DEVOIR MAISON n°27

EXERCICE

Dans tout l'exercice, n désigne un entier naturel, $\mathbb{R}[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels et $\mathbb{R}_n[X]$ l'ensemble des polynômes réels de degré inférieur ou égal à n. On identifiera polynômes et fonctions polynomiales associées. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on note $P^{(k)}$ la dérivée k-ème du polynôme P.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère les polynômes définis par :

$$U_n = \left(X^2 - 1\right)^n \quad \text{et} \quad L_n = \frac{1}{2^n\, n!} U_n^{(n)}$$

La famille (L_n) est appelée la *famille des polynômes de Legendre*.

Pour tout polynôme P, on note $\mathscr{L}(P)$ le polynôme :

$$\mathscr{L}(P) = \left[\left(X^2 - 1\right)P'\right]'$$

Partie I : Préliminaires

1. (a) Calculer L_0, L_1, L_2 et L_3.

   (b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, déterminer le degré et le coefficient dominant de L_n.

   (c) En déduire que la famille $(L_0, \dots, L_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

2. Montrer que L_{2n} (respectivement L_{2n+1}) est une fonction paire (respectivement impaire).

3. (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $L_n = \dfrac{1}{2^n} \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 (X-1)^k (X+1)^{n-k}$.

   (b) En déduire les valeurs de $L_n(-1)$ et de $L_n(1)$.

4. (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$U'_{n+1} - 2(n+1) X U_n = 0 \qquad (1)$$

$$\left(X^2 - 1\right) U'_n - 2nXU_n = 0 \qquad (2)$$

   (b) En dérivant les équations précédentes, montrer que la suite (L_n) vérifie :

$$L'_{n+1} = XL'_n + (n+1)L_n \qquad (3)$$

$$\mathscr{L}(L_n) = n(n+1)L_n \qquad (4)$$

   (c) En déduire que la restriction de $\mathscr{L}$ à $\mathbb{R}_n[X]$ est un endomorphisme que nous noterons $\mathscr{L}_n$.

   Exprimer la matrice de $\mathscr{L}_n$ dans la base $(L_0, \dots, L_n)$.

Partie II : Etude d'un produit scalaire et d'une base orthogonale

Pour tous $P, Q \in \mathbb{R}[X]$, on pose : $\langle P, Q\rangle = \displaystyle\int_{-1}^{1} P(x)Q(x)\,dx$.

5. Montrer que $\langle .\,,.\rangle$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$. On notera $\|.\|$ la norme euclidienne associée.

6. Montrer que pour tous $P, Q \in \mathbb{R}[X]$: $\langle \mathscr{L}(P), Q\rangle = \langle P, \mathscr{L}(Q)\rangle$. *On dit que $\mathscr{L}$ est un endomorphisme auto-adjoint.*

7. (a) Montrer que pour tout $m \in \mathbb{N}$, la famille $(L_n)_{n\in[\![0,m]\!]}$ est une base orthogonale de $\mathbb{R}_m[X]$. *On parle alors de famille de polynômes orthogonaux.*

   (b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $L_{n+1} \in \mathbb{R}_n[X]^{\perp}$.

8. Montrer que $\|L_n\|^2 = \dfrac{2}{2n+1}$.

Partie III : Deux propriétés supplémentaires

9. En considérant un polynôme $Q = \displaystyle\prod_{i=1}^{k}(X - a_i)$ de $\mathbb{R}_n[X]$, montrer que L_{n+1} possède $n+1$ racines réelles distinctes, toutes dans l'intervalle $]-1, 1[$. *Cette propriété est vérifiée par toutes les familles de polynômes orthogonaux.*

10. Calculer la distance de X^{n+1} au sous-espace vectoriel $\mathbb{R}_n[X]$.