Produit scalaire, espaces euclidiens

Exercices de Jean-Louis Rouget. Retrouver aussi cette fiche sur www.maths-france.fr

* très facile ** facile *** difficulté moyenne **** difficile ***** très difficile
I : Incontournable T : pour travailler et mémoriser le cours

Exercice 1 ***

Pour $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, $N(A) = \text{Tr}({}^tAA)$. Montrer que N est une norme vérifiant de plus $N(AB) \leqslant N(A)N(B)$ pour toutes matrices carrées A et B. N est-elle associée à un produit scalaire ?

Correction ▼ [005482]

Exercice 2 ***

Soit E un $\mathbb{R}$ espace vectoriel de dimension finie. Soit $\|\ \|$ une norme sur E vérifiant l'identité du parallélogramme, c'est-à-dire : $\forall (x,y) \in E^2,\ \|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$. On se propose de démontrer que $\|\ \|$ est associée à un produit scalaire. On définit sur E^2 une application f par : $\forall (x,y) \in E^2,\ f(x,y) = \frac{1}{4}(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2)$.

1. Montrer que pour tout (x,y,z) de E^3, on a : $f(x+z,y) + f(x-z,y) = 2f(x,y)$.
2. Montrer que pour tout (x,y) de E^2, on a : $f(2x,y) = 2f(x,y)$.
3. Montrer que pour tout (x,y) de E^2 et tout rationnel r, on a : $f(rx,y) = rf(x,y)$.
   On admettra que pour tout réel λ et tout (x,y) de E^2 on a : $f(\lambda x,y) = \lambda f(x,y)$ (ce résultat provient de la continuité de f).
4. Montrer que pour tout (u,v,w) de E^3, $f(u,w) + f(v,w) = f(u+v,w)$.
5. Montrer que f est bilinéaire.
6. Montrer que $\|\ \|$ est une norme euclidienne.

Correction ▼ [005483]

Exercice 3 **IT

Dans $\mathbb{R}^4$ muni du produit scalaire usuel, on pose : $V_1 = (1,2,-1,1)$ et $V_2 = (0,3,1,-1)$. On pose $F = \text{Vect}(V_1,V_2)$. Déterminer une base orthonormale de F et un système d'équations de $F^\perp$.

Correction ▼ [005484]

Exercice 4 **

Sur $\mathbb{R}[X]$, on pose $P|Q = \int_0^1 P(t)Q(t)\,dt$. Existe-t-il A élément de $\mathbb{R}[X]$ tel que $\forall P \in \mathbb{R}[X],\ P|A = P(0)$?

Correction ▼ [005485]

Exercice 5 ***I Matrices et déterminants de Gram

Soit E un espace vectoriel euclidien de dimension p sur $\mathbb{R}$ ($p \geqslant 2$). Pour $(x_1,...,x_n)$ donné dans E^n, on pose $G(x_1,...,x_n) = (x_i|x_j)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ (matrice de Gram) et $\gamma(x_1,...,x_n) = \det(G(x_1,...,x_n))$ (déterminant de Gram).

1. Montrer que $\text{rg}(G(x_1,...,x_n)) = \text{rg}(x_1,...,x_n)$.
2. Montrer que $(x_1,...,x_n)$ est liée si et seulement si $\gamma(x_1,...,x_n) = 0$ et que $(x_1,...,x_n)$ est libre si et seulement si $\gamma(x_1,...,x_n) > 0$.

3. On suppose que $(x_1,\dots,x_n)$ est libre dans E (et donc $n \leqslant p$). On pose $F = \mathrm{Vect}(x_1,\dots,x_n)$.
Pour $x \in E$, on note $p_F(x)$ la projection orthogonale de x sur F puis $d_F(x)$ la distance de x à F (c'est-à-dire $d_F(x) = ||x - p_F(x)||$). Montrer que $d_F(x) = \sqrt{\frac{\gamma(x,x_1,\dots,x_n)}{\gamma(x_1,\dots,x_n)}}$.

Correction ▼ [005486]

Exercice 6 **I

Soit a un vecteur non nul de l'espce euclidien $\mathbb{R}^3$. On définit f de $\mathbb{R}^3$ dans lui même par : $\forall x \in \mathbb{R}^3$, $f(x) = a \wedge (a \wedge x)$. Montrer que f est linéaire puis déterminer les vecteurs non nuls colinéaires à leur image par f.

Correction ▼ [005487]

Exercice 7 **I

Matrice de la projection orthogonale sur la droite d'équations $3x = 6y = 2z$ dans la base canonique orthonormée de $\mathbb{R}^3$ ainsi que de la symétrie orthogonale par rapport à cette même droite. De manière générale, matrice de la projection orthogonale sur le vecteur unitaire $u = (a,b,c)$ et de la projection orthogonale sur le plan d'équation $ax + by + cz = 0$ dans la base canonique orthonormée de $\mathbb{R}^3$.

Correction ▼ [005488]

Exercice 8 **

$E = \mathbb{R}^3$ euclidien orienté rapporté à une base orthonormée directe $\mathscr{B}$. Etudier les endomorphismes de matrice A dans $\mathscr{B}$ suivants :

$$1)\ A = -\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix} \quad 2/\ A = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & 1 & \sqrt{6} \\ 1 & 3 & -\sqrt{6} \\ -\sqrt{6} & \sqrt{6} & 2 \end{pmatrix} \quad 3/\ A = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 8 & 1 & 4 \\ -4 & 4 & 7 \\ 1 & 8 & -4 \end{pmatrix}.$$

Correction ▼ [005489]

Exercice 9 ***

Soit $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix}$ avec a, b et c réels. Montrer que M est la matrice dans la base canonique orthonormée directe de R^3 d'une rotation si et seulement si a, b et c sont les solutions d'une équation du type $x^3 - x^2 + k = 0$ où $0 \leqslant k \leqslant \frac{4}{27}$. En posant $k = \frac{4\sin^2\varphi}{27}$, déterminer explicitement les matrices M correspondantes ainsi que les axes et les angles des rotations qu'elles représentent.

Correction ▼ [005490]

Exercice 10 **

$\mathscr{B}$ est une base orthonormée directe de $\mathbb{R}^3$ donnée. Montrer que $\det_{\mathscr{B}}(u \wedge v, v \wedge w, w \wedge u) = (\det_{\mathscr{B}}(u,v,w))^2$ pour tous vecteurs u, v et w.

Correction ▼ [005491]

Exercice 11 ***I Inégalité de HADAMARD

Soit $\mathscr{B}$ une base orthonormée de E, espace euclidien de dimension n. Montrer que : $\forall (x_1,\dots,x_n) \in E^n$, $|\det_{\mathscr{B}}(x_1,\dots,x_n)| \leqslant ||x_1||\dots||x_n||$ en précisant les cas d'égalité.

Correction ▼ [005492]

Exercice 12 **

Montrer que $u \wedge v | w \wedge s = (u|w)(v|s) - (u|s)(v|w)$ et $(u \wedge v) \wedge (w \wedge s) = [u,v,s]w - [u,v,w]s$.

Correction ▼ [005493]

Exercice 13 **I

Existence, unicité et calcul de a et b tels que $\int_0^1 (x^4 - ax - b)^2\,dx$ soit minimum (trouver deux démonstrations, une dans la mentalité du lycée et une dans la mentalité maths sup).

Correction ▼ [005494]

Exercice 14 ***

Soit $(e_1, ..., e_n)$ une base quelconque de E euclidien. Soient a_1,..., a_n n réels donnés. Montrer qu'il existe un unique vecteur x tel que $\forall i \in \{1, ..., \}$, $x|e_i = a_i$.

