

EXERCICE 1 - Dans une entreprise...

Dans une entreprise, il y a 800 employés. 300 sont des hommes, 352 sont membres d'un syndicat, 424 sont mariés, 300 sont célibataires.

EXERCICE 2 - Les boulangeries

Dans une ville, il y a quatre boulangeries qui ferment un jour par semaine.  
Déterminer le nombre de façons d'attribuer un jour de fermeture hebdomadaire?  
Reprendre la même question si plusieurs boulangeries ne peuvent fermer le même jour.  
Reprendre la même question si chaque jour, il doit y avoir au moins une boulangerie ouverte.

EXERCICE 3 - Nombres et chiffres

Soit  $A$  l'ensemble des nombres à 7 chiffres ne comportant aucun "1". Déterminer le nombre d'éléments des ensembles  
 $A$ ,  
 $A_1$ , ensemble des nombres de  $A$  ayant 7 chiffres différents.  
 $A_2$ , ensemble des nombres pairs de  $A$ .  
 $A_3$ , ensemble des nombres de  $A$  dont les chiffres forment une suite strictement croissante (dans l'ordre où ils sont écrits).

EXERCICE 4 - Anagrammes

Dénombrer les anagrammes des mots suivants : MATHS, RIRE, ANANAS.

EXERCICE 5 - Le poker

Une main au poker est formée de 5 cartes extraites d'un jeu de 52 cartes. Traditionnellement, trèfle, carreau, coeur, pique, et de 10 à 1.  
quinte flush : main formée de 5 cartes consécutives de la même couleur (la suite as, 2, 3, 4 et 5 est une quinte flush).  
carré : main contenant 4 cartes de la même valeur (4 as par exemple).  
full : main formée de 3 cartes de la même valeur et de deux autres cartes de même valeur (par exemple, 3 as et 2 rois).  
quinte : main formée de 5 cartes consécutives et qui ne sont pas toutes de la même couleur.  
breelan : main comprenant 3 cartes de même valeur et qui n'est ni un carré, ni un full (par exemple, 3 as, 1 valet, 1 dix).

EXERCICE 6 -  $n + 1$  entiers parmi  $2n$

On considère un ensemble  $X$  de  $n + 1$  entiers (distincts) choisis dans  $\{1, \dots, 2n\}$ . Démontrer que parmi les éléments de  $X$ , il y a au moins un pair et un impair.

EXERCICE 7 - Bizarre, bizarre,...

Démontrer par un dénombrement que, pour  $n \geq 1$ , on a :

EXERCICE 8 - Une somme

Soit  $n, p$  des entiers naturels avec  $n \geq p$ . Démontrer par dénombrement que

EXERCICE 9 - Combinaisons avec répétitions

Pour  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $p \in \mathbb{N}$ , on note  $\Gamma_n^p$  le nombre de  $n$ -uplets  $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{N}^n$  tels que  $x_1 + \dots + x_n = p$ .  
Déterminer  $\Gamma_n^0, \Gamma_n^1, \Gamma_n^2, \Gamma_1^p$  et  $\Gamma_2^p$ .  
Démontrer que, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , pour tout  $p \in \mathbb{N}$ ,

En déduire que, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  et tout  $p \in \mathbb{N}$ ,

EXERCICE 10 - Parties de cardinal pair

Soit  $E$  un ensemble fini de cardinal  $n \geq 1$ . Démontrer que le nombre de parties de  $E$  de cardinal pair vaut  $2^{n-1}$ .

EXERCICE 11 - Nombres de Bell

Pour  $n \in \mathbb{N}$ , on note  $B_n$  le nombre de partitions d'un ensemble  $E$  de cardinal  $n$ . On pose  $B_0 = 1$ .  
Calculer  $B_1, B_2$  et  $B_3$ .  
Établir la formule de récurrence

EXERCICE 12 - Nombre de fonctions (strictement) croissantes

Soit  $n, p \geq 1$  deux entiers.  
Combien y a-t-il de fonctions strictement croissantes de  $\{1, \dots, p\}$  dans  $\{1, \dots, n\}$ ?  
Soit  $f : \{1, \dots, p\} \rightarrow \{1, \dots, n\}$  une fonction croissante. On pose  $\phi(f)$  la fonction définie sur  $\{1, \dots, p\}$ , à valeurs dans  $\{1, \dots, n\}$  par  $\phi(f)(i) = f(i) - f(i-1)$  pour  $i \in \{2, \dots, p\}$  et  $\phi(f)(1) = f(1)$ . On pose  $\psi(p)$  la fonction définie sur  $\{1, \dots, n\}$  par  $\psi(p)(i) = \phi(f)$  pour  $i \in \{1, \dots, n\}$ .  
Démontrer que, pour tout  $n, p \geq 1$ , on a :