COLLE 6 = FONCTIONS CONTINUES ET MATRICES

Questions de cours :

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, $f : I \to \mathbb{R}$ et $g : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions, $\lambda, \beta \in \mathbb{R}$, $a \in I$ et $l \in \mathbb{R}$.

1. Démontrer la propriété suivante :

   Propriété.
   f tend vers l en a si et seulement si pour toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergeant vers a, $(f(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers l

2. Démontrer la propriété suivante :

   Propriété.
   Si f tend vers l en a et g tend vers l' en a alors $\lambda f + \beta g$ tend vers $\lambda l + \beta l'$ en a.

3. Démontrer la propriété suivante :

   Propriété.
   Si f tend vers l en a et g tend vers l' en a alors fg tend vers ll' en a.

4. Démontrer la propriété suivante :

   Propriété.
   Si f tend vers l en a avec $l \neq 0$ alors $\dfrac{1}{f}$ tend vers $\dfrac{1}{l}$ en a.

Soient $n \in \mathbb{N}$ et $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

6. Que signifie que la matrice A et est une matrice symétrique ? antisymétrique ? Montrer que l'on peut toujours écrire la matrice A comme la somme d'une matrice symétrique avec une matrice antisymétrique.
7. Rappeler la définition de $Tr(A)$, et calculer $\sum_{k=1}^{n} Tr(I_k)$.
8. Pour $(i,j) \in \{1,..,n\}^2$ donner le coefficient AB_{ij} en fonction des coefficients des matrices A et B. Montrer que $Tr(AB) = Tr(BA)$.

Fonctions continues :

Exercice 1.
Donner si elles existe les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\lfloor 2x \rfloor}{\lfloor x \rfloor}$
2. $\lim\limits_{x\to 0} \left\lfloor \dfrac{1}{x} \right\rfloor$
3. $\lim\limits_{x\to 0} x \left\lfloor \dfrac{1}{x} \right\rfloor$
4. $\lim\limits_{x\to 0} x^2 \left\lfloor \dfrac{1}{x} \right\rfloor$

Exercice 2.
Soit $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x) = x\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}$$

La fonction f admet-elle un prolongement par continuité en 0 ?

Exercice 3.
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x) = \lfloor x \rfloor + \sqrt{x - \lfloor x \rfloor}$$

Montrer que la fonction f est continue sur $\mathbb{R}$.
(*Indication : Étudier $f(x+1)$*)

Exercice 4.
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ périodique et admettant une limite finie l en $+\infty$. Montrer que f est constante.

Exercice 5.
Étudier les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^{3x} + 2x + 7}{e^x + e^{-x}}$
2. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+x} - \left(1 + \dfrac{x}{2}\right)}{x^2}$

Exercice 6.
Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+^*$ une fonction continue telle que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0$. Montrer que la fonction f admet un point fixe sur $\mathbb{R}^+$.

Exercice 7.
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{Si } x \text{ est irrationnel ou } x = 0. \\ \dfrac{1}{q} & \text{Si } x = \dfrac{p}{q}, \text{ avec } p \in \mathbb{Z}, q \geq 1 \text{ et } pgcd(p,q) = 1 \end{cases}$$

Montrer que la fonction f est continue sur $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q} \cup \{0\}$, discontinue sur $\mathbb{Q}^*$

Matrices :

Exercice 8.
Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\lambda, \beta \in \mathbb{R}$.

1. Montrer que $Tr({}^{t}AA) \geq 0$. Que peut-on en déduire sur la matrice A si $Tr({}^{t}AA) = 0$?
2. Montrer que $Tr(\lambda A + \beta B) = \lambda Tr(A) + \beta Tr(B)$.
3. En déduire que si pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ on a : $Tr(XA) = Tr(XB)$ alors $A = B$.

Exercice 9.
Soit

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

1. Montrer que le polynôme $P(X) = X^2 - 3X + 2$ est anulateur de la matrice A.
2. Donner le reste de la division Euclidienne de X^n par $X^2 - 3X + 2$ pour $n \geq 2$.
3. En déduire la valeur de A^n.

Exercice 10.
Soient

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \ , \ I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \ \text{ et } \ B = A - I_3$$

Montrer que la matrice B est nilpotente et en déduire pour tout $n \in \mathbb{N}$ l'expression de A^n.

Exercice 11.
Soit $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$

1. Pour tout $(i, j) \in \{1, 2, 3\}$ on note E_{ij} une matrice élémentaire de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Expliquer ce que donne les produits matriciels AE_{ij} et $E_{ij}A$.
2. Considérons le centre de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$:

   $$\mathcal{Z}(\mathcal{M}_3(\mathbb{R})) : \{A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \,; \forall M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) : MA = AM\}$$

   Montrer que :

   $$\mathcal{Z}(\mathcal{M}_3(\mathbb{R})) = \{\lambda I_3 : \lambda \in \mathbb{R}\}$$

3. Que peut-on dire de $\mathcal{Z}(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$?

---

 mail: ibotca52@gmail.com