Correction ▼ [005495]

Exercice 15 ****

Soit E un espace vectoriel euclidien de dimension $n \geqslant 1$. Une famille de p vecteurs $(x_1, ..., x_p)$ est dite obtusangle si et seulement si pour tout (i, j) tel que $i \neq j$, $x_i|x_j < 0$. Montrer que l'on a nécessairement $p \leqslant n+1$.

Correction ▼ [005496]

Exercice 16 ***

Soit $P \in \mathbb{R}_3[X]$ tel que $\int_{-1}^1 P^2(t)\,dt = 1$. Montrer que $\sup\{|P(x)|,\ |x| \leqslant 1\} \leqslant 2$. Cas d'égalité ?

Correction ▼ [005497]

Exercice 17 **IT

Soit r la rotation de $\mathbb{R}^3$, euclidien orienté, dont l'axe est orienté par k unitaire et dont une mesure de l'angle est θ. Montrer que pour tout x de $\mathbb{R}^3$, $r(x) = (\cos\theta)x + (\sin\theta)(k \wedge x) + 2(x.k)\sin^2(\frac{\theta}{2})k$. Application : écrire la matrice dans la base canonique (orthonormée directe de $\mathbb{R}^3$) de la rotation autour de $k = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_1 + e_2)$ et d'angle $\theta = \frac{\pi}{3}$.

Correction ▼ [005498]

Exercice 18 **

Soit f continue strictement positive sur $[0, 1]$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \int_0^1 f^n(t)\,dt$. Montrer que la suite $u_n = \frac{I_{n+1}}{I_n}$ est définie et croissante.

Correction ▼ [005499]

Exercice 19 ****I

Sur $E = \mathbb{R}_n[X]$, on pose $P|Q = \int_{-1}^1 P(t)Q(t)\,dt$.

1. Montrer que $(E, |)$ est un espace euclidien.
2. Pour p entier naturel compris entre 0 et n, on pose $L_p = ((X^2-1)^p)^{(p)}$. Montrer que $\left(\frac{L_p}{||L_p||}\right)_{0 \leqslant p \leqslant n}$ est l'orthonormalisée de SCHMIDT de la base canonique de E.
   Déterminer $||Lp||$.

Correction ▼ [005500]

Correction de l'exercice 1 ▲

Posons $\varphi : (A,B) \mapsto \mathrm{Tr}({}^tAB)$. Montrons que φ est un produit scalaire sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. **1ère solution.** • φ est symétrique. En effet, pour $(A,B) \in (\mathscr{M}_n(\mathbb{R}))^2$,

$$\varphi(A,B) = \mathrm{Tr}({}^tAB) = \mathrm{Tr}({}^t({}^tAB)) = \mathrm{Tr}({}^tBA) = \varphi(B,A).$$

• φ est bilinéaire par linéarité de la trace et de la transposition. • Si $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$, alors

$$\varphi(A,A) = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}a_{i,j}\right) = \sum_{i,j} a_{i,j}^2 > 0$$

car au moins un des réels de cette somme est strictement positif. φ est donc définie, positive.
2ème solution. Posons $A = (a_{i,j})$ et $B = (b_{i,j})$. On a

$$\mathrm{Tr}({}^tAB) = \textstyle\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n} a_{i,j}b_{i,j}\right) = \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} a_{i,j}b_{i,j}.$$

Ainsi, φ est le produit scalaire canonique sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et en particulier, φ est un produit scalaire sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. N n'est autre que la norme associée au produit scalaire φ (et en particulier, N est une norme). Soit $(A,B) \in (\mathscr{M}_n(\mathbb{R}))^2$.

$$\begin{aligned}
N(AB)^2 &= \sum_{i,j}\left(\sum_{k=1}^{n} a_{i,k}b_{k,j}\right)^2 \\
&\leqslant \sum_{i,j}\left(\sum_{k=1}^{n} a_{i,k}^2\right)\left(\sum_{l=1}^{n} b_{l,j}^2\right) \text{ (d'après l'inégalité de CAUCHY-SCHWARZ)} \\
&= \sum_{i,j,k,l} a_{i,k}^2 b_{l,j}^2 = \left(\sum_{i,k} a_{i,k}^2\right)\left(\sum_{l,j} b_{l,j}^2\right) = N(A)^2N(B)^2,
\end{aligned}$$

et donc,

$$\boxed{\forall (A,B) \in (\mathscr{M}_n(\mathbb{R}))^2,\ N(AB) \leqslant N(A)N(B).}$$

Correction de l'exercice 2 ▲

1. Soit $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.

$$\begin{aligned}
f(x+z,y)+f(x-z,y) &= \frac{1}{4}(||x+z+y||^2 + ||x-z+y||^2 - ||x+z-y||^2 - ||x-z-y||^2) \\
&= \frac{1}{4}\left(2(||x+y||^2+||z||^2) - 2(||x-y||^2+||z||^2)\right) = 2f(x,y).
\end{aligned}$$

2. $2f(x,y) = f(x+x,y)+f(x-x,y) = f(2x,y)+f(0,y)$ mais $f(0,y) = (||y||^2 - ||-y||^2) = 0$ (définition d'une norme).
3. • Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N},\ f(nx,y) = nf(x,y)$. C'est clair pour $n=0$ et $n=1$. Soit $n \geqslant 0$. Si l'égalité est vraie pour n et $n+1$ alors d'après 1),

$$f((n+2)x,y)+f(nx,y) = f((n+1)x+x,y)+f((n+1)x-x,y) = 2f((n+1)x,y),$$

et donc, par hypothèse de récurrence,

$$f((n+2)x,y) = 2f((n+1)x,y) - f(nx,y) = 2(n+1)f(x,y) - nf(x,y) = (n+2)f(x,y).$$

Le résultat est démontré par récurrence. • Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $f(x,y) = f\left(n \times \frac{1}{n}.x,y\right) = nf\left(\frac{1}{n}x,y\right)$ et donc $f\left(\frac{1}{n}x,y\right) = \frac{1}{n}f(x,y)$. • Soit alors $r = \frac{p}{q}$, $p \in \mathbb{N}$, $q \in \mathbb{N}^*$, $f(rx,y) = \frac{1}{q}f(px,y) = p\frac{1}{q}f(x,y) = rf(x,y)$ et donc, pour tout rationnel positif r, $f(rx,y) = rf(x,y)$. Enfin, si $r \leqslant 0$, $f(rx,y)+f(-rx,y) = 2f(0,y) = 0$ (d'après 1)) et donc= $f(-rx,y) = -f(-rx,y) = rf(x,y)$.

$$\forall (x,y) \in E^2,\ \forall r \in \mathbb{Q},\ f(rx,y) = rf(x,y).$$

4. On pose $x = \frac{1}{2}(u+v)$ et $y = \frac{1}{2}(u-v)$.

$$f(u,w)+f(v,w) = f(x+y,w)+f(x-y,w) = 2f(x,w) = 2f\left(\frac{1}{2}(u+v),w\right) = f(u+v,w).$$

5. f est symétrique (définition d'une norme) et linéaire par rapport à sa première variable (d'après 3) et 4)). Donc f est bilinéaire.

6. f est une forme bilinéaire symétrique. Pour $x \in E$, $f(x,x) = \frac{1}{4}(||x+x||^2 + ||x-x||^2) = \frac{1}{4}||2x||^2 = ||x||^2$ (définition d'une norme) ce qui montre tout à la fois que f est définie positive et donc un produit scalaire, et que $||\ ||$ est la norme associée. $||\ ||$ est donc une norme euclidienne.

