Modelagem via grafos:

Definições e problemas clássicos (grafos Eulerianos)

A origem dos grafos (Euler 1736)

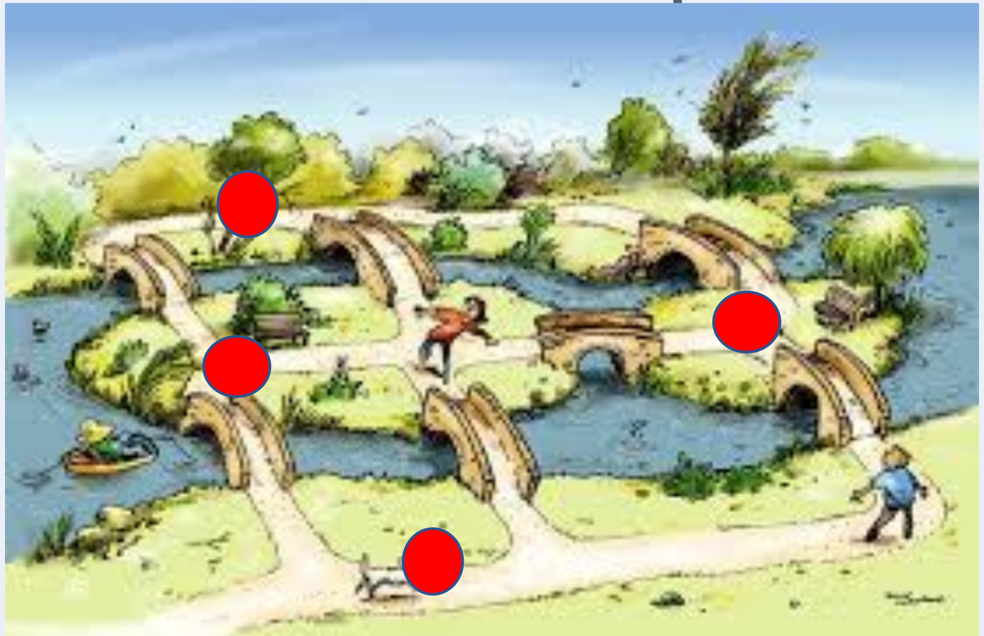
Problema das Sete pontes de Königsberg

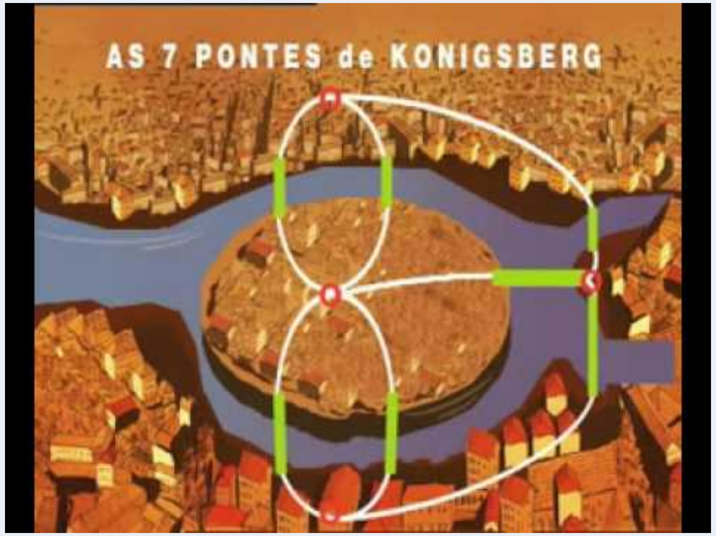
Leonhard Euler (1707–1783).

<u>Problema</u>: É possível atravessar cada ponte apenas uma vez e retornar ao ponto inicial?

