Analyse asymptotique de niveau 1

Les fonctions qu'on étudie en analyse sont généralement définies sur des intervalles ou des réunions d'intervalles comme $\mathbb{R}^*$ ou $[0,1[\cup[2,3]$, voire $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[+\pi\mathbb{Z}$. Dans tout ce chapitre, les lettres $D, E\ldots$ qui nous serviront d'ensembles de définition désigneront cependant des parties quelconques de $\mathbb{R}$.

1 Négligeabilité

1.1 Introduction

Définition (Négligeabilité)

- **Fonctions :** Soient $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ et $g : D \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions et $a \in \overline{\mathbb{R}}$ adhérent à D. On dit que f est *négligeable devant g au voisinage de a* s'il existe un voisinage V_a de a et une fonction $\varepsilon : D\cap V_a \longrightarrow \mathbb{R}$ pour lesquels $f(x) = \varepsilon(x)\,g(x)$ pour tout $x \in D\cap V_a$ et $\lim\limits_a \varepsilon = 0$. On note cette relation : $f \underset{a}{=} \mathrm{o}(g)$ ou $f(x) \underset{x\to a}{=} \mathrm{o}\big(g(x)\big)$ et on dit que « f est un petit o de g au voisinage de a ».

  Dans le cas où g ne s'annule pas au voisinage de a — sauf éventuellement en a avec dans ce cas $f(a)=0$ — il est équivalent d'exiger que $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$.

- **Suites :** Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites. On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est *négligeable devant* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ s'il existe un rang N et une suite $(\varepsilon_n)_{n\geqslant N}$ pour lesquels $u_n = \varepsilon_n\,v_n$ pour tout $n \geqslant N$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\varepsilon_n = 0$. On note cette relation : $u_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{o}(v_n)$ et on dit que « u_n est un petit o de v_n ».

  Dans le cas où $v_n \neq 0$ à partir d'un certain rang, il est équivalent d'exiger que $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{u_n}{v_n} = 0$.

On pensera en pratique la négligeabilité des suites et des fonctions en termes de quotients même si la définition à base de fonctions ε ou de suites $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est un peu plus générale. J'ai pris le parti d'ailleurs de rédiger toutes les preuves de ce chapitre en termes de quotients par souci de clarté, car les preuves obtenues sont courtes et limpides, mais il ne serait pas beaucoup plus long d'en revenir toujours à des fonctions ε ou des suites $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exemple $x^2 \underset{x\to+\infty}{=} \mathrm{o}\big(x^4\big)$, mais $x^4 \underset{x\to 0}{=} \mathrm{o}\big(x^2\big)$. $\dfrac{1}{x^2} \underset{x\to+\infty}{=} \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{x}\right)$, mais $\dfrac{1}{x} \underset{x\to 0}{=} \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$. $n\ln n \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{o}\big(n^2\big)$. $2^n \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{o}\big(3^n\big)$.

Les petits o sont la formalisation définitive des « croissances comparées ». Certains infinis sont plus infinis que d'autres, certains zéros sont plus zéros que d'autres. Dire que $x^2 \underset{x\to+\infty}{=} \mathrm{o}\big(x^4\big)$, c'est affirmer l'immensité de x^4 par rapport à x^2 lorsque x est grand. Dire que $x^4 \underset{x\to 0}{=} \mathrm{o}\big(x^2\big)$, c'est affirmer l'infinie petitesse de x^4 par rapport à x^2 lorsque x est petit.

Théorème (Croissances comparées usuelles) Soient $a, b, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

- **Au voisinage de $+\infty$:**
  — Si $\alpha < \beta$: $x^\alpha \underset{x\to+\infty}{=} \mathrm{o}\big(x^\beta\big)$. — Si $\alpha > 0$: $(\ln x)^\beta \underset{x\to+\infty}{=} \mathrm{o}\big(x^\alpha\big)$.
  — Si $0 < a < b$: $a^x \underset{x\to+\infty}{=} \mathrm{o}\big(b^x\big)$. — Si $a > 1$: $x^\alpha \underset{x\to+\infty}{=} \mathrm{o}\big(a^x\big)$.
- **Au voisinage de 0 :**
  — Si $\alpha < \beta$: $x^\beta \underset{x\to 0}{=} \mathrm{o}\big(x^\alpha\big)$. — Si $\alpha > 0$: $x^\alpha \underset{x\to 0}{=} \mathrm{o}\big(|\ln x|^\beta\big)$.

Les croissances comparées usuelles des fonctions en $+\infty$ peuvent bien sûr être exprimées en termes de suites — remplacer x par n. Par ailleurs : $a^n \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{o}(n!)$.

Nous avons introduit la notation « petit o » sous sa forme la plus élémentaire — mise en relation de deux fonctions ou de deux suites — mais on la rencontre en réalité le plus souvent sous la forme suivante :

$$f \underset{a}{=} g + \mathrm{o}(h) \quad \text{pour les fonctions} \qquad \text{et} \qquad u_n \underset{n\to+\infty}{=} v_n + \mathrm{o}(w_n) \quad \text{pour les suites.}$$

Ce qui est affirmé ici, c'est que $f = g + \widetilde{h}$ avec $\widetilde{h} \underset{a}{=} \mathrm{o}(h)$ et que $u_n = v_n + \widetilde{w}_n$ avec $\widetilde{w}_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{o}(w_n)$, i.e. que $\mathrm{o}(h)$ est « une certaine fonction négligeable devant h au voisinage de a » et $\mathrm{o}(w_n)$ « une certaine suite négligeable devant $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ».

Partons maintenant de l'affirmation : $\mathrm{e}^x \underset{x\to 0}{=} 1 + x + x^2 + \mathrm{o}(x)$, selon laquelle grosso modo, pour x proche de 0 : $\mathrm{e}^x \approx 1 + x + x^2$. Cette approximation n'a de sens que si l'on peut y mesurer l'erreur commise. En l'occurrence, ici : $\mathrm{e}^x \approx 1 + x + x^2$ **à un $\mathrm{o}(x)$ près**. Un peu comme quand on dit que $\pi \approx 3,14$ à 10^{-2} près.

Imaginez justement qu'on vous dise : « π est égal à 3,14012 à 10^{-2} près », vous répondrez naturellement : « Pourquoi pas seulement 3,14 puisqu'on raisonne à 10^{-2} près ? » Et vous aurez raison, raisonner à 10^{-2} près, c'est négliger tout ce qui est plus petit que 10^{-2}. Ainsi l'approximation $\pi \approx 3,14$ à 10^{-2} près est aussi précise que l'approximation $\pi \approx 3,141592$ à 10^{-2} près, quand bien même on écrit deux décimales correctes dans un cas et six dans l'autre.

Il se passe la même chose avec les petits o. Le terme x^2 est inutile dans la relation : $\mathrm{e}^x \underset{x\to 0}{=} 1+x+x^2+\mathrm{o}(x)$ parce que $x^2 \underset{x\to 0}{=} \mathrm{o}(x)$, nous pouvons donc lui couper la tête : $\mathrm{e}^x \underset{x\to 0}{=} 1+x+\mathrm{o}(x)$. Cette nouvelle proposition n'est ni plus ni moins précise que la précédente mais elle est plus lisible et plus économe.

Tout petit o est un **NIVEAU DE PRÉCISION**, un **SEUIL DE VISIBILITÉ**.
De vous-mêmes, **À CHAQUE INSTANT**, faites le ménage, coupez la tête de tous les « invisibles » !

Théorème (Limites finies et petits o)

- **Fonctions :** Soient $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction, $a \in \overline{\mathbb{R}}$ adhérent à D et $\ell \in \mathbb{R}$. Alors :
$$\lim_a f = \ell \iff f \underset{a}{=} \ell + \mathrm{o}(1).$$
En particulier : $\lim_a f = 0 \iff f \underset{a}{=} \mathrm{o}(1)$. $\mathrm{o}(1) =$ « une fonction de limite nulle en a ».
- **Suites :** Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite et $\ell \in \mathbb{R}$. Alors : $\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell \iff u_n \underset{n\to+\infty}{=} \ell + \mathrm{o}(1)$.
En particulier : $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0 \iff u_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{o}(1)$. $\mathrm{o}(1) =$ « une suite de limite nulle ».

Démonstration $\lim_a f = \ell \iff \lim_a \dfrac{f-\ell}{1} = 0 \iff f-\ell \underset{a}{=} \mathrm{o}(1) \iff f \underset{a}{=} \ell + \mathrm{o}(1)$.

1.2 OPÉRATIONS SUR LES PETITS O

Les résultats de ce paragraphe sont importants, mais les exemples qui les suivent sont beaucoup plus utiles et éclairants que les énoncés théoriques. Les notations utilisées ne seront pas introduites proprement tant elles parlent d'elles-mêmes. En outre, j'ai allégé les résultats en ne présentant qu'une seule des deux versions de chacun — suites ou fonctions — mais pas les deux.

Théorème (Les petits o absorbent les constantes multiplicatives)
Soit $\lambda \in \mathbb{R}^*$. Si $f \underset{a}{=} \mathrm{o}(g)$, alors : $f \underset{a}{=} \mathrm{o}(\lambda g)$ et $\lambda f \underset{a}{=} \mathrm{o}(g)$.

Démonstration Si $\lim_a \dfrac{f}{g} = 0$, alors : $\lim_a \dfrac{f}{\lambda g} = 0$ et $\lim_a \dfrac{\lambda f}{g} = 0$.

Exemple Si on admet l'égalité : $\mathrm{e}^{\frac{1}{n}} \underset{n\to+\infty}{=} 1 + \dfrac{1}{n} + \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{n}\right)$, alors : $2\,\mathrm{e}^{\frac{1}{n}} \underset{n\to+\infty}{=} 2 + \dfrac{2}{n} + \underbrace{2\,\mathrm{o}\left(\dfrac{1}{n}\right)} \underset{n\to+\infty}{=} 2 + \dfrac{2}{n} + \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{n}\right)$.

Théorème (La somme de deux petits o est un petit o)
Si $u_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{o}(v_n)$ et $\widetilde{u}_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{o}(v_n)$, alors $u_n + \widetilde{u}_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{o}(v_n)$.

Démonstration Si $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{v_n} = 0$ et $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{\widetilde{u}_n}{v_n} = 0$, alors par somme : $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{u_n + \widetilde{u}_n}{v_n} = 0$.

Exemple Si on admet les égalités : $\mathrm{e}^x \underset{x\to 0}{=} 1 + x + \mathrm{o}(x)$ et $\sin x \underset{x\to 0}{=} x + \mathrm{o}(x)$, alors :
$$\mathrm{e}^x + \sin x \underset{x\to 0}{=} \big(1 + x + \mathrm{o}(x)\big) + \big(x + \mathrm{o}(x)\big) \underset{x\to 0}{=} 1 + 2x + \underbrace{\mathrm{o}(x) + \mathrm{o}(x)} \underset{x\to 0}{=} 1 + 2x + \mathrm{o}(x).$$

Théorème (Un petit o d'un petit o est un petit o) La relation « être négligeable » est transitive.
Si $f \underset{a}{=} \mathrm{o}(g)$ et $g \underset{a}{=} \mathrm{o}(h)$, alors $f \underset{a}{=} \mathrm{o}(h)$.

Démonstration Si $\lim\limits_a \dfrac{f}{g} = 0$ et $\lim\limits_a \dfrac{g}{h} = 0$, alors par produit : $\lim\limits_a \dfrac{f}{h} = 0$.

Exemple Si on admet l'égalité : $e^{\frac{1}{n^2}} \underset{n\to+\infty}{=} 1 + \dfrac{1}{n^2} + o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$, alors comme $\dfrac{1}{n^2} \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{n}\right)$:

$$e^{\frac{1}{n^2}} \underset{n\to+\infty}{=} 1 + o\left(\frac{1}{n}\right) + \underbrace{o\left(o\left(\frac{1}{n}\right)\right)}_{} \underset{n\to+\infty}{=} 1 + o\left(\frac{1}{n}\right) + o\left(\frac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{=} 1 + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

Théorème (Avec le produit, tout va bien)

$$\begin{cases} \text{Si } u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(v_n) \text{ et } \widetilde{u}_n \underset{n\to+\infty}{=} o(\widetilde{v}_n), \text{ alors } u_n\widetilde{u}_n \underset{n\to+\infty}{=} o(v_n\widetilde{v}_n). \\ \text{Si } u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(v_n), \text{ alors } u_n w_n \underset{n\to+\infty}{=} o(v_n w_n). \end{cases}$$

Exemple Si on admet les égalités : $e^x \underset{x\to0}{=} 1 + x + o(x)$ et $\sin x \underset{x\to0}{=} x + o(x)$, alors :

$$e^x \sin x \underset{x\to0}{=} \big(1+x+o(x)\big)\times\big(x+o(x)\big) \underset{x\to0}{=} x+o(x)+x^2+\underbrace{2x\ o(x)}_{}+\underbrace{o(x)\times o(x)}_{} \underset{x\to0}{=} x+o(x)+\overbrace{x^2+o\big(x^2\big)+o\big(x^2\big)}^{\underset{x\to0}{=} o(x)} \underset{x\to0}{=} x+o(x).$$

Théorème (Avec la composition À DROITE et les suites extraites, tout va bien)

- **Fonctions :** Soient $b \in \overline{\mathbb{R}}$ et φ une fonction définie au voisinage de b à valeurs dans I.
  Si $f \underset{a}{=} o(g)$ et $\lim\limits_b \varphi = a$, alors $f\circ\varphi \underset{b}{=} o(g\circ\varphi)$.
- **Suites :** Soit $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante. Si $u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(v_n)$, alors $u_{\varphi(n)} \underset{n\to+\infty}{=} o\big(v_{\varphi(n)}\big)$.