Correction de l'exercice 3 ▲

La famille (V_1,V_2) est clairement libre et donc une base de F. Son orthonormalisée (e_1,e_2) est une base orthonormée de F. $||V_1|| = \sqrt{1+4+1+1} = \sqrt{7}$ et $e_1 = \frac{1}{\sqrt{7}}V_1 = \frac{1}{\sqrt{7}}(1,2,-1,1)$. $(V_2|e_1) = \frac{1}{\sqrt{7}}(0+6-1-1) = \frac{4}{\sqrt{7}}$ puis $V_2 - (V_2|e_1)e_1 = (0,3,1,-1) - \frac{4}{7}(1,2,-1,1) = \frac{1}{7}(-4,13,11,-11)$ puis $e_2 = \frac{1}{\sqrt{427}}(-4,13,11,-11)$. Une base orthonormée de F est (e_1,e_2) où $e_1 = \frac{1}{\sqrt{7}}(1,2,-1,1)$ et $e_2 = \frac{1}{\sqrt{427}}(-4,13,11,-11)$. Soit $(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4$.

$$(x,y,z,t) \in F^\perp \Leftrightarrow (x,y,z,t) \in (V_1,V_2)^\perp \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x+2y-z+t=0 \\ 3y+z-t=0 \end{array}\right. .$$

Correction de l'exercice 4 ▲

Soit A un éventuel polynôme solution c'est à dire tel que $\forall P \in \mathbb{R}[X]$, $\int_0^1 P(t)A(t)\,dt = P(0)$.
$P=1$ fournit $\int_0^1 A(t)\,dt = 1$ et donc nécessairement $A \neq 0$. $P = XA$ fournit $\int_0^1 tA^2(t)\,dt = P(0) = 0$. Mais alors, $\forall t \in [0,1]$, $tA^2(t) = 0$ (fonction continue positive d'intégrale nulle) puis $A = 0$ (polynôme ayant une infinité de racines deux à deux distinctes). A n'existe pas.

Correction de l'exercice 5 ▲

1. Soit $\mathscr{B}$ une base orthonormée de E et $M = \text{Mat}_{\mathscr{B}}(x_1,...,x_n)$ (M est une matrice de format (p,n)). Puisque $\mathscr{B}$ est orthonormée, le produit scalaire usuel des colonnes C_i et C_j est encore $x_i|x_j$. Donc, $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, ${}^tC_iC_j = x_i|x_j$ ou encore

$$\boxed{G = {}^tMM.}$$

Il s'agit alors de montrer que $\text{rg}(M) = \text{rg}({}^tMM)$. Ceci provient du fait que M et ${}^tMM$ ont même noyau. En effet, pour $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$,

$$X \in \text{Ker}M \Rightarrow MX = 0 \Rightarrow {}^tM \times MX = 0 \Rightarrow ({}^tMM)X = 0 \Rightarrow X \in \text{Ker}({}^tMM)$$

et

$$X \in \text{Ker}({}^tMM) \Rightarrow {}^tMMX = 0 \Rightarrow {}^tX{}^tMMX = 0 \Rightarrow {}^t(MX)MX = 0 \Rightarrow ||MX||^2 = 0 \Rightarrow MX = 0$$
$$\Rightarrow X \in \text{Ker}M.$$

Ainsi, $\text{Ker}(M) = \text{Ker}({}^tMM) = \text{Ker}(G(x_1,\dots,x_n))$. Mais alors, d'après le théorème du rang, $\text{rg}(x_1,\dots,x_n) = \text{rg}(M) = \text{rg}(G(x_1,\dots,x_n))$.

$$\boxed{\text{rg}(G(x_1,\dots,x_n)) = \text{rg}(x_1,\dots,x_n).}$$

2. Si la famille $(x_1,...,x_n)$ est liée, $\text{rg}(G) = \text{rg}(x_1,...,x_n) < n$, et donc, puisque G est une matrice carrée de format n, $\gamma(x_1,...,x_n) = \det(G) = 0$. Si la famille $(x_1,...,x_n)$ est libre, $(x_1,...,x_n)$ engendre un espace F de dimension n. Soient $\mathscr{B}$ une base orthonormée de F et M la matrice de la famille $(x_1,...,x_n)$ dans $\mathscr{B}$. D'après 1), on a $G = {}^tMM$ et d'autre part, M est une matrice carrée. Par suite,

$$\gamma(x_1,...,x_n) = \det({}^tMM) = \det({}^tM)\det(M) = (\det M)^2 > 0.$$

3. On écrit $x = x - p_F(x) + p_F(x)$. La première colonne de $\gamma(x,x_1,...,x_n)$ s'écrit :

$$\begin{pmatrix} ||x||^2 \\ x|x_1 \\ x|x_2 \\ \vdots \\ x|x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ||x-p_F(x)+p_F(x)||^2 \\ x-p_F(x)+p_F(x)|x_1 \\ x-p_F(x)+p_F(x)|x_2 \\ \vdots \\ x-p_F(x)+p_F(x)|x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ||x-p_F(x)||^2 \\ 0|x_1 \\ 0|x_2 \\ \vdots \\ 0|x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ||p_F(x)||^2 \\ p_F(x)|x_1 \\ p_F(x)|x_2 \\ \vdots \\ p_F(x)|x_n \end{pmatrix}.$$

(en 1ère ligne, c'est le théorème de PYTHAGORE et dans les suivantes, $x - p_F(x) \in F^\perp$). Par linéarité par rapport à la première colonne, $\gamma(x,x_1,...,x_n)$ est somme de deux déterminants. Le deuxième est $\gamma(p_F(x),x_1,...,x_n)$ et est nul car la famille $(p_F(x),x_1,...,x_n)$ est liée. On développe le premier suivant sa première colonne et on obtient :

$$\gamma(x,x_1,...,x_n) = ||x-p_F(x)||^2\gamma(x_1,...,x_n),$$

ce qui fournit la formule désirée.

$$\boxed{\forall x \in E,\ d(x,F) = \|x - p_F(x)\| = \sqrt{\frac{\gamma(x,x_1,...,x_n)}{\gamma(x_1,...,x_n)}}.}$$

Correction de l'exercice 6 ▲

Je vous laisse vérifier la linéarité. Si x est colinéaire à a, $f(x) = 0$ et les vecteurs de $\text{Vect}(a) \setminus \{0\}$ sont des vecteurs non nuls colinéaires à leur image. Si x n'est pas colinéaire à a, $a \wedge x$ est un vecteur non nul orthogonal à a et il en est de même de $f(x) = a \wedge (a \wedge x)$. Donc, si x est colinéaire à $f(x)$, x est nécessairement orthogonal à a. Réciproquement, si x est un vecteur non nul orthogonal à a, $f(x) = (a.x)a - \|a\|^2x = -||a||^2x$ et x est colinéaire à $f(x)$. Les vecteurs non nuls colinéaires à leur image sont les vecteurs non nuls de $\text{Vect}(a)$ et de $a^\perp$.

