Chapitre 1 - Nombres réels

Contenus	**Capacités attendues**
• Ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels, droite numérique • Intervalles de $\mathbb{R}$. Notations $+\infty$ et $-\infty$ • Notation $\|a\|$. Distance entre deux nombres réels • Représentation de l'intervalle $[a-r\,;a+r]$ puis caractérisation par la condition $\|x-a\| \leqslant r$. • Ensemble $\mathbb{D}$ des nombres décimaux. Encadrement décimal d'un nombre réel à 10^{-n} près. • Ensemble $\mathbb{Q}$ des nombres rationnels. Nombres irrationnels ; exemples fournis par la géométrie, par exemple $\sqrt{2}$ et π. • Notations $\mathbb{N}$ et $\mathbb{Z}$	• Associer à chaque point de la droite graduée un unique nombre réel et réciproquement. • Représenter un intervalle de la droite numérique. Déterminer si un nombre réel appartient à un intervalle donné. • Donner un encadrement, d'amplitude donnée, d'un nombre réel par des décimaux. • Dans le cadre de la résolution de problèmes, arrondir en donnant le nombre de chiffres significatifs adaptés à la situation donnée.

Démonstrations :
- Le nombre $\dfrac{1}{3}$ n'est pas décimal.
- Le nombre $\sqrt{2}$ est irrationnel.

Exemples d'algorithme :
- Déterminer par balayage un encadrement de $\sqrt{2}$ d'amplitude inférieure ou égale à 10^{-n}.

Approfondissements possibles :
- Développement décimal illimité d'un nombre réel.
- Observation, sur des exemples, de la périodicité du développement décimal de nombres rationnels, du fait qu'un développement décimal périodique correspond à un rationnel.

I Les ensembles de nombres

1 Les nombres entiers : entiers naturels et entiers relatifs

Définition 1. *Un entier naturel est un nombre entier positif ou nul.*
L'ensemble des entiers naturels est noté $\mathbb{N}$ (« N » comme « naturel »).

Remarque 1.

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, ...\}$$

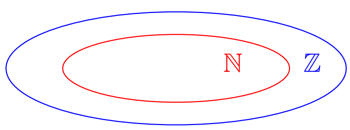
En particulier, $0 \in \mathbb{N}$.

Définition 2. *Un entier relatif est un nombre entier positif ou négatif ou nul.*
L'ensemble des entiers relatifs est noté $\mathbb{Z}$ (« Z » comme « zahlen » qui signifie « compter » en allemand).

Remarque 2.

$$\mathbb{Z} = \{..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...\}$$

Propriété 1. *Tout entier naturel est un entier relatif. On dit que l'ensemble des entiers naturels **est inclus** dans l'ensemble des entiers relatifs et on note $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$.*



Démonstration.
Par définition, tout entier naturel est un entier positif ou nul. Donc, en particulier, c'est un entier positif ou négatif ou nul. □

Remarque 3. *L'inclusion réciproque est fausse : $\mathbb{Z} \not\subset \mathbb{N}$. Pour le prouver, il suffit de trouver un élément de $\mathbb{Z}$ qui n'est pas un élément de $\mathbb{N}$. Le nombre -5 convient (par exemple).*

Attention à ne pas confondre les deux symboles $\in$ et $\subset$.

Exercice 1. *Dans chacun des cas suivants, compléter les ... à l'aide du symbole $\in$ ou du symbole $\subset$.*

◇ $12 \ldots \mathbb{N}$

◇ *soit (d) une droite et M un point de cette droite. Alors $M \ldots (d)$.*

◇ *soient A et B deux points distincts du plan. Alors $[AB] \ldots (AB)$.*

◇ *soit E l'ensemble de tous les élèves du lycée et S l'ensemble des élèves de votre classe de seconde. Alors $S \ldots E$*

◇ *soit P l'ensemble de tous les professeurs du lycée. Alors Mme Beudez$\ldots P$*

Remarque 4. .
L'inclusion est une relation entre deux ensembles. Il ne faut pas la confondre avec l'appartenance (qui est une relation entre un élément et un ensemble). Par exemple, comme 3 est un nombre et pas un ensemble de nombres, on dit que « 3 appartient à $\mathbb{N}$ », ce qui se note « $3 \in \mathbb{N}$ ».

