# Chapitre 3 : Vecteurs du plan - Partie 1/2

## Translation et vecteur associé. Opérations sur les vecteurs. Coordonnées.

| **Contenus** | **Capacités attendues** |
|---|---|
| • Vecteur $\overrightarrow{AA'}$ associé à la translation qui transforme $A$ en $A'$.<br>• Direction, sens, norme, égalité de deux vecteurs et vecteur nul.<br>• Base orthonormée, coordonnées d'un vecteur.<br>• Expression de la norme d'un vecteur $\overrightarrow{AB}$.<br>• Sommes de vecteurs, lien avec les translations. | • Représenter graphiquement des vecteurs<br>• Construire géométriquement la sommes de deux vecteurs<br>• Représenter un vecteurs dont on connait les coordonnées<br>• Lire les coordonnées d'un vecteur<br>• Calculer la distance entre deux points<br>• Calculer les coordonnées du milieu d'un segment<br>• Calculer les coordonnées d'une somme de vecteurs |

**Démonstrations :**

- Calculer les coordonnées du milieu d'un segment.
- Calculer la distance entre deux points grâce au théorème de pythagore.

**Exemples d'algorithme :**

- Programme Python qui prend en entrée les coordonnées de deux points et qui renvoie la distance euclidienne entre ces deux points à $10^{-3}$

**Approfondissements possibles :**

- Définition vectorielle des homothéties

# I Translation et vecteur associé

## 1 Translation

### a Définition

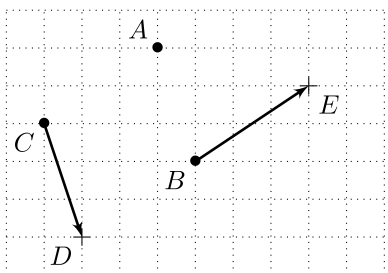
**Définition 1.** *Soient $A$ et $B$ deux points du plan.*
*On appelle translation qui transforme $A$ en $B$ la transformation qui, à tout point $C$ du plan, associe l'unique point $D$ tel que $ABDC$ est un parallélogramme.*

**Exemple 1.**

*On considère la figure ci-contre. Construire :*

◇ *l'image $D$ du point $C$ par la translation qui transforme $A$ en $B$.*

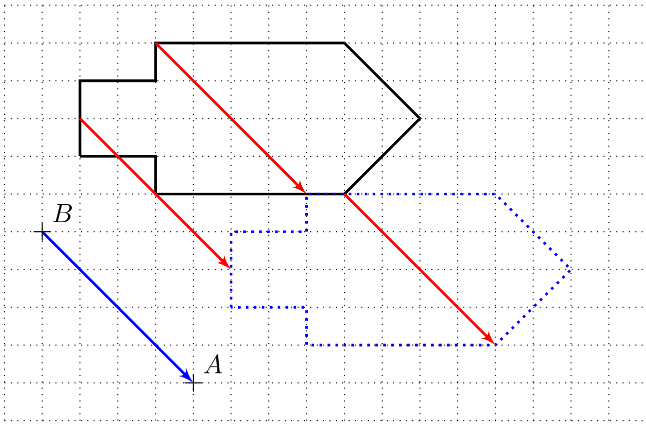
◇ *l'image $E$ du point $B$ par la translation qui transforme $C$ en $A$.*




### b Image d'une figure par une translation

Construire l'image d'une figure par une translation consiste à construire l'image de chacun des points de la figure par cette translation.

**Exemple 2.** *Construire l'image de la figure ci-dessous par la translation qui transforme $B$ en $A$.*




## 2 Vecteur associé à une translation

**Définition 2.**
*A toute translation, on associe un nouvel objet mathématique qui matérialise le déplacement correspondant à cette translation. Cet objet est appelé un* ***vecteur*** *et il est représenté par une flèche.*

*La translation qui transforme chaque point en lui-même est appelée translation de* ***vecteur nul****, on le note $\overrightarrow{0}$.*