Correction de l'exercice 7 ▲

Un vecteur engendrant D est $\overrightarrow{u} = (2,1,3)$. Pour $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$,

$$p((x,y,z)) = \frac{(x,y,z)|(2,1,3)}{||(2,1,3)||^2}(2,1,3) = \frac{2x+y+3z}{14}(2,1,3).$$

On en déduit que $\text{Mat}_{\mathscr{B}}p = P = \frac{1}{14}\begin{pmatrix} 4 & 2 & 6 \\ 2 & 1 & 3 \\ 6 & 3 & 9 \end{pmatrix}$, puis $\text{Mat}_{\mathscr{B}}s = 2P - I = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} -3 & 2 & 6 \\ 2 & -6 & 3 \\ 6 & 3 & 2 \end{pmatrix}$. Plus généralement, la matrice de la projection orthogonale sur le vecteur unitaire (a,b,c) dans la base canonique orthonormée est $P = \begin{pmatrix} a^2 & ab & ac \\ ab & b^2 & bc \\ ac & bc & c^2 \end{pmatrix}$ et la matrice de la projection orthogonale sur le plan $ax+by+cz = 0$ dans la base canonique orthonormée est $I - P = \begin{pmatrix} 1-a^2 & -ab & -ac \\ -ab & 1-b^2 & -bc \\ -ac & -bc & 1-c^2 \end{pmatrix}$.

Correction de l'exercice 8 ▲

1. $\|C_1\| = \|C_2\| = \frac{1}{3}\sqrt{4+4+1} = 1$ et $C_1|C_2 = \frac{1}{9}(-2+4-2) = 0$. Enfin,

$$C_1 \wedge C_2 = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} -6 \\ -3 \\ -6 \end{pmatrix} = -\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = C_3.$$

Donc, $A \in O_3^+(\mathbb{R})$ et f est une rotation (distincte de l'identité). **Axe de f.** Soit $X \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

$$AX = X \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} -x-y-2z=0 \\ -2x-5y-z=0 \\ -x+2y-5z=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} z=-2x-5y \\ 3x+9y=0 \\ 9x+27y=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=-3y \\ z=y \end{array}\right. .$$

L'axe D de f est Vect$(\overrightarrow{u})$ où $\overrightarrow{u} = (-3,1,1)$. D est dorénavant orienté par $\overrightarrow{u}$. **Angle de f.** Le vecteur $\overrightarrow{v} = \frac{1}{\sqrt{2}}(0,1,-1)$ est un vecteur unitaire orthogonal à l'axe. Donc,

$$\cos\theta = \overrightarrow{v}.f(\overrightarrow{v}) = \frac{1}{\sqrt{2}}(0,1,-1).\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{-1}{3}(-1,1,-4) = -\frac{1}{6}\times 5 = -\frac{5}{6},$$

et donc, $\theta = \pm\arccos(-\frac{5}{6})\ (2\pi)$. (Si on sait que $\text{Tr}(A) = 2\cos\theta+1$, c'est plus court : $2\cos\theta+1 = \frac{2}{3} - \frac{2}{3} - \frac{2}{3}$ fournit $\cos\theta = -\frac{5}{6}$). Le signe de $\sin\theta$ est le signe de $[\overrightarrow{i}, f(\overrightarrow{i}), \overrightarrow{u}] = \begin{vmatrix} 1 & \frac{2}{3} & -3 \\ 0 & -\frac{2}{3} & 1 \\ 0 & -\frac{1}{3} & 1 \end{vmatrix} = -\frac{1}{3} < 0$.

Donc,

$$\boxed{f \text{ est la rotation d'angle } -\arccos(-\tfrac{5}{6}) \text{ autour de } u = (-3,1,1).}$$

2. $||C_1|| = ||C_2|| = \frac{1}{4}\sqrt{9+1+6} = 1$ et $C_1|C_2 = \frac{1}{16}(3+3-6) = 0$. Enfin,

$$C_1 \wedge C_2 = \frac{1}{16}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -\sqrt{6} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ \sqrt{6} \end{pmatrix} = \frac{1}{16}\begin{pmatrix} 4\sqrt{6} \\ -4\sqrt{6} \\ 8 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} \sqrt{6} \\ -\sqrt{6} \\ 2 \end{pmatrix} = C_3.$$

Donc, $A \in O_3^+(\mathbb{R})$ et f est une rotation. **Axe de f.** Soit $X \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

$$AX = X \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} -x+y+\sqrt{6}z=0 \\ x-y-\sqrt{6}z=0 \\ -\sqrt{6}x+\sqrt{6}y-2z=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow x-y=\sqrt{6}z=\frac{2}{\sqrt{6}}z \Leftrightarrow x=y \text{ et } z=0.$$

L'axe D de f est Vect$(\overrightarrow{u})$ où $\overrightarrow{u} = (1,1,0)$. D est dorénavant orienté par $\overrightarrow{u}$. **Angle de f.** $\overrightarrow{k} = [0,0,1)$ est un vecteur unitaire orthogonal à $\overrightarrow{u}$. Par suite,

$$\cos\theta = \overrightarrow{k}.f(\overrightarrow{k}) = (0,0,1).\frac{1}{4}(\sqrt{6},-\sqrt{6},2) = \frac{1}{2},$$

et donc $\cos\theta = \pm\frac{\pi}{3}\ (2\pi)$. Le signe de $\sin\theta$ est le signe de $\left[\overrightarrow{i}, f(\overrightarrow{i}), \overrightarrow{u}\right] = \begin{vmatrix} 1 & 3/4 & 1 \\ 0 & 1/4 & 1 \\ 0 & -\sqrt{6}/4 & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{\sqrt{6}} > 0$. Donc,

$$\boxed{f \text{ est la rotation d'angle } \tfrac{\pi}{3} \text{ autour de } \overrightarrow{u} = (1,1,0).}$$

3. $||C_1|| = ||C_2|| = \frac{1}{9}\sqrt{64+16+1} = 1$ et $C_1|C_2 = \frac{1}{81}(8-16+8) = 0$. Enfin,

$$C_1 \wedge C_2 = \frac{1}{81}\begin{pmatrix} 8 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix} = \frac{1}{81}\begin{pmatrix} -36 \\ -63 \\ 36 \end{pmatrix} = -\frac{1}{9}\begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ -4 \end{pmatrix} = -C_3.$$

Donc, $A \in O_3^-(\mathbb{R})$. A n'est pas symétrique, et donc f n'est pas une réflexion. f est donc la composée commutative $s \circ r$ d'une rotation d'angle θ autour d'un certain vecteur unitaire $\overrightarrow{u}$ et de la réflexion de plan $\overrightarrow{u}^\perp$ où $\overrightarrow{u}$ et θ sont à déterminer. **Axe de r.** L'axe de r est $Ker(f + Id_E)$ (car $f \neq -Id_E$).

$$AX = -X \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 17x + y + 4z = 0 \\ -4x + 13y + 7z = 0 \\ x + 8y + 5z = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} y = -17x - 4z \\ -225x - 45z = 0 \\ -135x - 27z = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} z = -5x \\ y = 3x \end{array}\right.$$

$\text{Ker}(f + Id_E) = \text{Vect}(\overrightarrow{u}) = D$ où $u = (1, 3, -5)$. D est dorénavant orienté par $\overrightarrow{u}$. s est la réflexion par rapport au plan $P = u^\perp$ dont une équation est $x + 3y - 5z = 0$. On écrit alors la matrice S de s dans la base de départ. On calcule $S^{-1}A = SA$ qui est la matrice de r et on termine comme en 1) et 2).

