Fonctions dérivables

1 Calculs

Exercice 1

Déterminer $a, b \in \mathbb{R}$ de manière à ce que la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+$ par :

$$f(x) = \sqrt{x} \quad \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 1 \qquad \text{et} \qquad f(x) = ax^2 + bx + 1 \quad \text{si } x > 1$$

soit dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.

Indication ▼ Correction ▼ Vidéo ■ [000699]

Exercice 2

Soit $f : \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2 \sin \frac{1}{x}$. Montrer que f est prolongeable par continuité en 0 ; on note encore f la fonction prolongée. Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ mais que f' n'est pas continue en 0.

Indication ▼ Correction ▼ Vidéo ■ [000700]

Exercice 3

Étudier la dérivabilité des fonctions suivantes :

$$f_1(x) = x^2 \cos \frac{1}{x}, \quad \text{si } x \neq 0 \qquad ; \qquad f_1(0) = 0;$$

$$f_2(x) = \sin x \cdot \sin \frac{1}{x}, \quad \text{si } x \neq 0 \qquad ; \qquad f_2(0) = 0;$$

$$f_3(x) = \frac{|x|\sqrt{x^2 - 2x + 1}}{x - 1}, \quad \text{si } x \neq 1 \qquad ; \qquad f_3(1) = 1.$$

Indication ▼ Correction ▼ Vidéo ■ [000698]

Exercice 4

Soit $n \geqslant 2$ un entier fixé et $f : \mathbb{R}^+ = [0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par la formule suivante :

$$f(x) = \frac{1 + x^n}{(1 + x)^n}, \quad x \geqslant 0.$$

1. (a) Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}^+$ et calculer $f'(x)$ pour $x \geqslant 0$.
   (b) En étudiant le signe de $f'(x)$ sur $\mathbb{R}^+$, montrer que f atteint un minimum sur $\mathbb{R}^+$ que l'on déterminera.
2. (a) En déduire l'inégalité suivante :

   $$(1 + x)^n \leqslant 2^{n-1}(1 + x^n), \quad \forall x \in \mathbb{R}^+.$$

   (b) Montrer que si $x \in \mathbb{R}^+$ et $y \in \mathbb{R}^+$ alors on a

   $$(x + y)^n \leqslant 2^{n-1}(x^n + y^n).$$

Correction ▼ Vidéo ■ [000739]

2 Théorème de Rolle et accroissements finis

Exercice 5

Montrer que le polynôme $X^n + aX + b$, (a et b réels) admet au plus trois racines réelles.

Indication ▼ Correction ▼ Vidéo ■ [000717]

Exercice 6

Montrer que le polynôme P_n défini par

$$P_n(t) = \left[\left(1-t^2\right)^n\right]^{(n)}$$

est un polynôme de degré n dont les racines sont réelles, simples, et appartiennent à $[-1,1]$.

Indication ▼ Correction ▼ Vidéo ■ [000715]

Exercice 7

Dans l'application du théorème des accroissements finis à la fonction

$$f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$$

sur l'intervalle $[a,b]$ préciser le nombre "c" de $]a,b[$. Donner une interprétation géométrique.

Correction ▼ Vidéo ■ [000721]

Exercice 8

Soient x et y réels avec $0 < x < y$.

1. Montrer que
$$x < \frac{y-x}{\ln y - \ln x} < y.$$
2. On considère la fonction f définie sur $[0,1]$ par
$$\alpha \mapsto f(\alpha) = \ln(\alpha x + (1-\alpha)y) - \alpha \ln x - (1-\alpha)\ln y.$$
De l'étude de f déduire que pour tout α de $]0,1[$
$$\alpha \ln x + (1-\alpha)\ln y < \ln(\alpha x + (1-\alpha)y).$$
Interprétation géométrique ?

Indication ▼ Correction ▼ Vidéo ■ [000724]

3 Divers

Exercice 9

Déterminer les extremums de $f(x) = x^4 - x^3 + 1$ sur $\mathbb{R}$.

Correction ▼ Vidéo ■ [000733]

Exercice 10

Soient $f,g : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions continues sur $[a,b]$ $(a<b)$ et dérivables sur $]a,b[$. On suppose que $g'(x) \neq 0$ pour tout $x \in]a,b[$.

