COLLE 22 = ESPACES EUCLIDIENS

Connaître son cours :

1. Soit F un sous-espace vectoriel d'un espace euclidien E, montrer que les sous-espaces F et $F^\perp$ sont supplémentaires dans E et que $F^{\perp^\perp} = F$.
2. Soit F et G deux sous-espaces vectoriels d'un espace euclidien E, montrer que $F^\perp \cap G^\perp = (F+G)^\perp$.
3. Soit E un espace euclidien et F un sous-espace de E, donner et démontrer l'inégalité de Bessel pour la projection orthogonale p_F sur F.

Exercices :

Exercice 1. (*) *(Isométrie vectorielle)*

Soit E un espace préhilbertien et $f \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que

$$\forall x, y \in E,\ (f(x)|f(y)) = (x|y) \iff \forall x \in E,\ \|f(x)\| = \|x\|.$$

Exercice 2. (**) *(Projection sur un espace de matrices)*

Soit $E = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ que l'on munit du produit scalaire

$$\langle M, N\rangle = \mathrm{Tr}(M^T N).$$

On pose

$$F = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix};\ (a,b) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

1. Déterminer une base orthonormée de $F^\perp$.
2. Calculer la projection de $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ sur $F^\perp$.
3. Calculer la distance de J à F.

Exercice 3. (*)

On considère $E = \mathbb{R}_2[X]$ muni du produit scalaire

$$\langle P, Q\rangle = \int_{-1}^{1} P(t)Q(t)dt.$$

1. Justifier que la famille $\left(1;\ 1+X;\ 1+X+X^2\right)$ forme une base de E.
2. Donner l'unique base orthonormale associée sous les conditions du théorème de Gram-Schmidt.

Exercice 4. (***) *(Estimateur des moindres carrés)*

Soit n et p deux entiers naturels avec $p \leq n$. On munit $\mathbb{R}^n$ du produit scalaire canonique et on identifie $\mathbb{R}^n$ avec $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. On considère une matrice $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ de rang p et $B \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

1. Démontrer qu'il existe une unique matrice X_0 de $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ telle que

$$\|AX_0 - B\| = \inf\{\|AX - B\|;\ X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})\}.$$

2. Montrer que X_0 est l'unique solution de

$$A^T AX = A^T B.$$

3. Application : déterminer

$$\inf\{(x+y-1)^2 + (x-y)^2 + (2x+y+2)^2;\ (x,y) \in \mathbb{R}^2\}.$$