TD 20 : Espaces préhilbertiens et euclidiens

Connaître son cours :

- Citer l'identité du parallélogramme et donner une démonstration de celle-ci dans un espace préhilbertien.
- Montrer que l'application qui à deux matrices $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ associe le réel $\operatorname{tr}(A^T B)$ définit un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
- Soit $n \geq 1$ et soit $a_0, \ldots, a_n$ des réels distincts deux à deux. Montrer que l'application $\varphi : \mathbb{R}_n[X] \times \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}$ définie par $\varphi(P,Q) = \sum_{i=0}^{n} P(a_i)Q(a_i)$ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$.
- Citer l'inégalité de Cauchy-Schwarz et donner une démonstration de celle-ci dans un espace préhilbertien. En déduire l'inégalité triangulaire pour la norme associée.
- Soit E un espace préhilbertien réel, montrer que toute famille orthogonale ne contenant pas le vecteur nul est libre. Pourquoi une famille orthonormale est-elle libre ?
- Démontrer le théorème de Pythagore pour une une famille orthogonale $x_1, \ldots, x_n$ d'un espace préhilbertien réel.
- Soit $(e_1, \ldots, e_n)$ une famille libre d'un espace euclidien E, rappeler le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt. En déduire que tout espace euclidien admet une base orthonormée.
- Soit F et G deux sous-espaces vectoriels d'un espace euclidien E, montrer que $F^\perp \cap G^\perp = (F+G)^\perp$.
- Soit F un sous-espace vectoriel d'un espace euclidien E, montrer que les sous-espaces F et $F^\perp$ sont supplémentaires dans E et que $F^{\perp^\perp} = F$.
- Soit E un espace euclidien et F un sous-espace de E, donner et démontrer l'inégalité de Bessel pour la projection orthogonale p_F sur F.

Produit scalaire :

Exemples de produits scalaires

Exercice 1. (*)

Les applications suivantes définissent-elles un produit scalaire sur $\mathbb{R}^2$?

1. $\varphi_1\big((x,y),(a,b)\big) = \sqrt{x^2+a^2+y^2+b^2}$;
2. $\varphi_2\big((x,y),(a,b)\big) = 4xa - yb$;
3. $\varphi_3\big((x,y),(a,b)\big) = xa - 3xb - 3ya + 10yb$.

Exercice 2. (**)

Sur $\mathbb{R}[X]$, on pose $P|Q = \int_0^1 P(t)Q(t)\,dt$.
Existe-t-il A élément de $\mathbb{R}[X]$ tel que
$\forall P \in \mathbb{R}[X],\ P|A = P(0)$?

Exercice 3. (*)

Démontrer que les formules suivantes définissent des produits scalaires sur l'espace vectoriel associé :

1. $\langle f, g\rangle = f(0)g(0) + \int_0^1 f'(t)g'(t)dt$ sur $E = \mathcal{C}^1([0,1],\mathbb{R})$;
2. $\langle f, g\rangle = \int_a^b f(t)g(t)w(t)dt$ sur $E = \mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$ où $w \in E$ satisfait $w > 0$ sur $]a,b[$.

Exercice 4. (*)

Soient x, y deux vecteurs non nuls d'un espace préhilbertien réel. Établir

$$\left\| \frac{x}{\|x\|^2} - \frac{y}{\|y\|^2} \right\| = \frac{\|x-y\|}{\|x\|\|y\|}$$

Exercice 5. (***)

Soit E un $\mathbb{R}$ espace vectoriel de dimension finie. Soit $\|\cdot\|$ une norme sur E vérifiant l'identité du parallèlogramme, c'est-à-dire :

$$\forall (x,y) \in E^2,\ \|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$$

On se propose de démontrer que $\|\cdot\|$ est associée à un produit scalaire. On définit sur E^2 une application f par :

$$\forall (x,y) \in E^2,\ f(x,y) = \frac{1}{4}(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2)$$

1. Montrer que pour tout $(x,y,z) \in E^3$, on a : $f(x+z,y) + f(x-z,y) = 2f(x,y)$.
2. Montrer que pour tout $(x,y) \in E^2$, on a : $f(2x,y) = 2f(x,y)$.
3. Montrer que pour tout $(x,y) \in E^2$ et tout rationnel r, on a : $f(rx,y) = rf(x,y)$.
   On admettra que pour tout réel λ et tout $(x,y) \in E^2$ on a : $f(\lambda x,y) = \lambda f(x,y)$
   (ce résultat provient de la continuité de f).
4. Montrer que pour tout $(u,v,w) \in E^3$, $f(u,w) + f(v,w) = f(u+v,w)$.
5. Montrer que f est bilinéaire.
6. Montrer que $\|\cdot\|$ est une norme euclidienne.

Inégalité de Cauchy-Schwarz

Exercice 6. (*)

Démontrer que pour tous $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$,

$$\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{x_k}{2^k}\right)^2 \leq \frac{1}{3}\sum_{k=1}^{n} x_k^2.$$

Exercice 7. (*)

Soient $A, B \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Montrer

$$(\operatorname{tr}(AB+BA))^2 \leq 4\operatorname{tr}\left(A^2\right)\operatorname{tr}\left(B^2\right)$$

Exercice 8. (**)

Soit f continue strictement positive sur $[0,1]$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \int_0^1 f^n(t)\,dt$. Montrer que la suite $u_n = \frac{I_{n+1}}{I_n}$ est définie et croissante.