Pour $a \neq \pm\infty$, ce résultat permet de ramener par translation toute relation $f(x) \underset{x\to a}{=} o\big(g(x)\big)$ au voisinage de a à une relation $f(a+h) \underset{h\to0}{=} o\big(g(a+h)\big)$ au voisinage de 0.

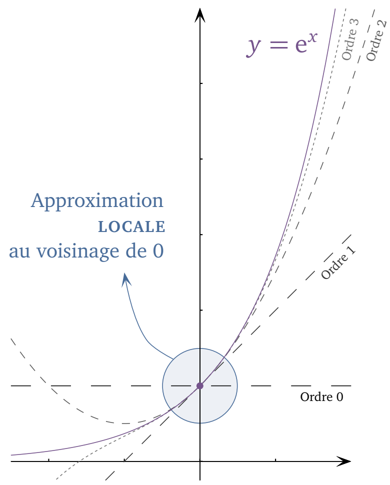
Exemple $\sqrt{x} \underset{x\to+\infty}{=} o(x)$, donc $\sqrt{\ln x} \underset{x\to+\infty}{=} o(\ln x)$ après composition À DROITE par ln.

Également : $2^n \underset{n\to+\infty}{=} o\big(3^n\big)$, donc $2^{n^2} \underset{n\to+\infty}{=} o\big(3^{n^2}\big)$.

Attention ! Il est FORMELLEMENT INTERDIT de composer une relation de négligeabilité par la gauche. Par exemple : $\ln x \underset{x\to+\infty}{=} o(x)$, mais $\dfrac{1}{\ln x} \cancel{\underset{x\to+\infty}{=}} o\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

2 DÉVELOPPEMENTS LIMITÉS

2.1 INTRODUCTION



Nous cherchons dans ce paragraphe à approximer les fonctions par des fonctions polynomiales au voisinage d'un point, généralement 0. Nous allons par exemple montrer que : $e^x \underset{x\to0}{=} 1+x+\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{6}+o\big(x^3\big)$. Ce résultat signifie que la fonction polynomiale de degré inférieur ou égal à 3 la plus proche de l'exponentielle au voisinage de 0 est la fonction $x \longmapsto 1+x+\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{6}$.

Définition (Développement limité) Soient $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction, $a \in \mathbb{R}$ adhérent à D et $n \in \mathbb{N}$. On dit que f *possède un développement limité à l'ordre n au voisinage de a*, ou plus simplement qu'*elle possède un* $DL_n(a)$, s'il existe des réels $a_0, \ldots, a_n$ pour lesquels : $f(x) \underset{x\to a}{=} a_0 + a_1(x-a) + \ldots + a_n(x-a)^n + o\big((x-a)^n\big)$.

Plus n est grand, plus la quantité $(x-a)^n$ est petite au voisinage de a. Du coup, plus n est grand, plus l'approximation de f obtenue au voisinage de a est précise.

Exemple Pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\displaystyle \frac{1}{1-x} \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} x^k + o(x^n) \underset{x\to 0}{=} 1 + x + x^2 + \ldots + x^n + o(x^n)$.

Démonstration Pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$: $\displaystyle \sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$, mais $\displaystyle \lim_{x\to 0} \frac{x}{1-x} = 0$, donc :

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{n} x^k + x^n \times \frac{x}{1-x} \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} x^k + x^n o(1) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} x^k + o(x^n).$$

On peut ramener tout développement limité au voisinage de a à un développement limité au voisinage de 0. Précisément, si : $f(x) \underset{x\to a}{=} a_0 + a_1(x-a) + \ldots + a_n(x-a)^n + o\big((x-a)^n\big)$, alors après composition **À DROITE** par la fonction $x \longmapsto x+a$: $f(x+a) \underset{x\to 0}{=} a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n + o(x^n)$.

Ensuite, si on dispose d'un développement limité de f à l'ordre n : $f(x) \underset{x\to a}{=} a_0 + a_1(x-a) + \ldots + a_n(x-a)^n + o\big((x-a)^n\big)$, on dispose aussi d'un développement de f à tout ordre $m \leqslant n$: $f(x) \underset{x\to a}{=} a_0 + a_1(x-a) + \ldots + a_m(x-a)^m + o\big((x-a)^m\big)$. Cette opération d'oubli des termes de degré compris entre $m+1$ et n est appelée *troncature à l'ordre m*.

Théorème (Unicité des coefficients d'un développement limité) En cas d'existence, la liste des coefficients d'un développement limité est unique.

Démonstration Soient $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction et $a \in \mathbb{R}$ adhérent à D. Faisons l'hypothèse absurde que f possède deux développements limités **DISTINCTS** à l'ordre n au voisinage de a :

$$f(x) \underset{x\to a}{=} a_0 + \ldots + a_n(x-a)^n + o\big((x-a)^n\big) \underset{x\to a}{=} b_0 + \ldots + b_n(x-a)^n + o\big((x-a)^n\big) \qquad \text{avec } a_0, \ldots, a_n, b_0, \ldots, b_n \in \mathbb{R}.$$

Après troncature : $a_p(x-a)^p + o\big((x-a)^p\big) \underset{x\to a}{=} b_p(x-a)^p + o\big((x-a)^p\big)$ où l'on a noté p le plus petit indice pour lequel $a_p \neq b_p$. Ainsi : $(a_p - b_p)(x-a)^p \underset{x\to a}{=} o\big((x-a)^p\big)$, donc après division par $(x-a)^p$: $\displaystyle \lim_{\substack{x\to a\\ x\neq a}} (a_p - b_p) = 0$, donc $a_p = b_p$ — contradiction !

Le résultat suivant est une conséquence immédiate des définitions de la continuité et de la dérivabilité en un point.

Théorème (Lien développement limité/continuité/dérivabilité) Soient $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction et $a \in D$.

- **Continuité :** f est continue en a si et seulement si f possède un $\mathrm{DL}_0(a)$.
  Précisément, dans ce cas : $f(x) \underset{x\to a}{=} f(a) + o(1)$.
- **Dérivabilité :** f est dérivable en a si et seulement si f possède un $\mathrm{DL}_1(a)$.
  Précisément, dans ce cas : $f(x) \underset{x\to a}{=} f(a) + f'(a)(x-a) + o(x-a)$.

Dans un développement limité de f au voisinage de a,
le coefficient d'ordre 0 est **TOUJOURS** $f(a)$ et le coefficient d'ordre 1 **TOUJOURS** $f'(a)$.

Théorème (Lien développement limité/parité/imparité) On suppose que 0 est adhérent à D et que D est symétrique par rapport à 0. Soit $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction. On suppose que f possède un développement limité au voisinage de 0.

- **Parité :** Si f est paire, les coefficients de rang impair de son développement limité sont nuls.
- **Imparité :** Si f est impaire, les coefficients de rang pair de son développement limité sont nuls.

Ainsi, au voisinage de 0, pour une fonction impaire, n'apparaissent réellement que x, x^3, x^5, x^7...

Démonstration Supposons f est paire et écrivons son $\mathrm{DL}_n(0)$: $f(x) \underset{x\to 0}{=} a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n + o(x^n)$ avec $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$. Composons ensuite à droite par $x \longmapsto -x$:

$$f(x) = f(-x) \underset{x\to 0}{=} a_0 - a_1 x + a_2 x^2 - a_3 x^3 + \ldots + (-1)^n a_n x^n + o(x^n).$$

Par unicité des coefficients : $a_1 = -a_1$ donc $a_1 = 0$, puis : $a_3 = -a_3$ donc $a_3 = 0$, etc.

2.2 Primitivation des développements limités

On commence par un lemme simple avant la version plus générale.

Théorème (Lemme de primitivation des développements limités) Soient I un intervalle, $g \in \mathscr{D}(I,\mathbb{R})$, $a \in I$ et $n \in \mathbb{N}$. Si $g'(x) \underset{x\to a}{=} \mathrm{o}\big((x-a)^n\big)$, alors : $g(x) \underset{x\to a}{=} g(a) + \mathrm{o}\big((x-a)^{n+1}\big)$.
« Constante de primitivation »

Démonstration Pour tout $x \in I \setminus \{a\}$, g est continue sur $[a,x]$ (ou $[x,a]$) et dérivable sur $]a,x[$ (ou $]x,a[$), donc $\dfrac{g(x)-g(a)}{x-a} = g'(c_x)$ pour un certain $c_x \in]a,x[$ (ou $]x,a[$) d'après le théorème des accroissements finis. Ce procédé nous fournit une fonction $c : I \setminus \{a\} \longrightarrow \mathbb{R}$ pour laquelle pour tout $x \in I \setminus \{a\}$: $|c_x - a| < |x-a|$.
Par encadrement : $\lim\limits_{x\to a} c_x = a$, donc : $\left|\dfrac{g(x)-g(a)}{(x-a)^{n+1}}\right| = \left|\dfrac{g'(c_x)}{(x-a)^n}\right| = \underbrace{\left|\dfrac{g'(c_x)}{(c_x-a)^n}\right|}_{\underset{x\to a}{\longrightarrow} 0} \times \underbrace{\left|\dfrac{c_x-a}{x-a}\right|^n}_{\leqslant 1} \underset{x\to a}{\longrightarrow} 0.$

Théorème (Primitivation des développements limités) Soient I un intervalle, $f \in \mathscr{D}(I,\mathbb{R})$ et $a \in I$. Si f' possède un $\mathrm{DL}_n(a)$: $f'(x) \underset{x\to a}{=} \sum_{k=0}^{n} a_k (x-a)^k + \mathrm{o}\big((x-a)^n\big)$ avec $a_0,\ldots,a_n \in \mathbb{R}$, alors f possède un $\mathrm{DL}_{n+1}(a)$:
$$f(x) \underset{x\to a}{=} f(a) + \sum_{k=0}^{n} a_k \frac{(x-a)^{k+1}}{k+1} + \mathrm{o}\big((x-a)^{n+1}\big).$$
« Constante de primitivation »

On peut donc **TOUJOURS** primitiver terme à terme le développement limité d'une dérivée !

Démonstration La fonction $x \overset{g}{\longmapsto} f(x) - f(a) - \sum_{k=0}^{n} a_k \dfrac{(x-a)^{k+1}}{k+1}$ est dérivable sur I et sa dérivée est la fonction $x \overset{g'}{\longmapsto} f'(x) - \sum_{k=0}^{n} a_k (x-a)^k$. Or ici $g'(x) \underset{x\to a}{=} \mathrm{o}\big((x-a)^n\big)$, donc : $g(x) \underset{x\to a}{=} g(a) + \mathrm{o}\big((x-a)^{n+1}\big)$ d'après le lemme, et c'est exactement le résultat voulu.

Exemple Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\ln(1+x) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \dfrac{x^k}{k} + \mathrm{o}\big(x^n\big) \underset{x\to 0}{=} x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^4}{4} + \ldots + (-1)^{n-1}\dfrac{x^n}{n} + \mathrm{o}\big(x^n\big)$.

Démonstration Puisque : $\dfrac{1}{1-x} \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n-1} x^k + \mathrm{o}\big(x^{n-1}\big)$, alors : $\dfrac{1}{1+x} \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k x^k + \mathrm{o}\big(x^{n-1}\big)$ après composition par $x \longmapsto -x$. Primitivons : $\ln(1+x) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \dfrac{x^k}{k} + \mathrm{o}\big(x^n\big)$ sachant que $\ln 1 = 0$.

Exemple Pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\mathrm{Arctan}\, x \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \dfrac{x^{2k+1}}{2k+1} + \mathrm{o}\big(x^{2n+1}\big) \underset{x\to 0}{=} x - \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^5}{5} - \dfrac{x^7}{7} + \ldots + (-1)^n \dfrac{x^{2n+1}}{2n+1} + \mathrm{o}\big(x^{2n+1}\big)$.
On remarque que les coefficients de rang pair sont tous nuls — évidemment puisque la fonction arctangente est impaire.

