COLLE 25 = VARIABLES ALÉATOIRES ET MOMENTS

Connaître son cours :

1. Soit X_1 et X_2 deux variables indépendantes à valeurs dans E_1 et E_2 , $f_1 : E_1 \to F_1$ et $f_2 : E_2 \to F_2$. Montrer que les variables $f_1(X_1)$ et $f_2(X_2)$ sont indépendantes.
2. Soit X une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ à valeurs dans E et $f : E \to F$. Donner et démontrer la formule de transfert.
3. Soit X une variable aléatoire réelle, rappeler la définition de l'espérance de X. Donner l'espérance d'une variable aléatoire suivant une loi binomiale de paramètre (n,p).

Exercices :

Exercice 1. (*)

On considère une variable aléatoire à valeurs dans $\{0,1,2\}$ telle que $\mathbb{E}(X) = 1$ et $\mathbb{V}(X) = \frac{1}{2}$. Déterminer la loi de X.

Exercice 2. (**)

Soit X et Y deux variables aléatoires discrètes indépendantes. On suppose que celles-ci suivent une même loi géométrique de paramètre p. Déterminer la loi de $Z = X + Y$ et donner l'espérance de Z après avoir justifié son existence.

Exercice 3. (*)

Soit X une variable aléatoire positive d'espérance nulle. Montrer que $\mathbb{P}(X = 0) = 1$.

Exercice 4. (**)

On lance cinq dés. Après ce premier lancer, les dés qui ont donné un «1» sont mis de côtés et les autres sont relancés. On procède ainsi jusqu'à l'obtention des cinq «1». On note T la variable aléatoire déterminant le nombre de lancers nécessaires.

1. Calculer $\mathrm{P}(T \leq n)$ pour $n \in \mathbb{N}^*$
2. En déduire que T admet une espérance et déterminer celle-ci.

Exercice 5. (*)

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $[\![0,n]\!]$ suivant une loi arithmétique $\mathbb{P}(X = k) = ak$. Déterminer a pour que X soit bien une variable aléatoire. En déduire $\mathbb{E}(X)$.

Exercice 6. (**)

Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant des lois géométriques de paramètres $p, q \in]0;1[$. Calculer $\mathrm{P}(X < Y)$