1. Montrer que $g(x) \neq g(a)$ pour tout $x \in]a,b[$.
2. Posons $p = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$ et considérons la fonction $h(x) = f(x) - pg(x)$ pour $x \in [a,b]$. Montrer que h vérifie les hypothèses du théorème de Rolle et en déduire qu'il existe un nombre réel $c \in]a,b[$ tel que
$$\frac{f(a)-f(b)}{g(a)-g(b)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

3. On suppose que $\lim_{x\to b^-} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell$, où ℓ est un nombre réel. Montrer que
$$\lim_{x\to b^-} \frac{f(x)-f(b)}{g(x)-g(b)} = \ell.$$
4. *Application.* Calculer la limite suivante :
$$\lim_{x\to 1^-} \frac{\arccos x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Indication ▼ Correction ▼ Vidéo ■ [000738]

Exercice 11

On considère la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par
$$f(t) = \begin{cases} e^{1/t} & \text{si } t < 0 \\ 0 & \text{si } t \geqslant 0 \end{cases}$$

1. Démontrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$, en particulier en $t = 0$.
2. Etudier l'existence de $f''(0)$.
3. On veut montrer que pour $t < 0$, la dérivée n-ième de f s'écrit
$$f^{(n)}(t) = \frac{P_n(t)}{t^{2n}} e^{1/t}$$
où P_n est un polynôme.
   (a) Trouver P_1 et P_2.
   (b) Trouver une relation de récurrence entre P_{n+1}, P_n et P_n' pour $n \in \mathbb{N}^*$.
4. Montrer que f est de classe C^∞.

Correction ▼ Vidéo ■ [000740]

Indication pour l'exercice 1 ▲

Vous avez deux conditions : il faut que la fonction soit continue (car on veut qu'elle soit dérivable donc elle doit être continue) et ensuite la condition de dérivabilité proprement dite.

Indication pour l'exercice 2 ▲

f est continue en 0 en la prolongeant par $f(0) = 0$. f est alors dérivable en 0 et $f'(0) = 0$.

Indication pour l'exercice 3 ▲

Les problèmes sont seulement en 0 ou 1. f_1 est dérivable en 0 mais pas f_2. f_3 n'est dérivable ni en 0, ni en 1.

Indication pour l'exercice 5 ▲

On peut appliquer le théorème de Rolle plusieurs fois.

Indication pour l'exercice 6 ▲

Il faut appliquer le théorème de Rolle une fois au polynôme $(1-t^2)^n$, puis deux fois à sa dérivée première, puis trois fois à sa dérivée seconde,...

Indication pour l'exercice 8 ▲

1. Utiliser le théorème des accroissements finis avec la fonction $t \mapsto \ln t$
2. Montrer d'abord que f'' est négative. Se servir du théorème des valeurs intermédiaires pour f'.

Indication pour l'exercice 10 ▲

1. Raisonner par l'absurde et appliquer le théorème de Rolle.
2. Calculer $h(a)$ et $h(b)$.
3. Appliquer la question 2. sur l'intervalle $[x,b]$.
4. Calculer f' et g'.

Correction de l'exercice 1 ▲

La fonction f est continue et dérivable sur $]0,1[$ et sur $]1,+\infty[$. Le seul problème est en $x=1$.
Il faut d'abord que la fonction soit continue en $x=1$. La limite à gauche est $\lim_{x\to 1^-}\sqrt{x}=+1$ et à droite $\lim_{x\to 1^+} ax^2+bx+1=a+b+1$. Donc $a+b+1=1$. Autrement dit $b=-a$.
Il faut maintenant que les dérivées à droite et à gauche soient égales. Comme la fonction f restreinte à $]0,1]$ est définie par $x\mapsto\sqrt{x}$ alors elle est dérivable à gauche et la dérivée à gauche s'obtient en évaluant la fonction dérivée $x\mapsto\frac{1}{2\sqrt{x}}$ en $x=1$. Donc $f'_g(1)=\frac{1}{2}$.
Pour la dérivée à droite il s'agit de calculer la limite du taux d'accroissement $\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$, lorsque $x\to 1$ avec $x>1$. Or

$$\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\frac{ax^2+bx+1-1}{x-1}=\frac{ax^2-ax}{x-1}=\frac{ax(x-1)}{x-1}=ax.$$

Donc f est dérivable à droite et $f'_d(1)=a$. Afin que f soit dérivable, il faut et il suffit que les dérivées à droite et à gauche existent et soient égales, donc ici la condition est $a=\frac{1}{2}$.
Le seul couple (a,b) que rend f dérivable sur $]0,+\infty[$ est $(a=\frac{1}{2},b=-\frac{1}{2})$.

