + e^{-x}}{2}\ ;$$

$$b)\ h(x) = \frac{1}{1-x} - \frac{2}{1-x^2}\ .$$

Exercice 8. (**)

1. Démontrer que $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x} = 1$.
2. Soient m, n des entiers positifs.
   Étudier $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{1+x^m} - \sqrt{1-x^m}}{x^n}$.
3. Démontrer que $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{x}(\sqrt{1+x+x^2} - 1) = \dfrac{1}{2}$.

Exercice 9. (*)

Calculer lorsqu'elles existent les limites suivantes

$a)$ $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x^2 + 2|x|}{x}$ $\qquad b)$ $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{x^2 + 2|x|}{x}$

$c)$ $\lim\limits_{x \to \pi} \frac{\sin^2 x}{1 + \cos x}$ $\qquad d)$ $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1+x^2}}{x}$

$e)$ $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sqrt[3]{1+x^2} - 1}{x^2}$ $\qquad f)$ $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x-1}{x^n - 1}$

$g)$ $\lim\limits_{x \to 2} \frac{x^2 - 4}{x^2 - 3x + 2}$ $\qquad h)$ $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x+5} - \sqrt{x-3}$

Exercice 10. (***)

Étudier l'existence d'une limite et la continuité éventuelle en chacun de ses points de la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = 0$ si x est irrationnel et $f(x) = \frac{1}{p+q}$ si x est rationnel égal à $\frac{p}{q}$, la fraction $\frac{p}{q}$ étant irréductible.

Exercice 11. (**)

Calculer, lorsqu'elles existent, les limites suivantes :

$$\lim_{x\to\alpha} \frac{x^{n+1}-\alpha^{n+1}}{x^n-\alpha^n},$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan x - \sin x}{\sin x(\cos 2x - \cos x)},$$

$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}-\sqrt{x},$$

$$\lim_{x\to\alpha^+} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{\alpha}-\sqrt{x-\alpha}}{\sqrt{x^2-\alpha^2}}, \quad (\alpha>0)$$

$$\lim_{x\to 0} xE\left(\frac{1}{x}\right),$$

$$\lim_{x\to 2} \frac{e^x-e^2}{x^2+x-6},$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^4}{1+x^\alpha \sin^2 x}, \text{ en fonction de } \alpha \in \mathbb{R}.$$

Exercice 12. (**)

Déterminer les limites suivantes, en justifiant vos calculs.

1. $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{x+2}{x^2\ln x}$
2. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^3-2x^2+3}{x\ln x}$
3. $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\ln(3x+1)}{2x}$
4. $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{x^x-1}{\ln(x+1)}$
5. $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{2}{x+1}\ln\left(\dfrac{x^3+4}{1-x^2}\right)$
6. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x-e^{x^2}}{x^2-x}$
7. $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{x+1}{x-3}\right)^x$
8. $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{e^x+1}{x+2}\right)^{\frac{1}{x+1}}$
9. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^{(x^{x-1})}}{x^{(x^x)}}$
10. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x\sqrt{\ln(x^2+1)}}{1+e^{x-3}}$

Équations fonctionnelles

Exercice 13. (*)

On cherche à déterminer toutes les fonctions continues $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ vérifiant, pour tout $x\in\mathbb{R}$, $f(2x)-f(x)=x$.

1. Soit f une telle fonction. Démontrer que, pour tout $x\in\mathbb{R}$ et pour tout $n\geq 1$, on a
$$f(x)-f(x/2^n)=\sum_{k=1}^{n}\frac{x}{2^k}.$$
2. Répondre au problème posé.

Exercice 14. (***)

Soit f une fonction définie sur un voisinage de 0 telle que $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0$ et $\lim\limits_{x\to 0} \frac{f(2x)-f(x)}{x}=0$.
Montrer que $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=0$.
(Indication. Considérer $g(x)=\frac{f(2x)-f(x)}{x}$.)

Exercice 15. (*)

Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ continue en 0 telle que pour chaque $x\in\mathbb{R}$, $f(x)=f(2x)$. Montrer que f est constante.

Exercice 16. (**)

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f:I\to\mathbb{R}$ continue, telle que pour chaque $x\in I$, $f(x)^2=1$. Montrer que $f=1$ ou $f=-1$.

Exercice 17. (***)

Soit f une fonction réelle d'une variable réelle définie et continue sur un voisinage de $+\infty$.
On suppose que la fonction $f(x+1)-f(x)$ admet dans $\mathbb{R}$ une limite ℓ quand x tend vers $+\infty$.
Etudier l'existence et la valeur eventuelle de $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$.

Fonctions continues sur un intervalle

Exercice 18. (*)

Soit I un intervalle, $k > 0$ et $f : I \to \mathbb{R}$ vérifiant :

$$\forall (x, y) \in I^2,\ |f(x) - f(y)| \leq k|x - y|.$$

Démontrer que f est continue sur I. La fonction f est-elle uniformément continue ?

Exercice 19. (*)

Démontrer que l'équation $\cos x = \frac{1}{x}$ admet une infinité de solutions dans $\mathbb{R}_+^*$.

Exercice 20. (**)

Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ une fonction continue surjective.

1. Démontrer que 0 admet un nombre infini d'antécédents.
2. Plus généralement, démontrer que tout réel admet un nombre infini d'antécédents.

Exercice 21. (**)

Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ continue. On suppose que $x \mapsto \frac{f(x)}{x}$ admet une limite finie $l < 1$ en $+\infty$. Démontrer que f admet un point fixe.

Exercice 22. (**)

Une personne parcourt 4 km en 1 heure. Montrer qu'il existe un intervalle de 30 mn pendant lequel elle parcourt exactement 2 km.

Exercice 23. (**)

Trouver f bijective de $[0, 1]$ sur lui-même et discontinue en chacun de ses points.

Exercice 24. (***)

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction monotone. Montrer que l'ensemble de ses points de discontinuité est fini ou dénombrable.

Exercice 25. (**)

Soit $f : [0, 1] \to [0, 1]$ une fonction continue. Démontrer que f admet toujours au moins un point fixe.

Exercice 26. (**)

Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$ admettant une période T. Prouver que f est uniformément continue.

Exercice 27. (***)

Soient $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues. Pour $t \in \mathbb{R}$, on pose

$$h(t) = \sup\{f(x) + tg(x);\ x \in [a, b]\}.$$

Montrer que h est lipschitzienne.

Exercice 28. (***)

Une fonction f définie sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ est SCI (pour semi-continue inférieurement) si

$$\forall x_0 \in I, \forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in I,$$
$$|x - x_0| \leq \eta \quad \Rightarrow \quad f(x) \geq f(x_0) - \varepsilon.$$

1. (a) Montrer qu'une fonction continue sur un intervalle est SCI.
   (b) Déterminer une fonction SCI qui n'est pas continue.
2. (a) Montrer que la somme de deux fonctions SCI sur un intervalle I est encore une fonction SCI.
   (b) Montrer que le produit de deux fonctions SCI n'est pas forcément une fonction SCI.
3. Soit f une fonction SCI sur un segment I.
   (a) Montrer que f est minorée.
   (b) Montrer qu'il existe $x_0 \in I$ tel que $f(x_0) = \inf_{x \in I} f(x)$.