A origem dos grafos (Euler 1736)

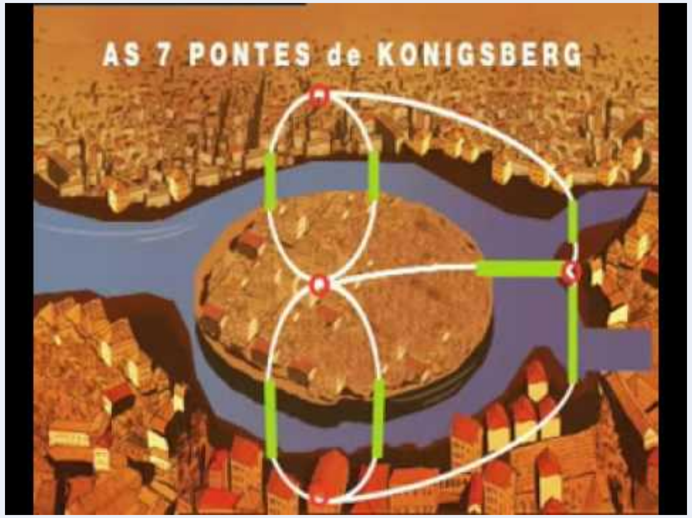
Problema das Sete pontes de Königsberg





Como Euler modelou o problema? eliminou todos os detalhes geométricos e acabou representando o problema por um grafo (essa estrutura ainda não era conhecida na época, teoria formalizada só no século XIX)

A origem dos grafos (Euler 1736)



Pontos (ilhas ou margens) vértices

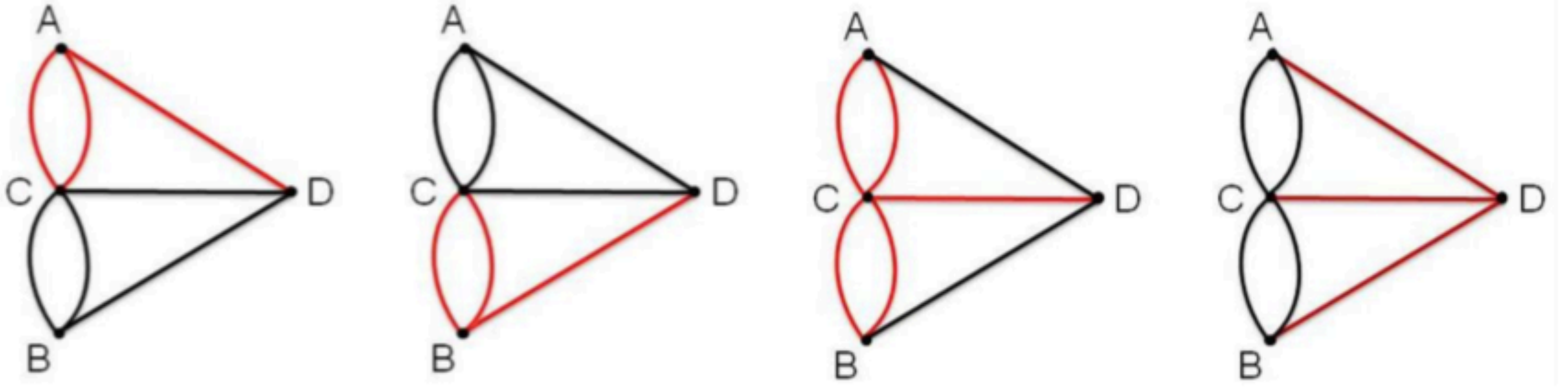
Linhas (pontes) arestas

Problema no grafo:

obter um percurso que partindo de um dos vértices, percorra todo o grafo passando uma única vez por cada aresta e volte ao ponto inicial

A origem dos grafos (Euler 1736)

<u>Solução:</u> para passar por um ponto é necessário duas arestas, uma para entrar e outra para sair. Nesse grafo todos os pontos têm número ímpar de arestas e assim **é impossível** passar por todas as arestas sem repetição.



