

Logique, ensembles, raisonnements

1 Logique

Exercice 1

Compléter les pointillés par le connecteur logique qui s'impose : \Leftrightarrow , \Leftarrow , \Rightarrow .

- $x \in \mathbb{R} \quad x^2 = 4 \dots\dots x = 2$;
- $z \in \mathbb{C} \quad z = \bar{z} \dots\dots z \in \mathbb{R}$;
- $x \in \mathbb{R} \quad x = \pi \dots\dots e^{2ix} = 1$.

[Correction ▼](#) [Vidéo ■](#)

[000108]

Exercice 2

Soient les quatre assertions suivantes :

- (a) $\exists x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in \mathbb{R} \quad x + y > 0$; (b) $\forall x \in \mathbb{R} \quad \exists y \in \mathbb{R} \quad x + y > 0$;
 (c) $\forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in \mathbb{R} \quad x + y > 0$; (d) $\exists x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in \mathbb{R} \quad y^2 > x$.

- Les assertions a, b, c, d sont-elles vraies ou fausses ?
- Donner leur négation.

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#) [Vidéo ■](#)

[000106]

Exercice 3

Dans \mathbb{R}^2 , on définit les ensembles $F_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, y \leq 0\}$ et $F_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, xy \geq 1, x \geq 0\}$. On note $M_1 M_2$ la distance usuelle entre deux points M_1 et M_2 de \mathbb{R}^2 . Évaluer les propositions suivantes :

- $\forall \varepsilon \in]0, +\infty[\quad \exists M_1 \in F_1 \quad \exists M_2 \in F_2 \quad M_1 M_2 < \varepsilon$
- $\exists M_1 \in F_1 \quad \exists M_2 \in F_2 \quad \forall \varepsilon \in]0, +\infty[\quad M_1 M_2 < \varepsilon$
- $\exists \varepsilon \in]0, +\infty[\quad \forall M_1 \in F_1 \quad \forall M_2 \in F_2 \quad M_1 M_2 < \varepsilon$
- $\forall M_1 \in F_1 \quad \forall M_2 \in F_2 \quad \exists \varepsilon \in]0, +\infty[\quad M_1 M_2 < \varepsilon$

Quand elles sont fausses, donner leur négation.

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#) [Vidéo ■](#)

[000109]

Exercice 4

Nier la proposition : “tous les habitants de la rue du Havre qui ont les yeux bleus gagneront au loto et prendront leur retraite avant 50 ans”.

[Correction ▼](#) [Vidéo ■](#)

[000110]

Exercice 5

Nier les assertions suivantes :

- tout triangle rectangle possède un angle droit ;
- dans toutes les écuries, tous les chevaux sont noirs ;
- pour tout entier x , il existe un entier y tel que, pour tout entier z , la relation $z < x$ implique la relation $z < x + 1$;

$$4. \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \alpha > 0 \quad (|x - 7/5| < \alpha \Rightarrow |5x - 7| < \varepsilon).$$

[Correction ▼](#) [Vidéo ■](#)

[000112]

Exercice 6

Soient f, g deux fonctions de \mathbb{R} dans \mathbb{R} . Traduire en termes de quantificateurs les expressions suivantes :

1. f est majorée ;
2. f est bornée ;
3. f est paire ;
4. f est impaire ;
5. f ne s'annule jamais ;
6. f est périodique ;
7. f est croissante ;
8. f est strictement décroissante ;
9. f n'est pas la fonction nulle ;
10. f n'a jamais les mêmes valeurs en deux points distincts ;
11. f atteint toutes les valeurs de \mathbb{N} ;
12. f est inférieure à g ;
13. f n'est pas inférieure à g .

[Correction ▼](#) [Vidéo ■](#)

[000120]

Exercice 7

Soit f une application de \mathbb{R} dans \mathbb{R} . Nier, de la manière la plus précise possible, les énoncés qui suivent :

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$ $f(x) \leq 1$.
2. L'application f est croissante.
3. L'application f est croissante et positive.
4. Il existe $x \in \mathbb{R}^+$ tel que $f(x) \leq 0$.
5. Il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que quel que soit $y \in \mathbb{R}$, si $x < y$ alors $f(x) > f(y)$.

On ne demande pas de démontrer quoi que ce soit, juste d'écrire le contraire d'un énoncé.

