ÉLÉMENTS DE CORRIGÉ - Maths HEC (S) 2017

Partie I. Quelques propriétés des polynômes de Bernstein

1.a) On a : $B_{2,0}(X) = 1 - 2X + X^2$, $B_{2,1}(X) = 2X - 2X^2$, $B_{2,2}(X) = X^2 \Longrightarrow K_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.

b) La matrice K_2 est triangulaire inférieure, de valeurs propres 1 et 2, donc inversible (0 n'est pas valeur propre). Par suite, la famille $\big(B_{2,0}, B_{2,1}, B_{2,2}\big)$ est une base de $\mathbf{R}_2[X]$.

c) Les calculs donnent : $T_2(A_0) = A_0$, $T_2(A_1) = A_1$ et $T_2(A_2) = 1/2\, A_1 + 1/2\, A_2 \Longrightarrow H_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$.

La matrice H_2 est triangulaire supérieure de valeurs propres 1 et $1/2$. Les sous-espaces propres sont :

Vect $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$ pour la valeur propre 1 et Vect $\left(\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ pour la valeur propre $1/2$.

2.a) $\forall x \in \mathbf{R}$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \lambda_k\, B_{n,k}(x) = \lambda_0(1-x)^n + n\lambda_1 x(1-x)^{n-1} + \cdots + \lambda_n x^n = 0 \Longrightarrow$ pour $x = 0$, $\lambda_0 = 0$. Par suite, $\forall x \in \mathbf{R}^*$, $n\lambda_1 x(1-x)^{n-1} + \cdots + \lambda_n x^n = 0$. On simplifie par x, d'où, $n\lambda_1(1-x)^{n-1} + \cdots + \lambda_n x^{n-1} = 0$ et pour $x = 0$, on trouve $\lambda_1 = 0$. On réitère le procédé pour aboutir à $\lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0$.
La famille $\big(B_{n,0}, B_{n,1}, \ldots, B_{n,n}\big)$ est une famille libre et elle est formée de $(n+1) = \dim \mathbf{R}_n[X]$ éléments de $\mathbf{R}_n[X]$ (car $\deg(B_{n,k}) = n$) : c'est donc une base de $\mathbf{R}_n[X]$.

b) T_n est clairement une application de $\mathbf{R}_n[X]$ dans $\mathbf{R}_n[X]$. Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbf{R}^2$ et $(P, Q) \in \big(\mathbf{R}_n[X]\big)^2$.

On a : $T_n(\alpha P + \beta Q) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} (\alpha P + \beta Q)\Big(\frac{k}{n}\Big) B_{n,k} = \alpha \sum_{k=0}^{n} P\Big(\frac{k}{n}\Big) B_{n,k} + \beta \sum_{k=0}^{n} Q\Big(\frac{k}{n}\Big) B_{n,k} = \alpha T_n(P) + \beta T_n(Q)$.

Par suite, T_n est linéaire et c'est un endomorphisme de $\mathbf{R}_n[X]$.

Soit $P \in \operatorname{Ker}(T_n) \iff \displaystyle\sum_{k=0}^{n} P\Big(\frac{k}{n}\Big) B_{n,k} = 0$. Puisque $\big(B_{n,0}, B_{n,1}, \ldots, B_{n,n}\big)$ est une famille libre, on a : $\forall k \in [\![0, n]\!]$, $P\Big(\dfrac{k}{n}\Big) = 0$. Donc, le polynôme P possède au moins $(n+1)$ racines et il est de degré inférieur ou égal à n. Il en résulte que $P = 0$, d'où $\operatorname{Ker}(T_n) = \{0\}$.
L'endomorphisme T_n est donc injectif et puisque $\mathbf{R}_n[X]$ est un $\mathbf{R}$-espace vectoriel de dimension finie, T_n est un automorphisme de $\mathbf{R}_n[X]$.

c) $T_n(A_0)(X) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} B_{n,k}(X) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} X^k (1-X)^{n-k}$. La formule du binôme $\Longrightarrow T_n(A_0)(X) = (X + 1 - X)^n$, soit, $T_n(A_0)(X) = 1$. Par suite, $T_n(A_0) = A_0$.

De même, $T_n(A_1)(X) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{k}{n} \times \binom{n}{k} X^k (1-X)^{n-k} = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} X^{k+1} (1-X)^{n-(k+1)}$, soit encore,

$T_n(A_1)(X) = X \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} X^k (1-X)^{(n-1)-k} = X(X + 1 - X)^{n-1} = X$, donc, $T_n(A_1) = A_1$.

d) $\deg T_n(A_0) = \deg(A_0) = 0$ et $\deg T_n(A_1) = \deg(A_1) = 1$. On suppose : $\forall j \in [\![0, k]\!]$, $\deg T_n(A_j) = j$.

Ainsi, on pose : $T_n(A_k) = \alpha_k X^k + \cdots\cdots$ avec $\alpha_k \neq 0$. La propriété admise permet d'écrire :

$\forall k \in [\![0, n-1]\!]$, $T_n(A_{k+1})(X) = \dfrac{n-k}{n} \alpha_k X^{k+1} + \cdots\cdots$, soit $T_n(A_{k+1})(X) = \alpha_{k+1} X^{k+1} + \cdots\cdots$