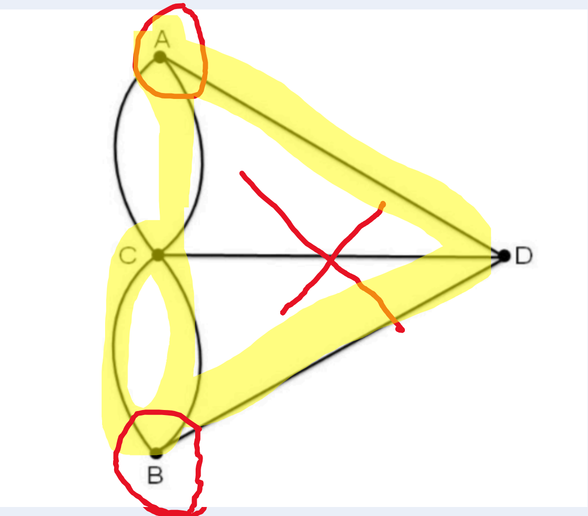
3 arestas de *A*. 3 arestas de *B*. 5 arestas de *C*. 3 arestas de *D*

A origem dos grafos (Euler 1736)

Sem retornar ao ponto de partida:

Também é impossível o trajeto!! Um ponto só poderia ter um número ímpar de arestas se fosse o ponto de partida ou o de chegada.

Exemplo: remova a areta C-D



A: 3 arestas;   C:4 arestas

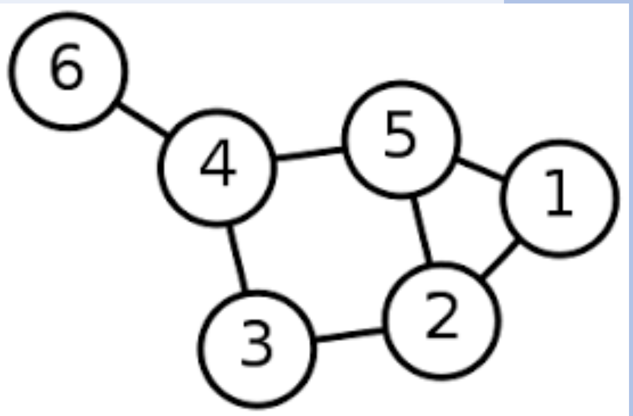
B: 3 arestas;   D:2 arestas

Formalização matemática

Grafo: consiste de dois conjuntos finitos:

1. V(G): **vértices** ou **nós** (conjunto não vazio) ;
2. E(G): **arestas** (conjunto formado de pares de dois elementos de V)

Desenho do grafo



Exemplo: Considere o grafo G(V,E)

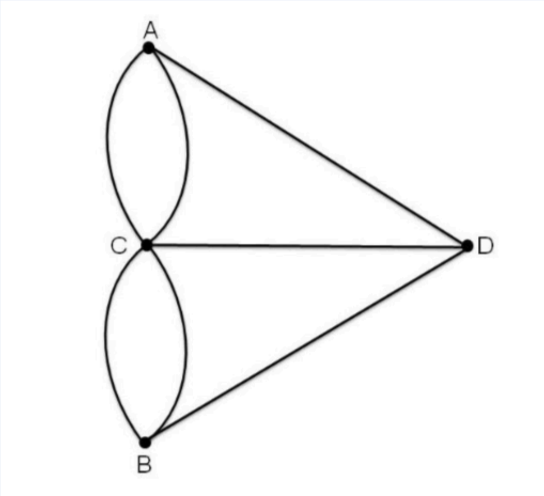
V={1,2,3,4,5,6}

E={{1,2}, {1,5},{2,3},{2,5},{3,4},{4,5},{4,6}}

Formalização matemática

<u>Grau de um vértice:</u> número de arestas que incidem no vértice.

Exemplo:



d(A)=3, d(B)=3,
d(C)=5, d(D)=3

Notação d(v)
d:degree

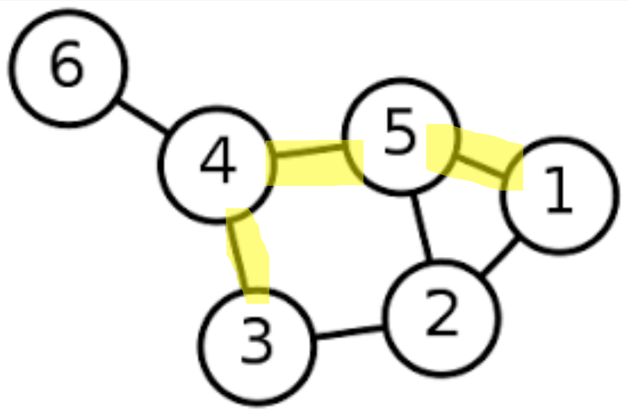
Note que 3+3+5+3=14=2x7

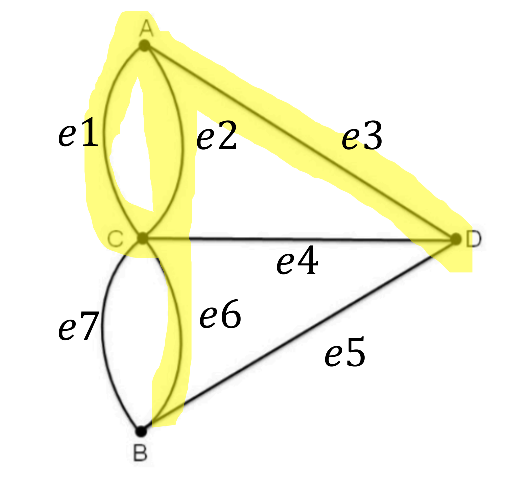
<u>Teorema:</u> A soma dos graus dos vértices em um grafo é igual ao dobro do número de arestas

<u>Vértices Adjacentes (vizinhos)</u>: são vértices com uma aresta entre eles

Formalização matemática

Passeio é uma sequência de vértices tal que se v e w são vértices consecutivos na sequência então v-w é uma aresta do grafo





Ex:

(3,4,5,1)

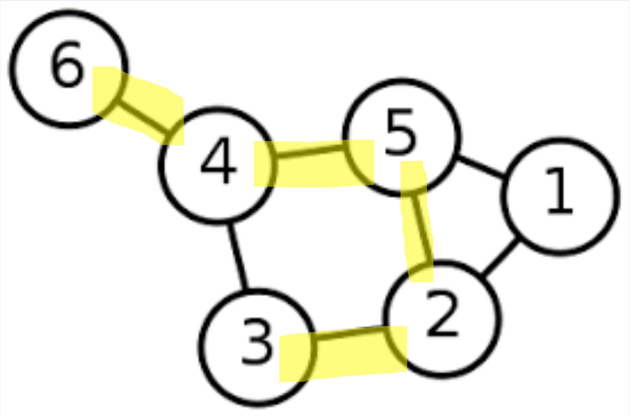
$(D, e3, A, e2, C, e6, B, e6, C, e1, A)$

Em grafos com arestas paralelas (arestas que conectam os mesmos vértices) precisamos diferenciar cada um deles no passeio.

Formalização matemática

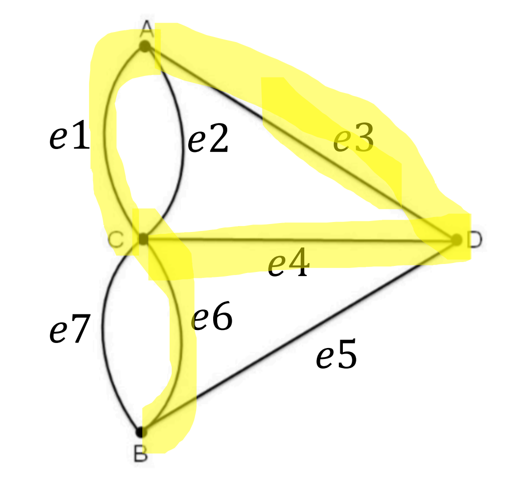
<u>Trilha</u>: é um passeio em que todas arestas são distintas

