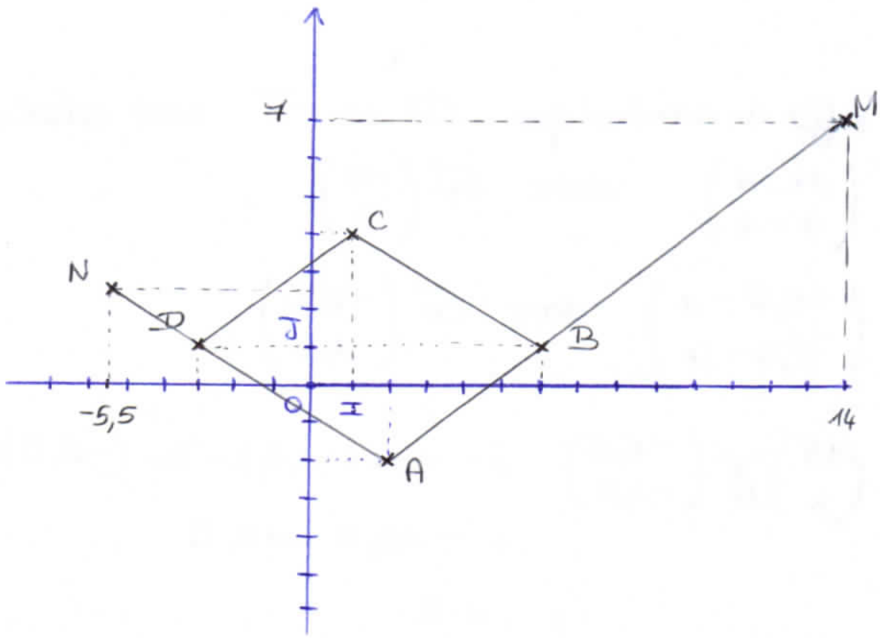
Correction des exercices 103 et 106

p. 314

exercice 103 :

$A(2;-2)$, $B(6;1)$, $C(1;4)$ et $D(-3;1)$

1.



2. $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}6-2\\1+2\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{DC}\begin{pmatrix}1+3\\4-1\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{DC}\begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix}$

Donc $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$. Ceci prouve que ABCD est un parallélogramme.

3. Voir ci-dessus.

4. $\overrightarrow{BM} = -2\overrightarrow{BA}$

$\Leftrightarrow \begin{pmatrix}x_M-6\\y_M-1\end{pmatrix} = -2\begin{pmatrix}2-6\\-2-1\end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow \begin{cases}x_M-6 = -2\times(-4)\\y_M-1 = -2\times(-3)\end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases}x_M = 8+6\\y_M = 6+1\end{cases}$

$\Leftrightarrow \boxed{M(14;7)}$

$\vec{AN} = \frac{3}{2}\vec{AD}$

$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_N - 2 \\ y_N + 2 \end{pmatrix} = \frac{3}{2}\begin{pmatrix} -3-2 \\ 1+2 \end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x_N - 2 = \frac{3}{2} \times (-5) \\ y_N + 2 = \frac{3}{2} \times 3 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x_N = -\frac{15}{2} + 2 \\ y_N = \frac{9}{2} - 2 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \boxed{N(-5,5 \ ; \ 2,5)}$

5. Il suffit de montrer que $\vec{CM}$ et $\vec{CN}$ sont colinéaires (par exemple).

$\vec{CM}\begin{pmatrix} 14-1 \\ 7-4 \end{pmatrix}$ donc $\vec{CM}\begin{pmatrix} 13 \\ 3 \end{pmatrix}$

$\vec{CN}\begin{pmatrix} -5,5-1 \\ 2,5-4 \end{pmatrix}$ donc $\vec{CN}\begin{pmatrix} -6,5 \\ -1,5 \end{pmatrix}$

Or : $\begin{pmatrix} 13 \\ 3 \end{pmatrix} \gamma \begin{pmatrix} -6,5 \\ -1,5 \end{pmatrix} = 13 \times (-1,5) - 3 \times (-6,5)$

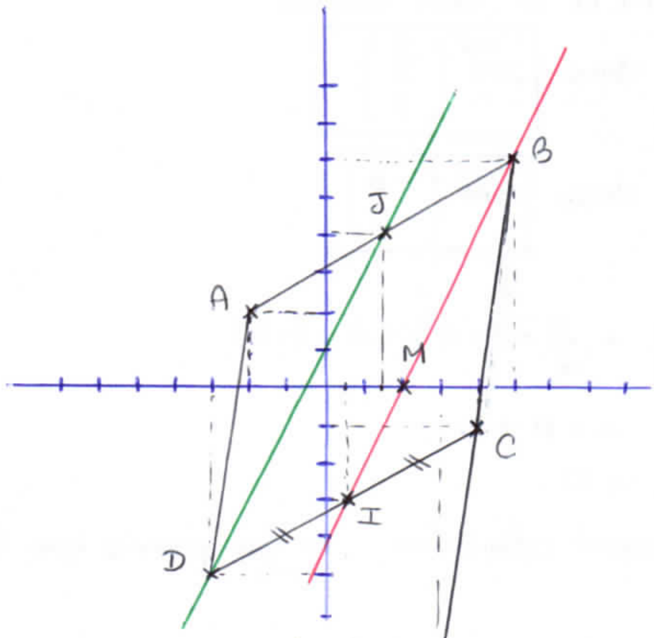
$= -19,5 + 19,5$

$= 0$.

Donc $\vec{CM}$ et $\vec{CN}$ sont colinéaires, ce qui prouve que les points C, M et N sont alignés.

exercice 106 :

1.



2. $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}4+2\\-1-2\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}6\\-3\end{pmatrix}$

3. $\overrightarrow{MC} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$

$\Leftrightarrow \begin{pmatrix}4-x_M\\-1-y_M\end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}6\\-3\end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow \begin{pmatrix}4-x_M\\-1-y_M\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow \begin{cases}4-x_M = 2\\-1-y_M = -1\end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases}x_M = 4-2\\y_M = 0\end{cases}$

$\Leftrightarrow \boxed{M(2\,;0)}$

4. ABCD est un parallélogramme

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$

$\Leftrightarrow \begin{pmatrix}5+2\\6-2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4-x_D\\-1-y_D\end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow \begin{pmatrix}7\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4-x_D\\-1-y_D\end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow \begin{cases}4-x_D = 7\\-1-y_D = 4\end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases}x_D = 4-7\\y_D = -1-4\end{cases}$

$\Leftrightarrow \boxed{D(-3\,;-5)}$

5. $I\left(\frac{x_D+x_C}{2}\,;\frac{y_D+y_C}{2}\right)$ donc $I\left(\frac{-3+4}{2}\,;-\frac{5-1}{2}\right)$

d'où $\boxed{I\left(\frac{1}{2}\,;-3\right)}$

Montrons que I, M et B sont alignés.

$\overrightarrow{IM}\begin{pmatrix}2-\frac{1}{2}\\0+3\end{pmatrix}$ donc $\boxed{\overrightarrow{IM}\begin{pmatrix}\frac{3}{2}\\3\end{pmatrix}}$

$\overrightarrow{BM}\begin{pmatrix}2-5\\0-6\end{pmatrix}$ donc $\boxed{\overrightarrow{BM}\begin{pmatrix}-3\\-6\end{pmatrix}}$

Or $\begin{pmatrix}\frac{3}{2}\\3\end{pmatrix}\gamma\begin{pmatrix}-3\\-6\end{pmatrix} = \frac{3}{2}\times(-6)-3\times(-3)$

$= -9+9$

$= 0.$

donc $\overrightarrow{IM}$ et $\overrightarrow{BM}$ sont colinéaires, ce qui prouve que les points I, M et B sont alignés.

6. J milieu de [AB] donc $J\left(\frac{x_A+x_B}{2};\frac{y_A+y_B}{2}\right)$

d'où $J\left(\frac{-2+5}{2};\frac{2+6}{2}\right)$ donc $\boxed{J\left(\frac{3}{2};4\right)}$

Montrons que (DJ) et (BI) sont parallèles.

$\overrightarrow{DJ}\begin{pmatrix}\frac{3}{2}+3\\4+5\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{DJ}\begin{pmatrix}4{,}5\\9\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{BI}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}-5\\-3-6\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{BI}\begin{pmatrix}-4{,}5\\-9\end{pmatrix}$

On remarque que $\overrightarrow{DJ}=-\overrightarrow{BI}$ donc $\overrightarrow{DJ}$ et $\overrightarrow{BI}$ sont colinéaires, ce qui prouve que (DJ) // (BI).

7. $\overrightarrow{JN}=3\overrightarrow{JM}$

$\Leftrightarrow \begin{pmatrix}x_N-\frac{3}{2}\\y_N-4\end{pmatrix}=3\begin{pmatrix}2-\frac{3}{2}\\0-4\end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow \begin{pmatrix}x_N-1{,}5\\y_N-4\end{pmatrix}=3\begin{pmatrix}0{,}5\\-4\end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow \begin{cases}x_N-1{,}5=1{,}5\\y_N-4=-12\end{cases}$

$\Leftrightarrow \boxed{N(3;-8)}$

Montrons que B, C et N sont alignés.

$\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}4-5\\-1-6\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}-1\\-7\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{BN}\begin{pmatrix}3-5\\-8-6\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{BN}\begin{pmatrix}-2\\-14\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{BN}=2\overrightarrow{BC}$ donc $\overrightarrow{BN}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont colinéaires ce qui prouve que les points B, C et N sont alignés.