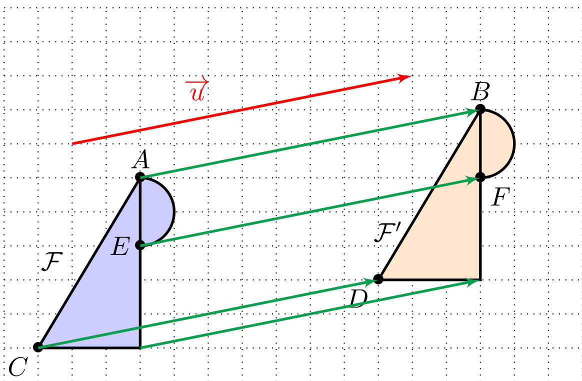
*Tout vecteur non nul $\overrightarrow{u}$ a trois caractéristiques :*

- ◇ *une* ***direction*** *donnée par une droite.*
- ◇ *un* ***sens*** *donné par la manière dont un se déplace selon la direction.*
- ◇ *une* ***norme****, que l'on note $||\overrightarrow{u}||$. La norme est une information de distance.*

**Remarque 1.** *Attention, le vecteur nul n'a ni direction, ni sens et sa norme vaut* ***0***

**Remarque 2.** *Deux droites parrallèles définissent la même direction.*

**Exercice 1.**



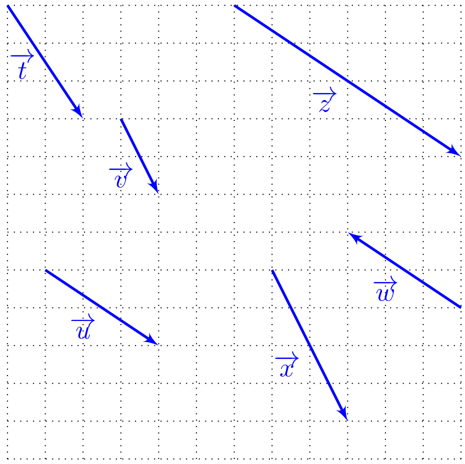

*Sur le schéma ci-contre, la figure $\mathcal{F}$ a été transformée en la figure $\mathcal{F}'$ par une translation. On appelle $\overrightarrow{u}$ le vecteur associé à cette translation.*

- ◇ *Tracer en rouge sur la figure le vecteur $\overrightarrow{u}$.*
- ◇ *L'image du point $A$ par la translation de vecteur $\overrightarrow{u}$ est le point $B$.*
- ◇ *Les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont égaux.*

  *On dit que $\overrightarrow{AB}$ est un représentant de $\overrightarrow{u}$.*
- ◇ *Tracer en vert sur la figure deux autres représentants du vecteur $\overrightarrow{u}$.*
- ◇ *Combien de représentants a le vecteur $\overrightarrow{u}$ ?* ***Il y en a une infinité***
- ◇ *Le vecteur $\overrightarrow{u}$ a trois caractéristiques :*
  - *sa direction :* ***est donnée par la droite (AB)***
  - *son sens :* ***est de A vers B ou de gauche vers la droite et de baut vers le haut***
  - *sa norme :* $\sqrt{10^2+2^2} = \sqrt{104} = \sqrt{4\times 2\times 13} = 2\sqrt{26} \approx 10,2$ *(au dixième près).*
- ◇ *L'origine du vecteur $\overrightarrow{AB}$ est $A$ Son extrémité est $B$.*

**Remarque 3.**
*Quand on nomme un vecteur à l'aide de deux points, on commence toujours par son origine puis on donne son extrémité. Ainsi, la flèche dans le nom du vecteur va toujours de la gauche vers la droite et indique clairement le sens du déplacement. Par exemple, le vecteur associé à la translation qui transforme $A$ en $B$ s'écrit $\overrightarrow{AB}$ (déplacement de $A$ vers $B$) mais ne s'écrira jamais $\overleftarrow{BA}$.*

**Remarque 4.**
*Les notions de* ***direction*** *et de* ***sens*** *sont liées, mais attention à* ***ne pas les confondre****.*



