VOCABULAIRE USUEL

1

1) Montrer que la fonction $x \longmapsto x - \dfrac{1}{x}$ est injective sur $\mathbb{R}_+^*$. Et sur $\mathbb{R}^*$?

2) **a)** La fonction $x \longmapsto x\mathrm{e}^x$ est-elle injective sur $\mathbb{R}$?
b) Déterminer son image.

3) Déterminer l'image de la fonction $x \longmapsto x^n \ln x$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

4) **a)** La fonction $x \overset{f}{\longmapsto} \sqrt{x^2+x+1}$ est-elle injective sur $\mathbb{R}$?
b) Déterminer $f\big(]-2,4]\big)$.

5) **a)** Sur quels intervalles (les plus grands possible) la fonction $x \overset{f}{\longmapsto} x^2+4x+1$ est-elle injective ?
b) Déterminer $f\big([-3,0]\big)$.

---

2 Tracer rapidement l'allure du graphe des fonctions :

1) $x \longmapsto \sqrt{3x-4}$. **2)** $x \longmapsto \dfrac{5}{2x+1}$.

3) $x \longmapsto 1+\ln(2-x)$.

---

3 On note f la fonction $x \longmapsto \sqrt{2-x}$.

1) Tracer rapidement l'allure du graphe de f.

2) Déterminer les points fixes de f et montrer que $[0,2]$ et $[-2,2]$ sont stables par f.

4

1) Montrer, grâce au TVI strictement monotone, que la fonction $x \overset{f}{\longmapsto} \sqrt{x^3-1}$ est bijective de $[1,+\infty[$ sur son image (à préciser).

2) Retrouver le résultat de la question **1)** et déterminer une expression explicite de f^{-1} en résolvant l'équation $y=f(x)$ d'inconnue $x \in [1,+\infty[$.

---

5 Montrer que la fonction $x \longmapsto \sqrt{x^2-1}$ est bijective de $[1,+\infty[$ sur son image (à préciser) et déterminer une expression explicite de sa réciproque.

6

1) Montrer que la somme d'une fonction croissante et d'une fonction décroissante peut n'être ni croissante ni décroissante.

2) Montrer que la somme de deux fonctions majorées (resp. bornées) est majorée (resp. bornée).

3) Le produit de deux fonctions majorées (resp. bornées) est-il majoré (resp. borné) ?

---

7 Que dire de la dérivée d'une fonction dérivable paire ? impaire ? périodique ?

---

8 Déterminer une expression explicite de la fonction affine f dans chacun des cas suivants :

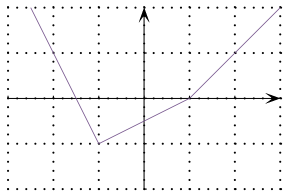
1) Le graphe de f coupe l'axe des abscisses en 3 et a pour pente 2.

2) Le graphe de f passe par les points de coordonnées $(-1,2)$ et $(2,1)$.

9

1) Tracer le graphe de $x \longmapsto 2|x-1|-|x+1|$.

2) Déterminer une expression explicite par morceaux de la fonction représentée ci-dessous.



---

10 Déterminer les ensembles de définition, de continuité et de dérivabilité des fonctions :

1) $x \longmapsto \sqrt{\ln x}$. **2)** $x \longmapsto \ln\big(4x-x^2\big)$.

3) $x \longmapsto \sqrt{2-|x-3|}$. **4)** $x \longmapsto \sqrt{\mathrm{e}^x+2\mathrm{e}^{-x}-3}$.

5) $x \longmapsto \dfrac{\ln\big(x^2-4\big)}{\sqrt{4x^2-2x+1}}$.

11

1) Étudier la parité/imparité, les variations, les limites aux bornes et la convexité/concavité de la fonctions $x \longmapsto \dfrac{x^3}{x^2-3}$.

2) Même question sans la convexité/concavité avec la fonction $x \longmapsto \sqrt{\dfrac{\ln|x|}{x}}$.

---

12 Déterminer le nombre de racines réelles des fonctions polynomiales : **1)** $x \longmapsto x^5-x^3+1$.

2) $x \longmapsto 4x^3-18x^2+24x-9$.

LOGARITHME, EXPONENTIELLE ET PUISSANCES

13

1) Étudier pour tout $a>0$ les variations de la fonction $x \longmapsto a^x$ sur $\mathbb{R}$, dite *exponentielle de base* a.

2) Résoudre l'équation $2^x+3^x=5$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

14

1) Étudier les variations, les limites aux bornes et la convexité/concavité de la fonction $x \overset{f}{\longmapsto} x^x$.

2) Combien l'équation $y=x^x$ d'inconnue $x>0$ possède-t-elle de solutions pour tout $y \in \mathbb{R}$?

15

1) Montrer que l'équation $x\ln x = 1$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}_+^*$ possède une et une seule solution.

2) Montrer que l'équation $e^{-x^2} = e^x - 1$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$ possède une et une seule solution.

