

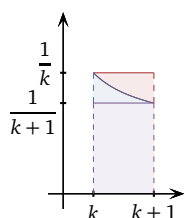
# ANALYSE ASYMPTOTIQUE DE NIVEAU 2

Ce chapitre est avant tout un recueil de problèmes typiques d'analyse asymptotique plus délicats — et plus intéressants — que ceux que nous avons résolus au chapitre « Analyse asymptotique de niveau 1 ». À l'exception de la formule de Stirling, aucun des résultats généraux que j'ai choisi d'encadrer ne figure au programme de MPSI. Étudiez-les comme des exemples privilégiés, des idées classiques qu'il convient de méditer et non pas des théorèmes de cours à connaître.

## 1 ÉTUDES DE SOMMES PAR ENCADREMENT D'INTÉGRALES

Nous avons vu récemment que toute intégrale peut être approchée par des sommes par construction de l'intégrale. Rappelons simplement que les sommes en question représentent dans ce cadre des « aires sous la courbe » de fonctions en escalier. L'idée de base de ce paragraphe, c'est qu'on peut aussi faire l'inverse et approximer certaines sommes par des intégrales. C'est déjà ce que nous avons fait avec les sommes de Riemann.

**Exemple**  $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \ln n + O(1)$ . En particulier :  $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \sim \ln n$ .



**Démonstration** Pour tous  $k \in \mathbb{N}^*$  et  $t \in [k, k+1]$ , par décroissance de la fonction inverse :  $\frac{1}{k+1} \leq \frac{1}{t} \leq \frac{1}{k}$ , donc  $\frac{1}{k+1} \leq \int_k^{k+1} \frac{dt}{t} \leq \frac{1}{k}$ , donc par somme, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  :  $\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k+1} \leq \int_1^n \frac{dt}{t} \leq \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ , et si on retourne maintenant cette inégalité comme un gant en y plaçant la somme au centre, on obtient ceci :  $\ln n \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k+1} \leq \ln n + 1$ , i.e.  $0 \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln n \leq 1$ , et donc enfin :  $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \ln n + O(1)$ .

Le théorème qui suit reprend l'idée précédente, mais il va plus loin.

**Théorème (Comparaison somme-intégrale)** Soit  $f \in \mathcal{C}([1, +\infty[, \mathbb{R})$  une fonction positive décroissante.

Pour un certain  $\ell \in \mathbb{R}$  :  $\sum_{k=1}^n f(k) = \int_1^n f(t) dt + \ell + o(1)$ .

**Démonstration** Pour tout  $n \geq 2$  :  $\int_1^n f(t) dt - \sum_{k=1}^n f(k) = -f(1) + \sum_{k=2}^n \left( \int_{k-1}^k f(t) dt - f(k) \right) = -f(1) + \sum_{k=2}^n a_k$

si on pose  $a_k = \int_{k-1}^k f(t) dt - f(k)$  pour tout  $k \geq 2$ . Or par décroissance :

$$f(k) = \int_{k-1}^k f(k) dt \leq \int_{k-1}^k f(t) dt \leq \int_{k-1}^k f(k-1) dt = f(k-1),$$

donc  $0 \leq a_k \leq f(k-1) - f(k)$ . Il découle de cet encadrement que la suite  $\left( \sum_{k=2}^n a_k \right)_{n \geq 2}$  est croissante, mais aussi

majorée car pour tout  $n \geq 2$  :  $\sum_{k=2}^n a_k \leq \sum_{k=2}^n (f(k-1) - f(k)) = f(1) - f(n) \leq f(1)$ . Cette suite est ainsi convergente d'après le théorème de la limite monotone, disons de limite  $\lambda$ . Finalement :

$$\int_1^n f(t) dt - \sum_{k=1}^n f(k) = -f(1) + \sum_{k=2}^n a_k = \lambda - f(1) + o(1) \quad \text{et c'est fini.} \quad \blacksquare$$

En particulier, dans le cas de la fonction inverse :

**Théorème (Développement asymptotique de la série harmonique et constante d'Euler)**

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \ln n + \gamma + o(1) \quad \text{pour un certain réel } \gamma \text{ appelé la constante d'Euler : } \gamma \approx 0,577.$$

## 2 SUITES D'INTÉGRALES ET FONCTIONS DÉFINIES PAR UNE INTÉGRALE

Comme nous le savons déjà, il suffit parfois d'un simple encadrement pour trouver un équivalent d'intégrale.