Démonstration Puisque : $\dfrac{1}{1-x} \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} x^k + \mathrm{o}\big(x^n\big)$, alors : $\dfrac{1}{1+x^2} \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^{2k} + \mathrm{o}\big(x^{2n}\big)$ après composition par $x \longmapsto -x^2$. Primitivons : $\mathrm{Arctan}\, x \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \dfrac{x^{2k+1}}{2k+1} + \mathrm{o}\big(x^{2n+1}\big)$ sachant que $\mathrm{Arctan}\, 0 = 0$.

2.3 Formule de Taylor-Young

Théorème (Formule de Taylor-Young) Soient I un intervalle, $n \in \mathbb{N}$, $f \in \mathscr{C}^n(I,\mathbb{R})$ et $a \in I$. Alors f possède un développement limité à l'ordre n au voisinage de a. Précisément : $f(x) \underset{x\to a}{=} \sum_{k=0}^{n} \dfrac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \mathrm{o}\big((x-a)^n\big)$.

Ce résultat est avant tout un théorème d'**EXISTENCE** de développements limités. Sur cette question, nous disposons à présent de deux équivalences et d'une **IMPLICATION** (seulement) :

Continuité	$\Longleftrightarrow$	Existence d'un développement limité à l'ordre 0
Dérivabilité	$\Longleftrightarrow$	Existence d'un développement limité à l'ordre 1
Classe $\mathscr{C}^n$	$\Longrightarrow$	Existence d'un développement limité à l'ordre n

Démonstration Par récurrence — au rang n : $\forall f \in \mathscr{C}^n(I,\mathbb{R}),\quad f(x) \underset{x\to a}{=} \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \mathrm{o}\big((x-a)^n\big).$

Initialisation : Nous savons déjà que pour toute fonction $f \in \mathscr{C}(I,\mathbb{R})$: $\quad f(x) \underset{x\to a}{=} f(a)+\mathrm{o}(1).$

Hérédité : Soit $n\in\mathbb{N}$. On suppose la proposition vraie au rang n. Soit $f\in\mathscr{C}^{n+1}(I,\mathbb{R})$. La fonction f' est de classe $\mathscr{C}^n$ sur I, donc par hypothèse de récurrence :

$$f'(x) \underset{x\to a}{=} \sum_{k=0}^n \frac{(f')^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \mathrm{o}\big((x-a)^n\big) \underset{x\to a}{=} \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k+1)}(a)}{k!}(x-a)^k + \mathrm{o}\big((x-a)^n\big).$$

Le théorème de primitivation des développements limités montre aussitôt le résultat souhaité :

$$f(x) \underset{x\to a}{=} f(a)+\sum_{k=0}^n \frac{f^{(k+1)}(a)}{k!}\,\frac{(x-a)^{k+1}}{k+1} + \mathrm{o}\big((x-a)^{n+1}\big) \underset{x\to a}{=} f(a)+\sum_{k=0}^n \frac{f^{(k+1)}(a)}{(k+1)!}(x-a)^{k+1} + \mathrm{o}\big((x-a)^{n+1}\big)$$
$$\underset{x\to a}{=} f(a)+\sum_{k=1}^{n+1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \mathrm{o}\big((x-a)^{n+1}\big) \underset{x\to a}{=} \sum_{k=0}^{n+1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \mathrm{o}\big((x-a)^{n+1}\big).$$

Exemple Pour tout $n\in\mathbb{N}$: $\quad \mathrm{e}^x \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} + \mathrm{o}\big(x^n\big) \underset{x\to 0}{=} 1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+\frac{x^4}{24}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\mathrm{o}\big(x^n\big).$

Également : $$\mathrm{ch}\,x \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^n \frac{x^{2k}}{(2k)!} + \mathrm{o}\big(x^{2n}\big) \underset{x\to 0}{=} 1+\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+\ldots+\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\mathrm{o}\big(x^{2n}\big)$$
et $$\mathrm{sh}\,x \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^n \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + \mathrm{o}\big(x^{2n+1}\big) \underset{x\to 0}{=} x+\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}+\ldots+\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\mathrm{o}\big(x^{2n+1}\big).$$

Démonstration L'exponentielle est de classe $\mathscr{C}^n$ sur $\mathbb{R}$, donc possède un $\mathrm{DL}_n(0)$ d'après la formule de Taylor-Young et : $\quad \mathrm{e}^x \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^n \frac{\exp^{(k)}(0)}{k!}x^k + \mathrm{o}\big(x^n\big) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} + \mathrm{o}\big(x^n\big).$

Ensuite : $\quad \mathrm{sh}\,x = \frac{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}}{2} \underset{x\to 0}{=} \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{2n+1}\frac{x^k}{k!} - \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{2n+1}(-1)^k\frac{x^k}{k!} + \mathrm{o}\big(x^{2n+1}\big) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^n \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + \mathrm{o}\big(x^{2n+1}\big).$

Les termes de rang pair se simplifient deux à deux tandis que les termes de rang impair sont comptés deux fois mais aussitôt divisés par 2. Même type de raisonnement pour la fonction ch.

Exemple Pour tous $\alpha\in\mathbb{R}$ et $n\in\mathbb{N}$:

$$(1+x)^\alpha \underset{x\to 0}{=} 1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2+\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{6}x^3+\ldots+\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+\mathrm{o}\big(x^n\big).$$

Démonstration La fonction $x\longmapsto(1+x)^\alpha$ est de classe $\mathscr{C}^n$ sur $]-1,+\infty[$ et pour tout $k\in[\![0,n]\!]$, sa dérivée $k^{\text{ème}}$ est la fonction $x\longmapsto \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-k+1)(1+x)^{\alpha-k}$. On conclut grâce à la formule de Taylor.

Ce développement limité de $(1+x)^\alpha$ lorsque x tend vers 0 est une conséquence de la formule du binôme lorsque α est un ENTIER NATUREL. Dans ce cas, en effet, pour tout $k\in[\![0,\alpha]\!]$: $\displaystyle\binom{\alpha}{k}=\frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-k+1)}{k!}$. Conclusion : quand vous cherchez un développement limité de $(1+x)^5$ à l'ordre 3 lorsque x tend vers 0, utilisez simplement la formule du binôme que vous connaissez bien : $\quad (1+x)^5 = 1+5x+10x^2+10x^3+5x^4+x^5 = 1+5x+10x^3+\mathrm{o}\big(x^3\big).$

Exemple Pour tout $n\in\mathbb{N}$: $$\cos x \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^n (-1)^k\frac{x^{2k}}{(2k)!}+\mathrm{o}\big(x^{2n}\big) \underset{x\to 0}{=} 1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\mathrm{o}\big(x^{2n}\big)$$
et $$\sin x \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^n (-1)^k\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}+\mathrm{o}\big(x^{2n+1}\big) \underset{x\to 0}{=} x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}+\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\mathrm{o}\big(x^{2n+1}\big).$$

Démonstration Pour tous $k\in\mathbb{N}$ et $x\in\mathbb{R}$: $\quad \cos^{(k)}(x)=\cos\left(x+\frac{k\pi}{2}\right)$ et $\sin^{(k)}(x)=\sin\left(x+\frac{k\pi}{2}\right)$, donc : $\begin{cases}\cos^{(2k)}(0)=(-1)^k\\ \cos^{(2k+1)}(0)=0\end{cases}$ et $\begin{cases}\sin^{(2k)}(0)=0\\ \sin^{(2k+1)}(0)=(-1)^k.\end{cases}$ On conclut grâce à la formule de Taylor-Young.

Exemple $\tan x \underset{x\to 0}{=} x + \dfrac{x^3}{3} + \mathrm{o}\left(x^3\right)$.

On peut déterminer explicitement un développement limité de tangente à tout ordre au voisinage de 0, mais le résultat est hautement complexe et hors programme.

Démonstration La fonction tangente est de classe $\mathscr{C}^3$ sur $\left]-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right[$ donc possède un $\mathrm{DL}_3(0)$ d'après la formule de Taylor-Young. Ensuite : $\tan 0 = 0$, puis $\tan' = 1+\tan^2$ donc $\tan'(0)=1$, puis : $\tan''=2\tan\tan'$ donc $\tan''(0)=0$, et enfin : $\tan'''=2\tan'^{\,2}+2\tan\tan''$ donc $\tan'''(0)=2$.

Intéressons-nous à présent brièvement à la dérivation des développements limités. Soient $n\in\mathbb{N}^*$, $f\in\mathscr{C}^n(D,\mathbb{R})$ et $a\in D$. D'après la formule de Taylor-Young, f possède au voisinage de a un développement limité à l'ordre n et f' un développement à l'ordre $n-1$:

$$f(x) \underset{x\to a}{=} \sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k+\mathrm{o}\big((x-a)^n\big) \qquad \text{et} \qquad f'(x) \underset{x\to a}{=} \sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k+1)}(a)}{k!}(x-a)^k+\mathrm{o}\big((x-a)^{n-1}\big).$$

Il se trouve alors — essayez ! — que le développement limité de f' s'obtient en dérivant terme à terme celui de f.

Attention ! **On ne peut pas toujours dériver un développement limité.** On le peut à l'ordre n pour une fonction **de classe** $\mathscr{C}^n$, i.e. quand on peut appliquer la formule de Taylor-Young.

Exemple Pour tout $n\in\mathbb{N}$: $\dfrac{1}{(1-x)^2} \underset{x\to 0}{=} \displaystyle\sum_{k=0}^{n}(k+1)x^k+\mathrm{o}\left(x^n\right) \underset{x\to 0}{=} 1+2x+3x^2+4x^3+\ldots+(n+1)x^n+\mathrm{o}\left(x^n\right)$.

Démonstration Comme $x\longmapsto\dfrac{1}{1-x}$ est de classe $\mathscr{C}^{n+1}$ sur $]-\infty,1[$, on n'a qu'à dériver son développement limité à l'ordre $n+1$ au voisinage de 0 : $\dfrac{1}{1-x} \underset{x\to 0}{=} \displaystyle\sum_{k=0}^{n+1}x^k+\mathrm{o}\left(x^{n+1}\right) \underset{x\to 0}{=} 1+x+x^2+x^3+\ldots+x^{n+1}+\mathrm{o}\left(x^{n+1}\right)$.

2.4 Développements limités usuels

Les formules du tableau ci-dessous doivent être connues **par cœur** sans délai et sans la moindre hésitation.

Pour les fonctions paires, les développements limités sont donnés à l'ordre $2n$ pour tout $n\in\mathbb{N}$, mais par exemple, puisque vous connaissez un développement limité de la fonction cosinus au voisinage de 0 aux ordres $0, 2, 4, 6\ldots$, bien sûr que vous en connaissez un à l'ordre 3, il suffit de tronquer au bon endroit : $\cos x \underset{x\to 0}{=} 1-\dfrac{x^2}{2}+\mathrm{o}\left(x^3\right)$. Notez bien que ce développement est **plus fin** que le développement à l'ordre 2 : $\cos x \underset{x\to 0}{=} 1-\dfrac{x^2}{2}+\mathrm{o}\left(x^2\right)$. Sur le développement à l'ordre 3, on ne voit pas de terme d'ordre 3 mais ce n'est qu'une impression, **il y a un terme d'ordre 3**, avec un coefficient 0. À l'ordre 2, c'est différent, on ne voit pas de terme d'ordre 3 parce qu'un tel terme est réellement **invisible** à ce niveau de précision.

$\dfrac{1}{1-x} \underset{x\to 0}{=} \displaystyle\sum_{k=0}^{n}x^k+\mathrm{o}\left(x^n\right) \underset{x\to 0}{=} 1+x+x^2+\ldots+x^n+\mathrm{o}\left(x^n\right)$
$\ln(1+x) \underset{x\to 0}{=} \displaystyle\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\frac{x^k}{k}+\mathrm{o}\left(x^n\right) \underset{x\to 0}{=} x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+\mathrm{o}\left(x^n\right)$
$\mathrm{e}^x \underset{x\to 0}{=} \displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}+\mathrm{o}\left(x^n\right) \underset{x\to 0}{=} 1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+\frac{x^4}{24}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\mathrm{o}\left(x^n\right)$
$(1+x)^\alpha \underset{x\to 0}{=} 1+\alpha x+\dfrac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2+\dfrac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{6}x^3+\ldots+\dfrac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+\mathrm{o}\left(x^n\right)$
$\sin x \underset{x\to 0}{=} \displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}+\mathrm{o}\left(x^{2n+1}\right) \underset{x\to 0}{=} x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}+\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\mathrm{o}\left(x^{2n+1}\right)$
$\cos x \underset{x\to 0}{=} \displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{x^{2k}}{(2k)!}+\mathrm{o}\left(x^{2n}\right) \underset{x\to 0}{=} 1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\mathrm{o}\left(x^{2n}\right)$
$\mathrm{Arctan}\,x \underset{x\to 0}{=} \displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{x^{2k+1}}{2k+1}+\mathrm{o}\left(x^{2n+1}\right) \underset{x\to 0}{=} x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+\mathrm{o}\left(x^{2n+1}\right)$
$\tan x \underset{x\to 0}{=} x+\dfrac{x^3}{3}+\mathrm{o}\left(x^3\right)$

$$\operatorname{sh} x \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + \mathrm{o}\left(x^{2n+1}\right) \underset{x\to 0}{=} x + \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + \ldots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \mathrm{o}\left(x^{2n+1}\right)$$

$$\operatorname{ch} x \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k}}{(2k)!} + \mathrm{o}\left(x^{2n}\right) \underset{x\to 0}{=} 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \ldots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \mathrm{o}\left(x^{2n}\right)$$

2.5 Opérations sur les développements limités

Exemple $\mathrm{e}^x \underset{x\to 0}{=} 1 + x + \frac{x^2}{2} + \mathrm{o}\left(x^2\right)$, donc : $\mathrm{e}^{x^3} \underset{x\to 0}{=} 1 + x^3 + \frac{x^6}{2} + \mathrm{o}\left(x^6\right)$.