Or, $\forall k \in [\![0, n-1]\!]$, $\alpha_{k+1} = \dfrac{n-k}{n}\alpha_k \neq 0$. Par suite, $\deg T_n(A_{k+1}) = k+1$.
Finalement, le principe de récurrence $\Longrightarrow \forall k \in [\![0, n]\!]$, $\deg T_n(A_k) = k$.
e) $\forall k \in [\![0, n-1]\!]$, $\alpha_{k+1} = \dfrac{n-k}{n}\alpha_k \Longrightarrow$ de proche en proche : $\forall k \in [\![0, n]\!]$, $\alpha_k = \dfrac{n!}{n^k(n-k)!}\cdot$
La matrice H_n de T_n dans la base $\mathcal{C}_n$ est triangulaire supérieure et ses coefficients diagonaux sont $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n$ avec $\forall k \in [\![0, n]\!]$, $\alpha_k \neq 0$. Les valeurs propres de H_n sont $\alpha_0 = \alpha_1 = 1$ et $\alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n$ distinctes, soit $(n+1)$ valeurs propres dont n sont distinctes.
Or, les vecteurs A_0 et A_1 sont des vecteurs propres de T_n associés à la valeur propre 1 et la famille (A_0, A_1) est libre. Par suite, en notant $\forall k \in [\![0, n]\!]$, $\mathcal{E}_{\alpha_k}$, le sous-espace propre associé à la valeur propre α_k, on a $\dim \mathcal{E}_1 \geqslant 2$ et $\forall k \in [\![2, n]\!]$, $\dim \mathcal{E}_{\alpha_k} \geqslant 1$. Il en résulte que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \dim \mathcal{E}_{\alpha_k} \geqslant n+1$ et puisque cette somme ne peut excéder $n+1$, on a bien $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \dim \mathcal{E}_{\alpha_k} = n+1 = \dim \mathbf{R}_n[X]$. Par suite, T_n est diagonalisable.
3.a) Soit $\varepsilon > 0$. On a classiquement : $\mathbf{E}(\overline{Z}_n) = z$ et $\mathbf{V}(\overline{Z}_n) = \dfrac{z(1-z)}{n}\cdot$ L'inégalité de Bienaymé-Tchebychev permet d'écrire : $0 \leqslant \mathbf{P}([|\overline{Z}_n - z| > \varepsilon]) \leqslant \dfrac{z(1-z)}{n\,\varepsilon^2} \to 0$ quand n tend vers $+\infty$.
Il en résulte alors par définition que la suite de variables aléatoires $(\overline{Z}_n)_{n\geqslant 1}$ converge en probabilité vers z.
b) La fonction f est continue sur le segment $[0,1]$ donc $|f|$ également $\Longrightarrow |f|$ admet un minimum et un maximum M sur $[0,1]$ (cours).
c) Soit $\omega \in \Omega$.
Si $U_n(\omega) = 1$, alors $|f(\overline{Z}_n)(\omega) - f(z)| \leqslant |f(\overline{Z}_n)(\omega)| + |f(z)| \leqslant 2M = 2M \times 1 + \varepsilon \times 0$.
Si $U_n(\omega) = 0$, alors $\overline{U}_n = \Big[\big|f(\overline{Z}_n)(\omega) - f(z)\big| \leqslant \varepsilon\Big]$. On a bien : $\big|f(\overline{Z}_n)(\omega) - f(z)\big| \leqslant \varepsilon = 2M \times 0 + \varepsilon \times 1$.
Bilan : on a l'inégalité suivante entre variables aléatoires, $|f(\overline{Z}_n) - f(z)| \leqslant 2M \times \mathbf{1}_{U_n} + \varepsilon \times \mathbf{1}_{\overline{U}_n}$.
d) Par croissance de l'espérance (cours), on a : $0 \leqslant \mathbf{E}(|f(\overline{Z}_n) - f(z)|) \leqslant 2M\,\mathbf{P}(U_n) + \varepsilon\,\mathbf{P}(\overline{U}_n)$.
Or, puisque la suite $(\overline{Z}_n)_{n\geqslant 1}$ converge en probabilité vers z et que f est continue, on sait d'après le cours que la suite $\big(f(\overline{Z}_n)\big)_{n\geqslant 1}$ converge en probabilité vers $f(z)$. Donc, $\mathbf{P}(U_n) = \mathbf{P}\Big(\Big[\big|f(\overline{Z}_n) - f(z)\big| > \varepsilon\Big]\Big) \to 0$ quand n tend vers $+\infty$. Par suite, $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbf{P}(\overline{U}_n) = 1$ et par encadrement, on a, $0 \leqslant \mathbf{E}(|f(\overline{Z}_n) - f(z)|) \leqslant \varepsilon$, ce qui prouve que $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbf{E}(f(\overline{Z}_n)) = f(z)$. Enfin, il est clair, d'après le théorème du transfert, que l'on a $\mathbf{E}(f(\overline{Z}_n)) = f_n(z)$.
Bilan : $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbf{E}(f(\overline{Z}_n)) = \lim\limits_{n\to+\infty} f_n(z) = f(z)$.
4.a) `Z=grand(1,1,"bin",n,z)`.
b) C'est une approximation de $f(z)$. Deux niveaux d'approximation : convergence de $\mathbf{E}(f(\overline{Z}_n))$ vers $f(z)$ et méthode de Monte-Carlo $\mathbf{E}(f(\overline{Z}_n))$ vers son approximation stochastique avec $N = 1000$.

Partie II. Les polynômes d'interpolation de Lagrange

5.a) Φ est linéaire et injective car si $P \in \operatorname{Ker}\Phi$ avec $\deg(P) \leqslant n$, alors P admet $(n+1)$ racines distinctes, donc $P = 0$ et $\operatorname{Ker}\Phi = \{0\}$. Or, $\dim \mathbf{R}_n[X] = \dim \mathbf{R}^{n+1} = n+1$. Bilan : Φ est un isomorphisme de $\mathbf{R}_n[X]$ dans $\mathbf{R}^{n+1}$.
b) $\Phi(L_i) = e_i \Longleftrightarrow \Phi(L_i) = \big(L_i(x_0), L_i(x_1), \ldots, L_i(x_i), L_i(x_{i+1}), \ldots, L_i(x_n)\big) = (0, 0, \ldots 1, 0, \ldots, 0)$.
Donc, $\forall i \in [\![0, n]\!]$, L_i s'annule en n points $x_0, x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n$ et vaut 1 en x_i.
Par suite, il existe une constante réelle $c \in \mathbf{R}^*$ telle que, $\forall i \in [\![0, n]\!]$, $L_i(X) = c \displaystyle\prod_{\substack{k \in [\![0,n]\!] \\ k \neq i}} (X - x_k)$.