[Correction ▼](#) [Vidéo ■](#)

[000107]

Exercice 8

Montrer que

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \text{ tel que } (n \geq N \Rightarrow 2 - \varepsilon < \frac{2n+1}{n+2} < 2 + \varepsilon).$$

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#) [Vidéo ■](#)

[000119]

2 Ensembles

Exercice 9

Soit A, B deux ensembles, montrer $\mathcal{C}(A \cup B) = \mathcal{C}A \cap \mathcal{C}B$ et $\mathcal{C}(A \cap B) = \mathcal{C}A \cup \mathcal{C}B$.

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#) [Vidéo ■](#)

[000123]

Exercice 10

Montrer par contraposition les assertions suivantes, E étant un ensemble :

1. $\forall A, B \in \mathcal{P}(E) \quad (A \cap B = A \cup B) \Rightarrow A = B,$

2. $\forall A, B, C \in \mathcal{P}(E) \quad (A \cap B = A \cap C \text{ et } A \cup B = A \cup C) \Rightarrow B = C.$

[Correction ▼](#) [Vidéo ■](#)

[000122]

Exercice 11

Soient E et F deux ensembles, $f : E \rightarrow F$. Démontrer que :

$$\forall A, B \in \mathcal{P}(E) \quad (A \subset B) \Rightarrow (f(A) \subset f(B)),$$

$$\forall A, B \in \mathcal{P}(E) \quad f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B),$$

$$\forall A, B \in \mathcal{P}(E) \quad f(A \cup B) = f(A) \cup f(B),$$

$$\forall A, B \in \mathcal{P}(F) \quad f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B),$$

$$\forall A \in \mathcal{P}(F) \quad f^{-1}(F \setminus A) = E \setminus f^{-1}(A).$$

[Correction ▼](#) [Vidéo ■](#)

[000124]

Exercice 12

Montrez que chacun des ensembles suivants est un intervalle que vous calculerez.

$$I = \bigcap_{n=1}^{+\infty} \left[-\frac{1}{n}, 2 + \frac{1}{n} \right] \quad \text{et} \quad J = \bigcup_{n=2}^{+\infty} \left[1 + \frac{1}{n}, n \right]$$

[Correction ▼](#) [Vidéo ■](#)

[000137]

3 Absurde et contraposée

Exercice 13

Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'applications de l'ensemble \mathbb{N} dans lui-même. On définit une application f de \mathbb{N} dans \mathbb{N} en posant $f(n) = f_n(n) + 1$. Démontrer qu'il n'existe aucun $p \in \mathbb{N}$ tel que $f = f_p$.

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#) [Vidéo ■](#)

[000150]

Exercice 14

1. Soit p_1, p_2, \dots, p_r, r nombres premiers. Montrer que l'entier $N = p_1 p_2 \dots p_r + 1$ n'est divisible par aucun des entiers p_i .
2. Utiliser la question précédente pour montrer par l'absurde qu'il existe une infinité de nombres premiers.

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#) [Vidéo ■](#)

[000151]

4 Récurrence

Exercice 15

Montrer :

$$1. \sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

$$2. \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

[Correction ▼](#) [Vidéo ■](#)

[000153]

Exercice 16

Soit X un ensemble. Pour $f \in \mathcal{F}(X, X)$, on définit $f^0 = id$ et par récurrence pour $n \in \mathbb{N}$ $f^{n+1} = f^n \circ f$.

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N} \quad f^{n+1} = f \circ f^n$.
2. Montrer que si f est bijective alors $\forall n \in \mathbb{N} \quad (f^{-1})^n = (f^n)^{-1}$.

Exercice 17

Soit la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $x_0 = 4$ et $x_{n+1} = \frac{2x_n^2 - 3}{x_n + 2}$.

1. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad x_n > 3$.
2. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad x_{n+1} - 3 > \frac{3}{2}(x_n - 3)$.
3. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad x_n \geq \left(\frac{3}{2}\right)^n + 3$.
4. La suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est-elle convergente ?

Indication pour l'exercice 2 ▲

Attention : la négation d'une inégalité stricte est une inégalité large (et réciproquement).

Indication pour l'exercice 3 ▲

Faire un dessin de F_1 et de F_2 . Essayer de voir si la difficulté pour réaliser les assertions vient de ε "petit" (c'est-à-dire proche de 0) ou de ε "grand" (quand il tend vers $+\infty$).

