
NOTATION DE LANDAU PARTIE 1

EXERCICE 1 - Somme de factorielles

Montrer que

$$\sum_{k=1}^n k! \sim_{+\infty} n!.$$

EXERCICE 2 - Équivalents simples de suites

Trouver un équivalent le plus simple possible aux suites suivantes :

$$\begin{array}{ll} \mathbf{1.} \ u_n = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1} & \mathbf{2.} \ v_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n-1} \\ \mathbf{3.} \ w_n = \frac{n^3 - \sqrt{1+n^2}}{\ln n - 2n^2} & \mathbf{4.} \ z_n = \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right). \end{array}$$

EXERCICE 3 - Comparaison entre exponentielle et factorielle

Soit $\gamma > 0$. Le but de l'exercice est de prouver que

$$e^{\gamma n} = o(n!).$$

Pour cela, on pose, pour $n \geq 1$, $u_n = e^{\gamma n}$ et $v_n = n!$.

1. Démontrer qu'il existe un entier $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geq n_0$,

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{1}{2} \frac{v_{n+1}}{v_n}.$$

2. En déduire qu'il existe une constante $C > 0$ telle que, pour tout $n \geq n_0$, on a

$$u_n \leq C \left(\frac{1}{2}\right)^{n-n_0} v_n.$$

3. Conclure.

Cette feuille d'exercices a été conçue à l'aide du site <http://www.bibmath.net>