2 Les nombres décimaux

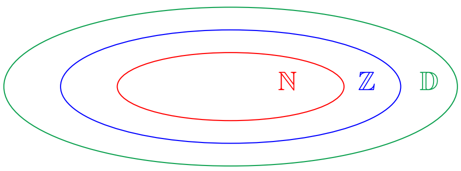
Définition 3. *Un nombre **décimal** est un nombre pouvant s'écrire sous la forme $\dfrac{a}{10^n}$ où a est un entier **relatif** et n est un entier **naturel**.*
L'ensemble des nombres décimaux est noté $\mathbb{D}$ (« D » comme « décimal »).
Autrement dit, $\mathbb{D} = \left\{ \dfrac{a}{10^n} \ ; \ a \in \mathbb{Z} \text{ et } n \in \mathbb{N} \right\}$.

Exemple 1.

◇ $0,2$ *est un nombre décimal (donc $0,2 \in \mathbb{D}$). En effet, $0,2 = \dfrac{2}{10^1}$ avec 2 entier relatif et 1 entier naturel.*

◇ $-0,04$ *est un nombre décimal (donc $-0,04 \in \mathbb{D}$). En effet, $-0,04 = \dfrac{-4}{10^2}$ avec -4 entier relatif et 2 entier naturel.*

Propriété 2. *Tout entier relatif est un nombre décimal. On a donc les inclusions suivantes :* $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D}$



Démonstration. Pour tout entier relatif k, on a :

$$k = \frac{k}{1} = \frac{k}{10^0}$$

Ainsi, tout entier relatif k peut s'écrire sous la forme $\dfrac{k}{10^0}$ avec k entier relatif et 0 entier naturel. Tout entier relatif est donc un nombre décimal, ce qui prouve bien que $\mathbb{Z} \subset \mathbb{D}$. L'inclusion $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$ ayant déjà été vue précédemment, on obtient bien $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D}$.

□

Remarque 5. *Les nombres décimaux ont une écriture décimale finie (c'est-à-dire qu'ils s'écrivent avec un nombre fini de chiffres après la virgule). Réciproquement, un nombre ayant une écriture décimale finie est un nombre décimal.*

Propriété 3. *Le nombre $\dfrac{1}{3}$ n'est pas décimal.*

Démonstration. Avant de commencer la démonstration, on rappelle le critère de divisibilité par 3 : un nombre est divisible par 3 si et seulement si la somme de ses chiffres est divisible par 3.
On raisonne **par l'absurde** : supposons que $\frac{1}{3}$ soit décimal. Alors il existe un entier relatif a et un entier naturel n tels que $\frac{1}{3} = \frac{a}{10^n}$. D'où $3 \times a = 10^n$. En particulier, a étant un entier, on en déduit que 3 divise $3 \times a$. Or $3 \times a = 10^n$ donc

3 divise 10^n. Or la somme des chiffres de 10^n vaut 1, qui n'est pas un multiple de 3. Cela contredit le critère de divisibilité par 3. On a donc démontré que $\frac{1}{3}$ n'est pas décimal.

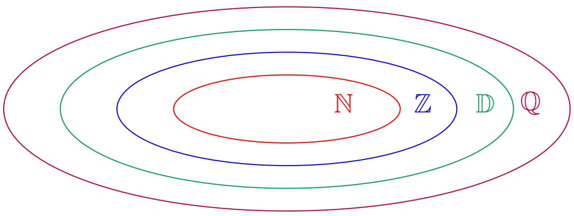
□

3 L'ensemble des nombres rationnels

Définition 4.
- ⋄ *Un nombre **rationnel** est un nombre qui peut s'écrire sous la forme $\frac{p}{q}$ où p est un entier relatif et q un entier naturel non nul.*
  L'ensemble des nombres rationnels est noté $\mathbb{Q}$ (« Q » comme « quotient »).
  Autrement dit, $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} \; ; \; p \in \mathbb{Z} \text{ et } q \in \mathbb{N}^* \right\}$.
- ⋄ *Un nombre qui n'est pas rationnel est dit **irrationnel**.*