Or, $L_i(x_i) = 1 \Longrightarrow 1 = c \prod_{\substack{k \in [\![0,n]\!] \\ k \neq i}} (x_i - x_k) \Longrightarrow c = \Big(\prod_{\substack{k \in [\![0,n]\!] \\ k \neq i}} (x_i - x_k) \Big)^{-1} \Longrightarrow \forall i \in [\![0,n]\!],\ L_i(X) = \prod_{\substack{k \in [\![0,n]\!] \\ k \neq i}} \dfrac{X - x_k}{x_i - x_k}$.

c) Un polynôme réel non nul de degré inférieur ou égal à n ayant au plus n racines distinctes, on déduit que pour toute suite $x_0, x_1, \ldots, x_n$ de $(n+1)$ réels deux à deux distincts, l'application Ψ définit un produit scalaire sur $\mathbf{R}_n[X]$. Il est clair que pour tout $(i,j) \in [\![0,n]\!]^2$, $L_i(x_j) = \delta_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \Longrightarrow (L_0, L_1, \ldots, L_n)$ est une famille orthonormée dans $\mathbf{R}_n[X]$: c'est donc une famille libre (cours) et elle est constituée de $(n+1)$ éléments.
Bilan : $(L_0, L_1, \ldots, L_n)$ est une base orthonormée de $\mathbf{R}_n[X]$.

d) Puisque $(L_0, L_1, \ldots, L_n)$ est une base de $\mathbf{R}_n[X]$, tout polynôme $P \in \mathbf{R}_n[X]$ s'écrit de manière unique : $P = \sum_{i=0}^{n} \nu_i L_i$ avec $(\nu_0, \nu_1, \ldots, \nu_n) \in \mathbf{R}^{n+1}$. Or, $\forall j \in [\![0,n]\!]$, $P(x_j) = \sum_{i=0}^{n} \nu_i \delta_{i,j} = \nu_j$, d'où $P = \sum_{i=0}^{n} P(x_i) L_i$.

Ainsi, $\forall k \in [\![0,n]\!]$, $X^k = \sum_{i=0}^{n} x_i^k L_i$. Par suite, la matrice A est définie par : $A = \begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \ldots x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \ldots x_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \ldots x_n^n \end{pmatrix}$

e) D'après la question d), le polynôme $P_f = \sum_{i=0}^{n} f(x_i) L_i$ vérifie les conditions requises et il est unique.

6.a) Puisque $P_f \in \mathbf{R}_n[X]$ et $Q_f \in \mathbf{R}_{n+1}[X]$, on a $(Q_f - P_f) \in \mathbf{R}_{n+1}[X]$. Donc, $\deg(Q_f - P_f) \leqslant n+1$ et il est clair que $\forall i \in [\![0,n]\!]$, on a $(Q_f - P_f)(x_i) = 0$. Par suite, le polynôme w qui est de degré $(n+1)$ divise le polynôme $(Q_f - P_f)$, donc il existe un réel δ tel que pour tout $t \in [a,b]$, on a : $Q_f(t) - P_f(t) = \delta \times w(t)$.

b) On a : $\forall t \in [a,b]$, $h(t) = f(t) - Q_f(t) = f(t) - P_f(t) - \delta \times w(t)$.
Il est clair que $\forall i \in [\![0,n]\!]$, $h(x_i) = f(x_i) - P_f(x_i) - \delta \times w(x_i) = 0$ et que $h(\overline{x}) = f(\overline{x}) - Q_f(\overline{x}) = 0$.
Bilan : la fonction h s'annule en les $(n+2)$ points $\overline{x}, x_0, x_1, \ldots, x_n$.
On ordonne la famille $(x_0, x_1, \ldots, x_n, \overline{x})$ en $(y_0, y_1, \ldots, y_n, y_{n+1})$ de sorte que $a \leqslant y_0 < y_1 < \cdots < y_n < y_{n+1} \leqslant b$.
La fonction h est de classe C^{n+1} sur $[a,b]$ car f est de classe C^{n+1} sur $[a,b]$ et Q_f est de classe C^∞ sur $\mathbf{R}$.
On a : $h(y_0) = h(y_1) = \cdots = h(y_n) = h(y_{n+1}) = 0$. Donc, d'après le théorème de Rolle, il existe $c_0 \in]y_0, y_1[$, $c_1 \in]y_1, y_2[, \ldots, c_{n-1} \in]y_{n-1}, y_n[, c_n \in]y_n, y_{n+1}[$, c'est-à-dire au moins $(n+1)$ réels deux à deux distincts, tels que $h'(c_0) = 0, h'(c_1) = 0, \ldots, h'(c_{n-1}) = 0, h'(c_n) = 0$.
En réitérant ce raisonnement pour tout $k \in [\![0, n+1]\!]$, la fonction $h^{(k)}$ s'annule en $(n+2-k)$ réels de $]a,b[$ deux à deux distincts. En particulier, $h^{(n+1)}$ s'annule en au moins un réel $\theta \in]a,b[$.
Autrement dit, il existe un réel $\theta \in]a,b[$ tel que $h^{(n+1)}(\theta) = 0$.

c) On a $h^{(n+1)}(\theta) = f^{(n+1)}(\theta) - P_f^{(n+1)}(\theta) - \delta \times w^{(n+1)}(\theta)$. Or, $\deg(P_f) \leqslant n$ et $\deg(w) = n+1$ avec w unitaire.
Par suite, $P_f^{(n+1)} = 0$ et $w^{(n+1)} = (n+1)!$; il en résulte que $0 = f^{(n+1)}(\theta) - \delta(n+1)! \Longrightarrow \delta = \dfrac{f^{(n+1)}(\theta)}{(n+1)!}$.
Donc : $f(\overline{x}) - P_f(\overline{x}) = Q_f(\overline{x}) - P_f(\overline{x}) = \delta \times w(\overline{x})$. Ainsi, pour tout $\overline{x} \in [a,b]$ différent de $x_0, x_1, \ldots, x_n$, on a : $f(\overline{x}) - P_f(\overline{x}) = \dfrac{1}{(n+1)!} \times f^{(n+1)}(\theta) \times w(\overline{x})$.

