Exercice 1 - Somme de deux lois de Poisson

Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant des lois de Poisson de paramètre respectif λ et μ. Démontrer, à l'aide des fonctions génératrices, que $Z = X + Y$, suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda + \mu$.

Exercice 2 - Sur la variance

Soit X une variable aléatoire admettant un moment d'ordre 2. Démontrer que $E\big((X-a)^2\big)$ est minimal pour $a = E(X)$.

Exercice 3 - Variable aléatoire quasi-certaine

On dit qu'une variable aléatoire réelle X est quasi-certaine lorsqu'il existe un réel a tel que $P(X = a) = 1$. Soit X une variable aléatoire réelle telle que $X(\Omega)$ soit fini ou dénombrable. Démontrer que X est quasi-certaine si et seulement si $V(X) = 0$.

Exercice 4 - Lancer de dé

On jette 3600 fois un dé équilibré. Minorer la probabilité que le nombre d'apparitions du numéro 1 soit compris entre 480 et 720.

Exercice 5 - Pièces défectueuses

Une usine fabrique des pièces dont une proportion inconnue p est défectueuse, et on souhaite trouver une valeur approchée de p. On effectue un prélèvement de n pièces. On suppose que le prélèvement se fait sur une population très grande, et donc qu'il peut s'apparenter à une suite de n tirages indépendants avec remise. On note X_n la variable aléatoire égale au nombre de pièces défectueuses et on souhaite quantifier le fait que X_n/n approche p.

1. Quelle est la loi de X_n? Sa moyenne? Sa variance?
2. Démontrer que, pour tout $\varepsilon > 0$, $P\left(\left|\frac{X_n}{n} - p\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{1}{4n\varepsilon^2}$.
3. En déduire une condition sur n pour que X_n/n soit une valeur approchée de p à 10^{-2} près avec une probabilité supérieure ou égale à 95%.

Exercice 6 - Une variante de l'inégalité de Markov

Soit X une variable aléatoire réelle finie à valeurs dans $\mathbb{R}_+$, $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+^*$ une fonction croissante. Démontrer que

$$P(X \geq a) \leq \frac{E(f(X))}{f(a)}.$$

Cette feuille d'exercices a été conçue à l'aide du site https://www.bibmath.net