Propriété 4. *On a les inclusions suivantes :*

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q}.$$



Démonstration. Tout nombre décimal d peut s'écrire sous la forme $\frac{a}{10^n}$ où a est un entier relatif et n un entier naturel. On pose alors $p = a$ et $q = 10^n$. Ainsi, p est un entier relatif et q est un entier naturel non nul. Donc d est un nombre rationnel.
Tout nombre décimal est donc un nombre rationnel, ce qui prouve bien que $\mathbb{D} \subset \mathbb{Q}$. Les inclusions $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D}$ ayant déjà été vues précédemment, on obtient bien $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q}$.

□

Propriété 5. *Tout nombre rationnel s'écrit de manière unique sous forme irréductible. Autrement dit, pour tout nombre rationnel r, il existe un unique entier relatif a et un unique entier naturel non nul b tel que $r = \frac{a}{b}$ et tels que le seul diviseur positif commun à a et b soit 1.*

Démonstration. Soit r un nombre rationnel. Il existe $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$ tel que $r = \frac{p}{q}$. On considère d le plus grand diviseur commun à p et à q. Alors, par définition, d divise p et d divise q donc il existe un entier relatif a et un entier naturel non nul b tels que :

$$r = \frac{p}{q} = \frac{d \times a}{d \times b} = \frac{a}{b}$$

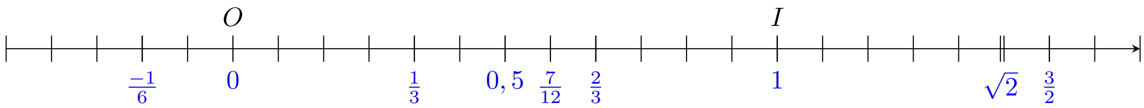
La fraction $\frac{a}{b}$ est nécessairement irréductible puisque d était le **plus grand divisieur commun** de p et de q. □

4 L'ensemble des réels, la droite réelle

Point historique :
La mesure des grandeurs est à l'origine de l'invention des nombres réels. Ils permettent d'associer à toute mesure une valeur. Une unité de longueur étant choisie :

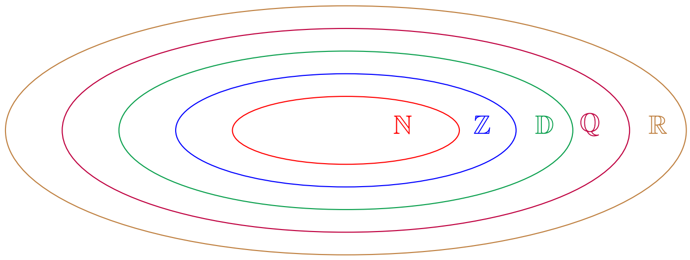
- toute longueur de segment est mesurée par un réel nombre positif. Par exemple la longueur de la diagonale d'un carré de côté 1 est mesurée par le réel positif $\sqrt{2}$.
- inversement, tout réel positif est la mesure d'une longueur de segment.

Définition 5.
On considère une droite munie d'un repère $(O;I)$.
*L'ensemble des nombres réels est l'ensemble des abscisses des points de cette droite, appelée **droite des réels**.*
On note cet ensemble $\mathbb{R}$.



Propriété 6. *On a les inclusions suivantes :*

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}.$$



Remarque 6. *Il existe des nombres réels qui ne sont pas rationnels comme par exemple $\sqrt{2}$, π. C'est ce que l'on appelle les nombres **irrationnels**.*

Propriété 7. *Le nombre $\sqrt{2}$ est irrationnel.*

Démonstration. Admise pour l'instant. La démonstration sera faite plus tard lorsque nous aurons vu la notion de nombre pair et de nombre impair et leurs propriétés. □

Remarque 7. *Les calculatrices et logiciels utilisent des valeurs décimales approchées des nombres réels.*
Par exemple, ne serait-ce qu'en terme d'affichage, si vous tapez à la calculatrice $1 \div 3$, elle affichera seulement 0.3333333333 (le chiffre 3 est écrit 10 fois après la virgule). De même, si vous faites ce calcul dans le shell Python, il affiche 0.3333333333333333 (le chiffre 3 est écrit 16 fois après la virgule). Pourtant, $\dfrac{1}{3}$ n'étant pas un nombre décimal (on le démontrera plus tard), $\frac{1}{3}$ n'est égal à aucun des deux nombres précédents. En fait, $\frac{1}{3} = 0.3\underline{3}...$.
Limites de la calculatrice : Déclic Maths Seconde Hachette 2000 p.24 et 32.

