

## Produit scalaire, espaces euclidiens

Exercices de Jean-Louis Rouget. Retrouver aussi cette fiche sur [www.maths-france.fr](http://www.maths-france.fr)

\* très facile   \*\* facile   \*\*\* difficulté moyenne   \*\*\*\* difficile   \*\*\*\*\* très difficile

I : Incontournable   T : pour travailler et mémoriser le cours

### Exercice 1 \*\*\*

Pour  $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ,  $N(A) = \text{Tr}(^tAA)$ . Montrer que  $N$  est une norme vérifiant de plus  $N(AB) \leq N(A)N(B)$  pour toutes matrices carrées  $A$  et  $B$ .  $N$  est-elle associée à un produit scalaire ?

[Correction ▼](#)

[005482]

### Exercice 2 \*\*\*

Soit  $E$  un  $\mathbb{R}$  espace vectoriel de dimension finie. Soit  $\| \cdot \|$  une norme sur  $E$  vérifiant l'identité du parallélogramme, c'est-à-dire :  $\forall (x,y) \in E^2$ ,  $\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$ . On se propose de démontrer que  $\| \cdot \|$  est associée à un produit scalaire. On définit sur  $E^2$  une application  $f$  par :  $\forall (x,y) \in E^2$ ,  $f(x,y) = \frac{1}{4}(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2)$ .

1. Montrer que pour tout  $(x,y,z)$  de  $E^3$ , on a :  $f(x+z,y) + f(x-z,y) = 2f(x,y)$ .

2. Montrer que pour tout  $(x,y)$  de  $E^2$ , on a :  $f(2x,y) = 2f(x,y)$ .

3. Montrer que pour tout  $(x,y)$  de  $E^2$  et tout rationnel  $r$ , on a :  $f(rx,y) = rf(x,y)$ .

On admettra que pour tout réel  $\lambda$  et tout  $(x,y)$  de  $E^2$  on a :  $f(\lambda x,y) = \lambda f(x,y)$  ( ce résultat provient de la continuité de  $f$ ).

4. Montrer que pour tout  $(u,v,w)$  de  $E^3$ ,  $f(u,w) + f(v,w) = f(u+v,w)$ .

5. Montrer que  $f$  est bilinéaire.

6. Montrer que  $\| \cdot \|$  est une norme euclidienne.

[Correction ▼](#)

[005483]

### Exercice 3 \*\*IT

Dans  $\mathbb{R}^4$  muni du produit scalaire usuel, on pose :  $V_1 = (1, 2, -1, 1)$  et  $V_2 = (0, 3, 1, -1)$ . On pose  $F = \text{Vect}(V_1, V_2)$ . Déterminer une base orthonormale de  $F$  et un système d'équations de  $F^\perp$ .

[Correction ▼](#)

[005484]

### Exercice 4 \*\*

Sur  $\mathbb{R}[X]$ , on pose  $P|Q = \int_0^1 P(t)Q(t) dt$ . Existe-t-il  $A$  élément de  $\mathbb{R}[X]$  tel que  $\forall P \in \mathbb{R}[X]$ ,  $P|A = P(0)$  ?

[Correction ▼](#)

[005485]

### Exercice 5 \*\*\*I Matrices et déterminants de GRAM

Soit  $E$  un espace vectoriel euclidien de dimension  $p$  sur  $\mathbb{R}$  ( $p \geq 2$ ). Pour  $(x_1, \dots, x_n)$  donné dans  $E^n$ , on pose  $G(x_1, \dots, x_n) = (x_i|x_j)_{1 \leq i,j \leq n}$  (matrice de GRAM) et  $\gamma(x_1, \dots, x_n) = \det(G(x_1, \dots, x_n))$  (déterminant de GRAM).

1. Montrer que  $\text{rg}(G(x_1, \dots, x_n)) = \text{rg}(x_1, \dots, x_n)$ .

2. Montrer que  $(x_1, \dots, x_n)$  est liée si et seulement si  $\gamma(x_1, \dots, x_n) = 0$  et que  $(x_1, \dots, x_n)$  est libre si et seulement si  $\gamma(x_1, \dots, x_n) > 0$ .

3. On suppose que  $(x_1, \dots, x_n)$  est libre dans  $E$  (et donc  $n \leq p$ ). On pose  $F = \text{Vect}(x_1, \dots, x_n)$ .

Pour  $x \in E$ , on note  $p_F(x)$  la projection orthogonale de  $x$  sur  $F$  puis  $d_F(x)$  la distance de  $x$  à  $F$  (c'est-à-dire  $d_F(x) = \|x - p_F(x)\|$ ). Montrer que  $d_F(x) = \sqrt{\frac{\gamma(x, x_1, \dots, x_n)}{\gamma(x_1, \dots, x_n)}}$ .

[Correction ▼](#)

[005486]

### Exercice 6 \*\*I

Soit  $a$  un vecteur non nul de l'espace euclidien  $\mathbb{R}^3$ . On définit  $f$  de  $\mathbb{R}^3$  dans lui-même par :  $\forall x \in \mathbb{R}^3, f(x) = a \wedge (a \wedge x)$ . Montrer que  $f$  est linéaire puis déterminer les vecteurs non nuls colinéaires à leur image par  $f$ .

[Correction ▼](#)

[005487]

### Exercice 7 \*\*I

Matrice de la projection orthogonale sur la droite d'équations  $3x = 6y = 2z$  dans la base canonique orthonormée de  $\mathbb{R}^3$  ainsi que de la symétrie orthogonale par rapport à cette même droite. De manière générale, matrice de la projection orthogonale sur le vecteur unitaire  $u = (a, b, c)$  et de la projection orthogonale sur le plan d'équation  $ax + by + cz = 0$  dans la base canonique orthonormée de  $\mathbb{R}^3$ .

[Correction ▼](#)

[005488]

### Exercice 8 \*\*

$E = \mathbb{R}^3$  euclidien orienté rapporté à une base orthonormée directe  $\mathcal{B}$ . Etudier les endomorphismes de matrice  $A$  dans  $\mathcal{B}$  suivants :

$$1) A = -\frac{1}{3} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix} \quad 2) A = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 3 & 1 & \sqrt{6} \\ 1 & 3 & -\sqrt{6} \\ -\sqrt{6} & \sqrt{6} & 2 \end{pmatrix} \quad 3) A = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 8 & 1 & 4 \\ -4 & 4 & 7 \\ 1 & 8 & -4 \end{pmatrix}.$$

[Correction ▼](#)

[005489]

### Exercice 9 \*\*\*

Soit  $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix}$  avec  $a, b$  et  $c$  réels. Montrer que  $M$  est la matrice dans la base canonique orthonormée

directe de  $\mathbb{R}^3$  d'une rotation si et seulement si  $a, b$  et  $c$  sont les solutions d'une équation du type  $x^3 - x^2 + k = 0$  où  $0 \leq k \leq \frac{4}{27}$ . En posant  $k = \frac{4 \sin^2 \varphi}{27}$ , déterminer explicitement les matrices  $M$  correspondantes ainsi que les axes et les angles des rotations qu'elles représentent.

[Correction ▼](#)

[005490]

### Exercice 10 \*\*

$\mathcal{B}$  est une base orthonormée directe de  $\mathbb{R}^3$  donnée. Montrer que  $\det_{\mathcal{B}}(u \wedge v, v \wedge w, w \wedge u) = (\det_{\mathcal{B}}(u, v, w))^2$  pour tous vecteurs  $u, v$  et  $w$ .

[Correction ▼](#)

[005491]

### Exercice 11 \*\*\*I Inégalité de HADAMARD

Soit  $\mathcal{B}$  une base orthonormée de  $E$ , espace euclidien de dimension  $n$ . Montrer que :  $\forall (x_1, \dots, x_n) \in E^n, |\det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n)| \leq \|x_1\| \dots \|x_n\|$  en précisant les cas d'égalité.

[Correction ▼](#)

[005492]

### Exercice 12 \*\*

Montrer que  $u \wedge v | w \wedge s = (u | w)(v | s) - (u | s)(v | w)$  et  $(u \wedge v) \wedge (w \wedge s) = [u, v, s]w - [u, v, w]s$ .

