UNIVERSIDADE FEDERAL RURALDE PERNAMBUCO
BACHARELADO EM SISTEMAS DA INFORMAÇÃO

Aluno
Ivanildo Batista da Silva Júnior

Professora
Dra. Silvana Bocanegra

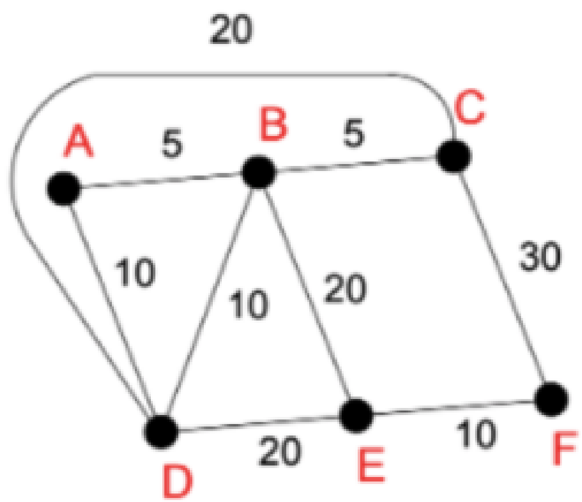
Resolução da primeira lista de Fundamentos Matemáticos para Sistemas da Informação I

Recife-PE, 21 de fevereiro de 2022

Sumário

1 Questão 1

Aplique o algoritmo visto na aula 1 começando pela cidade C e responda:



(a) Qual á o subconjunto de arestas da malha rodoviária e qual a distância total percorrida.?

RESOLUÇÃO DA LETRA (A)

Conforme a aula 1, partindo da cidade C, o subconjunto de arestas da rodoviária é

$$\{\{C, B\}, \{B, A\}, \{A, D\}, \{D, E\}, \{E, F\}\}$$

De C para B temos 5, de B para A temos 5, de A para D temos 10, de D para E temos 20 e de E para F temos 10. Somando todas as distância de um vértice para o outro temos : $5+5+10+20+10 = 50$

(b) Existe algum outro subconjunto de arestas desta malha rodoviária em que a distância obtida seja a mesma? Justifique

RESOLUÇÃO LETRA (B)

Existem outros subconjuntos, mas dentre todas as possibilidades o outro subconjunto com a mesma distância do subconjunto solução da letra a).

Solução letra a): $\{\{C, B\}, \{B, A\}, \{A, D\}, \{D, E\}, \{E, F\}\} \rightarrow \boxed{5 + 5 + 10 + 20 + 10 = 50}$

é o subconjunto:

$\{\{C, B\}, \{B, A\}, \{B, D\}, \{D, E\}, \{E, F\}\} \rightarrow \boxed{5 + 5 + 10 + 20 + 10 = 50}$

(c) Você acredita que aplicando esse algoritmo para um problema com 100 cidades na malha será possível garantir que a solução obtida é uma solução ótima (de menor distância)? Justifique.

RESOLUÇÃO LETRA (C)

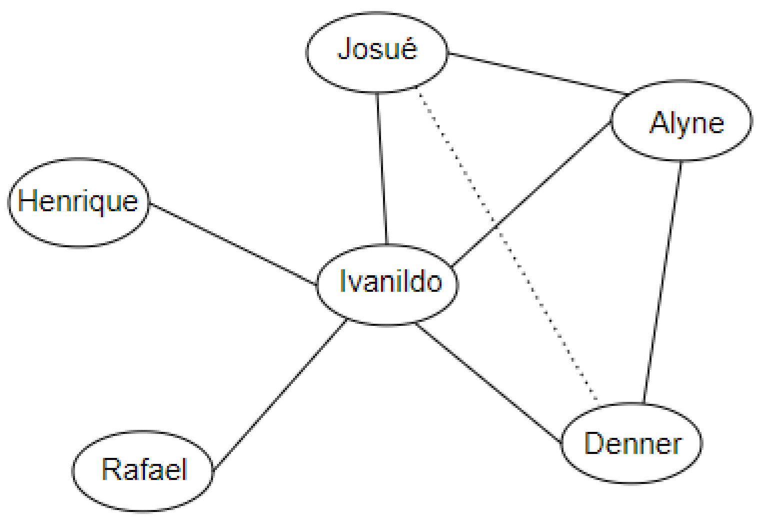
Sim, desde que os vértices do grafo gerado nesse problema não tenho um número ímpar de arestas, caso contrário não será possível ter um grafo euleriano.

