

COLLE 12 = ÉTUDES LOCALES ET ASYMPTOTIQUES

Connaître son cours :

1. Calculer le développement limité à l'ordre 5 en 0 de la fonction composée $(x \mapsto e^{\cos(x)})$.
2. Calculer successivement les développements en 0 à l'ordre 5 de $(x \mapsto \frac{1}{\cos(x)})$ et de la fonction sin.
Retrouver le développements en 0 à l'ordre 5 de la fonction tan.
3. Calculer le développement limité suivant : $(x \mapsto \arccos(x))$ à l'ordre 5 en 0

Exercices :**Exercice 1. (*)**

1. Donner le développement limité à l'ordre 1 au point $x = 0$ de $\arctan x$.
2. En déduire la limite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{\pi} \arctan n \right)^n.$$

Exercice 2. ()**

Soit $f \in \mathcal{C}^1([0, 1], \mathbb{R})$, montrer que :

$$\int_0^1 t^n f(t) dt \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \frac{f(1)}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

Exercice 3. (*)

Déterminer

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2 - 2 \cos x}{x^2} \right)^{1/x^2}.$$

Exercice 4. (*)**

On note $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} = \sqrt{u_n + n^2}$. Montrer que

$$u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} n - \frac{1}{2} - \frac{3}{8n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

Exercice 5. (*)

Déterminer

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}} - \sqrt{x} \right).$$

Exercice 6. ()**

Montrer que :

$$\int_0^1 \frac{e^{-xt}}{1+t^2} dt \underset{x \rightarrow +\infty}{=} \frac{1}{x} + O\left(\frac{1}{x^2}\right)$$