3) Combien la fonction $x \longmapsto 1 + \dfrac{x}{\ln x}$ possède-t-elle de points fixes ?

4) Montrer que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(0) = 1$ et pour tout $x \in \mathbb{R}^*$: $f(x) = \dfrac{e^x - 1}{x}$ est bijective de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

16

1) Comparer $(1+x)^\alpha$ et $1 + \alpha x$ pour tous $\alpha \in \mathbb{R}$ et $x > -1$.

2) En déduire que pour tous $\alpha \in [0,1]$ et $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\prod_{k=1}^{n}\left(1 + \frac{\alpha}{k}\right) \geqslant (n+1)^\alpha.$$

---

17 Montrer que pour tout $n \geqslant 2$:

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leqslant e \leqslant \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{-n}.$$

---

18 Montrer, en étudiant une fonction **BIEN CHOISIE**, que :

1) pour tout $x \leqslant 1$: $\quad e^x \leqslant 1 + x + \dfrac{ex^2}{2}$.

2) pour tout $x \in]0,1[$: $\quad x^x(1-x)^{1-x} \geqslant \dfrac{1}{2}$.

3) pour tout $x \in \mathbb{R}^*$: $\quad \dfrac{e^x - 1}{x} \geqslant x + e - 2$.

4) pour tout $x > 0$:

$$x\ln x - (x-1) \geqslant \frac{3(x-1)^2}{2(x+2)}.$$

19

1) **a)** Étudier le signe de :

$$x \longmapsto (x-1)\ln(1+x) - x\ln x \quad \text{sur } [1, +\infty[.$$

b) En déduire les variations de :

$$x \overset{\varphi}{\longmapsto} \ln(1+x)\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) \quad \text{sur } [1, +\infty[.$$

c) En déduire les variations de φ sur $\mathbb{R}_+^*$. On pourra s'intéresser à la fonction $x \longmapsto \varphi\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

2) En déduire que pour tous $a, b > 0$:

$$\ln\left(1 + \frac{a}{b}\right)\ln\left(1 + \frac{b}{a}\right) \leqslant (\ln 2)^2.$$

---

20 Soit $p \in]0,1[$. On pose $q = 1 - p$ et on note f la fonction $x \longmapsto \ln\dfrac{1+qx}{1-px}$.

1) Étudier les variations de f et ses limites aux bornes.

2) Montrer que pour tout x bien choisi :

$$f\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q} - x\right) = 2\ln\frac{q}{p} - f(x).$$

Qu'en déduit-on sur le graphe de f ?

---

21 Soit $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$ une fonction. On suppose que pour tout $x \geqslant 0$: $\quad f(x)\,e^{f(x)} = x$. Étudier les variations de f.

---

22 Montrer l'inégalité : $\quad e^x \geqslant \displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}$ pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $x \geqslant 0$.

FONCTIONS HYPERBOLIQUES

23 Montrer que pour tous $x, y \in \mathbb{R}$:

1) $\mathrm{sh}(x+y) = \mathrm{sh}\,x\,\mathrm{ch}\,y + \mathrm{ch}\,x\,\mathrm{sh}\,y$.

2) $\mathrm{ch}(x+y) = \mathrm{ch}\,x\,\mathrm{ch}\,y + \mathrm{sh}\,x\,\mathrm{sh}\,y$.

3) $\mathrm{th}(x+y) = \dfrac{\mathrm{th}\,x + \mathrm{th}\,y}{1 + \mathrm{th}\,x\,\mathrm{th}\,y}$.

---

24 Montrer que la fonction $x \longmapsto \dfrac{1}{\mathrm{ch}\,x}$ possède un unique point fixe.

---

25 Montrer que :

1) pour tout $x \geqslant 0$: $\quad \mathrm{sh}\,x \geqslant x$

$$\text{et} \quad \mathrm{ch}\,x \geqslant 1 + \frac{x^2}{2}.$$

2) pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\quad |\mathrm{th}\,x| \geqslant \dfrac{|x|}{1+|x|}$.

26

1) Montrer que la fonction sh est bijective de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$ et déterminer une expression explicite de sa réciproque en résolvant l'équation $y = \mathrm{sh}\,x$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

2) Même question avec la fonction th, bijective de $\mathbb{R}$ sur $]-1,1[$.

3) Même question avec la fonction ch, bijective de $\mathbb{R}_+$ sur $[1, +\infty[$.

---

27 Factoriser la somme $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\mathrm{ch}\,(2kx)$ pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$.

28

1) Que vaut $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{th}\,x}{x}$?

2) Montrer que : $\quad \mathrm{th}\,(2x) = \dfrac{2\,\mathrm{th}\,x}{1 + \mathrm{th}^2 x}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

3) En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}^*$:

$$\prod_{k=1}^{+\infty}\left(1 + \mathrm{th}^2\frac{x}{2^k}\right) = \frac{x}{\mathrm{th}\,x}.$$
