



## Vecteurs propres et valeurs propres

Le but de cette feuille d'exercices est d'apprendre à calculer les valeurs propres et vecteurs propres d'un endomorphisme de  $\mathbb{R}^n$ , et à appliquer un changement de base à la matrice d'un endomorphisme.

### Exercice 1

1. (a) Soit  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  l'application linéaire définie par

$$f \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3x + 4y \\ 4x - 3y \end{pmatrix}.$$

- (b) Écrire la matrice de  $f$  dans la base canonique de  $\mathbb{R}^2$ . On la notera  $A$ .
- (c) Montrer que le vecteur  $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$  est vecteur propre de  $f$ . Quelle est la valeur propre associée ?
- (d) Montrer que le vecteur  $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$  est également vecteur propre de  $f$ . Quelle est la valeur propre associée ?
- (e) Calculer graphiquement l'image du vecteur  $\vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ . Retrouver ce résultat par le calcul.
- (f) Montrer que la famille  $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$  forme une base de  $\mathbb{R}^2$ .
- (g) Quelle est la matrice de  $f$  dans la base  $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$  ? On la notera  $D$ .
- (h) Soit  $P$  la matrice dont la première colonne est le vecteur  $\vec{v}_1$  et dont la deuxième colonne est le vecteur  $\vec{v}_2$ . Calculer  $P^{-1}$ .
- (i) Quelle relation y-a-t-il entre  $A$ ,  $P$ ,  $P^{-1}$  et  $D$  ?
- (j) Calculer  $A^n$ , pour  $n \in \mathbb{N}$ .
2. Même exercice avec la matrice  $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$  et les vecteurs  $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ ,  $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  et  $\vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}$ .

[002761]

### Exercice 2

Déterminer le polynôme caractéristique des matrices suivantes

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

[002762]

### Exercice 3

Rechercher les valeurs propres et vecteurs propres des matrices suivantes :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 7 & -2 \\ 4 & -2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & a^2 & 0 \\ -1 & 0 & a^2 \end{pmatrix} \quad (a \neq 0).$$

**Exercice 4**

Trouver une matrice carrée inversible  $P$  telle que  $B = PAP^{-1}$  soit diagonale, et écrire la matrice  $B$  obtenue, pour les matrices  $A$  suivantes :

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & -4 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 7 & -2 \\ 4 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

[002764]

**Exercice 5** DS mai 2008

Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 3 & -9 \\ -2 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & -4 \end{pmatrix}$$

qui représente  $f$ , un endomorphisme de  $\mathbb{R}^3$  dans la base canonique  $\mathcal{B} = \{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ .

1. (a) Montrer que les valeurs propres de  $A$  sont  $\lambda_1 = -2$ ,  $\lambda_2 = 1$  et  $\lambda_3 = 3$ .  
 (b) En déduire que l'on peut diagonaliser  $A$ .
2. (a) Déterminer une base  $\mathcal{B}' = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$  de vecteurs propres tels que la matrice de  $f$  dans la base  $\mathcal{B}'$  soit

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}.$$

- (b) Préciser la matrice de passage  $P$  de la base  $\mathcal{B}$  à la base  $\mathcal{B}'$ ; quelle relation lie les matrices  $A$ ,  $P$ ,  $P^{-1}$  et  $D$ ?
3. Montrer que pour tout entier  $n \in \mathbb{N}$ , on a  $A^n = PD^nP^{-1}$ .
4. Après avoir donné  $D^n$ , calculer  $A^n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

[002765]

**Exercice 6** DS mai 2008

Soit la matrice  $A = \begin{pmatrix} -3 & -2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ .

1. Calculer les valeurs propres de  $A$ .
2. (a) Donner une base et la dimension de chaque sous-espace propre de  $A$ .  
 (b)  $A$  est diagonalisable; justifier cette affirmation et diagonaliser  $A$ .

[002766]

**Exercice 7**

On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 & 0 \\ a' & b & 2 & 0 \\ a'' & b' & c & 2 \end{pmatrix}.$$

À quelles conditions les inconnues doivent-elles satisfaire pour que cette matrice soit diagonalisable? Ces conditions étant remplies, fournir une base de vecteurs propres pour  $A$ .

[002767]