1 Premier problème

1.1 Généralités

1. $\mathcal{R}_n(p)$ ne contient pas la matrice nulle, ce n'est donc pas un s.e.v. de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
2. Sachant $A^p = I_n$, on sait que l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à A vérifie : $\varphi^{p-1} \circ \varphi = \varphi \circ \varphi^{p-1} = Id$, donc il est injectif et surjectif, ce qui entraîne $A \in GL_n(\mathbb{R})$. Il en résulte que A est inversible, de plus $\left(A^{-1}\right)^p A^p = I_n$ par associativité de la multiplication des matrices carrées, et finalement $\left(A^{-1}\right)^p = I_n$, ce qui signifie $J^{-1} \in \mathcal{R}_n(p)$.
3. Si $\left(P^{-1}AP\right)^{p-1} = P^{-1}A^{p-1}P$, alors
$$\begin{aligned} \left(P^{-1}AP\right)^p &= \left(P^{-1}A^{p-1}P\right)P^{-1}AP \\ &= P^{-1}A^{p-1}\left(PP^{-1}\right)AP \\ &= P^{-1}A^pP \end{aligned}$$
Comme $\left(P^{-1}AP\right)^0 = I_n = P^{-1}A^0P$, on peut déjà conclure : $\forall p \in \mathbb{N}, \left(P^{-1}AP\right)^p = P^{-1}A^pP$, et par suite, si $A \in \mathcal{R}_n(p)$ et $P \in GL_n(\mathbb{R})$, alors $P^{-1}AP \in \mathcal{R}_n(p)$.
4. Si $A = diag(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n)$, alors $A^p = diag(\lambda_1^p, \lambda_2^p, ..., \lambda_n^p)$, donc pour que $A \in \mathcal{R}_n(p) \cap \mathcal{D}_n(p)$, il faut et il suffit que les λ_i vérifient $\lambda_i^p = 1$. Les coefficients λ_i étant réels, si p est un nombre impair, il y a solution unique $A = I_n$, alors que si p est pair, chaque λ_i peut prendre la valeur 1 ou -1. Ce qui donne 2^n solutions.
5. Soit $q \geqslant 2.$, notons $d = p \wedge q$, le p.g.c.d. de p et q, alors il existe deux entiers p_1 et p_2 premiers entre eux tels que $p = dp_1$ et $q = dp_2$. Dans ces conditions, $a \in \mathcal{R}_n(p) \cap \mathcal{R}_n(q)$ équivaut à : $A^{dp_1} = I_n$ et $A^{dp_2} = I_n$, il en résulte d'une part que si $A \in \mathcal{R}_n(d)$, alors $a \in \mathcal{R}_n(p) \cap \mathcal{R}_n(q)$. Et inversement, si $a \in \mathcal{R}_n(p) \cap \mathcal{R}_n(q)$, alors comme p_1 et p_2 sont premiers entre eux, le théorème de Bézout fournit u et v tels que $1 = p_1u + p_2v$, d'où $A^d = A^{d(p_1u+p_2v)} = (A^p)^u (A^q)^v = I_nI_n = I_n$, donc $A \in \mathcal{R}_n(d)$.

1.2 Etude de $\mathcal{R}_2(2)$.

1. $A \in \mathcal{R}_2(2) \setminus \{I_2, -I_2\}$, et $u \in \mathcal{L}(E)$, dont la matrice dans $\mathcal{B}$ est A.
   (a) Si $x \in \ker(u - id_E) \cap \ker(u + id_E)$, alors $u(x) = x = -x$, donc x est nul, on en déduit $\ker(u - id_E) \cap \ker(u + id_E) \subset \{0_E\}$, puis l'égalité car l'inclusion inverse est évidente D'autre part, il est clair que pour tout x de E, on a : $x = \frac{1}{2}(x - u(x)) + \frac{1}{2}(x + u(x))$, et on vérifie (comme dans le cours) que $\frac{1}{2}(x - u(x)) \in \ker(u + id_E)$, tandis que $\frac{1}{2}(x + u(x)) \in \ker(u - id_E)$. Ainsi $\ker(u - id_E) \oplus \ker(u + id_E) = E$. On a reconnu dans u la symétrie par rapport à $\ker(u - id_E)$, parallèlement à $\ker(u + id_E)$.
   (b) En prenant e_1 dans $\ker(u - id_E)$ et e_2 dans $\ker(u + id_E)$, ce qui est possible, sinon $u = id_E$ ou $u = -id_E$ ce qui est exclu par hypothèse, la matrice de u est $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.
   (c) Le passage de la base $\mathcal{B}$ à cette base particulière s'effectue à l'aide de la matrice de passage $P = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ de déterminant $ad - bc \neq 0$.
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = P^{-1}AP$$
$$\begin{aligned} A = P\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}P^{-1} &= \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} ad+bc & -2ab \\ 2cd & -bc-ad \end{pmatrix} \end{aligned}$$