2 Questão 2

Faça um grafo representado as relações de amizade entre você e seus 05 melhores amigos no Facebook. Para cada um dos itens a seguir responda e justifique usando a definição.

RESOLUÇÃO

Abaixo temos o grafo com as arestas e vértices dos meus melhores amigos do Facebook.



(a) Qual é o vértice de maior grau ?
O grau de um vértice é número de arestas que incidem no vértice. O vértice de maior grau é o meu, que é de grau 5.

(b) Esse grafo é direcionado ?
Para que o grafo seja direcionado as arestas devem ter direções. No caso do Facebook, a relação de amizade exige que um amigos aceite o convite de amizade, ninguém pode ser amigo sem que o outro aceite. Se fosse no Instagram, então podemos ter um grafo direcionado, pois é possível seguir uma pessoa e essa pessoa não seguir você. Logo, esse grafo não é direcionado.

(c) Esse grafo tem laços ?
Não há laços, pois não é possível ter uma relação de amizade comigo mesmo.

(d) Tem arestas paralelas ?
Não há arestas paralelas, pois não existem mais nenhuma outra relação de amizade com uma mesma pessoa.

(e) Tem ciclos ?
Ciclos são trilhas fechadas e trilhas são passeios em que todas as arestas são distintas. O

grafo com a relação de amizade possui ciclos, como por exemplo

$$\{\{\text{Denner, Alyne}\}, \{\text{Alyne, Josué}\}, \{\text{Josué, Ivanildo}\}, \{\text{Ivanildo, Denner}\}\}$$

(f) É conexo ?
Sim, pois não existe vértice sem conexão com algum outro vértice. Por via de regra, se todos são meus amigos, então não há desconexão entre os vértices.

(g) Qual a relação entre a soma do grau dos vértices e o número de arestas ?
Teorema: A soma dos graus dos vértices em um grafo é igual ao dobro do número de arestas.

Número de graus dos vértice = 2 * Número de Arestas

Para o nosso grafo: Graus dos vértices

$$\begin{cases} d(Ivanildo) = 5 \\ d(Josué) = 3 \\ d(Denner) = 3 \\ d(Alyne) = 3 \\ d(Rafael) = 1 \\ d(Henrique) = 1 \end{cases}$$

Somando os graus dos vértices temos o valor de 16. O número de arestas é igual a 8, conforme abaixo:

$$\{\{\text{I, A}\}, \{\text{I, J}\}, \{\text{I, R}\}, \{\text{I, D}\}, \{\text{I, H}\}, \{\text{J, A}\}, \{\text{J, D}\}, \{\text{A, D}\}\}$$