**Exemple**  $\int_x^{x+1} e^t \ln t \, dt \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} e^x (e-1) \ln x.$

**Démonstration** Pour tout  $x > 0$  :  $\ln x \int_x^{x+1} e^t \, dt \leq \int_x^{x+1} e^t \ln t \, dt \leq \ln(x+1) \int_x^{x+1} e^t \, dt$ , donc :

$$(e^{x+1} - e^x) \ln x \leq \int_x^{x+1} e^t \ln t \, dt \leq (e^{x+1} - e^x) \ln(x+1),$$

puis :  $1 \leq \frac{1}{e^x(e-1) \ln x} \int_x^{x+1} e^t \ln t \, dt \leq \frac{\ln(x+1)}{\ln x}$  — d'où le résultat par encadrement.

Souvent hélas, encadrer ne suffit pas, voici donc une idée parmi d'autres. Une intégration par parties transforme toujours une intégrale en une somme de deux termes — un « crochet » et une autre intégrale — et quand on s'y prend bien, cette décomposition peut fournir un début de développement asymptotique pour l'intégrale de départ.

■ **Théorème (Un exemple de développement asymptotique par IPP)** Soit  $f \in \mathcal{C}^1([0, 1], \mathbb{R})$ .

$$\int_0^1 t^n f(t) \, dt = \frac{f(1)}{n+1} + o\left(\frac{1}{n}\right). \quad \text{En particulier, si } f(1) \neq 0 : \int_0^1 t^n f(t) \, dt \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{f(1)}{n+1}.$$

**Démonstration** Pour tout  $n \in \mathbb{N}$  : 
$$\int_0^1 t^n f(t) \, dt \stackrel{\text{IPP}}{=} \left[ \frac{t^{n+1}}{n+1} f(t) \right]_{t=0}^{t=1} - \frac{1}{n+1} \int_0^1 t^{n+1} f'(t) \, dt$$

$$= \frac{f(1)}{n+1} - \frac{1}{n+1} \int_0^1 t^{n+1} f'(t) \, dt.$$

Or  $f'$  est continue sur le segment  $[0, 1]$ , donc bornée d'après le théorème des bornes atteintes. Du coup, pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :  $\left| \int_0^1 t^{n+1} f'(t) \, dt \right| \leq \|f'\|_\infty \int_0^1 t^{n+1} \, dt = \frac{\|f'\|_\infty}{n+2}$ , donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 t^{n+1} f'(t) \, dt = 0$  par encadrement.

Conclusion :  $\int_0^1 t^n f(t) \, dt = \frac{f(1)}{n+1} + o\left(\frac{1}{n+1}\right) = \frac{f(1)}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$  ■

**Exemple**  $\int_0^1 \frac{e^{-xt}}{1+t^2} \, dt \underset{x \rightarrow +\infty}{=} \frac{1}{x} + O\left(\frac{1}{x^2}\right).$

**Démonstration** Tâchons si possible d'adapter la preuve du théorème précédent au contexte de cette nouvelle intégrale. Pour commencer, pour tout  $x > 0$  :

$$\int_0^1 \frac{e^{-xt}}{1+t^2} \, dt \stackrel{\text{IPP}}{=} \left[ -\frac{e^{-xt}}{x} \times \frac{1}{1+t^2} \right]_{t=0}^{t=1} - \frac{1}{x} \int_0^1 \frac{2te^{-xt}}{(1+t^2)^2} \, dt = \frac{1}{x} - \frac{e^{-x}}{2x} - \frac{2}{x} \int_0^1 \frac{te^{-xt}}{(1+t^2)^2} \, dt,$$

or :  $\left| \int_0^1 \frac{te^{-xt}}{(1+t^2)^2} \, dt \right| = \int_0^1 \frac{te^{-xt}}{(1+t^2)^2} \, dt \leq \int_0^1 e^{-xt} \, dt = \frac{1-e^{-x}}{x} \leq \frac{1}{x}$ , donc en effet :

$$\int_0^1 \frac{e^{-xt}}{1+t^2} \, dt \underset{x \rightarrow +\infty}{=} \frac{1}{x} - \frac{e^{-x}}{2x} - \frac{2}{x} \times O\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x} + O\left(\frac{1}{x^2}\right).$$

