TD 13 : Espaces vectoriels

Connaître son cours :

- Soit $e_1, \dots, e_p$ des vecteurs d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E.
  Montrer que pour tous $\lambda \in \mathbb{K}$ et $i \neq j \in [\![1, p]\!]$, $\text{Vect}(e_1, \dots, e_p) = \text{Vect}(e_1, \dots, e_i + \lambda e_j, \dots, e_p)$.
- Montrer que la somme de deux sous-espaces vectoriels est directe si, et seulement si, leur intersection est égale à $\{0_E\}$. Ceci reste-t-il vrai pour plus de deux sous-espaces vectoriels ? Donner un exemple de deux sous-espaces vectoriels de $E = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ qui sont supplémentaires dans E.
- Soit u une application linéaire entre deux $\mathbb{K}$ espaces vectoriels E et F.Montrer que :
  - □ L'image directe par u d'un sous-espace vectoriel de E est un sous-espace vectoriel de F.
  - □ L'image réciproque par u d'un sous-espace vectoriel de F est un sous-espace vectoriel de E.
  - □ L'application u est injective si, et seulement si, $\text{Ker}(u) = \{0_E\}$. Cela reste-t-il vrai si l'application u n'est plus linéaire ?
- Soit p un projecteur d'un espace vectoriel E. Montrer que $\text{Ker}(p)$ et $\text{Im}(p)$ sont supplémentaires et expliciter le projecteur complémentaire de p.
- Soit E un $\mathbb{K}$ espace vectoriel et u un endomorphisme de E tel que, pour tout $x \in E$, il existe $\lambda_x \in \mathbb{K}$ tel que $u(x) = \lambda_x \cdot x$, montrer que u est une homothétie. En déduire que les endomorphismes de E commutant avec tous les endomorphismes de E sont les homothéties.

Structure d'espace vectoriel :

Exercice 1. (*)

Déterminer lesquels des ensembles suivants sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$.
$E_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 3x - 7y = z\}$
$E_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 - z^2 = 0\}$
$E_3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y - z = x + y + z = 0\}$

Exercice 2. (**)

Soit $E = \Delta(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ l'espace des fonctions dérivables et $F = \{f \in E \mid f(0) = f'(0) = 0\}$. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E et déterminer un supplémentaire de F dans E.

Exercice 3. (**)

Soit $E = \{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid (u_n)_n \text{ converge }\}$. Montrer que l'ensemble des suites constantes et l'ensemble des suites convergeant vers 0 sont des sous-espaces supplémentaires dans E.

Exercice 4. (*)

1. Décrire les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}$; puis de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$.
2. Dans $\mathbb{R}^3$ donner un exemple de deux sous-espaces dont l'union n'est pas un sous-espace vectoriel.

Exercice 5. (**)

Soit E un espace vectoriel.

1. Soient F et G deux sous-espaces de E. Montrer l'équivalence entre les points suivants :
   - $F \cup G$ est un sous-espace vectoriel de E.
   - $F \subset G$ ou $G \subset F$.
2. Soit H un troisième sous-espace vectoriel de E. Prouver que $G \subset F \Rightarrow F \cap (G + H) = G + (F \cap H)$.

Exercice 6. (*)

Déterminer si les parties suivantes sont des sous-espaces vectoriels de $M_2(\mathbb{R})$:
$E_1 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) : \ ad - bc = 1 \right\}$;
$E_2 = \left\{ A \in M_2(\mathbb{R}) : \ {}^tA = A \right\}$.

Exercice 7. (*)

1. Dans $\mathbb{R}[X]$, $P(X) = 16X^3 - 7X^2 + 21X - 4$ est-il combinaison linéaire de $P_1(X) = 8X^3 - 5X^2 + 1$ et $P_2(X) = X^2 + 7X - 2$?
2. Dans $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, la fonction $x \mapsto \sin(2x)$ est-elle combinaison linéaire des fonctions sin et cos ?

Exercice 8. (*)

Les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ suivants sont-ils en somme directe ?

1. $F = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 2y + z = 0\right\}$ et $G = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid \begin{cases} 2x + y + 3z = 0 \\ x - 2y - z = 0 \end{cases} \right\}$;
2. $H = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + 2z = 0\right\}$ et $I = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid \begin{cases} 2x + y + 3z = 0 \\ x - 2y - z = 0 \end{cases} \right\}$.