Correction de l'exercice 9 ▲

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ de matrice M dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

$$\begin{aligned} f \text{ est une rotation} &\Leftrightarrow M \in O_3^+(\mathbb{R}) \Leftrightarrow ||C_1|| = ||C_2|| = ||C_3|| = 1 \text{ et } C_1|C_2 = C_1|C_3 = C_2|C_3 = 0 \text{ et } \det M = 1 \\ &\Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 = 1 \text{ et } ab + bc + ca = 0 \text{ et } a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = 1. \end{aligned}$$

Posons $\sigma_1 = a + b + c$, $\sigma_2 = ab + bc + ca$ et $\sigma_3 = abc$. On a $a^2 + b^2 + c^2 = (a + b + c)^2 - 2(ab + ac + bc) = \sigma_1^2 - 2\sigma_2$. Ensuite,

$$\sigma_1^3 = (a + b + c)^3 = a^3 + b^3 + c^3 + 3(a^2b + ba^2 + a^2c + ca^2 + b^2c + c^2b) + 6abc,$$

et

$$\sigma_1(\sigma_1^2 - 2\sigma_2) = (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2) = a^3 + b^3 + c^3 + (a^2b + b^2a + a^2c + c^2a + b^2c + c^2b).$$

Donc,

$$\sigma_1^3 - 3\sigma_1(\sigma_1^2 - 2\sigma_2) = -2(a^3 + b^3 + c^3) + 6\sigma_3$$

et finalement, $a^3 + b^3 + c^3 = \sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2 + 3\sigma_3$.

$$\begin{aligned} M \in O_3^+(\mathbb{R}) &\Leftrightarrow \sigma_2 = 0 \text{ et } \sigma_1^2 - 2\sigma_2 = 1 \text{ et } \sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2 = 1 \\ &\Leftrightarrow \sigma_2 = 0 \text{ et } \sigma_1 = 1 \\ &\Leftrightarrow a,\ b \text{ et } c \text{ sont les solutions réelles d'une équation du type } x^3 - x^2 + k = 0 \text{ (où } k = -\sigma_3\text{)}. \end{aligned}$$

Posons $P(x) = x^3 - x^2 + k$ et donc $P'(x) = 3x^2 - 2x = x(2x - 3)$. Sur $]-\infty, 0]$, P est strictement croissante, strictement décroissante sur $\left[0, \frac{3}{2}\right]$ et strictement croissante sur $\left[\frac{3}{2}, +\infty\right[$. P admet donc au plus une racine dans chacun de ces trois intervalles. **1er cas.** Si $P(0) = k > 0$ et $P\left(\frac{2}{3}\right) = k - \frac{4}{27} < 0$ ou ce qui revient au même, $0 < k < \frac{4}{27}$, P admet trois racines réelles deux à deux distinctes (P étant d'autre part continue sur $\mathbb{R}$), nécessairement toutes simples. **2ème cas.** Si $k \in \left\{0, \frac{4}{27}\right\}$, P et P' ont une racine réelle commune (à savoir 0 ou $\frac{4}{27}$) et P admet une racine réelle d'ordre au moins 2. La troisième racine est alors nécessairement réelle. **3ème cas.** Si $k < 0$ ou $k > \frac{4}{27}$, P admet une racine réelle exactement. Celle-ci est nécessairement simple au vu du 2ème cas et donc P admet deux autres racines non réelles. En résumé, P a toutes ses racines réelles si et seulement si $0 \leqslant k \leqslant \frac{4}{27}$ et donc, f est une rotation si et seulement si a, b et c sont les solutions d'une équation du type $x^3 - x^2 + k = 0$ où $0 \leqslant k \leqslant \frac{4}{27}$.

Correction de l'exercice 10 ▲

$$\begin{aligned} [u \wedge v, v \wedge w, w \wedge u] &= ((u \wedge v) \wedge (v \wedge w))|(w \wedge u) = (((u \wedge v)|w)v - ((u \wedge v)|v)w)|(w \wedge u) \\ &= (((u \wedge v)|w)v)|(w \wedge u) = ((u \wedge v)w) \times (v|(w \wedge u)) = [u, v, w][w, u, v] \\ &= [u, v, w]^2. \end{aligned}$$

Correction de l'exercice 11 ▲

Si la famille $(x_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ est une famille liée, l'inégalité est claire et de plus, on a l'égalité si et seulement si l'un des vecteurs est nuls. Si la famille $(x_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ est une famille libre et donc une base de E, considérons $\mathscr{B}'=(e_1,...,e_n)$ son orthonormalisée de SCHMIDT. On a

$$|\det_{\mathscr{B}}(x_i)_{1\leqslant i\leqslant n}|=\left|\det_{\mathscr{B}'}(x_i)_{1\leqslant i\leqslant n}\times\det_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}')\right|=|\det_{\mathscr{B}'}(x_i)_{1\leqslant i\leqslant n}|,$$

car $\det_{\mathscr{B}}\mathscr{B}'$ est le déterminant d'une d'une base orthonormée dans une autre et vaut donc 1 ou -1. Maintenant, la matrice de la famille $(x_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ dans $\mathscr{B}'$ est triangulaire supérieure et son déterminant est le produit des coefficients diagonaux à savoir les nombres $x_i|e_i$ (puisque $\mathscr{B}'$ est orthonormée). Donc

$$|\det_{\mathscr{B}}(x_i)_{1\leqslant i\leqslant n}|=|\det_{\mathscr{B}'}(x_i)_{1\leqslant i\leqslant n}|=\left|\prod_{i=1}^{n}(x_i|e_i)\right|\leqslant\prod_{i=1}^{n}\|x_i\|\times\|e_i\|=\prod_{i=1}^{n}||x_i||,$$

d'après l'inégalité de CAUCHY-SCHWARZ. De plus, on a l'égalité si et seulement si, pour tout i, $|x_i|e_i|=\|x_i\|\times\|e_i\|$ ou encore si et seulement si, pour tout i, x_i est colinéaire à e_i ou enfin si et seulement si la famille $(x_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ est orthogonale.

Correction de l'exercice 12 ▲

$(u\wedge v)|(w\wedge s)=[u,v,w\wedge s]=[w\wedge s,u,v]=((w\wedge s)\wedge u)|v=((u|w)s-(u|s)w)|v=(u|w)(v|s)-(u|s)(v|w)$. De même, $(u\wedge v)\wedge(w\wedge s)=((u\wedge v)|s)w-((u\wedge v)|w)s=[u,v,s]w-[u,v,w]s$.

Correction de l'exercice 13 ▲

1ère solution.

$$\begin{aligned}\int_0^1(x^4-ax-b)^2\,dx&=\frac{1}{9}+\frac{1}{3}a^2+b^2-\frac{1}{3}a-\frac{2}{5}b+ab=\frac{1}{3}\left(a+\frac{1}{2}(3b-1)\right)^2-\frac{1}{12}(3b-1)^2+b^2-\frac{2}{5}b+\frac{1}{9}\\&=\frac{1}{3}\left(a+\frac{1}{2}(3b-1)\right)^2+\frac{1}{4}b^2+\frac{1}{10}b+\frac{1}{36}=\frac{1}{3}\left(a+\frac{1}{2}(3b-1)\right)^2+\frac{1}{4}\left(b+\frac{1}{5}\right)^2+\frac{4}{225}\geqslant\frac{4}{225},\end{aligned}$$

avec égalité si et seulement si $a+\frac{1}{2}(3b-1)=b+\frac{1}{5}=0$ ou encore $b=-\frac{1}{5}$ et $a=\frac{4}{5}$.

$$\boxed{\int_0^1(x^4-ax-b)^2\,dx\text{ est minimum pour }a=\tfrac{4}{5}\text{ et }b=-\tfrac{1}{5}\text{ et ce minimum vaut }\tfrac{4}{225}.}$$