Indication pour l'exercice 8 ▲

En fait, on a toujours : $\frac{2n+1}{n+2} \leq 2$. Puis chercher une condition sur n pour que l'inégalité

$$2 - \varepsilon < \frac{2n+1}{n+2}$$

soit vraie.

Indication pour l'exercice 9 ▲

Il est plus facile de raisonner en prenant un élément $x \in E$. Par exemple, soit F, G des sous-ensembles de E . Montrer que $F \subset G$ revient à montrer que pour tout $x \in F$ alors $x \in G$. Et montrer $F = G$ est équivalent à $x \in F$ si et seulement si $x \in G$, et ce pour tout x de E . Remarque : pour montrer $F = G$ on peut aussi montrer $F \subset G$ puis $G \subset F$.

Enfin, se rappeler que $x \in \complement F$ si et seulement si $x \notin F$.

Indication pour l'exercice 13 ▲

Par l'absurde, supposer qu'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $f = f_p$. Puis pour un tel p , évaluer f et f_p en une valeur bien choisie.

Indication pour l'exercice 14 ▲

Pour la première question vous pouvez raisonner par contraposition ou par l'absurde.

Indication pour l'exercice 16 ▲

Pour les deux questions, travailler par récurrence.

Indication pour l'exercice 17 ▲

1. Récurrence : calculer $x_{n+1} - 3$.
 2. Calculer $x_{n+1} - 3 - \frac{3}{2}(x_n - 3)$.
 3. Récurrence.
-

Correction de l'exercice 1 ▲

1. \Leftarrow
 2. \Leftrightarrow
 3. \Rightarrow
-

Correction de l'exercice 2 ▲

1. (a) est fausse. Car sa négation qui est $\forall x \in \mathbb{R} \exists y \in \mathbb{R} \quad x + y \leq 0$ est vraie. Étant donné $x \in \mathbb{R}$ il existe toujours un $y \in \mathbb{R}$ tel que $x + y \leq 0$, par exemple on peut prendre $y = -(x + 1)$ et alors $x + y = x - x - 1 = -1 \leq 0$.
 2. (b) est vraie, pour un x donné, on peut prendre (par exemple) $y = -x + 1$ et alors $x + y = 1 > 0$. La négation de (b) est $\exists x \in \mathbb{R} \forall y \in \mathbb{R} \quad x + y \leq 0$.
 3. (c) : $\forall x \in \mathbb{R} \forall y \in \mathbb{R} \quad x + y > 0$ est fausse, par exemple $x = -1, y = 0$. La négation est $\exists x \in \mathbb{R} \exists y \in \mathbb{R} \quad x + y \leq 0$.
 4. (d) est vraie, on peut prendre $x = -1$. La négation est : $\forall x \in \mathbb{R} \exists y \in \mathbb{R} \quad y^2 \leq x$.
-

Correction de l'exercice 3 ▲

1. Cette proposition est vraie. En effet soit $\varepsilon > 0$, définissons $M_1 = (\frac{2}{\varepsilon}, 0) \in F_1$ et $M_2 = (\frac{2}{\varepsilon}, \frac{\varepsilon}{2}) \in F_2$, alors $M_1 M_2 = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$. Ceci étant vrai quelque soit $\varepsilon > 0$ la proposition est donc démontrée.
2. Soit deux points fixés M_1, M_2 vérifiant cette proposition, la distance $d = M_1 M_2$ est aussi petite que l'on veut donc elle est nulle, donc $M_1 = M_2$; or les ensembles F_1 et F_2 sont disjoints. Donc la proposition est fausse. La négation de cette proposition est :

$$\forall M_1 \in F_1 \quad \forall M_2 \in F_2 \quad \exists \varepsilon \in]0, +\infty[\quad M_1 M_2 \geq \varepsilon$$

et cela exprime le fait que les ensembles F_1 et F_2 sont disjoints.