[Correction ▼](#)

[005493]

---

**Exercice 13 \*\*I**

Existence, unicité et calcul de  $a$  et  $b$  tels que  $\int_0^1 (x^4 - ax - b)^2 dx$  soit minimum (trouver deux démonstrations, une dans la mentalité du lycée et une dans la mentalité maths sup).

[Correction ▼](#)

[005494]

---

**Exercice 14 \*\*\***

Soit  $(e_1, \dots, e_n)$  une base quelconque de  $E$  euclidien. Soient  $a_1, \dots, a_n$   $n$  réels donnés. Montrer qu'il existe un unique vecteur  $x$  tel que  $\forall i \in \{1, \dots, n\}, x|e_i = a_i$ .

[Correction ▼](#)

[005495]

---

**Exercice 15 \*\*\*\***

Soit  $E$  un espace vectoriel euclidien de dimension  $n \geq 1$ . Une famille de  $p$  vecteurs  $(x_1, \dots, x_p)$  est dite obtusangle si et seulement si pour tout  $(i, j)$  tel que  $i \neq j, x_i | x_j < 0$ . Montrer que l'on a nécessairement  $p \leq n + 1$ .

[Correction ▼](#)

[005496]

---

**Exercice 16 \*\*\***

Soit  $P \in \mathbb{R}_3[X]$  tel que  $\int_{-1}^1 P^2(t) dt = 1$ . Montrer que  $\sup\{|P(x)|, |x| \leq 1\} \leq 2$ . Cas d'égalité ?

[Correction ▼](#)

[005497]

---

**Exercice 17 \*\*IT**

Soit  $r$  la rotation de  $\mathbb{R}^3$ , euclidien orienté, dont l'axe est orienté par  $k$  unitaire et dont une mesure de l'angle est  $\theta$ . Montrer que pour tout  $x$  de  $\mathbb{R}^3, r(x) = (\cos \theta)x + (\sin \theta)(k \wedge x) + 2(x.k) \sin^2(\frac{\theta}{2})k$ . Application : écrire la matrice dans la base canonique (orthonormée directe de  $\mathbb{R}^3$ ) de la rotation autour de  $k = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_1 + e_2)$  et d'angle  $\theta = \frac{\pi}{3}$ .

[Correction ▼](#)

[005498]

---

**Exercice 18 \*\***

Soit  $f$  continue strictement positive sur  $[0, 1]$ . Pour  $n \in \mathbb{N}$ , on pose  $I_n = \int_0^1 f^n(t) dt$ . Montrer que la suite  $u_n = \frac{I_{n+1}}{I_n}$  est définie et croissante.

[Correction ▼](#)

[005499]

---

**Exercice 19 \*\*\*\*I**

Sur  $E = \mathbb{R}_n[X]$ , on pose  $P|Q = \int_{-1}^1 P(t)Q(t) dt$ .

1. Montrer que  $(E, |)$  est un espace euclidien.
2. Pour  $p$  entier naturel compris entre 0 et  $n$ , on pose  $L_p = ((X^2 - 1)^p)^{(p)}$ . Montrer que  $\left(\frac{L_p}{\|L_p\|}\right)_{0 \leq p \leq n}$  est l'orthonormalisée de SCHMIDT de la base canonique de  $E$ .  
Déterminer  $\|L_p\|$ .

[Correction ▼](#)

[005500]

### Correction de l'exercice 1 ▲

Posons  $\varphi : (A, B) \mapsto \text{Tr}({}^tAB)$ . Montrons que  $\varphi$  est un produit scalaire sur  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ . **1ère solution.** •  $\varphi$  est symétrique. En effet, pour  $(A, B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))^2$ ,

$$\varphi(A, B) = \text{Tr}({}^tAB) = \text{Tr}({}^t({}^tAB)) = \text{Tr}({}^tBA) = \varphi(B, A).$$

•  $\varphi$  est bilinéaire par linéarité de la trace et de la transposition. • Si  $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$ , alors

$$\varphi(A, A) = \sum_{i=1}^n \left( \sum_{j=1}^n a_{i,j} a_{i,j} \right) = \sum_{i,j} a_{i,j}^2 > 0$$

car au moins un des réels de cette somme est strictement positif.  $\varphi$  est donc définie, positive.

**2ème solution.** Posons  $A = (a_{i,j})$  et  $B = (b_{i,j})$ . On a

$$\text{Tr}({}^tAB) = \sum_{j=1}^n \left( \sum_{i=1}^n a_{i,j} b_{i,j} \right) = \sum_{1 \leq i,j \leq n} a_{i,j} b_{i,j}.$$

Ainsi,  $\varphi$  est le produit scalaire canonique sur  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  et en particulier,  $\varphi$  est un produit scalaire sur  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .  $N$  n'est autre que la norme associée au produit scalaire  $\varphi$  (et en particulier,  $N$  est une norme). Soit  $(A, B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))^2$ .

$$\begin{aligned} N(AB)^2 &= \sum_{i,j} \left( \sum_{k=1}^n a_{i,k} b_{k,j} \right)^2 \\ &\leq \sum_{i,j} \left( \sum_{k=1}^n a_{i,k}^2 \right) \left( \sum_{l=1}^n b_{l,j}^2 \right) \quad (\text{d'après l'inégalité de CAUCHY-SCHWARZ}) \\ &= \sum_{i,j,k,l} a_{i,k}^2 b_{l,j}^2 = \left( \sum_{i,k} a_{i,k}^2 \right) \left( \sum_{l,j} b_{l,j}^2 \right) = N(A)^2 N(B)^2, \end{aligned}$$

et donc,

$$\forall (A, B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))^2, N(AB) \leq N(A)N(B).$$

### Correction de l'exercice 2 ▲

1. Soit  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ .

$$\begin{aligned} f(x+z, y) + f(x-z, y) &= \frac{1}{4} (||x+z+y||^2 + ||x-z+y||^2 - ||x+z-y||^2 - ||x-z-y||^2) \\ &= \frac{1}{4} (2(||x+y||^2 + ||z||^2) - 2(||x-y||^2 + ||z||^2)) = 2f(x, y). \end{aligned}$$

2.  $2f(x, y) = f(x+x, y) + f(x-x, y) = f(2x, y) + f(0, y)$  mais  $f(0, y) = (||y||^2 - ||-y||^2) = 0$  (définition d'une norme).

3. • Montrons par récurrence que  $\forall n \in \mathbb{N}, f(nx, y) = nf(x, y)$ . C'est clair pour  $n = 0$  et  $n = 1$ . Soit  $n \geq 0$ . Si l'égalité est vraie pour  $n$  et  $n+1$  alors d'après 1),

$$f((n+2)x, y) + f(nx, y) = f((n+1)x+x, y) + f((n+1)x-x, y) = 2f((n+1)x, y),$$

et donc, par hypothèse de récurrence,

$$f((n+2)x, y) = 2f((n+1)x, y) - f(nx, y) = 2(n+1)f(x, y) - nf(x, y) = (n+2)f(x, y).$$

Le résultat est démontré par récurrence. • Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $f(x, y) = f(n \times \frac{1}{n}x, y) = nf(\frac{1}{n}x, y)$  et donc  $f(\frac{1}{n}x, y) = \frac{1}{n}f(x, y)$ . • Soit alors  $r = \frac{p}{q}$ ,  $p \in \mathbb{N}, q \in \mathbb{N}^*$ ,  $f(rx, y) = \frac{1}{q}f(px, y) = p\frac{1}{q}f(x, y) = rf(x, y)$  et donc, pour tout rationnel positif  $r$ ,  $f(rx, y) = rf(x, y)$ . Enfin, si  $r \leq 0$ ,  $f(rx, y) + f(-rx, y) = 2f(0, y) = 0$  (d'après 1)) et donc  $f(-rx, y) = -f(rx, y) = rf(x, y)$ .

$$\forall (x, y) \in E^2, \forall r \in \mathbb{Q}, f(rx, y) = rf(x, y).$$

4. On pose  $x = \frac{1}{2}(u + v)$  et  $y = \frac{1}{2}(u - v)$ .

$$f(u, w) + f(v, w) = f(x + y, w) + f(x - y, w) = 2f(x, w) = 2f\left(\frac{1}{2}(u + v), w\right) = f(u + v, w).$$

5.  $f$  est symétrique (définition d'une norme) et linéaire par rapport à sa première variable (d'après 3) et 4)).  
Donc  $f$  est bilinéaire.