2ème solution. $(P,Q)\mapsto\int_0^1P(t)Q(t)\,dt$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_4[X]$ et $\int_0^1(x^4-ax-b)^2dx$ est, pour ce produit scalaire, le carré de la distance du polynôme X^4 au polynôme de degré inférieur ou égal à 1, $aX+b$. On doit calculer $\operatorname{Inf}\left\{\int_0^1(x^4-ax-b)^2\,dx,\ (a,b)\in\mathbb{R}^2\right\}$ qui est le carré de la distance de X^4 à $F=\mathbb{R}_1[X]$. On sait que cette borne inférieure est un minimum, atteint une et une seule fois quand $aX+b$ est la projection orthogonale de X^4 sur F. Trouvons une base orthonormale de F. L'orthonormalisée (P_0,P_1) de $(1,X)$ convient. $||1||^2=\int_0^1 1\,dt=1$ et $P_0=1$. Puis $X-(X|P_0)P_0=X-\int_0^1t\,dt=X-\frac{1}{2}$, et comme $||X-(X|P_0)P_0||^2=\int_0^1\left(t-\frac{1}{2}\right)^2\,dt=\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\frac{1}{12}$, $P_1=2\sqrt{3}\left(X-\frac{1}{2}\right)=\sqrt{3}(2X-1)$. La projection orthogonale de X^4 sur F est alors $(X^4|P_0)P_0+(X^4|P_1)P_1$ avec $(X^4|P_0)=\int_0^1t^4\,dt=\frac{1}{5}$ et $(X^4|P_1)=\sqrt{3}\int_0^1t^4(2t-1)\,dt=\sqrt{3}(\frac{1}{3}-\frac{1}{5})=\frac{2\sqrt{3}}{15}$. Donc, la projection orthogonale de X^4 sur F est $\frac{1}{5}+\frac{2\sqrt{3}}{15}\sqrt{3}(2X-1)=\frac{1}{5}(4X-1)$. Le minimum cherché est alors $\int_0^1\left(t^4-\frac{1}{5}(4t-1)\right)^2\,dt=...=\frac{4}{225}$.

Correction de l'exercice 14 ▲

Soit φ : $\begin{array}{rcl} E & \to & \mathbb{R}^n \\ x & \mapsto & (x|e_1,...,x|e_n) \end{array}$. φ est clairement linéaire et Kerφ est $(e_1,...,e_n)^\perp = E^\perp = \{0\}$. Comme E et $\mathbb{R}^n$ ont mêmes dimensions finies, φ est un isomorphisme d'espaces vectoriels. En particulier, pour tout n-uplet $(a_1,...,a_n)$ de réels, il existe un unique vecteur x tel que $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $x|e_i = a_i$.

Correction de l'exercice 15 ▲

1ère solution. Montrons par récurrence que sur $n = \dim(E)$ que, si $(x_i)_{1\leqslant i\leqslant p}$ est obtusangle, $p \leqslant n+1$. • Pour $n = 1$, une famille obtusangle ne peut contenir au moins trois vecteurs car si elle contient les vecteurs x_1 et x_2 verifiant $x_1.x_2 < 0$, un vecteur x_3 quelconque est soit nul (auquel cas $x_3.x_1 = 0$), soit de même sens que x_1 (auquel cas $x_1.x_3 > 0$) soit de même sens que x_2 (auquel cas $x_2.x_3 > 0$). Donc $p \leqslant 2$. • Soit $n \geqslant 1$. Suppososons que toute famille obtusangle d'un espace de dimension n a un cardinal inférieur ou égal à $n+1$. Soit $(x_i)_{1\leqslant i\leqslant p}$ une famille obtusangle d'un espace E de dimension $n+1$. Si $p = 1$, il n'y a plus rien à dire. Supposons $p \geqslant 2$. x_p n'est pas nul et $H = x_p^\perp$ est un hyperplan de E et donc est de dimension n. Soit, pour $1 \leqslant i \leqslant p-1$, $y_i = x_i - \frac{(x_i|x_p)}{||x_p||^2}x_p$ le projeté orthogonal de x_i sur H. Vérifions que la famille $(y_i)_{1\leqslant i\leqslant p-1}$ est une famille obtusangle. Soit $(i,j) \in [\![1,p-1]\!]$ tel que $i \neq j$.

$$y_i.y_j = x_i.x_j - \frac{(x_i|x_p)(x_j|x_p)}{||x_p||^2} - \frac{(x_j|x_p)(x_i|x_p)}{||x_p||^2} + \frac{(x_i|x_p)(x_j|x_p)(x_p|x_p)}{||x_p||^4} = x_i|x_j - \frac{(x_i|x_p)(x_j|x_p)}{||x_p||^2} < 0.$$

Mais alors, par hypothèse de récurrence, $p-1 \leqslant 1+\dim H = n+1$ et donc $p \leqslant n+2$. Le résultat est démontré par récurrence. **2ème solution.** Montrons que si la famille $(x_i)_{1\leqslant i\leqslant p}$ est obtusangle, la famille $(x_i)_{1\leqslant i\leqslant p-1}$ est libre. Supposons par l'absurde, qu'il existe une famille de scalaires $(\lambda_i)_{1\leqslant i\leqslant p-1}$ non tous nuls tels que $\sum_{i=1}^{p-1}\lambda_i x_i = 0$ $(*)$. Quite à multiplier les deux membres de $(*)$ par -1, on peut supposer qu'il existe au moins un réel $\lambda_i > 0$. Soit I l'ensemble des indices i tels que $\lambda_i > 0$ et J l'ensemble des indices i tels que $\lambda_i \leqslant 0$ (éventuellement J est vide). I et J sont disjoints. (*) s'écrit $\sum_{i\in I}\lambda_i x_i = -\sum_{i\in J}\lambda_i x_i$ (si J est vide, le second membre est nul). On a

$$0 \leqslant \left\|\sum_{i\in I}\lambda_i x_i\right\|^2 = \left(\sum_{i\in I}\lambda_i x_i\right).\left(-\sum_{i\in J}\lambda_i x_i\right) = \sum_{(i,j)\in I\times J}\lambda_i(-\lambda_j)x_i.x_j \leqslant 0.$$

Donc, $||\sum_{i\in I}\lambda_i x_i||^2 = 0$ puis $\sum_{i\in I}\lambda_i x_i = 0$. Mais, en faisant le produit scalaire avec x_p, on obtient $(\sum_{i\in I}\lambda_i x_i).x_p = \sum_{i\in I}\lambda_i(x_i.x_p) < 0$ ce qui est une contradiction. La famille $(x_i)_{1\leqslant i\leqslant p-1}$ est donc libre. Mais alors son cardinal $p-1$ est inférieur ou égal à la dimension n et donc $p \leqslant n+1$.