$$\boxed{16 = 2 \cdot 8}$$

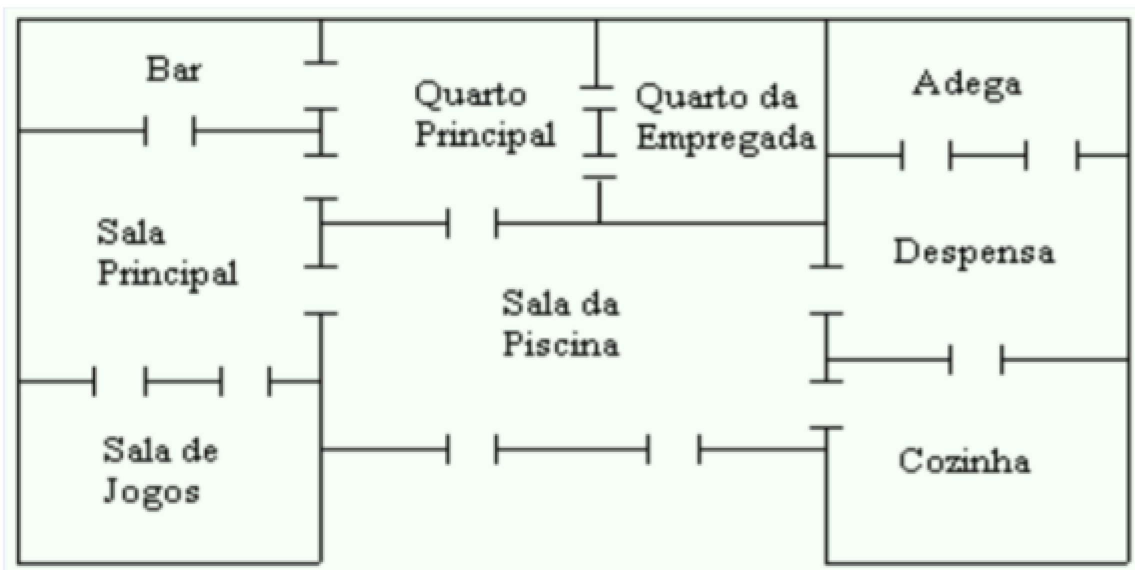
3 Questão 3

Sherlock Holmes foi acionado para desvendar um assassinato na residência de um bilionário cuja planta da casa é apresentada na figura a seguir:

O mordomo alega ter visto o jardineiro entrar na sala da piscina (lugar onde ocorreu o assassinato) e logo em seguida viu-o sair daquela sala pela mesma porta que havia entrado.

O jardineiro afirma que ele não poderia ser a pessoa vista pelo mordomo, pois ele havia entrado na casa, passado por todas as portas uma única vez e, em seguida, deixado a casa.

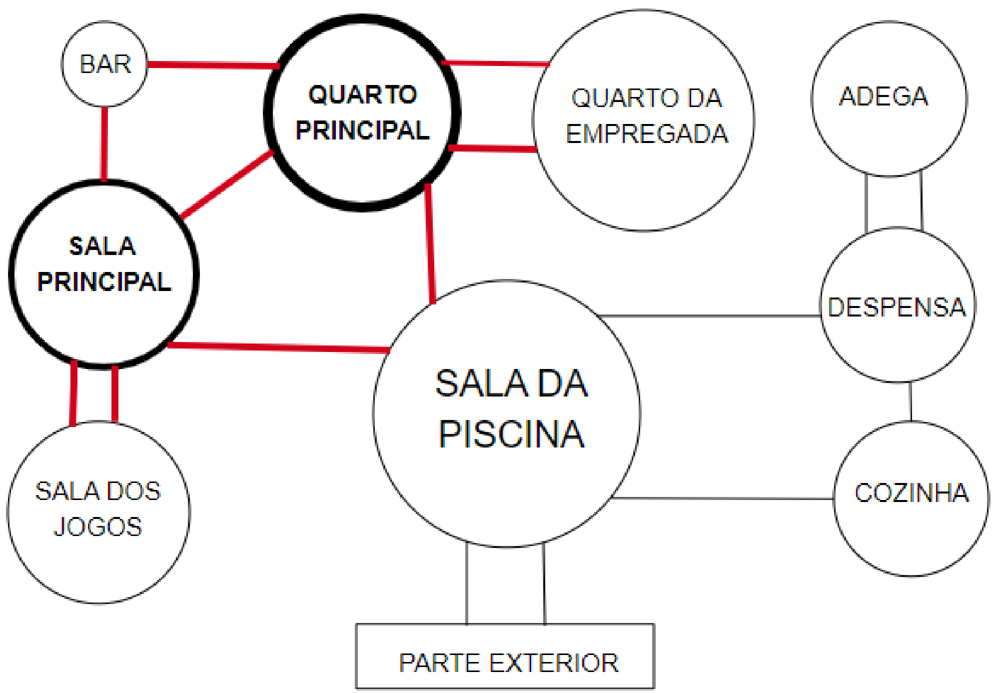
Sherlock Holmes avaliou a planta da residência e em poucos minutos declarou solucionado o caso. Justifique qual foi o argumento usado pelo detetive para solucionar o caso.



(Dica: modele a planta da casa como um grafo e avalie a veracidade das afirmações feitas pelo jardineiro e pelo mordomo)

RESOLUÇÃO

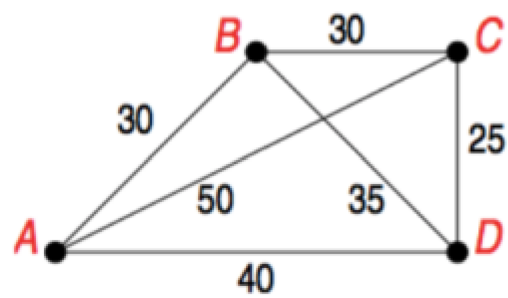
Primeiro irei colocar o problema na forma de um grafo.



