TD 18 : Déterminants

Connaître son cours :

- Soit f une application 3-linéaire entre deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels E et F. Montrer que f est alternée si, et seulement si, f est antisymétrique.
- Montrer que l'espace vectoriel des formes $n-$linéaires alternées sur un espace vectoriel de dimension n est de dimension 1. Faire la preuve pour $n=2$ et $n=3$ pour comprendre si besoin. Soit $\beta=(e_1,\dots,e_n)$ une base de E, donner la définition déterminant en base β
- Soit β une base d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension n. Monter que n vecteurs $x_1,\dots,x_n\in E$ forme une base de E si, et seulement si, $\det_\beta(x_1,\dots,x_n)\neq 0$.
- Soit $u\in\mathcal{L}(E)$ et $\beta=(e_1,\dots,e_n)$ est une base de E. Montrer que le scalaire $\det_\beta(u(e_1),\dots,u(e_n))$ ne dépend pas de la base β
- Montrer que le déterminant d'une matrice triangulaire supérieure $M=(m_{i,j})_{i,j}$ est le produit des éléments diagonaux.
- Montrer que pour toute matrice $M\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\det(M^T)=\det(M)$.
- Soit $A\in\mathcal{G}l_n(\mathbb{R}), b\in\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $AX=B$ un système linéaire de Cramer. Donner les coordonnées de l'unique solution X à l'aide de la formule de Cramer.

Déterminants d'un endomorphisme ou d'une matrice :

Exercice 1. (*)

Calculer les déterminants des matrices suivantes :

$$\begin{pmatrix}1&0&6\\3&4&15\\5&6&21\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}1&0&2\\3&4&5\\5&6&7\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}0&1&1&0\\1&0&0&1\\1&1&0&1\\1&1&1&0\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}1&2&1&2\\1&3&1&3\\2&1&0&6\\1&1&1&7\end{pmatrix}$$

Exercice 2. (*)

Calculer les déterminants suivant :

$$\begin{vmatrix}a_1&a_2&\cdots&a_n\\a_1&a_1&\ddots&\vdots\\\vdots&\ddots&\ddots&a_2\\a_1&\cdots&a_1&a_1\end{vmatrix}\qquad\begin{vmatrix}a+b&a&\cdots&a\\a&a+b&\ddots&\vdots\\\vdots&\ddots&\ddots&a\\a&\cdots&a&a+b\end{vmatrix}$$

Exercice 3. (*)

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et $f\in\mathcal{L}(E)$ tel que $f^2=-Id_E$. Que dire de la dimension de E ?

Exercice 4. (*)

Soit $u\in\mathcal{L}(\mathbb{R}_n[X])$. Calculer $\det(u)$ dans chacun des cas suivants :

1. $u(P)=P+P'$;
2. $u(P)=P(X+1)-P(X)$;
3. $u(P)=XP'+P(1)$.

Exercice 5. (*)

Soit $a,b,c\in\mathbb{R}$, montrer que

$$4(b+c)(c+a)(a+b)=\begin{vmatrix}-2a&a+b&a+c\\b+a&-2b&b+c\\c+a&c+b&-2c\end{vmatrix}$$

Exercice 6. (*)

Soient $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ une matrice carrée et
$B = (b_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ où $b_{i,j} = (-1)^{i+j}a_{i,j}$.
Calculer $\det(B)$ en fonction de $\det(A)$.

Exercice 7. (**)

Soit a un réel. On note Δ_n le déterminant suivant :

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a & 0 & \cdots & 0 & n-1 \\ 0 & a & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & 2 \\ 0 & \cdots & 0 & a & 1 \\ n-1 & \cdots & 2 & 1 & a \end{vmatrix}$$

1. Calculer Δ_n en fonction de Δ_{n-1}.
2. Démontrer que : $\forall n \geq 2 \quad \Delta_n = a^n - a^{n-2}\sum_{i=1}^{n-1} i^2$.

Exercice 8. (**)

Soit $A \in \mathcal{A}_{2n}(\mathbb{R})$ et $J \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont égaux à 1. Démontrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\det(A + xJ) = \det(A)$.

