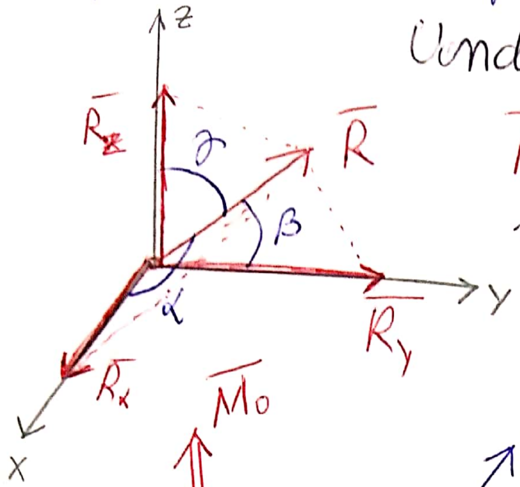
Formule curs 1.

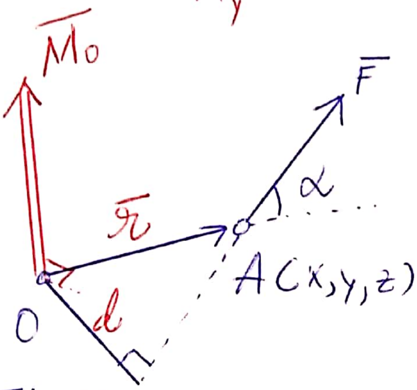
- Proiecția unui vector pe o axă: $pr_\Delta \bar F = \bar F \cdot \bar u$

unde $\bar u_{AB} = \dfrac{\overline{AB}}{|\overline{AB}|} = \dfrac{(x_B - x_A)\cdot \bar i + \dots}{\sqrt{(x_B - x_A)^2 + \dots}}$

- 

$\bar R = R_x \bar i + R_y \bar j + R_z \bar k$

unde $\cos\alpha = \dfrac{R_x}{R}$, $\cos\beta = \dfrac{R_y}{R}$, $\cos\gamma = \dfrac{R_z}{R}$

- 

$\bar M_O = \bar r \times \bar F$

$\bar r = x\bar i + y\bar j + z\bar k$

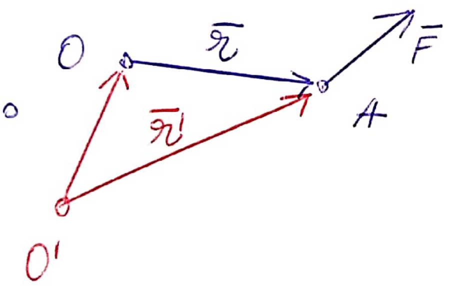
$\bar F = F_x \bar i + F_y \bar j + F_z \bar k$

$$\boxed{\bar M_O = \bar r \times \bar F =} \begin{vmatrix} \bar i & \bar j & \bar k \\ x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$$

$$= \bar i(\overset{M_{Ox}}{\underline{yF_z - zF_y}}) + \bar j(\overset{M_{Oy}}{\underline{zF_x - xF_z}}) + \bar k(\overset{M_{Oz}}{\underline{xF_y - yF_x}})$$

$|\bar M_O| = |\bar r| \cdot |\bar F| \cdot \sin\alpha$

$= F \cdot d$

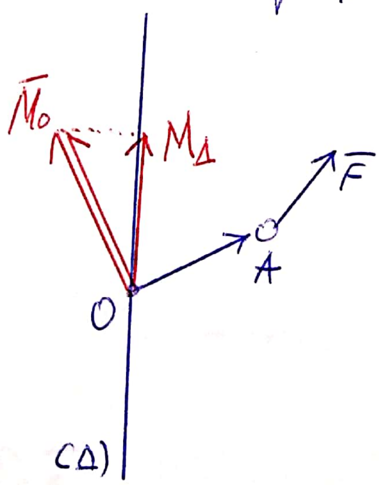
- 

$\bar M_{O'} = \bar r' \times \bar F = (\overline{O'O} + \bar r) \times \bar F$

$= \overline{O'O} \times \bar F + \bar r \times \bar F$

$= \bar M_O + \overline{O'O} \times F$

- Momentul unei forțe în raport cu o axă:

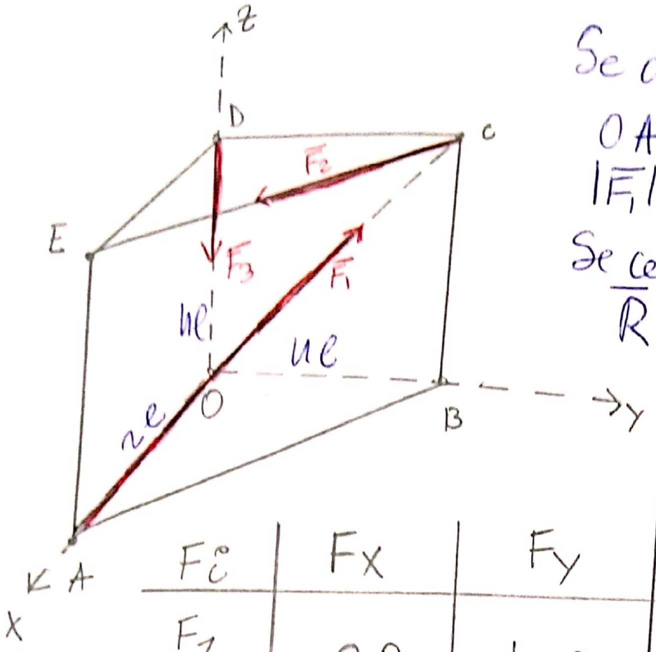


$M_\Delta(F) = \bar M_O \cdot \bar u = (\bar r \times F) \cdot \bar u$

$M_\Delta = 0 \leftarrow$
- $\bar F \parallel (\Delta)$
- $F \cap (\Delta)$
- $F \in (\Delta)$

Scanned by CamScanner

Aplicația 1 (curs)



Se dau:

$OA = 2\ell \quad OB = 4\ell \quad OD = 4\ell$

$|F_1| = 6P \quad |F_2| = 3\sqrt{5}P \quad |F_3| = 2P$

Se cer:

$\overline{R} = ? \quad \overline{M}_O = ?$

$A(2\ell,0,0)\quad B(0,4\ell,0)\quad O(0,0,0)$
$C(0,4\ell,4\ell)\quad D(0,0,4\ell)\quad E(2\ell,0,4\ell)$

F_i	F_x	F_y	F_z	M_{Oix}	M_{Oiy}	M_{Oiz}
F_1	$-2P$	$4P$	$4P$	0	$-8P\ell$	$8P\ell$
F_2	$3P$	$-6P$	0	$24P\ell$	$12P\ell$	$-12P\ell$
F_3	0	0	$-2P$	0	0	0
Σ	$\underbrace{P}_{R_x}$	$\underbrace{-2P}_{R_y}$	$\underbrace{2P}_{R_z}$	$\underbrace{24P\ell}_{M_{Ox}}$	$\underbrace{4P\ell}_{M_{Oy}}$	$\underbrace{-4P\ell}_{M_{Oz}}$

$$\overline{F}_1 = |\overline{F}_1| \cdot \overline{u}_{AC} = 6P \cdot \frac{\overline{AC}}{|\overline{AC}|} = 6P \cdot \frac{(x_C-x_A)\overline{i} + (y_C-y_A)\overline{j} + (z_C-z_A)\overline{k}}{\sqrt{(x_C-x_A)^2+(y_C-y_A)^2+(z_C-z_A)^2}}$$

$$= 6P \cdot \frac{-2\ell\cdot\overline{i} + 4\ell\cdot\overline{j} + 4\ell\,\overline{k}}{\underbrace{\sqrt{4\ell^2+16\ell^2+16\ell^2}}_{(36\ell^2)}} = \cancel{6}P \cdot \frac{2\cancel{\ell}(-\overline{i}+2\overline{j}+2\overline{k})}{\cancel{6}\cancel{\ell}}$$

$$= \underbrace{-2P}_{F_{1x}}\overline{i} + \underbrace{4P}_{F_{1y}}\overline{j} + \underbrace{4P}_{F_{1z}}\overline{k}$$

$$\overline{F}_2 = |\overline{F}_2| \cdot \overline{u}_{CE} = 3\sqrt{5}P \cdot \frac{2\ell\cdot\overline{i} - 4\ell\cdot\overline{j}}{\underbrace{\sqrt{4\ell^2+16\ell^2}}_{(20\ell^2)}} = 3\cancel{\sqrt{5}}P \cdot \frac{\cancel{2}\cancel{\ell}(\overline{i}-2\overline{j})}{\cancel{2}\cancel{\sqrt{5}}\cancel{\ell}}$$

$$= \underbrace{3P}_{F_{2x}}\cdot\overline{i} - \underbrace{6P}_{F_{2y}}\cdot\overline{j}$$

$$\overline{R} = P\cdot\overline{i} - 2P\cdot\overline{j} + 2P\cdot\overline{k}$$