3. Celle ci est également fausse, en effet supposons qu'elle soit vraie, soit alors ε correspondant à cette proposition. Soit $M_1 = (\varepsilon + 2, 0)$ et $M_2 = (1, 1)$, on a $M_1 M_2 > \varepsilon + 1$ ce qui est absurde. La négation est :

$$\forall \varepsilon \in]0, +\infty[\quad \exists M_1 \in F_1 \quad \exists M_2 \in F_2 \quad M_1 M_2 \geq \varepsilon$$

C'est-à-dire que l'on peut trouver deux points aussi éloignés l'un de l'autre que l'on veut.

4. Cette proposition est vraie, il suffit de choisir $\varepsilon = M_1 M_2 + 1$. Elle signifie que la distance entre deux points donnés est un nombre fini !
-

Correction de l'exercice 4 ▲

"Il existe un habitant de la rue du Havre qui a les yeux bleus, qui ne gagnera pas au loto ou qui prendra sa retraite après 50 ans."

Correction de l'exercice 5 ▲

1. "Il existe un triangle rectangle qui n'a pas d'angle droit." Bien sûr cette dernière phrase est fausse !
2. "Il existe une écurie dans laquelle il y a (au moins) un cheval dont la couleur n'est pas noire."
3. Sachant que la proposition en langage mathématique s'écrit

$$\forall x \in \mathbb{Z} \quad \exists y \in \mathbb{Z} \quad \forall z \in \mathbb{Z} \quad (z < x \Rightarrow z < x + 1),$$

la négation est

$$\exists x \in \mathbb{Z} \quad \forall y \in \mathbb{Z} \quad \exists z \in \mathbb{Z} \quad (z < x \text{ et } z \geq x + 1).$$

$$4. \exists \varepsilon > 0 \quad \forall \alpha > 0 \quad (|x - 7/5| < \alpha \text{ et } |5x - 7| \geq \varepsilon).$$

Correction de l'exercice 6 ▲

1. $\exists M \in \mathbb{R} \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) \leq M;$
2. $\exists M \in \mathbb{R} \quad \exists m \in \mathbb{R} \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad m \leq f(x) \leq M;$
3. $\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = f(-x);$
4. $\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = -f(-x);$
5. $\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) \neq 0;$
6. $\exists a \in \mathbb{R}^* \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad f(x+a) = f(x);$
7. $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad (x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y));$
8. $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad (x < y \Rightarrow f(x) > f(y));$
9. $\exists x \in \mathbb{R} \quad f(x) \neq 0;$
10. $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad (x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y));$
11. $\forall n \in \mathbb{N} \quad \exists x \in \mathbb{R} \quad f(x) = n;$
12. $\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) \leq g(x);$
13. $\exists x \in \mathbb{R} \quad f(x) > g(x).$

Correction de l'exercice 7 ▲

Dans ce corrigé, nous donnons une justification, ce qui n'était pas demandé.

1. Cette assertion se décompose de la manière suivante : (Pour tout $x \in \mathbb{R}$) $(f(x) \leq 1)$. La négation de "(Pour tout $x \in \mathbb{R}$)" est "Il existe $x \in \mathbb{R}$ " et la négation de " $(f(x) \leq 1)$ " est $f(x) > 1$. Donc la négation de l'assertion complète est : "Il existe $x \in \mathbb{R}, f(x) > 1$ ".
2. Rappelons comment se traduit l'assertion "L'application f est croissante" : "pour tout couple de réels (x_1, x_2) , si $x_1 \leq x_2$ alors $f(x_1) \leq f(x_2)$ ". Cela se décompose en : "(pour tout couple de réels x_1 et x_2) $(x_1 \leq x_2 \text{ implique } f(x_1) \leq f(x_2))$ ". La négation de la première partie est : "(il existe un couple de réels (x_1, x_2))" et la négation de la deuxième partie est : " $(x_1 \leq x_2 \text{ et } f(x_1) > f(x_2))$ ". Donc la négation de l'assertion complète est : "Il existe $x_1 \in \mathbb{R}$ et $x_2 \in \mathbb{R}$ tels que $x_1 \leq x_2$ et $f(x_1) > f(x_2)$ ".
3. La négation est : "l'application f n'est pas croissante ou n'est pas positive". On a déjà traduit "l'application f n'est pas croissante", traduisons "l'application f n'est pas positive" : "il existe $x \in \mathbb{R}, f(x) < 0$ ". Donc la négation de l'assertion complète est : " Il existe $x_1 \in \mathbb{R}$ et $x_2 \in \mathbb{R}$ tels que $x_1 < x_2$ et $f(x_1) \geq f(x_2)$, ou il existe $x \in \mathbb{R}, f(x) < 0$ ".
4. Cette assertion se décompose de la manière suivante : "(Il existe $x \in \mathbb{R}^+$) $(f(x) \leq 0)$ ". La négation de la première partie est : "(pour tout $x \in \mathbb{R}^+$)", et celle de la seconde est : " $(f(x) > 0)$ ". Donc la négation de l'assertion complète est : "Pour tout $x \in \mathbb{R}^+, f(x) > 0$ ".
5. Cette assertion se décompose de la manière suivante : " $(\exists x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R})(x < y \Rightarrow f(x) > f(y))$ ". La négation de la première partie est " $(\forall x \in \mathbb{R})$ ", celle de la seconde est " $(\exists y \in \mathbb{R})$ ", et celle de la troisième est " $(x < y \text{ et } f(x) \leq f(y))$ ". Donc la négation de l'assertion complète est : " $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}$ tels que $x < y$ et $f(x) \leq f(y)$ ".