Exercice 9. (**)

Soit E l'espace vectoriel des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, F le sous-espace vectoriel des fonctions périodiques de période 1 et G le sous-espace vectoriel des fonctions f telles que $\lim\limits_{+\infty} f = 0$. Démontrer que $F \cap G = \{0\}$. Est-ce que F et G sont supplémentaires ?

Exercice 10. (**)

Soient F et G deux sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E tels que $F + G = E$. Soit F' un supplémentaire de $F \cap G$ dans F.
Montrer que $F' \oplus G = E$.

Exercice 11. (*)

Déterminer parmi les ensembles suivants ceux qui sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

1. L'ensemble des fonctions réelles 1-lipschitziennes.
2. L'ensemble des fonctions réelles f telles que
$$\exists k \in \mathbb{R}, \ \forall x \in \mathbb{R}, \ |f(x)| \leq k|x|.$$
3. L'ensemble des fonctions réelles f telles que
$$\exists k \in \mathbb{R}, \ \forall x \in \mathbb{R}, \ |f(x)| \geq k|x|.$$

Exercice 12. (**)

1. Montrer par des opérations sur les Vect les égalités :

$$\mathbb{R}_2[X] \ = \ \mathrm{Vect}\left((X-1)^2, (X-1)(X+1), (X+1)^2\right).$$

2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\underset{0 \leq k \leq n}{\mathrm{Vect}}\Big(\big(x \mapsto \cos(kx)\big)\Big) = \underset{0 \leq k \leq n}{\mathrm{Vect}}\Big(\big(x \mapsto \cos^k(x)\big)\Big).$$

Exercice 13. (*)

Montrer que $a = (1,2,3)$ et $b = (2,-1,1)$ engendrent le même sous espace de $\mathbb{R}^3$ que $c = (1,0,1)$ et $d = (0,1,1)$.

Exercice 14. (*)

Soit F le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ engendré par $u = (1,2,-5,3)$ et $v = (2,-1,4,7)$. Déterminer λ et μ réels tels que $(\lambda, \mu, -37, -3)$ appartienne à F.

Exercice 15. (***)

Soit E un espace vectoriel dans lequel tout sous-espace vectoriel admet un supplémentaire.
Soit F un sous-espace vectoriel propre de E (c'est-à-dire que $F \neq \{0\}$ et que $F \neq E$).
Démontrer que F admet au moins deux supplémentaires distincts.

Applications linéaires :

Exercice 16. (*)

Dire si les applications suivantes sont des applications linéaires :

1. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3,\ (x, y) \mapsto (x + y, x - 2y, 0)$;
2. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3,\ (x, y) \mapsto (x + y, x - 2y, 1)$;
3. $f : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}^2,\ P \mapsto \big(P(0), P'(1)\big)$;
4. $f : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X],\ P \mapsto AP$, où $A \in \mathbb{R}[X]$ est un polynôme fixé ;

Exercice 17. (*)

On considère l'application linéaire f de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^4$ définie par $f(x, y, z) = (x + z, y - x, z + y, x + y + 2z)$. L'application f est-elle injective ? surjective ?

Exercice 18. (*)

Soit $E = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ et $\phi \in \mathcal{L}(E)$ définie par $\phi(f) = f'$. Quel est le noyau de ϕ ? Quelle est son image ? ϕ est-elle injective ? surjective ?

Exercice 19. (**)

Soit E l'espace vectoriel des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On note $L : E \to E$ l'application qui à $f \in E$ associe $L(f)$ définie par $L(f) : x \mapsto f(x) - f(-x)$.

1. Montrer que L est un endomorphisme de E.
2. Préciser le noyau et l'image de L.
3. L'application L est-elle injective ? surjective ?

Exercice 20. (***)

Soit $E = \mathbb{C}[X]$, p un entier naturel et f l'application de E dans E définie par $f(P) = (1 - pX)P + X^2P'$. f est-elle injective ? surjective ?

Exercice 21. (***)

Soit u un endomorphisme de E , $\lambda \neq \mu$ deux scalaires. Montrer que les sous-espaces $\mathrm{Ker}(u - \lambda \mathrm{Id})^2$ et $\mathrm{Ker}(u - \mu \mathrm{Id})^2$ sont en somme directe.

Exercice 22. (**)

Soit E un e.v. , F un s.e.v. de E et $u \in \mathcal{L}(E)$.