### 3 SUITES RÉCURRENTES

Dans l'exemple qui suit, les termes du développement asymptotique sont obtenus les uns après les autres du plus grand au plus petit selon un principe de « boucle ». À chaque fois qu'on vient d'obtenir un terme d'une certaine précision, on réinjecte le tout dans la relation de récurrence et on obtient ainsi un nouveau terme. On peut sur le papier obtenir de cette manière des précisions aussi fines que voulu, mais plus on avance, plus les réinjections sont calculatoires.

**Exemple** On note  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la suite définie par  $u_0 = 0$  et pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :  $u_{n+1} = \sqrt{u_n + n^2}$ .

Alors :  $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} n - \frac{1}{2} - \frac{3}{8n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$ .

**Démonstration** Pour tous  $n \in \mathbb{N}$  et  $x \geq 0$  :  $\sqrt{x + n^2} \geq 0$  et  $u_0 \geq 0$ , la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est bien définie.

- Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  :  $u_n = \sqrt{u_{n-1} + (n-1)^2} \geq n-1$ , donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$  par minoration.
- Montrons ensuite par récurrence que pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :  $u_n \leq n$ . **Initialisation** : Évidente.

**Hérédité** : Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Si  $u_n \leq n$  :  $u_{n+1} = \sqrt{u_n + n^2} \stackrel{\text{HDR}}{\leq} \sqrt{n^2 + n} \leq \sqrt{n^2 + 2n + 1} = n+1$ .

- À ce stade, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  :  $n-1 \leq u_n \leq n$ , donc  $1 - \frac{1}{n} \leq \frac{u_n}{n} \leq 1$ , donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{n} = 1$  par encadrement, ou encore  $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n$ . On a même obtenu mieux :  $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} n + O(1)$ .

- Ensuite :  $u_{n+1} - n = \sqrt{u_n + n^2} - n = n \left( \sqrt{1 + \frac{u_n}{n^2}} - 1 \right)$ , avec  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{n^2} = 0$ , donc :

$$u_{n+1} - n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n \times \frac{u_n}{2n^2} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{2}, \quad \text{et donc } u_{n+1} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} n + \frac{1}{2} + o(1).$$

Conclusion :  $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} (n-1) + \frac{1}{2} + o(1) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} n - \frac{1}{2} + o(1)$ .

- On poursuit sur cette lancée avec un développement limité plus fin de  $x \mapsto \sqrt{1+x}$  au voisinage de 0 :

$$\begin{aligned} u_{n+1} = \sqrt{u_n + n^2} &= n \sqrt{1 + \frac{u_n}{n^2}} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} n \sqrt{1 + \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} n \left( 1 + \frac{1}{2} \left( \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} \right) - \frac{1}{8} \left( \frac{1}{n} \right)^2 + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \right) \\ &= n \left( 1 + \frac{1}{2n} - \frac{3}{8n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \right) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} n + \frac{1}{2} - \frac{3}{8n} + o\left(\frac{1}{n}\right). \end{aligned}$$

Conclusion :  $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} (n-1) + \frac{1}{2} - \frac{3}{8(n-1)} + o\left(\frac{1}{n-1}\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} n - \frac{1}{2} - \frac{3}{8n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$ .

**Exemple** On note  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la suite définie par  $u_0 = 1$  et pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :  $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{u_n}$ .

Alors :  $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \sqrt{2n} + O\left(\frac{\ln n}{\sqrt{n}}\right)$ . En particulier :  $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{2n}$ , et même  $u_n - \sqrt{2n} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$ .

**Démonstration** Pour commencer,  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est bien définie car l'intervalle  $[1, +\infty[$ , qui contient  $u_0$ , est stable par la fonction  $x \mapsto x + \frac{1}{x}$ . En outre, pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :  $u_n \geq 1$ . On pourrait bien sûr ensuite déterminer la limite de  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  grâce au théorème de la limite monotone, mais cela ne suffirait pas à nous donner un équivalent.

- Pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :  $u_{n+1}^2 = u_n^2 + 2 + \frac{1}{u_n^2}$ , i.e.  $u_{n+1}^2 - u_n^2 = 2 + \frac{1}{u_n^2}$ , donc  $u_n^2 = 2n + u_0^2 + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{u_k^2} \geq 2n$  après simplification télescopique. Enfin, par minoration :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ .

- Nous venons de voir que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  :  $u_n \geq \sqrt{2n}$ , i.e. que  $\frac{1}{u_n^2} \leq \frac{1}{2n}$ .

Ainsi, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  :  $0 \leq \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{u_k^2} \leq 1 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{2k}$ , donc comme  $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \ln n$ , on peut dire que :  $\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{u_k^2} = O(\ln n)$ . Conclusion :  $u_n^2 = 2n + 1 + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{u_k^2} = 2n + O(\ln n)$ , et enfin :

$$u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \sqrt{2n + O(\ln n)} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \sqrt{2n} \sqrt{1 + O\left(\frac{\ln n}{n}\right)} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \sqrt{2n} \left( 1 + O\left(\frac{\ln n}{n}\right) \right) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \sqrt{2n} + O\left(\frac{\ln n}{\sqrt{n}}\right).$$

## 4 SOLUTIONS D'ÉQUATIONS DÉFINIES IMPLICITEMENT

**Exemple** Pour tout  $\varepsilon > 0$ , l'équation  $e^{-\varepsilon x} = x$  d'inconnue  $x$  possède une et une seule solution  $x_\varepsilon$  dans  $\mathbb{R}_+$ .

Alors :  $x_\varepsilon = 1 - \varepsilon + \frac{3\varepsilon^2}{2} + o(\varepsilon^2)$ .

**Démonstration**

- Soit  $\varepsilon > 0$ . La fonction  $x \mapsto e^{-\varepsilon x} - x$  est continue et strictement décroissante sur  $\mathbb{R}_+$  par somme, de valeur 1 en 0 et de limite  $-\infty$  en  $+\infty$ . D'après le TVI strictement monotone, 0 possède un unique antécédent  $x_\varepsilon$  par cette fonction.
- Pour tout  $\varepsilon > 0$  :  $x_\varepsilon \geq 0$ , donc  $0 \leq x_\varepsilon = e^{-\varepsilon x_\varepsilon} \leq 1$ , donc en retour  $e^{-\varepsilon} \leq x_\varepsilon \leq 1$ . Ainsi, par encadrement :  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} x_\varepsilon = 1$ , ou encore  $x_\varepsilon = 1 + o(1)$ .
- On poursuit :  $x_\varepsilon = e^{-\varepsilon x_\varepsilon} = e^{-\varepsilon + o(\varepsilon)} = 1 - \varepsilon + o(\varepsilon)$ .
- Enfin :  $x_\varepsilon = e^{-\varepsilon x_\varepsilon} = e^{-\varepsilon + \varepsilon^2 + o(\varepsilon^2)} = 1 + (-\varepsilon + \varepsilon^2) + \frac{1}{2}(-\varepsilon)^2 + o(\varepsilon^2) = 1 - \varepsilon + \frac{3\varepsilon^2}{2} + o(\varepsilon^2)$ .

**Exemple** Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , l'équation  $\tan x = \sqrt{x}$  d'inconnue  $x \in ]n\pi - \frac{\pi}{2}, n\pi + \frac{\pi}{2}[$  possède une unique solution  $x_n$ .

En outre :  $x_n = n\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{1}{\sqrt{n\pi}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ .

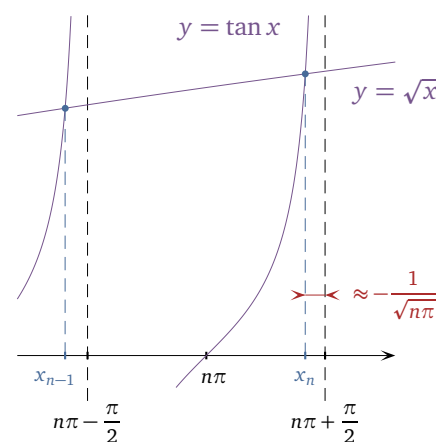
**Démonstration**

- Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . La fonction  $x \mapsto \tan x - \sqrt{x}$  est dérivable sur  $]n\pi - \frac{\pi}{2}, n\pi + \frac{\pi}{2}[$  de dérivée  $x \mapsto 1 + \tan^2 x - \frac{1}{2\sqrt{x}}$  strictement positive, car pour tout  $x \in ]n\pi - \frac{\pi}{2}, n\pi + \frac{\pi}{2}[$  :

$$x > \frac{\pi}{2} > \frac{1}{4}, \quad \text{donc } 1 - \frac{1}{2\sqrt{x}} > 0.$$

D'après le TVI strictement monotone, après un calcul de limites aux bornes,  $f$  s'annule une et une seule fois sur  $]n\pi - \frac{\pi}{2}, n\pi + \frac{\pi}{2}[$ , disons en  $x_n$ .

- Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  :  $n\pi - \frac{\pi}{2} \leq x_n \leq n\pi + \frac{\pi}{2}$ , donc  $1 - \frac{1}{2n} \leq \frac{x_n}{n\pi} \leq 1 + \frac{1}{2n}$ , et enfin  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x_n}{n\pi} = 1$  par encadrement. Conclusion :  $x_n \sim n\pi$ . En particulier  $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = +\infty$ .
- Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  :  $\tan(x_n - n\pi) = \tan x_n = \sqrt{x_n}$  avec  $x_n - n\pi \in ]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ , donc par définition d'arctangente :  $x_n - n\pi = \text{Arctan } \sqrt{x_n}$ . Enfin  $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = +\infty$ , donc  $x_n - n\pi \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \frac{\pi}{2}$ . Conclusion :  $x_n = n\pi + \frac{\pi}{2} + o(1)$ .
- Pour finir, rappelons que pour tout  $x > 0$  :  $\text{Arctan } x + \text{Arctan } \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}$ .  
Il en découle que :  $x_n - n\pi - \frac{\pi}{2} = \text{Arctan } \sqrt{x_n} - \frac{\pi}{2} = -\text{Arctan } \frac{1}{\sqrt{x_n}} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -\frac{1}{\sqrt{x_n}} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -\frac{1}{\sqrt{n\pi}}$ . Comme voulu :  $x_n = n\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{1}{\sqrt{n\pi}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ .



## 5 LES FORMULES DE WALLIS ET STIRLING

La formule de Wallis n'est pas au programme, mais la formule de Stirling qui en découle l'est en revanche.

### Théorème (Formule de Wallis)

$$\binom{2n}{n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{2^{2n}}{\sqrt{n\pi}}.$$

**Démonstration** On pose pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :  $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t \, dt$  (intégrales de Wallis).

- Pour tout  $n \geq 2$  : 
$$I_n \stackrel{\text{IPP}}{=} \left[ \sin^{n-1} t \times (-\cos t) \right]_{t=0}^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} (n-1) \cos t \sin^{n-2} t \times (-\cos t) \, dt$$
$$= (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} t \cos^2 t \, dt = (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} t (1 - \sin^2 t) \, dt = (n-1)(I_{n-2} - I_n).$$

Isolant  $I_n$ , nous obtenons finalement la relation :  $I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$  ★.

- La suite  $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est décroissante et strictement positive car  $0 < \sin^{n+1} x \leq \sin^n x$  pour tous  $n \in \mathbb{N}$  et  $x \in ]0, \frac{\pi}{2}]$ . Ainsi, pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :  $1 \leq \frac{I_{2n}}{I_{2n+1}} \leq \frac{I_{2n}}{I_{2n+2}} \stackrel{\star}{\leq} \frac{2n+2}{2n+1}$ , donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{I_{2n}}{I_{2n+1}} = 1$  par encadrement.

Nous allons maintenant donner une expression explicite du rapport  $\frac{I_{2n}}{I_{2n+1}}$ , noté  $\rho_n$ .

- Pour commencer :  $I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dt = \frac{\pi}{2}$  et  $I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t \, dt = [-\cos t]_{t=0}^{\frac{\pi}{2}} = 1$ , donc  $\rho_0 = \frac{\pi}{2}$ .