Correction de l'exercice 8 ▲

Remarquons d'abord que pour $n \in \mathbb{N}, \frac{2n+1}{n+2} \leq 2$ car $2n+1 \leq 2(n+2)$. Étant donné $\varepsilon > 0$, nous avons donc

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \frac{2n+1}{n+2} < 2 + \varepsilon$$

Maintenant nous cherchons une condition sur n pour que l'inégalité

$$2 - \varepsilon < \frac{2n+1}{n+2}$$

soit vraie.

$$\begin{aligned}2 - \varepsilon < \frac{2n+1}{n+2} &\Leftrightarrow (2 - \varepsilon)(n+2) < 2n+1 \\&\Leftrightarrow 3 < \varepsilon(n+2) \\&\Leftrightarrow n > \frac{3}{\varepsilon} - 2\end{aligned}$$

Ici ε nous est donné, nous prenons un $N \in \mathbb{N}$ tel que $N > \frac{3}{\varepsilon} - 2$, alors pour tout $n \geq N$ nous avons $n > \frac{3}{\varepsilon} - 2$ et par conséquent : $2 - \varepsilon < \frac{2n+1}{n+2}$. Conclusion : étant donné $\varepsilon > 0$, nous avons trouvé un $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$ on ait $2 - \varepsilon < \frac{2n+1}{n+2}$ et $\frac{2n+1}{n+2} < 2 + \varepsilon$.

En fait nous venons de prouver que la suite de terme $(2n+1)/(n+2)$ tend vers 2 quand n tend vers $+\infty$.

Correction de l'exercice 9 ▲

$$\begin{aligned}x \in \complement(A \cup B) &\Leftrightarrow x \notin A \cup B \\&\Leftrightarrow x \notin A \text{ et } x \notin B \\&\Leftrightarrow x \in \complement A \text{ et } x \in \complement B \\&\Leftrightarrow x \in \complement A \cap \complement B.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}x \in \complement(A \cap B) &\Leftrightarrow x \notin A \cap B \\&\Leftrightarrow x \notin A \text{ ou } x \notin B \\&\Leftrightarrow x \in \complement A \text{ ou } x \in \complement B \\&\Leftrightarrow x \in \complement A \cup \complement B.\end{aligned}$$

Correction de l'exercice 10 ▲

Nous allons démontrer l'assertion 1. de deux manières différentes.

1. Tout d'abord de façon "directe". Nous supposons que A et B sont tels que $A \cap B = A \cup B$. Nous devons montrer que $A = B$.

Pour cela étant donné $x \in A$ montrons qu'il est aussi dans B . Comme $x \in A$ alors $x \in A \cup B$ donc $x \in A \cap B$ (car $A \cup B = A \cap B$). Ainsi $x \in B$.

Maintenant nous prenons $x \in B$ et le même raisonnement implique $x \in A$. Donc tout élément de A est dans B et tout élément de B est dans A . Cela veut dire $A = B$.

2. Ensuite, comme demandé, nous le montrons par contraposition. Nous supposons que $A \neq B$ et non devons montrer que $A \cap B \neq A \cup B$.

