# TD 10 : Fonctions dérivables et convexité

## Connaître son cours :

Démontrer les assertions suivantes :

- Soient $D \subset \mathbb{R}$, $f : D \to \mathbb{C}$ une fonction et $a \in D$. Si $f$ est dérivable en $a$, alors $f$ est continue en $a$.
- Soit $n \in \mathbb{N}$, la fonction $x \in \mathbb{R} \mapsto x^n$ est dérivable en tout point de $\mathbb{R}$ et donner sa fonction dérivée associée.
- La fonction $x \longmapsto \begin{cases} x\sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ est continue en 0 mais non dérivable en 0.
- Une application dérivable de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est lipschitzienne si et seulement si sa dérivée est bornée sur $\mathbb{R}$. En déduire qu'une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur un segment $I$ est lipschitzienne.
- La fonction $x \longmapsto \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.
- Si $f$ est dérivable sur $I$, $f$ est convexe si et seulement si $f'$ est croissante.
- Si $f$ est deux fois dérivable sur $I$, $f$ est convexe si et seulement si $f'' \geq 0$.

## Fonctions régulières :

**Exercice 1. (*)**

Étudier la dérivabilité des fonctions suivantes sur $\mathbb{R}$ :

$f_1(x) = x^2\cos\frac{1}{x}$, si $x \neq 0$ ; $f_1(0) = 0$;

$f_2(x) = \sin x \cdot \sin\frac{1}{x}$, si $x \neq 0$ ; $f_2(0) = 0$;

$f_3(x) = \frac{|x|\sqrt{x^2-2x+1}}{x-1}$, si $x \neq 1$ ; $f_3(1) = 1$.

---

**Exercice 2. (*)**

Soit $n \geq 2$ un entier fixé et $f : \mathbb{R}^+ = [0, +\infty[ \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par la formule suivante :

$$f(x) = \frac{1+x^n}{(1+x)^n}, \quad x \geq 0.$$

1. (a) Montrer que $f$ est dérivable sur $\mathbb{R}^+$ et calculer $f'(x)$ pour $x \geq 0$.
   (b) En étudiant le signe de $f'(x)$ sur $\mathbb{R}^+$, montrer que $f$ atteint un minimum sur $\mathbb{R}^+$ que l'on déterminera.
2. (a) En déduire l'inégalité suivante : $(1+x)^n \leq 2^{n-1}(1+x^n), \quad \forall x \in \mathbb{R}^+$.
   (b) Montrer que si $x \in \mathbb{R}^+$ et $y \in \mathbb{R}^+$ alors on a : $(x+y)^n \leq 2^{n-1}(x^n+y^n)$.

---

**Exercice 3. (*)**

Etudier la dérivabilité en 0 des fonctions :

1. $f : x \mapsto \cos\sqrt{x}$, $x \geq 0$.
2. $g : x \mapsto x^2\tan\frac{1}{x}\sin\frac{2}{x}$ si $x \neq 0$ et $g(0) = 0$.

---

**Exercice 4. (*)**

Soit $f$ de classe $C^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ telle que $\lim\limits_{x\to+\infty} xf'(x) = 1$. Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

---

**Exercice 5. (**)**

Soit $f \in C^1([a,b], \mathbb{R})$ telle que

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = \sup\{f'(x),\ x \in [a,b]\}$$

Montrer que $f$ est affine.

---

**Exercice 6. (**)**

Montrer que le polynôme $X^n + aX + b$, ($a$ et $b$ réels) admet au plus trois racines réelles.

---

**Exercice 7. (*)**

Démontrer que les courbes d'équation $y = x^2$ et $y = 1/x$ admettent une unique tangente commune.

---

**Exercice 8. (**)**

Soit $P$ un polynôme réel de degré supèrieur ou égal à 2.

1. Montrer que si $P$ n'a que des racines simples et réelles, il en est de même de $P'$.
2. Montrer que si $P$ est scindé sur $\mathbb{R}$, il en est de même de $P'$.

---

**Exercice 9. (***)** *"Polynômes de* LEGENDRE*"*

Pour $n$ entier naturel non nul donné, on pose $L_n = ((X^2-1)^n)^{(n)}$.