6.  $f$  est une forme bilinéaire symétrique. Pour  $x \in E$ ,  $f(x, x) = \frac{1}{4}(\|x + x\|^2 + \|x - x\|^2) = \frac{1}{4}\|2x\|^2 = \|x\|^2$  (définition d'une norme) ce qui montre tout à la fois que  $f$  est définie positive et donc un produit scalaire, et que  $\|\cdot\|$  est la norme associée.  $\|\cdot\|$  est donc une norme euclidienne.

### Correction de l'exercice 3 ▲

La famille  $(V_1, V_2)$  est clairement libre et donc une base de  $F$ . Son orthonormalisée  $(e_1, e_2)$  est une base orthonormée de  $F$ .  $\|V_1\| = \sqrt{1 + 4 + 1 + 1} = \sqrt{7}$  et  $e_1 = \frac{1}{\sqrt{7}}V_1 = \frac{1}{\sqrt{7}}(1, 2, -1, 1)$ .  $(V_2|e_1) = \frac{1}{\sqrt{7}}(0 + 6 - 1 - 1) = \frac{4}{\sqrt{7}}$  puis  $V_2 - (V_2|e_1)e_1 = (0, 3, 1, -1) - \frac{4}{7}(1, 2, -1, 1) = \frac{1}{7}(-4, 13, 11, -11)$  puis  $e_2 = \frac{1}{\sqrt{427}}(-4, 13, 11, -11)$ . Une base orthonormée de  $F$  est  $(e_1, e_2)$  où  $e_1 = \frac{1}{\sqrt{7}}(1, 2, -1, 1)$  et  $e_2 = \frac{1}{\sqrt{427}}(-4, 13, 11, -11)$ . Soit  $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$ .

$$(x, y, z, t) \in F^\perp \Leftrightarrow (x, y, z, t) \in (V_1, V_2)^\perp \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y - z + t = 0 \\ 3y + z - t = 0 \end{cases}.$$

### Correction de l'exercice 4 ▲

Soit  $A$  un éventuel polynôme solution c'est à dire tel que  $\forall P \in \mathbb{R}[X], \int_0^1 P(t)A(t) dt = P(0)$ .

$P = 1$  fournit  $\int_0^1 A(t) dt = 1$  et donc nécessairement  $A \neq 0$ .  $P = XA$  fournit  $\int_0^1 tA^2(t) dt = P(0) = 0$ . Mais alors,  $\forall t \in [0, 1], tA^2(t) = 0$  (fonction continue positive d'intégrale nulle) puis  $A = 0$  (polynôme ayant une infinité de racines deux à deux distinctes).  $A$  n'existe pas.

### Correction de l'exercice 5 ▲

1. Soit  $\mathcal{B}$  une base orthonormée de  $E$  et  $M = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n)$  ( $M$  est une matrice de format  $(p, n)$ ). Puisque  $\mathcal{B}$  est orthonormée, le produit scalaire usuel des colonnes  $C_i$  et  $C_j$  est encore  $x_i|x_j$ . Donc,  $\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$ ,  ${}^tC_iC_j = x_i|x_j$  ou encore

$$G = {}^tMM.$$

Il s'agit alors de montrer que  $\text{rg}(M) = \text{rg}({}^tMM)$ . Ceci provient du fait que  $M$  et  ${}^tMM$  ont même noyau. En effet, pour  $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ ,

$$X \in \text{Ker}M \Rightarrow MX = 0 \Rightarrow {}^tM \times MX = 0 \Rightarrow ({}^tMM)X = 0 \Rightarrow X \in \text{Ker}({}^tMM)$$

et

$$\begin{aligned} X \in \text{Ker}({}^tMM) &\Rightarrow {}^tMMX = 0 \Rightarrow {}^tX{}^tMMX = 0 \Rightarrow {}^t(MX)MX = 0 \Rightarrow \|MX\|^2 = 0 \Rightarrow MX = 0 \\ &\Rightarrow X \in \text{Ker}M. \end{aligned}$$

Ainsi,  $\text{Ker}(M) = \text{Ker}({}^tMM) = \text{Ker}(G(x_1, \dots, x_n))$ . Mais alors, d'après le théorème du rang,  $\text{rg}(x_1, \dots, x_n) = \text{rg}(M) = \text{rg}(G(x_1, \dots, x_n))$ .

$$\text{rg}(G(x_1, \dots, x_n)) = \text{rg}(x_1, \dots, x_n).$$

2. Si la famille  $(x_1, \dots, x_n)$  est liée,  $\text{rg}(G) = \text{rg}(x_1, \dots, x_n) < n$ , et donc, puisque  $G$  est une matrice carrée de format  $n$ ,  $\gamma(x_1, \dots, x_n) = \det(G) = 0$ . Si la famille  $(x_1, \dots, x_n)$  est libre,  $(x_1, \dots, x_n)$  engendre un espace  $F$  de dimension  $n$ . Soient  $\mathcal{B}$  une base orthonormée de  $F$  et  $M$  la matrice de la famille  $(x_1, \dots, x_n)$  dans  $\mathcal{B}$ . D'après 1), on a  $G = {}^tMM$  et d'autre part,  $M$  est une matrice carrée. Par suite,

$$\gamma(x_1, \dots, x_n) = \det({}^tMM) = \det({}^tM)\det(M) = (\det M)^2 > 0.$$

3. On écrit  $x = x - p_F(x) + p_F(x)$ . La première colonne de  $\gamma(x, x_1, \dots, x_n)$  s'écrit :

$$\begin{pmatrix} \|x\|^2 \\ x|x_1 \\ x|x_2 \\ \vdots \\ x|x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \|x - p_F(x) + p_F(x)\|^2 \\ x - p_F(x) + p_F(x)|x_1 \\ x - p_F(x) + p_F(x)|x_2 \\ \vdots \\ x - p_F(x) + p_F(x)|x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \|x - p_F(x)\|^2 \\ 0|x_1 \\ 0|x_2 \\ \vdots \\ 0|x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \|p_F(x)\|^2 \\ p_F(x)|x_1 \\ p_F(x)|x_2 \\ \vdots \\ p_F(x)|x_n \end{pmatrix}.$$

(en 1ère ligne, c'est le théorème de PYTHAGORE et dans les suivantes,  $x - p_F(x) \in F^\perp$ ). Par linéarité par rapport à la première colonne,  $\gamma(x, x_1, \dots, x_n)$  est somme de deux déterminants. Le deuxième est  $\gamma(p_F(x), x_1, \dots, x_n)$  et est nul car la famille  $(p_F(x), x_1, \dots, x_n)$  est liée. On développe le premier suivant sa première colonne et on obtient :

$$\gamma(x, x_1, \dots, x_n) = \|x - p_F(x)\|^2 \gamma(x_1, \dots, x_n),$$

ce qui fournit la formule désirée.

$$\forall x \in E, d(x, F) = \|x - p_F(x)\| = \sqrt{\frac{\gamma(x, x_1, \dots, x_n)}{\gamma(x_1, \dots, x_n)}}.$$

### Correction de l'exercice 6 ▲

Je vous laisse vérifier la linéarité. Si  $x$  est colinéaire à  $a$ ,  $f(x) = 0$  et les vecteurs de  $\text{Vect}(a) \setminus \{0\}$  sont des vecteurs non nuls colinéaires à leur image. Si  $x$  n'est pas colinéaire à  $a$ ,  $a \wedge x$  est un vecteur non nul orthogonal à  $a$  et il en est de même de  $f(x) = a \wedge (a \wedge x)$ . Donc, si  $x$  est colinéaire à  $f(x)$ ,  $x$  est nécessairement orthogonal à  $a$ . Réciproquement, si  $x$  est un vecteur non nul orthogonal à  $a$ ,  $f(x) = (a.x)a - \|a\|^2 x = -\|a\|^2 x$  et  $x$  est colinéaire à  $f(x)$ . Les vecteurs non nuls colinéaires à leur image sont les vecteurs non nuls de  $\text{Vect}(a)$  et de  $a^\perp$ .

