COLLE 9 = FONCTIONS DÉRIVABLES

Connaître son cours :

1. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ dérivable, montrer que :
   Si f admet un extremum local en un point a intérieur à I, alors $f'(a) = 0$.
2. Énoncer le théorème de *Rolle* et donner une démonstration de celui-ci.
3. Soit $f, g : I \to \mathbb{R}$ des fonctions n fois dérivables. Énoncer la formule de Leibniz pour la dérivée $n^{\text{ième}}$ de la fonction $f \times g$. En déduire la dérivée n-ième de la fonction suivante : $x \mapsto x^{n-1} \ln(1+x)$.

Exercices :

Exercice 1. (**)

On considère dans tout cet exercice les deux fonctions F et G définies sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$F(x) = \frac{\sin(x)}{x} \quad G(x) = \frac{1-\cos(x)}{x}$$

1. (a) Montrer que F et G sont continues et prolongeables par continuité en 0. On notera encore F et G ces prolongements.
   (b) Montrer que les fonctions F et G sont dérivables sur $\mathbb{R}^*$ et calculer leurs dérivées.
   (c) Montrer que les fonctions F et G sont dérivables en 0 . Préciser les valeurs de $F'(0)$ et $G'(0)$.
2. (a) Montrer que les réels strictement positifs tels que $F(x) = 0$ constituent une suite $(a_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ strictement croissante. On donnera explicitement la valeur de a_k
   (b) Montrer que les réels strictement positifs tels que $G(x) = 0$ constituent une suite $(b_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ strictement croissante. Y a-t-il un lien entre les suites $(a_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ et $(b_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$?
3. (a) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Montrer qu'il existe un réel $x_k \in]a_k, a_{k+1}[$ tel que $F'(x_k) = 0$.
   (b) Montrer que la fonction F' est de même signe que $h : x \longmapsto x\cos(x) - \sin(x)$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, la fonction h est strictement monotone sur $[a_k, a_{k+1}]$.
   (c) En déduire l'unicité du réel x_k défini dans la question 4.(a).
   (d) Etablir que : $\forall k \in \mathbb{N}^*,\ x_k \in]a_k, a_k + \frac{\pi}{2}[$.
4. Calculer $\lim\limits_{k\to+\infty} x_k$ puis déterminer un équivalent simple de la suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$.

Exercice 2. (**) *Polynômes de Laguerre*

On pose, pour tout entier naturel n et pour tout réel x,

$$h_n(x) = x^n e^{-x} \text{ et } L_n(x) = \frac{e^x}{n!} h_n^{(n)}(x).$$

1. Montrer que, pour tout entier n, L_n est une fonction polynômiale.
   Préciser son degré et son coefficient dominant.
2. Montrer que, pour tout $k \in \{0, \ldots, n\}$, il existe $Q_k \in \mathbb{R}[X]$ tel que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$h_n^{(k)}(x) = x^{n-k} e^{-x} Q_k(x).$$

Exercice 3. (***)

Soit f définie sur un intervalle ouvert I contenant 0, continue sur I. On suppose en outre que $\lim_{x\to 0} \frac{f(2x)-f(x)}{x} = 0$. Montrer que f est dérivable en 0.

Exercice 4. (**)

Soit $f :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction dérivable et $\ell \in \mathbb{R}$ tel que $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = \ell$.
L'objectif de cet exercice est de démontrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \ell$.

1. On suppose dans cette question que $\ell = 0$. Soit $\varepsilon > 0$.
   (a) Montrer qu'il existe $A > 0$ tel que, pour tout $x \geq A$, on a
   $$\left|\frac{f(x)}{x}\right| \leq \left|\frac{f(A)}{x}\right| + \varepsilon.$$
   (b) En déduire le résultat dans ce cas.
2. Démontrer le résultat dans le cas général.
3. Réciproquement, est-il vrai que pour toute fonction dérivable $f :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ telle que $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \ell$, alors on a $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = \ell$?

Exercice 5. (**)

Déterminer la dérivée d'ordre n de la fonction f définie par $f(x) = (x-a)^n(x-b)^n$ (a, b sont des réels). En étudiant le cas $a = b$, trouver la valeur de $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$.

Exercice 6. (**)

Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que la dérivée d'ordre $n+1$ de $x^n e^{1/x}$ est
$$\frac{(-1)^{n+1}}{x^{n+2}} e^{1/x}.$$