2. Si on prend deux éléments A et B de $\mathcal{R}_2(2)$ qui ne commutent pas, il n'y a aucune raison pour que AB soit encore dans $\mathcal{R}_2(2)$, par exemple : $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ sont dans $\mathcal{R}_2(2)$, alors que $AB = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$ et $(AB)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Géométriquement, cela signifie qu'en général, deux symétries du plan ne commutent pas et que le produit de deux symétries axiales n'est pas une symétrie axiale.

1.3 Etude de $\mathcal{R}_2(3)$.

Pour $v \in \mathcal{R}_2(3)$, on pose $F = \ker(v - id_E)$ et $G = \ker\left(v^2 + v + id_E\right)$ et on note M la matrice de v dans $\mathcal{B}$.

1. Décomposition de E.

   (a) Soit $x \in F \cap G$, alors $v(x) = x$ et $v^2(x) + v(x) + x = 0_E$, donc $3x = 0_E$, d'où $x = 0_E$, ainsi : $F \cap G \subset \{0_E\}$, l'inclusion inverse est immédiate.

   (b) Soit $x \in E$,

   $$v\left(\frac{1}{3}\left(x + v(x) + v^2(x)\right)\right) = \frac{1}{3}\left(v(x) + v^2(x) + x\right), \text{ donc } \frac{1}{3}\left(x + v(x) + v^2(x)\right) \in F$$

   $$\begin{aligned} &\text{d'autre part, } \left(v^2 + v + id_E\right)\left(\frac{1}{3}\left(2x - v(x) - v^2(x)\right)\right) \\ &= \frac{1}{3}\left(2v^2(x) - x - v(x)\right) + \frac{1}{3}\left(2v(x) - v^2(x) - x\right) + \frac{1}{3}\left(2x - v(x) - v^2(x)\right) \\ &= 0_E, \text{ donc } \frac{1}{3}\left(2x - v(x) - v^2(x)\right) \in G \end{aligned}$$

   (c) Enfin, tout x de E peut s'écrire $x = \frac{1}{3}\left(x + v(x) + v^2(x)\right) + \frac{1}{3}\left(2x - v(x) - v^2(x)\right)$, on en déduit : $E = F \oplus G$

2. Si $\dim F = 2$, alors $F = E$, donc $M = I_2$.

3. Supposons $\dim F = 1$.

   (a) Alors comme $F \oplus G = E$, $\dim G = 1$. Il existe donc une base (g_1, g_2) de E, telle que $g_1 \in F$ et $g_2 \in G$.

   (b) On a $v(g_1) = g_1$ et $v^2(g_2) + v(g_2) + g_2 = 0_E$ car $g_2 \in G$, dans la base $\mathcal{B}'$ v a pour matrice $M' = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & b \end{pmatrix}$, d'où $M'^2 = \begin{pmatrix} 1 & a + ab \\ 0 & b^2 \end{pmatrix}$, on en déduit $\begin{cases} a + ab + a + 0 = 0 \\ b^2 + b + 1 = 0 \end{cases}$, ce qui est impossible avec b réel. Conclusion, F n'est pas de dimension 1.