### Correction de l'exercice 7 ▲

Un vecteur engendrant  $D$  est  $\vec{u} = (2, 1, 3)$ . Pour  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ ,

$$p((x, y, z)) = \frac{(x, y, z)|(2, 1, 3)|}{\|(2, 1, 3)\|^2} (2, 1, 3) = \frac{2x + y + 3z}{14} (2, 1, 3).$$

On en déduit que  $\text{Mat}_{\mathcal{B}} p = P = \frac{1}{14} \begin{pmatrix} 4 & 2 & 6 \\ 2 & 1 & 3 \\ 6 & 3 & 9 \end{pmatrix}$ , puis  $\text{Mat}_{\mathcal{B}} s = 2P - I = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} -3 & 2 & 6 \\ 2 & -6 & 3 \\ 6 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ . Plus générale-

ment, la matrice de la projection orthogonale sur le vecteur unitaire  $(a, b, c)$  dans la base canonique orthonormée est  $P = \begin{pmatrix} a^2 & ab & ac \\ ab & b^2 & bc \\ ac & bc & c^2 \end{pmatrix}$  et la matrice de la projection orthogonale sur le plan  $ax + by + cz = 0$  dans la base

canonique orthonormée est  $I - P = \begin{pmatrix} 1 - a^2 & -ab & -ac \\ -ab & 1 - b^2 & -bc \\ -ac & -bc & 1 - c^2 \end{pmatrix}$ .

### Correction de l'exercice 8 ▲

1.  $\|C_1\| = \|C_2\| = \frac{1}{3}\sqrt{4+4+1} = 1$  et  $C_1|C_2 = \frac{1}{9}(-2+4-2) = 0$ . Enfin,

$$C_1 \wedge C_2 = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} -6 \\ -3 \\ -6 \end{pmatrix} = -\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = C_3.$$

Donc,  $A \in O_3^+(\mathbb{R})$  et  $f$  est une rotation (distincte de l'identité). **Axe de  $f$ .** Soit  $X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ .

$$AX = X \Leftrightarrow \begin{cases} -x - y - 2z = 0 \\ -2x - 5y - z = 0 \\ -x + 2y - 5z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = -2x - 5y \\ 3x + 9y = 0 \\ 9x + 27y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3y \\ z = y \end{cases}.$$

L'axe  $D$  de  $f$  est  $\text{Vect}(\vec{u})$  où  $\vec{u} = (-3, 1, 1)$ .  $D$  est dorénavant orienté par  $\vec{u}$ . **Angle de  $f$ .** Le vecteur  $\vec{v} = \frac{1}{\sqrt{2}}(0, 1, -1)$  est un vecteur unitaire orthogonal à l'axe. Donc,

$$\cos \theta = \vec{v} \cdot f(\vec{v}) = \frac{1}{\sqrt{2}}(0, 1, -1) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{-1}{3}(-1, 1, -4) = -\frac{1}{6} \times 5 = -\frac{5}{6},$$

et donc,  $\theta = \pm \arccos(-\frac{5}{6}) (2\pi)$ . (Si on sait que  $\text{Tr}(A) = 2 \cos \theta + 1$ , c'est plus court :  $2 \cos \theta + 1 = \frac{2}{3} -$

$\frac{2}{3} - \frac{2}{3}$  fournit  $\cos \theta = -\frac{5}{6}$ ). Le signe de  $\sin \theta$  est le signe de  $[\vec{i}, f(\vec{i}), \vec{u}] = \begin{vmatrix} 1 & \frac{2}{3} & -3 \\ 0 & -\frac{2}{3} & 1 \\ 0 & -\frac{1}{3} & 1 \end{vmatrix} = -\frac{1}{3} < 0$ .

Donc,

$f$  est la rotation d'angle  $-\arccos(-\frac{5}{6})$  autour de  $u = (-3, 1, 1)$ .

2.  $\|C_1\| = \|C_2\| = \frac{1}{4}\sqrt{9+1+6} = 1$  et  $C_1|C_2 = \frac{1}{16}(3+3-6) = 0$ . Enfin,

$$C_1 \wedge C_2 = \frac{1}{16} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -\sqrt{6} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ \sqrt{6} \end{pmatrix} = \frac{1}{16} \begin{pmatrix} 4\sqrt{6} \\ -4\sqrt{6} \\ 8 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} \sqrt{6} \\ -\sqrt{6} \\ 2 \end{pmatrix} = C_3.$$

Donc,  $A \in O_3^+(\mathbb{R})$  et  $f$  est une rotation. **Axe de  $f$ .** Soit  $X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ .

$$AX = X \Leftrightarrow \begin{cases} -x + y + \sqrt{6}z = 0 \\ x - y - \sqrt{6}z = 0 \\ -\sqrt{6}x + \sqrt{6}y - 2z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x - y = \sqrt{6}z = \frac{2}{\sqrt{6}}z \Leftrightarrow x = y \text{ et } z = 0.$$

L'axe  $D$  de  $f$  est  $\text{Vect}(\vec{u})$  où  $\vec{u} = (1, 1, 0)$ .  $D$  est dorénavant orienté par  $\vec{u}$ . **Angle de  $f$ .**  $\vec{k} = [0, 0, 1]$  est un vecteur unitaire orthogonal à  $\vec{u}$ . Par suite,

$$\cos \theta = \vec{k} \cdot f(\vec{k}) = (0, 0, 1) \cdot \frac{1}{4}(\sqrt{6}, -\sqrt{6}, 2) = \frac{1}{2},$$

et donc  $\cos \theta = \pm \frac{\pi}{3} (2\pi)$ . Le signe de  $\sin \theta$  est le signe de  $[\vec{i}, f(\vec{i}), \vec{u}] = \begin{vmatrix} 1 & 3/4 & 1 \\ 0 & 1/4 & 1 \\ 0 & -\sqrt{6}/4 & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{\sqrt{6}} >$

0. Donc,

$f$  est la rotation d'angle  $\frac{\pi}{3}$  autour de  $\vec{u} = (1, 1, 0)$ .

3.  $\|C_1\| = \|C_2\| = \frac{1}{9}\sqrt{64+16+1} = 1$  et  $C_1|C_2 = \frac{1}{81}(8-16+8) = 0$ . Enfin,

$$C_1 \wedge C_2 = \frac{1}{81} \begin{pmatrix} 8 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix} = \frac{1}{81} \begin{pmatrix} -36 \\ -63 \\ 36 \end{pmatrix} = -\frac{1}{9} \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ -4 \end{pmatrix} = -C_3.$$

Donc,  $A \in O_3^-(\mathbb{R})$ .  $A$  n'est pas symétrique, et donc  $f$  n'est pas une réflexion.  $f$  est donc la composée commutative  $s \circ r$  d'une rotation d'angle  $\theta$  autour d'un certain vecteur unitaire  $\vec{u}$  et de la réflexion de plan  $\vec{u}^\perp$  où  $\vec{u}$  et  $\theta$  sont à déterminer. **Axe de  $r$ .** L'axe de  $r$  est  $\text{Ker}(f + \text{Id}_E)$  (car  $f \neq -\text{Id}_E$ ).

$$AX = -X \Leftrightarrow \begin{cases} 17x + y + 4z = 0 \\ -4x + 13y + 7z = 0 \\ x + 8y + 5z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -17x - 4z \\ -225x - 45z = 0 \\ -135x - 27z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = -5x \\ y = 3x \end{cases}$$

$\text{Ker}(f + \text{Id}_E) = \text{Vect}(\vec{u}) = D$  où  $u = (1, 3, -5)$ .  $D$  est dorénavant orienté par  $\vec{u}$ .  $s$  est la réflexion par rapport au plan  $P = u^\perp$  dont une équation est  $x + 3y - 5z = 0$ . On écrit alors la matrice  $S$  de  $s$  dans la base de départ. On calcule  $S^{-1}A = SA$  qui est la matrice de  $r$  et on termine comme en 1) et 2).

