TD 1 : Raisonnement et vocabulaire ensembliste

Rédaction, types de raisonnements et vocabulaire ensembliste :

La syntaxe mathématique

Exercice 1. (*)

Vrai ou faux ? Justifier.

1. $\forall (x,y) \in (\mathbb{R}^*)^2,\ x < y \Rightarrow \dfrac{1}{x} > \dfrac{1}{y}$.
2. $\forall x \in [0,1],\ x - x^2 \in \mathbb{N} \Rightarrow x \in \{0,1\}$.
3. $\forall x, y \in \mathbb{R},\ x < y \Rightarrow \sin(x) < \sin(y)$.
4. $\nexists\, x \in \mathbb{R}^+,\ x < \sqrt{x}$.
5. $\forall x \in \mathbb{R},\ x^2 + x > 0 \Rightarrow x > 0$.
6. $\forall N \in \mathbb{N}^*,\ \exists n \in \mathbb{N}^*,\ \sum\limits_{k=0}^{n} k \geq N$.

Exercice 2. (**)

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction. Écrire avec des quantificateurs les propositions suivantes :

1. f est périodique.
2. f est majorée.
3. f est constante.
4. f atteint tous les réels.
5. f est croissante sur $\mathbb{R}$.
6. f prend des valeurs aussi grandes que l'on veut.
7. f s'annule au plus une fois
8. f admet un point fixe.

Exercice 3. (*)

Donner la négation des assertions suivantes après avoir justifié si elles sont vraies ou fausses.

1. $\exists x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in \mathbb{R} \quad x + y > 0$.
2. $\forall x \in \mathbb{R} \quad \exists y \in \mathbb{R} \quad x + y > 0$.
3. $\forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in \mathbb{R} \quad x + y > 0$.
4. $\exists x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in \mathbb{R} \quad y^2 > x$.

Exercice 4. (**)

Montrer que

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \text{ tel que } \left(n \geq N \Rightarrow 2 - \epsilon < \frac{2n+1}{n+2} < 2 + \epsilon\right).$$

Exercice 5. (*)

Écrire en langage mathématique l'ensemble :

1. des entiers naturels divisibles par 7.
2. des réels qui sont la somme de deux carrés d'entiers.
3. des entiers relatifs qui possèdent un antécédent par la fonction $x \longmapsto e^x + x$.

Relations ensemblistes

Exercice 6. (**)

Soient E et F deux ensembles, $f : E \to F$.
Démontrer que :

$\forall A, B \in \mathcal{P}(E) \quad (A \subset B) \Rightarrow (f(A) \subset f(B))$,
$\forall A, B \in \mathcal{P}(E) \quad f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$,
$\forall A, B \in \mathcal{P}(E) \quad f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$,
$\forall A, B \in \mathcal{P}(F) \quad f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$,
$\forall A \in \mathcal{P}(F) \quad f(f^{-1}(A)) \subset A$,
$\forall A \in \mathcal{P}(E) \quad A \subset f^{-1}(f(A))$,
$\forall A \in \mathcal{P}(F) \quad f^{-1}(F \backslash A) = E \backslash f^{-1}(A)$.

Exercice 7. (**)

Soit E un ensemble, A, B et C des parties de E telles que $A \cup B = A \cup C$ et $A \cap B = A \cap C$.
Montrer que $B = C$.

Exercice 8. (**)

Étudier les inclusions $A \subset B$ et $B \subset A$ pour :

$A = \left\{ \dfrac{\epsilon}{k(k+1)} \mid k \in \mathbb{N}^*,\ \epsilon \in \{\pm 1\} \right\}$

$B = \left\{ \dfrac{1}{p} - \dfrac{1}{q} \mid p, q \in \mathbb{N}^* \right\}$

Exercice 9. (**)

Soient E un ensemble et $A, B, C \in \mathscr{P}(E)$. Montrer que

1. $\overline{A \cap B} \setminus C = \left(\overline{C} \setminus B \right) \cup \left(\overline{A} \setminus C \right)$.
2. $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$.
3. $A \cup B = B \cap C \ \Leftrightarrow A \subset B \subset C$.

Raisonnement par récurrence

Exercice 10. (*)

1. Montrer que : pour n dans $\mathbb{N}^*$, la somme des n premiers entiers est donnée par la formule :
$$1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$
2. Montrer que : pour n dans $\mathbb{N}^*$, la somme des n premiers entiers au carré est donnée par la formule :
$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$
3. Montrons par récurrence :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} \leq 2 - \frac{1}{n}$$

Exercice 11. (***)

Soit A une partie de $\mathbb{N}^*$ possédant les trois propriétés suivantes :

- $1 \in A$.
- $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ n \in A \Rightarrow 2n \in A$.
- $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ (n+1) \in A \Rightarrow n \in A$.