Correction de l'exercice 2 ▲

f est C^∞ sur $\mathbb{R}^*$.

1. Comme $|\sin(1/x)|\leqslant 1$ alors f tend vers 0 quand $x\to 0$. Donc en prolongeant f par $f(0)=0$, la fonction f prolongée est continue sur $\mathbb{R}$.
2. Le taux d'accroissement est
$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=x\sin\frac{1}{x}.$$
Comme ci-dessus il y a une limite (qui vaut 0) en $x=0$. Donc f est dérivable en 0 et $f'(0)=0$.
3. Sur $\mathbb{R}^*$, $f'(x)=2x\sin(1/x)-\cos(1/x)$, Donc $f'(x)$ n'a pas de limite quand $x\to 0$. Donc f' n'est pas continue en 0.

Correction de l'exercice 3 ▲

1. La fonction f_1 est dérivable en dehors de $x=0$. En effet $x\mapsto\frac{1}{x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et $x\mapsto\cos x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, donc par composition $x\mapsto\cos\frac{1}{x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$. Puis par multiplication par la fonction dérivable $x\mapsto x^2$, la fonction f_1 est dérivable sur $\mathbb{R}^*$. Par la suite on omet souvent ce genre de discussion ou on l'abrège sous la forme "f est dérivable sur I comme somme, produit, composition de fonctions dérivables sur I".
Pour savoir si f_1 est dérivable en 0 regardons le taux d'accroissement :
$$\frac{f_1(x)-f_1(0)}{x-0}=x\cos\frac{1}{x}.$$
Mais $x\cos(1/x)$ tend vers 0 (si $x\to 0$) car $|\cos(1/x)|\leqslant 1$. Donc le taux d'accroissement tend vers 0. Donc f_1 est dérivable en 0 et $f_1'(0)=0$.
2. Encore une fois f_2 est dérivable en dehors de 0. Le taux d'accroissement en $x=0$ est :
$$\frac{f_2(x)-f_2(0)}{x-0}=\frac{\sin x}{x}\sin\frac{1}{x}$$
Nous savons que $\frac{\sin x}{x}\to 1$ et que $\sin 1/x$ n'a pas de limite quand $x\to 0$. Donc le taux d'accroissement n'a pas de limite, donc f_2 n'est pas dérivable en 0.
3. La fonction f_3 s'écrit :
$$f_3(x)=\frac{|x||x-1|}{x-1}.$$
   - Donc pour $x\geqslant 1$ on a $f_3(x)=x$; pour $0\leqslant x<1$ on a $f_3(x)=-x$; pour $x<0$ on a $f_3(x)=x$.
   - La fonction f_3 est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}\setminus\{0,1\}$. Attention ! La fonction $x\mapsto|x|$ n'est pas dérivable en 0.

— La fonction f_3 n'est pas continue en 1, en effet $\lim_{x\to 1+} f_3(x) = +1$ et $\lim_{x\to 1-} f_3(x) = -1$. Donc la fonction n'est pas dérivable en 1.

— La fonction f_3 est continue en 0. Le taux d'accroissement pour $x > 0$ est

$$\frac{f_3(x) - f_3(0)}{x-0} = \frac{-x}{x} = -1$$

et pour $x < 0$,

$$\frac{f_3(x) - f_3(0)}{x-0} = \frac{x}{x} = +1.$$

Donc le taux d'accroissement n'a pas de limite en 0 et donc f_3 n'est pas dérivable en 0.

Correction de l'exercice 4 ▲

1. (a) Il est clair que la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}^+$ puisque c'est une fonction rationnelle sans pôle dans cet intervalle. De plus d'après la formule de la dérivée d'un quotient, on obtient pour $x \geqslant 0$:

$$f'(x) = \frac{n(x^{n-1}-1)}{(1+x)^{n+1}}.$$

(b) Par l'expression précédente $f'(x)$ est du signe de $x^{n-1} - 1$ sur $\mathbb{R}^+$. Par conséquent on obtient : $f'(x) \leqslant 0$ pour $0 \leqslant x \leqslant 1$ et $f'(x) \geqslant 0$ pour $x \geqslant 1$. Il en résulte que f est décroissante sur $[0,1]$ et croissante sur $[1,+\infty[$ et par suite f atteint son minimum sur $\mathbb{R}^+$ au point 1 et ce minimum vaut $f(1) = 2^{1-n}$.

2. (a) Il résulte de la question 1.b que $f(x) \geqslant f(1)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^+$ et donc

$$(1+x)^n \leqslant 2^{n-1}(1+x^n).$$

(b) En appliquant l'inégalité précédente avec $x = b/a$, on en déduit immédiatement l'inégalité requise (le cas du couple $(0,0)$ étant trivial).

Correction de l'exercice 5 ▲

1. Par l'absurde on suppose qu'il y a (au moins) quatre racines distinctes pour $P_n(X) = X^n + aX + b$. Notons les $x_1 < x_2 < x_3 < x_4$. Par le théorème de Rolle appliqué trois fois (entre x_1 et x_2, entre x_2 et x_3,...) il existe $x'_1 < x'_2 < x'_3$ des racines de P'_n. On applique deux fois le théorème Rolle entre x'_1 et x'_2 et entre x'_2 et x'_3. On obtient deux racines distinctes pour P''_n. Or $P''_n = n(n-1)X^{n-2}$ ne peut avoir que 0 comme racines. Donc nous avons obtenu une contradiction.

2. *Autre méthode :* Le résultat est évident si $n \leqslant 3$. On suppose donc $n \geqslant 3$. Soit P_n l'application $X \mapsto X^n + aX + b$ de $\mathbb{R}$ dans lui-même. Alors $P'_n(X) = nX^{n-1} + a$ s'annule en au plus deux valeurs. Donc P_n est successivement croissante-décroissante-croissante ou bien décroissante-croissante-décroissante. Et donc P_n s'annule au plus trois fois.

Correction de l'exercice 6 ▲

$Q_n(t) = (1-t^2)^n$ est un polynôme de degré $2n$, on le dérive n fois, on obtient un polynôme de degré n. Les valeurs -1 et $+1$ sont des racines d'ordre n de Q_n, donc $Q_n(1) = Q'_n(1) = \ldots = Q_n^{(n-1)}(1) = 0$. Même chose en -1. Enfin $Q(-1) = 0 = Q(+1)$ donc d'après le théorème de Rolle il existe $c \in]-1,1[$ telle que $Q'_n(c) = 0$. Donc $Q'_n(-1) = 0$, $Q'_n(c) = 0$, $Q'_n(-1) = 0$. En appliquant le théorème de Rolle deux fois (sur $[-1,c]$ et sur $[c,+1]$), on obtient l'existence de racines d_1, d_2 pour Q''_n, qui s'ajoutent aux racines -1 et $+1$.
On continue ainsi par récurrence. On obtient pour $Q_n^{(n-1)}$, $n+1$ racines : $-1, e_1, \ldots, e_{n-1}, +1$. Nous appliquons le théorème de Rolle n fois. Nous obtenons n racines pour $P_n = Q_n^{(n)}$. Comme un polynôme de degré n a au plus n racines, nous avons obtenu toutes les racines. Par constructions ces racines sont réelles distinctes, donc simples.

Correction de l'exercice 7 ▲

La fonction f est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ donc en particulier sur $[a,b]$. Le théorème des accroissement finis assure l'existence d'un nombre $c \in]a,b[$ tel que $f(b)-f(a) = f'(c)(b-a)$.

Mais pour la fonction particulière de cet exercice nous pouvons expliciter ce c. En effet $f(b)-f(a) = f'(c)(b-a)$ implique $\alpha(b^2-a^2)+\beta(b-a) = (2\alpha c+\beta)(b-a)$. Donc $c = \frac{a+b}{2}$.

Géométriquement, le graphe $\mathscr{P}$ de f est une parabole. Si l'on prend deux points $A = (a, f(a))$ et $B = (b, f(b))$ appartenant à cette parabole, alors la droite (AB) est parallèle à la tangente en $\mathscr{P}$ qui passe en $M = (\frac{a+b}{2}, f(\frac{a+b}{2}))$. L'abscisse de M étant le milieu des abscisses de A et B.