Comme la fonction f est de classe C^{n+1} sur le segment $[a,b]$, la fonction $f^{(n+1)}$ est continue sur le segment $[a,b]$ et elle admet donc une borne supérieure. Il est clair que si $\overline{x}$ est égal à l'un des x_i, l'égalité précédente reste valide puisque dans ce cas, $f(\overline{x}) - P_f(\overline{x}) = 0$ et $w(\overline{x}) = 0$, donc n'importe quel réel $\theta \in]a,b[$ convient.
Par suite, $\forall t \in [a,b]$, on a : $\left|f(t) - P_f(t)\right| = \dfrac{1}{(n+1)!} \times |w(t)| \times \left|f^{(n+1)}(t)\right| \leqslant \dfrac{1}{(n+1)!} \times |w(t)| \times \sup_{[a,b]} \left|f^{(n+1)}\right|$.

Partie III. Exemple d'interpolation et phénomène de Runge

7.a) La fonction f_ρ est l'inverse d'une fonction strictement positive sur $\mathbf{R}$, donc le dénominateur de f_ρ ne s'annule pas $\Longrightarrow f_\rho$ est indéfiniment dérivable et de classe C^∞ sur $\mathbf{R}$.
b) La fonction f_ρ est paire sur $\mathbf{R}$ (et en particulier sur tout intervalle de la forme $]-\gamma,\gamma[$). Donc, $\forall x \in \mathbf{R}$,

$f_\rho(-x) = f_\rho(x) \Longrightarrow \forall n \in \mathbb{N}^*,\ f_\rho^{(n)}(x) = (-1)^n f_\rho^{(n)}(-x) \Longrightarrow \forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in \mathbf{R},\ |f_\rho^{(n)}(x)| = |f_\rho^{(n)}(-x)|$.

c) $\forall x \in \mathbf{R},\ f_\rho(x) = \dfrac{1}{x^2+\rho^2} = \dfrac{1}{\rho^2}\left(1+\dfrac{x^2}{\rho^2}\right)^{-1}$ et $\forall |x| < \rho,\ \left(1+\dfrac{x^2}{\rho^2}\right)^{-1} = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k\left(\frac{x^2}{\rho^2}\right)^k \Longrightarrow$

$$\forall |x| < \rho,\ f_\rho(x) = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{\rho^{2k+2}}\,x^{2k} = \sum_{k=0}^{+\infty}\beta_k\,x^{2k}.$$

8.a) $\forall x \in]-\rho,\rho[,\ v(x) = \dfrac{\rho^2}{\rho^2-x^2} = \dfrac{p}{\rho-x}+\dfrac{q}{\rho+x} = \dfrac{(p-q)x+(p+q)\rho}{\rho^2-x^2} \Longrightarrow p-q=0$ et $p+q=\rho \Longrightarrow p=q=\dfrac{\rho}{2}\cdot$

b) La fonction v est paire sur $]-\rho,\rho[\Longrightarrow \forall x \in]-\rho,\rho[,\ \ v^{(n)}(-x) = (-1)^n v^{(n)}(x)$, d'où : $|v^{(n)}(x)| = |v^{(n)}(-x)|$.

c) On suppose que $0 < x < \rho$. Le résultat admis permet d'écrire : $\forall x \in]0,\rho[,\ f_\rho^{(n)}(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{\rho^{2k+2}}\times A_{2k}^{(n)}(x)$.

Par suite, $\forall x \in]0,\rho[,\ |f_\rho^{(n)}(x)| \leqslant \dfrac{1}{\rho^2}\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{\rho^{2k}}\times|A_{2k}^{(n)}(x)| = \frac{1}{\rho^2}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{\rho^{2k}}\times A_{2k}^{(n)}(x)$ car $\forall x > 0,\ \forall k \in \mathbf{N}$, on a :

$A_{2k}^{(n)}(x) \geqslant 0$. D'où, $\forall x \in]0,\rho[,\ |f_\rho^{(n)}(x)| \leqslant \dfrac{1}{\rho^2}\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\frac{A_{2k}(x)}{\rho^{2k}}\right)^{(n)}$. Or, d'après le résultat admis, $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\frac{A_{2k}(x)}{\rho^{2k}}\right)^{(n)}$

est, la dérivée n-ième de la somme de la série géométrique convergente $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{A_{2k}(x)}{\rho^{2k}} = \sum_{k=0}^{+\infty}\left(\frac{x^2}{\rho^2}\right)^k$ (car $0 < x < \rho$).

Mais, $\forall x \in]0,\rho[,\ \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\frac{x^2}{\rho^2}\right)^k = \frac{\rho^2}{\rho^2-x^2} = v(x)$. Par suite, $\forall x \in]0,\rho[,\ |f_\rho^{(n)}(x)| \leqslant \dfrac{1}{\rho^2}\times v^{(n)}(x) = \dfrac{1}{\rho^2}\times|v^{(n)}(x)|$.

On peut remarquer en effet que $\forall x \in]0,\rho[,\ v^{(n)}(x) > 0$.

Si $-\rho < x < 0$, alors $0 < -x < \rho$. Donc, $\forall x \in]-\rho,0[,\ |f_\rho^{(n)}(-x)| \leqslant \dfrac{1}{\rho^2}\times|v^{(n)}(-x)|$.