<u>Caminho</u>: é um passeio em que todos os vértices são distintos



É caminho
É trilha

$$(6,4,5,2,3)$$



Não é caminho
É trilha

$$(B, e6, C, e4, D, e3, A, e2, C, e1)$$

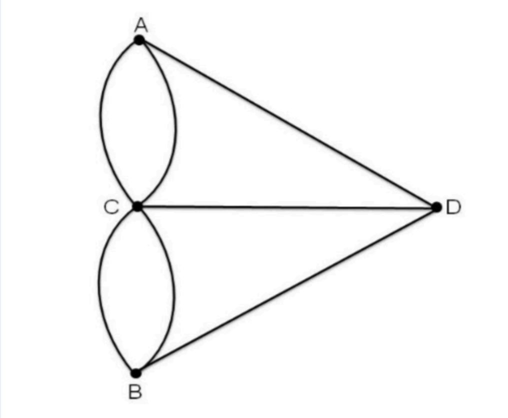
<u>Ciclo (circuito):</u> é uma trilha fechada. Ex: $(A, e1, C, e2, A)$

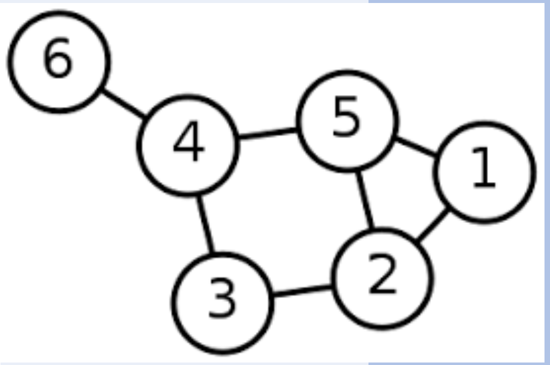
Formalização matemática

<u>Trilha Euleriana</u>: é uma trilha que passa por todas as arestas uma única vez

<u>Circuito Euleriano</u>: é uma trilha que começa e termina no mesmo vértice

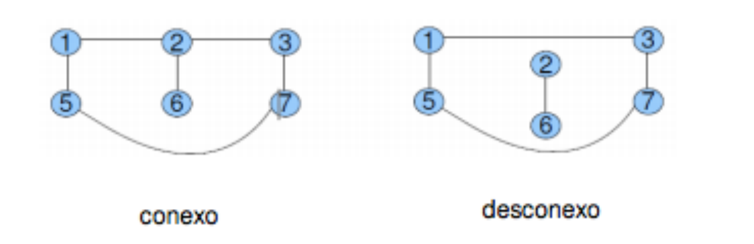
É possível encontrar trilhas ou caminhos eulerianos nestes grafos??





Formalização matemática

Grafo Euleriano: é um grafo que contém um circuito Euleriano



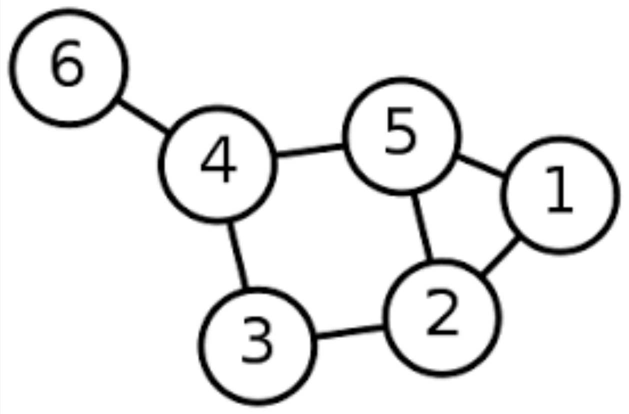
Teorema: Seja G um grafo conexo. G é Euleriano se e somente se todos seus vértices tem grau par

Teorema: Seja G um grafo conexo. G tem uma trilha Euleriana se e somente se tiver 0 ou 2 vértices de grau ímpar (um para o início e outro para a chegada)

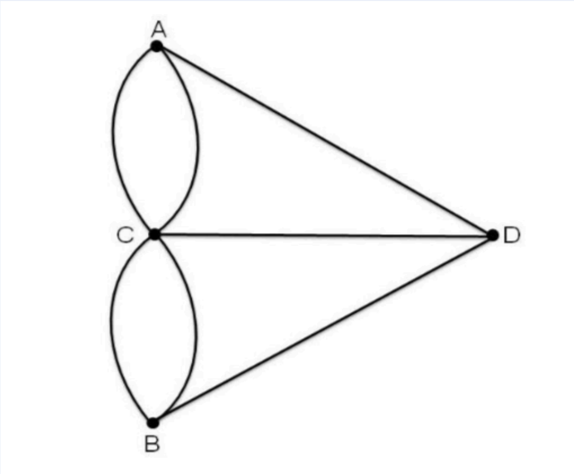
G é conexo se e somente se existir um Caminho entre qualquer par de vértices!