Exercice 9. (**)

Soit $A = (a_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$ une matrice réelle vérifiant

$$\forall i \in \{1,\ldots,n\},\ a_{i,i} \geq 1 \text{ et } \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1, j\neq i}^{n} a_{i,j}^2 < 1$$

1. Montrer $\forall X \in \mathbb{R}^n, X \neq 0_n,\ X^T AX > 0$
2. En déduire que la matrice A est inversible.

Exercice 10. (*)

Soient $x_1, \ldots, x_n > 0$ tels que $x_1 + \cdots + x_n = 1$. Montrer que

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x_k} \geq n^2$$

Préciser les cas d'égalité.

Exercice 11. (**)

Soit x, y, z trois réels tels que $2x^2 + y^2 + 5z^2 \leq 1$. Démontrer que

$$(x+y+z)^2 \leq \frac{17}{10}$$

Exercice 12. (**)

Pour $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ du produit scalaire usuel : $\langle A, B\rangle = \operatorname{tr}(A^T B)$.

1. Montrer que pour tous $A, B \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, on a
$$\left(\operatorname{tr}(AB)\right)^2 \leq \operatorname{tr}(A^2)\operatorname{tr}(B^2).$$
2. Montrer que pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on a :
$$\operatorname{tr}(A^2) = \operatorname{tr}(A^T A) \Leftrightarrow A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$$

Orthogonalité :

Bases orthonormées et procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt

Exercice 13. (*)

Dans $\mathbb{R}^4$ muni du produit scalaire usuel, on pose : $V_1 = (1, 2, -1, 1)$ et $V_2 = (0, 3, 1, -1)$.
On pose $F = \text{Vect}(V_1, V_2)$. Déterminer une base orthonormale de F et un système d'équations de $F^\perp$.

Exercice 14. (*)

Soit E un espace préhilbertien, et A et B deux parties de E. Démontrer les relations suivantes :

1. $A \subset B \Rightarrow B^\perp \subset A^\perp$.
2. $(A \cup B)^\perp = A^\perp \cap B^\perp$.
3. $A^\perp = \text{vect}(A)^\perp$;
4. $\text{vect}(A) \subset A^{\perp^\perp}$.
5. On suppose de plus que E est de dimension finie. Démontrer que $\text{vect}(A) = A^{\perp^\perp}$.

Exercice 15. (**)

Soit E espace vectoriel muni d'un produit scalaire $(\cdot \mid \cdot)$. Pour $a \in E$ non nul et $\lambda \in \mathbb{R}$, résoudre l'équation

$$(a \mid x) = \lambda$$

d'inconnue $x \in E$.

Exercice 16. (**)

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $a \in \mathbb{R}$. Démontrer que l'application $\langle \cdot, \cdot \rangle$ définie sur $\mathbb{R}_n[X]^2$ par

$$(P, Q) \mapsto \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(a) Q^{(k)}(a)}{(k!)^2}$$

définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$. Sans calculs, déterminer une base orthonormée pour ce produit scalaire.

Exercice 17. (**)

Soit E un espace vectoriel euclidien et x, y deux éléments de E. Montrer que x et y sont orthogonaux si et seulement si $\|x + \lambda y\| \geq \|x\|$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$.

Exercice 18. (**)

On considère $E = \mathscr{C}([0, 1], \mathbb{R})$ muni du produit scalaire

$$(f, g) = \int_0^1 f(t) g(t) dt$$

Soit $F = \{f \in E,\ f(0) = 0\}$.
Montrer que $F^\perp = \{0\}$. En déduire que F n'admet pas de supplémentaire orthogonal.

Exercice 19. (***) (*Polynômes de* LAGUERRE)

On pose, pour tout entier naturel n et pour tout réel x,

$$h_n(x) = x^n e^{-x} \text{ et } L_n(x) = \frac{e^x}{n!} h_n^{(n)}(x).$$

1. Calculer explicitement L_0, L_1, L_2.
2. Montrer que, pour tout entier n, L_n est une fonction polynômiale. Préciser son degré et son coefficient dominant.
3. Pour tous $P, Q \in \mathbb{R}[X]$, on pose
$$\varphi(P, Q) = \int_0^{+\infty} P(x) Q(x) e^{-x} dx.$$
Démontrer que φ est bien définie et correspond à un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.
4. Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\varphi(L_0, X^n)$.
5. Montrer que, pour tout $k \in \{0, \ldots, n\}$, il existe $Q_k \in \mathbb{R}[X]$ tel que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a
$$h_n^{(k)}(x) = x^{n-k} e^{-x} Q_k(x)$$
6. Établir que :
$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall P \in \mathbb{R}[X],\ \forall p \in \{0, \ldots, n\}$
$$\varphi(L_n, P) = \frac{(-1)^p}{n!} \int_0^{+\infty} h_n^{(n-p)}(x) P^{(p)}(x) dx.$$
7. En déduire que $(L_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une famille orthonormée de $(\mathbb{R}[X], \varphi)$.