Exercice 9. (**)

Soient $n \geq 1$, $p \geq 0$. Calculer le déterminant suivant :

$$\begin{vmatrix} \binom{n}{0} & \binom{n}{1} & \dots & \binom{n}{p} \\ \binom{n+1}{0} & \binom{n+1}{1} & \dots & \binom{n+1}{p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \binom{n+p}{0} & \binom{n+p}{1} & \dots & \binom{n+p}{p} \end{vmatrix}.$$

Exercice 10. (***) *(Matrice compagnon)*

Soient $a_0, \dots, a_{n-1}$, n nombres complexes et

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & 0 & -a_0 \\ 1 & \ddots & & \vdots & -a_1 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}$$

Donner l'expression du polynôme $P = \det(XI_n - A)$.

Exercice 11. (**)

On définit par blocs une matrice A par
$A = \begin{pmatrix} B & D \\ 0 & C \end{pmatrix}$ où A, B et C sont des matrices carrées de formats respectifs n, p et q avec $p + q = n$.
Montrer que $\det(A) = \det(B) \times \det(C)$.

Exercice 12. (**)

Calculer $\det(a_i + b_j)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$
où $a_1, \dots, a_n$, $b_1, \dots, b_n$ sont $2n$ complexes donnés.

Exercice 13. (**)

Soit A une matrice carrée complexe de format $n \geqslant 2$ telle que pour tout élément M de $M_n(\mathbb{C})$, on ait

$$\det(A + M) = \det A + \det M$$

Montrer que $A = 0$.

Exercice 14. (**)

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que M soit inversible et que M^{-1} soit dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$.

Exercice 15. (***)

Soit $A, B \in M_n(\mathbb{R})$. On suppose que A et B sont semblables sur $\mathbb{C}$, ie qu'il existe $P \in Gl_n(\mathbb{C})$ tel que $A = PBP^{-1}$.
Montrer que A et B sont semblables sur $\mathbb{R}$.

Exercice 16. (***)

(*Un déterminant par blocs* ***sous conditions*** *!!*)

Soient A, B, C et D quatre matrices carrées de format n. Montrer que si C et D commutent et si D est inversible alors $\det\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \det(AD - BC)$.
Montrer que le résultat persiste si D n'est pas inversible.

Exercice 17. (**)/(***)

1. Calculer $\det(\mathrm{com}A)$ en fonction de $\det A$
2. Étudier le rang de $\mathrm{com}A$ en fonction du rang de A.
3. Résoudre, pour $n \geq 3$, l'équation $\mathrm{com}A = A$.

Exercice 18. (**)

Soit A une matrice carrée d'ordre n à coefficients complexes. Montrer :
$\exists \alpha > 0,\ \forall \varepsilon \in \mathbb{R},\ 0 < |\varepsilon| < \alpha,\ A + \varepsilon I_n$ est inversible.

Exercice 19. (***) (*Matrice de* VANDERMONDE)

Soient $x_0, \ldots, x_{n-1}$ n nombres complexes.

1. Calculer $\mathrm{Van}(x_0, ..., x_{n-1}) = \det(x_{j-1}^{i-1})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$.
2. Résoudre le système $MX = U$ où
   $M = (j^{i-1})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in M_n(\mathbb{R})$,
   $U = (\delta_{i,1})_{1 \leqslant i \leqslant n} \in M_{n,1}(\mathbb{R})$
   et X est un vecteur colonne inconnu.

Exercice 20. (**)

Soient $(z_0, \ldots, z_n)$ des nombres complexes deux à deux distincts. Montrer que la famille

$$\left((X - z_0)^n, (X - z_1)^n, \ldots, (X - z_n)^n\right)$$

est une base de $\mathbb{C}_n[X]$.

Exercice 21. (***)

Soit E un espace vectoriel de dimension n dont une base est $\mathcal{B}$. Soient $(x_1, \ldots, x_n) \in E$ et $f \in L(E)$. Démontrer que

$$\sum_{k=1}^{n} \det_{\mathcal{B}}(x_1, \ldots, f(x_k), \ldots, x_n) = \mathrm{Tr}(f) \det_{\mathcal{B}}(x_1, \ldots, x_n)$$