### Correction de l'exercice 9 ▲

Soit  $f$  l'endomorphisme de  $\mathbb{R}^3$  de matrice  $M$  dans la base canonique de  $\mathbb{R}^3$ .

$$f \text{ est une rotation} \Leftrightarrow M \in O_3^+(\mathbb{R}) \Leftrightarrow \|C_1\| = \|C_2\| = \|C_3\| = 1 \text{ et } C_1|C_2 = C_1|C_3 = C_2|C_3 = 0 \text{ et } \det M = 1 \\ \Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 = 1 \text{ et } ab + bc + ca = 0 \text{ et } a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = 1.$$

Posons  $\sigma_1 = a + b + c$ ,  $\sigma_2 = ab + bc + ca$  et  $\sigma_3 = abc$ . On a  $a^2 + b^2 + c^2 = (a + b + c)^2 - 2(ab + ac + bc) = \sigma_1^2 - 2\sigma_2$ . Ensuite,

$$\sigma_1^3 = (a + b + c)^3 = a^3 + b^3 + c^3 + 3(a^2b + ba^2 + a^2c + ca^2 + b^2c + c^2b) + 6abc,$$

et

$$\sigma_1(\sigma_1^2 - 2\sigma_2) = (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2) = a^3 + b^3 + c^3 + (a^2b + b^2a + a^2c + c^2a + b^2c + c^2b).$$

Donc,

$$\sigma_1^3 - 3\sigma_1(\sigma_1^2 - 2\sigma_2) = -2(a^3 + b^3 + c^3) + 6\sigma_3$$

et finalement,  $a^3 + b^3 + c^3 = \sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2 + 3\sigma_3$ .

$$M \in O_3^+(\mathbb{R}) \Leftrightarrow \sigma_2 = 0 \text{ et } \sigma_1^2 - 2\sigma_2 = 1 \text{ et } \sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2 = 1$$

$$\Leftrightarrow \sigma_2 = 0 \text{ et } \sigma_1 = 1$$

$$\Leftrightarrow a, b \text{ et } c \text{ sont les solutions réelles d'une équation du type } x^3 - x^2 + k = 0 \text{ (où } k = -\sigma_3).$$

Posons  $P(x) = x^3 - x^2 + k$  et donc  $P'(x) = 3x^2 - 2x = x(2x - 3)$ . Sur  $] -\infty, 0]$ ,  $P$  est strictement croissante, strictement décroissante sur  $[0, \frac{3}{2}]$  et strictement croissante sur  $[\frac{3}{2}, +\infty[$ .  $P$  admet donc au plus une racine dans chacun de ces trois intervalles. **1er cas.** Si  $P(0) = k > 0$  et  $P(\frac{2}{3}) = k - \frac{4}{27} < 0$  ou ce qui revient au même,  $0 < k < \frac{4}{27}$ ,  $P$  admet trois racines réelles deux à deux distinctes ( $P$  étant d'autre part continue sur  $\mathbb{R}$ ), nécessairement toutes simples. **2ème cas.** Si  $k \in \{0, \frac{4}{27}\}$ ,  $P$  et  $P'$  ont une racine réelle commune (à savoir 0 ou  $\frac{4}{27}$ ) et  $P$  admet une racine réelle d'ordre au moins 2. La troisième racine est alors nécessairement réelle. **3ème cas.** Si  $k < 0$  ou  $k > \frac{4}{27}$ ,  $P$  admet une racine réelle exactement. Celle-ci est nécessairement simple au vu du 2ème cas et donc  $P$  admet deux autres racines non réelles. En résumé,  $P$  a toutes ses racines réelles si et seulement si  $0 \leq k \leq \frac{4}{27}$  et donc,  $f$  est une rotation si et seulement si  $a, b$  et  $c$  sont les solutions d'une équation du type  $x^3 - x^2 + k = 0$  où  $0 \leq k \leq \frac{4}{27}$ .

### Correction de l'exercice 10 ▲

$$\begin{aligned} [u \wedge v, v \wedge w, w \wedge u] &= ((u \wedge v) \wedge (v \wedge w))(w \wedge u) = (((u \wedge v)|w)v - ((u \wedge v)|v)w)(w \wedge u) \\ &= (((u \wedge v)|w)v)(w \wedge u) = ((u \wedge v)w) \times (v|(w \wedge u)) = [u, v, w][w, u, v] \\ &= [u, v, w]^2. \end{aligned}$$



---

**Correction de l'exercice 11 ▲**

Si la famille  $(x_i)_{1 \leq i \leq n}$  est une famille liée, l'inégalité est claire et de plus, on a l'égalité si et seulement si l'un des vecteurs est nuls. Si la famille  $(x_i)_{1 \leq i \leq n}$  est une famille libre et donc une base de  $E$ , considérons  $\mathcal{B}' = (e_1, \dots, e_n)$  son orthonormalisée de SCHMIDT. On a

$$|\det_{\mathcal{B}}(x_i)_{1 \leq i \leq n}| = |\det_{\mathcal{B}'}(x_i)_{1 \leq i \leq n} \times \det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}')| = |\det_{\mathcal{B}'}(x_i)_{1 \leq i \leq n}|,$$

car  $\det_{\mathcal{B}'} \mathcal{B}'$  est le déterminant d'une base orthonormée dans une autre et vaut donc 1 ou  $-1$ . Maintenant, la matrice de la famille  $(x_i)_{1 \leq i \leq n}$  dans  $\mathcal{B}'$  est triangulaire supérieure et son déterminant est le produit des coefficients diagonaux à savoir les nombres  $x_i|e_i$  (puisque  $\mathcal{B}'$  est orthonormée). Donc

$$|\det_{\mathcal{B}}(x_i)_{1 \leq i \leq n}| = |\det_{\mathcal{B}'}(x_i)_{1 \leq i \leq n}| = \left| \prod_{i=1}^n (x_i|e_i) \right| \leq \prod_{i=1}^n \|x_i\| \times \|e_i\| = \prod_{i=1}^n \|x_i\|,$$

d'après l'inégalité de CAUCHY-SCHWARZ. De plus, on a l'égalité si et seulement si, pour tout  $i$ ,  $|x_i|e_i| = \|x_i\| \times \|e_i\|$  ou encore si et seulement si, pour tout  $i$ ,  $x_i$  est colinéaire à  $e_i$  ou enfin si et seulement si la famille  $(x_i)_{1 \leq i \leq n}$  est orthogonale.

---

**Correction de l'exercice 12 ▲**

$(u \wedge v)|(w \wedge s) = [u, v, w \wedge s] = [w \wedge s, u, v] = ((w \wedge s) \wedge u)|v = ((u|w)s - (u|s)w)|v = (u|w)(v|s) - (u|s)(v|w)$ . De même,  $(u \wedge v) \wedge (w \wedge s) = ((u \wedge v)|s)w - ((u \wedge v)|w)s = [u, v, s]w - [u, v, w]s$ .

---

**Correction de l'exercice 13 ▲**

1ère solution.

$$\begin{aligned} \int_0^1 (x^4 - ax - b)^2 dx &= \frac{1}{9} + \frac{1}{3}a^2 + b^2 - \frac{1}{3}a - \frac{2}{5}b + ab = \frac{1}{3} \left( a + \frac{1}{2}(3b-1) \right)^2 - \frac{1}{12}(3b-1)^2 + b^2 - \frac{2}{5}b + \frac{1}{9} \\ &= \frac{1}{3} \left( a + \frac{1}{2}(3b-1) \right)^2 + \frac{1}{4}b^2 + \frac{1}{10}b + \frac{1}{36} = \frac{1}{3} \left( a + \frac{1}{2}(3b-1) \right)^2 + \frac{1}{4} \left( b + \frac{1}{5} \right)^2 + \frac{4}{225} \geq \frac{4}{225}, \end{aligned}$$

avec égalité si et seulement si  $a + \frac{1}{2}(3b-1) = b + \frac{1}{5} = 0$  ou encore  $b = -\frac{1}{5}$  et  $a = \frac{4}{5}$ .

$\int_0^1 (x^4 - ax - b)^2 dx$  est minimum pour  $a = \frac{4}{5}$  et  $b = -\frac{1}{5}$  et ce minimum vaut  $\frac{4}{225}$ .

**2ème solution.**  $(P, Q) \mapsto \int_0^1 P(t)Q(t) dt$  est un produit scalaire sur  $\mathbb{R}_4[X]$  et  $\int_0^1 (x^4 - ax - b)^2 dx$  est, pour ce produit scalaire, le carré de la distance du polynôme  $X^4$  au polynôme de degré inférieur ou égal à 1,  $aX + b$ . On doit calculer  $\inf \left\{ \int_0^1 (x^4 - ax - b)^2 dx, (a, b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$  qui est le carré de la distance de  $X^4$  à  $F = \mathbb{R}_1[X]$ . On sait que cette borne inférieure est un minimum, atteint une et une seule fois quand  $aX + b$  est la projection orthogonale de  $X^4$  sur  $F$ . Trouvons une base orthonormale de  $F$ . L'orthonormalisée  $(P_0, P_1)$  de  $(1, X)$  convient.  $\|1\|^2 = \int_0^1 1 dt = 1$  et  $P_0 = 1$ . Puis  $X - (X|P_0)P_0 = X - \int_0^1 t dt = X - \frac{1}{2}$ , et comme  $\|X - (X|P_0)P_0\|^2 = \int_0^1 \left(t - \frac{1}{2}\right)^2 dt = \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$ ,  $P_1 = 2\sqrt{3} \left(X - \frac{1}{2}\right) = \sqrt{3}(2X - 1)$ . La projection orthogonale de  $X^4$  sur  $F$  est alors  $(X^4|P_0)P_0 + (X^4|P_1)P_1$  avec  $(X^4|P_0) = \int_0^1 t^4 dt = \frac{1}{5}$  et  $(X^4|P_1) = \sqrt{3} \int_0^1 t^4(2t-1) dt = \sqrt{3} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) = \frac{2\sqrt{3}}{15}$ . Donc, la projection orthogonale de  $X^4$  sur  $F$  est  $\frac{1}{5} + \frac{2\sqrt{3}}{15}\sqrt{3}(2X-1) = \frac{1}{5}(4X-1)$ . Le minimum cherché est alors  $\int_0^1 \left(t^4 - \frac{1}{5}(4t-1)\right)^2 dt = \dots = \frac{4}{225}$ .

---

**Correction de l'exercice 14 ▲**

---

Soit  $\varphi : E \rightarrow \mathbb{R}^n$ .  $\varphi$  est clairement linéaire et  $\text{Ker} \varphi$  est  $(e_1, \dots, e_n)^\perp = E^\perp = \{0\}$ . Comme  $x \mapsto (x|e_1, \dots, x|e_n)$ ,  $E$  et  $\mathbb{R}^n$  ont mêmes dimensions finies,  $\varphi$  est un isomorphisme d'espaces vectoriels. En particulier, pour tout  $n$ -uplet  $(a_1, \dots, a_n)$  de réels, il existe un unique vecteur  $x$  tel que  $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, x|e_i = a_i$ .

### Correction de l'exercice 15 ▲

**1ère solution.** Montrons par récurrence que sur  $n = \dim(E)$  que, si  $(x_i)_{1 \leq i \leq p}$  est obtusangle,  $p \leq n + 1$ . • Pour  $n = 1$ , une famille obtusangle ne peut contenir au moins trois vecteurs car si elle contient les vecteurs  $x_1$  et  $x_2$  vérifiant  $x_1 \cdot x_2 < 0$ , un vecteur  $x_3$  quelconque est soit nul (auquel cas  $x_3 \cdot x_1 = 0$ ), soit de même sens que  $x_1$  (auquel cas  $x_1 \cdot x_3 > 0$ ) soit de même sens que  $x_2$  (auquel cas  $x_2 \cdot x_3 > 0$ ). Donc  $p \leq 2$ . • Soit  $n \geq 1$ . Supposons que toute famille obtusangle d'un espace de dimension  $n$  a un cardinal inférieur ou égal à  $n + 1$ . Soit  $(x_i)_{1 \leq i \leq p}$  une famille obtusangle d'un espace  $E$  de dimension  $n + 1$ . Si  $p = 1$ , il n'y a plus rien à dire. Supposons  $p \geq 2$ .  $x_p$  n'est pas nul et  $H = x_p^\perp$  est un hyperplan de  $E$  et donc est de dimension  $n$ . Soit, pour  $1 \leq i \leq p - 1$ ,  $y_i = x_i - \frac{(x_i|x_p)}{\|x_p\|^2} x_p$  le projeté orthogonal de  $x_i$  sur  $H$ . Vérifions que la famille  $(y_i)_{1 \leq i \leq p-1}$  est une famille obtusangle. Soit  $(i, j) \in \llbracket 1, p - 1 \rrbracket$  tel que  $i \neq j$ .

$$y_i \cdot y_j = x_i \cdot x_j - \frac{(x_i|x_p)(x_j|x_p)}{\|x_p\|^2} - \frac{(x_j|x_p)(x_i|x_p)}{\|x_p\|^2} + \frac{(x_i|x_p)(x_j|x_p)(x_p|x_p)}{\|x_p\|^4} = x_i \cdot x_j - \frac{(x_i|x_p)(x_j|x_p)}{\|x_p\|^2} < 0.$$

Mais alors, par hypothèse de récurrence,  $p - 1 \leq 1 + \dim H = n + 1$  et donc  $p \leq n + 2$ . Le résultat est démontré par récurrence. **2ème solution.** Montrons que si la famille  $(x_i)_{1 \leq i \leq p}$  est obtusangle, la famille  $(x_i)_{1 \leq i \leq p-1}$  est libre. Supposons par l'absurde, qu'il existe une famille de scalaires  $(\lambda_i)_{1 \leq i \leq p-1}$  non tous nuls tels que  $\sum_{i=1}^{p-1} \lambda_i x_i = 0$  (\*). Quite à multiplier les deux membres de (\*) par  $-1$ , on peut supposer qu'il existe au moins un réel  $\lambda_i > 0$ . Soit  $I$  l'ensemble des indices  $i$  tels que  $\lambda_i > 0$  et  $J$  l'ensemble des indices  $i$  tels que  $\lambda_i \leq 0$  (éventuellement  $J$  est vide).  $I$  et  $J$  sont disjoints. (\*) s'écrit  $\sum_{i \in I} \lambda_i x_i = -\sum_{i \in J} \lambda_i x_i$  (si  $J$  est vide, le second membre est nul). On a

$$0 \leq \left\| \sum_{i \in I} \lambda_i x_i \right\|^2 = \left( \sum_{i \in I} \lambda_i x_i \right) \cdot \left( -\sum_{i \in J} \lambda_i x_i \right) = \sum_{(i,j) \in I \times J} \lambda_i (-\lambda_j) x_i \cdot x_j \leq 0.$$

Donc,  $\left\| \sum_{i \in I} \lambda_i x_i \right\|^2 = 0$  puis  $\sum_{i \in I} \lambda_i x_i = 0$ . Mais, en faisant le produit scalaire avec  $x_p$ , on obtient  $(\sum_{i \in I} \lambda_i x_i) \cdot x_p = \sum_{i \in I} \lambda_i (x_i \cdot x_p) < 0$  ce qui est une contradiction. La famille  $(x_i)_{1 \leq i \leq p-1}$  est donc libre. Mais alors son cardinal  $p - 1$  est inférieur ou égal à la dimension  $n$  et donc  $p \leq n + 1$ .