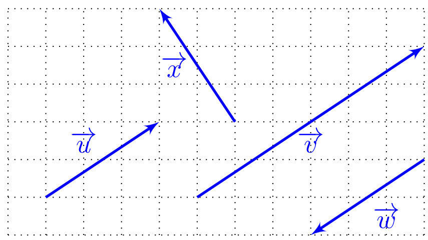

*On a représenté ci-contre plusieurs vecteurs.*

- ◇ *Citer tous les vecteurs ayant la même direction.* $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{z}, \overrightarrow{w}$ *ont la même direction et* $\overrightarrow{v}, \overrightarrow{x}$ *ont la même direction.*
- ◇ *Parmi ces vecteurs, citer tous ceux qui ont le même sens.* $\overrightarrow{t}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{x}, \overrightarrow{z}$ *ont le même sens.*
- ◇ *Citer tous les vecteurs ayant la même norme.* $\overrightarrow{t}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{w}$ *ont la même norme*

## 3 Egalité de vecteurs

**Définition 3.**
*Deux vecteurs non nuls sont égaux si et seulement si leurs trois caractéristiques sont égales, autrement dit si ils ont la même direction, le même sens et la même norme.*

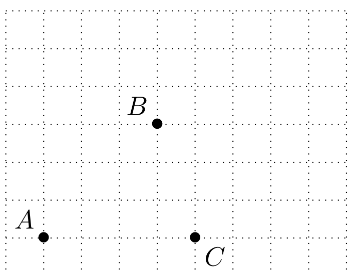
**Exemple 3.**

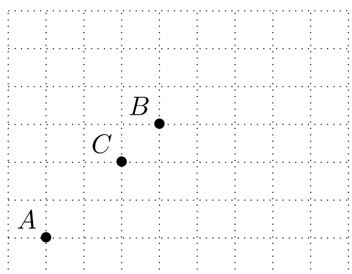



- ◇ *Les vecteurs* $\overrightarrow{u}$ *et* $\overrightarrow{x}$ *n'ont pas la même direction. Ils ne sont donc pas égaux.*
- ◇ *Les vecteurs* $\overrightarrow{u}$ *et* $\overrightarrow{v}$ *ont la même direction et le même sens mais n'ont pas la même norme. Ils ne sont donc pas égaux.*
- ◇ *Les vecteurs* $\overrightarrow{u}$ *et* $\overrightarrow{w}$ *ont la même direction et la même norme mais n'ont pas le même sens. Ils ne sont donc pas égaux.*

**Propriété 1.** *(admise)*
*Soient $A$, $B$, $C$ et $D$ quatre points du plan. Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont égaux si et seulement si $ABDC$ est un parallélogramme (éventuellement aplati).*

**Remarque 5.** *Attention à l'ordre des points dans le nom du parallélogramme ! Pour ne pas faire d'erreur, ne pas hésiter à faire une figure à main levée.*



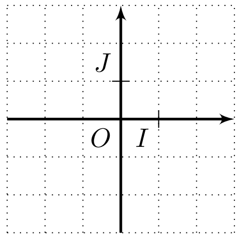



## II Coordonnées d'un vecteur dans un repère orthonormé

Avant de commencer :

**Définition 4.**

*Soient $O$, $I$ et $J$ trois points distincts et non alignés du plan. On dit que $(O; I, J)$ est un repère orthonormé du plan si le triangle $OIJ$ est rectangle et isocèle en $O$.*




**Remarque 6.** *Par définition, dans un repère orthonormé $(O; I, J)$, on a :*

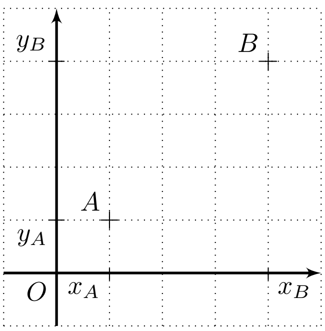
$$O(0;0) \quad ; \quad I(1;0) \quad ; \quad J(0;1) \quad ; \quad OI = OJ = 1$$

**Propriété 2.**

*Soit $(O; I, J)$ un repère orthonormé du plan. Soient $A$ et $B$ deux points du plan et soit $K$ le milieu de $[AB]$. Alors*

$$K\left(\frac{x_A + x_B}{2}; \frac{y_A + y_B}{2}\right)$$

*Démonstration.*




...........................................................................

...........................................................................

...........................................................................

...........................................................................

...........................................................................

...........................................................................

□

**Exemple 4.** *Dans un repère orthonormé $(O; I, J)$, on donne $A(7; -5)$, $B(-4; -1)$ et $C(3; 2)$. Alors :*

◇ *le milieu de $[AB]$ a pour coordonnées :*

...........................................................................

