TD 16 : Intégration

Connaître son cours :

- Soit f une fonction continue sur $[a,b]$, positive et non nulle en au moins un point de $[a,b]$.
  Alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt > 0$
- Soit f et g deux fonctions continues par morceaux sur $[a,b]$.
  Alors, $\displaystyle\left|\int_a^b f(t)g(t)\,dt\right| \leq \left(\int_a^b f(t)^2\,dt\right)^{\frac{1}{2}} \times \left(\int_a^b g(t)^2\,dt\right)^{\frac{1}{2}}$
- Soit $b > a$. Calculer $\displaystyle\int_a^b e^t\,dt$ avec les sommes de Riemann.
- Montrer que l'intégrale d'une fonction impaire sur un segment symétrique par rapport à 0 est nulle.
- Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur I un intervalle réel et $a \in I$. Donner la formule de Taylor avec reste intégral en a.

Propriétés de l'intégrale :

Exercice 1. (*)

Calculer les primitives des fonctions suivantes en précisant le ou les intervalles considérés :

1. $\dfrac{1}{x^3+1}$
2. $\dfrac{x^2}{x^3+1}$
3. $\dfrac{1}{x(x^2+1)^2}$

Exercice 2. (*)

Calculer les primitives des fonctions suivantes en précisant le ou les intervalles considérés :

1. $\dfrac{1}{\cos x}$
2. $\dfrac{\sin^2(x/2)}{x-\sin x}$
3. $\dfrac{1}{\cos^4 x+\sin^4 x}$
4. $\dfrac{\sin x}{\cos(3x)}$

Exercice 3. (**)

Faire une étude de la fonction

$$f(x) = \int_{-1}^{1} \frac{\sin x}{1-2t\cos x+t^2}\,dt$$

Exercice 4. (**)

Faire une étude de la fonction

$$f(x) = \int_0^1 \mathrm{Max}(x,t)\,dt$$

Exercice 5. (**)

1. Soit f une application de classe C^1 sur $[0,1]$ telle que $f(1) \neq 0$.
   Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \int_0^1 t^n f(t)\,dt$.
   Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$ puis déterminer un équivalent simple de u_n quand n tend vers $+\infty$ (étudier $\lim\limits_{n\to+\infty} nu_n$).
2. Mêmes questions en supposant que f est de classe C^2 sur $[0,1]$ et que $f(1) = 0$ et $f'(1) \neq 0$.

Exercice 6. (**)/(***) (*Lemme de* Lebesgue)

1. On suppose que f est une fonction de classe C^1 sur $[a,b]$. Montrer que $\lim_{\lambda\to+\infty} \int_a^b \sin(\lambda t) f(t)\,dt = 0$.
2. Redémontrer le même résultat en supposant simplement que f est continue par morceaux sur $[a,b]$ (commencer par le cas des fonctions en escaliers).

Exercice 7. (*)

Soit $f, g \in \mathcal{C}_m^0([0,1], \mathbb{R}^+), \forall x \in [0,1],\ f(x)g(x) \geq 1$.
Montrer que $\left(\int_0^1 f(t)\,dt\right)\left(\int_0^1 g(t)\,dt\right) \geq 1$.

Exercice 8. (**)

Soit E l'ensemble des fonctions continues strictement positives sur $[a,b]$.
Soit $\begin{array}{cccc} \varphi : & E & \to & \mathbb{R} \\ & f & \mapsto & \left(\int_a^b f(t)\,dt\right)\left(\int_a^b \frac{1}{f(t)}\,dt\right) \end{array}$.

1. Montrer que $\varphi(E)$ n'est pas majoré.
2. Montrer que $\varphi(E)$ est minoré. Trouver $m = \mathrm{Inf}\{\varphi(f),\ f \in E\}$. Montrer que cette borne infèrieure est atteinte et trouver toutes les f de E telles que $\varphi(f) = m$.

Exercice 9. (**)

Soit f une fonction de classe C^1 sur $[0,1]$ telle que $f(0) = 0$. Montrer que $2\int_0^1 f^2(t)\,dt \leq \int_0^1 f'^2(t)\,dt$.