Correction de l'exercice 16 ▲

L'application $(P,Q) \mapsto \int_0^1 P(t)Q(t)\,dt$ est un produit scalaire sur $E = \mathbb{R}_3[X]$. Déterminons une base orthonormée de E. Pour cela, déterminons (Q_0,Q_1,Q_2,Q_3) l'orthonormalisée de la base canonique $(P_0,P_1,P_2,P_3) = (1,X,X^2,X^3)$. • $||P_0||^2 = \int_{-1}^1 1^2\,dt = 2$ et on prend $\boxed{Q_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}.}$ • $P_1|Q_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}\int_{-1}^1 t\,dt = 0$ puis $P_1 - (P_1|Q_0)Q_0 = X$ puis $||P_1 - (P_1|Q_0)Q_0||^2 = \int_{-1}^1 t^2\,dt = \frac{2}{3}$ et $\boxed{Q_1 = \sqrt{\frac{3}{2}}X.}$ • $P_2|Q_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}\int_{-1}^1 t^2\,dt = \frac{\sqrt{2}}{3}$ et $P_2|Q_1 = 0$. Donc, $P_2 - (P_2|Q_0)Q_0 - (P_2|Q_1)Q_1 = X^2 - \frac{1}{3}$, puis $||P_2 - (P_2|Q_0)Q_0 - (P_2|Q_1)Q_1||^2 = \int_{-1}^1 \left(t^2 - \frac{1}{3}\right)^2\,dt = 2\left(\frac{1}{5} - \frac{2}{9} + \frac{1}{9}\right) = \frac{8}{45}$ et $\boxed{Q_2 = \frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}(3X^2-1).}$ • $P_3|Q_0 = P_3|Q_2 = 0$ et $P_3|Q_1 = \sqrt{\frac{3}{2}}\int_{-1}^1 t^4\,dt = \frac{\sqrt{6}}{5}$ et $P_3 - (P_3|Q_0)Q_0 - (P_3|Q_1)Q_1 - (P_3|Q_2)Q_2 = X^3 - \frac{3}{5}X$, puis $\left\|X^3 - \frac{3}{5}X\right\|^2 = \int_{-1}^1 \left(t^3 - \frac{3}{5}t\right)^2\,dt = 2\left(\frac{1}{7} - \frac{6}{25} + \frac{3}{25}\right) = 2\frac{25-21}{175} = \frac{8}{175}$, et $\boxed{Q_3 = \frac{\sqrt{7}}{2\sqrt{2}}(5X^3-3X).}$
Une base orthonormée de E est (Q_0,Q_1,Q_2,Q_3) où $Q_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $Q_1 = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}X$, $Q_2 = \frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}(3X^2-1)$ et $Q_3 = \frac{\sqrt{7}}{2\sqrt{2}}(5X^3 - 3X)$. Soit alors P un élément quelconque de $E = \mathbb{R}_3[X]$ tel que $\int_{-1}^1 P^2(t)\,dt = 1$. Posons $P = aQ_0 + bQ_1 + cQ_2 + dQ_3$. Puisque (Q_0,Q_1,Q_2,Q_3) est une base orthonormée de E, $\int_{-1}^1 P^2(t)\,dt = ||P||^2 = a^2+b^2+c^2+d^2 = 1$. Maintenant, pour $x \in [-1,1]$, en posant $M_i = \mathrm{Max}\{|Q_i(x)|,\ x \in [-1,1]\}$, on a :

$$\begin{aligned}|P(x)| &\leqslant |a|\times|Q_0(x)|+|b|\times|Q_1(x)|+|c|\times|Q_2(x)|+|d|\times|Q_3(x)| \leqslant |a|M_0+|b|M_1+|c|M_2+|d|M_3\\ &\leqslant \sqrt{a^2+b^2+c^2+d^2}\sqrt{M_0^2+M_1^2+M_2^2+M_3^2}=\sqrt{M_0^2+M_1^2+M_2^2+M_3^2}.\end{aligned}$$

Une étude brève montre alors que chaque $|P_i|$ atteint son maximum sur $[-1,1]$ en 1 (et -1) et donc

$$\sqrt{M_0^2+M_1^2+M_2^2+M_3^2}=\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{3}{2}+\frac{5}{2}+\frac{7}{2}}=2\sqrt{2}.$$

Ainsi, $\forall x\in[-1,1]$, $|P(x)|\leqslant 2\sqrt{2}$ et donc $\text{Max}\{|P(x)|,\ x\in[-1,1]\}\leqslant 2\sqrt{2}$. Etudions les cas d'égalité. Soit $P\in\mathbb{R}_3[X]$ un polynôme éventuel tel que $\text{Max}\{|P(x)|,\ x\in[-1,1]\}\leqslant 2\sqrt{2}$. Soit $x_0\in[-1,1]$ tel que $\text{Max}\{|P(x)|,\ x\in[-1,1]\}=|P(x_0)|$. Alors :

$$\begin{aligned}2\sqrt{2}=|P(x_0)| &\leqslant |a|\times|Q_0(x_0)|+|b|\times|Q_1(x_0)|+|c|\times|Q_2(x_0)|+|d|\times|Q_3(x_0)| \leqslant |a|M_0+|b|M_1+|c|M_2+|d|M_3\\ &\leqslant \sqrt{M_0^2+M_1^2+M_2^2+M_3^2}=2\sqrt{2}.\end{aligned}$$

Chacune de ces inégalités est donc une égalité. La dernière (CAUCHY-SCHWARZ) est une égalité si et seulement si $(|a|,|b|,|c|,|d|)$ est colinéaire à $(1,\sqrt{3},\sqrt{5},\sqrt{7})$ ou encore si et seulement si P est de la forme $\lambda(\pm Q_0\pm\sqrt{3}Q_1\pm\sqrt{5}Q_2\pm\sqrt{7}Q_3)$ où $\lambda^2(1+3+5+7)=1$ et donc $\lambda=\pm\frac{1}{4}$, ce qui ne laisse plus que 16 polynômes possibles. L'avant-dernière inégalité est une égalité si et seulement si $x_0\in\{-1,1\}$ (clair). La première inégalité est une égalité si et seulement si

$$|aQ_0(1)+bQ_1(1)+cQ_2(1)+dQ_3(1)|=|a|Q_0(1)+|b|Q_1(1)+|c|Q_2(1)+|d|Q_3(1),$$

ce qui équivaut au fait que a, b, c et d aient même signe et P est l'un des deux polynômes

$$\begin{aligned}\pm\frac{1}{4}(Q_0+\sqrt{3}Q_1+\sqrt{5}Q_2+\sqrt{7}Q_3) &= \pm\frac{1}{4\sqrt{2}}\left(1+3X+\frac{5}{2}(3X^2-1)+\frac{7}{2}(5X^3-3X)\right)\\ &=\pm\frac{1}{8\sqrt{2}}(35X^3+15X2-15X-3)\end{aligned}$$

Correction de l'exercice 17 ▲

Si x est colinéaire à k, $r(x)=x$, et si $x\in k^\perp$, $r(x)=(\cos\theta)x+(\sin\theta)k\wedge x$. Soit $x\in E$. On écrit $x=x_1+x_2$ où $x_1\in k^\perp$ et $x_2\in\text{Vect}(k)$. On a $x_2=(x.k)k$ (car k est unitaire) et $x_1=x-(x.k)k$. Par suite,

$$\begin{aligned}r(x)=r(x_1)+r(x_2) &= (\cos\theta)x_1+(\sin\theta)k\wedge x_1+x_2=(\cos\theta)(x-(x.k)k)+(\sin\theta)k\wedge x+(x.k)k\\ &=(\cos\theta)x+(1-\cos\theta)(x.k)k+sin\theta(k\wedge x)=(\cos\theta)x+2\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)(x.k)k+sin\theta(k\wedge x)\end{aligned}$$

Application. Si $k=\frac{1}{\sqrt{2}}(e_1+e_2)$ et $\theta=\frac{\pi}{3}$, pour tout vecteur x, on a :

$$r(x)=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}(x.k)k+\frac{\sqrt{3}}{2}(k\wedge x),$$

puis, $r(e_1)=\frac{1}{2}e_1+\frac{1}{4}(e_1+e_2)-\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}e_3=\frac{1}{4}(3e_1+e_2-\sqrt{6}e_3)$
$r(e_2)=\frac{1}{2}e_2+\frac{1}{4}(e_1+e_2)+\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}e_3=\frac{1}{4}(e_1+3e_2+\sqrt{6}e_3)$
$r(e_3)=\frac{1}{2}e_3+\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}(-e_2+e_1)=\frac{1}{4}(\sqrt{6}e_1-\sqrt{6}e_2+2e_3)$.