Coloquei em destaque os vértices referentes a SALA PRINCIPAL e ao QUARTO PRINCIPAL. Vemos que esses vértices possuem um número ímpar de arestas o que impossibilita a existência de um circuito euleriano, por conta disso é impossível que exista um caminho nesse grafo em que cada vértice seja percorrido uma única vez. Sendo assim o JARDINEIRO ESTÁ MENTINDO ao afirmar que entrou na casa e passou por todos os cômodos uma única vez e em seguida ter deixado a casa. **Logo o jardineiro é o assassino**.

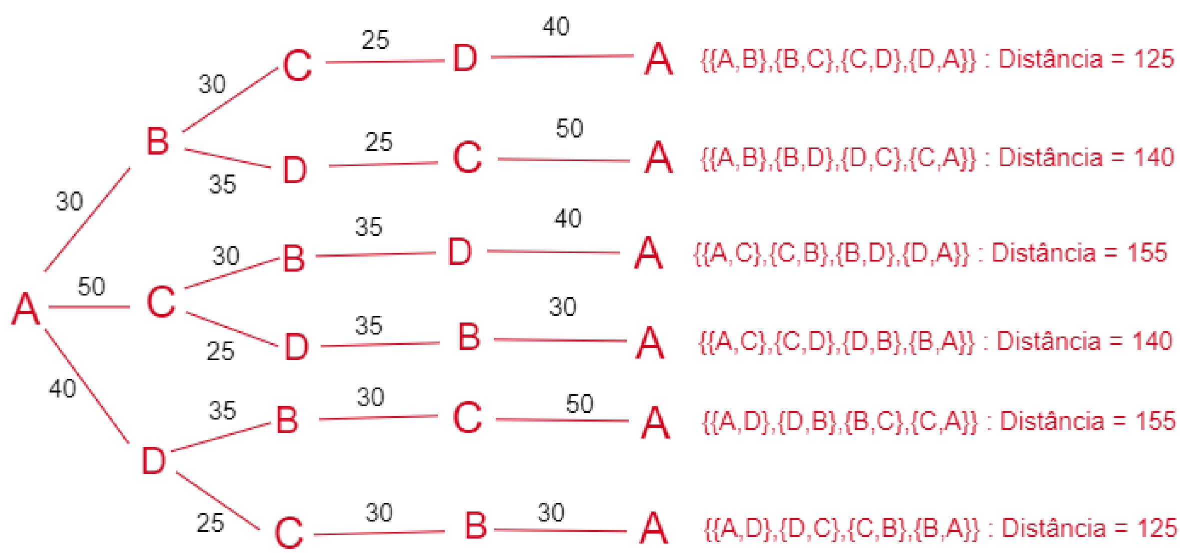
4 Questão 4

Considere o mapa abaixo mostrando quatro cidades (A, B, C, D) e as distância em km entre elas. Determine a menor distância a ser percorrida por um caixeiro viajante, considerando que ele deve sair da cidade A visitar cada cidade exatamente uma vez e retornar a cidade A. (dica: enumere todos os circuitos Hamiltonianos começando e terminando em A.



RESOLUÇÃO

Para resolver essa questão preferi colocar as cidades conforme o diagrama abaixo:



Conforme o diagrama acima, os percursos que o Caixeiro Viajante pode percorrer na menor distância são $\{\{A, B\}, \{B, C\}, \{C, D\}, \{D, A\}\}$ e $\{\{A, D\}, \{D, C\}, \{C, B\}, \{B, A\}\}$, que possuem a mesma distância de 125 Km.

5 Questão 5

Considere o problema com 10 cidades. Qual o tempo necessário para resolver esse problema em um computador equipado com um programa capaz de examinar 1 milhão de rotas por segundo ? E se agora tivéssemos que resolver o problema com 20 cidades. Ainda seria viável ?

Considerando um grafo completo para o problema, para calcular o número de soluções usa-se a fórmula:

$$(n-1)!$$

Sendo n o número de vértices do grafo (as cidades) que temos 10 cidades, então

$$(10-1)! = 9! = 362880$$

Dividindo 362880 por $1000000/s$, temos

$$\frac{\text{Número de rotas}}{\text{Velocidade de processamento do computador}} = \frac{362880}{1000000/s} = 0.36288 \text{ segundos}$$

Para um computador com velocidade de processamento 1000000 de rotas por segundo, o problema pode ser resolvido em menos de 4 segundos.