Faire :

◇ **l'exercice résolu 1 p.25 (en cachant la correction ;-))**

◇ **l'exercice « Utiliser différents raisonnements » p.31**

5 Encadrement décimal d'un nombre réel à 10^{-n} près

Propriété-définition 1. *Soit x un nombre réel et n un entier relatif. Il existe un unique nombre entier relatif a tel que :*

$$\frac{a}{10^n} \leqslant x < \frac{a+1}{10^n}$$

*Cet encadrement est appelé l'**encadrement décimal de x à 10^{-n} près**.*

***L'arrondi de x à 10^{-n} près** est celui des deux nombres $\frac{a}{10^n}$ ou $\frac{a+1}{10^n}$ qui est le plus proche de x (lorsqu'il existe).*

Dans le cas où x est à égale distance de $\frac{a}{10^n}$ et de $\frac{a+1}{10^n}$, par convention, l'arrondi est alors $\frac{a+1}{10^n}$.

Démonstration. Admis. □

Exercice 2. *Encadrer π par deux nombre décimaux à 10^{-2} près, puis à 10^{-4} près.*

Faire :

- ◇ **l'exercice 10 p.59**
- ◇ **les exercices 49, 50, 51, 52 et 53 p.66**
- ◇ **les exercices 54 et 55 p.67**

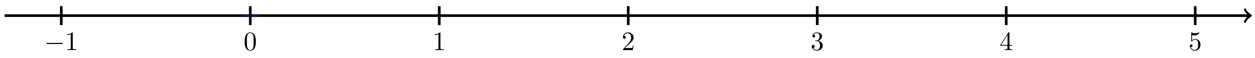
Faire le TP 1 p.60 du livre « détermination par balayage de l'encadrement de $\sqrt{2}$ à 10^{-n} près ».

6 Quelques exemples de constructions géométriques de nombres réels

Il est très facile de placer un entier sur la droite des réels : il suffit de reporter l'unité de longueur autant de fois que nécessaire sur la droite, en faisant bien attention à l'orientation de la droite.
En revanche, placer un nombre rationnel ou un nombre irrationnel est moins évident. Nous allons voir quelques constructions dans l'activité indiquée ci-dessous.
Activité 1 chapitre 1 : « quelques constructions de nombres réels ».

II Intervalles de $\mathbb{R}$

Exemple introductif : On considère l'ensemble des nombres compris au sens large entre 2 et 5. Comment écrire cet ensemble plus simplement ?
On ne peut pas écrire la liste de tous les nombres appartenant à cet ensemble (puisqu'il y en a une infinité).
On peut représenter cet ensemble sur la droite graduée ci-dessous en coloriant :

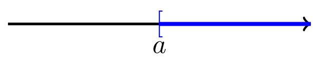
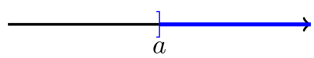
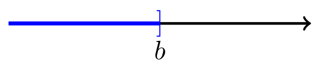
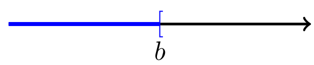


Cet ensemble de nombres se note $\left[2;5\right]$. Les crochets indiquent ici que 2 et 5 appartiennent à cet ensemble. On peut se les représenter comme des mains qui tiennent les nombres 2 et 5 : Un tel ensemble est appelé un **intervalle** (du latin « intervallum » qui désignait la distance entre deux pieux).
Les nombres 2 et 5 sont appelés les **bornes** de l'intervalle $[2;5]$.

1 Les intervalles de $\mathbb{R}$

Activité 2 chapitre 1 : « à la découverte des intervalles ».

Le tableau suivant donne les différents types d'intervalles que vous pouvez rencontrer (a et b sont deux réels tels que $a < b$).

Intervalle	Description	Ensemble des réels x tels que	Représentation
$[a;b]$	tous les nombres compris au sens large entre a et b	$a \leqslant x \leqslant b$	
$]a;b[$	tous les nombres strictement compris entre a et b	$a < x < b$	
$[a;b[$	tous les nombres compris entre a et b, b exclus	$a \leqslant x < b$	
$]a;b]$	ouvert en a, fermé en b	$a < x \leqslant b$	
$[a;+\infty[$	fermé	$x \geqslant a$	
$]a;+\infty[$	ouvert	$x > a$	
$]-\infty;b]$	fermé	$x \leqslant b$	
$]-\infty;b[$	ouvert	$x < b$	

Exemple 2.
$1 \in \left[-3;2\right]$ *et* $1 \in \left]-3;2\right[$.
$-3 \in \left[-3;2\right]$ *mais* $-3 \notin \left]-3;2\right]$.
$2 \in \left[-3;2\right]$ *mais* $2 \notin \left[-3;2\right[$.

Remarque 8.

- *Quand le crochet « tient » le nombre, on dit qu'il est fermé et le nombre appartient à l'intervalle.*
- *Quand le crochet « ne tient pas » le nombre, on dit qu'il est ouvert et le nombre n'appartient pas à l'intervalle.*
- *Du côté de $-\infty$ et de $+\infty$, le crochet est **toujours ouvert**. En effet, $-\infty$ et $+\infty$ ne désignent pas des nombres réels et ne peuvent pas être atteints.*
- *L'ensemble $\mathbb{R}$ est lui-aussi un intervalle, c'est l'intervalle $\big] -\infty; +\infty \big[$.*

Définition 6.

- *L'ensemble des réels positifs (ou nuls) est l'intervalle $\big[0; +\infty\big[$. On le note aussi $\mathbb{R}^+$.*
- *L'ensemble des réels négatifs (ou nuls) est l'intervalle $\big] -\infty; 0\big]$. On le note aussi $\mathbb{R}^-$.*

Faire :

- **l'exercice résolu 1 p.27 (en cachant la correction ;-)) ;**
- **les exercices 1 et 2 de la feuille d'exercices du chapitre ;**
- **les exercices 41, 42, 43, 44 p.40. Indication pour l'exercice 43 : on appelle amplitude d'un intervalle sa longueur. Par exemple, l'intervalle $[1; 3]$ a pour amplitude 2 ;**
- **l'exercice 46 p.40 (sauf les questions 7 et 8) ;**
- **l'exercice 84 p.44.**

2 Intersection et réunion d'intervalles

Définition 7. *Soient I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$.*

- *L'**intersection** de I et de J est l'ensemble des nombres qui appartiennent à la fois à I et à J. On la note $I \cap J$, ce qui se lit "I inter J".*
- *La **réunion** de I et de J est l'ensemble des nombres qui appartiennent à I ou à J (éventuellement aux deux à la fois). On la note $I \cap J$, ce qui se lit "I union J".*

Remarque 9. *Lorsque les intervalles I et J n'ont aucun nombre en commun, leur intersection est l'ensemble vide, noté $\emptyset$. On dit alors que les intervalles I et J sont **disjoints**.*

Remarque 10. *On en déduit immédiatement que $I \cap J \subset I \cup J$.*

Méthode pour représenter l'intersection et l'union de deux intervalles :

On commence par représenter ces deux intervalles sur la même droite avec deux couleurs différentes.

- L'intersection des deux intervalles est la partie de la droite qui a été coloriée **des deux couleurs à la fois**.
- La réunion des deux intervalles est la partie de la droite qui a été coloriée **d'au moins une des deux couleurs** (soit d'une couleur uniquement, soit des deux couleurs à la fois).

Exercice 3.

