III - Déterminant d'une matrice symplectique

Soit M dans $\mathscr{S}_{p_{2n}}$ que l'on décompose sous forme de matrice blocs :

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \qquad (\bigstar)$$

avec $A, B, C, D \in \mathscr{M}_n$. Dans toute cette partie, les matrices A, B, C, D sont les matrices de cette décomposition.

On suppose dans les questions 13 et 14 que D est inversible.

13. Montrer qu'il existe quatre matrices Q, U, V, W de $\mathscr{M}_n$ telles que :

$$\begin{pmatrix} I_n & Q \\ 0_n & I_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} U & 0_n \\ V & W \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

14. En utilisant la question 8, vérifier que BD^{-1} est symétrique, puis que :

$$\det(M) = \det\left(A^\top D - C^\top B\right) = 1$$

Soient $P, Q \in \mathscr{M}_n$ telles que $P^\top Q$ soit symétrique et Q non inversible. On suppose qu'il existe deux réels différents s_1, s_2 et deux vecteurs V_1, V_2 non nuls dans $\mathscr{E}_n$ tels que :

$$(Q - s_1 P)\,V_1 = (Q - s_2 P)\,V_2 = 0$$

15. Montrer que le produit scalaire $\left(QV_1 | QV_2\right)$ est nul.

On suppose dorénavant D non inversible.

16. Montrer que $\ker(B) \cap \ker(D) = \{0\}$.

Soit m un entier, $1 \leqslant m \leqslant n$. Soient $s_1, \ldots, s_m$ des réels non nuls et deux à deux distincts et $V_1, \ldots, V_m$ des vecteurs non nuls de $\mathscr{E}_n$ tels que :

$$\left(D - s_i B\right) V_i = 0 \ \text{ pour } \ i = 1, \ldots, m$$

17. Montrer que pour tout $i \in \{1, \ldots, m\}$, $DV_i \neq 0$ et que la famille $(DV_i, i = 1, \ldots, m)$ forme un système libre de $\mathscr{E}_n$.
18. En déduire qu'il existe un réel α tel que $D - \alpha B$ soit inversible.
19. Montrer alors que toute matrice de $\mathscr{S}_{p_{2n}}$ est de déterminant égal à 1.