COLLE 1 = NOMBRES COMPLEXE, SOMMES ET PRODUITS

Connaître son cours :

1. Rappeler les formules de Euler pour tous $\theta \in \mathbb{R}$ et linéariser $\sin^3(\theta)$.
2. Donner les racines 4−ième de $-i$ et donner une interprétation à l'aide d'un polynôme de $\mathbb{C}[X]$.
3. Soient a, b deux nombres réels tels que a, b et $a+b \notin \frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}$.
   Exprimer $\tan(a+b)$ en fonction de $\tan a$ et $\tan b$.

Nombres complexes :

Exercice 1.
Soit a, b, c et d des complexes de module 1.
Montrer que $|ab - cd| \leq |a-c| + |b-d|$.

Exercice 2.
Soit $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$.
Résoudre l'équation $\mathfrak{Re}(z^n) = \mathfrak{Im}(z^n)$.

Exercice 3.
Soit z et z' des complexes de module au plus 1.
Montrer que

$$min(|z+z'|, |z-z'|) \leq \sqrt{2}.$$

Exercice 4.

Montrer que, pour tout $z \in \mathbb{C}$, $|z-1| \leq |z-j| + |z-j^2|$.

Sommes et produits :

Exercice 5. *(Le noyau de Dirichlet)*

Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que $x \neq 0[2\pi]$ et $n \in \mathbb{N}^*$.
Calculer et simplifier $D_n(x) = \sum_{k=-n}^{n} e^{ikx}$

Exercice 6. *(Formule de Bernoulli)*
Pour tous $a, b \in \mathbb{C}$ et tout $n \in \mathbb{N}$,

1. Rappeler démontrer la formule de Bernoulli qui permet de factoriser l'expression $a^{n+1} - b^{n+1}$.
2. En déduire que si l'entier n est composé, alors $2^n - 1$ l'est également.

Exercice 7.
Pour tout $z \in \mathbb{C}$ et n dans $\mathbb{N}^*$ simplifier l'expression :

$$\sum_{k=0}^{n} kz^k$$

Pour $|z| < 1$, déterminer la limite de la somme précédente lorsque n tend vers $+\infty$.