1. Déterminer le degré et le coefficient dominant de $L_n$.
2. En étudiant le polynôme $A_n = (X^2-1)^n$, montrer que $L_n$ admet $n$ racines réelles simples et toutes dans $]-1;1[$.

---

**Exercice 10. (**)**

Soit $f$ une fonction dérivable en un point $x_0$. Montrer que

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{2h} = f'(x_0).$$

Réciproquement, si la limite précédente existe, peut-on dire que $f$ est dérivable en $x_0$ ?

---

**Exercice 11. (**)** "ROLLE *à l'infini"*

Soit $f : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction continue, dérivable sur $]0,+\infty[$ et telle que $f(0) = \lim\limits_{+\infty} f = 0$.

On souhaite démontrer qu'il existe $d \in ]0,+\infty[$ tel que $f'(d) = 0$. Le résultat étant direct si $f$ est identiquement nulle, on suppose que ce n'est pas le cas et qu'il existe $c \in ]0,+\infty[$ tel que $f(c) > 0$ (le cas où $f(c) < 0$ étant similaire).

1. Démontrer qu'il existe $a \in ]0,c[$ et $b \in ]c,+\infty[$ tel que $f(a) = f(b)$.
2. Conclure.

---

## Fonctions de régularité supérieure :

**Exercice 12. (*)**

Soit $n \geq 1$ et $1 \leq k \leq n$.

1. Calculer la dérivée $k$-ème de $x \mapsto x^{n-1}$ et $x \mapsto \ln(1+x)$.
2. En déduire la dérivée $n$-ième de la fonction suivante : $x \mapsto x^{n-1}\ln(1+x)$.

---

**Exercice 13. (**)**

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ $n$ fois dérivable.

1. On suppose que $f$ s'annule en $(n+1)$ points distincts de $[a,b]$. Démontrer qu'il existe $c \in ]a,b[$ tel que $f^{(n)}(c) = 0$.
2. On suppose que $f(a) = f'(a) = \cdots = f^{(n-1)}(a) = f(b) = 0$. Démontrer qu'il existe $c \in ]a,b[$ tel que $f^{(n)}(c) = 0$.

---

**Exercice 14. (**)**

On considère la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(t) = \begin{cases} e^{1/t} & \text{si } t < 0 \\ 0 & \text{si } t \geq 0 \end{cases}$$

1. Démontrer que $f$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, en particulier en $t = 0$.
2. Etudier l'existence de $f''(0)$.
3. On veut montrer que pour $t < 0$, la dérivée $n$-ième de $f$ s'écrit

$$f^{(n)}(t) = \frac{P_n(t)}{t^{2n}} e^{1/t}$$

   où $P_n$ est un polynôme.
   (a) Trouver $P_1$ et $P_2$.
   (b) Trouver une relation de récurrence entre $P_{n+1}, P_n$ et $P_n'$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.
4. Montrer que $f$ est de classe $C^\infty$.

**Exercice 15. (**)**

Déterminer dans chacun des cas suivants la dérivée $n$-ème de la fonction proposée :

1. $x \mapsto x^{n-1} \ln(1+x)$
2. $x \mapsto \cos^3 x \sin(2x)$
3. $x \mapsto \frac{x^2+1}{(x-1)^3}$
4. $x \mapsto (x^3 + 2x - 7)e^x$

**Exercice 16. (**)**

Montrer que la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{-1/x^2}$ si $x \neq 0$ et $0$ si $x = 0$ est de classe $C^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

**Exercice 17. (***)**

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable telle que $f(0) = 0$. Montrer que $\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n^2}\right)$ admet une limite lorsque $n \to +\infty$ et la déterminer.

## Propriété des accroissements finis :

**Exercice 18. (*)**

Démontrer les inégalités suivantes :

1. $\forall x, y \in \mathbb{R},\ |\arctan(x) - \arctan(y)| \leq |x - y|$.
2. $\forall x \geq 0,\ x \leq e^x - 1 \leq x e^x$.

**Exercice 19. (*)**

Dans l'application du théorème des accroissements finis à la fonction

$$f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$$

sur l'intervalle $[a, b]$ préciser le nombre "$c$" de $]a, b[$. Donner une interprétation géométrique.