! $F_3 \subset Oz$ deci are componentă doar pe z și nu are moment sau vector de poziție $r = \overline{OO} = 0$

Scanned by CamScanner

$$\overline{M}_0(\overline{F}_1) = \overline{OA} \times \overline{F}_1 = \begin{vmatrix} \boxed{\bar{i}} & \bar{j} & \bar{k} \\ 2\ell & 0 & 0 \\ -2P & 4P & 4P \end{vmatrix} = \bar{i}(\cancel{0\cdot 4P} - \cancel{4P\cdot 0}) + \bar{j}(\cancel{0\cdot(-2P)} - 4P\cdot 2\ell) + \bar{k}(2\ell\cdot 4P - \cancel{0\cdot(-2\ell)})$$

$$= \underbrace{0}_{M_{01x}}\cdot\bar{i} - \underbrace{8P\ell}_{M_{01y}}\cdot\bar{j} + \underbrace{8P\ell}_{M_{01z}}\cdot\bar{k}$$

$$\overline{M}_0(\overline{F}_2) = \overline{OC} \times \overline{F}_2 = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 0 & 4\ell & 4\ell \\ 3P & -6P & 0 \end{vmatrix} = \bar{i}(\cancel{4\ell\cdot 0} - 4\ell\cdot(-6P)) + \bar{j}(4\ell\cdot 3P - \cancel{0\cdot 0}) + \bar{k}(\cancel{0\cdot(-6P)} - 4\ell\cdot 3P)$$

$$= +\underbrace{24P\ell}_{M_{02x}}\cdot\bar{i} + \underbrace{12P\ell}_{M_{02y}}\,\bar{j} - \underbrace{12P\ell}_{M_{02z}}\,\bar{k}$$

$$\overline{M}_0 = 24P\ell\cdot\bar{i} + 4P\ell\cdot\bar{j} - 4P\ell\cdot\bar{k}$$

Scanned by CamScanner

Formule curs 2.

∘ Teoremele lui Varignon:

Teorema I. $\overline{M_0}(\overline{R}) = \overline{M_0}(\overline{F_1}) + \overline{M_0}(\overline{F_2}) + \dots + \overline{M_0}(\overline{F_n})$

Teorema II. $M_\Delta(\overline{R}) = M_\Delta(\overline{F_1}) + M_\Delta(\overline{F_2}) + \dots + M_\Delta(\overline{F_n})$

∘ Reducerea unei forțe în raport cu un punct:

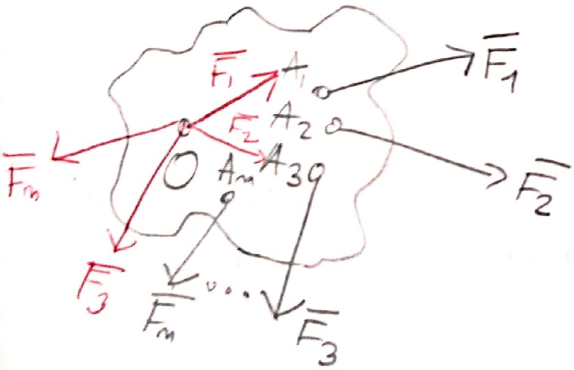
$$\tau_O = \begin{cases} \overline{F} \\ \overline{M_0} = \overline{r} \times \overline{F} \end{cases}$$

torsorul de reducere în O

$$\tau_{O'} = \begin{cases} \overline{F} \\ \overline{M_{O'}} = \overline{M_0} + \overline{O'O} \times \overline{F} \end{cases}$$

∘ Reducerea unui sistem de forțe spațiale oarecare:

$\overline{F_i}, A_i \ (i = \overline{1,n})$



$$\tau_O = \begin{cases} \overline{R} = \sum_{i=1}^{n} \overline{F_i} \\ \overline{M_0} = \sum_{i=1}^{n} \overline{OA_i} \times \overline{F_i} \end{cases}$$

∃ 4 (sau 5) cazuri de reducere:

I. $\overline{R} = 0, \overline{M_0} = 0 \Rightarrow$ sistemul de forțe este în echilibru
sistemul este echivalent cu 0

II. $\overline{R} != 0, \overline{M_0} = 0 \Rightarrow$ sistemul este echivalent cu o R unică situată pe axa centrală

III. $\overline{R} = 0, \overline{M_0} != 0 \Rightarrow$ sistemul este echivalent cu un cuplu

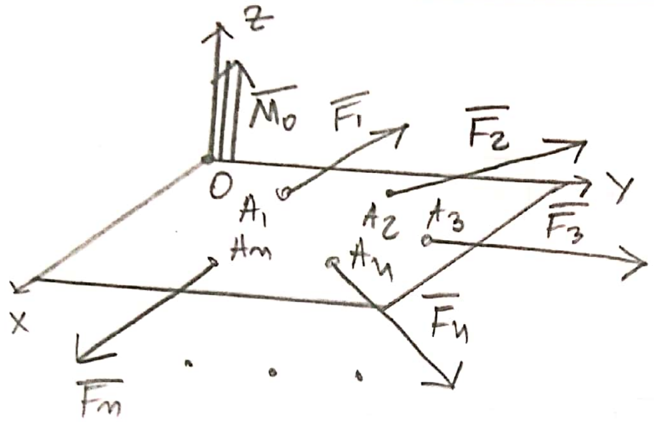
IV. $\overline{R} != 0, \overline{M_0} != 0 \Rightarrow \exists$ 2 cazuri

Scanned by CamScanner

$\overline{IV}$ a) $\overline{R}\circ\overline{M}_0 = 0 \Rightarrow$ sistemul este echivalent cu o R unică situată în orice punct de pe axa centrală
(sau cazul 4)

$\overline{IV}$ b) $\overline{R}\circ\overline{M}_0 != 0 \Rightarrow$ sistemul este echivalent cu un torsor minimal
(sau cazul 5)

○ Reducerea unui sistem de forțe coplanare:



$$\overline{\tau}_0 \begin{cases} \overline{R} = \left(\sum_{i=1}^{n} F_{ix}\right)\cdot\overline{i} + \left(\sum_{i=1}^{n} F_{iy}\right)\cdot\overline{j} \\ \overline{M_0} = \left(\sum_{i=1}^{n} M_{0iz}\right)\cdot\overline{k} \end{cases}$$

○ Ecuația axei centrale:

Def. Locul geometric al punctelor din spațiu pentru care modulul vectorului moment rezultant este minim s.n. axă centrală a sistemului de vectori alunecători.

$$\overline{M}_P = \overline{M_0} + \overline{PO}\times\overline{R} = M_{0x}\cdot\overline{i} + M_{0y}\cdot\overline{j} + M_{0z}\cdot\overline{k} + \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ -x & -y & -z \\ R_x & R_y & R_z \end{vmatrix}$$

$P(x,y,z)$

$$\overline{M}_P = \underbrace{(M_{0x} - yR_z + zR_y)}_{M_{Px}}\cdot\overline{i} + \underbrace{(M_{0y} - zR_x + xR_z)}_{M_{Py}}\cdot\overline{j} + \underbrace{(M_{0z} - xR_y + yR_x)}_{M_{Pz}}\cdot\overline{k}$$