Si $A \neq B$ cela veut dire qu'il existe un élément $x \in A \setminus B$ ou alors un élément $x \in B \setminus A$. Quitte à échanger A et B , nous supposons qu'il existe $x \in A \setminus B$. Alors $x \in A \cup B$ mais $x \notin A \cap B$. Donc $A \cap B \neq A \cup B$.

Correction de l'exercice 11 ▲

Montrons quelques assertions.

$$f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B).$$

Si $y \in f(A \cap B)$, il existe $x \in A \cap B$ tel que $y = f(x)$, or $x \in A$ donc $y = f(x) \in f(A)$ et de même $x \in B$ donc $y \in f(B)$. D'où $y \in f(A) \cap f(B)$. Tout élément de $f(A \cap B)$ est un élément de $f(A) \cap f(B)$ donc $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$.

Remarque : l'inclusion réciproque est fautive. Exercice : trouver un contre-exemple.

$$f^{-1}(F \setminus A) = E \setminus f^{-1}(A).$$

$$\begin{aligned} x \in f^{-1}(F \setminus A) &\Leftrightarrow f(x) \in F \setminus A \\ &\Leftrightarrow f(x) \notin A \\ &\Leftrightarrow x \notin f^{-1}(A) \quad \text{car } f^{-1}(A) = \{x \in E \mid f(x) \in A\} \\ &\Leftrightarrow x \in E \setminus f^{-1}(A) \end{aligned}$$

Correction de l'exercice 12 ▲

$$I = [0, 2] \text{ et } J =]1, +\infty[.$$

Correction de l'exercice 13 ▲

Par l'absurde, supposons qu'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $f = f_p$. Deux applications sont égales si et seulement si elles prennent les mêmes valeurs.

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad f(n) = f_p(n).$$

En particulier pour $n = p$, $f(p) = f_p(p)$. D'autre part la définition de f nous donne $f(p) = f_p(p) + 1$. Nous obtenons une contradiction car $f(p)$ ne peut prendre deux valeurs distinctes. En conclusion, quelque soit $p \in \mathbb{N}$, $f \neq f_p$.

Correction de l'exercice 14 ▲

1. Montrons en fait la contraposée.

S'il existe i tel que p_i divise $N = p_1 p_2 \dots p_r + 1$ (i est fixé) alors il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $N = k p_i$ donc

$$p_i(k - p_1 p_2 \dots p_{i-1} p_{i+1} \dots p_r) = 1$$

soit $p_i q = 1$ (avec $q = k - p_1 p_2 \dots p_{i-1} p_{i+1} \dots p_r$ un nombre entier). Donc $p_i \in \mathbb{Z}$ et $1/p_i = q \in \mathbb{Z}$, alors p_i vaut 1 ou -1 . Et donc p_i n'est pas un nombre premier.

Conclusion : par contraposition il est vrai que N n'est divisible par aucun des p_i

2. Raisonnons par l'absurde : s'il n'existe qu'un nombre fini r de nombres premiers p_1, \dots, p_r alors $N = p_1 p_2 \dots p_r + 1$ est un nombre premier car divisible par aucun nombre premier autre que lui-même (c'est le 1.).

Mais N est strictement supérieur à tous les p_i . Conclusion on a construit un nombre premier N différent des p_i , il y a donc au moins $r + 1$ nombres premiers, ce qui est absurde.

Correction de l'exercice 15 ▲

Rédigeons la deuxième égalité. Soit \mathcal{A}_n , $n \in \mathbb{N}^*$ l'assertion suivante :

$$(\mathcal{A}_n) \quad \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

— \mathcal{A}_0 est vraie ($1 = 1$).

— Étant donné $n \in \mathbb{N}^*$ supposons que \mathcal{A}_n soit vraie. Alors

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+1} k^2 &= \sum_{k=1}^n k^2 + (n+1)^2 \\ &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 \\ &= \frac{n(n+1)(2n+1) + 6(n+1)^2}{6} \\ &= \frac{(n+1)(n(2n+1) + 6(n+1))}{6} \\ &= \frac{(n+1)(n+2)(2(n+1)+1)}{6}\end{aligned}$$

Ce qui prouve \mathcal{A}_{n+1} .