De même : $\ln(1+x) \underset{x\to 0}{=} x - \frac{x^2}{2} + \mathrm{o}\left(x^2\right)$, donc : $\ln\left(1+x^2\right) \underset{x\to 0}{=} x^2 - \frac{x^4}{2} + \mathrm{o}\left(x^4\right)$.

Conclusion : quand on remplace simplement x par x^p dans un développement limité, l'ordre du résultat est simplement multiplié par p. Nous verrons plus loin que la situation est plus compliquée pour la composition en général.

Exemple On veut un développement limité de $\dfrac{\ln\left(1+x^2\right)}{x}$ à l'ordre 5 lorsque x tend vers 0.

Démonstration Pour commencer : $\dfrac{\ln\left(1+x^2\right)}{x} \underset{x\to 0}{=} \dfrac{x^2 + \ldots + \mathrm{o}\left(x^{\cdots}\right)}{x}$. Pour obtenir un ordre 5, il nous faut un numérateur à l'ordre 6, et pour cela, on peut partir d'un développement limité de $\ln(1+x)$ à l'ordre 3.

Concrètement : $\dfrac{\ln\left(1+x^2\right)}{x} \underset{x\to 0}{=} \dfrac{x^2 - \frac{x^4}{2} + \frac{x^6}{3} + \mathrm{o}\left(x^6\right)}{x} \underset{x\to 0}{=} x - \dfrac{x^3}{2} + \dfrac{x^5}{3} + \mathrm{o}\left(x^5\right)$.

> Quand on veut calculer un $\mathrm{DL}_n(0)$ de $f \times g$,
> on peut **toujours** multiplier un $\mathrm{DL}_n(0)$ de f et un $\mathrm{DL}_n(0)$ de g,
> **mais on peut souvent faire mieux.**

Exemple On veut un développement limité de $\mathrm{e}^x \cos x$ à l'ordre 5 lorsque x tend vers 0.

Démonstration

- **Échec :** $\mathrm{e}^x \cos x \underset{x\to 0}{=} \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \mathrm{o}\left(x^3\right)\right)\left(1 - \frac{x^2}{2} + \mathrm{o}\left(x^2\right)\right) \underset{x\to 0}{=} 1 + x + \mathrm{o}\left(x^2\right)$. Pas assez fin !

  C'est irrémédiable, un $\mathrm{o}\left(x^2\right)$ apparaît.

  Ordre 2 × ordre 3 ordre 2+3

  En développant, on voit apparaître des $\mathrm{o}\left(x^2\right)$, des $\mathrm{o}\left(x^3\right)$, des $\mathrm{o}\left(x^4\right)$ et des $\mathrm{o}\left(x^5\right)$, **donc** le calcul est mené à la précision $\mathrm{o}\left(x^2\right)$ et non pas à la précision $\mathrm{o}\left(x^5\right)$.

- **Succès :**
$$\begin{aligned}\mathrm{e}^x \cos x &\underset{x\to 0}{=} \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^5}{120} + \mathrm{o}\left(x^5\right)\right)\left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \mathrm{o}\left(x^5\right)\right) \\ &\underset{x\to 0}{=} 1 + x - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{6} - \frac{x^5}{30} + \mathrm{o}\left(x^5\right).\end{aligned}$$

La stratégie qui consiste à multiplier un $\mathrm{DL}_n(0)$ par un $\mathrm{DL}_n(0)$ quand on veut obtenir un $\mathrm{DL}_n(0)$ est optimale lorsque les développements limités manipulés commencent tous les deux par un terme d'ordre 0 **non nul**. Quand les premiers termes non nuls sont d'ordres plus grands, la quantité de calculs à mener peut être réduite si on s'y prend bien. Laissez-vous guider par les exemples qui suivent.

Exemple On veut un développement limité de $\ln(1+x)\sin x$ à l'ordre 4 lorsque x tend vers 0.

Démonstration

- **Semi-échec :**
$$\begin{aligned}\ln(1+x)\sin x &\underset{x\to 0}{=} \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \mathrm{o}\left(x^4\right)\right)\left(x - \frac{x^3}{6} + \mathrm{o}\left(x^4\right)\right) \\ &\underset{x\to 0}{=} x^2 - \frac{x^3}{2} + \frac{x^4}{6} - \frac{x^5}{6} + \mathrm{o}\left(x^5\right).\end{aligned}$$
  Cette fois c'est trop fin !

  Trop de finesse vaut mieux que pas assez, mais nous avons fait trop de calculs.

- **Succès :** Le fait que nos développements limités commencent par x et non par un terme d'ordre 0 non nul nous autorise le calcul plus simple suivant.
$$\ln(1+x)\sin x \underset{x\to 0}{=} \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \mathrm{o}\left(x^3\right)\right)\left(x - \frac{x^3}{6} + \mathrm{o}\left(x^3\right)\right) \underset{x\to 0}{=} x^2 - \frac{x^3}{2} + \frac{x^4}{6} + \mathrm{o}\left(x^4\right).$$

Exemple On veut un développement limité de $\mathrm{e}^x \sin\left(x^2\right)$ à l'ordre 7 lorsque x tend vers 0.

Démonstration Analyse de la situation : $$\mathrm{e}^x \sin\left(x^2\right) \underset{x\to 0}{=} \Big(\underbrace{1+\ldots+\mathrm{o}\left(x^{\cdots}\right)}_{\text{Il nous faut ici un } \mathrm{o}(x^5).}\Big)\Big(\underbrace{x^2+\ldots+\mathrm{o}\left(x^{\cdots}\right)}_{\text{Il nous faut ici un } \mathrm{o}(x^7).}\Big).$$

Or, pour avoir un développement limité de $\sin\left(x^2\right)$ à l'ordre 7, il faut partir d'un développement limité de $\sin x$ à l'ordre 4. Le reste n'est qu'un calcul : $$\mathrm{e}^x \sin\left(x^2\right) \underset{x\to 0}{=} \left(1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+\frac{x^4}{24}+\frac{x^5}{120}+\mathrm{o}\left(x^5\right)\right)\left(x^2-\frac{x^6}{6}+\mathrm{o}\left(x^7\right)\right)$$
$$\underset{x\to 0}{=} x^2+x^3+\frac{x^4}{2}+\frac{x^5}{6}-\frac{x^6}{8}-\frac{19x^7}{120}+\mathrm{o}\left(x^7\right).$$

Exemple On veut un développement limité de $(\operatorname{Arctan} x)^2\cos x$ à l'ordre 5 lorsque x tend vers 0.

Démonstration Quand on multiplie plus de deux développements limités, on peut trouver intéressant de factoriser d'emblée chaque développement par son premier terme non nul. On est alors ramené à un produit de développements limités qui ont tous un terme d'ordre 0 non nul — situation facile à gérer.

Analyse rapide de la situation : $$(\operatorname{Arctan} x)^2\cos x \underset{x\to 0}{=} \left(x+\ldots+\mathrm{o}\left(x^{\cdots}\right)\right)^2\left(1+\ldots+\mathrm{o}\left(x^{\cdots}\right)\right)$$
$$\underset{x\to 0}{=} x^2\,\underbrace{\left(1+\ldots+\mathrm{o}\left(x^{\cdots\boxed{-1}}\right)\right)^2\left(1+\ldots+\mathrm{o}\left(x^{\cdots}\right)\right)}_{\text{Avec } x^2 \text{ en facteur, on vise la précision } \mathrm{o}(x^3).}.$$

Finalement : $$(\operatorname{Arctan} x)^2\cos x \underset{x\to 0}{=} \left(x-\frac{x^3}{3}+\mathrm{o}\left(x^4\right)\right)^2\left(1-\frac{x^2}{2}+\mathrm{o}\left(x^3\right)\right)$$
$$\underset{x\to 0}{=} \left(x^2-\frac{2x^4}{3}+\mathrm{o}\left(x^5\right)\right)\left(1-\frac{x^2}{2}+\mathrm{o}\left(x^3\right)\right) \underset{x\to 0}{=} x^2-\frac{7x^4}{6}+\mathrm{o}\left(x^5\right).$$

Exemple On veut un développement limité de $\operatorname{sh}^4 x$ à l'ordre 7 lorsque x tend vers 0.

Démonstration : $$\operatorname{sh}^4 x \underset{x\to 0}{=} \left(x+\ldots+\mathrm{o}\left(x^{\cdots}\right)\right)^4 \underset{x\to 0}{=} x^4\,\underbrace{\left(1+\ldots+\mathrm{o}\left(x^{\cdots\boxed{-1}}\right)\right)^4}_{\text{Avec } x^4 \text{ en facteur, on vise la précision } \mathrm{o}(x^3).}.$$

Finalement : $$\operatorname{sh}^4 x \underset{x\to 0}{=} \left(x+\frac{x^3}{6}+\mathrm{o}\left(x^4\right)\right)^4 \underset{x\to 0}{=} \left(x^2+\frac{x^4}{3}+\mathrm{o}\left(x^5\right)\right)^2 \underset{x\to 0}{=} x^4+\frac{2x^6}{3}+\mathrm{o}\left(x^7\right).$$

Quand on veut calculer un $\mathrm{DL}_n(0)$ de $\dfrac{1}{1+f}$,
on peut TOUJOURS composer un $\mathrm{DL}_n(0)$ de $\dfrac{1}{1+u}$ avec un $\mathrm{DL}_n(0)$ de f.

Attention !
Vérifiez bien que $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0$.

On peut calculer ainsi tous les inverses de développements limités qu'on veut à condition de se ramener toujours à un dénominateur de limite 1 en factorisant convenablement. Quelques exemples vaudront ici mieux qu'un long discours.

Mais avant cela, une petite remarque technique. Les exemples qui suivent, tous liés à une composition de fonctions, nous mettent en présence de quantités du genre : $\mathrm{o}\left(x^3-2x^4+x^5+\mathrm{o}\left(x^5\right)\right)$. Comment les simplifier ? Tout simplement : $\mathrm{o}\left(x^3-2x^4+x^5+\mathrm{o}\left(x^5\right)\right) \underset{x\to 0}{=} x^3\mathrm{o}\left(1-2x^2+\mathrm{o}\left(x^2\right)\right) \underset{x\to 0}{=} x^3\mathrm{o}(1) \underset{x\to 0}{=} \mathrm{o}\left(x^3\right)$. Bref, $\mathrm{o}\left(x^3-2x^4+x^5+\mathrm{o}\left(x^5\right)\right)$ peut être remplacé sans autre forme de procès par $\mathrm{o}\left(x^3\right)$ car x^3 domine les autres termes en x^4, x^5 et $\mathrm{o}\left(x^5\right)$. En pratique, on ne prend même pas la peine d'écrire $\mathrm{o}\left(x^3-2x^4+x^5+\mathrm{o}\left(x^5\right)\right)$, on écrit directement $\mathrm{o}\left(x^3\right)$.

Exemple On veut un développement limité de $\dfrac{1}{1+\ln(1+x)}$ à l'ordre 2 lorsque x tend vers 0.

Démonstration Pour commencer : $\lim\limits_{x\to 0}\ln(1+x)=0$. Ensuite : $\ln(1+x) \underset{x\to 0}{=} x-\dfrac{x^2}{2}+\mathrm{o}\left(x^2\right)$ et $\dfrac{1}{1+u} \underset{u\to 0}{=} 1-u+u^2+\mathrm{o}\left(u^2\right)$, donc : $$\frac{1}{1+\ln(1+x)} \underset{x\to 0}{=} 1-\left(x-\frac{x^2}{2}\right)+\left(x-\frac{x^2}{2}\right)^2+\mathrm{o}\left(x^2\right)$$
$$\underset{x\to 0}{=} 1-\left(x-\frac{x^2}{2}\right)+x^2+\mathrm{o}\left(x^2\right) \underset{x\to 0}{=} 1-x+\frac{3x^2}{2}+\mathrm{o}\left(x^2\right).$$

Exemple On veut un développement limité de $\dfrac{1}{\cos x}$ à l'ordre 4 lorsque x tend vers 0.