Scanned by CamScanner

$$\overline{M}_p = M_{px}\cdot\overline{i} + M_{py}\cdot\overline{j} + M_{pz}\cdot\overline{k}$$

$$M_p^2 = M_{px}^2 + M_{py}^2 + M_{pz}^2 = f(x,y,z)$$

◦ Modulul vectorului M_p este minim dacă pătratul modulului este și el minim.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial z} = 0$$

$$f(x,y,z) = (M_{ox} - yR_z + zR_y)^2 + (M_{oy} - zR_x + xR_z)^2 + (M_{oz} - xR_y + yR_x)^2$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2(M_{oy} - zR_x + xR_z)\cdot R_z - 2(M_{oz} - xR_y + yR_x)\cdot R_y = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -2(M_{ox} - yR_z + zR_y)\cdot R_z + 2(M_{oz} - xR_y + yR_x)\cdot R_x = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = 2(M_{ox} - yR_z + zR_y)\cdot R_y - 2(M_{oy} - zR_x + xR_z)\cdot R_x = 0$$

$$\frac{M_{ox} - yR_z + zR_y}{R_x} = \frac{M_{oy} - zR_x + xR_z}{R_y} = \frac{M_{oz} - xR_y + yR_x}{R_z}$$

(Ecuația axei centrale)

Def. Locul geometric al punctelor în raport cu care un sistem de forțe oarecare $\overline{F_i}$ $(i=\overline{1,n})$ se reduce la un torsor minimal s.n. axă centrală.

IV b)

Aplicația 2 (curs)

Se dau:

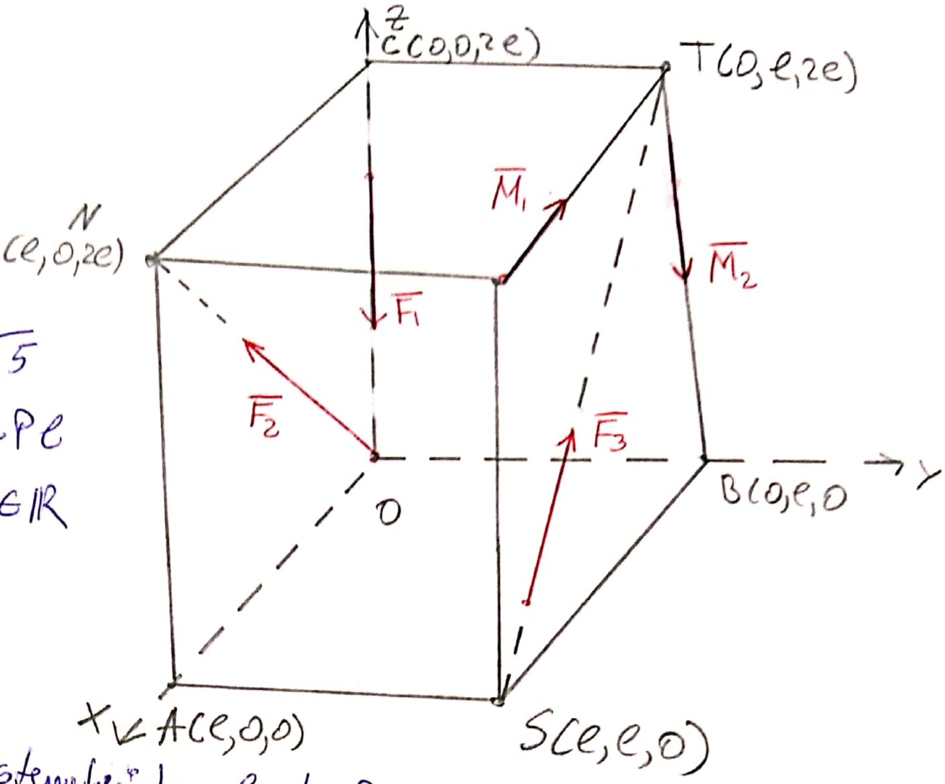
$OA = OB = \ell$

$OC = 2\ell$

$|\bar F_1| = 8P$ $|\bar F_2| = \lambda P\sqrt5$

$|\bar F_3| = 2P\sqrt5$ $|\bar M_1| = 2P\ell$

$|\bar M_2| = 2P\ell$ cu $\lambda \in \mathbb{R}$



Se cer:

a) $\bar\tau_O = ?$

b) Echivalentul sistemului de forțe în funcție de λ

c) Pentru $\lambda = 4$, determinați axa centrală

a)

$\bar F_i, \bar M_i$	F_{ix}	F_{iy}	F_{iz}	M_{iox}	M_{ioy}	M_{ioz}
$\bar F_1$	0	0	$-8P$	0	0	0
$\bar F_2$	λP	0	$2\lambda P$	0	0	0
$\bar F_3$	$-2P$	0	$4P$	$4P\ell$	$-4P\ell$	$2P\ell$
$\bar M_1$	–	–	–	$-2P\ell$	0	0
$\bar M_2$	–	–	–	0	0	$-2P\ell$
Σ	$(\lambda-2)P$	0	$2(\lambda-2)P$	$(4-\lambda)P\ell$	$-4P\ell$	0

$$\bar F_2 = |\bar F_2| \cdot \frac{\overline{ON}}{|\overline{ON}|} = \lambda P\cancel{\sqrt5} \cdot \frac{\cancel{\ell}\cdot\bar i + 2\cancel{\ell}\cdot\bar k}{\underbrace{\sqrt{\ell^2+4\ell^2}}_{\substack{5\ell^2 \\ \cancel{\ell\sqrt5}}}} = \lambda P\cdot\bar i + 2\lambda P\cdot\bar k$$

$$\bar F_3 = |\bar F_3| \cdot \frac{\overline{ST}}{|\overline{ST}|} = 2P\cancel{\sqrt5} \cdot \frac{-\cancel{\ell}\cdot\bar i + 2\cancel{\ell}\cdot\bar k}{\underbrace{\sqrt{\ell^2+4\ell^2}}_{\cancel{\ell\sqrt5}}} = -2P\cdot\bar i + 4P$$

∇ Dacă $\bar F$ este $\parallel$, $\in$ sau $\cap$ cu axa Om, atunci $M_{Om} = 0$

Scanned by CamScanner

$$\overline{M}_O(\overline{F}_3) = \overline{r} \times \overline{F}_3 = \overline{OS} \times \overline{F}_3 = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ \ell & \ell & 0 \\ -2P & 0 & 4P \end{vmatrix}$$

$$= 4P\ell \cdot \overline{i} - 4P\ell \cdot \overline{j} + 2P\ell \cdot \overline{k}$$

$$\overline{\overline{\tau}}_O = \begin{cases} \overline{R} = (\lambda-2)P \cdot \overline{i} + 2(\lambda-2)P \cdot \overline{k} \\ \overline{M}_O = (4-\lambda)P\ell \cdot \overline{i} - 4P\ell \cdot \overline{j} \end{cases}$$

b) o pentru $\lambda = 2$ $\begin{cases} \overline{R} = 0 \\ \overline{M}_O = 2P\ell \cdot \overline{i} - 4P\ell \cdot \overline{j} \; != 0 \end{cases}$

Cazul $\underline{III}$. sistemul este echivalent cu un cuplu

o pentru $\lambda = 4$ $\begin{cases} \overline{R} = 2P \cdot \overline{i} + 4P \cdot \overline{k} \; != 0 \\ \overline{M}_O = -4P\ell \cdot \overline{j} \; != 0 \end{cases}$

dar $\overline{R} \cdot \overline{M}_O = 2P \cdot 0 \cdot \overline{i} + 0 \cdot (-4P\ell) \cdot \overline{j} + 4P \cdot 0 \cdot \overline{k} = 0$