Aumentando o probela para 20 cidades temos

$$(20-1)! = 19! = 1.216451 \cdot 10^{17}$$

Dividindo $1.216451 \cdot 10^{17}$ por $1000000/s$, temos

$$\frac{\text{Número de rotas}}{\text{Velocidade de processamento do computador}} = \frac{1.216451 \cdot 10^{17}}{1 \cdot 10^{6}/s} = 1.216451 \cdot 10^{11} \text{ segundos ou}$$

$$121645100409 \text{ segundos}$$

Irei converter esse resultado para horas dividindo por 3600 que é o número de segundos de uma hora

$$\frac{121645100409}{3600} \approx 3379030 \text{ horas}$$

Irei converter esse resultado para dias dividindo por 24 que é o número de horas de um dia

$$\frac{3379030}{24} \approx 1407929 \text{ dias}$$

Irei converter esse resultado para anos dividindo por 365 que é o número de dias de um ano

$$\frac{1407929}{365} \approx 3857 \text{ anos}$$

O tempo para solucionar o problema com 20 cidades com um computador capaz de examinar 1 milhão de rotas por segundo é de 3857 anos, **logo esse problema é inviável de resolver**.

6 Questão 6

Quantos vértices tem um grafo regular de grau 4 com 10 arestas.

Se o grafo é regular, então todos os vértices possuem o mesmo número de arestas, logo a soma dos graus é

$$4 + 4 + 4 + \cdots = 4n$$

A soma dos graus desse grafo é $4n$. Sabe-se também que a soma dos graus dos vértices em um grafo é igual ao dobro do número de arestas, então

$$4n = 2 \cdot 10 \therefore 4n = 20$$

Resolvendo

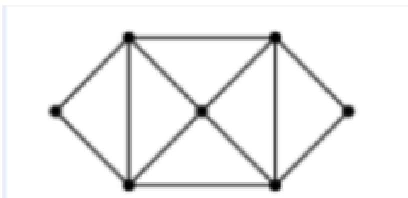
$$n = \frac{20}{4} = 5$$

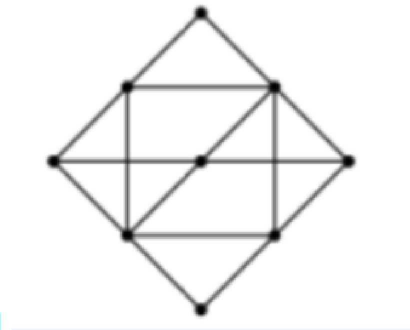
$$\boxed{n = 5}$$

O número de vértices desse grafo é igual a 5.

7 Questão 7

Verifique se os grafos abaixo sao eulerianos e/ou hamiltonianos. Exiba o circuito euleriano e/ou hamiltoniano caso seja possível

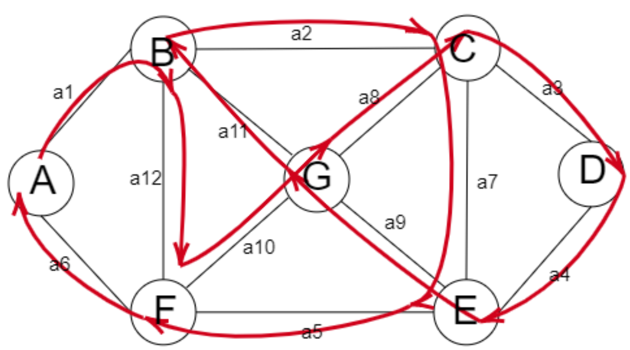
[A)] 

[B)] 

RESOLUÇÃO A

Para ser um grafo euleriano é necessário que esse grafo tenha um circuito euleriano , ou seja, que começa e termina no mesmo vértice e que passe por todas as arestas uma única vez, então eu posso passar por todos os vértices mais de uma vez. Como podemos ver abaixo o caminho

$$\{A, a1, B, a12, F, a10, G, a8, C, a3, D, a4, E, a9, G, a11, B, a2, C, a7, E, a5, F, a6, A\}$$



