COLLE 10 = POLYNÔMES

Connaître son cours :

1. Montrer qu'un complexe a est une racine de $P \in \mathbb{K}[X]$ si, et seulement si, $X - a$ divise P.
2. Rappeler le Théorème de d'*Alembert-Gauss* et montrer qu'un polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$ non constant est surjectif de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$. Est-ce vrai de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$?
3. Soit $P, Q \in \mathbb{K}[X]$, rappeler la définition du produit de P et Q le polynôme noté $P.Q$.
   Montrer que $\deg(P.Q) = \deg(P) + \deg(Q)$.

Exercices :

Exercice 1. (*)

Soient $a_1, \dots, a_n$ des réels deux à deux distincts. Pour tout $i = 1, \dots, n$, on pose

$$L_i(X) = \prod_{\substack{1 \leq j \leq n \\ j \neq i}} \frac{X - a_j}{a_i - a_j}$$

1. Calculer $L_i(a_j)$ pour $j = 1, \dots, n$.
2. Soient $b_1, \dots, b_n$ des réels fixés. Montrer que $P(X) = \sum_{i=0}^{n} b_i L_i(X)$ est l'unique polynôme de degré inférieur ou égal à $n-1$ qui vérifie :
   $P(a_j) = b_j$ pour tout $j = 1, \dots, n$.
3. Trouver le polynôme P de degré inférieur ou égal à 3 tel que
   $P(0) = 1$, $P(1) = 0$, $P(-1) = -2$ et $P(2) = 4$.

Exercice 2. (**)

Soit $a, b \in \mathbb{R}$, déterminer la dérivée d'ordre n de la fonction polynomiale f définie par $f(x) = (x-a)^n(x-b)^n$.
En étudiant le cas $a = b$, trouver la valeur de $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$.

Exercice 3. (*)

Soit P un polynôme différent de X.
Montrer que $P(X) - X$ divise $P(P(X)) - X$.

Exercice 4. (**)

Trouver un polynôme de degré 5 tel que $P(X) + 10$ soit divisible par $(X+2)^3$
et $P(X) - 10$ soit divisible par $(X-2)^3$.

Exercice 5. (*)

1. Décomposer en éléments simples la fraction rationnelle $\dfrac{1}{X(X+1)(X+2)}$.
2. En déduire la limite de la suite (S_n) suivante : $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)}$.

Exercice 6. (**)

Montrer que l'ensemble des polynômes unitaires, de degré $n > 0$, à coefficients entiers et à racines complexes dans $\mathbb{U}$ est fini.