◇ *Le milieu de $[AC]$ a pour coordonnées :*

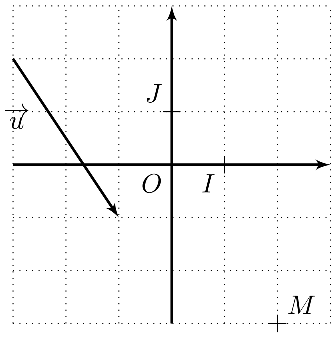
...........................................................................

## 1 Définition

**Définition 5.**

*Soit* $(O; I, J)$ *un repère orthonormé du plan. Soit* $\overrightarrow{u}$ *un vecteur du plan et soit* $M$ *l'unique point du plan tel que* $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{u}$.

*On appelle* ***coordonnées d'un vecteur*** $\overrightarrow{u}$ *les coordonnées du point* $M$ *dans le repère* $(O; I, J)$.




**Exemple 5.** *On considère le vecteur* $\overrightarrow{u}$ *de la figure ci-dessus. Ses coordonnées sont :* $\overrightarrow{u}\,(2\ ; -3)$

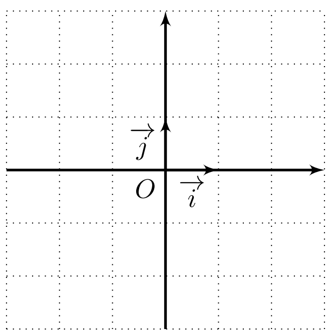
**Remarque 7.** *Les coordonnées d'un vecteur peuvent aussi s'écrire verticalement afin de faciliter les calculs que l'on apprendra à faire par la suite :*

$$\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

**Propriété 3.**

- *Le vecteur nul est* ***le*** *vecteur de coordonnées* $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.
- *On note* $\overrightarrow{i} = \overrightarrow{OI}$. *Le vecteur* $\overrightarrow{i}$ *est* ***le*** *vecteur de coordonnées* $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.
- *On note* $\overrightarrow{j} = \overrightarrow{OJ}$. *Le vecteur* $\overrightarrow{j}$ *est* ***le*** *vecteur de coordonnées* $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

**Remarque 8.** *Avec ces nouvelles notations, le repère* $(O; I, J)$ *peut également se noter à l'aide de vecteurs :* $(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.




**Théorème 1.** *(admis) Deux vecteurs sont égaux si et seulement si leurs coordonnées sont égales.*

## 2 Calcul des coordonnées d'un vecteur.

**Propriété 4.** *Soit $(O; I, J)$ un repère quelconque du plan. Soient $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$ deux points du plan.*

*Alors les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$ sont* $\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$.

**Remarque 9.** *Mon moyen mnémotechnique pour m'en souvenir est :* ***"L'arrivée moins le départ"***

*Démonstration.* On note $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$.

Soit $M$ l'unique point du plan tel que $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{AB}$. Par définition des coordonnées d'un vecteur, on a donc $M(X; Y)$.

Puisque $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OM}$, le quadrilatère $ABMO$ est un parallélogramme. Ses diagonales $[AM]$ et $[BO]$ ont donc même milieu. Or :

- ◇ le milieu de $[AM]$ a pour coordonnées $\left(\dfrac{x_A + x_M}{2} ; \dfrac{y_A + y_M}{2}\right) = \left(\dfrac{x_A + X}{2} ; \dfrac{y_A + Y}{2}\right)$
- ◇ le milieu de $[BO]$ a pour coordonnées $\left(\dfrac{x_B + x_0}{2} ; \dfrac{y_B + y_0}{2}\right) = \left(\dfrac{x_B + 0}{2} ; \dfrac{y_B + 0}{2}\right) = \left(\dfrac{x_B}{2} ; \dfrac{y_B}{2}\right)$

On en déduit que $\left(\dfrac{x_B}{2} ; \dfrac{y_B}{2}\right) = \left(\dfrac{x_A + X}{2} ; \dfrac{y_A + Y}{2}\right)$

$$\left\{\begin{array}{rcl} \dfrac{x_B}{2} & = & \dfrac{x_A + X}{2} \\ \dfrac{y_B}{2} & = & \dfrac{y_A + Y}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} \dfrac{x_B}{2} - \dfrac{x_A}{2} & = & \frac{X}{2} \\ \dfrac{y_B}{2} - \dfrac{y_A}{2} & = & \frac{Y}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x_B - x_A & = & X \\ y_B - y_A & = & Y \end{array}\right.$$

D'où

$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$$

□

**Exemple 6.** *Soient $A(-3; 2)$ et $B(4; 1)$. Alors le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées :* ...............................