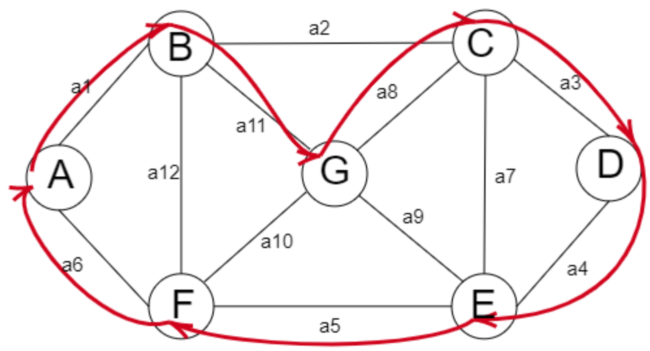
Para o grafo ser hamiltoniano, esse grafo deve conter um caminho que passa por todos os vértices uma única vez e que começa e termina no mesmo vértice, então eu não preciso passar por todas as arestas do grafo. Assim sendo, conforme a seguir temos no grafo um circuito hamiltoniano.

$$\{A, a1, B, a11, G, a8, C, a3, D, a4, E, a5, F, a6, A\}$$

Outros caminhos aternativos alternativos

$$\{A, a6, F, a5, E, a4, D, a3, C, a8, G, a11, B, a1, A\}$$

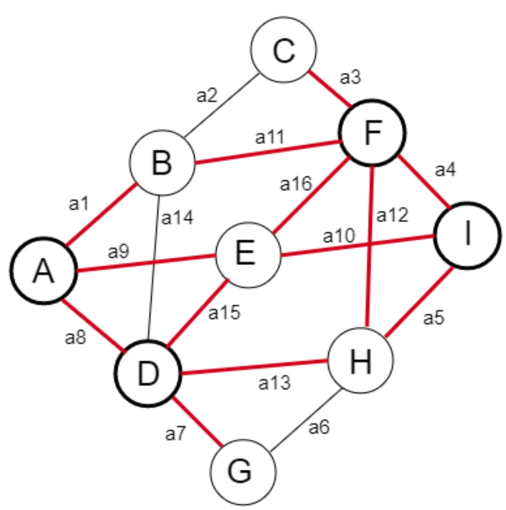
$$\{A, a6, F, a10, G, a9, E, a4, D, a3, C, a2, B, a1, A\}$$



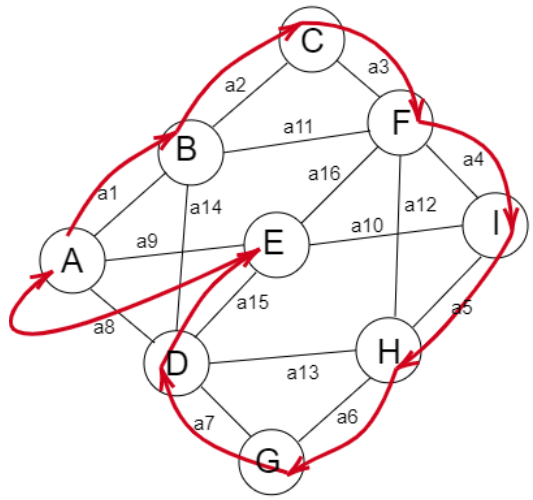
Como o grafo da letra A possui um circuito euleriano e um circuito hamiltoniano, então é um **grafo euleriano e hamiltoniano**.

RESOLUÇÃO B

Para que o grafo da letra B seja um grafo euleriano ele precisa ter uma circuito euleriano e, consequentemente, uma trilha euleriana. Sendo nosso grafo conexo, ele terá uma trilha euleriana se e somente se hoiver 0 ou 2 vértices de grau ímpar, entretanto nosso grafp possui 4 vértices de garu ímpar conforme a figura abaixo; portanto ele não é um grafo euleriano.



Para que o grafo seja hamiltoniano, é preciso que exista um caminho que passe por todos os vértices uma única vez e termine o caminho no vértice de início. Conforme a imagem abaixo, existe um caminho que atende essas condições, portanto ele é um grafo hamiltoniano.



O caminho da imagem é:

$$\{A, a1, B, a2, C, a3, F, a4, I, a5, H, a6, G, a7, D, a15, E, a9, A\}$$

Mas também pode ser o caminho:

$$\{A, a9, E, a15, D, a7, G, a6, H, a5, I, a4, F, a3, C, a2, B, a1, A\}$$

Portanto o grafo da letra B não é euleriano, mas é hamiltoniano.