4. Supposons enfin F de dimension 0.

   (a) Si la famille $(e_1, v(e_1))$ était liée, il existerait un couple $(\alpha, \beta) \neq (0,0)$ tel que $\alpha e_1 + \beta v(e_1) = 0_E$, comme β ne peut pas être nul sans que α le soit, il existe λ tel que $v(e_1) = \lambda e_1$, alors $v^3(e_1) = \lambda^3 e_1 = e_1$, donc $\lambda = 1$, ce qui contredit l'hypothèse $\dim F = 0$. Enfin comme $\dim E = 2$, la famille libre $(e_1, v(e_1))$ a la dimension requise pour être une base de E.

   (b) Soit M' la matrice de v dans cette base, $M' = \begin{pmatrix} 0 & x \\ 1 & y \end{pmatrix}$, où $v(v(e_1)) = xe_1 + yv(e_1)$. Comme $\dim G = 2$, on a $v^2(e_1) + v(e_1) + e_1 = 0_E$, donc $x = y = -1$. Donc la matrice de v dans $\mathcal{B}'$ est $M' = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, enfin la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ est $P = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & b \end{pmatrix}$, d'inverse

$P^{-1} = \frac{1}{b}\begin{pmatrix} b & -a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. On en déduit que la matrice de v dans la base $\mathcal{B}$ est $M = PM'P^{-1} = \frac{1}{b}$ $\begin{pmatrix} ab & -1-a-a^2 \\ b^2 & -ab-b \end{pmatrix}$.

2 Deuxième problème

1. Soit φ la fonction $t \mapsto t + \sin t$, cette fonction est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, de dérivée définie par $\varphi'(t) = 1 + \cos t$, donc positive, nulle seulement en les points isolés $(2k+1)\pi$, par conséquent φ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, elle s'annule en l'unique point $t = 0$.
2. Soit $x \in \mathbb{R}^*$, alors ψ est continue sur l'intervalle de bornes x et $2x$, qui ne contient pas 0, donc $f(x)$ existe.
3. Le changement de variable bijectif, de classe $\mathcal{C}^1, u = -t$ permet de montrer $f(-x) = \int_{-x}^{-2x} \frac{1}{t+\sin t} dt = \int_x^{2x} \frac{1}{-u-\sin u}(-du) = f(x)$, donc f est paire.
4. La fonction ψ étant continue sur $[x, 2x]$, la fonction f est dérivable, de plus,

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2\frac{1}{2x+\sin 2x} - \frac{1}{x+\sin x} \\ &= \frac{2\sin x - \sin 2x}{(2x+\sin 2x)(x+\sin x)} = \frac{2\sin x(1-\cos x)}{(2x+\sin 2x)(x+\sin x)} \end{aligned}$$

   Cette expression est celle d'une fonction $\mathcal{C}^\infty$, donc f est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^*$.
5. $f'(x)$ est du signe de $\sin x$, donc positif sur $[2k\pi, (2k+1)\pi]$, négatif sinon. Ce qui permet de trouver le sens de variations de f.
6. Etude au voisinage de l'infini.
   (a) Pour $x > 0$, $\left|\int_x^{2x}\left(\frac{1}{t+\sin t} - \frac{1}{t}\right)dt\right| \leqslant \int_x^{2x}\left|\frac{\sin t}{t(t+\sin t)}\right| dt \leqslant \int_x^{2x} \frac{1}{t(t+\sin t)}dt$, car $|\sin t| \leqslant 1$ et $t + \sin t > 0$. Conclusion : $\left|f(x) - \int_x^{2x}\frac{1}{t}dt\right| \leqslant \int_x^{2x}\frac{1}{t(t+\sin t)}dt$.
   (b) De $\lim_{t\to+\infty}\left(\frac{t+\sin t}{t}\right) = 1$, on déduit l'existence de $m > 0$ tel que pour tout $t \geqslant m$, on ait $\frac{t+\sin t}{t} \geqslant \frac{1}{2}$, ce qui fournit le résultat demandé.
   (c) De $t + \sin t \geqslant \frac{t}{2}$, on déduit $\left|f(x) - \int_x^{2x}\frac{1}{t}dt\right| \leqslant \int_x^{2x}\frac{2}{t^2}dt = \frac{1}{x}$, et donc $\lim_{x\to+\infty}\left(f(x) - \int_x^{2x}\frac{1}{t}dt\right) = 0$. Or $\lim_{x\to+\infty}\left(\int_x^{2x}\frac{1}{t}dt\right) = \ln 2$, donc $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \ln 2$.
7. Comportement de f au voisinage de 0.
   (a) Pour t voisin de 0,

