colle 16 = Représentation matricielle des applications linéaires et Intégration

Connaître son cours :

1. Soit f une fonction continue sur $[a,b]$, positive et non nulle en au moins un point de $[a,b]$. Montrer que $\int_a^b f(t)\,dt > 0$
2. Soit $b > a$. Calculer $\int_a^b e^t\,dt$ avec les sommes de Riemann.
3. Montrer que l'intégrale d'une fonction impaire sur un segment symétrique par rapport à 0 est nulle.

Exercices :

Exercice 1. (**)

1. Donner un exemple d'une matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ à diagonale strictement dominante, montrer ensuite qu'elle est inversible.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que A est à diagonale strictement dominante. Montrer que $A \in \mathcal{G}l_n(\mathbb{C})$.

Exercice 2. (**)

1. Soient $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ deux fonctions de classe C^n. Montrer que

$$\int_a^b f^{(n)}g = \sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k\left(f^{(n-k-1)}(b)g^{(k)}(b) - f^{(n-k-1)}(a)g^{(k)}(a)\right) + (-1)^n\int_a^b fg^{(n)}.$$

2. Application : On pose $Q_n(x) = (1-x^2)^n$ et $P_n(x) = Q_n^{(n)}(x)$. Justifier que P_n est un polynôme de degré n, puis prouver que $\int_{-1}^1 QP_n = 0$ pour tout polynôme Q de degré inférieur ou égal à $n-1$.

Exercice 3. (**)

Soit $A \in \mathcal{M}_{3,2}(\mathbb{R})$, $B \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$ tels que

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Démontrer que $BA = I_2$.

Exercice 4. (**)

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue telle que $|f(x)| \leq 1$ pour tout $x \in [a,b]$ et $\int_a^b f(x)dx = b-a$. Donner une expression de f sur $[a,b]$

Exercice 5. (**)

Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ tel que $f \neq 0$ et $f^2 = 0$.

1. Démontrer que $\dim(\ker(f)) = 2$.
2. En déduire qu'il existe une base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de f est $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 6. (**)

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue. Démontrer que sa valeur moyenne est atteinte : il existe $c \in [a,b]$ tel que

$$f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t)dt.$$
