Feuille 8 ($\star\star$)

Exercice :

Soit

$$\begin{array}{rccc} \Phi: & \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) & \to & \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \\ & M & \mapsto & M^T \end{array}$$

Justifier que Φ est une application linéaire et donner $\det(\Phi)$ et $\mathrm{Tr}(\Phi)$. Donner son polynôme caractéristique et son polynôme minimal.

Feuille 6 ($\star\star$)

Exercice :

Calculer

$$\inf_{a,b\in\mathbb{R}} \int_0^{2\pi} \big(t - a\cos(t) - b\sin(t)\big)^2 dt.$$

Donner une interprétation géométrique de cette valeur.

Feuille 5 ($\star\star$)

Exercice :

Soit $\mathcal{B}$ une base orthonormée de E un espace euclidien de dimension n.
Montrer l'inégalité suivante :

$$\forall(x_1, ..., x_n) \in E^n, \quad |\det_{\mathcal{B}}(x_1, ..., x_n)| \leq ||x_1||...||x_n||$$

Feuille 3 ($\star$)

Exercice :

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue et convexe. Démontrer que

$$g\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt\right) \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b g(f(t))dt.$$

Feuille 10 ($\star\star\star$)

Exercice :

Étudier la suite d'intégrales :

$$u_n = \int_0^1 x^n e^x dx$$

En déduire que le nombre e est un irrationnel.

Feuille 1 ($\star\star$)

Exercice :

Soit E un espace vectoriel de dimension finie, $u \in \mathscr{L}(E)$ nilpotent d'indice p et $\Phi : v \in \mathscr{L}(E) \mapsto u \circ v - v \circ u$.

1. Montrer que Φ est nilpotente et majorer son indice de nilpotence.
2. Soit $a \in \mathscr{L}(E)$.
   Montrer qu'il existe $b \in \mathscr{L}(E)$ tel que $a \circ b \circ a = a$.
3. En déduire l'indice de nilpotence de Φ.

Feuille 7 ($\star\star\star$)

Exercice :

Soit u une suite de réels positifs telle que

$$\forall n, m \in \mathbb{N} \quad u_{n+m} \leq u_n + u_m$$

Montrer que la suite $\left(\frac{u_n}{n}\right)_{n\geq 1}$ converge vers

$$l = \inf\left\{\frac{u_n}{n} : \ n \in \mathbb{N}^*\right\}$$

Feuille 4 ($\star\star\star$)

Exercice :

On considère une urne contenant c boules colorées et b boules blanches. Après chaque tirage, la boule extraite est remise dans l'urne avec a boules de la même couleur que celle tirée.

Déterminer la probabilité que la n-ième boule tirée soit blanche.

Feuille 11 ($\star\star$)

Exercice :

Soit $u_0 \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a

$$u_{n+1} = \sin(u_n)$$

Donner une équivalent simple de la suite $(u_n)_{n\geq 0}$.

Feuille 2 ($\star$)

Exercice :

Soit $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que

$$\forall i \in [\![1, n]\!], \quad |a_{i,i}| > \sum_{j\neq i} |a_{i,j}|$$

Montrer que $A \in \mathcal{G}l_n(\mathbb{C})$.

Feuille 9 ($\star\star$)

Exercice :

1. Donner les polynômes $P \in \mathbb{C}[X]$ tels que $P(\mathbb{C}) \subset \mathbb{R}$.
2. Donner les polynômes $P \in \mathbb{C}[X]$ tels que $P(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}$.
3. Donner les polynômes $P \in \mathbb{C}[X]$ tels que $P(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.