COLLE 11 = POLYNÔMES ET FRACTIONS RATIONNELLES

Connaître son cours :

1. Soit $P \in \mathbb{K}_n[X]$ et $a \in \mathbb{K}$. Montrer que $P(X) = \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(a)}{k!}(X-a)^k$. En déduire qu'une racine a de P est de multiplicité r si, et seulement si, $P^{(k)}(a) = 0$ pour tout $k \leq r-1$ et $P^{(r)}(a) \neq 0$.
2. Rappeler le Théorème de d'*Alembert-Gauss* et montrer qu'un polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$ non constant est surjectif de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$. Est-ce vrai de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$?
3. Soit $P, Q \in \mathbb{K}[X]$, rappeler la définition du produit de P et Q le polynôme noté $P.Q$.
   Montrer que $\deg(P.Q) = \deg(P) + \deg(Q)$.

Exercices :

Exercice 1. (*)

Soit $a, b \in \mathbb{R}$, déterminer la dérivée d'ordre n de la fonction polynomiale f définie par $f(x) = (x-a)^n(x-b)^n$. En étudiant le cas $a = b$, trouver la valeur de $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$.

Exercice 2. (**)

Trouver un polynôme de degré 5 tel que $P(X) + 10$ soit divisible par $(X+2)^3$
et $P(X) - 10$ soit divisible par $(X-2)^3$.

Exercice 3. (**)

Factoriser la fraction rationnelle dont la décomposition en éléments simples est :

$$\sum_{\omega \in \mathbb{U}_n} \frac{\omega^3}{X-\omega}$$

Exercice 4. (***)

Trouver tous les polynômes $P \in \mathbb{C}[X]$ tels que $P(\mathbb{U}) \subset \mathbb{U}$.

Exercice 5. (*)

1. Décomposer en éléments simples la fraction rationnelle $\frac{1}{X(X+1)(X-1)}$.
2. En déduire la limite de la suite $(S_n)_{n \geq 2}$ suivante : $S_n = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k-1)}$.

Exercice 6. (**)

Montrer que l'ensemble des polynômes unitaires, de degré $n > 0$, à coefficients entiers et à racines complexes dans $\mathbb{U}$ est fini.