Correction de l'exercice 8 ▲

1. Soit $g(t) = \ln t$. Appliquons le théorème des accroissements finis sur $[x,y]$. Il existe $c \in]x,y[$, $g(y)-g(x) = g'(c)(y-x)$. Soit $\ln y - \ln x = \frac{1}{c}(y-x)$. Donc $\frac{\ln y - \ln x}{y-x} = \frac{1}{c}$. Or $x < c < y$ donc $\frac{1}{y} < \frac{1}{c} < \frac{1}{x}$. Ce qui donne les inégalités recherchées.
2. $f'(\alpha) = \frac{x-y}{\alpha x+(1-\alpha)y} - \ln x + \ln y$. Et $f''(\alpha) = -\frac{(x-y)^2}{(\alpha x+(1-\alpha)y)^2}$. Comme f'' est négative alors f' est décroissante sur $[0,1]$. Or $f'(0) = \frac{x-y-y(\ln x - \ln y)}{y} > 0$ d'après la première question et de même $f'(1) < 0$. Par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $c \in [x,y]$ tel que $f'(c) = 0$. Maintenant f' est positive sur $[0,c]$ et négative sur $[c,1]$. Donc f est croissante sur $[0,c]$ et décroissante sur $[c,1]$. Or $f(0) = 0$ et $f(1) = 0$ donc pour tout $x \in [0,1]$, $f(x) \geqslant 0$. Cela prouve l'inégalité demandée.
3. Géométriquement nous avons prouvé que la fonction ln est concave, c'est-à-dire que la corde (le segment qui va de $(x, f(x))$ à $(y, f(y))$ est sous la courbe d'équation $y = f(x)$.

Correction de l'exercice 9 ▲

$f'(x) = 4x^3-3x^2 = x^2(4x-3)$ donc les extremums appartiennent à $\{0, \frac{3}{4}\}$. Comme $f''(x) = 12x^2-6x = 6x(2x-1)$. Alors f'' ne s'annule pas en $\frac{3}{4}$, donc $\frac{3}{4}$ donne un extremum local (qui est même un minimum global). Par contre $f''(0) = 0$ et $f'''(0) \neq 0$ donc 0 est un point d'inflexion qui n'est pas un extremum (même pas local, pensez à un fonction du type $x \mapsto x^3$).

Correction de l'exercice 10 ▲

Le théorème de Rolle dit que si $h : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue sur l'intervalle fermé $[a,b]$ et dérivable sur l'ouvert $]a,b[$ alors il existe $c \in]a,b[$ tel que $h'(c) = 0$.

1. Supposons par l'absurde, qu'il existe $x_0 \in]a,b]$ tel que $g(x_0) = g(a)$. Alors en appliquant le théorème de Rolle à la restriction de g à l'intervalle $[a,x_0]$ (les hypothèses étant clairement vérifiées), on en déduit qu'il existe $c \in]a,x_0[$ tel que $g'(c) = 0$, ce qui contredit les hypothèses faites sur g. Par conséquent on a démontré que $g(x) \neq g(a)$ pour tout $x \in]a,b]$.
2. D'après la question précédente, on a en particulier $g(b) \neq g(a)$ et donc p est un nombre réel bien défini et $h = f - p \cdot g$ est alors une fonction continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$. Un calcul simple montre que $h(a) = h(b)$. D'après le théorème de Rolle il en résulte qu'il existe $c \in]a,b[$ tel que $h'(c) = 0$. Ce qui implique la relation requise.
3. Pour chaque $x \in]a,b[$, on peut appliquer la question 2. aux restrictions de f et g à l'intervalle $[x,b]$, on en déduit qu'il existe un point $c(x) \in]x,b[$, dépendant de x tel que

$$(*) \qquad \frac{f(x)-f(b)}{g(x)-g(b)} = \frac{f'(c(x))}{g'(c(x))}.$$

Alors, comme $\lim_{x\to b^-} \frac{f'(t)}{g'(t)} = \ell$ et $\lim_{x\to b^-} c(x) = b$, (car $c(x) \in]x,b[$) on en déduit en passant à la limite dans $(*)$ que

$$\lim_{x\to b^-} \frac{f(x)-f(b)}{g(x)-g(b)} = \ell.$$

Ce résultat est connu sous le nom de “règle de l'Hôpital”.