$$\begin{aligned} \frac{1}{t+\sin t} &= \frac{1}{t + t - \frac{t^3}{6} + o(t^3)} \\ &= \frac{1}{2t}\left(\frac{1}{1 - \frac{t^2}{12} + o(t^2)}\right) = \frac{1}{2t}\left(1 + \frac{t^2}{12} + o(t^2)\right) \\ &= \frac{1}{2t} + \frac{t}{24} + o(t) \end{aligned}$$

   (b) Traduisons l'hypothèse $\lim_{t\to0^+} g(t) = 0$: $\forall\varepsilon > 0, \exists\alpha > 0, 0 < t \leqslant \alpha \Rightarrow |g(t)| \leqslant \varepsilon$. Par conséquent, si on prend x vérifiant $0 < x \leqslant \frac{\alpha}{2}$, alors pour tout t de $[x, 2x]$, on a : $|g(t)| \leqslant \varepsilon$, et donc aussi $\sup_{t\in[x,2x]}|g(t)| \leqslant \varepsilon$. Il est donc clair que $\lim_{t\to0^+}\sup_{t\in[x,2x]}|g(t)| = 0$.

(c) h est continue sur $\mathbb{R}_+^*$, donc l'intégrale $\int_x^{2x} h(t)\,dt$ existe, on suppose de plus que $h(x) = o(x)$, au voisinage de 0, ceci entraîne que pour $t > 0, \lim_{t\to 0} \frac{h(t)}{t} = 0$, ou encore $h(t) = t\varepsilon(t)$ et $\lim_{t\to 0} \varepsilon(t) = 0$. Il en résulte :

$$\begin{aligned}
\int_x^{2x} |h(t)|\,dt &\leqslant \int_x^{2x} |t\varepsilon(t)|\,dt \\
&\leqslant 2x \int_x^{2x} |\varepsilon(t)|\,dt \\
&\leqslant 2x \int_x^{2x} \sup_{t\in[x,2x]} |\varepsilon(t)|\,dt \\
&\leqslant 2x^2 \sup_{t\in[x,2x]} |\varepsilon(t)| = o\left(x^2\right)
\end{aligned}$$

Finalement : $\int_x^{2x} h(t)\,dt = o\left(x^2\right)$.

(d) D'après c) $\int_x^{2x} \left(\frac{1}{2t} + \frac{t}{24} + o(t)\right) dt = \frac{1}{2}\ln 2 + \left[\frac{t^2}{48}\right]_x^{2x} + o\left(x^2\right) = \frac{1}{2}\ln 2 + \frac{x^2}{16} + o\left(x^2\right)$. Ce qui prouve que f admet un développement limité à l'ordre 2 au voisinage de 0,

(e) Et par suite f admet un prolongement continu en 0, (on pose $f(0) = \frac{1}{2}\ln 2$), ce prolongement étant dérivable et de dérivée nulle en 0.

(f) Le D.L.$_2$ ci-dessus prouve que la courbe est au-dessus de sa tangente en 0(terme $\frac{x^2}{16}$) .

(g) Pour $x \neq 0$, on a $f'(x) = \frac{2\sin x(1-\cos x)}{(2x+\sin 2x)(x+\sin x)} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{2x\frac{x^2}{2}}{4x2x} = \frac{x}{8}$

(h) $f''(0) = \lim_{x\to 0} \frac{f'(x)-f'(0)}{x} = \frac{1}{8}$.

8.

x	0		π		2π	...
$f'(x)$	0	$+$	0	$-$	0	...
$f(x)$	$\frac{1}{2}\ln 2$	$\nearrow$		$\searrow$		...

Tracé sur $[0, 4\pi]$: