TD 5 : Fonctions usuelles

Généralités sur les fonctions :

Exercice 1. (*)

1. Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. Montrer que si f est paire, f' est impaire et si f est impaire, f' est paire.
2. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et f une fonction n fois dérivable sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. $f^{(n)}$ désignant la dérivée n-ième de f, montrer que si f est paire, $f^{(n)}$ est paire si n est pair et impaire si n est impair.
3. Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. A-t-on des résultats analogues concernant les primitives de f ?
4. Reprendre les questions précédentes en remplaçant la condition « f est paire (ou impaire) » par la condition « f est T-périodique ».

Exercice 2. (*)

1. Montrer que la fonction $x \longmapsto x - \dfrac{1}{x}$ est injective sur $\mathbb{R}^{+*}$. Et sur $\mathbb{R}^*$?
2. (a) La fonction $x \longmapsto xe^x$ est-elle injective sur $\mathbb{R}$?
   (b) Déterminer son image.
3. (a) La fonction $f : x \longmapsto \sqrt{x^2+x+1}$ est-elle injective sur $\mathbb{R}$?
   (b) Déterminer $f(]-2,4])$.

Exercice 3. (*)

Soit $a \in \mathbb{R}$. Définissons $f_a : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ par

$$f_a(x) : \begin{cases} x+a & \text{si } x \geq 0 \\ x-a & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Déterminer les réels a pour lesquels f_a est surjective.
2. Déterminer les réels a pour lesquels f_a est injective.

Exercice 4. (**)

$$f : x \mapsto \begin{cases} x+1 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ x & \text{sinon.} \end{cases}$$

La fonction est-elle surjective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$? injective ? bijective ?

Exercice 5. (***)

Pour une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, on définit les fonctions partie positive et partie négative de f par $f_+ : x \mapsto \max(f(x), 0)$ et $f_- : x \mapsto \max(-f(x), 0)$

1. Montrer que si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est k-lipschitzienne, alors les fonctions f_+ et f_- sont aussi k-lipschitziennes.
2. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que f_+ et f_- sont k-lipschitziennes. Montrer que f est k-lipschitzienne.

Exponentielle, logarithmes, puissance et fonction valeur absolue :

Exercice 6. (*)

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations ou inéquations suivantes :

1. $\exp(x) \geq 1 + x$.
2. $\ln|x+1| - \ln|2x+1| \leq \ln 2$.
3. $x^{\sqrt{x}} = \sqrt{x}^x$.

Exercice 7. (*)

1. Etudier brièvement la fontion $x \mapsto \frac{\ln x}{x}$ et tracer son graphe.
2. Trouver tous les couples (a, b) d'entiers naturels non nuls et distincts vérifiant $a^b = b^a$.

Exercice 8. (*)

Tracer le graphe de $x \longmapsto 2|x-1| - |x+1|$.

Exercice 9. (*)

Résoudre dans $\mathbb{R}$:

1. $2|2x-1| = |x+2| + 3x$
2. $3 - |2-3x| \geq |3x+4|x$

Exercice 10. (*)

Trouver la plus grande valeur de $\sqrt[n]{n}$, $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 11. (**)

1. Montrer que, pour tout entier n, 4 divise n^2 ou $n^2 - 1$.
2. En déduire que, pour tout n, $\lfloor\sqrt{4n+1}\rfloor = \lfloor\sqrt{4n+3}\rfloor$.

Exercice 12. (**)

Montrer que pour tout $n \geq 2$:

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leq e \leq \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{-n}$$

Exercice 13. (**)

Montrer pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\forall x \in \mathbb{R}^+,\ \exp(x) \ \geq \ \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}.$$

Cette inégalité est-elle vraie sur $\mathbb{R}$?

Fonctions hyperboliques :

Exercice 14. (*)

Simplifier l'expression $\dfrac{2\mathrm{ch}^2(x) - \mathrm{sh}(2x)}{x - \ln(\mathrm{ch}x) - \ln 2}$ et donner ses limites en $-\infty$ et $+\infty$.

Exercice 15. (**)

Soit x un réel fixé. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$C_n = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{ch}(kx) \qquad \text{et} \qquad S_n = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{sh}(kx).$$

Calculer C_n et S_n.

Exercice 16. (*)

Pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$
factoriser la somme $\sum_{k=0}^{n} \mathrm{ch}(2kx)$

Exercice 17. (**)

Soit a et b deux réels positifs tels que $a^2 - b^2 = 1$.
Résoudre le système

$$\begin{cases} \mathrm{ch}(x) + \mathrm{ch}(y) = 2a \\ \mathrm{sh}(x) + \mathrm{sh}(y) = 2b \end{cases}$$

Exercice 18. (**)

Montrer que, pour tout $x \neq 0$,

$$\frac{1}{\mathrm{sh}(x)} = \frac{1}{\mathrm{th}(x)} - \frac{1}{\mathrm{th}\left(\frac{x}{2}\right)}$$

En déduire une expression simple de $\sum_{k=0}^{n} \dfrac{1}{\mathrm{sh}(2^k x)}$ puis sa limite quand n tend vers $+\infty$.

Fonctions circulaires et réciproques :

Exercice 19. (*)

Déterminer les réels x tels que $(\cos x)^4 + (\sin x)^6 = 1$.

Exercice 20. (*)

Écrire sous forme d'expression algébrique

1. $\sin(\arccos x)$, $\cos(\arcsin x)$, $\cos(2\arcsin x)$.
2. $\sin(\arctan x)$, $\cos(\arctan x)$, $\sin(3\arctan x)$.

Exercice 21. (*)

Montrer que pour tout $x > 0$, on a

$$\arctan\left(\frac{1}{2x^2}\right) = \arctan\left(\frac{x}{x+1}\right) - \arctan\left(\frac{x-1}{x}\right).$$

En déduire une expression de $S_n = \sum_{k=1}^{n} \arctan\left(\dfrac{1}{2k^2}\right)$ et calculer $\lim_{n\to+\infty} S_n$.

Exercice 22. (*)

Résoudre les équations suivantes :

1. $\arccos x = 2\arccos \frac{3}{4}$.
2. $\arcsin x = \arcsin \frac{2}{5} + \arcsin \frac{3}{5}$.
3. $\arctan 2x + \arctan x = \frac{\pi}{4}$.

Exercice 23. (**)

Vérifier lorsque l'on peut définir les expressions ci-dessous que :

1. $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$.
2. $\arctan x + \arctan \frac{1}{x} = \mathrm{sgn}(x)\frac{\pi}{2}$..

Exercice 24. (**)

Calculer $3\arctan\dfrac{1}{3} + \arctan\dfrac{1}{7}$.