**Exercice 20. (***)**

*"Formule de* TAYLOR-LAGRANGE*"*

Soient $a$ et $b$ deux réels tels que $a < b$ et $n$ un entier naturel. Soit $f$ une fonction élément de $C^n([a, b], \mathbb{R}) \cap D^{n+1}(]a, b[, \mathbb{R})$. Montrer qu'il existe $c \in ]a, b[$ tel que

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k + \frac{(b-a)^{n+1} f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}.$$

Indication. Appliquer le théorème de ROLLE à la fonction $g(x) = f(b) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x)}{k!}(b-x)^k - A\frac{(b-x)^{n+1}}{(n+1)!}$ où $A$ est intelligemment choisi.

**Exercice 21. (**)** *"Règle de l'Hospital"*

Soient $f, g : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions continues sur $[a,b]$ $(a < b)$ et dérivables sur $]a,b[$. On suppose que $g'(x) \neq 0$ pour tout $x \in ]a,b[$.

1. Montrer que $g(x) \neq g(a)$ pour tout $x \in ]a,b[$.
2. Posons $p = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$ et considérons la fonction $h(x) = f(x) - pg(x)$ pour $x \in [a,b]$. Montrer que $h$ vérifie les hypothèses du théorème de Rolle et en déduire qu'il existe un nombre réel $c \in ]a,b[$ tel que
$$\frac{f(a)-f(b)}{g(a)-g(b)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$
3. On suppose que $\lim_{x\to b^-} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell$, où $\ell$ est un nombre réel. Montrer que
$$\lim_{x\to b^-} \frac{f(x)-f(b)}{g(x)-g(b)} = \ell.$$
4. *Application.* Calculer la limite suivante :
$$\lim_{x\to 1^-} \frac{\arccos x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

---

**Exercice 22. (**)**

Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $C^1$ vérifiant $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$. Démontrer que, pour tout $n \geq 1$, il existe $0 < x_1 < \cdots < x_n < 1$ vérifiant $f'(x_1) + \cdots + f'(x_n) = n$.

---

**Exercice 23. (**)**

On considère la suite récurrente définie par $u_0 \in \mathbb{R}^*$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, où $f$ la fonction définie par $f(x) = 1 + \frac{1}{4}\sin\frac{1}{x}$.

1. Déterminer $I = f(\mathbb{R}^*)$, et montrer que $I$ est stable par $f$.
2. Démontrer qu'il existe $\gamma \in I$ tel que $f(\gamma) = \gamma$.
3. Démontrer que, pour tout $x \in I$,
$$|f'(x)| \leq \frac{4}{9}.$$
4. Démontrer que $(u_n)$ converge vers $\gamma$.

---

**Exercice 24. (***)** *"Théorème de* DARBOUX*"*

Soit $I$ un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, et $f$ une fonction dérivable sur $I$. On veut prouver que $f'$ vérifie le théorème des valeurs intermédiaires.

1. Pourquoi n'est-ce pas un résultat direct ?
2. Soit $(a,b) \in I^2$, tel que $f'(a) < f'(b)$, et soit $z \in ]f'(a), f'(b)[$. Montrer qu'il existe $\alpha > 0$ tel que, pour tout réel $h \in ]0,\alpha]$, on ait :
$$\frac{1}{h}\left(f(a+h) - f(a)\right) < z < \frac{1}{h}\left(f(b+h) - f(b)\right).$$
3. En déduire l'existence d'un réel $h > 0$ et d'un point $y$ de $I$ tels que :
$$y + h \in I \text{ et } \frac{1}{h}\left(f(y+h) - f(y)\right) = z.$$
4. Montrer qu'il existe un point $x$ de $I$ tel que $z = f'(x)$.
5. En déduire que $f'(I)$ est un intervalle.
6. Soit $f(x) = x^2 \sin\left(\frac{1}{x^2}\right)$ sur $]0,1]$ et 0 en 0. Montrer que $f$ est dérivable sur $[0,1]$.
$f'$ est-elle continue sur $[0,1]$ ?
Déterminer $f'([0,1])$. Qu'en concluez-vous ?