Démontrer que $A = \mathbb{N}^*$.

Exercice 12. (*)

1. On note $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par : $u_0 = 0$, $u_1 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n$.
Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n = 3^n - 2^n$.
2. On note $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par :
$u_0 = 0$, $u_1 = 0$, $u_2 = 2$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$
$u_{n+3} = 3u_{n+2} - 3u_{n+1} + u_n$.
Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n = n(n-1)$.

Exercice 13. (*)

On note $(u_n)n \in \mathbb{N}$ la suite définie par $u_0 = 3$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} = u_n^2 - u_n$.
Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n \geq 3 \times 2^n$.

Exercice 14. (**)

Soit la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $x_0 = 4$ et $x_{n+1} = \dfrac{2x_n^2 - 3}{x_n + 2}$.

1. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad x_n > 3$.
2. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad x_{n+1} - 3 > \frac{3}{2}(x_n - 3)$.
3. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad x_n \geqslant \left(\frac{3}{2}\right)^n + 3$.
4. La suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est-elle convergente ?

Exercice 15. (**)

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ la suite définie par $u_1 = 3$ et pour tout $n \geq 1$, $\quad u_{n+1} = \frac{2}{n} \sum_{k=1}^{n} u_k$.
Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $u_n = 3n$.

Exercice 16. (**)

Démontrer que tout entier $n \geq 1$ peut s'écrire comme somme de puissances de 2 toutes distinctes.

Exercice 17. (**)

Soit X un ensemble. Pour $f \in \mathcal{F}(X, X)$, on définit $f^0 = id$ et par récurrence pour $n \in \mathbb{N}$ $f^{n+1} = f^n \circ f$.

1. Montrer que $\left(\forall n \in \mathbb{N}, \quad f^{n+1} = f \circ f^n \right)$.
2. Montrer que si f est bijective alors $\left(\forall n \in \mathbb{N}, \quad (f^{-1})^n = (f^n)^{-1} \right)$.

Raisonnement par l'absurde

Exercice 18. (*)

Montrer que $\dfrac{\ln(7)}{\ln(2)}$ est un irrationnel.

Exercice 19. (*)

Démontrer que si vous rangez $(n+1)$ paires de chaussettes dans n tiroirs distincts, alors il y a au moins un tiroir contenant au moins 2 paires de chaussettes.

Exercice 20. (*)

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'applications de l'ensemble $\mathbb{N}$ dans lui-même. On définit une application f de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ en posant $f(n) = f_n(n) + 1$.
Démontrer qu'il n'existe aucun $p \in \mathbb{N}$ tel que $f = f_p$.

Exercice 21. (**)

Démontrer que l'équation $9x^5 - 12x^4 + 6x - 5 = 0$ n'admet pas de solution entière.

Exercice 22. (**)

1. Montrer qu'il existe une infinité de nombres premiers.
2. Montrer qu'il existe une infinité de nombres premiers de la forme $4k+3$.
3. Montrer qu'il existe une infinité de nombres premiers de la forme $6k+5$.

Exercice 23. (***)

1. Exprimer $\cos((n+1)^\circ)$ en fonction de $\cos(n^\circ)$, $\cos(1^\circ)$ et $\cos((n-1)^\circ)$.
2. Démontrer que $\cos(1^\circ)$ est irrationnel.

---

injectivité, surjectivité et bijectivité

Exercice 24. (*)

Soit $f : [1, +\infty[\to [0, +\infty[$ telle que $f(x) = x^2 - 1$.
f est-elle bijective ?

Exercice 25. (**)

Les applications suivantes sont-elles injectives, surjectives, bijectives ?

1. $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}, n \mapsto n+1$
2. $g : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}, n \mapsto n+1$
3. $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, (x,y) \mapsto (x+y, x-y)$
4. $k : \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R}, x \mapsto \frac{x+1}{x-1}$

Exercice 26. (***)

Soit E un ensemble et $f : E \to E$. Montrer que f est injective si, et seulement si, pour toutes parties A et B de E, $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$.

Exercice 27. (**)

Montrer que

$$f : \mathbb{N}^2 \longrightarrow \mathbb{N}^*, (m,n) \longmapsto 2^m(2n+1)$$

est bijective

Exercice 28. (***)

Soit $f : E \longrightarrow F$, $g : E \longrightarrow G$. On définit

$$\forall x \in E,\ h(x) = (f(x), g(x))$$

1. Montrer que si f ou g est injective, alors h est injective
2. On suppose f et g surjective. h est-elle surjective ?

Raisonnement par contraposée

Exercice 29. (*)

Montrer que : si n^2 est impair, alors n est impair.

Exercice 30. (**)

Soit $a \in \mathbb{R}$. Montrer que

$$\forall \epsilon > 0,\ |a| \leq \epsilon \ \Rightarrow\ a = 0.$$

Exercice 31. (*)

Écrire les contraposées des implications suivantes. Sont-elles vraies ou fausses ?