— Par le principe de récurrence nous venons de montrer que \mathcal{A}_n est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Correction de l'exercice 16 ▲

1. Montrons la proposition demandée par récurrence : soit \mathcal{A}_n l'assertion $f^{n+1} = f \circ f^n$. Cette assertion est vraie pour $n = 0$. Pour $n \in \mathbb{N}$ supposons \mathcal{A}_n vraie. Alors

$$f^{n+2} = f^{n+1} \circ f = (f \circ f^n) \circ f = f \circ (f^n \circ f) = f \circ f^{n+1}.$$

Nous avons utilisé la définition de f^{n+2} , puis la proposition \mathcal{A}_n , puis l'associativité de la composition, puis la définition de f^{n+1} . Donc \mathcal{A}_{n+1} est vraie. Par le principe de récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad f^n \circ f = f \circ f^n.$$

2. On procède de même par récurrence : soit \mathcal{A}_n l'assertion $(f^{-1})^n = (f^n)^{-1}$. Cette assertion est vraie pour $n = 0$. Pour $n \in \mathbb{N}$ supposons \mathcal{A}_n vraie. Alors

$$(f^{-1})^{n+1} = (f^{-1})^n \circ f^{-1} = (f^n)^{-1} \circ f^{-1} = (f \circ f^n)^{-1} = (f^n \circ f)^{-1} = (f^{n+1})^{-1}.$$

Donc \mathcal{A}_{n+1} est vraie. Par le principe de récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad (f^{-1})^n = (f^n)^{-1}.$$

Correction de l'exercice 17 ▲

1. Montrons par récurrence $\forall n \in \mathbb{N} \quad x_n > 3$. Soit l'hypothèse de récurrence :

$$(\mathcal{H}_n) : \quad x_n > 3.$$

- La proposition \mathcal{H}_0 est vraie car $x_0 = 4 > 3$.
- Soit $n \geq 0$, supposons \mathcal{H}_n vraie et montrons que \mathcal{H}_{n+1} est alors vraie.

$$x_{n+1} - 3 = \frac{2x_n^2 - 3}{x_n + 2} - 3 = \frac{2x_n^2 - 3x_n - 9}{x_n + 2}.$$

Par hypothèse de récurrence $x_n > 3$, donc $x_n + 2 > 0$ et $2x_n^2 - 3x_n - 9 > 0$ (ceci par étude de la fonction $x \mapsto 2x^2 - 3x - 9$ pour $x > 3$). Donc $x_{n+1} - 3$ et \mathcal{H}_{n+1} est vraie.

- Nous avons montré

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \mathcal{H}_n \Rightarrow \mathcal{H}_{n+1}$$

et comme \mathcal{H}_0 est vraie alors \mathcal{H}_n est vraie quelque soit n . Ce qui termine la démonstration.

2. Montrons que $x_{n+1} - 3 - \frac{3}{2}(x_n - 3)$ est positif.

$$x_{n+1} - 3 - \frac{3}{2}(x_n - 3) = \frac{2x_n^2 - 3}{x_n + 2} - \frac{3}{2}(x_n - 3) = \frac{1}{2} \frac{x_n^2 - 3x_n}{x_n + 2}$$

Ce dernier terme est positif car $x_n > 3$.

3. Montrons par récurrence $\forall n \in \mathbb{N} \ x_n > \left(\frac{3}{2}\right)^n + 3$. Soit notre nouvelle l'hypothèse de récurrence :

$$(\mathcal{H}_n) \quad x_n > \left(\frac{3}{2}\right)^n + 3.$$

- La proposition \mathcal{H}_0 est vraie.
- Soit $n \geq 0$, supposons que \mathcal{H}_n vraie et montrons que \mathcal{H}_{n+1} est vérifiée.
D'après la question précédente $x_{n+1} - 3 > \frac{3}{2}(x_n - 3)$ et par hypothèse de récurrence $x_n > \left(\frac{3}{2}\right)^n + 3$;
en réunissant ces deux inégalités nous avons $x_{n+1} - 3 > \frac{3}{2}\left(\left(\frac{3}{2}\right)^n\right) = \left(\frac{3}{2}\right)^{n+1}$.
- Nous concluons en résumant la situation :
 \mathcal{H}_0 est vraie, et $\mathcal{H}_n \Rightarrow \mathcal{H}_{n+1}$ quelque soit n . Donc \mathcal{H}_n est toujours vraie.

4. La suite (x_n) tend vers $+\infty$ et n'est donc pas convergente.
