Devoir Maison n°0

À rendre par groupe de 2 ou 3 pour le 21/09/2022 – durée : 4 heures

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les étudiants sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs. Les réponses doivent toutes être soigneusement justifiées. Les calculatrices sont interdites.

Barème indicatif :

- Exercice 1 .... 10 points
- Exercice 2 .... 10 points
- Exercice 3 .... 12 points
- Exercice 4 .... 10 points
- Exercice 5 .... 10 points
- Exercice 6 .... 12 points
- Exercice 7 .... 12 points
- Exercice 8 .... 12 points
- Exercice 9 .... 12 points

Exercice 1.

1. Écrire aussi simplement que possible les expressions suivantes.

   (a) (*) $A = \left(2+\sqrt{5}\right)^2$ (b) (*) $B = \left(\sqrt{2\sqrt{3}}\right)^4$ (c) (**)$C = \sqrt{11+6\sqrt{2}}$

2. (**) Exprimer la quantité suivante sans racine carrée au dénominateur.

$$D = \frac{1}{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}}$$

Exercice 2.
(**) Montrer que $\sqrt{5}$ est un irrationnel. Généraliser.

Exercice 3.
Etudier la convergence des suites définies par :

1. (**) $u_n = \ln\left(\frac{n^n}{2^n}\right)$
2. (**) $v_n = \sqrt{n+\cos(n)} - \sqrt{n}$
3. (***) $w_n = \frac{\ln(1+e^{-n})}{e^{-n}}$ (on pourra penser à un taux d'accroissement)
4. (***) $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $t_n = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\left\lfloor \frac{k^2}{n}\right\rfloor$

   La partie entière d'un réel x, notée $\lfloor x \rfloor$, désigne le plus grand entier relatif plus petit ou égal à x.

Exercice 4.
On pose, pour x réel :

$$B(x) = \sqrt{x+2\sqrt{x-1}} + \sqrt{x-2\sqrt{x-1}}$$

1. (*) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation :
$$x - 2\sqrt{x-1} \geq 0$$
2. (*) Donner l'ensemble de définition de B.
3. (*) Démontrer que pour tout $x \in [1,+\infty[$, on a :
$$(B(x))^2 = 2x + 2|x-2|$$
4. (**) En déduire, sans le symbole valeur absolue et selon les valeurs de x, la valeur de $B(x)$.

Exercice 5.
(***) Pour $x \in [0,1[$, calculer

$$F(x) = \int_0^x \ln\left(\frac{1+t}{1-t}\right) dt.$$

Montrer que $\lim_{x\to 1} F(x) = 2\ln(2)$

Exercice 6.
Pour $n \in \mathbb{N}$, f_n désigne la fonction de $]0, \pi]$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$\forall x \in]0, \pi], \quad f_n(x) = \frac{\sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right) x\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}$$

1. (**) En utilisant la définition de la dérivée, montrer que $\lim\limits_{u \to 0} \dfrac{\sin(u)}{u} = 1$
2. (**) En déduire que la fonction f_n admet une limite que l'on précisera en 0.
   Ceci permet de prolonger f_n en une fonction continue sur $[0, \pi]$, encore notée f_n et de poser
   $$I_n = \int_0^{\pi} f_n(t)dt$$
   .
3. (***) Si $n \in \mathbb{N}$, calculer $I_{n+1} - I_n$, puis I_n.

Exercice 7.

1. (*) On lance un dé non pipé. On répète 4 fois l'opération, les lancers successifs étant supposés indépendants. Quelle est la probabilité pour que l'on obtienne au moins un 6 ?
2. (*) On considère deux dés non pipés. Donner la probabilité qu'en 24 lancers, les dés amènent au moins un double 6. Est-elle supérieure à $\frac{1}{2}$?
3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère n dés non pipés. On les jette $4 \times 6^{n-1}$ fois.
   (a) (***) Déterminer la probabilité p_n d'obtenir au moins une fois n six.
   (b) (***) Déterminer la limite de la suite $(p_n)_{n \geq 1}$.

Exercice 8.

1. (**) Trouver les nombres complexes non nuls z tels que $Z = z + \dfrac{1}{z}$ soit réel.
2. (a) (*) Soient z et z' deux nombres complexes. Montrer :
   $$|z + z'|^2 + |z - z'|^2 = 2\left(|z|^2 + |z'|^2\right).$$
   (b) (*) Donner une interprétation géométrique de cette égalité en considérant un parallélogramme, les longueurs de ses côtés, les longueurs de ses diagonales.
   (c) (*) Soient A, B, C trois points non alignés du plan, I le milieu de $[BC]$. Déduire de (b) une expression de AI^2 en fonction de AB^2 , BC^2 , CA^2.

Exercice 9.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$, E un ensemble de cardinal n

1. Soit B un sous-ensemble de E de cardinal r avec r un entier entre 0 et n. Montrer que le nombre de sous-ensembles A de E tel que $A \subseteq B$ vaut 2^r
2. En déduire que le nombre de couples (A, B) de sous-ensembles de E tels que $A \subset B$ vaut $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^k$
3. Calculer cette somme et conclure.