Cazul $\underline{IV}$a) Sistemul este echivalent cu o R unică situată în orice punct de pe axa centrală

o pentru $\lambda \in \mathbb{R} / \{2, 4\}$ $\overline{R}, \overline{M}_O \; != 0$

iar $\overline{R} \cdot \overline{M}_O = (\lambda-2)(4-\lambda)P^2\ell \; != 0$

Cazul $\underline{IV}$ b) sistemul este echivalent cu un torsor minimal

c) $$\frac{M_{Ox} - yR_z + zR_y}{R_x} = \frac{M_{Oy} - zR_x + xR_z}{R_y} = \frac{M_{Oz} - xR_y + yR_x}{R_z}$$

$$\underset{①}{\frac{0 - y \cdot 4P + z \cdot 0}{2P}} = \underset{②}{\frac{-4P\ell - z \cdot 2P + x \cdot 4P}{0}} = \underset{③}{\frac{0 - x \cdot 0 + y \cdot 2P}{4P}}$$

Scanned by CamScanner

(1) și (2) a) $0 = 2P(-4Pe - 2P_0 z + 4P_0 x)$

(1) și (3) b) $4P(-4P_0 y) = 2P(2P_0 y)$

a) $2e = 2x - z$ (P_1)

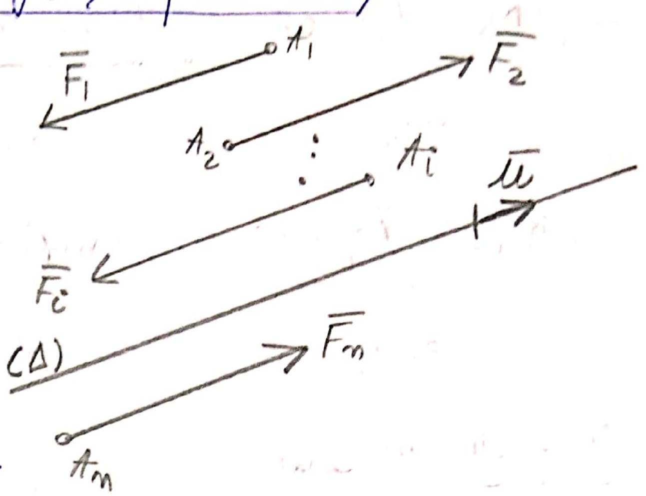
b) $-4y = y \Rightarrow y = 0$ (xOz) (P_2)

Scanned by CamScanner

Formule curs 3.

- Reducerea sistemelor de forțe paralele /

$F_i \ (i=\overline{1,n})$, $\parallel$ reciproc și cu axa Δ de versor $\overline{u}$



$$\overline{\tau_0} = \begin{cases} \overline{R} = \sum_{i=1}^{n} \overline{F_i} = \left(\sum_{i=1}^{n} F_i\right) \cdot \overline{u} \\ \overline{M_0} = \sum_{i=1}^{n} \overline{OA_i} \times \overline{F_i} \end{cases}$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{n} \overline{OA_i} \cdot F_i\right) \times \overline{u}$$

iar $\overline{R} \cdot \overline{M_0} = 0$ (vezi demonstrație)

$\Rightarrow$ se poate determina centrul forțelor paralele (C)

Def.: Acesta reprezintă un punct caracteristic al unui sistem de forțe paralele. Poziția sa se determină din condiția ca în punctul $P(x,y,z)$ curent de pe axa centrală momentul $\overline{M_P} = 0$

$$\overline{M_P} = \overline{M_0} - \overline{OP} \times \overline{R} \qquad \overline{OP} \times \left(\sum_{i=1}^{n} F_i\right) \cdot \overline{u}$$

$$\overline{M_P} = \left(\sum_{i=1}^{n} \overline{OA_i} \cdot F_i\right) \times \overline{u} - \overline{OP} \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} F_i\right) \times \overline{u} = 0$$

$$\overline{M_P} = \left(\sum_{i=1}^{n} \overline{OA_i} \cdot F_i - \overline{OP} \cdot \sum_{i=1}^{n} F_i\right) \times \overline{u} = 0 \quad \text{iar } |\overline{u}| = 1$$

deci $\sum_{i=1}^{n} \overline{OA_i} F_i - \overline{OP} \cdot \sum_{i=1}^{n} F_i = 0 \Rightarrow \overline{OP} = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} \overline{OA_i} \cdot F_i}{\sum_{i=1}^{n} F_i}$

$P = C$, iar $\overline{OP} = \overline{OC} = \overline{r_c}$ iar $\overline{OA_i} = \overline{r_i}$

Expresia centrului forțelor paralele:

$$\overline{r_c} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \overline{r_i} \cdot F_i}{\sum_{i=1}^{n} F_i}$$

- C.f.p. reprezintă o caracteristică intrinsecă a unui sistem de forțe, indiferent de SR

Scanned by CamScanner

Cazuri de reducere

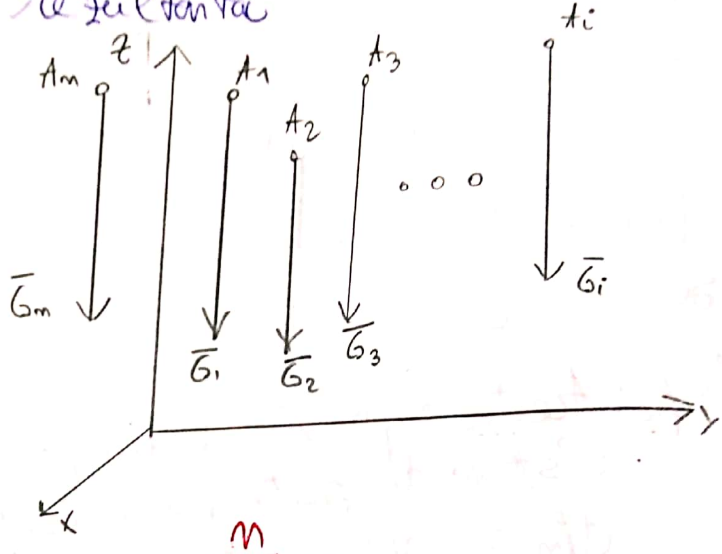
I. $\overline{R}=0, \overline{M}_0=0$ sistemul este în echilibru

II. $\overline{R}\neq 0, \overline{M}_0=0$ sistemul este echivalent cu o $\overline{R}$ unică ce trece prin c.f.p.

III. $\overline{R}=0, \overline{M}_0\neq 0$ sistemul este echivalent cu un cuplu

IV. $\overline{R}\neq 0, \overline{M}_0\neq 0$ sistemul este echivalent cu o forță rezultantă iar $\overline{R}\cdot\overline{M}_0=0$

Centre de masă



$$\overline{G}_i = m_i \cdot \overline{g}$$

$$\overline{r}_C = \frac{\sum \overline{r}_i G_i}{\sum G_i}$$

$$\overline{r}_C = \frac{\sum \overline{r}_i \cdot m_i \cdot g}{\sum m_i \cdot g}$$

$$\overline{r}_C = \frac{\cancel{g} \sum \overline{r}_i m_i}{\cancel{g} \sum m_i}$$

$$\overline{r}_C = \frac{\sum_{i=1}^{n} \overline{r}_i \cdot m_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}$$

- pentru solidul rigid: $\overline{r}_C = \dfrac{\int_{(D)} \overline{r}\, dm}{\int_{(D)} dm}$

↳ în cazul corpurilor omogene:

I. Corp Volum: $\overline{r}_C = \dfrac{\int_{(V)} \overline{r}\, dV}{\int_{(V)} dV}$

II. Corp plat: $\overline{r}_C = \dfrac{\int_{(A)} \overline{r}\, dA}{\int_{(A)} dA}$

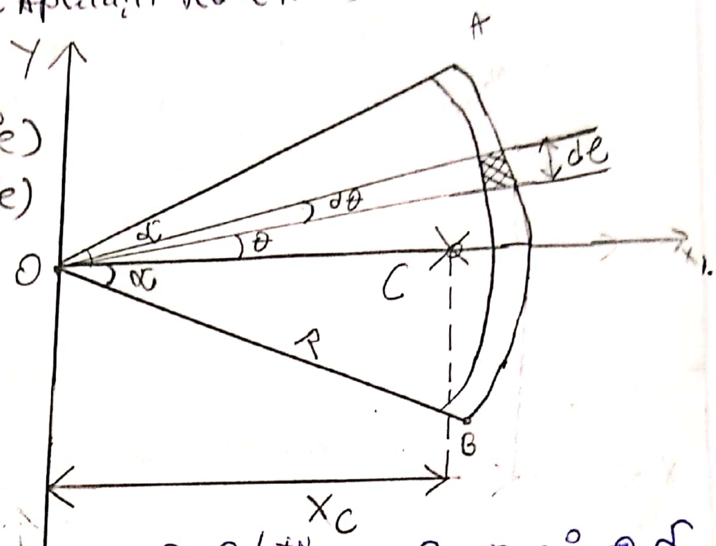
III. Corp liniar: $\overline{r}_C = \dfrac{\int_{(\ell)} \overline{r}\, d\ell}{\int_{(\ell)} d\ell}$

Scanned by CamScanner

Centre de masă pentru corpuri uzuale

(Aplicații teoretice)

I. Arc de cerc



$x = R\cos\theta$ (vezi demonstrație)

$dl = R\cdot d\theta$ (vezi demonstrație)

$$x_C = \frac{\int x\cdot dl}{\int dl}$$

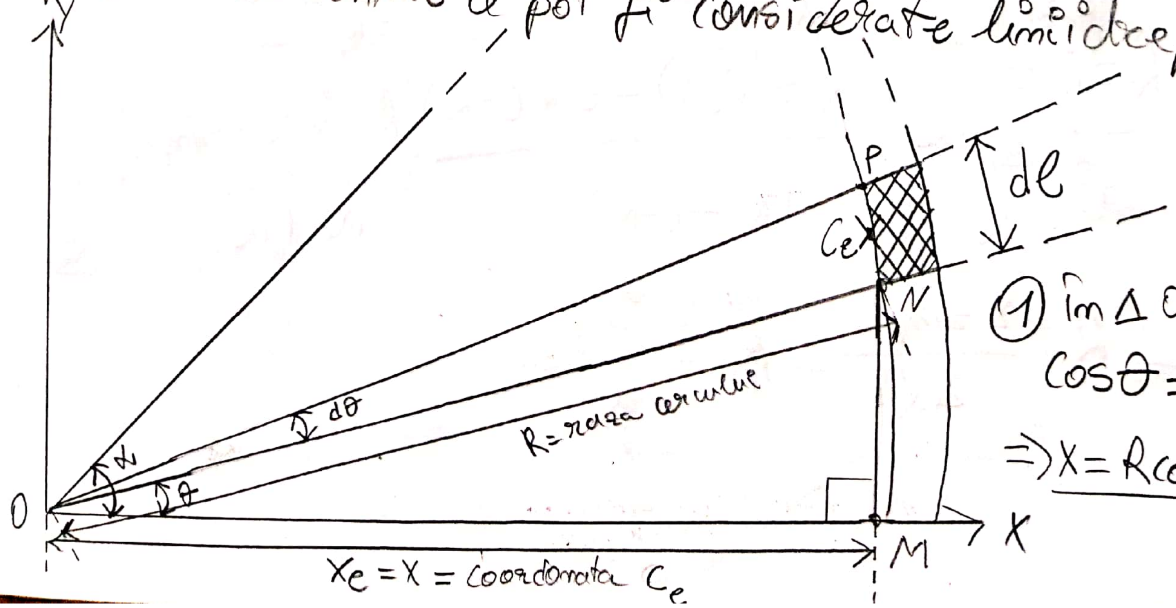
$$x_C = \frac{\int_{-\alpha}^{+\alpha} R\cos\theta\cdot R\,d\theta}{\int_{-\alpha}^{+\alpha} R\,d\theta}$$

$$x_C = \frac{R^{\cancel{2}}\int_{-\alpha}^{+\alpha}\cos\theta\cdot d\theta}{\cancel{R}\int_{-\alpha}^{+\alpha} d\theta} = \frac{R\sin\theta\Big|_{-\alpha}^{+\alpha}}{\theta\Big|_{-\alpha}^{+\alpha}} = \frac{R\cdot 2\sin\alpha}{2\alpha}$$

$$OC = x_C = R\,\frac{\sin\alpha}{\alpha}$$

Demonstrație

Fie AB un arc de cerc de deschidere 2α. El poate fi poziționat a.î. O să fie vârful sectorului de cerc format cu arcul AB iar unghiul format cu OX să fie α pe ambele părți. Atunci, centrul de masă va fi poziționat pe axa OX, având coordonata $y_C = 0$. Arcul de cerc poate fi împărțit în porțiuni elementare ce pot fi considerate linii drepte.



① în ΔOMN:

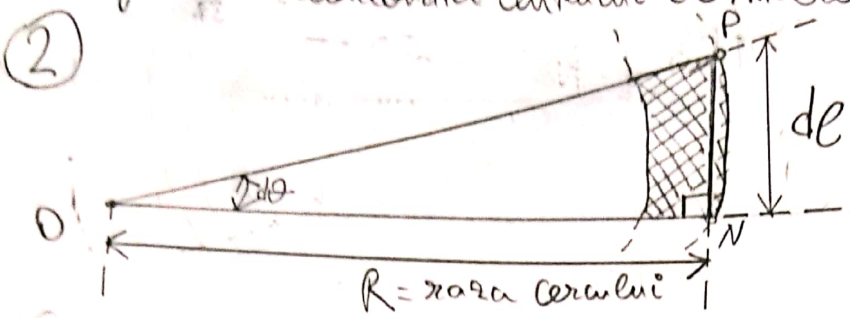
$$\cos\theta = \frac{x}{R}$$

$$\Rightarrow x = R\cos\theta$$

Scanned by CamScanner

Explicația pentru x_c - coordonata C_c: NP fiind porțiune elementară, $N \simeq P$, deci C_c se confundă cu ele, $pr_{Ox} C_c = pr_{Ox} N$
(proiecția punctelor ce definesc porțiunea elementară este egală cu coordonata centrului de masă elementar)

2



În ΔONP: $\quad tg(d\theta) = \dfrac{dl}{R}$

$$\Rightarrow dl = R\, tg(d\theta)$$

evident $\measuredangle\, d\theta$ este unghi minimal
deci $\sin d\theta = d\theta$
iar $\cos d\theta = 1$

$$dl = R\,\frac{\sin d\theta}{\cos d\theta} = R\,\frac{d\theta}{1} \Rightarrow \underline{dl = R\,d\theta}$$

Deci, înlocuind în formulă avem:

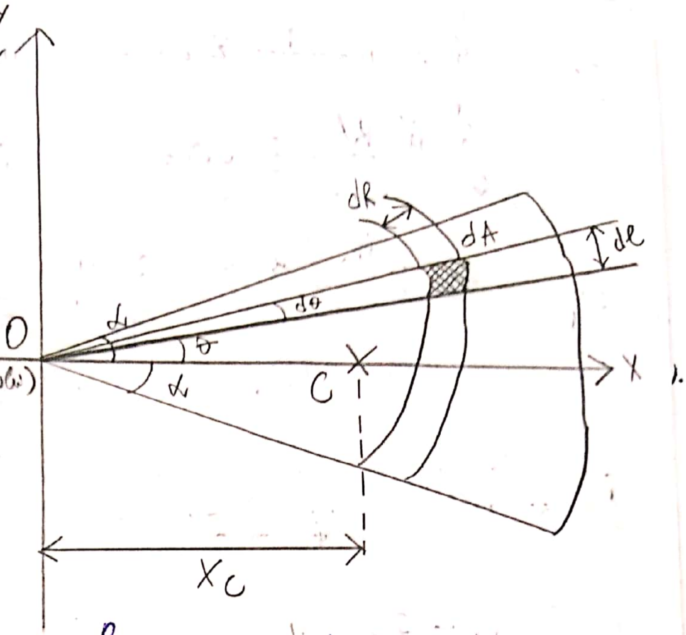
$$\overline{x_c} = \frac{\int\limits_{(C)} x \cdot dl}{\int\limits_{(C)} dl} = \frac{\int_{-\alpha}^{+\alpha} R\cos\theta \cdot R\,d\theta}{\int_{-\alpha}^{+\alpha} R\,d\theta} = \frac{R^{\cancel{2}}\int_{-\alpha}^{+\alpha} \cos\theta \cdot d\theta}{\cancel{R}\int_{-\alpha}^{+\alpha} 1 \cdot d\theta}$$

$$\overline{x_c} = \frac{R \cdot \sin\theta \Big|_{-\alpha}^{+\alpha}}{\theta \Big|_{-\alpha}^{+\alpha}} = \frac{R\left(\sin(\alpha) - \sin(-\alpha)\right)}{+\alpha - (-\alpha)} = \frac{R(\sin\alpha + \sin\alpha)}{\alpha + \alpha}$$

$$\overline{x_c} = R \cdot \frac{\cancel{2}\sin\alpha}{\cancel{2}\alpha} = R\,\frac{\sin\alpha}{\alpha}$$

Scanned by CamScanner

II. Sector de cerc



$X = R \cdot \cos\theta$ (analog)

$dA = R \cdot d\theta \cdot dR$ deoarece:

$dA = dl \cdot dR$ (aria dreptunghiului)

iar $dl = R \cdot d\theta$ (analog)

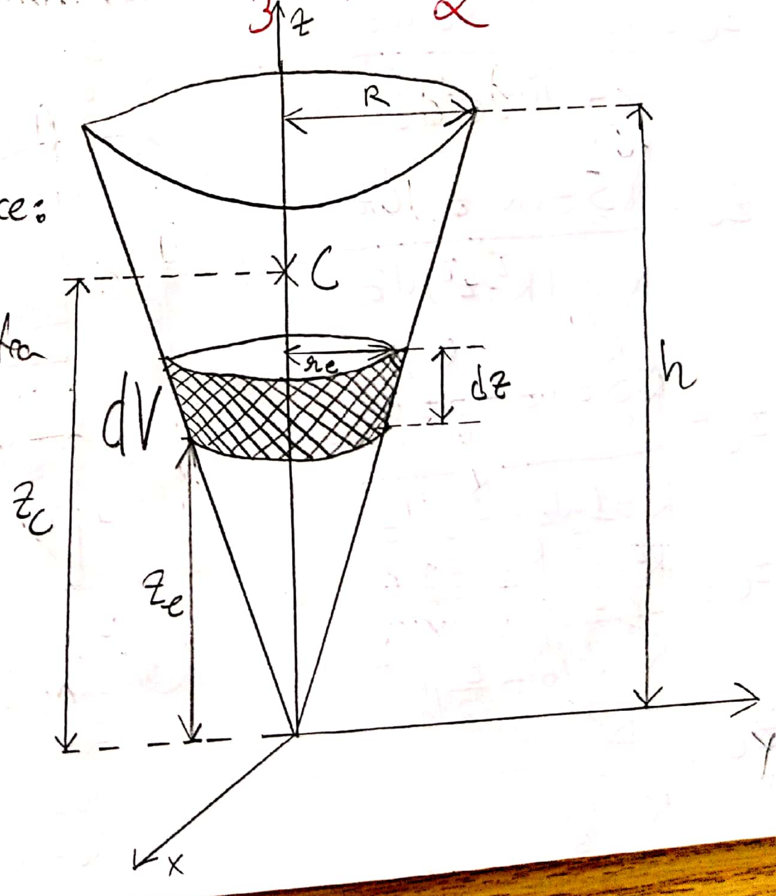
$$X_C = \frac{\int_{(A)} X \cdot dA}{\int_{(A)} dA}$$

$$X_C = \frac{\iint_{(A)} R\cos\theta \cdot R\, d\theta\, dR}{\iint_{(A)} R\, d\theta\, dR} = \frac{\int_0^R R^2 dR \cdot \int_{-\alpha}^{+\alpha} \cos\theta\, d\theta}{\int_0^R R\, dR \cdot \int_{-\alpha}^{+\alpha} 1 \cdot d\theta}$$

$$X_C = \frac{\frac{R^3}{3}\Big|_0^R \cdot \sin\theta\Big|_{-\alpha}^{+\alpha}}{\frac{R^2}{2}\Big|_0^R \cdot \theta\Big|_{-\alpha}^{+\alpha}} = \frac{R^{\cancel{3}}}{3} \cdot \frac{2}{\cancel{R^2}} \cdot \frac{\sin(\alpha) - \sin(-\alpha)}{\alpha - (-\alpha)}$$

$$X_C = \frac{2}{3} R \frac{\cancel{2}\sin\alpha}{\cancel{2}\alpha} \Rightarrow OC = X_C = \frac{2}{3} \cdot R \cdot \frac{\sin\alpha}{\alpha}$$

III. Con



$r_e = \frac{R}{h} \cdot z_{elementar}$ deoarece:

$\frac{r_e}{z} = \frac{R}{h}$ (proporționalitatea conurilor)

$dV = \pi r_e^2 \cdot dz$

$$z_C = \frac{\int_{(V)} z \cdot dV}{\int_{(V)} dV}$$

$$z_C = \frac{\int_{(V)} z \cdot \pi r_e^2 dz}{\int_{(V)} \pi r_e^2 dz}$$

Scanned by CamScanner

$$z_C = \frac{\int_0^h z \cdot \pi \cdot \frac{R^2}{h^2} \cdot z^2 \cdot dz}{\int_0^h \pi \frac{R^2}{h^2} \cdot z^2 \cdot dz} = \frac{\cancel{\pi \frac{R^2}{h^2}} \cdot \int_0^h z^3 \cdot dz}{\cancel{\pi \frac{R^2}{h^2}} \int_0^h z^2 \cdot dz} = \frac{\frac{z^4}{4}\Big|_0^h}{\frac{z^3}{3}\Big|_0^h}$$

$$z_C = \frac{h^{\cancel{4}}}{4} \cdot \frac{3}{\cancel{h^3}} = \frac{3}{4} h \Rightarrow z_C = \frac{3}{4} h$$

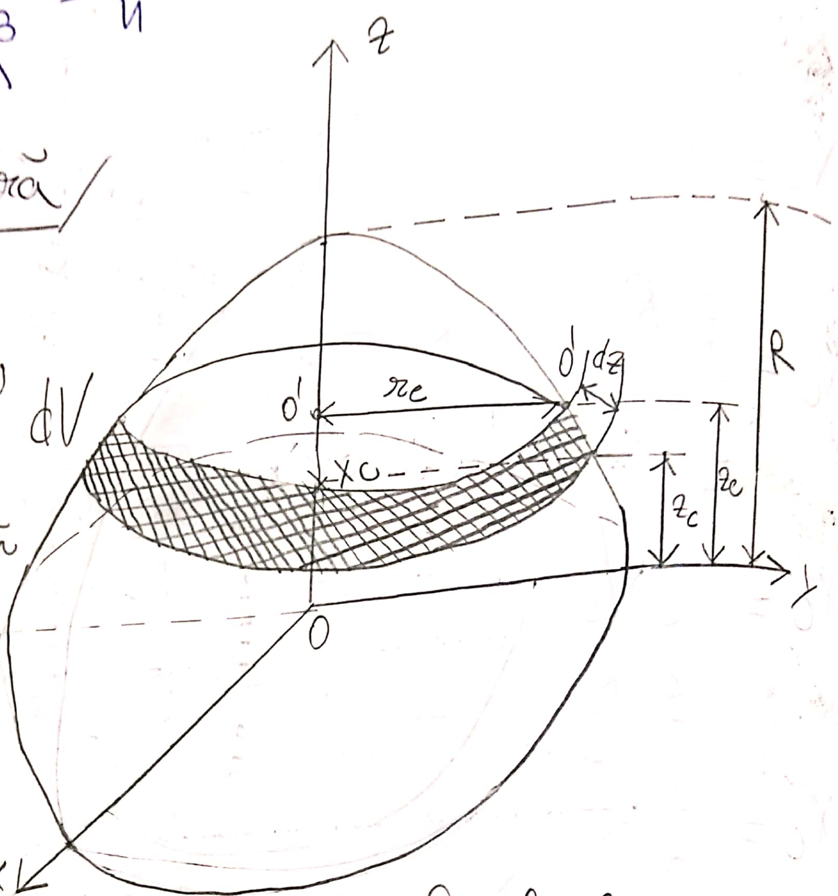
IV. Semisferă

$r_e^2 = R^2 - z_e^2$ (3)

(vezi dem. de mai jos)

$dV = \pi r_e^2 \cdot dz$

(porțiunea elementară e asemănătoare celei de con)



$$z_C = \frac{\int_{(V)} z \cdot dV}{\int_{(V)} z \cdot dV}$$

$$z_C = \frac{\int_{(V)} z \cdot \pi r_e^2 dz}{\int_{(V)} \pi r_e^2 dz}$$

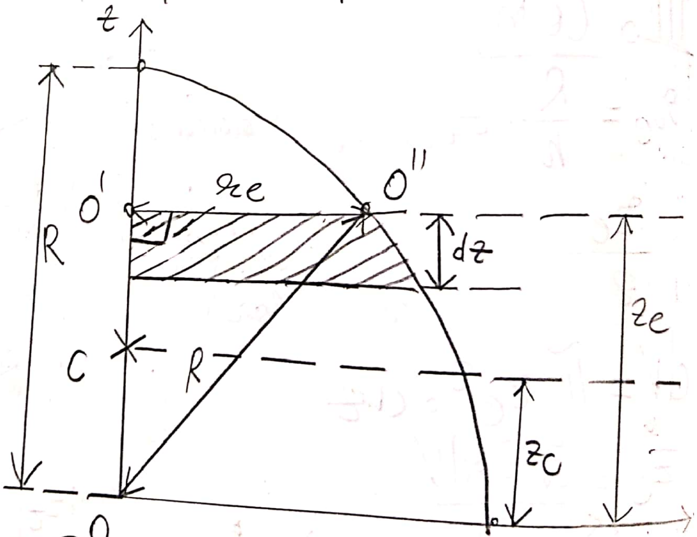
$$z_C = \frac{\cancel{\pi} \int_{(V)} z(R^2 - z^2) dz}{\cancel{\pi} \int_{(V)} (R^2 - z^2) dz}$$

$$z_C = \frac{R^2 \cdot \int_0^R z \cdot dz - \int_0^R z^3 dz}{R^2 \int 1 \cdot dz - \int_0^R z^2 dz}$$

$$z_C = \frac{R^2 \cdot \frac{z^2}{2}\Big|_0^R - \frac{z^4}{4}\Big|_0^R}{R^2 \cdot z\Big|_0^R - \frac{z^3}{3}\Big|_0^R}$$

$$z_C = \frac{\frac{R^4}{2} - \frac{R^4}{4}}{R^3 - \frac{R^3}{3}}$$

Secțiune în planul zOy:



(3) În Δ OO'O'':

Teorema lui Pitagora:

$O'O''^2 = OO''^2 - OO'^2$

$r_e^2 = R^2 - z_e^2$

$$z_C = \frac{\frac{2R^4 - R^4}{4}}{\frac{3R^3 - R^3}{3}} = \frac{R^4}{4} \cdot \frac{3}{2R^3} \Rightarrow z_C = \frac{3}{8} R$$

Aplicație 3 / (curs)

Se dau: dimensiunea a și reprezentarea

Se cer: coordonatele C

$x_C = ?$ $y_C = ?$

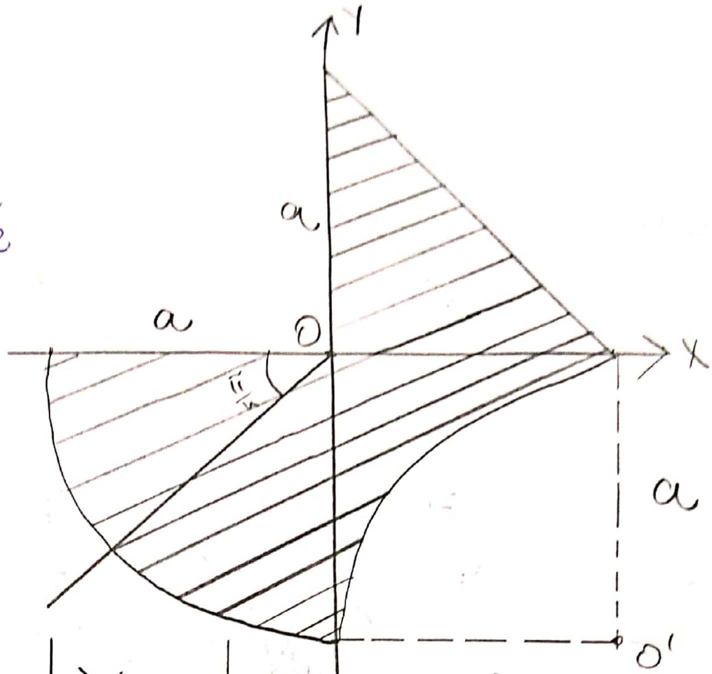
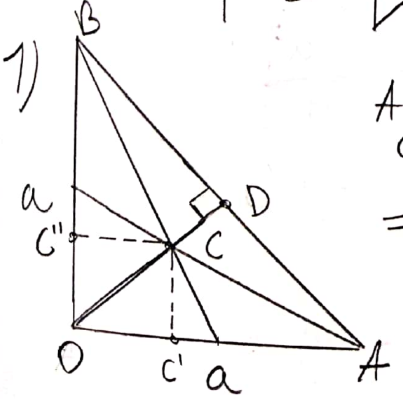


Fig	A_i	X_i	Y_i	$A_i \cdot X_i$	$A_i \cdot Y_i$
1)	$\frac{a^2}{2}$	$\frac{a}{3}$	$\frac{a}{3}$	$\frac{a^3}{6}$	$\frac{a^3}{6}$
2)	$\frac{\pi a^2}{4}$	$-\frac{4a}{3\pi}$	$-\frac{4a}{3\pi}$	$-\frac{a^3}{3}$	$-\frac{a^3}{3}$
3a)	a^2	$\frac{a}{2}$	$-\frac{a}{2}$	$\frac{a^3}{2}$	$-\frac{a^3}{2}$
3b)	$-\frac{\pi a^2}{4}$	$a - \frac{4a}{3\pi}$	$-a + \frac{4a}{3\pi}$	$-\frac{\pi a^3}{4} + \frac{a^3}{3}$	$\frac{\pi a^3}{4} - \frac{a^3}{3}$
$\sum$	$\frac{3a^2}{2}$			$\frac{2a^3}{3} - \frac{\pi a^3}{4}$	$\frac{\pi a^3}{4} - a^3$

1)



$AB = a\sqrt{2}$ (pitagora) $\Rightarrow OD = \sqrt{a^2 - \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{2}} = \frac{a}{\sqrt{2}}$

$\Rightarrow OC = \frac{2}{3} OD = \frac{a\sqrt{2}}{3}$ care în $\square$ OC'CC'' este diag.