On déduit de cette propriété une nouvelle méthode de lecture graphique des coordonnées d'un vecteur.

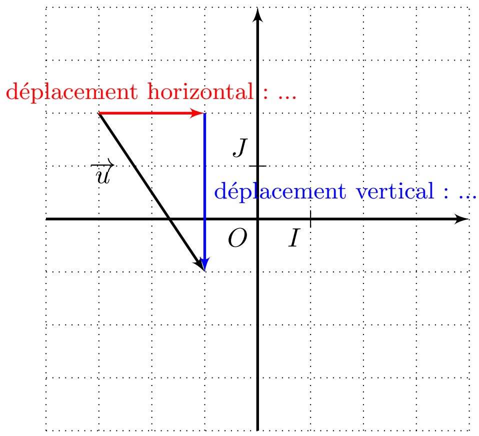
**Lecture graphique des coordonnées d'un vecteur :**

- ◇ L'abscisse d'un vecteur correspond au déplacement horizontal que l'on effectue pour aller de l'origine jusqu'à l'extrémité du vecteur.
- ◇ L'ordonnée d'un vecteur correspond au déplacement vertical que l'on effectue pour aller de l'origine jusqu'à l'extrémité du vecteur.

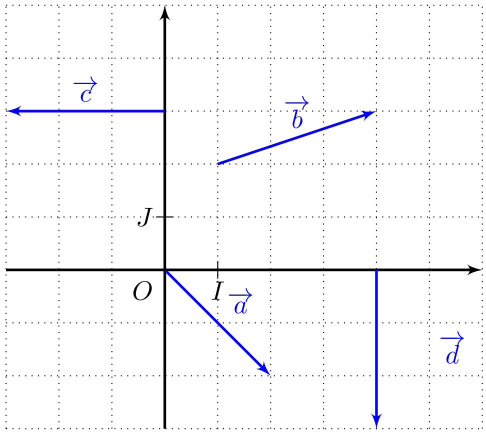
Si on reprend l'exemple fait précédemment,

- ◇ le déplacement horizontal est 2 ;
- ◇ le déplacement vertical est $-3$. Attention au signe !

On retrouve : $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$.



**Exercice 2.** *Sur la figure ci-contre, lire les coordonnées de chacun des vecteurs dans le repère orthonormé* $(O; I, J)$.




. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

**Exercice 3.** *Soient* $A(-1; 3)$ *et* $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}-2\\-5\end{pmatrix}$. *Déterminer les coordonnées du point* $B$ *tel que* $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{u}$.

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

**Exercice 4.** *Soient* $A(0; -2)$, $B(4; 6)$ *et* $C(-4; 0)$. *Déterminer les coordonnées du point* $D$ *tel que* $ABDC$ *soit un parallélogramme.*

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

# III Premières opérations sur les vecteurs

## 1 Somme de deux vecteurs

### a Enchaînement de deux translations.

**Définition 6.** *Soient* $\overrightarrow{u}$ *et* $\overrightarrow{v}$ *deux vecteurs du plan. On appelle* ***enchaînement*** *de la translation de vecteur* $\overrightarrow{u}$ *puis de la translation de vecteur* $\overrightarrow{v}$ *la transformation qui, à tout point* $A$ *du plan, associe l'unique point* $C$ *du plan défini de la manière suivante :*

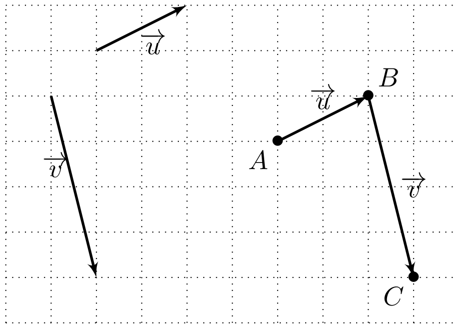
- ◇ *on considère tout d'abord le point* $B$ *image de* $A$ *par la translation de vecteur* $\overrightarrow{u}$ *(donc tel que* $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{u}$*) ;*
- ◇ *on définit ensuite le point* $C$ *comme l'image du point* $B$ *par la translation de vecteur* $\overrightarrow{v}$ *(donc* $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{v}$*).*