Exercice 20. (***)

Considérons $\mathbb{R}_n[X]$ muni du produit scalaire

$$\langle P \mid Q\rangle = \int_0^1 P(x)Q(x)\mathrm{d}x$$

Posons L_k le polynôme égal à la dérivée $k^{\text{ième}}$ de $[X(X-1)]^k$ pour $k \in [\![0,n]\!]$.

1. Montrer que la famille $(L_k)_{k\in[0,n]}$ est orthogonale.
2. Calculer la norme euclidienne de L_k pour $k \in [\![0,n]\!]$.

Exercice 21. (***) (*Inégalité de* HADAMARD)

Soit $\mathcal{B}$ une base orthonormée de E un espace euclidien de dimension n. Montrer que :

$$\forall (x_1,...,x_n) \in E^n,\ |\det_{\mathcal{B}}(x_1,...,x_n)| \leq ||x_1||...||x_n||$$

en précisant les cas d'égalité.

Exercice 22. (***)

Soit E un espace euclidien et $e_1,\ldots,e_n \in E$ tels que

$$\forall x \in E, \quad \|x\|^2 = \sum_{i=1}^n \langle x \mid e_i\rangle^2$$

1. Montrer que la famille $(e_1,\ldots,e_n)$ est génératrice.
2. Supposons, dans cette question, que les vecteurs $e_1,\ldots,e_n$ sont unitaires. Montrer que $(e_1,\ldots,e_n)$ est une base orthonormale de E.
3. Supposons, dans cette question, que $\dim E = n$.
   (a) Montrer que $(e_1,\ldots,e_n)$ est une base de E.
   (b) Montrer que $$\forall (x,y) \in E^2, \quad \langle x \mid y\rangle = \sum_{i=1}^n \langle x \mid e_i\rangle \langle y \mid e_i\rangle.$$
   (c) Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice dont le coefficient en position i,j est $\langle e_i \mid e_j\rangle$. Montrer que $M^2 = M$ et conclure.

Projection orthogonale

Exercice 23. (*)

Soit $A = (a_{i,j})_{1\leq i,j\leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Calculer

$$\inf_{M\in\mathcal{S}_n(\mathbb{R})} \left(\sum_{1\leq i,j\leq n} (a_{i,j} - m_{i,j})^2 \right).$$

Exercice 24. (**)

Soit E un espace vectoriel euclidien, et p un projecteur de E. Montrer que p est un projecteur orthogonal si et seulement si pour tout x de E, on a

$$\|p(x)\| \leq \|x\|$$

Exercice 25. (**)

Trouver a et b tels que

$$\int_0^1 (x^4 - ax - b)^2\, dx$$

soit minimum.

Exercice 26. (**)

Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel euclidien E tel que

$$\forall x,y \in E, (f(x) \mid y) = (x \mid f(y)).$$

Montrer

$$\operatorname{Im} f = (\operatorname{Ker} f)^\perp$$

Exercice 27. (**)

Soit p un projecteur orthogonal d'un espace euclidien E.

1. Montrer que $\|p(x)\|^2 = \langle p(x) \mid x\rangle$ pour tout $x \in E$.
2. Montrer que, pour toute base orthonormée $(e_1,\ldots,e_n)$ de E,

$$\sum_{k=1}^n \|p(e_k)\|^2 = \operatorname{rg}(p)$$

Exercice 28. (***)

Calculer
$$\inf_{a,b\in\mathbb{R}} \int_0^{2\pi} \big(t - a\cos(t) - b\sin(t)\big)^2 dt.$$

Exercice 29. (***) (*Matrices de* Gram)

Soit E un espace vectoriel euclidien de dimension p sur $\mathbb{R}$ ($p \geq 2$). Pour $(x_1, ..., x_n) \in E^n$, on définit la matrice de Gram par :
$$G(x_1, ..., x_n) = (x_i|x_j)_{1\leq i,j\leq n}$$

Le déterminant de Gramest noté :
$$\gamma(x_1, ..., x_n) = \det(G(x_1, ..., x_n))$$

1. Montrer que $\mathrm{rg}(G(x_1, ..., x_n)) = \mathrm{rg}(x_1, ..., x_n)$.
2. Montrer que $(x_1, ..., x_n)$ est liée si et seulement si $\gamma(x_1, ..., x_n) = 0$ et que $(x_1, ..., x_n)$ est libre si et seulement si $\gamma(x_1, ..., x_n) > 0$.
3. On suppose que $(x_1, ..., x_n)$ est libre dans E (et donc $n \leq p$). On pose $F = \mathrm{Vect}(x_1, ..., x_n)$.
   Pour $x \in E$, on note $p_F(x)$ la projection orthogonale de x sur F puis $d_F(x) = \|x - p_F(x)\|$ la distance de x à F. Montrer que
$$d_F(x) = \sqrt{\frac{\gamma(x, x_1, ..., x_n)}{\gamma(x_1, ..., x_n)}}$$