Démonstration On peut partir de : $\cos x - 1 \underset{x\to 0}{=} -\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+\mathrm{o}\big(x^4\big)$ et $\frac{1}{1+u} \underset{u\to 0}{=} 1-u+u^2-u^3+u^4+\mathrm{o}\big(u^4\big)$, mais quand on remplace u par $-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+\mathrm{o}\big(x^4\big)$ dans $\frac{1}{1+u}$, les termes u^3, u^4 et $\mathrm{o}\big(u^4\big)$ sont tous des $\mathrm{o}\big(x^4\big)$, donc ne servent à rien. Le développement : $\frac{1}{1+u} \underset{u\to 0}{=} 1-u+u^2+\mathrm{o}\big(u^2\big)$ est ici suffisant.

$$\frac{1}{\cos x} \underset{x\to 0}{=} \frac{1}{1+\left(-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+\mathrm{o}\big(x^4\big)\right)} \underset{x\to 0}{=} 1-\left(-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}\right)+\left(-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}\right)^2+\mathrm{o}\big(x^4\big) \underset{x\to 0}{=} 1-\left(-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}\right)+\frac{x^4}{4}+\mathrm{o}\big(x^4\big)$$
$$\underset{x\to 0}{=} 1+\frac{x^2}{2}+\frac{5x^4}{24}+\mathrm{o}\big(x^4\big).$$

Exemple On veut un développement limité de $\frac{x^3}{\operatorname{sh} x - x}$ à l'ordre 2 lorsque x tend vers 0.

Démonstration Cette fois, le développement limité du dénominateur commence par $\frac{x^3}{6}$, donc si nous voulons un dénominateur de limite 1 en 0, nous allons devoir factoriser par $\frac{x^3}{6}$ et adapter notre calcul en conséquence.

Analyse rapide de la situation : $\frac{x^3}{\operatorname{sh} x - x} \underset{x\to 0}{=} \frac{x^3}{\frac{x^3}{6}+\ldots+\mathrm{o}\big(x^{\cdots}\big)} \underset{x\to 0}{=} \frac{6}{1+\ldots+\mathrm{o}\big(x^{\cdots\boxed{-3}}\big)}$.

Du coup : $\frac{x^3}{\operatorname{sh} x - x} \underset{x\to 0}{=} \frac{x^3}{\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}+\mathrm{o}\big(x^5\big)} \underset{x\to 0}{=} \frac{6}{1+\frac{x^2}{20}+\mathrm{o}\big(x^2\big)} \underset{x\to 0}{=} 6\left(1-\frac{x^2}{20}+\mathrm{o}\big(x^2\big)\right) \underset{x\to 0}{=} 6-\frac{3x^2}{10}+\mathrm{o}\big(x^2\big)$.

Dans le développement : $\frac{1}{1+u} \underset{u\to 0}{=} 1-u+u^2+\mathrm{o}\big(u^2\big)$, quand on remplace u par $\frac{x^2}{12}+\mathrm{o}\big(x^2\big)$, les termes u^2 et $\mathrm{o}\big(u^2\big)$ sont tous deux des $\mathrm{o}\big(x^2\big)$, donc ne servent à rien. Le développement : $\frac{1}{1+u} \underset{u\to 0}{=} 1-u+\mathrm{o}(u)$ suffit.

Quand on veut calculer un $\mathrm{DL}_n(0)$ de $g\circ f$,
on peut TOUJOURS composer un $\mathrm{DL}_n(0)$ de g et un $\mathrm{DL}_n(0)$ de f,
MAIS ON PEUT SOUVENT FAIRE MIEUX.

Attention !
Vérifiez bien que $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0$.

Exemple On veut un développement limité de $\sqrt{1+\operatorname{Arctan} x}$ à l'ordre 3 lorsque x tend vers 0.

Démonstration Pourquoi faut-il que $\sqrt{1+u}$ et $\operatorname{Arctan} x$ soient développés TOUTES LES DEUX à l'ordre 3 en général et pas moins ? C'est ce que nous allons tâcher de bien comprendre dans cet exemple. En tout cas, pour commencer : $\lim\limits_{x\to 0} \operatorname{Arctan} x = 0$.

- **Échec n°1 :** Partons des développements : $\sqrt{1+u} \underset{u\to 0}{=} 1+\frac{u}{2}-\frac{u^2}{8}+\frac{u^3}{16}+\mathrm{o}\big(u^3\big)$ et $\operatorname{Arctan} x \underset{x\to 0}{=} x+\mathrm{o}(x)$. Quand on remplace u par $x+\mathrm{o}(x)$ dans le premier terme non constant $\frac{u}{2}$ de $\sqrt{1+u}$, le $\mathrm{o}(x)$ se retrouve tel quel dans le développement de $\sqrt{1+\operatorname{Arctan} x}$ et nous empêche d'atteindre la précision $\mathrm{o}\big(x^3\big)$. Pour cette raison, le premier terme non constant $\frac{u}{2}$ de $\sqrt{1+u}$ nous oblige à pousser $\operatorname{Arctan} x$ à la précision $\mathrm{o}\big(x^3\big)$.
- **Échec n°2 :** Partons des développements : $\sqrt{1+u} \underset{u\to 0}{=} 1+\frac{u}{2}+\mathrm{o}(u)$ et $\operatorname{Arctan} x \underset{x\to 0}{=} x-\frac{x^3}{3}+\mathrm{o}\big(x^3\big)$. Quand on remplace u par $x-\frac{x^3}{3}+\mathrm{o}\big(x^3\big)$ dans le $\mathrm{o}(u)$ de $\sqrt{1+u}$, x domine $\frac{x^3}{3}$, donc on se retrouve à la tête d'un $\mathrm{o}(x)$ dans le développement de $\sqrt{1+\operatorname{Arctan} x}$, qui nous empêche d'atteindre la précision $\mathrm{o}\big(x^3\big)$. Pour cette raison, le premier terme x d'$\operatorname{Arctan} x$ nous oblige à pousser $\sqrt{1+u}$ à la précision $\mathrm{o}\big(u^3\big)$.
- **Succès :** $\sqrt{1+u} \underset{u\to 0}{=} 1+\frac{u}{2}-\frac{u^2}{8}+\frac{u^3}{16}+\mathrm{o}\big(u^3\big)$ et $\operatorname{Arctan} x \underset{x\to 0}{=} x-\frac{x^3}{3}+\mathrm{o}\big(x^3\big)$, donc :

$$\sqrt{1+\operatorname{Arctan} x} \underset{x\to 0}{=} 1+\frac{1}{2}\left(x-\frac{x^3}{3}+\mathrm{o}\big(x^3\big)\right)-\frac{1}{8}\left(x-\frac{x^3}{3}+\mathrm{o}\big(x^3\big)\right)^2+\frac{1}{16}\left(x-\frac{x^3}{3}+\mathrm{o}\big(x^3\big)\right)^3+\underbrace{\mathrm{o}\left(\left(x-\frac{x^3}{3}+\mathrm{o}\big(x^3\big)\right)^3\right)}_{\underset{x\to 0}{=}\mathrm{o}(x^3)}$$

Précision $\mathrm{o}\big(x^3\big)$ imposée par notre $\mathrm{DL}_3(0)$ d'$\operatorname{Arctan} x$.

Précision $\mathrm{o}\big(x^3\big)$ imposée par notre $\mathrm{DL}_3(0)$ de $\sqrt{1+u}$.

$$\underset{x\to 0}{=} 1+\frac{1}{2}\left(x-\frac{x^3}{3}\right)-\frac{1}{8}\left(x-\frac{x^3}{3}\right)^2+\frac{1}{16}\left(x-\frac{x^3}{3}\right)^3+\mathrm{o}\big(x^3\big)$$
$$\underset{x\to 0}{=} 1+\frac{1}{2}\left(x-\frac{x^3}{3}\right)-\frac{1}{8}\big(x^2\big)+\frac{1}{16}\big(x^3\big)+\mathrm{o}\big(x^3\big) \underset{x\to 0}{=} 1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}-\frac{5x^3}{48}+\mathrm{o}\big(x^3\big).$$

Vous êtes à présent convaincus que la précision globale du calcul effectué dépend À LA FOIS du $\mathrm{o}\big(x^3\big)$ de $\operatorname{Arctan} x$ ET du $\mathrm{o}\big(u^3\big)$ de $\sqrt{1+u}$.

Exemple On veut un développement limité de $\ln\cos x$ à l'ordre 6 lorsque x tend vers 0.

Démonstration On pourrait partir d'un $\mathrm{DL}_6(0)$ des deux fonctions $x \longmapsto \ln(1+x)$ et $\cos x - 1$, mais il est possible de faire mieux ici. Le développement limité de $\cos x - 1$ commence par $\frac{x^2}{2}$, **DONC** il n'est pas nécesaire de pousser $\ln(1+u)$ au-delà de l'ordre 3.

On part donc de ceci : $\ln(1+u) \underset{u\to 0}{=} u - \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3} + \mathrm{o}\left(u^3\right)$ et $\cos x - 1 \underset{x\to 0}{=} -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720} + \mathrm{o}\left(x^6\right)$. Aussitôt :

$$\ln\cos x \underset{x\to 0}{=} \ln\left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720} + \mathrm{o}\left(x^6\right)\right) \underset{x\to 0}{=} \left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720}\right) - \frac{1}{2}\left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(-\frac{x^2}{2}\right)^3 + \mathrm{o}\left(x^6\right)$$

$$\underset{x\to 0}{=} \left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{x^4}{4} - \frac{x^6}{24}\right) - \frac{x^6}{24} + \mathrm{o}\left(x^6\right) \underset{x\to 0}{=} -\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12} - \frac{x^6}{45} + \mathrm{o}\left(x^6\right).$$

Exemple On veut un développement limité de $\mathrm{Arctan}\left(x^3\mathrm{e}^x\right)$ à l'ordre 7 lorsque x tend vers 0.

Démonstration On pourrait là aussi partir d'un $\mathrm{DL}_7(0)$ de $\mathrm{Arctan}\, u$ et $x^3\mathrm{e}^x$, mais quelle galère ! Le développement limité de $x^3\mathrm{e}^x$ commence par x^3, **DONC** il n'est pas nécessaire de pousser $\mathrm{Arctan}\, u$ au-delà de l'ordre 3. En revanche, comme le développement limité de $\mathrm{Arctan}\, u$ commence par u, on est obligé de pousser $x^3\mathrm{e}^x$ à l'ordre 7, i.e. de pousser e^x à l'ordre 4. Le reste n'est qu'un calcul affreux !

Exemple On veut un développement limité de $\sqrt[3]{\frac{\mathrm{e}^x - 1}{x}}$ à l'ordre 3 lorsque x tend vers 0.

Démonstration Tout d'abord : $\sqrt[3]{1+u} = (1+u)^{\frac{1}{3}} \underset{u\to 0}{=} 1 + \frac{u}{3} - \frac{u^2}{9} + \frac{5u^3}{81} + \mathrm{o}\left(u^3\right)$.

Également : $\frac{\mathrm{e}^x - 1}{x} \underset{x\to 0}{=} \frac{x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \mathrm{o}\left(x^4\right)}{x} \underset{x\to 0}{=} 1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{6} + \frac{x^3}{24} + \mathrm{o}\left(x^3\right)$. Du coup :

$$\sqrt[3]{\frac{\mathrm{e}^x - 1}{x}} \underset{x\to 0}{=} \left(1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{6} + \frac{x^3}{24} + \mathrm{o}\left(x^3\right)\right)^{\frac{1}{3}} \underset{x\to 0}{=} 1 + \frac{1}{3}\left(\frac{x}{2} + \frac{x^2}{6} + \frac{x^3}{24}\right) - \frac{1}{9}\left(\frac{x}{2} + \frac{x^2}{6} + \frac{x^3}{24}\right)^2 + \frac{5}{81}\left(\frac{x}{2} + \frac{x^2}{6} + \frac{x^3}{24}\right)^3 + \mathrm{o}\left(x^3\right)$$

$$\underset{x\to 0}{=} 1 + \frac{1}{3}\left(\frac{x}{2} + \frac{x^2}{6} + \frac{x^3}{24}\right) - \frac{1}{9}\left(\frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{6}\right) + \frac{5}{81}\left(\frac{x^3}{8}\right) + \mathrm{o}\left(x^3\right) \underset{x\to 0}{=} 1 + \frac{x}{6} + \frac{x^2}{36} + \frac{x^3}{324} + \mathrm{o}\left(x^3\right).$$

Pour finir, on calcule les développements limités en un point autre que 0 en s'y ramenant par translation comme cela a déjà été dit. Ainsi, pour calculer un $\mathrm{DL}_n(a)$ de $x \longmapsto f(x)$, on calcul un $\mathrm{DL}_n(0)$ de $h \longmapsto f(a+h)$ et on conclut via le changement de variable $x = a + h$.

