**Optimal Sup Spé, groupe IPESUP** **Année 2021-2022**
**Niveau : Première année de PCSI**
**M.Botcazou** **mail : ibotca52@gmail.com**

COLLE 3 = ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES ET SUITES NUMÉRIQUES

# Équations différentielles :

**Exercice 1.**
Déterminer les fonctions $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telles que pour tout $x \in \mathbb{R}$ :

$$f(x) + \int_0^x t f(t) dt \; = \; 1$$

---

**Exercice 2.**
On dira qu'une fonction à valeurs réelles dérivable sur $\mathbb{R}$ est solution de (1) si pour tous $x, y \in \mathbb{R}$ :

$$f(x+y) \; = \; f(x) + f(y) \qquad (1)$$

1. Montrer que toute solution de (1) est solution d'une équation différentielle du premier ordre à préciser.
2. En déduire toutes les solutions de (1)

---

**Exercice 3.**
Résoudre les équations différentielles suivantes :

1. $y' + y \tanh(x) = \tanh(x)$ sur $\mathbb{R}$;
2. $\sqrt{1-x^2}y' + xy + 3(x - x^3) = 0$ sur $]-1; 1[$;

---

**Exercice 4.**
Donner une équation différentielle dont les solutions sont les fonctions de la forme

$$x \longmapsto \frac{C+x}{1+x^2}, \; C \in \mathbb{R}$$

---

**Exercice 5.**
Donner l'ensemble solution des équations différentielles suivantes :

1. $y'' + y' - 2y \; = \; 0$ , avec $y(0) = 0$ et $y'(0) = 1$;
2. $y'' \; = \; 4y - 4y'$ , avec $y(0) = y'(0) = 1$;

---

**Exercice 6.**

1. (a) Monter que l'équation : $y'' + y = 3x^2$ a une solution de la forme : $x \mapsto ax^2 + bx + c$ avec $a, b, c \in \mathbb{R}$.
   (b) En déduire une expression explicite de l'unique solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle :
   $$y'' + y = 3x^2, \text{ avec } y(0) = 1 \text{ et } y'(0) = 2$$
2. (a) Monter que l'équation : $2y'' - 3y' + y = xe^x$ a une solution de la forme : $x \mapsto \left(ax^2 + bx\right) e^x$ avec $a, b \in \mathbb{R}$.
   (b) En déduire toutes les solutions réelles sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle :
   $$2y'' - 3y' + y = xe^x$$

---

**Exercice 7.**
Déterminer une équation différentielle vérifiée par la famille de fonctions

$$y(x) \; = \; C_1 e^{3x} + C_2 e^{-2x} + x \sinh(x) \; , \;\; C_1, C_2 \in \mathbb{R}$$

---

## Suites numériques :

**Exercice 8.**
On dira qu'une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est solution de (2) si pour tous $n \in \mathbb{N}$ :

$$u_{n+2} = 2u_{n+1} + 8u_n + 9n^2 \tag{2}$$

1. Montrer que (2) possède une solution de la forme $\left(an^2+bn+c\right)_{n\in\mathbb{N}}$ avec $a, b, c \in \mathbb{R}$.
2. En déduire une expression explicite de l'unique solution de (2) pour laquelle :

$$u_0 = 0 \text{ et } u_1 = 1$$

---

**Exercice 9.**
Pour tout vecteur du plan fixé $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$, on considère la suite définie par récurrence :

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$$

1. En partant de $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, représenter les 8 premiers termes de la suite.
2. Cette suite est elle convergente ?

---

**Exercice 10.**
Soient $a$ et $b$ deux réels, $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = au_n + b.$$

1. Traiter le cas $a = 1$.
   On suppose désormais $a \neq 1$
2. Résoudre l'équation $x = ax + b$. On note $l$ la solution.
   On pose, pour $n$ dans $\mathbb{N}$ :

$$v_n = u_n - l$$

3. Montrer que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique. Conclure.
4. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle convergente ?
5. Calculer en fonction de $n$ le terme général de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} u_{n+1} = 5u_n - 3 \\ u_0 = 1 \end{cases}$$

---

**Exercice 11.**
Calculer en fonction de $n$ le terme général de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

1. $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$ :

$$u_{n+1} = 2u_n^2$$

2. $u_0 = 1$, $u_1 = 2$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$ :

$$u_{n+2} = \frac{u_{n+1}^6}{u_n^5}$$

---

# Exercices supplémentaires :

**Exercice 12.**

1. Pour tous $\alpha \in \mathbb{R}$ et $x > -1$ comparer $(1+x)^\alpha$ et $1+\alpha x$. (**indication** : dérivées successives)

   **Remarque.** Si $\alpha \in \mathbb{N}^*$ on parle de l'inégalité de Bernouilli.

2. En déduire que pour tous $\alpha \in [0;1]$ et $n \in \mathbb{N}^*$ :

$$\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{\alpha}{k}\right) \geq (n+1)^\alpha$$

---

**Exercice 13.**
Montrer que la fonction $x \longmapsto \dfrac{1}{\cosh(x)}$ possède un unique point fixe.

---

**Exercice 14.**

1. Montrer que la fonction $\sinh$ est bijective de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$ et déterminer une expression explicite de sa réciproque en résolvant l'équation : $y = \sinh(x)$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$ pour tout $y \in \mathbb{R}$.
2. Même question avec la fonction $\tanh$, bijective de $\mathbb{R}$ sur $]-1;1[$.
3. Même question avec la fonction $\cosh$, bijective de $\mathbb{R}^+$ sur $[1;+\infty[$.

---

**Exercice 15.**
Montrer que pour tous $x, y \in \mathbb{R}$ tels que $0 < x < y$ on a :

$$\frac{y-x}{\ln(y)-\ln(x)} < \frac{x+y}{2}$$

**indication :** on utilisera $t = \dfrac{y}{x}$.

---