1. Pour tous réels x et y, si $xy = 0$ alors ($x = 0$ ou $y = 0$).
2. Si ABC est un triangle rectangle en A, alors $BC^2 = AB^2 + AC^2$.
3. $\forall n \in \mathbb{N}$ n pair $\Rightarrow n$ non premier.

Exercice 32. (**)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que :
Si l'entier $(n^2 - 1)$ n'est pas divisible par 8, alors l'entier n est pair.

Raisonnement par analyse-synthèse

Exercice 33. (**)

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une application vérifiant :

$$\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \ \frac{f(x) - f(y)}{x - y} = \frac{f(x) - f(z)}{x - z}.$$

Montrer qu'il existe un unique couple $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$.

Exercice 34. (**)

Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Montrer qu'existe un unique couple (p, i) de fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant les conditions suivantes :

— p est paire, i est impaire.

— $f = p + i$.

Exercice 35. (**)

Trouver les fonctions f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ dérivables de dérivée continue telles que :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \ f(x + y) = f(x) + f(y).$$

Exercice 36. (*)

Déterminer l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ pour lesquelles :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \ , \ f(y - f(x)) = 2 - x - y.$$

Exercice 37. (***)

On cherche toutes les isométries de $\mathbb{R}$, i.e. toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ pour lesquelles :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ |f(x) - f(y)| = |x - y|$$

Indication : Soit f une isométrie.
On note δ la fonction $x \longmapsto f(x) - f(0)$ sur $\mathbb{R}$.
Montrer, en étudiant la quantité $(f(x) - f(y))^2$, que pour tous $x, y \in \mathbb{R}$, $\delta(x)\delta(y) = xy$.

Exercice 38. (**)

On note $\mathscr{A}$ l'ensemble des fonctions affines et $\mathscr{B}$ l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dérivables pour lesquelles $f(0) = f'(0) = 0$. Montrer par analyse-synthèse que toute fonction dérivable de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est la somme, d'une et une seule manière, d'une fonction de $\mathscr{A}$ et d'une fonction de $\mathscr{B}$.

Exercice 39. (***)

Soit une fonctions f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ continue telle que :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \ f(x + y) = f(x) + f(y).$$

1. Calculer $f(0)$ et montrer que f est impaire.
2. Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$, calculer $f(nx)$ en fonction de n et $f(x)$.
3. Soit $a = f(1)$. Montrer que
$$\forall x \in \mathbb{Q}, \ f(x) = ax.$$
4. Expliquer pourquoi tout nombre réel est limite d'une suite de nombres rationnels.
5. Conclure.

Compléments sur les nombres réels

Exercice 40. (*)

Le maximum de deux nombres x, y (c'est-à-dire le plus grand des deux) est noté $\max(x, y)$. De même on notera $\min(x, y)$ le plus petit des deux nombres x, y. Démontrer que :

$$\max(x, y) = \frac{x + y + |x - y|}{2}$$

et

$$\min(x, y) = \frac{x + y - |x - y|}{2}.$$

Trouver une formule pour $\max(x, y, z)$.

Exercice 41. (*)

Déterminer la borne supérieure et inférieure (si elles existent) de : $A = \{u_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ en posant $u_n = 2^n$ si n est pair et $u_n = 2^{-n}$ sinon.

Exercice 42. (**)

1. Démontrer que si $r \in \mathbb{Q}$ et $x \notin \mathbb{Q}$ alors $r + x \notin \mathbb{Q}$ et si $r \neq 0$ alors $r \times x \notin \mathbb{Q}$.
2. Montrer que $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$,
3. En déduire : entre deux nombres rationnels distincts il y a toujours un nombre irrationnel.
4. En déduire que l'ensemble des nombres irrationnels est dense dans l'ensemble des nombres réels.

Exercice 43. (**)

Soit A et B deux parties bornées de $\mathbb{R}$ non vide. **Vrai** ou **faux** ?

1. $A \subset B \Rightarrow \sup A \leqslant \sup B$,
2. $A \subset B \Rightarrow \inf A \leqslant \inf B$,
3. $\sup(A \cup B) = \max(\sup A, \sup B)$,
4. $\sup(A + B) < \sup A + \sup B$,
5. $\sup(-A) = -\inf A$,
6. $\sup A + \inf B \leqslant \sup(A + B)$.

Exercice 44. (**)

Soit x un réel.

1. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ la suite définie par
$$u_n = \frac{E(x) + E(2x) + \ldots + E(nx)}{n^2}.$$
Donner un encadrement simple de $n^2 \times u_n$.
2. En déduire que (u_n) converge et calculer sa limite.
3. En déduire que $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.
