**Optimal Sup Spé, groupe IPESUP** **Année 2021-2022**
**Niveau : Première année de PCSI**
**M.Botcazou** **mail : ibotca52@gmail.com**

# COLLE 1 = SOMMES, PRODUITS ET FONCTIONS USUELLES

## Sommes :

**Exercice 1.**
On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \ \sum_{i=1}^{n} H_i = (n+1)H_n - n$$

---

**Exercice 2.**
Calculer $\sum_{k=1}^{n} k \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ en faisant apparaître un téléscopage.

---

**Exercice 3.**
Montrer en raisonnant par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$\sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}$$

---

**Exercice 4.**
Calculer $\sum_{k=2}^{n-1} \frac{3^k}{2^{2k-1}}$ pour tout $n \in \mathbb{N}, \ n \geq 3$

En déduire :

$$\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=2}^{n-1} \frac{3^k}{2^{2k-1}}$$

---

## Produits :

**Exercice 5.**

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\frac{(2n+1)!}{(n+1)!} \geq (n+1)^n$$

2. En déduire par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ :

$$\prod_{k=0}^{n-1} (2k+1)! \geq (n!)^n$$

---

**Exercice 6.**
Simplifier les produits suivants :

1. $\prod_{k=1}^{n} \sqrt{k(k+1)}$ 2. $\prod_{k=1}^{n} (-5)^{k^2-k}$

---

**Exercice 7.**

1. Montrer que :

$$\forall x > 0, \ x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x$$

2. Déterminer la limite de :

$$u_n = \prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{k}{n^2}\right)$$

---

**Exercice 8.**

1. Factoriser $(k^3 - 1)$ par $(k-1)$ et $(k^3+1)$ par $(k+1)$ pour tout $k \geq 2$
2. En déduire une simplification du produit

$$\prod_{k=2}^{n} \frac{k^3-1}{k^3+1}$$

3. En déduire l'existence et la valeur de

$$\lim_{n \to +\infty} \prod_{k=2}^{n} \frac{k^3-1}{k^3+1}$$

que l'on notera aussi $\prod_{k=2}^{+\infty} \frac{k^3-1}{k^3+1}$

---

## Fonctions usuelles :

**Exercice 9.**
Suivant la valeur de $x$ déterminer le signe de

1. $f(x) \ = \ \sqrt{x-1} - \sqrt{2x-3}$
2. $g(x) \ = \ \sqrt{|x-1|} - \sqrt{|2x-3|}$
3. $h(x) \ = \ \ln(x+3) + \ln(x+2) - \ln(x+11)$

---

**Exercice 10.** Montrer que pour tout $x \neq 0$,

$$\sum_{k=0}^{n} \cosh(kx) \ = \ \frac{\cosh\left(\frac{nx}{2}\right) \sinh\left(\frac{(n+1)x}{2}\right)}{\sinh\left(\frac{x}{2}\right)}$$

---

**Exercice 11.**

1. Déterminer les réels $a$ et $b$ tels que :

$$\forall x \in \mathbb{R}\backslash\{-1;0\}, \ \frac{1}{x(x+1)} \ = \ \frac{a}{x} + \frac{b}{x+1}$$

2. Pour $n$ dans $\mathbb{N}^*$, calculer la dérivée n-ième de

$$f : x \in \mathbb{R}\backslash\{-1;0\} \longmapsto \frac{1}{x(x+1)}$$

3. Trouver les nombres réels $x$ tels que :

$$f^{(n)}(x) \ = \ 0$$

---

**Exercice 12.** Démontrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $n \geq 1$, on a

$$\left(\frac{1+\tanh(x)}{1-\tanh(x)}\right)^n \ = \ \frac{1+\tanh(nx)}{1-\tanh(nx)}$$

---

**Exercice 13.** Résoudre l'équation $\cosh(x) = 2$.

---

## Exercice supplémentaire :

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $a_1, ...a_n, b_1, ..., b_n$ des nombres réels.
On définit la fonction $f$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R} \ , \ f(x) \ = \ \sum_{i=1}^{n} (a_i x + b_i)^2$$

Montrer l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\left|\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right| \ \leq \ \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2} \times \sqrt{\sum_{i=1}^{n} b_i^2}$$

(*Indication : remarquer que la fonction f est à valeur dans* $\mathbb{R}^+$)