# COLLE 16 = DÉTERMINANTS ET DÉNOMBREMENT

## Déterminants :

**Exercice 1.**
Calculer en mettant en évidence la factorisation le déterminant suivant :

$$D = \begin{vmatrix} 1 & \cos a & \cos 2a \\ 1 & \cos b & \cos 2b \\ 1 & \cos c & \cos 2c \end{vmatrix}$$

**Exercice 2.**
Calculer les déterminants des matrices suivantes :

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 10 & 0 & -5 & 15 \\ -2 & 7 & 3 & 0 \\ 8 & 14 & 0 & 2 \\ 0 & -21 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

**Exercice 3.**
Soit $a$ un réel. On note $\Delta_n$ le déterminant suivant :

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a & 0 & \cdots & 0 & n-1 \\ 0 & a & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & 2 \\ 0 & \cdots & 0 & a & 1 \\ n-1 & \cdots & 2 & 1 & a \end{vmatrix}$$

1. Calculer $\Delta_n$ en fonction de $\Delta_{n-1}$.
2. Démontrer que : $\forall n \geq 2 \quad \Delta_n = a^n - a^{n-2} \displaystyle\sum_{i=1}^{n-1} i^2$.

**Exercice 4.**

Soit $(a_0, ..., a_{n-1}) \in \mathbb{C}^n$, $x \in \mathbb{C}$. Calculer

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} x & 0 & & a_0 \\ -1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ & \ddots & x & a_{n-2} \\ 0 & & -1 & x + a_{n-1} \end{vmatrix}$$

**Exercice 5.**
Calculer les déterminants des matrices suivantes :

$$\begin{pmatrix} a & a & b & 0 \\ a & a & 0 & b \\ c & 0 & a & a \\ 0 & c & a & a \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 0 \\ a & 0 & a & 0 & 3 \\ b & a & 0 & a & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 & a \end{pmatrix}$$

**Exercice 6.** ***Déterminant de Vandermonde***
Montrer que

$$\begin{vmatrix} 1 & t_1 & t_1^2 & \dots & t_1^{n-1} \\ 1 & t_2 & t_2^2 & \dots & t_2^{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & t_n & t_n^2 & \dots & t_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (t_j - t_i)$$

## Dénombrement - Combinatoire :

**Exercice 7.**
Dénombrer les anagrammes des mots suivants :

$$MATHS, \quad RIRE, \quad ANANAS$$

**Exercice 8.**
Un damier est un plateau carré contenant 100 cases.

1. Combien y a-t-il de manières de placer 50 pièces blanches et 50 pièces noires sur ce damier ?
2. Deux pièces sont dîtes côte à côte si l'une des arêtes de la case où elles se situent respectivement est en commun. Combien y a-t-il de manière de placer 50 pièces noires telles q'au moins deux pièces noires soient côte à côte.
3. Soient $n_1, n_2, n_3, n_4 \in \mathbb{N}$ tels que $n_1 + n_2 + n_3 + n_4 = 100$. On dispose de $n_1$ pièces noires, $n_2$ pièces blanches, $n_3$ pièces bleus et $n_4$ pièces rouges. Combien y a-t-il de manières différentes différentes de placer toutes ces pièces sur un damier.

**Exercice 9.**
Lors d'une loterie de Noël, 300 billets sont vendus aux enfants de l'école ; 4 billets sont gagnants. J'achète 10 billets, quelle est la probabilité pour que je gagne au moins un lot ?

**Exercice 10.**
La probabilité pour une population d'être atteinte d'une maladie $A$ est $p$ donné ; dans cette même population, un individu peut être atteint par une maladie $B$ avec une probabilité $q$ donnée aussi ; on suppose que les maladies sont indépendantes : quelle est la probabilité d'être atteint par l'une et l'autre de ces maladies ? Quelle est la probabilité d'être atteint par l'une ou l'autre de ces maladies ?

**Exercice 11.**
Dans un jeu de 52 cartes, on prend une carte au hasard : les événements «tirer un roi» et «tirer un pique» sont-ils indépendants ? quelle est la probabilité de «tirer un roi ou un pique» ?