- *$I = \big[3; 7\big]$ et $J = \big[4; 9\big[$. Alors $I \cap J = \ldots\ldots\ldots$*
- *$I = \big[-5; 2\big[$ et $J = \big]3; 4\big[$. Alors $I \cap J = \ldots\ldots\ldots$*
- *$I = \big[2; 6\big]$ et $J = \big]3; +\infty\big[$. Alors $I \cap J = \ldots\ldots\ldots$*
- *$I =]-2; 3]$ et $J = [3; 7]$. Alors $I \cap J = \ldots\ldots\ldots$*
- *$I = [3; 7]$ et $J = [4; 9[$. Alors $I \cup J = \ldots\ldots$*
- *$I = [1; 3]$ et $J = [-2; 10]$. Alors $I \cup J = \ldots\ldots$*
- *$I = [-5; 2[$ et $J =]3; 4[$. Alors $I \cup J = \ldots\ldots$*
- *$I = [0; 4]$ et $J =]-\infty; 1]$. Alors $I \cup J = \ldots\ldots$*

Faire l'exercice 3 de la feuille d'exercices du chapitre.

III Valeur absolue d'un nombre réel. Distance entre deux nombres réels.

Définition 8. *Soit x un nombre réel.*
*On appelle **valeur absolue** de x, et on note $|x|$, le nombre réel égal à :* $\begin{cases} x & si\ x \geqslant 0 \\ -x & si\ x < 0 \end{cases}$.

Exemple 3.
$|6| = 6$; $|-5| = 5$; $|-3,2| = 3,2$; $|0| = 0$

Définition 9. *Soient a et b deux nombres réels.*
*On appelle **distance entre les réels** a **et** b le nombre $|b-a|$ (aussi égal à $|a-b|$).*

Exemple 4. *La distance entre les nombres 1 et 6 est $|6-1| = |5| = 5$.*
La distance entre les nombres 5 et $0,3$ est $|0,3-5| = |-4,7| = 4,7$.
La distance entre les nombres -2 et 4 est $|4-(-2)| = |4+2| = |6| = 6$.

Exercice 4. *On considère les réels suivants :*

$$a = -4 \quad ; \quad b = -1 \quad ; \quad c = 2 \quad ; \quad d = 3,6$$

1. *Calculer :*
   - ◇ *la distance entre a et b ;*
   - ◇ *la distance entre c et d ;*
   - ◇ *la distance entre a et c.*
2. *Sur une droite de repère $(O;I)$, placer les points A, B, C et D d'abscisses respectives a, b, c et d.*
   Que semblent représenter géométriquement les résultats obtenus à la question précédente ?

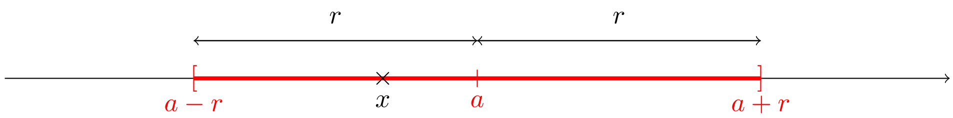
Interprétation géométrique de $|b-a|$ avec a et b deux réels :

On considère une droite graduée (d). On note A le point d'abscisse a et B le point d'abscisse b. Alors la distance $|b-a|$ entre les nombres a et b s'interprète comme la distance AB.

Propriété 8. *Soient a, x et r trois nombres réels avec $r \geqslant 0$. Alors :*

$$x \in [a-r; a+r] \quad \text{équivaut à} \quad |x-a| \leqslant r$$

Démonstration.



□

Exercice 5. *Sur une droite graduée, A est le point d'abscisse 2.*

1. *Représenter l'ensemble des points M tels que $AM \leqslant 4$.*
2. *On note x l'abscisse du point M. Compléter l'inégalité caractérisant x :*

$$|x - \ldots\ldots| \leqslant \ldots\ldots$$

Exercice 6. *Dans chacun des cas suivants, représenter sur une droite graduée l'ensemble des réels x vérifiant l'inégalité donnée :*

- ◇ $|x-3| < 1$
- ◇ $|x+4| < 2$
- ◇ $|5-x| < 3$

Faire :

◇ **les exercices résolus 2 et 3 p.27 (en cachant la correction ;-))**

◇ **l'exercice 8 p.33**

◇ **l' exercice 45 p.40**

◇ **les questions 7 et 8 de l'exercice 46 puis l'exercice 47 p.40**

◇ **l'exercice 72 p.43**

◇ **l'exercice 104 p.47**