Exemple $\ln x \underset{x\to 2}{=} \ln 2 + \frac{x-2}{2} - \frac{(x-2)^2}{8} + \frac{(x-2)^3}{24} + \mathrm{o}\left((x-2)^3\right)$.

Démonstration On ramène le problème en 0 grâce au changement de variable $x = 2 + h$. Chercher un développement limité de $\ln x$ à l'ordre 3 lorsque x tend vers 2 revient alors à chercher un développement limité de $\ln(2+h)$ à l'ordre 3 lorsque h tend vers 0. Or : $\ln(2+h) = \ln 2 + \ln\left(1 + \frac{h}{2}\right) \underset{h\to 0}{=} \ln 2 + \frac{h}{2} - \frac{h^2}{8} + \frac{h^3}{24} + \mathrm{o}\left(h^3\right)$.

Exemple $\cos x \underset{x\to\frac{\pi}{4}}{=} \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}\left(x - \frac{\pi}{4}\right) - \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^2 + \frac{1}{6\sqrt{2}}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^3 + \mathrm{o}\left(\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^3\right)$.

Démonstration On ramène le problème en 0 via le changement de variable $x = \frac{\pi}{4} + h$.

$$\cos\left(\frac{\pi}{4} + h\right) = \frac{\cos h - \sin h}{\sqrt{2}} \underset{h\to 0}{=} \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\left(1 - \frac{h^2}{2} + \mathrm{o}\left(h^3\right)\right) - \left(h - \frac{h^3}{6} + \mathrm{o}\left(h^3\right)\right)\right) \underset{h\to 0}{=} \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{h}{\sqrt{2}} - \frac{h^2}{2\sqrt{2}} + \frac{h^3}{6\sqrt{2}} + \mathrm{o}\left(h^3\right).$$

3 ÉQUIVALENCE

3.1 INTRODUCTION

Définition **(Équivalence)**

- **Fonctions :** Soient $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ et $g : D \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions et $a \in \overline{\mathbb{R}}$ adhérent à D. On dit que f est *équivalente à g au voisinage de a* s'il existe un voisinage V_a de a et une fonction $\eta : D \cap V_a \longrightarrow \mathbb{R}$ pour lesquels $f(x) = \eta(x)g(x)$ pour tout $x \in D \cap V_a$ et $\lim_a \eta = 1$. On note cette relation : $f \underset{a}{\sim} g$ ou $f(x) \underset{x \to a}{\sim} g(x)$.

  Dans le cas où g ne s'annule pas au voisinage de a — sauf éventuellement en a avec dans ce cas $f(a) = 0$ — il est équivalent d'exiger que $\lim_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$.

- **Suites :** Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites. On dit que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est *équivalente à $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$* s'il existe un rang N et une suite $(\eta_n)_{n \in \mathbb{N}}$ pour lesquels $u_n = \eta_n\, v_n$ pour tout $n \geqslant N$ et $\lim_{n \to +\infty} \eta_n = 1$. On note cette relation : $u_n \underset{n \to +\infty}{\sim} v_n$.

  Dans le cas où $v_n \neq 0$ à partir d'un certain rang, il est équivalent d'exiger que $\lim_{n \to +\infty} \dfrac{u_n}{v_n} = 1$.

Comme dans le cas des petits o, **ON PENSERA EN PRATIQUE L'ÉQUIVALENCE DES SUITES ET DES FONCTIONS EN TERMES DE QUOTIENTS** même si la définition à base de fonctions η ou de suites $(\eta_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est un peu plus générale, et j'ai par ailleurs rédigé toutes les preuves du paragraphe en termes de quotients.

Enfin, j'ai allégé les résultats de ce paragraphe en ne présentant qu'une seule des deux versions de chacun — suites ou fonctions — mais pas les deux.

Exemple $\quad x^2 + x + 5 \underset{x \to +\infty}{\sim} x^2. \qquad x + x^2 \underset{x \to 0}{\sim} x. \qquad \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n^2} \underset{n \to +\infty}{\sim} \dfrac{1}{n}. \qquad 3^n + 2^n \underset{n \to +\infty}{\sim} 3^n.$

Théorème **(Lien petit o/équivalence)** $\quad f \underset{a}{\sim} g \iff f \underset{a}{=} g + \mathrm{o}(g).$

Très très important. En résumé : **IL Y A TOUJOURS UN PETIT O DANS UNE ÉQUIVALENCE,** un petit o caché qui contrôle l'approximation de f par g ou de u_n par v_n.

Démonstration $\quad f \underset{a}{\sim} g \iff \lim_a \dfrac{f}{g} = 1 \iff \lim_a \dfrac{f-g}{g} = 0 \iff f - g \underset{a}{=} \mathrm{o}(g).$ ■

Théorème **(Lien développement limité/équivalence)** Soient $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction, $a \in \mathbb{R}$ adhérent à D, $n, p \in \mathbb{N}$ avec $p \leqslant n$ et $a_p, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$. Si : $f(x) \underset{x \to a}{=} a_p(x-a)^p + \ldots + a_n(x-a)^n + \mathrm{o}\big((x-a)^n\big)$ avec $a_p \neq 0$, alors :

$$f(x) \underset{x \to a}{\sim} a_p(x-a)^p.$$

En résumé, le **PREMIER TERME NON NUL** d'un développement limité peut tenir lieu d'équivalent. Les équivalents usuels au voisinage de 0 sont ainsi les suivants :

$$\ln(1+x) \underset{x \to 0}{\sim} x. \qquad \mathrm{e}^x - 1 \underset{x \to 0}{\sim} x. \qquad (1+x)^\alpha - 1 \underset{x \to 0}{\sim} \alpha x. \qquad \operatorname{sh} x \underset{x \to 0}{\sim} x. \qquad \operatorname{ch} x - 1 \underset{x \to 0}{\sim} \frac{x^2}{2}.$$

$$\sin x \underset{x \to 0}{\sim} x. \qquad \cos x - 1 \underset{x \to 0}{\sim} -\frac{x^2}{2}. \qquad \tan x \underset{x \to 0}{\sim} x. \qquad \operatorname{Arctan} x \underset{x \to 0}{\sim} x.$$

Attention ! Un équivalent n'a jamais aucune bonne raison d'être présenté comme une somme de deux ou trois termes de tailles distinctes. Par exemple, si on vous demande un équivalent de $x - 3x^2 + x^5$ lorsque x tend vers 0, ne répondez pas : $x - 3x^2 + x^5 \underset{x \to 0}{\sim} x - 3x^2$ même si c'est correct ! C'est correct, mais non abouti car vous pouvez encore comparer x et x^2, et en l'occurrence $x^2 \underset{x \to 0}{=} \mathrm{o}(x)$. Écrivez donc ceci : $x - 3x^2 + x^5 \underset{x \to 0}{\sim} x$.

En résumé : **IL NE DOIT EN RESTER QU'UN** — le plus gros, celui qu'on voit de loin. Faites le ménage !

Vous avez l'impression qu'il est quand même plus fin d'écrire que $x-3x^2+x^5 \underset{x\to 0}{\sim} x-3x^2$? Eh bien non ! Car il est tout aussi vrai que $x-3x^2+x^5 \underset{x\to 0}{\sim} x+17x^2$. Comme on l'a vu, une équivalence cache toujours un petit o et ici on raisonne à un $o(x)$ près qu'on le veuille ou non.

Pour la même raison exactement, n'écrivez pas $e^x \underset{x\to 0}{\sim} 1+x$ — précision $o(1+x)$, i.e. $o(1)$ — quand vous voulez affirmer que $e^x - 1 \underset{x\to 0}{\sim} x$ — précision plus fine $o(x)$. Sans le voir, vous n'avez rien affirmé de plus que ceci : $e^x \underset{x\to 0}{\sim} 1$.

Théorème (Nouveaux équivalents usuels au voisinage de 0)

$$\mathrm{Arcsin}\, x \underset{x\to 0}{\sim} x. \qquad \mathrm{Arccos}\, x \underset{x\to 0}{=} \frac{\pi}{2} - x + o(x), \quad \text{donc } \mathrm{Arccos}\, x - \frac{\pi}{2} \underset{x\to 0}{\sim} -x. \qquad \mathrm{th}\, x \underset{x\to 0}{\sim} x.$$

Démonstration Les fonctions Arcsin, Arccos et th sont de classe $\mathscr{C}^1$ au voisinage de 0, on peut donc utiliser la formule de Taylor-Young à l'ordre 1.

Théorème (La relation « être équivalente à » est une relation d'équivalence) Qu'on parle de fonctions au voisinage d'un point ou de suites, la relation « être équivalente à » est une relation d'équivalence.

Démonstration

- **Réflexivité :** $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{u_n} = 1$.
- **Transitivité :** Si $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = 1$ et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{v_n}{w_n} = 1$, alors par produit $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{w_n} = 1$.
- **Symétrie :** Si $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = 1$, alors $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{v_n}{u_n} = 1$.

Théorème (Lien limite/équivalence)

(i) Si $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$, alors soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ont toutes les deux une limite, en l'occurrence la même, soit aucune de ces deux suites ne possède de limite.

(ii) Si $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell$ avec ℓ RÉEL et NON NUL : $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ell$.

Démonstration

(i) Si $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$ et si $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ possède une limite $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$: $u_n = \dfrac{u_n}{v_n} \times v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1 \times \ell = \ell$, et vice versa par symétrie des rôles de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

(ii) Si $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell$, alors oui : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{\ell} = 1$.

Attention !

$$\lim_a f = \lim_a g \quad \cancel{\Rightarrow} \quad f \underset{a}{\sim} g$$

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} v_n \quad \cancel{\Rightarrow} \quad u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$$

Ne pas comprendre ceci, c'est ne RIEN comprendre au chapitre.

Par exemple : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} e^x = \lim_{x\to+\infty} x = +\infty$ mais $e^x \cancel{\underset{x\to+\infty}{\sim}} x$. De même : $\displaystyle\lim_{x\to 0} x^2 = \lim_{x\to 0} x = 0$ mais $x^2 \cancel{\underset{x\to 0}{\sim}} x$.

Enfin : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} 2^n = \lim_{n\to+\infty} n = +\infty$ mais $2^n \cancel{\underset{n\to+\infty}{\sim}} n$.

De plus, si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ possède une limite : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_{n+1} = \lim_{n\to+\infty} u_n$, mais en général $u_{n+1} \cancel{\underset{n\to+\infty}{\sim}} u_n$ — pensez à la suite $\left(2^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$.

Résumons-nous. Dans l'armoire des suites, la notion de limite crée des tiroirs qui opèrent un premier tri. Dans le « tiroir $+\infty$ » sont rangées toutes les suites de limite $+\infty$, dans le « tiroir 2 » toutes les suites de limite 2, etc. Or dans certains tiroirs, il serait intéressant que de nouveaux sous-tiroirs soient créés. Par exemple, $\left(n^2\right)_{n\in\mathbb{N}}$, $\left(n^2+n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\left(2^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ sont dans le « tiroir $+\infty$ », mais $\left(n^2\right)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\left(2^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ portent des infinis de tailles différentes tandis que $\left(n^2\right)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\left(n^2+n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ portent le même infini. Les classes d'équivalence de la relation « être équivalente à » sont exactement les sous-tiroirs en question.

Le fait que deux suites équivalentes aient toujours la même limite nous garantit que les nouveaux tiroirs créés sont bien des sous-tiroirs des tiroirs-limites. Nous avons vu en outre que toute suite de limite $\ell \in \mathbb{R}^*$ est équivalente à la suite constante $(\ell)_{n\in\mathbb{N}}$. Ce résultat signifie que nous n'avon pas créé le moindre nouveau sous-tiroir dans le « tiroir-limite ℓ ». Quatre tiroirs-limites seulement voient leur contenu hiérarchisé à présent par de nouveaux sous-tiroirs — le « tiroir $-\infty$ », le « tiroir 0 », le « tiroir $+\infty$ » et le « tiroir sans-limite ».

Les tiroirs « limite » : $-\infty$; -2, 0, 1, π ; $+\infty$; Pas de limite

Les nouveaux sous-tiroirs !