$$\boxed{\text{La matrice cherchée est } \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & 1 & \sqrt{6} \\ 1 & 3 & -\sqrt{6} \\ -\sqrt{6} & \sqrt{6} & 2 \end{pmatrix}.}$$

Correction de l'exercice 18 ▲

L'application $(f,g) \mapsto \int_0^1 f(t)g(t)\,dt$ est un produit scalaire sur $C^0([0,1],\mathbb{R})$. D'après l'inégalité de CAUCHY-SCHWARZ,

$$\begin{aligned} I_n I_{n+2} &= \int_0^1 f^n(t)\,dt \int_0^1 f^{n+2}(t)\,dt = \int_0^1 \left(\sqrt{(f(t))^n}\right)^2 dt \int_0^1 \left(\sqrt{(f(t))^{n+2}}\right)^2 dt \\ &\geqslant \left(\int_0^1 \sqrt{(f(t))^n}\sqrt{(f(t))^{n+2}}\,dt\right)^2 = \left(\int_0^1 f^{n+1}(t)\,dt\right)^2 = I_{n+1}^2 \end{aligned}$$

Maintenant, comme f est continue et strictement positive sur $[0,1]$, I_n est strictement positif pour tout naturel n. On en déduit que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\frac{I_{n+1}}{I_n} \leqslant \frac{I_{n+2}}{I_{n+1}}$ et donc que

$$\boxed{\text{la suite } \left(\frac{I_{n+1}}{I_n}\right)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est définie et croissante.}}$$

Correction de l'exercice 19 ▲

1. La symétrie, la bilinéarité et la positivité sont claires. Soit alors $P \in \mathbb{R}_n[X]$.

$$\begin{aligned} P|P = 0 &\Rightarrow \int_0^1 P^2(t)\,dt = 0 \\ &\Rightarrow \forall t \in [0,1],\ P^2(t) = 0 \text{ (fonction continue, positive, d'intégrale nulle)} \\ &\Rightarrow P = 0 \text{ (polynôme ayant une infinité de racines).} \end{aligned}$$

   Ainsi, l'application $(P,Q) \mapsto \int_0^1 P(t)Q(t)\,dt$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$.

2. Pour vérifier que la famille $\left(\frac{L_p}{||L_p||}\right)_{0\leqslant p\leqslant n}$ est l'orthonormalisée de SCHMIDT de la base canonique de E, nous allons vérifier que

   (a) $\forall p \in [\![0,n]\!]$, $\text{Vect}(L_0, L_1, ..., L_p) = \text{Vect}(1, X, ..., X^p)$,

   (b) la famille $\left(\frac{L_p}{||L_p||}\right)_{0\leqslant p\leqslant n}$ est orthonormale,

   (c) $\forall p \in [\![0,n]\!]$, $L_p|X^p > 0$.

   Pour a), on note que L_p est un polynôme de degré p (et de coefficient dominant $\frac{(2p)!}{p!}$). Par suite, $(L_0, L_1, ..., L_p)$ est une base de $\mathbb{R}_p[X]$, ou encore, $\forall p \in [\![0,n]\!]$, $\text{Vect}(L_0, L_1, ..., L_p) = \text{Vect}(1, X, ..., X^p)$. Soit $p \in [\![0,n]\!]$. Soit P un polynôme de degré inférieur ou égal à p. Si $p \geqslant 1$, une intégration par parties fournit :

$$\begin{aligned} L_p|P &= \int_{-1}^1 ((t^2-1)^p)^{(p)} P(t)\,dt = \left[((t^2-1)^p)^{(p-1)}P(t)\right]_{-1}^1 - \int_{-1}^1 ((t^2-1)^p)^{(p-1)} P'(t)\,dt \\ &= -\int_{-1}^1 ((t^2-1)^p)^{(p-1)} P'(t)\,dt. \end{aligned}$$

En effet, 1 et -1 sont racines d'ordre p de $(t^2-1)^p$ et donc d'ordre $p-k$ de $((t^2-1)^p)^{(k)}$ pour $0 \leqslant k \leqslant p$ et en particulier, racines de chaque $((t^2-1)^p)^{(k)}$ pour $0 \leqslant k \leqslant p-1$. En réitérant, on obtient pour tout $k \in [\![0,p]\!]$, $L_p|P = (-1)^k \int_{-1}^{1}((t^2-1)^p)^{(p-k)}P^{(k)}(t)\,dt$ et pour $k=p$, on obtient enfin $L_p|P = (-1)^p \int_{-1}^{1}(t^2-1)^p P^{(p)}(t)\,dt$, cette formule restant vraie pour $p=0$. Soient p et q deux entiers tels que $0 \leqslant q < p \leqslant n$. D'après ce qui précède, $L_p|L_q = (-1)^p \int_{-1}^{1}(t^2-1)^p L_q^{(p)}(t)\,dt = 0$ car $q = \deg(L_q) < q$. Ainsi, la famille $(L_p)_{0\leqslant p\leqslant n}$ est donc une famille orthogonale de $n+1$ polynômes tous non nuls et est par suite est une base orthogonale de $\mathbb{R}_n[X]$. On en déduit que la famille $\left(\frac{L_p}{||L_p||}\right)_{0\leqslant p\leqslant n}$ est une base orthonormale de $\mathbb{R}_n[X]$. Enfin, $L_p|X^p = (-1)^p \int_{-1}^{1}(t^2-1)^p(t^p)^{(p)}\,dt = p!\int_{-1}^{1}(1-t^2)^p\,dt > 0$. On a montré que

$$\boxed{\text{la famille } \left(\frac{L_p}{||L_p||}\right)_{0\leqslant p\leqslant n} \text{ est l'orthonormalisée de la base canonique de } \mathbb{R}_n[X].}$$

Calculons $\|L_p\|$. On note que $L_p \in (L_0,...,L_{p-1})^{\perp} = (\mathbb{R}_{p-1}[X])^{\perp}$. Par suite,

$$\begin{aligned}
||L_p||^2 &= L_p|L_p = L_p|\mathrm{dom}(L_p)X^p \ (\text{car } L_p \in (\mathbb{R}_{p-1}[X])^{\perp})\\
&= \frac{(2p)!}{p!}L_p|X^p = \frac{(2p)!}{p!}p!\int_{-1}^{1}(1-t^2)^p\,dt = 2(2p)!\int_0^1(1-t^2)^p\,dt\\
&= 2(2p)!\int_{\pi/2}^{0}(1-\cos^2 u)^p(-\sin u)\,du = 2(2p)!\int_0^{\pi/2}\sin^{2p+1}u\,du\\
&= 2(2p)!W_{2p+1} \ (\text{intégrales de } \textsc{Wallis})\\
&= 2(2p)!\frac{2^{2p}(p!)^2}{(2p+1)!} \ (\text{à revoir})\\
&= \frac{2}{2p+1}2^{2p}(p!)^2.
\end{aligned}$$

Donc, $\forall p \in [\![0,n]\!]$, $\|L_p\| = \sqrt{\frac{2}{2p+1}}2^p p!$. On en déduit que la famille $\left(\sqrt{\frac{2p+1}{2}}\frac{1}{2^p p!}((X^2-1)^p)^{(p)}\right)_{0\leqslant p\leqslant n}$ est une base orthonormale de $\mathbb{R}_n[X]$ (pour le produit scalaire considéré).