Or, d'après les questions 7.b) et 8.b), on a $|f_\rho^{(n)}(x)| = |f_\rho^{(n)}(-x)|$ et $|v^{(n)}(x)| = |v^{(n)}(-x)|$. Par suite,
$\forall x \in]-\rho,0[,\ |f_\rho^{(n)}(x)| \leqslant \dfrac{1}{\rho^2}\times|v^{(n)}(x)|$. Bilan : $\forall x \in]-\rho,\rho[$, on a : $|f_\rho^{(n)}(x)| \leqslant \dfrac{1}{\rho^2}\times|v^{(n)}(x)|$.

d) $\forall x \in]-\rho,\rho[,\ \ v(x) = \dfrac{\rho}{2}\left(\dfrac{1}{\rho-x}+\dfrac{1}{\rho+x}\right)\cdot$ À l'aide d'une récurrence claire, la fonction $x \longmapsto \dfrac{1}{\rho-x}$ a pour dérivée n-ième $\dfrac{n!}{(\rho-x)^{n+1}}$ et la fonction $x \longmapsto \dfrac{1}{\rho+x}$ a pour dérivée n-ième $\dfrac{(-1)^n\,n!}{(\rho+x)^{n+1}}\cdot$ Par suite,

$\forall x \in]-\rho,\rho[,\ \ v^{(n)}(x) = \dfrac{n!\,\rho}{2}\left(\dfrac{1}{(\rho-x)^{n+1}}+\dfrac{(-1)^n}{(\rho+x)^{n+1}}\right) \leqslant \dfrac{n!\,\rho}{2}\left(\dfrac{1}{|\rho-x|^{n+1}}+\dfrac{1}{|\rho+x|^{n+1}}\right)\cdot$

Or, puisque $-\rho < -1 \leqslant x \leqslant 1 < \rho$, on a : $0 < \dfrac{1}{\rho+x} \leqslant \dfrac{1}{\rho-1}$ et $0 < \dfrac{1}{\rho-x} \leqslant \dfrac{1}{\rho-1}\cdot$

Donc, $|v^{(n)}(x)| \leqslant \dfrac{n!\,\rho}{2}\left(\dfrac{2}{(\rho-1)^{n+1}}\right) = \dfrac{n!\,\rho}{(\rho-1)^{n+1}}\cdot$

Il en résulte que pour tout $x \in [-1,1]$ et tout $\rho > 1$, on a : $|f_\rho^{(n)}(x)| \leqslant \dfrac{1}{\rho^2}\times\dfrac{n!\,\rho}{(\rho-1)^{n+1}} = \dfrac{n!}{\rho(\rho-1)^{n+1}}\cdot$

9. Il est clair que si x est égal à l'un des $x_{i,n}$, les inégalités des questions a) et b) sont vérifiées puisque dans ce cas, on $w_n(x) = 0$.

a) On a $|w_n(x)| = \prod_{i=0}^{n} |x - x_{i,n}|$ avec $x \in]\, x_{k,n}\,,\, x_{k+1,n}[$ et $\forall i \in [\![0,n]\!]$, $x_{i,n} = -1 + \dfrac{2\,i}{n}\cdot$

Pour $i \leqslant k$, on a : $x_{i,n} \leqslant x_{k,n} < x < x_{k+1,n} \Longrightarrow |x - x_{i,n}| = x - x_{i,n} \leqslant x_{k+1,n} - x_{i,n} = \dfrac{2(k-i+1)}{n}\cdot$

Pour $i \geqslant k+1$, on a : $x_{k,n} < x < x_{k+1,n} \leqslant x_{i,n} \Longrightarrow |x - x_{i,n}| = x_{i,n} - x \leqslant x_{i,n} - x_{k,n} = \dfrac{2(i-k)}{n}\cdot$

Par suite, $|w_n(x)| \leqslant \left(\dfrac{2}{n}\right)^{n+1} (k+1)\times k \times \ldots \times 1 \times 1 \times 2 \times \ldots \times (n-k) = \left(\dfrac{2}{n}\right)^{n+1} \times (k+1)!\,(n-k)!$.

On a : $\dfrac{n!}{(k+1)!(n-k)!} = \dfrac{1}{n+1}\dbinom{n+1}{k+1}$ et $\forall k \in [\![0, n-1]\!]$, $\dbinom{n+1}{k+1} \geqslant \dbinom{n+1}{1} = n+1$, d'où,

$\dfrac{n!}{(k+1)!(n-k)!} \geqslant 1 \Longleftrightarrow (k+1)!(n-k)! \leqslant n! \Longrightarrow |w_n(x)| \leqslant \left(\dfrac{2}{n}\right)^{n+1} \times n!\,.$

b) On a : $\left(\dfrac{2}{n}\right)^{n+1} \times n! \underset{n\to+\infty}{\sim} \left(\dfrac{2}{n}\right)^{n+1} n^n \mathrm{e}^{-n}\sqrt{2\pi n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \left(\dfrac{2}{\mathrm{e}}\right)^{n+1} \left(\dfrac{\mathrm{e}\sqrt{2\pi}}{\sqrt{n}}\right)$, avec $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{\mathrm{e}\sqrt{2\pi}}{\sqrt{n}}\right) = 0$.

Par suite, $0 \leqslant \dfrac{|w_n(x)|}{(2/\mathrm{e})^{n+1}} \leqslant \dfrac{(2/n)^{n+1} n!}{(2/\mathrm{e})^{n+1}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\mathrm{e}\sqrt{2\pi}}{\sqrt{n}} \to 0 \Longrightarrow \dfrac{|w_n(x)|}{(2/\mathrm{e})^{n+1}} \to 0$ quand n tend vers $+\infty$.

Bilan : il existe un entier n_0 tel que pour tout $n \geqslant n_0$, on a pour tout $x \in [-1,1]$: $|w_n(x)| \leqslant \left(\dfrac{2}{\mathrm{e}}\right)^{n+1}\cdot$

c) La question 6.d) $\Longrightarrow \forall x \in [-1,1]$, on a : $\left|f_\rho(x) - P_{f_\rho,n}(x)\right| \leqslant \dfrac{1}{(n+1)!} \times |w_n(x)| \times \sup\limits_{[-1,1]} \left|f_\rho^{(n+1)}\right|$.

