

EXERCICE 1 - Identité remarquable

Soit $A, B \in M_2(R)$ les matrices définies par $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 01 \\ 32 \end{pmatrix}$. Comparer les deux matrices $(A + B)^2$

EXERCICE 2 - Produit non commutatif

Déterminer deux éléments A et B de $\mathcal{M}_2(R)$ tels que : $AB = 0$ et $BA \neq 0$.

EXERCICE 3 - Matrices stochastiques

Soit $A, B \in \mathcal{M}_n(R)$ deux matrices telles que la somme des coefficients sur chaque colonne de A et sur chaque colonne de B est égale à 1.

EXERCICE 4 - Puissance n -ième - avec la formule du binôme

Soit

Calculer B^n pour tout $n \in \mathbb{N}$. En déduire A^n .

EXERCICE 5 - Puissance n -ième - avec un polynôme annulateur

Pour $n \geq 2$, déterminer le reste de la division euclidienne de X^n par $X^2 - 3X + 2$.

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

$-12 - 1$

1 - 12. Déduire de la question précédente la valeur de A^n , pour $n \geq 2$.

EXERCICE 6 - Produit et somme de matrices nilpotentes

On dit qu'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(K)$ est nilpotente s'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $A^p = 0$. Démontrer que si $A, B \in \mathcal{M}_n(K)$ et A, B sont nilpotentes, alors $A + B$ est nilpotente.

EXERCICE 7 - Matrices symétriques et anti-symétriques

Montrer que l'ensemble des matrices symétriques ($A = {}^tA$) et l'ensemble des matrices anti-symétriques ($A = -{}^tA$) sont des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{M}_n(K)$.

EXERCICE 8 - Produit et trace

Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(R)$.

On suppose que $\text{tr}(AA^T) = 0$. Que dire de la matrice A ?

On suppose que, pour tout $X \in \mathcal{M}_n(R)$, on a $\text{tr}(AX) = \text{tr}(BX)$. Démontrer que $A = B$.

EXERCICE 9 - Centre de $\mathcal{M}_n(R)$.

Déterminer le centre de $\mathcal{M}_n(R)$, c'est-à-dire l'ensemble des matrices $A \in \mathcal{M}_n(R)$ telle que, pour tout $M \in \mathcal{M}_n(R)$, $AM = MA$.

EXERCICE 10 - Inverse avec calculs!

Dire si les matrices suivantes sont inversibles et, le cas échéant, calculer leur inverse :

EXERCICE 11 - Sans problèmes

Résoudre les systèmes linéaires suivants :

EXERCICE 12 - Trop d'inconnues ou d'équations

Résoudre les systèmes suivants :

EXERCICE 13 - Paramètre dans le second membre

Discuter suivant la valeur du paramètre $m \in R$ le système :

EXERCICE 14 - Discussion suivant deux valeurs