

FEUILLE 1 (★★)

Exercice :

Soit E un espace vectoriel de dimension finie, $u \in \mathcal{L}(E)$ nilpotent d'indice p et $\Phi : v \in \mathcal{L}(E) \mapsto u \circ v - v \circ u$.

1. Montrer que Φ est nilpotente et majorer son indice de nilpotence.

2. Soit $a \in \mathcal{L}(E)$.

Montrer qu'il existe $b \in \mathcal{L}(E)$ tel que $a \circ b \circ a = a$.

3. En déduire l'indice de nilpotence de Φ .