« Tiroir -2^n »	« Tiroir $-n^3$ »	« Tiroir $-\frac{1}{n}$ »	« Tiroir e^{-n} »	« Tiroir $\sqrt{n}$ »	« Tiroir $n!$ »	« Tiroir $(-1)^n$ »	« Tiroir $n\sin n$ »
-2^n	$-n^3$	$-\frac{1}{n}$	e^{-n}	$\sqrt{n}$	$n!$	$(-1)^n$	$n\sin n$
$n-2^{n+\frac{1}{n}}$	$-n^3+2n$	$-\frac{n}{n^2+1}$	$\mathrm{e}^{-n}+4^{-n}$	$\sqrt{n+\ln n}$	$n!-4^n$	$\frac{(-1)^n n^2}{n^2+2}$	$n^{\mathrm{e}^{\frac{1}{n}}}\sin n$
$\frac{-2^n n}{n+\sqrt{n}}$	$\frac{-n^4}{n+\sin n}$	…	$\frac{1}{\mathrm{e}^n+n^4}$	$\frac{\sqrt{n+1}}{1+\mathrm{e}^{-n}}$	$\frac{(n+2)!}{\sqrt{n^4+3}}$	…	$\frac{\mathrm{e}^n n\sin n}{\sqrt[3]{\mathrm{e}^{3n}+1}}$
…	…		…	…	…		…

Limites des tiroirs : « Tiroir -2^n » et « Tiroir $-n^3$ » : $-\infty$; « Tiroir $-\frac{1}{n}$ » et « Tiroir e^{-n} » : 0 ; « Tiroir $\sqrt{n}$ » et « Tiroir $n!$ » : $+\infty$; « Tiroir $(-1)^n$ » et « Tiroir $n\sin n$ » : Pas de limite.

3.2 Opérations sur les équivalents

Théorème (Dans les petits o, on peut remplacer toute fonction/suite par une fonction/suite équivalente) Si $u_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{o}(v_n)$ et $v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \widetilde{v}_n$, alors $u_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{o}(\widetilde{v}_n)$.

Démonstration Si $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = 0$ et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{v_n}{\widetilde{v}_n} = 1$, alors par produit $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{\widetilde{v}_n} = 0$.

Exemple $\sin(\sin x) \underset{x\to0}{=} \sin\big(x+\mathrm{o}(x)\big) \underset{x\to0}{=} \big(x+\mathrm{o}(x)\big) + \mathrm{o}\underbrace{\big(x+\mathrm{o}(x)\big)}_{\underset{x\to0}{\sim} x} \underset{x\to0}{=} \big(x+\mathrm{o}(x)\big)+\mathrm{o}(x) \underset{x\to0}{=} x+\mathrm{o}(x)$.

On aurait pu procéder autrement en composant l'équivalence $\sin x \underset{x\to0}{\sim} x$ avec elle-même : $\sin(\sin x) \underset{x\to0}{\sim} \sin x \underset{x\to0}{\sim} x$.

Théorème (Avec le produit, l'inverse et les puissances, tout va bien)

- **Produit :** Si $f \underset{a}{\sim} \widetilde{f}$ et $g \underset{a}{\sim} \widetilde{g}$, alors $fg \underset{a}{\sim} \widetilde{f}\widetilde{g}$.
- **Inverse :** Si $f \underset{a}{\sim} g$ et si f ne s'annule pas au voisinage de a, alors $\dfrac{1}{f} \underset{a}{\sim} \dfrac{1}{g}$.
- **Puissances :** Si $f \underset{a}{\sim} g$ et si f est strictement positive au voisinage de a, alors g aussi est strictement positive au voisinage de a et pour tout $\alpha\in\mathbb{R}$: $f^\alpha \underset{a}{\sim} g^\alpha$.

Théorème (Avec la composition À DROITE et les suites extraites, tout va bien)

- **Fonctions :** Soient $b\in\overline{\mathbb{R}}$ et φ une fonction définie au voisinage de b à valeurs dans I. Si $f \underset{a}{\sim} g$ et $\displaystyle\lim_b \varphi = a$, alors $f\circ\varphi \underset{b}{\sim} g\circ\varphi$.
- **Suites :** Soit $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ une fonction strictement croissante. Si $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$, alors $u_{\varphi(n)} \underset{n\to+\infty}{\sim} v_{\varphi(n)}$.

Attention ! Avec les équivalents, deux opérations sont FORMELLEMENT INTERDITES.

- **Somme :** $x+1 \underset{x\to+\infty}{\sim} x$ et $3-x \underset{x\to+\infty}{\sim} 1-x$, mais $4 \cancel{\underset{x\to+\infty}{\sim}} 1$.
- **Composition à gauche :** $n \underset{n\to+\infty}{\sim} n+\ln n$, mais si on compose par $x \longmapsto \mathrm{e}^x$ à gauche : $\mathrm{e}^n \cancel{\underset{n\to+\infty}{\sim}} n\mathrm{e}^n$.

Théorème (Théorème d'encadrement version équivalents) Si $m_n \underset{n\to+\infty}{\sim} M_n$ et si $m_n \leqslant u_n \leqslant M_n$ à partir d'un certain rang, alors $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} m_n \underset{n\to+\infty}{\sim} M_n$.

Exemple $\sqrt{x^2+\ln x} - x \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{\ln x}{2x}$.

Démonstration $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^2} = 0$, donc : $\sqrt{x^2+\ln x} - x = x\left(\sqrt{1+\dfrac{\ln x}{x^2}} - 1\right) \underset{x\to+\infty}{\sim} x\times\dfrac{\ln x}{2x^2} \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{\ln x}{2x}$.

Exemple $\mathrm{e}^{\tan x} - \sqrt{1+x^2} \underset{x\to0}{\sim} x$.

Démonstration Nous ne savons pas ici à l'avance à quel ordre nous devons pousser nos développements limités de $e^{\tan x}$ et $\sqrt{1+x^2}$ lorsque x tend vers 0, nous devons donc avancer à tâtons et anticiper au mieux.

$$e^{\tan x}-\sqrt{1+x^2}\underset{x\to0}{=}e^{x+o(x)}-\big(1+o(x)\big)\underset{x\to0}{=}\big(1+x+o(x)\big)-\big(1+o(x)\big)\underset{x\to0}{=}x+o(x),\qquad \text{donc } e^{\tan x}-\sqrt{1+x^2}\underset{x\to0}{\sim}x.$$

Exemple $\ln\big(1+x^2\big)-\sin^2 x\underset{x\to0}{\sim}-\dfrac{x^4}{6}$.

Démonstration Le tatônnement s'impose, espérons juste que le premier terme non nul n'est pas d'ordre 50.

$$\ln\big(1+x^2\big)-\sin^2 x\underset{x\to0}{=}\left(x^2-\frac{x^4}{2}+o\big(x^4\big)\right)-\left(x-\frac{x^3}{6}+o\big(x^4\big)\right)^2\underset{x\to0}{=}\left(x^2-\frac{x^4}{2}+o\big(x^4\big)\right)-\left(x^2-\frac{x^4}{3}+o\big(x^4\big)\right)\underset{x\to0}{=}-\frac{x^4}{6}+o\big(x^4\big).$$

Exemple $\mathrm{ch}\big(e^{-n}\big)-\cos\dfrac{\pi}{n}\underset{n\to+\infty}{\sim}\dfrac{\pi^2}{2n^2}$.

Démonstration Nous allons composer les limites : $\lim\limits_{n\to+\infty}e^{-n}=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\pi}{n}=0$ avec les développements limités : $\mathrm{ch}\,x\underset{x\to0}{=}1+o(x)$ et $\cos x\underset{x\to0}{=}1-\dfrac{x^2}{2}+o\big(x^2\big)$. Pourquoi ces ordres 1 pour ch et 2 pour cos ? Parce que ça marche, mais on ne peut le comprendre qu'en essayant.

$$\mathrm{ch}\big(e^{-n}\big)-\cos\frac{\pi}{n}\underset{n\to+\infty}{=}\big(1+o(e^{-n})\big)-\left(1-\frac{\pi^2}{2n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\underset{n\to+\infty}{=}o\left(\frac{1}{n^2}\right)-\left(-\frac{\pi^2}{2n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\quad\text{car } e^{-n}\underset{n\to+\infty}{=}o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$
$$\underset{n\to+\infty}{=}\frac{\pi^2}{2n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right),\qquad \text{donc } \mathrm{ch}\big(e^{-n}\big)-\cos\frac{\pi}{n}\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{\pi^2}{2n^2}.$$

Exemple $\dfrac{\ln(n+1)}{n}-\dfrac{\ln n}{n+1}\underset{n\to+\infty}{\sim}\dfrac{\ln n}{n^2}$.

Démonstration $\dfrac{\ln(n+1)}{n}-\dfrac{\ln n}{n+1}=\dfrac{(n+1)\ln(n+1)-n\ln n}{n(n+1)}$. Il nous suffit de trouver séparément un équivalent du numérateur et un équivalent du dénominateur. Au dénominateur : $n(n+1)\underset{n\to+\infty}{\sim}n^2$. Et au numérateur :

$$(n+1)\ln(n+1)-n\ln n=(n+1)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)+\ln n\underset{n\to+\infty}{=}(n+1)\left(\frac{1}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)+\ln n$$
$$\underset{n\to+\infty}{=}1+\frac{1}{n}+o(1)+\ln n\underset{n\to+\infty}{=}\ln n+o(\ln n)\underset{n\to+\infty}{\sim}\ln n.$$

4 Domination

Définition (Domination)

- **Fonctions :** Soient $f:D\longrightarrow\mathbb{R}$ et $g:D\longrightarrow\mathbb{R}$ deux fonctions et $a\in\overline{\mathbb{R}}$ adhérent à D. On dit que f est *dominée par g au voisinage de a* s'il existe un voisinage V_a de a et une fonction BORNÉE $\lambda:D\cap V_a\longrightarrow\mathbb{R}$ pour lesquels $f(x)=\lambda(x)g(x)$ pour tout $x\in D\cap V_a$. On note cette relation : $f\underset{a}{=}O(g)$ ou $f(x)\underset{x\to a}{=}O\big(g(x)\big)$ et on dit que « f *est un grand* O *de g au voisinage de a* ».

  En particulier : $O(1)=$ « une fonction bornée au voisinage de a ».

  Dans le cas où g ne s'annule pas au voisinage de a — sauf éventuellement en a avec dans ce cas $f(a)=0$ — il est équivalent d'exiger que la fonction $\dfrac{f}{g}$ soit bornée au voisinage de a.

- **Suites :** Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites. On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est *dominée par* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ s'il existe un rang N et une suite BORNÉE $(\lambda_n)_{n\geqslant N}$ pour lesquels $u_n=\lambda_n v_n$ pour tout $n\geqslant N$. On note cette relation : $u_n\underset{n\to+\infty}{=}O(v_n)$ et on dit que « u_n *est un grand* O *de* v_n ».

  En particulier : $O(1)=$ « une suite bornée ».

  Dans le cas où $v_n\neq0$ à partir d'un certain rang N, il est équivalent d'exiger que la suite $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)_{n\geqslant N}$ soit bornée.

Exemple $\sin\dfrac{1}{x}\underset{x\to0}{=}O(1)$. $\qquad\dfrac{(-1)^n}{n-\sqrt{n}}\underset{n\to+\infty}{=}O\left(\dfrac{1}{n}\right)$. $\qquad\lfloor e^n\rfloor\underset{n\to+\infty}{=}O\big(e^n\big)$.

Théorème **(Lien grand O/petit o/équivalence)** Si $f \underset{a}{=} o(g)$ ou $f \underset{a}{\sim} g$, alors $f \underset{a}{=} O(g)$. Idem pour les suites !

Démonstration Si $\lim\limits_a \frac{f}{g} \in \{0,1\}$, alors oui, la fonction $\frac{f}{g}$ est bornée au voisinage de a.

Attention ! La domination n'implique ni la négligeabilité, ni l'équivalence — c'est le contraire qui est vrai. Par exemple : $2x^2 \underset{x\to 0}{=} O(x^2)$, mais : $2x^2 \underset{x\to+\infty}{\cancel{=}} o(x^2)$ et $2x^2 \underset{x\to+\infty}{\cancel{\sim}} x^2$.

Exemple

- Puisque : $e^x \underset{x\to 0}{=} 1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+o(x^3)$, alors : $e^x \underset{x\to 0}{=} 1+x+\frac{x^2}{2}+O(x^3)$. Ce résultat est plus fin qu'un développement limité à l'ordre 2, mais plus grossier qu'un développement limité à l'ordre 3.
- Puisque : $\cos x \underset{x\to 0}{=} 1-\frac{x^2}{2}+o(x^2)$, alors : $\cos x \underset{x\to 0}{=} 1+O(x^2)$. Ce résultat est plus fin qu'un développement limité à l'ordre 1, mais plus grossier qu'un développement limité à l'ordre 2.

Pour finir, les théorèmes du paragraphe « Opérations sur les petits o » sont tous vrais avec des grands O à la place des petits o.

5 Exemples et applications

5.1 Série harmonique et constante d'Euler

Théorème **(Développement asymptotique de la série harmonique et constante d'Euler)**

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \underset{n\to+\infty}{=} \ln n + \gamma + o(1) \qquad \text{pour un certain réel } \gamma \text{ appelé la } \textit{constante d'Euler} : \quad \gamma \approx 0,577.$$

En particulier : $\displaystyle\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \underset{n\to+\infty}{=} \ln n + O(1)$, et même : $\displaystyle\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln n$.

Démonstration Posons pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln(n+1)$ et $v_n = \displaystyle\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln n$.