La question 8.d) $\Longrightarrow \forall x \in [-1,1]$, on a : $\left|f_\rho^{(n+1)}(x)\right| \leqslant \dfrac{(n+1)!}{\rho(\rho-1)^{n+2}}$, avec $\rho > 1$.

Par suite, $\sup\limits_{[-1,1]} \left|f_\rho^{(n+1)}\right| \leqslant \dfrac{(n+1)!}{\rho(\rho-1)^{n+2}}\cdot$ Enfin, la question 9.b) précise que pour n suffisamment grand, on a :

$\forall x \in [-1,1]$, $|w_n(x)| \leqslant \left(\dfrac{2}{\mathrm{e}}\right)^{n+1}\cdot$ D'où, $\forall x \in [-1,1]$, on a : $\left|f_\rho(x) - P_{f_\rho,n}(x)\right| \leqslant \dfrac{1}{\rho(\rho-1)}\left(\dfrac{2/\mathrm{e}}{\rho-1}\right)^{n+1}\cdot$

Ainsi, $\left|f_\rho(x) - P_{f_\rho,n}(x)\right|$ tend vers 0 si $\dfrac{2/\mathrm{e}}{\rho-1} < 1$ (série géométrique), c'est-à-dire si $\rho > 1 + \dfrac{2}{\mathrm{e}}\cdot$

10.a) La fonction $t \longmapsto \ln(t^2+\rho^2)$ est paire sur $[-1,1] \Longrightarrow \displaystyle\int_{-1}^{1} \ln(t^2+\rho^2)\,\mathrm{d}t = 2\int_0^1 \ln(t^2+\rho^2)\,\mathrm{d}t$.

Une intégration par parties de l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \ln(t^2+\rho^2)\,\mathrm{d}t$ permet d'écrire :

$$\int_0^1 \ln(t^2+\rho^2)\,\mathrm{d}t = \left[t\ln(t^2+\rho^2)\right]_0^1 - 2\int_0^1 \frac{t^2}{t^2+\rho^2}\,\mathrm{d}t = \ln(1+\rho^2) - 2\left(\int_0^1 \mathrm{d}t - \rho^2\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{t^2+\rho^2}\right)\cdot$$

Le changement de variable $t = \rho\,u$ dans la dernière intégrale conduit à :

$$\int_0^1 \ln(t^2+\rho^2)\,\mathrm{d}t = \ln(1+\rho^2) - 2 + 2\,\rho\left[\mathrm{Arctan}(u)\right]_0^{\frac{1}{\rho}} = \ln(1+\rho^2) - 2 + 2\,\rho\,\mathrm{Arctan}\left(\frac{1}{\rho}\right)\cdot$$

Il en résulte que : $\forall \rho > 0$, $H(\rho) = \dfrac{1}{4}\displaystyle\int_{-1}^{1} \ln(t^2+\rho^2)\,\mathrm{d}t = \dfrac{1}{2}\int_0^1 \ln(t^2+\rho^2)\,\mathrm{d}t = \dfrac{1}{2}\ln(1+\rho^2) - 1 + \rho\,\mathrm{Arctan}\left(\dfrac{1}{\rho}\right)\cdot$

On sait que $\lim\limits_{\rho\to 0^+} \mathrm{Arctan}\left(\dfrac{1}{\rho}\right) = \dfrac{\pi}{2}$, d'où $\lim\limits_{\rho\to 0^+} \rho\,\mathrm{Arctan}\left(\dfrac{1}{\rho}\right) = 0$. Par suite, $\lim\limits_{\rho\to 0^+} H(\rho) = -1$.

On peut donc prolonger par continuité la fonction H en 0 en posant $H(0) = -1$.

b) La fonction H est continue sur $\mathbf{R}_+$ et dérivable sur $\mathbf{R}_+^*$ (somme et produit de fonctions dérivables sur $\mathbf{R}_+^*$).

On rappelle que $\forall y \in \mathbf{R}$, la dérivée de $\mathrm{Arctan}(y)$ est $\dfrac{1}{1+y^2}\cdot$ Par suite, $\forall x \in \mathbf{R}_+^*$, $H'(x) = \mathrm{Arctan}\left(\dfrac{1}{x}\right) > 0$.

Enfin, $\lim_{x\to+\infty} H(x) = +\infty$, car $\lim_{x\to+\infty} \ln(1+x^2) = +\infty$ et $x\operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right) > 0$. Donc, $\lim_{x\to+\infty} x\operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right) \geqslant 0$ (en fait, $\lim_{x\to+\infty} x\operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right) = 1$, mais ce résultat n'est pas indispensable pour pouvoir conclure).

Bilan : la fonction H réalise une bijection strictement croissante de $\mathbf{R}_+$ sur $[-1,+\infty]$.

c) On a : $(\ln 2 - 1) \in]-1, 0[\subset [-1,+\infty[$. Notons H^{-1} la bijection réciproque de H.

Le théorème de la bijection permet alors d'établir l'existence et l'unicité d'un réel ρ_0 tel que $H(\rho_0) = \ln 2 - 1$, c'est-à-dire $\rho_0 = H^{-1}(\ln 2 - 1)$. La stricte croissance de $H^{-1} \Longrightarrow H^{-1}(-1) < H^{-1}(\ln 2 - 1) < H^{-1}(0) = \rho_1 \Longleftrightarrow 0 < \rho_0 < \rho_1$. Or, $H(1) = \frac{1}{2}\ln 2 - 1 + \frac{\pi}{4} \simeq 0.131 > 0 \Longrightarrow \rho_1 < 1$. Bilan : $0 < \rho_0 < 1$.

d) On a : $\forall \rho > 0$, $w_n(i\rho) = \prod_{k=0}^{n}(i\rho - x_{k,n})$ qui est un produit de complexes non nuls puisque $\rho > 0$.

