CONCOURS 2000

DES ÉCOLES DES MINES D'ALBI, ALÈS, DOUAI, NANTES

Epreuve de Mathématiques (toutes filières)

Instructions générales :

Les candidats sont invités à porter une attention particulière à la rédaction : les copies illisibles ou mal présentées seront pénalisées.

Analyse

Partie I : Etude de la fonction réciproque de la fonction tanh.

On notera respectivement cosh, sinh et tanh les fonctions cosinus hyperbolique, sinus hyperbolique et tangente hyperbolique définies par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad \text{et} \quad \tanh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}.$$

1. Montrer, en étudiant ses variations, que tanh est une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ à préciser.
   On note artanh " argument tangente hyperbolique " sa réciproque.
2. Exprimer la dérivée de tanh en fonction de tanh.
3. Démontrer que artanh est impaire.
4. Démontrer que artanh est dérivable sur I et calculer sa dérivée.
5. Exprimer artanh à l'aide de fonctions usuelles.
6. Déterminer un développement limité à l'ordre 5 de artanh en 0.

Partie II : Etude d'une équation différentielle

Soit l'équation différentielle (E) : $x\,y' + 3\,y = \dfrac{1}{1-x^2}$.

7. Résoudre (E) sur l'intervalle $J =]0, 1[$.

Partie III : Etude d'une équation fonctionnelle

Le but de cette partie est de résoudre le problème suivant :
déterminer les fonctions f <u>définies sur $\mathbb{R}$, à valeurs réelles et dérivables en 0</u> qui vérifient :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(2x) = \frac{2f(x)}{1 + (f(x))^2}$$

8. Déterminer les fonctions constantes solutions du problème posé.
9. Déterminer les valeurs possibles de $f(0)$ si f est solution.
10. Montrer que, si f est solution, on a $\forall x \in \mathbb{R},\ -1 \leqslant f(x) \leqslant 1$. (on pourra exprimer $f(x)$ en fonction de $f\left(\dfrac{x}{2}\right)$.)

11. Montrer que si f est solution, $-f$ est aussi solution.
12. Montrer que tanh est solution du problème posé.

    Dans les questions **13.** à **17.**, on suppose que f **est une solution du problème posé, que** $f(0) = 1$ **et que** f **n'est pas constante.**

    On considère $x_0 \in \mathbb{R}$, tel que $f(x_0) \neq f(0)$ et l'on définit la suite (u_n) par : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = f\left(\dfrac{x_0}{2^n}\right)$.

13. Montrer que la suite (u_n) est convergente et préciser sa limite.
14. Etablir une relation entre u_n et u_{n+1} ; en déduire que la suite (u_n) garde un signe constant, puis étudier sa monotonie suivant le signe de u_0.
15. En utilisant les résultats des questions **13.** et **14.**, aboutir à une contradiction.
16. Que peut-on dire si l'hypothèse " $f(0) = 1$ " est remplacée par l'hypothèse " $f(0) = -1$ " ?
17. Conclusion ?

    Dans les questions **18.** à **22.**, on suppose que f **est une solution du problème posé et que** $f(0) = 0$.

18. En raisonnant par l'absurde et en considérant une suite du même type que celle des questions **13.** à **17.**, montrer que :

    $$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) \neq -1 \quad \text{et} \quad f(x) \neq -1.$$

    On définit alors la fonction g par : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = \operatorname{artanh}(f(x))$.

19. Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R},\ g(2x) = 2\,g(x)$.
20. Montrer que g est dérivable en zéro.
21. Soit $x \in \mathbb{R}^\times$; on définit la suite (v_n) par : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n = \dfrac{f\left(\dfrac{x}{2^n}\right)}{\dfrac{x}{2^n}}$.

    Montrer que (v_n) est convergente et déterminer sa limite.
22. En déduire que g est linéaire.
23. Déterminer toutes les fonctions solutions du problème posé.

Algèbre

Les parties I et II sont, dans une large mesure, indépendantes.
Soit n un entier naturel non nul.

Partie I

On pose : $\mathrm{A} = (\mathrm{X}+1)^{2n} - 1$, polynôme de $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$.

1. Montrer que l'on peut écrire $\mathrm{A} = \mathrm{XB}$ où B est un polynôme de $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$ dont on précisera le degré, le coefficient dominant et le terme constant noté b_0.
2. Déterminer les racines de A dans $\mathbb{C}$. On posera $z_0 = 0$ et les autres racines $z_1, z_2, \ldots, z_{2n-1}$ seront mises sous forme trigonométrique.

    On pose $\mathrm{P}_n = \displaystyle\prod_{k=1}^{n-1} \sin \frac{k\pi}{2n}$.

3. Montrer, à l'aide d'un changement d'indice, que $\mathrm{P}_n = \prod_{k=n+1}^{2n-1} \sin \frac{k\pi}{2n}$.

   En déduire que, si $\mathrm{Q}_n = \prod_{k=1}^{2n-1} \sin \frac{k\pi}{2n}$, alors $\mathrm{P}_n = \sqrt{\mathrm{Q}_n}$.

4. Calculer de deux façons : $\prod_{k=1}^{2n-1} z_k$. Puis, en déduire Q_n et enfin, P_n.

5. On pose $\mathrm{F} = \frac{1}{\mathrm{A}}$. Déterminer la décomposition de F en éléments simples sur $\mathbb{C}$.

Partie II :

On travaille dans un $\mathbb{C}$-espace vectoriel E supposé non réduit au vecteur nul. $\mathcal{L}(\mathrm{E})$ désigne l'ensemble des endomorphismes de E, I_E est l'application identité de E et θ désigne l'application nulle. Par convention : $\forall f \in \mathcal{L}(\mathrm{E}), \quad f^0 = \mathrm{I}_\mathrm{E}$.

On étudie sur quelques cas particuliers, l'équation : $(f+\mathrm{I}_\mathrm{E})^{2n} - \mathrm{I}_\mathrm{E} = \theta$ où $f \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$ est l'inconnue.

6. Déterminer les homothéties vectorielles qui sont solutions de l'équation proposée.

7. En développant $(1+1)^{2n}$ et $(1-1)^{2n}$ déterminer les sommes $\mathrm{S} = \sum_{k=0}^{n} \binom{2n}{2k}$ et $\mathrm{S}' = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{2n}{2k+1}$

   (la notation $\binom{n}{k}$ désigne le coefficient binomial : $\frac{n!}{k!(n-k)!}$.)

8. Si s est une symétrie de E, exprimer $(s+\mathrm{I}_\mathrm{E})^{2n} - \mathrm{I}_\mathrm{E}$ en fonction de s et I_E.
   En déduire les symétries de E solutions de l'équation proposée.