Rappelons à toutes fins utiles que pour tout $x \in]-1,+\infty[$: $\ln(1+x) \leqslant x$ $\bigstar$. Nous allons montrer que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont adjacentes. Cela montrera bien que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.

— La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante et la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ décroissante car pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$u_{n+1}-u_n = \sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{k} - \ln(n+2) - \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} + \ln(n+1) = \frac{1}{n+1} - \ln\frac{n+2}{n+1} = \frac{1}{n+1} - \ln\left(1+\frac{1}{n+1}\right) \overset{\bigstar}{\geqslant} 0$$

$$\text{et } v_{n+1}-v_n = \sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{k} - \ln(n+1) - \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} + \ln n = \frac{1}{n+1} + \ln\frac{n}{n+1} = -\frac{-1}{n+1} + \ln\left(1+\frac{-1}{n+1}\right) \overset{\bigstar}{\leqslant} 0.$$

— Enfin : $v_n - u_n = \ln(n+1) - \ln n = \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$

5.2 Calculs de limites

Exemple $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}-x}{x^5} = +\infty.$

Démonstration Forme indéterminée $\frac{0}{0}$ au premier abord. Comme il est facile de diviser les équivalents, nous allons chercher un équivalent du numérateur et un équivalent du dénominateur séparément. Ici encore, pas possible de savoir à l'avance à quel ordre nous devons pousser nos développements limités au numérateur !

$$\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}-x \underset{x\to 0}{=} \left(1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}+\frac{x^3}{16}+o(x^3)\right) - \left(1-\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}-\frac{x^3}{16}+o(x^3)\right) - x \underset{x\to 0}{=} \frac{x^3}{8}+o(x^3),$$

donc : $\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}-x \underset{x\to 0}{\sim} \frac{x^3}{8}$, et enfin : $\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}-x}{x^5} \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{1}{8x^2} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} +\infty.$

Exemple $\lim_{n\to+\infty} n\left(\frac{\pi}{2}\,e^{\frac{1}{n}} - \operatorname{Arccos}\frac{1}{n}\right) = \frac{\pi}{2}+1.$

Démonstration Forme indéterminée $+\infty\times 0$ au premier abord, mais : $\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}=0$, donc :

$$n\left(\frac{\pi}{2}\,e^{\frac{1}{n}} - \operatorname{Arccos}\frac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{=} n\left(\frac{\pi}{2}\left(1+\frac{1}{n}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right)-\left(\frac{\pi}{2}-\frac{1}{n}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right) \underset{n\to+\infty}{=} n\left(\frac{\pi}{2n}+\frac{1}{n}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right) \underset{n\to+\infty}{=} \frac{\pi}{2}+1+\mathrm{o}(1).$$

Exemple $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[5]{1+6x}-\sqrt[3]{1+x}}{3\sin x-\ln(1+x)} = \frac{13}{30}.$

Démonstration Forme indéterminée $\frac{0}{0}$ au premier abord. On cherche séparément un équivalent du numérateur et un équivalent du dénominateur.

$$\sqrt[5]{1+6x}-\sqrt[3]{1+x} \underset{x\to 0}{=} \left(1+\frac{6x}{5}+\mathrm{o}(x)\right)-\left(1+\frac{x}{3}+\mathrm{o}(x)\right) \underset{x\to 0}{=} \frac{13x}{15}+\mathrm{o}(x), \qquad \text{donc } \sqrt[5]{1+6x}-\sqrt[3]{1+x} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{13x}{15}.$$

Ensuite : $3\sin x-\ln(1+x) \underset{x\to 0}{=} 3\big(x+\mathrm{o}(x)\big)-\big(x+\mathrm{o}(x)\big) \underset{x\to 0}{=} 2x+\mathrm{o}(x)$, donc $3\sin x-\ln(1+x) \underset{x\to 0}{\sim} 2x$.

Conclusion : $\frac{\sqrt[5]{1+6x}-\sqrt[3]{1+x}}{3\sin x-\ln(1+x)} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{\frac{13x}{15}}{2x} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{13}{30} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} \frac{13}{30}.$

Exemple Pour tous $a,b>0$: $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{a^{\frac{1}{x}}+b^{\frac{1}{x}}}{2}\right)^x = \sqrt{ab}.$

Démonstration D'abord : $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$, donc : $a^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{\ln a}{x}} \underset{x\to+\infty}{=} 1+\frac{\ln a}{x}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{x}\right)$. Pareil pour $b^{\frac{1}{x}}$.

Ensuite : $\frac{a^{\frac{1}{x}}+b^{\frac{1}{x}}}{2} \underset{x\to+\infty}{=} 1+\frac{\ln a}{2x}+\frac{\ln b}{2x}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{x}\right) \underset{x\to+\infty}{=} 1+\frac{\ln\sqrt{ab}}{x}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{x}\right).$

Et un coup de logarithme à gauche : $\ln\frac{a^{\frac{1}{x}}+b^{\frac{1}{x}}}{2} \underset{x\to+\infty}{=} \ln\left(1+\frac{\ln\sqrt{ab}}{x}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{x}\right)\right) \underset{x\to+\infty}{=} \frac{\ln\sqrt{ab}}{x}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{x}\right),$

puis on multiplie par x : $x\ln\frac{a^{\frac{1}{x}}+b^{\frac{1}{x}}}{2} \underset{x\to+\infty}{=} \ln\sqrt{ab}+\mathrm{o}(1)$, et donc $\lim_{x\to+\infty} x\ln\frac{a^{\frac{1}{x}}+b^{\frac{1}{x}}}{2} = \ln\sqrt{ab}.$

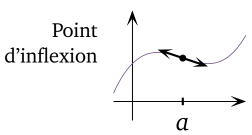
On compose enfin à gauche par la fonction exponentielle.

5.3 Position locale d'une fonction par rapport à une tangente

Soit $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction et $a\in D$. On suppose que f est définie au voisinage de a à gauche et à droite et admet un développement limité au voisinage de a : $f(x) \underset{x\to a}{=} a_0+a_1(x-a)+a_n(x-a)^n+\mathrm{o}\big((x-a)^n\big)$ avec $n\geqslant 2$ et $a_n\neq 0$. Dans ces conditions, nous savons que $a_0=f(a)$ et $a_1=f'(a)$, donc : $f(x)-f(a)-f'(a)(x-a) \underset{x\to a}{\sim} a_n(x-a)^n$.

La fonction f admet la droite d'équation $y=a_0+a_1(x-a)$ pour tangente en a.

De plus, d'après l'équivalence précédente, la position du graphe de f au voisinage de a par rapport à sa tangente en a dépend du signe de la fonction $x\longmapsto a_n(x-a)^n$ au voisinage de a.



— Si n est pair, $x\longmapsto a_n(x-a)^n$ a le signe de a_n au voisinage de a. Le graphe de f est situé au-dessus de sa tangente en a au voisinage de a si $a_n>0$ et en-dessous si $a_n<0$. Si de plus $a_1=0$, f possède un extremum local en a — un maximum local si $a_n<0$, un minimum local si $a_n>0$.

— Si n est impair, $x\longmapsto a_n(x-a)^n$ change de signe en a, donc le graphe de f traverse sa tangente en a, on dit que f possède en a un *point d'inflexion*.

Exemple La fonction $x \overset{f}{\longmapsto} \frac{x\sin x}{1+x^2}$ possède un minimum local en 0.

Démonstration Nous cherchons le premier terme non nul d'ordre au moins 2 dans le développement limité de f au voisinage de 0. Pas possible de savoir à l'avance à quel ordre nous allons trouver ce terme, nous pouvons juste espérer qu'il n'est pas trop grand. Ici, tout simplement : $f(x) \underset{x\to 0}{\sim} x^2$, donc $f(x) \underset{x\to 0}{=} x^2+\mathrm{o}\big(x^2\big)$. En particulier, f est positive au voisinage de 0 avec $f(0)=0$, donc possède un minimum local en 0.

Exemple La fonction $x \overset{g}{\longmapsto} \dfrac{\ln(1-2x)}{1+x}$ possède en 0 un point d'inflexion de tangente la droite d'équation $y = -2x$.

Démonstration Un calcul à l'ordre 2 ne suffit pas ici, on pousse à l'ordre 3 — mais pas moyen de le deviner à l'avance !

$$g(x) \underset{x\to 0}{=} \left(-2x - 2x^2 - \frac{8x^3}{3} + o\left(x^3\right)\right)\left(1 - x + x^2 + o\left(x^2\right)\right) \underset{x\to 0}{=} -2x - \frac{8x^3}{3} + o\left(x^3\right).$$

Ainsi, la tangente de g en 0 a pour équation $y = -2x$, et comme $g(x)+2x \underset{x\to 0}{\sim} -\dfrac{8x^3}{3}$, le graphe de g est au-dessus de sa tangente en 0 au voisinage de 0 à gauche et en-dessous à droite — point d'inflexion !

5.4 Asymptotes d'une fonction en $\pm\infty$

Définition (Asymptote d'une fonction en $\pm\infty$) Soit f une fonction réelle définie au voisinage de $+\infty$ — on ferait de même en $-\infty$ — et $a, b \in \mathbb{R}$. On dit que f *admet la droite d'équation $y = ax + b$ pour asymptote au voisinage de $+\infty$* si $f(x) \underset{x\to+\infty}{=} ax + b + o(1)$.

En particulier : $\quad a = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} \quad$ et $\quad b = \lim\limits_{x\to+\infty} \big(f(x) - ax\big).$

Exemple La fonction $x \longmapsto \dfrac{x^3 + \lfloor x\rfloor^2}{x^2+2}$ admet la droite d'équation $y = x + 1$ pour asymptote au voisinage de $\pm\infty$.

Démonstration Tout d'abord : $\lfloor x\rfloor \underset{x\to\pm\infty}{=} x + O(1)$, donc $\lfloor x\rfloor^2 \underset{x\to\pm\infty}{=} x^2 + O(x)$. Conclusion :

$$\frac{x^3 + \lfloor x\rfloor^2}{x^2+2} = \frac{x^3 + x^2 + O(x)}{x^2\left(1 + \dfrac{2}{x^2}\right)} \underset{x\to\pm\infty}{=} \left(x + 1 + O\left(\frac{1}{x}\right)\right)\left(1 - \frac{2}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right) \underset{x\to\pm\infty}{=} x + 1 + O\left(\frac{1}{x}\right) \underset{x\to\pm\infty}{=} x + 1 + o(1).$$

Exemple La fonction $x \overset{f}{\longmapsto} \dfrac{x^2}{x+1}\,e^{\cos\frac{1}{x}}$ possède une asymptote au voisinage de $+\infty$ d'équation $y = ex - e$ et son graphe est situé au-dessus de cette asymptote au voisinage de $+\infty$.

Démonstration

- On peut se ramener au voisinage de 0 grâce au changement de variable $h = \dfrac{1}{x}$ — il ne faut pas toujours faire ce changement de variable, tout dépend de ce à quoi f ressemble. Il s'agit donc d'étudier la fonction $h \longmapsto f\left(\dfrac{1}{h}\right)$ au voisinage de 0.
- Se demander si f possède une asymptote au voisinage de $+\infty$, c'est alors se demander s'il existe des réels a et b pour lesquels $f(x) \underset{x\to+\infty}{=} ax + b + o(1)$, ou encore $f\left(\dfrac{1}{h}\right) \underset{h\to 0}{=} \dfrac{a}{h} + b + o(1)$.
- Si on veut plus précisément connaître la position du graphe de f par rapport à son asymptote au voisinage de $+\infty$, il suffit de connaître un équivalent de $x \longmapsto f(x) - (ax+b)$ au voisinage de $+\infty$, i.e. de trouver un terme plus fin que $o(1)$.
- C'est parti : $$f\left(\frac{1}{h}\right) = \frac{e^{\cos h}}{h(1+h)} \underset{h\to 0}{=} \frac{1}{h}\left(1 - h + h^2 + o\left(h^2\right)\right) e^{1-\frac{h^2}{2}+o(h^2)}$$ $$\underset{h\to 0}{=} \frac{e}{h}\left(1 - h + h^2 + o\left(h^2\right)\right)\left(1 - \frac{h^2}{2} + o\left(h^2\right)\right) \underset{h\to 0}{=} \frac{e}{h} - e + \frac{eh}{2} + o(h).$$

  Reformulons : $f(x) \underset{x\to+\infty}{=} ex - e + \dfrac{e}{2x} + o\left(\dfrac{1}{x}\right)$. En particulier : $f(x) \underset{x\to+\infty}{=} ex - e + o(1)$, donc f admet la droite d'équation $y = ex - e$ pour asymptote au voisinage de $+\infty$. Enfin, comme $f(x) - (ex - e) \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{e}{2x}$ est positif au voisinage de $+\infty$, le graphe de f est au-dessus de son asymptote au voisinage de $+\infty$.