Par suite, $\forall k \in [\![0,n]\!]$, $|i\rho - x_{k,n}| > 0 \Longrightarrow |w_n(i\rho)|^2 = \prod_{k=0}^{n} |i\rho - x_{k,n}|^2 = \prod_{k=0}^{n}(\rho^2 + x_{k,n}^2) > 0$.

En prenant les logarithmes, on obtient : $\ln|w_n(i\rho)|^2 = 2\ln|w_n(i\rho)| = \sum_{k=0}^{n} \ln\left(\rho^2 + \left(-1 + \frac{2k}{n}\right)^2\right)$,

d'où, $\frac{1}{n}\ln|w_n(i\rho)| = \frac{1}{2}\times\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n}\ln\left(\rho^2 + \left(-1+\frac{2k}{n}\right)^2\right) = \frac{1}{2}\times\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\ln\left(\rho^2 + \left(-1+\frac{2k}{n}\right)^2\right) + \frac{1}{2}\frac{\ln(1+\rho^2)}{n}$.

Or, $\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\ln\left(\rho^2 + \left(-1+\frac{2k}{n}\right)^2\right)$ est une somme de Riemann associée à la fonction $t \longmapsto \ln\left(\rho^2 + (-1+2t)^2\right)$ continue sur $[0,1]$. Par suite, $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\ln\left(\rho^2 + \left(-1+\frac{2k}{n}\right)^2\right) = \int_0^1 \ln\left(\rho^2 + (-1+2t)^2\right) \mathrm{d}t$.

D'autre part, $\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(1+\rho^2)}{n} = 0$. Finalement, $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\ln|w_n(i\rho)| = \frac{1}{2}\int_0^1 \ln\left(\rho^2 + (-1+2t)^2\right)\mathrm{d}t$.

Le changement de variable $u = -1+2t \Longrightarrow \int_0^1 \ln\left(\rho^2 + (-1+2t)^2\right)\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_{-1}^1 \ln\left(\rho^2+u^2\right)\mathrm{d}u = \int_0^1 \ln(\rho^2+u^2)\,\mathrm{d}u$.

Finalement, $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\ln|w_n(i\rho)| = \frac{1}{2}\int_0^1 \ln(\rho^2+u^2)\,\mathrm{d}u = H(\rho)$ d'après la question 10.a).

11. On note G la fonction définie sur $\mathbf{R}_+$ par $G(x) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x^2}{4}\right) + x\operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right)$.

Le programme consiste à rechercher par une méthode dichotomique, une solution s_0 de l'équation $G(x) = 0$, c'est-à-dire que s_0 vérifie $G(s_0) = 0$. Puisque $G(x) = H(x) - H(\rho_0)$, on a $0 = G(s_0) = H(s_0) - H(\rho_0)$ et comme H est bijective, on a $s_0 = \rho_0$.

12.a) Puisque $\forall k \in [\![0,n]\!]$, $P_{f_\rho,n}(x_{k,n}) = f_\rho(x_{k,n}) = \frac{1}{\rho^2 + x_{k,n}^2}$, on a : $\forall k \in [\![0,n]\!]$, $S_n(x_{k,n}) = 0$.

Donc, S_n admet au moins $(n+1)$ racines distinctes $x_{0,n}, x_{1,n}, \ldots, x_{n,n}$ qui sont toutes les racines de w_n.

Bilan : le polynôme w_n divise le polynôme S_n qui est donc de degré supérieur ou égal à $(n+1)$.

b) $\forall i \in [\![0,n]\!]$, $L_i(X) = \prod_{\substack{k\in[\![0,n]\!]\\ k\neq i}} \frac{X - x_{k,n}}{x_{i,n} - x_{k,n}} \Longrightarrow L_i(-X) = \prod_{\substack{k\in[\![0,n]\!]\\ k\neq i}} \frac{-X - x_{k,n}}{x_{i,n} - x_{k,n}} = (-1)^n \prod_{\substack{k\in[\![0,n]\!]\\ k\neq i}} \frac{X + x_{k,n}}{x_{i,n} - x_{k,n}}$. Or,

$\forall j \in [\![0,n]\!]$, $x_{n-j,n} = -x_{j,n} \Longrightarrow L_i(-X) = (-1)^n \prod_{\substack{k\in[\![0,n]\!]\\ n-k\neq n-i}} \frac{X - x_{n-k,n}}{-x_{n-i,n} + x_{n-k,n}} = \prod_{\substack{k\in[\![0,n]\!]\\ n-k\neq n-i}} \frac{X - x_{n-k,n}}{x_{n-i,n} - x_{n-k,n}} = L_{n-i}(X)$.

D'autre part, $P_{f_\rho,n}(X) = \sum_{i=0}^{n} f_\rho(x_{i,n})L_i(X) \Longrightarrow P_{f_\rho,n}(-X) = \sum_{i=0}^{n} f_\rho(x_{i,n})L_i(-X) = \sum_{i=0}^{n} f_\rho(x_{i,n})L_{n-i}(X)$.

Puisque f_ρ est paire, on a $f_\rho(x_{i,n}) = f_\rho(-x_{i,n}) = f_\rho(x_{n-i,n}) \Longrightarrow P_{f_\rho,n}(-X) = \sum_{i=0}^{n} f_\rho(x_{n-i,n})L_{n-i}(X)$ et le changement d'indice $j = n-i \Longrightarrow P_{f_\rho,n}(-X) = \sum_{j=0}^{n} f_\rho(x_{j,n})L_j(X) = P_{f_\rho,n}(X)$.

Bilan : quelle que soit la parité de l'entier n, le polynôme $P_{f_\rho,n}$ est pair.

c) On a : $w_n(1-1/n) = w_n(y_n) = \prod_{k=0}^{n}\left(1-\frac{1}{n}+1-\frac{2k}{n}\right) = \prod_{k=0}^{n}\left(\frac{2n-2k-1}{n}\right) = \frac{1}{n^{n+1}}\prod_{k=0}^{n}(2n-2k-1)$.