Ensuite pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  :  $\rho_n \stackrel{\star}{=} \frac{(2n+1)(2n-1)}{(2n)^2} \rho_{n-1}$ , donc :

$$\begin{aligned} \rho_n &= \frac{(2n+1)(2n-1)}{(2n)^2} \times \frac{(2n-1)(2n-3)}{(2n-2)^2} \times \dots \times \frac{(5)(3)}{(4)^2} \times \frac{(3)(1)}{(2)^2} \rho_0 = \frac{(2n+1)(2n-1)^2(2n-3)^2 \dots 3^2 1}{((2n)(2n-2) \dots (2))^2} \times \frac{\pi}{2} \\ &= \frac{(2n+1) \times (2n)!^2}{((2n)(2n-2) \dots (2))^4} \times \frac{\pi}{2} = \left( \frac{(2n)!}{2^{2n} n!^2} \right)^2 \frac{(2n+1)\pi}{2} = \left( \frac{1}{2^{2n}} \binom{2n}{n} \right)^2 \frac{(2n+1)\pi}{2} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \left( \frac{1}{2^{2n}} \binom{2n}{n} \right)^2 n\pi. \end{aligned}$$

Or  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \rho_n = 1$  comme on l'a vu, donc en effet :  $\binom{2n}{n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{2^{2n}}{\sqrt{n\pi}}$  ■

### Théorème (Formule de Stirling)

$$n! \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \left( \frac{n}{e} \right)^n \sqrt{2n\pi}.$$

**Démonstration** Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , posons  $u_n = \ln \frac{n^{n+\frac{1}{2}}}{n! e^n}$ .

- Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  : 
$$u_{n+1} - u_n = \ln \frac{(n+1)^{n+1+\frac{1}{2}}}{(n+1)! e^{n+1}} - \ln \frac{n^{n+\frac{1}{2}}}{n! e^n} = \ln \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}}}{e} = \left(n + \frac{1}{2}\right) \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right) - 1$$
$$= \left(n + \frac{1}{2}\right) \left( \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{3n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right) \right) - 1 \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{12n^2} \text{ après calcul.}$$

Ainsi  $\lim_{n \rightarrow +\infty} 12n^2(u_{n+1} - u_n) = 1$ , donc à partir d'un certain rang  $N \geq 2$  :  $0 \leq n^2(u_{n+1} - u_n) \leq 1$ . En particulier,  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  est croissante à partir d'un certain rang, mais par ailleurs pour tout  $n \geq N$  :

$$u_n - u_N = \sum_{k=N}^{n-1} (u_{k+1} - u_k) \leq \sum_{k=N}^{n-1} \frac{1}{k^2} \leq \sum_{k=N}^{n-1} \int_{k-1}^k \frac{dt}{t^2} = \int_{N-1}^{n-1} \frac{dt}{t^2} = \frac{1}{N-1} - \frac{1}{n-1} \leq \frac{1}{N-1} \leq 1,$$

donc  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  est majorée. Finalement,  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  converge d'après le théorème de la limite monotone, donc la suite  $(e^{-u_n})_{n \in \mathbb{N}^*}$  aussi, disons vers  $\ell > 0$ .

- Nous venons d'établir que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n! e^n}{n^{n+\frac{1}{2}}} = \ell$ , i.e. que  $n! \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \left( \frac{n}{e} \right)^n \ell \sqrt{n}$ . Il reste à montrer que  $\ell = \sqrt{2\pi}$ . Or d'après la formule de Wallis :

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\sqrt{n}}{2^{2n}} \binom{2n}{n} = \frac{\sqrt{n}}{2^{2n}} \times \frac{(2n)!}{n!^2} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\sqrt{n}}{2^{2n}} \times \frac{(2n)^{2n+\frac{1}{2}} \ell}{e^{2n}} = \frac{\sqrt{2}}{\ell} \text{ après simplification,}$$
$$\left( \frac{n^{n+\frac{1}{2}}}{e^n} \ell \right)^2 \text{ donc en effet } \ell = \sqrt{2\pi}. \quad \blacksquare$$