$\Rightarrow OC' = OC'' = \ell_{\square} = \frac{a}{3} = X_1 = Y_1$

Scanned by CamScanner

2) Figura reprezintă un sector de cerc cu $\alpha = \frac{\pi}{4}$

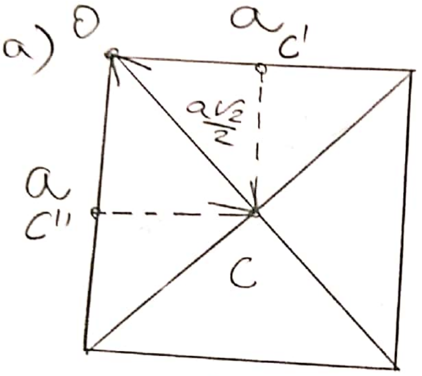
$$OC_2 = \frac{2}{3} R \frac{\sin\alpha}{\alpha} = \frac{\cancel{2}}{3}\cdot a \cdot \frac{\frac{\sqrt{2}}{\cancel{2}}}{\frac{\pi}{4}} = \frac{4a\sqrt{2}}{3\pi}$$

(analog se formează pătratul pentru coordonate)

$$X_2 = OC_2 \cos\frac{\pi}{4} = \frac{4a\cancel{\sqrt{2}}}{3\pi} \cdot \frac{\cancel{\sqrt{2}}}{\cancel{2}} = \frac{4a}{3\pi}$$

$$Y_2 = OC_2 \sin\frac{\pi}{4} = \frac{4a\sqrt{2}}{3\pi} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{4a}{3\pi}$$

3a)



evident diag $l = a\sqrt{2}$

deci $OC = \frac{a\sqrt{2}}{2}$

$$\Rightarrow X_{3a} = Y_{3a} = \frac{a}{2}$$

3b) Sector de cerc analog, dar de centru $O'(a, -a)$

$$X_{3b(O')} = \frac{4a}{3\pi} \Rightarrow X_{3b} = X_{O'} - X_{3b(O')}$$

$$= a - \frac{4a}{3\pi}$$

$$Y_{3b(O')} = -\frac{4a}{3\pi} \Rightarrow Y_{3b} = Y_{O'} - Y_{3b(O')}$$

$$= -a + \frac{4a}{3\pi}$$

$$\Sigma A_i x_i = \frac{a^3}{6} - \cancel{\frac{a^3}{3}} + \frac{a^3}{2} - \frac{\pi a^3}{4} + \cancel{\frac{a^3}{3}} = \frac{2a^3}{3} - \frac{\pi a^3}{4}$$

$$\Sigma A_i y_i = \frac{a^3}{6} - \frac{a^3}{3} - \frac{a^3}{2} + \frac{\pi a^3}{4} - \frac{a^3}{3} = \frac{a^3 - 2a^3 - 3a^3 - 2a^3}{6} + \frac{\pi a^3}{4}$$

$$\Sigma A_i y_i = \frac{\pi a^3}{4} - a^3$$

Scanned by CamScanner

$$X_C = \frac{\sum A_i x_i}{\sum A_i} = \frac{\frac{a^{\cancel{3}}}{\cancel{2}}\left(\frac{4}{3} - \frac{\pi}{2}\right)}{\frac{3a^{\cancel{2}}}{\cancel{2}}} = \frac{a}{3}\left(\frac{4}{3} - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{a}{18}(8 - 3\pi)$$

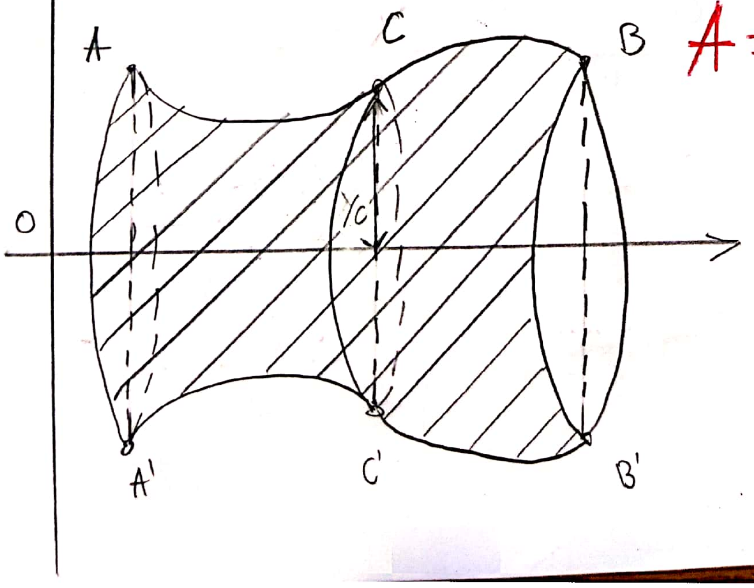
$$Y_C = \frac{\sum A_i y_i}{\sum A_i} = \frac{\frac{a^3}{\cancel{2}}\left(\frac{\pi}{2} - 2\right)}{\frac{3a^2}{\cancel{2}}} = \frac{a}{3}\left(\frac{\pi}{2} - 2\right) = \frac{a}{6}(\pi - 4)$$

◦ Teoremele lui Guldin

↳ servesc la determinarea ariei laterale sau a volumului unor corpuri de revoluție care rezultă prin rotația în jurul unei axe a unui arc de curbă plană sau a unei arii plane care este delimitată de o curbă închisă

Teorema I/

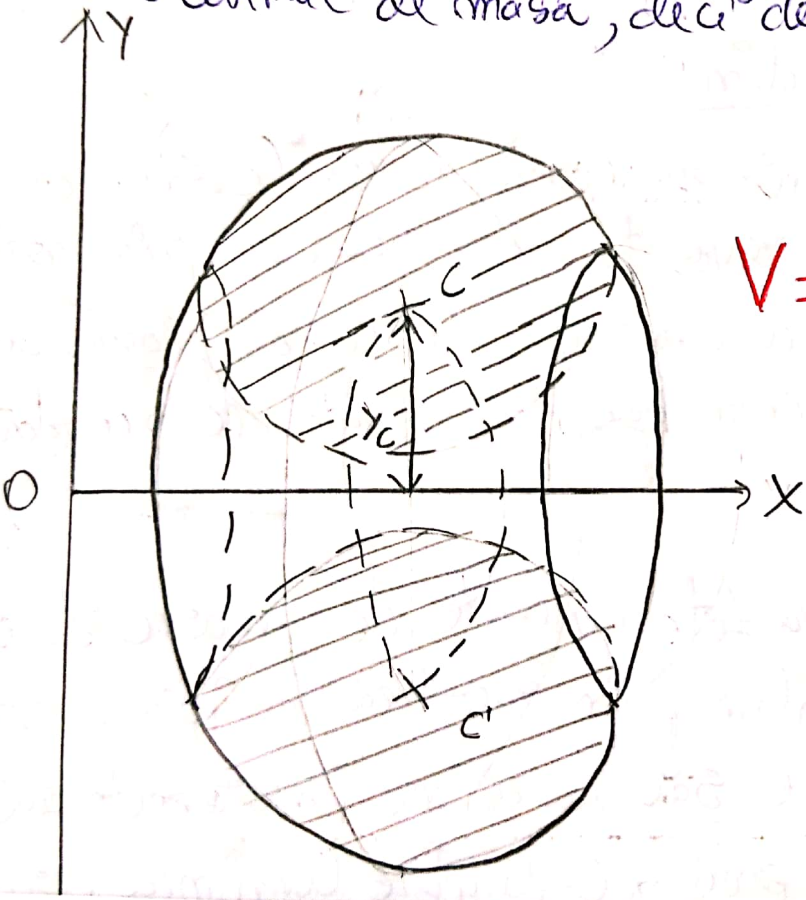
Def. Aria unei suprafețe generate de un arc de curbă ~~…~~ situat în plan prin rotirea în jurul unei axe din planul său care nu intersectează arcele este egală cu produsul dintre lungimea cercului (format cu ~~…~~ centrul de masă, deci de rază Y_C) și lungimea arcului.



$$A = \underbrace{2\pi Y_C}_{\text{lungimea cercului}} \cdot L_{AB}$$

Teorema a II-a

Def. Volumul corpului generat prin rotirea unei suprafețe plane în jurul unei axe din planul său care nu o intersectează este egal cu produsul dintre aria suprafeței și lungimea cercului (format cu centrul de masă, deci de rază y_C).



$$V = \underbrace{2\pi y_C}_{\text{lungimea cercului}} \cdot A$$