Formalização matemática

É possível encontrar trilhas ou caminhos eulerianos nestes grafos??



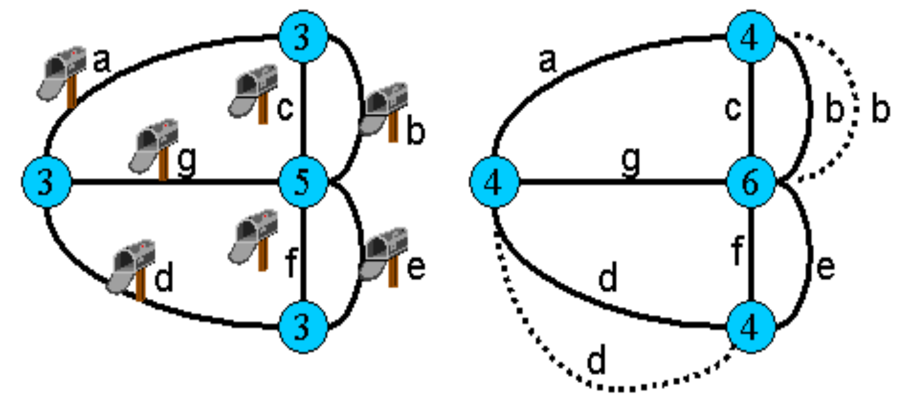
Não: 3 vértices de grau ímpar



Não: todos os vértices têm grau ímpar

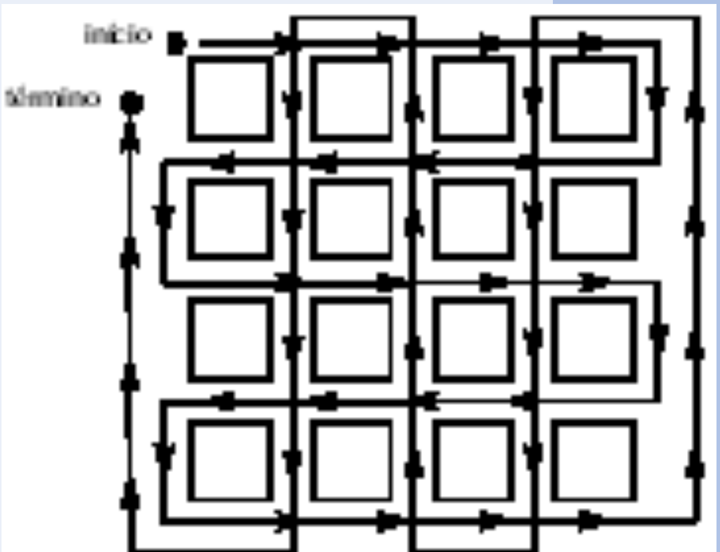
Aplicações práticas

Trajeto dos carteiros



The Chinese Postman Problem (1962): qual é o número mínimo de travessias redundantes ?

Trajeto da coleta do caminhão de lixo

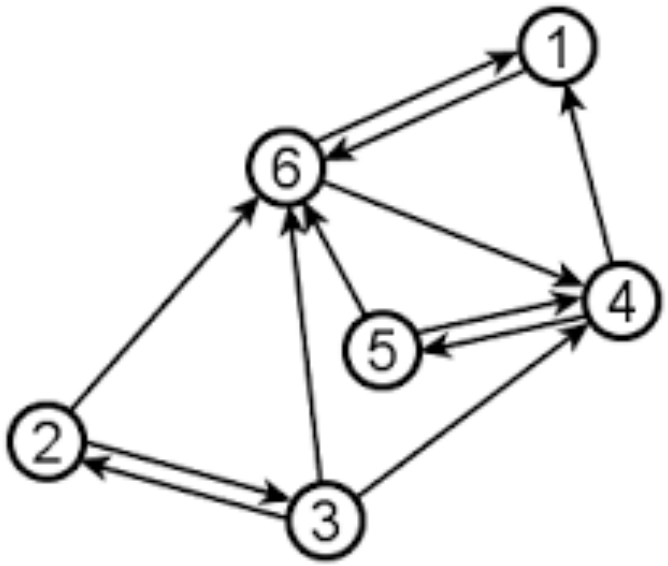


Grafos Direcionados

As aresta têm direções (ruas de mão única).