### Correction de l'exercice 16 ▲

L'application  $(P, Q) \mapsto \int_0^1 P(t)Q(t) dt$  est un produit scalaire sur  $E = \mathbb{R}_3[X]$ . Déterminons une base orthonormée de  $E$ . Pour cela, déterminons  $(Q_0, Q_1, Q_2, Q_3)$  l'orthonormalisée de la base canonique  $(P_0, P_1, P_2, P_3) =$

$(1, X, X^2, X^3)$ . •  $\|P_0\|^2 = \int_{-1}^1 1^2 dt = 2$  et on prend  $Q_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}$ . •  $P_1|Q_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{-1}^1 t dt = 0$  puis  $P_1 - (P_1|Q_0)Q_0 =$

$X$  puis  $\|P_1 - (P_1|Q_0)Q_0\|^2 = \int_{-1}^1 t^2 dt = \frac{2}{3}$  et  $Q_1 = \sqrt{\frac{3}{2}}X$ . •  $P_2|Q_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{-1}^1 t^2 dt = \frac{\sqrt{2}}{3}$  et  $P_2|Q_1 = 0$ . Donc,

$P_2 - (P_2|Q_0)Q_0 - (P_2|Q_1)Q_1 = X^2 - \frac{1}{3}$ , puis  $\|P_2 - (P_2|Q_0)Q_0 - (P_2|Q_1)Q_1\|^2 = \int_{-1}^1 (t^2 - \frac{1}{3})^2 dt = 2(\frac{1}{5} - \frac{2}{9} + \frac{1}{9}) =$

$\frac{8}{45}$  et  $Q_2 = \frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}(3X^2 - 1)$ . •  $P_3|Q_0 = P_3|Q_2 = 0$  et  $P_3|Q_1 = \sqrt{\frac{3}{2}} \int_{-1}^1 t^4 dt = \frac{\sqrt{6}}{5}$  et  $P_3 - (P_3|Q_0)Q_0 - (P_3|Q_1)Q_1 =$

$(P_3|Q_2)Q_2 = X^3 - \frac{3}{5}X$ , puis  $\|X^3 - \frac{3}{5}X\|^2 = \int_{-1}^1 (t^3 - \frac{3}{5}t)^2 dt = 2(\frac{1}{7} - \frac{6}{25} + \frac{3}{25}) = 2\frac{25-21}{175} = \frac{8}{175}$ , et  $Q_3 = \frac{\sqrt{7}}{2\sqrt{2}}(5X^3 - 3X)$ .

Une base orthonormée de  $E$  est  $(Q_0, Q_1, Q_2, Q_3)$  où  $Q_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ,  $Q_1 = \sqrt{\frac{3}{2}}X$ ,  $Q_2 = \frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}(3X^2 - 1)$  et  $Q_3 = \frac{\sqrt{7}}{2\sqrt{2}}(5X^3 - 3X)$ . Soit alors  $P$  un élément quelconque de  $E = \mathbb{R}_3[X]$  tel que  $\int_{-1}^1 P^2(t) dt = 1$ . Posons  $P = aQ_0 + bQ_1 + cQ_2 + dQ_3$ . Puisque  $(Q_0, Q_1, Q_2, Q_3)$  est une base orthonormée de  $E$ ,  $\int_{-1}^1 P^2(t) dt = \|P\|^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1$ . Maintenant, pour  $x \in [-1, 1]$ , en posant  $M_i = \text{Max}\{|Q_i(x)|, x \in [-1, 1]\}$ , on a :

$$|P(x)| \leq |a| \times |Q_0(x)| + |b| \times |Q_1(x)| + |c| \times |Q_2(x)| + |d| \times |Q_3(x)| \leq |a|M_0 + |b|M_1 + |c|M_2 + |d|M_3 \\ \leq \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2} \sqrt{M_0^2 + M_1^2 + M_2^2 + M_3^2} = \sqrt{M_0^2 + M_1^2 + M_2^2 + M_3^2}.$$

Une étude brève montre alors que chaque  $|P_i|$  atteint son maximum sur  $[-1, 1]$  en 1 (et  $-1$ ) et donc

$$\sqrt{M_0^2 + M_1^2 + M_2^2 + M_3^2} = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{3}{2} + \frac{5}{2} + \frac{7}{2}} = 2\sqrt{2}.$$

Ainsi,  $\forall x \in [-1, 1]$ ,  $|P(x)| \leq 2\sqrt{2}$  et donc  $\text{Max}\{|P(x)|, x \in [-1, 1]\} \leq 2\sqrt{2}$ . Etudions les cas d'égalité. Soit  $P \in \mathbb{R}_3[X]$  un polynôme éventuel tel que  $\text{Max}\{|P(x)|, x \in [-1, 1]\} \leq 2\sqrt{2}$ . Soit  $x_0 \in [-1, 1]$  tel que  $\text{Max}\{|P(x)|, x \in [-1, 1]\} = |P(x_0)|$ . Alors :

$$2\sqrt{2} = |P(x_0)| \leq |a| \times |Q_0(x_0)| + |b| \times |Q_1(x_0)| + |c| \times |Q_2(x_0)| + |d| \times |Q_3(x_0)| \leq |a|M_0 + |b|M_1 + |c|M_2 + |d|M_3 \\ \leq \sqrt{M_0^2 + M_1^2 + M_2^2 + M_3^2} = 2\sqrt{2}.$$

Chacune de ces inégalités est donc une égalité. La dernière (CAUCHY-SCHWARZ) est une égalité si et seulement si  $(|a|, |b|, |c|, |d|)$  est colinéaire à  $(1, \sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{7})$  ou encore si et seulement si  $P$  est de la forme  $\lambda(\pm Q_0 \pm \sqrt{3}Q_1 \pm \sqrt{5}Q_2 \pm \sqrt{7}Q_3)$  où  $\lambda^2(1 + 3 + 5 + 7) = 1$  et donc  $\lambda = \pm \frac{1}{4}$ , ce qui ne laisse plus que 16 polynômes possibles. L'avant-dernière inégalité est une égalité si et seulement si  $x_0 \in \{-1, 1\}$  (clair). La première inégalité est une égalité si et seulement si

$$|aQ_0(1) + bQ_1(1) + cQ_2(1) + dQ_3(1)| = |a|Q_0(1) + |b|Q_1(1) + |c|Q_2(1) + |d|Q_3(1),$$

ce qui équivaut au fait que  $a, b, c$  et  $d$  aient même signe et  $P$  est l'un des deux polynômes

$$\pm \frac{1}{4}(Q_0 + \sqrt{3}Q_1 + \sqrt{5}Q_2 + \sqrt{7}Q_3) = \pm \frac{1}{4\sqrt{2}} \left( 1 + 3X + \frac{5}{2}(3X^2 - 1) + \frac{7}{2}(5X^3 - 3X) \right) \\ = \pm \frac{1}{8\sqrt{2}}(35X^3 + 15X^2 - 15X - 3)$$

### Correction de l'exercice 17 ▲

Si  $x$  est colinéaire à  $k$ ,  $r(x) = x$ , et si  $x \in k^\perp$ ,  $r(x) = (\cos \theta)x + (\sin \theta)k \wedge x$ . Soit  $x \in E$ . On écrit  $x = x_1 + x_2$  où  $x_1 \in k^\perp$  et  $x_2 \in \text{Vect}(k)$ . On a  $x_2 = (x.k)k$  (car  $k$  est unitaire) et  $x_1 = x - (x.k)k$ . Par suite,

$$r(x) = r(x_1) + r(x_2) = (\cos \theta)x_1 + (\sin \theta)k \wedge x_1 + x_2 = (\cos \theta)(x - (x.k)k) + (\sin \theta)k \wedge x + (x.k)k \\ = (\cos \theta)x + (1 - \cos \theta)(x.k)k + \sin \theta(k \wedge x) = (\cos \theta)x + 2\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)(x.k)k + \sin \theta(k \wedge x)$$