Exercice 10. (**)

Soit f continue sur $[0,1]$ telle que $\int_0^1 f(t)\,dt = \frac{1}{2}$.
Montrer que f admet un point fixe.

Exercice 11. (**)

Déterminer les limites quand n tend vers $+\infty$ de

1. $u_n = \frac{1}{n!}\int_0^1 \mathrm{Arcsin}^n(x)\,dx$
2. $v_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\,dx$

Exercice 12. (**)

1. Démontrer que la fonction sin est lipschitzienne sur $\mathbb{R}$.
2. Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue.
   Démontrer que la fonction $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par
   $$F(x) = \int_a^b f(t)\sin(xt)dt$$
   est lipschitzienne.

Exercice 13. (**)

Soit f une fonction de classe C^1 sur $[a,b]$ telle que $f(a) = f(b) = 0$ et soit $M = \sup\{|f'(x)|,\ x \in [a,b]\}$.
Montrer que $\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq M\frac{(b-a)^2}{4}$.

Exercice 14. (**)

Déterminer les fonctions f continues sur $[0,1]$ vérifiant $\left|\int_0^1 f(t)\,dt\right| = \int_0^1 |f(t)|\,dt$.

Exercice 15. (**)

— Déterminer
$$\lim_{x\to 1}\int_x^{x^2}\frac{dt}{\ln t}$$
— Faire une étude complète de
$$F(x) = \int_x^{x^2}\frac{dt}{\ln t}$$

Exercice 16. (**)

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue telle que, pour tout couple $(\alpha,\beta) \in [a,b]^2$, on a
$$\int_\alpha^\beta f(x)dx = 0$$
Montrer que $f = 0$.

Exercice 17. (***) (Cesaro *pour les intégrales*)

Soit $f : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction continue admettant une limite finie a en $+\infty$.
Montrer que
$$\frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt \to a \quad \text{quand} \quad x \to +\infty.$$

Exercice 18. (***)

Soient f et g deux fonctions continues et strictement positives sur $[a,b]$. Pour n entier naturel non nul donné, on pose $u_n = \left(\int_a^b (f(x))^n g(x)\,dx\right)^{1/n}$.
Montrer que la suite (u_n) converge et déterminer sa limite (commencer par le cas $g = 1$).

Sommes de Riemann :

Exercice 19. (**)

Calculer la limite des suites suivantes :

1. $u_n = \frac{1}{n}\left(\sin\left(\frac{\pi}{n}\right) + \sin\left(\frac{2\pi}{n}\right) + \cdots + \sin\left(\frac{n\pi}{n}\right)\right)$
2. $u_n = \sqrt[n]{\left(1+\left(\frac{1}{n}\right)^2\right)\left(1+\left(\frac{2}{n}\right)^2\right)\ldots\left(1+\left(\frac{n}{n}\right)^2\right)}$

Exercice 20. (**)

Déterminer la limite de $v_n = \frac{1}{n}\prod_{k=1}^{n}(k+n)^{1/n}$.

Exercice 21. (**)

Donner les limites de

1. $\frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n} k^2 \sin\frac{k\pi}{n}$
2. $\sum_{k=1}^{n}\frac{n+k}{n^2+k}$
3. $\frac{1}{n\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n} E(\sqrt{k})$

Exercice 22. (***) (*Inégalité de* Jensen)

Soit $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ continue et $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ continue et convexe. Démontrer que

$$g\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt\right) \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b g(f(t))dt.$$

Exercice 23. (**)

Soit

$$I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x}dx$$

1. En majorant la fonction intégrée, montrer que $\lim_{n\to+\infty} I_n = 0$.
2. Calculer $I_n + I_{n+1}$.
3. Déterminer

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k+1}}{k}\right)$$

Exercice 24. (**)

Étudier la suite

$$u_n = \sum_{k=1}^{n}\sin\frac{k}{n}$$

Exercice 25. (***)

Partie principale quand n tend vers $+\infty$ de

$$u_n = \sum_{k=1}^{n}\sin\frac{1}{(n+k)^2}$$
