COLLE 14 = ESPACES VECTORIELS, APPLICATIONS LINÉAIRES ET INTÉGRATION

Espaces vectoriels et applications linéaires :

Exercice 1.
Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ de matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & \frac{2}{3} \\ -\frac{5}{2} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$ dans la base canonique. Soient $e_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $e_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que $\mathcal{B}' = (e_1, e_2)$ est une base de $\mathbb{R}^2$ et déterminer $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(f)$.
2. Calculer A^n pour $n \in \mathbb{N}$.
3. Déterminer l'ensemble des suites réelles qui vérifient $\forall n \in \mathbb{N}$ $\begin{cases} x_{n+1} = 2x_n + \dfrac{2}{3} y_n \\ y_{n+1} = -\dfrac{5}{2} x_n - \dfrac{2}{3} y_n \end{cases}$.

Exercice 2.
Soient A, B deux matrices semblables (i.e. il existe P inversible telle que $B = P^{-1}AP$). Montrer que si l'une est inversible, l'autre aussi ; que si l'une est idempotente, l'autre aussi ; que si l'une est nilpotente, l'autre aussi ; que si $A = \lambda I$, alors $A = B$.

Exercice 3.
Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ dont la matrice par rapport à la base canonique (e_1, e_2) est

$$A = \begin{pmatrix} 11 & -6 \\ 12 & -6 \end{pmatrix}.$$

Montrer que les vecteurs

$$e_1' = 2e_1 + 3e_2, \quad e_2' = 3e_1 + 4e_2,$$

forment une base de $\mathbb{R}^2$ et calculer la matrice de f par rapport à cette base.

Exercice 4.
Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & & \dots & 0 & 1 \\ \vdots & & & 1 & 0 \\ & & \iddots & & \\ 0 & 1 & & & \vdots \\ 1 & 0 & & \dots & 0 \end{pmatrix}$.

En utilisant l'application linéaire associée de $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$, calculer A^p pour $p \in \mathbb{Z}$.

Exercice 5.
Soit $\mathbb{R}^2$ muni de la base canonique $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j})$.
Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la projection sur l'axe des abscisses $\mathbb{R}\vec{i}$ parallèlement à $\mathbb{R}(\vec{i} + \vec{j})$. Déterminer $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(f)$, la matrice de f dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$.
Même question avec $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(f)$ où $\mathcal{B}'$ est la base $(\vec{i} - \vec{j}, -2\vec{i} + 3\vec{j})$ de $\mathbb{R}^2$. Même question avec $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}'}(f)$.

Exercice 6.
Soit E un espace vectoriel et f une application linéaire de E dans lui-même telle que $f^2 = f$.

1. Montrer que $E = \ker f \oplus \mathrm{Im}\, f$.
2. Supposons que E soit de dimension finie n. Posons $r = \dim \mathrm{Im}\, f$. Montrer qu'il existe une base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ de E telle que : $f(e_i) = e_i$ si $i \leq r$ et $f(e_i) = 0$ si $i > r$. Déterminer la matrice de f dans cette base $\mathcal{B}$.

Exercice 7.
Trouver toutes les matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ qui vérifient

1. $M^2 = 0$;
2. $M^2 = M$;
3. $M^2 = I$.

Intégration :

Exercice 8.
Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a, b]$ $(a < b)$.

1. On suppose que $f(x) \geq 0$ pour tout $x \in [a, b]$, et que $f(x_0) > 0$ en un point $x_0 \in [a, b]$. Montrer que $\int_a^b f(x)dx > 0$. En déduire que : «si f est une fonction continue positive sur $[a, b]$ telle que $\int_a^b f(x)dx = 0$ alors f est identiquement nulle».
2. On suppose que $\int_a^b f(x)dx = 0$. Montrer qu'il existe $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = 0$.
3. Application : on suppose que f est une fonction continue sur $[0, 1]$ telle que $\int_0^1 f(x)dx = \frac{1}{2}$. Montrer qu'il existe $d \in [0, 1]$ tel que $f(d) = d$.

Exercice 9.
Soient les fonctions définies sur $\mathbb{R}$,

$$f(x) = x\ ,\ g(x) = x^2 \text{ et } h(x) = e^x,$$

Justifier qu'elles sont intégrables sur tout intervalle fermé borné de $\mathbb{R}$. En utilisant les sommes de Riemann, calculer les intégrales $\int_0^1 f(x)dx$, $\int_1^2 g(x)dx$ et $\int_0^x h(t)dt$.

Exercice 10.
Calculer les intégrales suivantes :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+\sin x}dx \quad \text{et} \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{1+\sin x}dx.$$

Exercice 11.

Soit $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^n}{1+x}dx$.

1. En majorant la fonction intégrée, montrer que $\lim_{n\to+\infty} I_n = 0$.
2. Calculer $I_n + I_{n+1}$.
3. Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \right)$.

Exercice 12.
Calculer la limite des suites suivantes :

1. $u_n = n \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k^2+n^2}$
2. $v_n = \displaystyle\prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{k^2}{n^2}\right)^{\frac{1}{n}}$

Exercice 13.
Soit f une fonction de classe C^1 sur $[0, 1]$ telle que $f(0) = 0$. Montrer que $2\int_0^1 f^2(t)\, dt \leq \int_0^1 f'^2(t)\, dt$.

Exercice 14.
Soit f une fonction de classe C^2 sur $[0, 1]$. Déterminer le réel a tel que :

$$\int_0^1 f(t)\, dt - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1} f(\frac{k}{n}) \underset{n\to+\infty}{=} \frac{a}{n} + o(\frac{1}{n}).$$