Le changement d'indice $j = n-k \Longrightarrow |w_n(y_n)| = \frac{1}{n^{n+1}}\prod_{j=0}^{n}|2j-1| = \frac{1}{n^{n+1}} \times 1 \times 3 \times \ldots \times 2n-1$, soit encore

$|w_n(y_n)| = \frac{1}{n^{n+1}} \times \frac{(2n)!}{2 \times 4 \times \ldots \times 2n} = \frac{(2n)!}{2^n \times n^{n+1} \times n!}$.

La formule de Stirling $\Longrightarrow |w_n(y_n)| \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\sqrt{4\pi n}\,(2n)^{2n}\,\mathrm{e}^{-2n}}{2^n\,n^{n+1}\,\sqrt{2\pi n}\,\mathrm{e}^{-n}\,n^n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\sqrt{2}}{n}\left(\frac{2}{\mathrm{e}}\right)^n$ (donc, $\tau = \sqrt{2}$ et $\sigma = 2/\mathrm{e}$).

d) $\lim_{n\to+\infty}\big(\ln|w_n(i\rho)| - nH(\rho)\big) = 0 \Longleftrightarrow \lim_{n\to+\infty}\big(\ln|w_n(i\rho)| - \ln\big(\exp(nH(\rho)\big) = 0 \Longleftrightarrow \lim_{n\to+\infty}\left(\ln\frac{|w_n(i\rho)|}{\mathrm{e}^{nH(\rho)}}\right) = 0$

$\Longleftrightarrow \lim_{n\to+\infty}\frac{|w_n(i\rho)|}{\mathrm{e}^{nH(\rho)}} = 1 \Longleftrightarrow |w_n(i\rho)| \underset{n\to+\infty}{\sim} \mathrm{e}^{nH(\rho)}$.

Par suite, $\left|\frac{w_n(y_n)}{w_n(i\rho)}\right| \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\frac{\sqrt{2}}{n}(2/\mathrm{e})^n}{\mathrm{e}^{nH(\rho)}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\sqrt{2}}{n} \times \mathrm{e}^{-n(1-\ln 2+H(\rho))}$.

13.a) Posons $n = 2p+1$. On a : $w_n(i\rho) = \prod_{k=0}^{2p+1}(i\rho - x_{k,2p+1}) = \prod_{k=0}^{p}(i\rho - x_{k,2p+1}) \times \prod_{k=p+1}^{2p+1}(i\rho - x_{k,2p+1})$.

La relation $\forall k \in [\![0, 2p+1]\!]$, $x_{k,2p+1} = -x_{2p+1-k,2p+1}$ et le changement d'indice $j = 2p+1-k$ dans le second produit $\Longrightarrow w_n(i\rho) = \prod_{k=0}^{p}(-\rho^2 - x_{k,2p+1}^2) = (-1)^{p+1}\prod_{k=0}^{p}(\rho^2 + x_{k,2p+1}^2)$ qui est un réel non nul.

Puisque le polynôme $P_{f\rho,n}$ est pair (question 12.b), il est clair que le polynôme S_n est également pair.
Il en résulte que le degré de S_n est pair. D'autre part, $\deg(P_{f_\rho,n}) \leqslant n \Longrightarrow \deg(S_n) \leqslant n+2$, compte tenu de la définition de S_n. Or, $\deg(S_n) \geqslant n+1$ (question 12.a), donc le degré de S_n ne peut que valoir $(n+1)$ ou $(n+2)$.
Comme n est impair, $(n+1)$ est pair et donc, le degré de S_n est égal à $(n+1) = \deg(w_n)$.
Par suite, il existe une constante complexe c telle que : $S_n(X) = c \times w_n(X)$.
Or, $S_n(i\rho) = 1$, d'où, $1 = c \times w_n(i\rho)$ et comme $w_n(i\rho) \neq 0$, on a : $S_n(X) = \frac{w_n(X)}{w_n(i\rho)}$.

b) D'après ce qui précède, on a : $\forall x \in [-1,1]$, $S_n(x) = 1 - (x^2+\rho^2)P_{f_\rho,n}(x) = \frac{w_n(x)}{w_n(i\rho)}$. En multipliant les deux membres de la dernière égalité par $f_\rho(x)$ (qui n'est pas nul), on obtient : $f_\rho(x) - P_{f_\rho,n}(x) = f_\rho(x) \times \frac{w_n(x)}{w_n(i\rho)}$,

d'où : $\forall x \in [-1,1]$, $\left|f_\rho(x) - P_{f_\rho,n}(x)\right| = f_\rho(x) \times \left|\frac{w_n(x)}{w_n(i\rho)}\right|$.

14.a) Pour $y_n = 1-\frac{1}{n}$, on a : $\left|f_\rho(y_n) - P_{f_\rho,n}(y_n)\right| = f_\rho(y_n) \times \left|\frac{w_n(y_n)}{w_n(i\rho)}\right| \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{1+\rho^2} \times \frac{\sqrt{2}}{n} \times \mathrm{e}^{-n(1-\ln 2+H(\rho))}$.

Or, $0 < \rho < \rho_0 \Longrightarrow -1 < H(\rho) < \ln 2 - 1 < 0 \Longrightarrow 1 - \ln 2 + H(\rho) < 0 \Longrightarrow \lim_{n\to+\infty}\mathrm{e}^{-n(1-\ln 2+H(\rho))} = +\infty$

et par croissances comparées, $\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n} \times \mathrm{e}^{-n(1-\ln 2+H(\rho))} = +\infty$.

Bilan : pour $0 < \rho < \rho_0$, on a : $\lim_{n\to+\infty}\left|f_\rho(y_n) - P_{f_\rho,n}(y_n)\right| = +\infty$.

b) Conséquence de la question précédente ! ! !