---

**Exercice 25. (**)** *"Une approximation de e"*

On note $f$ la fonction définie sur $[1,e]$ par $f(x) = \frac{2x}{\ln(x)+1}$ et $g$ la fonction définie sur $[0,1]$ par $g(y) = \frac{2y}{(1+y)^2}$.

1. Démontrer que, pour tout $y \in [0,1]$, $0 \leq g(y) \leq \frac{1}{2}$.
2. Étudier $f$ et démontrer que l'intervalle $[1,e]$ est stable par $f$.
3. Démontrer que, pour tous $x, y \in [1,e]$, $|f(x) - f(y)| \leq \frac{1}{2}|x-y|$ (on pourra utiliser le résultat de la première question).
4. On définit une suite $(u_n)$ par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = f(u_n)$. Démontrer que, pour tout $n \geq 0$, $|u_n - e| \leq \frac{e-1}{2^n}$. Que peut-on en déduire sur $(u_n)$ ?
5. Déterminer un rang $n$ pour lequel $u_n$ est une approximation de $e$ à $10^{-3}$ près.

---

# Convexité :

**Exercice 26. (*)**

Soit $n \geq 2$.

1. Étudier la convexité de la fonction $f$ définie sur $[-1;+\infty[$ par $f(x) = (1+x)^n$.
2. En déduire que, pour tout $x \geq -1$, $(1+x)^n \geq 1 + nx$.

---

**Exercice 27. (*)**

Soit $f, g : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions convexes, avec $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle.

1. Est-ce que $\max(f,g)$ est toujours convexe ?
2. Est-ce que $\min(f,g)$ est toujours convexe ?

---

**Exercice 28. (**)**

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction convexe dérivable possédant une limite finie en $+\infty$.

1. Démontrer que $f$ est décroissante sur $\mathbb{R}$.
2. Démontrer que $f'$ tend vers 0 en $+\infty$.
3. Le résultat de la question précédente reste-t-il vrai si on ne suppose pas que $f$ est convexe ?

---

**Exercice 29. (**)**

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction convexe.

1. On suppose que $\lim\limits_{+\infty} f = 0$. Montrer que $f \geq 0$.
2. Montrer que la somme d'une fonction convexe et d'une fonction affine est convexe.
3. On suppose que la courbe représentative de $f$ admet une asymptote. Montrer que la courbe est (toujours) au-dessus de l'asymptote.

---

**Exercice 30. (**)**

Soit $f$ une fonction convexe sur un intervalle ouvert $I$ de $\mathbb{R}$. Montrer que $f$ est continue sur $I$ et même dérivable à droite et à gauche en tout point de $I$.

---

**Exercice 31. (***)**

1. Soient $x_1$, $x_2$,..., $x_n$, $n$ réels positifs ou nuls et $\alpha_1$,..., $\alpha_n$, $n$ réels strictement positifs tels que $\alpha_1 + ... + \alpha_n = 1$.
   Montrer que $x_1^{\alpha_1}..x_n^{\alpha_n} \leq \alpha_1 x_1 + ... + \alpha_n x_n$.
   En déduire que
   (Inégalité ARITHMÉTICO-GÉOMÉTRIQUE).
   $$\sqrt[n]{x_1 ... x_n} \leq \frac{x_1 + ... + x_n}{n}$$
2. Soient $p$ et $q$ deux réels strictement positifs tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.
   (a) Montrer que, pour tous réels $a$ et $b$ positifs ou nuls, $ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$ avec égalité si et seulement si $a^p = b^q$.
   (b) Soient $a_1$,..., $a_n$ et $b_1$,..., $b_n$, $2n$ nombres complexes. Montrer que :
   (Inégalité de HÖLDER).
   $$\left|\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right| \leq \sum_{k=1}^{n} |a_k b_k| \leq \left(\sum_{k=1}^{n} |a_k|^p\right)^{1/p} \left(\sum_{k=1}^{n} |b_k|^q\right)^{1/q}$$
   (c) Soit $p \geq 1$, montrer que la fonction $x \mapsto x^p$ est convexe sur $\mathbb{R}^+$ et retrouver ainsi l'inégalité de HÖLDER.
   (d) Trouver une démonstration dans le cas $p = q = 2$ à l'aide d'une fonction polynomiale du second degré (Inégalité de CAUCHY-SCHWARZ).

---