**Théorème/Définition 1.** *(admis)*

*Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs du plan.*
*L'enchaînement de la translation de vecteur $\overrightarrow{u}$ puis de la translation de vecteur $\overrightarrow{v}$ est encore une translation.*

*Le vecteur associé à cette translation est appellé la* ***somme*** *de $\overrightarrow{u}$ et de $\overrightarrow{v}$.*

*On le note $\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}$.*




### b Base orthonormée.

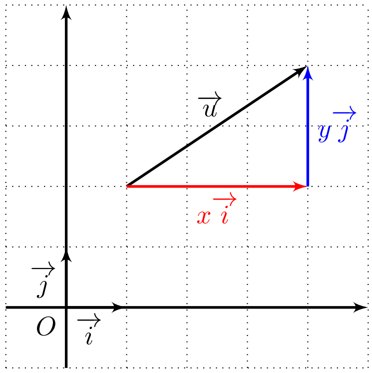
**Propriété-définition 1.** *(admis)*

*Soient $O$ un point et deux vecteurs $\overrightarrow{i}$ et $\overrightarrow{j}$ dont les directions sont perpendiculaires et dont les normes sont égales à 1.*

- *On dit que $\left(\overrightarrow{i},\overrightarrow{j}\right)$ est une* ***base orthonormée*** *du plan, donnant un repère orthonormé $\left(O,\overrightarrow{i},\overrightarrow{j}\right)$.*
- *Pour tout vecteur $\overrightarrow{u}$, il existe un unique couple de nombres réels $(x;y)$ tel que :*

$$\overrightarrow{u} = x\overrightarrow{i}+y\overrightarrow{j}$$

*C'est l'unique décomposition dans la base orthonormées $\left(\overrightarrow{i},\overrightarrow{j}\right)$ du vecteur $\overrightarrow{u}$.*




**Remarque 10.** *Cela revient à décomposer la translation de vecteur $\overrightarrow{u}$ en un enchaînement de deux translations selon les directions des axes du repère.*

### c Propriétés de la somme de vecteurs.

**Propriété 5.** *(admise) Soient $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ trois vecteurs du plan. Alors :*

- $(\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v})+\overrightarrow{w}=\overrightarrow{u}+(\overrightarrow{v}+\overrightarrow{w})$ *(on dit que la somme est associative) ;*
- $\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}=\overrightarrow{v}+\overrightarrow{u}$ *(on dit que la somme est commutative) ;*
- $\overrightarrow{u}+\overrightarrow{0}=\overrightarrow{u}$ *(le vecteur $\overrightarrow{0}$ est l'élément neutre pour l'addition) ;*

### d Relation de Chasles.

**Propriété 6.** *(admise)**Relation de Chasles***
*Soient $A$, $B$ et $C$ trois points du plan. Alors :*

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$$

**Exemple 7.** *A l'aide de la relation de Chasles, compléter les égalités vectorielles suivantes :*

- $\overrightarrow{\ldots X}=\overrightarrow{G\ldots}+\overrightarrow{NX}$
- $\overrightarrow{LV}=\overrightarrow{\ldots O}+\overrightarrow{O\ldots}$

◇ $\overrightarrow{E\ldots} = \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{\ldots U}$

**Exemple 8.** *A l'aide de la relation de Chasles, simplifier les sommes vectorielles suivantes :*

◇ $\overrightarrow{DJ} + \overrightarrow{JL} =$ ........................................................................................................

◇ $\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{EM} =$ ........................................................................................................

◇ $\overrightarrow{QZ} + \overrightarrow{JM} + \overrightarrow{MQ} =$ ........................................................................................................

◇ $\overrightarrow{ST} + \overrightarrow{HR} + \overrightarrow{RS} + \overrightarrow{EH} =$ ........................................................................................................