1. Montrer que $u^{-1}(u(F)) = F + \mathrm{Ker}(u)$.
2. Déterminer $u(u^{-1}(F))$.

Exercice 23. (**)

Soit $E = \mathbb{R}_3[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à 3. On définit u l'application de E dans lui-même par

$$u(P) = P + (1 - X)P'.$$

1. Montrer que u est un endomorphisme de E.
2. L'application u est-elle injective ? surjective ?

Exercice 24. (**)

Soit E un espace vectoriel et $u, v \in \mathcal{L}(E)$. On suppose que $u \circ v = v \circ u$. Démontrer que $\ker(u)$ et $\mathrm{Im}(u)$ sont stables par v, c'est-à-dire que

$$v(\ker(u)) \subset \ker(u) \text{ et } v(\mathrm{Im}(u)) \subset \mathrm{Im}(u).$$

Exercice 25. (**)

Soit E un espace vectoriel et $f, g \in \mathcal{L}(E)$. Démontrer que

$$E = \mathrm{Im}(f) + \ker(g) \iff \mathrm{Im}(g \circ f) = \mathrm{Im}(g).$$

Exercice 26. (***)

Soit E un espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E)$.

1. Montrer que $\ker(f) = \ker(f^2) \iff \mathrm{Im} f \cap \ker(f) = \{0\}$.
2. On suppose que E est de dimension finie. Montrer que conditions suivantes sont équivalentes :
   - ☐ $\ker(f) = \ker(f^2)$
   - ☐ $\mathrm{Im} f \oplus \ker(f) = E$
   - ☐ $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Im}(f^2)$

Endomorphismes remarquables :

Exercice 27. (**)

On considère l'application linéaire $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définie par $f(x,y,z) = (2x-2z, y, x-z)$. f est-elle une symétrie ? une projection ?

Exercice 28. (**)

Soit $A \in \mathbb{R}[X]$ non nul, et $\phi : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X]$ l'application qui à un polynôme P associe son reste dans la division euclidienne par A. Démontrer que ϕ est un projecteur et préciser ses éléments caractéristiques.

Exercice 29. (***)

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Soient p et q deux projecteurs de E.

1. Montrer que $p+q$ est un projecteur si et seulement si $p \circ q = q \circ p = 0$.
2. Montrer que, dans ce cas, on a $\mathrm{Im}(p+q) = \mathrm{Im}(p) \oplus \mathrm{Im}(q)$ et $\ker(p+q) = \ker p \cap \ker q$.

Exercice 30. (**)

Considérons deux projections p et q sur le même sous-espace G (mais de directions différentes) et $\lambda \in \mathbb{R}$. Montrer que $\lambda p + (1-\lambda) q$ est une projection sur G.

Exercice 31. (*)

On considère l'endomorphisme $s : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ défini par

$$s(x,y,z) = (-x-4y-2z,\ 4x+9y+4z,\ -8x-16y-7z).$$

Montrer que s est une symétrie.

Exercice 32. (***)

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

1. Par définition, un endomorphisme p de E est un projecteur si et seulement si $p^2 = p$.
   Montrer que
   $$[p \text{ projecteur} \Leftrightarrow Id - p \text{ projecteur}]$$
   puis que
   $$[p \text{ projecteur} \Rightarrow \mathrm{Im}p = \mathrm{Ker}(Id-p)]$$
   $$[p \text{ projecteur} \Rightarrow \mathrm{Ker}p = \mathrm{Im}(Id-p)]$$
   $$[p \text{ projecteur} \Rightarrow E = \mathrm{Ker}p \oplus \mathrm{Im}p]$$
2. Soient p et q deux projecteurs, montrer que : $[\mathrm{Ker}p = \mathrm{Ker}q \Leftrightarrow p = p \circ q \text{ et } q = q \circ p]$.
3. p et q étant deux projecteurs vérifiant $p \circ q + q \circ p = 0$, montrer que $p \circ q = q \circ p = 0$. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que $p+q$ soit un projecteur lorsque p et q le sont. Dans ce cas, déterminer $\mathrm{Im}(p+q)$ et $\mathrm{Ker}(p+q)$ en fonction de $\mathrm{Ker}p$, $\mathrm{Ker}q$, $\mathrm{Im}p$ et $\mathrm{Im}q$.