4. Considérons les deux fonctions $f(x) = \arccos x$ et $g(x) = \sqrt{1-x^2}$ pour $x \in [0,1]$. Ces fonctions sont continues sur $[0,1]$ et dérivables sur $]0,1[$ et $f'(x) = -1/\sqrt{1-x^2}$, $g'(x) = -x/\sqrt{1-x^2} \neq 0$ pour tout $x \in]0,1[$. En appliquant les résultats de la question 3., on en déduit que

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{\arccos x}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{x\to 1^-} \frac{\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}}{\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}} = \lim_{x\to 1^-} \frac{1}{x} = 1.$$

Correction de l'exercice 11 ▲

1. f est dérivable sur $\mathbb{R}_-^*$ en tant que composée de fonctions dérivables, et sur $\mathbb{R}_+^*$ car elle est nulle sur cet intervalle ; étudions donc la dérivabilité en 0.
   On a
   $$\frac{f(t)-f(0)}{t} = \begin{cases} e^{1/t}/t & \text{si } t<0 \\ 0 & \text{si } t>0 \end{cases}$$
   or $e^{1/t}/t$ tend vers 0 quand t tend vers 0 par valeurs négatives. Donc f est dérivable à gauche et à droite en 0 et ces dérivées sont identiques, donc f est dérivable et $f'(0) = 0$.
2. On a
   $$f'(t) = \begin{cases} -e^{1/t}/t^2 & \text{si } t<0 \\ 0 & \text{si } t\geqslant 0 \end{cases}$$
   donc le taux d'accroissement de f' au voisinage de 0 est
   $$\frac{f'(t)-f'(0)}{t} = \begin{cases} -e^{1/t}/t^3 & \text{si } t<0 \\ 0 & \text{si } t>0 \end{cases}$$
   et il tend vers 0 quand t tend vers 0 par valeurs supérieures comme inférieures. Donc f admet une dérivée seconde en 0, et $f''(0) = 0$.
3. (a) On a déjà trouvé que $f'(t) = -e^{1/t}/t^2$, donc $f'(t) = P_1(t)/t^2 e^{1/t}$ si on pose $P_1(t) = -1$.
   Par ailleurs, $f''(t) = e^{1/t}/t^4 + e^{1/t}(2/t^3) = \frac{1+2t}{t^4}e^{1/t}$ donc la formule est vraie pour $n=2$ en posant $P_2(t) = 1+2t$.

   (b) Supposons que la formule est vraie au rang n. Alors $f^{(n)}(t) = \frac{P_n(t)}{t^{2n}}e^{1/t}$ d'où
   $$\begin{aligned} f^{(n+1)}(t) &= \frac{P_n'(t)t^{2n} - P_n(t)(2n)t^{2n-1}}{t^{4n}}e^{1/t} + \frac{P_n(t)}{t^{2n}}e^{1/t}(-1/t^2) \\ &= \frac{P_n'(t)t^2 - (2nt+1)P_n(t)}{t^{2(n+1)}}e^{1/t} \end{aligned}$$
   donc la formule est vraie au rang $n+1$ avec
   $$P_{n+1}(t) = P_n'(t)t^2 - (2nt+1)P_n(t).$$
4. Sur $\mathbb{R}_-^*$ et sur $\mathbb{R}_+^*$, f est indéfiniment dérivable, donc il suffit d'étudier ce qui se passe en 0.
   Montrons par récurrence que f est indéfiniment dérivable en 0, et que pour tout $n \in \mathbb{N}, f^{(n)}(0) = 0$. On sait que c'est vrai au rang 1. Supposons que f est n-fois dérivable, et que $f^{(n)}(0) = 0$. Alors le taux d'accroissement de $f^{(n)}$ en 0 est :
   $$\frac{f^{(n)}(t)-f^{(n)}(0)}{t} = \begin{cases} P_n(t)e^{1/t}/t^{2n+1} & \text{si } t<0 \\ 0 & \text{si } t>0 \end{cases}$$
   et sa limite est 0 quand t tend vers 0 par valeurs supérieures comme inférieures. Donc $f^{(n)}$ est dérivable en 0, et $f^{(n+1)}(0) = 0$. Donc l'hypothèse de récurrence est vérifiée au rang $n+1$.
   Par conséquent, f est de classe C^∞.
