TD 9 : Matrices et applications

Opérations sur les matrices :

Exercice 1. (*)

On considère les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix};$$

$$C = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix};$$

$$D = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}; \qquad E = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Calculer *(lorsque cela est bien défini)* les produits de matrices suivants : AB, BA, AC, CA, AD, AE, BC, BD, BE, CD, DE.

Exercice 2. (*)

Soient les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & 4 \end{pmatrix}; \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 7 & -1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 4 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Calculer : $(A-2B)C$, C^TA, C^TB, $C^T(A^T-2B^T)$, où C^T désigne la matrice transposée de C.

Exercice 3. (*)

Pour x réel, on pose :

$$A(x) = \begin{pmatrix} \mathrm{ch}x & \mathrm{sh}x \\ \mathrm{sh}x & \mathrm{ch}x \end{pmatrix}.$$

Déterminer $(A(x))^n$ pour x réel et n entier relatif. La matrice $(A(x))$ est-elle toujours inversible ?

Exercice 4. (*)

On pose $u_0 = 1$, $v_0 = 0$, puis, pour $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 2u_n + v_n$ et $v_{n+1} = u_n + 2v_n$.

1. Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Pour $n \in \mathbb{N}$, calculer A^n. En déduire u_n et v_n en fonction de n.
2. En utilisant deux combinaisons linéaires intéressantes des suites u et v, calculer directement u_n et v_n en fonction de n.

Exercice 5. (*)

Soit $A,\ B \in M_2(\mathbb{R})$ les matrices définies par

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Comparer les deux matrices $(A+B)^2$ et $A^2+2AB+B^2$. Puis comparer les deux matrices $(A+B)^2$ et $A^2+AB+BA+B^2$.

Exercice 6. (**)

Déterminer deux éléments A et B de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ tels que : $AB = 0$ et $BA \neq 0$.

Exercice 7. (**)

Soit $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ deux matrices telles que la somme des coefficients sur chaque ligne de A et sur chaque ligne de B vaut 1 (on dit qu'une telle matrice est une matrice stochastique). Montrer que la somme des coefficients sur chaque ligne de AB vaut 1.

Exercice 8. (**)

Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } B = A - I.$$

Calculer B^n pour tout $n \in \mathbb{N}$. En déduire A^n.

Exercice 9. (**)

Soient $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques ($A = {}^tA$) et $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices anti-symétriques ($A = -{}^tA$).Montrer que pour toute matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ il existe un unique couple $(S, A) \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ tel que $M = S + A$.

Exercice 10. (*)

On dit qu'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est nilpotente s'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $A^p = 0$. Démontrer que si $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ sont deux matrices nilpotentes telles que $AB = BA$, alors AB et $A + B$ sont nilpotentes.

Exercice 11. (**)

1. Pour $n \geq 2$, déterminer le reste de la division euclidienne de X^n par $X^2 - 3X + 2$.
2. Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$. Déduire de la question précédente la valeur de A^n, pour $n \geq 2$.

Ensemble des matrices carrées :

Exercice 12. (*)

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$. Calculer $A^3 - A$. En déduire que A est inversible puis déterminer A^{-1}.

Exercice 13. (**) (Théorème de Hadamard)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ à diagonale strictement dominante, telle que : $\forall i \in \{1, ..., n\}$, $|a_{i,i}| > \sum_{j \neq i} |a_{i,j}|$.
Montrer que A est inversible.

Exercice 14. (**)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $Tr(A^TA) \geq 0$.
Que peut-on en déduire sur la matrice A si $Tr(A^TA) = 0$?

Exercice 15. (**)

Les affirmations suivantes sont-elles vraies ?

1. $\forall A, B, C \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) : Tr(ABC) = Tr(BAC)$
2. $\exists A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) : AB - BA = I_n$
3. Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tels que $AB - BA = A$. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a $Tr(A^n) = 0$

Exercice 16. (*)

Soient A et $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $\forall X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\operatorname{tr}(AX) = \operatorname{tr}(BX)$. Montrer que $A = B$.

Exercice 17. (*)

Calculer (s'il existe) l'inverse des matrices :

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & \bar{\alpha} & \bar{\alpha}^2 \\ \alpha & 1 & \bar{\alpha} \\ \alpha^2 & \alpha & 1 \end{pmatrix} (\alpha \in \mathbb{C})$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & \ddots & & \vdots \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ & \cdots & 0 & 1 & 1 \\ 0 & & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 0 & 1 & 2 & \cdots & \vdots \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & 0 & 1 & 2 \\ 0 & \cdots & & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 18. (**)

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ antisymétrique.

1. Montrer que $I + M$ est inversible (si $(I + M)X = 0$, calculer ${}^t(MX)(MX)$).
2. Soit $A = (I - M)(I + M)^{-1}$. Montrer que ${}^tA = A^{-1}$.

Exercice 19. (*)

Dire si les matrices suivantes sont inversibles et, le cas échéant, calculer leur inverse :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}, \quad I = \begin{pmatrix} i & -1 & 2i \\ 2 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 20. (**)

Soient A et B deux matrices de tailles n vérifiant $AB - BA = A$. Montrer pour tout entier naturel k :

$$A^{k+1}B - BA^{k+1} = (k+1)A^{k+1}$$

Exercice 21. (**)

Déterminer les réels λ tels qu'il existe une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ non nulle vérifiant ${}^tA = \lambda A$.

Exercice 22. (**)

Soit T une matrice triangulaire supérieure de taille $n \in \mathbb{N}$. Montrer que T commute avec sa transposée, si et seulement si T est diagonale.

Exercice 23. (***)

Déterminer le centre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, c'est-à-dire l'ensemble des matrices $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que, pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on a $AM = MA$.

Systèmes linéaires :

Exercice 24. (*)

Résoudre les systèmes linéaires suivants :

$$\begin{cases} x + y + 2z & = & 3 \\ x + 2y + z & = & 1 \\ 2x + y + z & = & 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x + 2z & = & 1 \\ -y + z & = & 2 \\ x - 2y & = & 1 \end{cases}$$

Exercice 25. (**)

Résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} x + y + z - 3t & = & 1 \\ 2x + y - z + t & = & -1 \end{cases}$$

Exercice 26. (*)

Discuter suivant la valeur du paramètre $m \in \mathbb{R}$ le système :

$$\begin{cases} 3x + y - z & = & 1 \\ x - 2y + 2z & = & m \\ x + y - z & = & 1 \end{cases}$$

Exercice 27. (**)

Résoudre le système suivant, en discutant suivant la valeur du paramètre m.

$$\begin{cases} x + y + mz & = & 0 \\ x + my + z & = & 0 \\ mx + y + z & = & 0 \end{cases}$$

Exercice 28. (**)

Déterminer tous les triplets $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tels que le polynôme $P(x) = ax^2 + bx + c$ vérifie

1. $P(-1) = 5$, $P(1) = 1$ et $P(2) = 2$;
2. $P(-1) = 4$ et $P(2) = 1$.

Exercice 29. (**)

Résoudre, pour $\lambda \in \mathbb{C}$, le système

$$\begin{cases} \lambda x + y + z + t & = & 1 \\ x + \lambda y + z + t & = & \lambda \\ x + y + \lambda z + t & = & 1 \end{cases}$$