◇ $\overrightarrow{UX} + \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{SU} + \overrightarrow{OS} =$ ........................................................................................................

Application : construction de la somme de deux vecteurs avec la méthode « bout à bout ».

Pour construire la somme de deux vecteurs, il suffit de les mettre « bout à bout » (attention au sens des flèches).
Le vecteur somme est alors le vecteur ayant :

◇ pour origine l'origine du **premier** vecteur de la somme ;

◇ pour extrémité l'extrémité du **deuxième** vecteur de la somme.

### e Coordonnées du vecteur somme

**Propriété 7.** *Si* $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ *et* $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ *sont deux vecteurs du plan, alors le vecteur* $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$ *a pour coordonnées*

$$\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} x + x' \\ y + y' \end{pmatrix}$$

**Exemple 9.**

*On munit le plan d'un repère quelconque* $(O; I, J)$*. Soient* $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ *et* $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$.

*Calculer les coordonnées du vecteur* $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$.

$$\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+3 \\ -2+5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

## 2 Loi externe

### a Produit d'un vecteur par un réel

**Propriété 8.** *Soient* $k \in \mathbb{R}$ *et* $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$*. Le vecteur* $k\overrightarrow{u}$ *a pour coordonnées* $\begin{pmatrix} kx \\ ky \end{pmatrix}$.

**Exemple 10.**

*On munit le plan d'un repère quelconque* $(O; I, J)$. *Soient* $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}5\\3\end{pmatrix}$ *et* $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix}-4\\8\end{pmatrix}$.

*Calculer les coordonnées des vecteurs* $3\overrightarrow{u}$, $-2\overrightarrow{v}$ *et* $\frac{1}{4}\overrightarrow{v}$

$$3\overrightarrow{u} = 3\begin{pmatrix}5\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\times 5\\3\times 3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}15\\9\end{pmatrix}$$

$$-2\overrightarrow{v} = -2\begin{pmatrix}-4\\8\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2\times(-4)\\-2\times 8\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}8\\-16\end{pmatrix}$$

$$\frac{1}{4}\overrightarrow{v} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix}-4\\8\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{1}{4}\times(-4)\\\frac{1}{4}\times 8\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$$

**Remarque 11.** *Les coordonnées des vecteurs* $\overrightarrow{u}$ *et* $k\overrightarrow{u}$ *sont proportionnelles.*

### b Opposé d'un vecteur

**Définition 7.**

◇ *Soit* $\overrightarrow{u}$ *un vecteur non nul du plan. On appelle vecteur opposé du vecteur* $\overrightarrow{u}$ *et on note* $-\overrightarrow{u}$ *le vecteur qui a :*

- *Le vecteur* $\overrightarrow{u}$ *et le vecteur* $-\overrightarrow{u}$ *ont la même direction*
- *Le vecteur* $\overrightarrow{u}$ *et le vecteur* $-\overrightarrow{u}$ *ont la même norme*
- *Le vecteur* $\overrightarrow{u}$ *et le vecteur* $-\overrightarrow{u}$ *sont de sens opposés*

◇ *Par convention, l'opposé du vecteur nul est le vecteur nul.*

**Propriété 9.** *Soient* $A$ *et* $B$ *deux points du plan. Alors l'opposé du vecteur* $\overrightarrow{AB}$ *est le vecteur* $-\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BA}$ .

La propriété suivante justifie la notation adoptée pour l'opposé d'un vecteur.

**Propriété 10.** *Soit* $\overrightarrow{u}$ *un vecteur du plan. Alors* $\overrightarrow{u} + (-\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{0}$.

*Démonstration.* Soient $A$ et $B$ deux points du plan tels que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{u}$ (i.e. $\overrightarrow{AB}$ est un représentant du vecteur $\overrightarrow{u}$).
Alors d'après la relation de Chasles,

$$\overrightarrow{u} + (-\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AA} = \overrightarrow{0}$$

□

**Propriété 11.** *Si* $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$, *alors le vecteur* $-\overrightarrow{u}$ *a pour coordonnées* $\begin{pmatrix}-x\\-y\end{pmatrix}$.

**Exemple 11.**

*On munit le plan d'un repère quelconque* $(O; I, J)$. *Soient* $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}$ *et* $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix}3\\5\end{pmatrix}$.

*Calculer les coordonnées des vecteurs* $-\overrightarrow{u}$ *et* $-\overrightarrow{v}$.

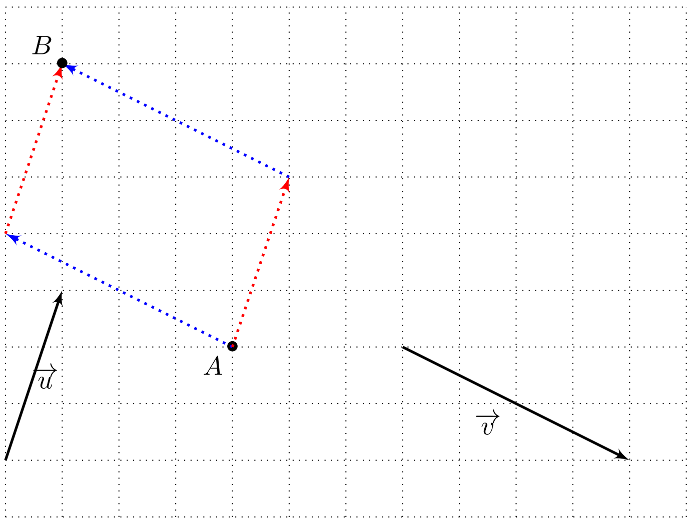
...........................................................................................................

...........................................................................................................

### 3 Différence de deux vecteurs

**Définition 8.** *Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs du plan. On appelle différence de $\overrightarrow{u}$ et de $\overrightarrow{v}$ (**dans cet ordre**) et on note $\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}$ le vecteur $\overrightarrow{u} + (-\overrightarrow{v})$.*

**Exemple 12.** *Construire ci-dessous le représentant du vecteur $\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}$ ayant pour origine $A$.*




**Propriété 12.** *Si $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ sont deux vecteurs du plan, alors le vecteur $\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}$ a pour coordonnées*

$$\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} x - x' \\ y - y' \end{pmatrix}$$

**Exemple 13.**

*On munit le plan d'un repère quelconque $(O; I, J)$. Soient $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$.*

*Calculer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}$.*

.............................................................................................................................

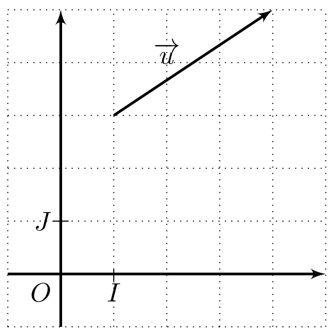
.............................................................................................................................

## IV Calcul de la norme d'un vecteur dans un repère orthonormé

**Propriété 13.** *Soit $(O; I, J)$ un repère orthonormal du plan et soit $\overrightarrow{u}$ un vecteur du plan de coordonnées $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$. Alors le vecteur $\overrightarrow{u}$ a pour norme :*

$$||\overrightarrow{u}|| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

*Démonstration.*




..........................................................................

..........................................................................

..........................................................................

..........................................................................

..........................................................................

..........................................................................

□

**Remarque 12.** *En particulier, si $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$ sont deux points du plan, alors $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$ :*

$$||\overrightarrow{AB}|| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}.$$

**Exemple 14.** *Dans chacun des cas suivants, calculer la norme du vecteur donné :*

◇ $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$ ..........................................................................

◇ $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}$ ..........................................................................

◇ $\overrightarrow{FC}$ *où* $F(5;1)$ *et* $C(6;-1)$ ..........................................................................

..........................................................................

# V Traduction de situations géométriques à l'aide de vecteurs

Quelques réflexes à avoir :

◇ Si on nous demande de démontrer que $ABCD$ est un parallélogramme :

..........................................................................

..........................................................................

◇ Si on nous demande de calculer les coordonnées du symétrique $C$ de $A$ par rapport à $B$ (les points $A$ et $B$ étant connus) :

..........................................................................

..........................................................................

..........................................................................

..........................................................................

◇ Si on nous demande de calculer les coordonnées du point $D$ tel que $ACBD$ soit parallélogramme (les points $A$, $B$ et $C$ étant connus) :

.................................................................................................................................

.................................................................................................................................

.................................................................................................................................

.................................................................................................................................