**Application.** Si  $k = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_1 + e_2)$  et  $\theta = \frac{\pi}{3}$ , pour tout vecteur  $x$ , on a :

$$r(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}(x.k)k + \frac{\sqrt{3}}{2}(k \wedge x),$$

$$\text{puis, } r(e_1) = \frac{1}{2}e_1 + \frac{1}{4}(e_1 + e_2) - \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}e_3 = \frac{1}{4}(3e_1 + e_2 - \sqrt{6}e_3)$$

$$r(e_2) = \frac{1}{2}e_2 + \frac{1}{4}(e_1 + e_2) + \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}e_3 = \frac{1}{4}(e_1 + 3e_2 + \sqrt{6}e_3)$$

$$r(e_3) = \frac{1}{2}e_3 + \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}(-e_2 + e_1) = \frac{1}{4}(\sqrt{6}e_1 - \sqrt{6}e_2 + 2e_3).$$

$$\text{La matrice cherchée est } \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 3 & 1 & \sqrt{6} \\ 1 & 3 & -\sqrt{6} \\ -\sqrt{6} & \sqrt{6} & 2 \end{pmatrix}.$$

### Correction de l'exercice 18 ▲

L'application  $(f, g) \mapsto \int_0^1 f(t)g(t) dt$  est un produit scalaire sur  $C^0([0, 1], \mathbb{R})$ . D'après l'inégalité de CAUCHY-SCHWARZ,

$$\begin{aligned} I_n I_{n+2} &= \int_0^1 f^n(t) dt \int_0^1 f^{n+2}(t) dt = \int_0^1 \left( \sqrt{(f(t))^n} \right)^2 dt \int_0^1 \left( \sqrt{(f(t))^{n+2}} \right)^2 dt \\ &\geq \left( \int_0^1 \sqrt{(f(t))^n} \sqrt{(f(t))^{n+2}} dt \right)^2 = \left( \int_0^1 f^{n+1}(t) dt \right)^2 = I_{n+1}^2 \end{aligned}$$

Maintenant, comme  $f$  est continue et strictement positive sur  $[0, 1]$ ,  $I_n$  est strictement positif pour tout naturel  $n$ . On en déduit que  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $\frac{I_{n+1}}{I_n} \leq \frac{I_{n+2}}{I_{n+1}}$  et donc que

$$\text{la suite } \left( \frac{I_{n+1}}{I_n} \right)_{n \in \mathbb{N}} \text{ est définie et croissante.}$$

### Correction de l'exercice 19 ▲

1. La symétrie, la bilinéarité et la positivité sont claires. Soit alors  $P \in \mathbb{R}_n[X]$ .

$$\begin{aligned} P|P = 0 &\Rightarrow \int_0^1 P^2(t) dt = 0 \\ &\Rightarrow \forall t \in [0, 1], P^2(t) = 0 \text{ (fonction continue, positive, d'intégrale nulle)} \\ &\Rightarrow P = 0 \text{ (polynôme ayant une infinité de racines)}. \end{aligned}$$

Ainsi, l'application  $(P, Q) \mapsto \int_0^1 P(t)Q(t) dt$  est un produit scalaire sur  $\mathbb{R}_n[X]$ .

2. Pour vérifier que la famille  $\left( \frac{L_p}{\|L_p\|} \right)_{0 \leq p \leq n}$  est l'orthonormalisée de SCHMIDT de la base canonique de  $E$ , nous allons vérifier que

$$(a) \quad \forall p \in \llbracket 0, n \rrbracket, \text{Vect}(L_0, L_1, \dots, L_p) = \text{Vect}(1, X, \dots, X^p),$$

$$(b) \quad \text{la famille } \left( \frac{L_p}{\|L_p\|} \right)_{0 \leq p \leq n} \text{ est orthonormale,}$$

$$(c) \quad \forall p \in \llbracket 0, n \rrbracket, L_p|X^p > 0.$$

Pour a), on note que  $L_p$  est un polynôme de degré  $p$  (et de coefficient dominant  $\frac{(2p)!}{p!}$ ). Par suite,  $(L_0, L_1, \dots, L_p)$  est une base de  $\mathbb{R}_p[X]$ , ou encore,  $\forall p \in \llbracket 0, n \rrbracket$ ,  $\text{Vect}(L_0, L_1, \dots, L_p) = \text{Vect}(1, X, \dots, X^p)$ . Soit  $p \in \llbracket 0, n \rrbracket$ . Soit  $P$  un polynôme de degré inférieur ou égal à  $p$ . Si  $p \geq 1$ , une intégration par parties fournit :

$$\begin{aligned} L_p|P &= \int_{-1}^1 ((t^2 - 1)^p)^{(p)} P(t) dt = \left[ ((t^2 - 1)^p)^{(p-1)} P(t) \right]_{-1}^1 - \int_{-1}^1 ((t^2 - 1)^p)^{(p-1)} P'(t) dt \\ &= - \int_{-1}^1 ((t^2 - 1)^p)^{(p-1)} P'(t) dt. \end{aligned}$$

En effet, 1 et  $-1$  sont racines d'ordre  $p$  de  $(t^2 - 1)^p$  et donc d'ordre  $p - k$  de  $((t^2 - 1)^p)^{(k)}$  pour  $0 \leq k \leq p$  et en particulier, racines de chaque  $((t^2 - 1)^p)^{(k)}$  pour  $0 \leq k \leq p - 1$ . En réitérant, on obtient pour tout  $k \in \llbracket 0, p \rrbracket$ ,  $L_p|P = (-1)^k \int_{-1}^1 ((t^2 - 1)^p)^{(p-k)} P^{(k)}(t) dt$  et pour  $k = p$ , on obtient enfin  $L_p|P = (-1)^p \int_{-1}^1 (t^2 - 1)^p P^{(p)}(t) dt$ , cette formule restant vraie pour  $p = 0$ . Soient  $p$  et  $q$  deux entiers tels que  $0 \leq q < p \leq n$ . D'après ce qui précède,  $L_p|L_q = (-1)^p \int_{-1}^1 (t^2 - 1)^p L_q^{(p)}(t) dt = 0$  car  $q = \deg(L_q) < p$ . Ainsi, la famille  $(L_p)_{0 \leq p \leq n}$  est donc une famille orthogonale de  $n + 1$  polynômes tous non nuls et est par suite est une base orthogonale de  $\mathbb{R}_n[X]$ . On en déduit que la famille  $\left(\frac{L_p}{\|L_p\|}\right)_{0 \leq p \leq n}$  est une base orthonormale de  $\mathbb{R}_n[X]$ . Enfin,  $L_p|X^p = (-1)^p \int_{-1}^1 (t^2 - 1)^p (t^p)^{(p)} dt = p! \int_{-1}^1 (1 - t^2)^p dt > 0$ . On a montré que

la famille  $\left(\frac{L_p}{\|L_p\|}\right)_{0 \leq p \leq n}$  est l'orthonormalisée de la base canonique de  $\mathbb{R}_n[X]$ .

Calculons  $\|L_p\|$ . On note que  $L_p \in (L_0, \dots, L_{p-1})^\perp = (\mathbb{R}_{p-1}[X])^\perp$ . Par suite,

$$\begin{aligned} \|L_p\|^2 &= L_p|L_p = L_p|\text{dom}(L_p)X^p \text{ (car } L_p \in (\mathbb{R}_{p-1}[X])^\perp) \\ &= \frac{(2p)!}{p!} L_p|X^p = \frac{(2p)!}{p!} p! \int_{-1}^1 (1 - t^2)^p dt = 2(2p)! \int_0^1 (1 - t^2)^p dt \\ &= 2(2p)! \int_{\pi/2}^0 (1 - \cos^2 u)^p (-\sin u) du = 2(2p)! \int_0^{\pi/2} \sin^{2p+1} u du \\ &= 2(2p)! W_{2p+1} \text{ (intégrales de WALLIS)} \\ &= 2(2p)! \frac{2^{2p}(p!)^2}{(2p+1)!} \text{ (à revoir)} \\ &= \frac{2}{2p+1} 2^{2p}(p!)^2. \end{aligned}$$

Donc,  $\forall p \in \llbracket 0, n \rrbracket$ ,  $\|L_p\| = \sqrt{\frac{2}{2p+1}} 2^p p!$ . On en déduit que la famille  $\left(\sqrt{\frac{2}{2p+1}} \frac{1}{2^p p!} ((X^2 - 1)^p)^{(p)}\right)_{0 \leq p \leq n}$  est une base orthonormale de  $\mathbb{R}_n[X]$  (pour le produit scalaire considéré).