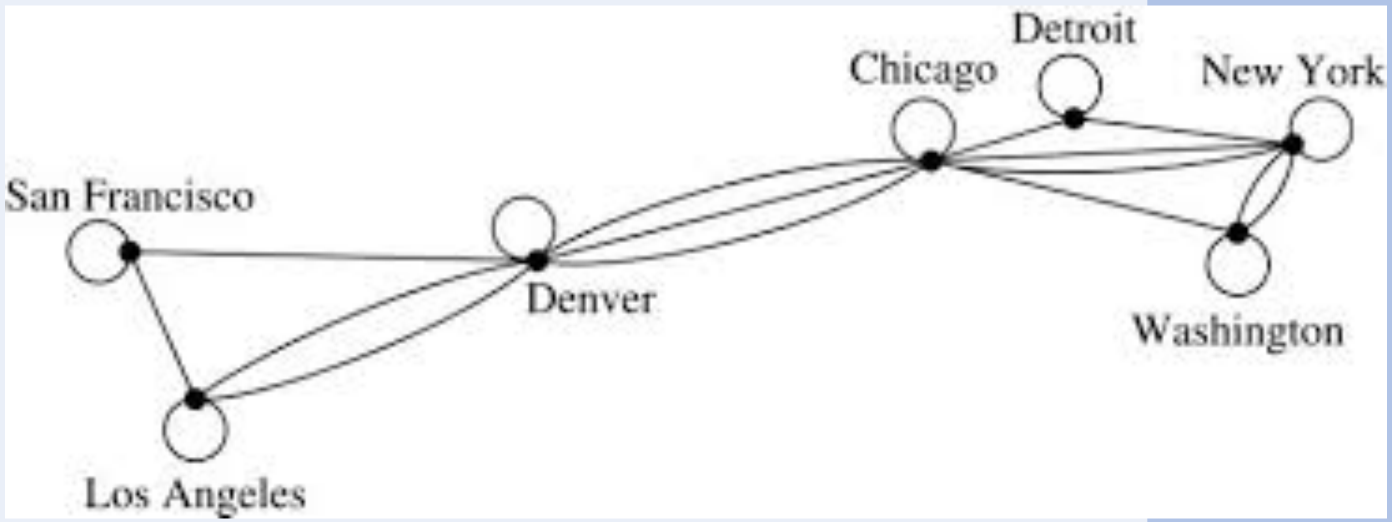
Podem ser representadas com pares ordenados:
(u,v) começa em u e termina em v

Exemplo:
G(V,E)
V={1,2,3,4,5,6}
E={(1,6), (2,3),(2,6),(3,2),(3,4),
3,6),{4,1),(4,5),(5,4),(5,6),(6,1)}



Chaves denotam conjuntos e parentêses pares oredenados
$(1,6) \neq (6,1)$ $\{1,6\} = \{6,1\}$

Grafos com laços e arestas paralelas



Laços: aresta que conecta o vértice a ele próprio

Arestas paralelas: arestas que possuem os mesmos vértices como extremidade

Nomenclatura adotada em alguns materiais:

Grafos (ou grafos simples): não contem laços nem arestas paralelas

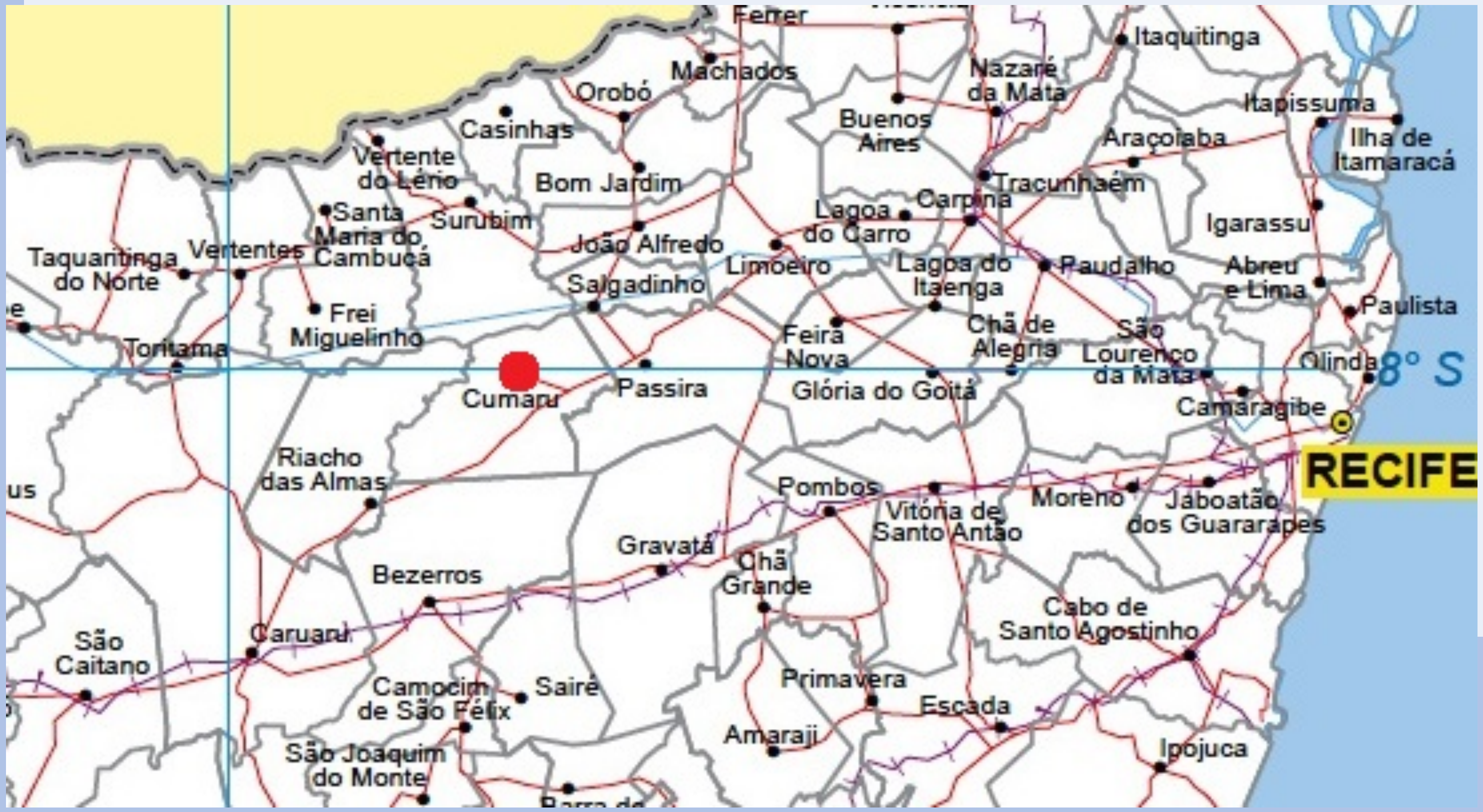
Multigrafo – contém arestas paralelas

pseudografo – contém laços

Grafos estão por todos os lados!!!

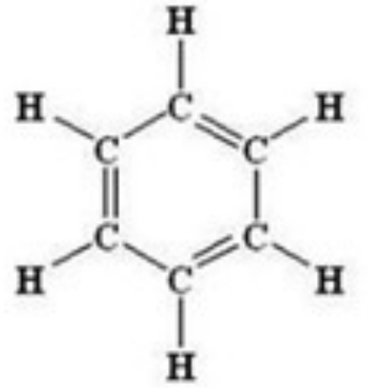
MAPAS

Cidades = vertices (V)
Estradas = arestas (E)
G (V,E)

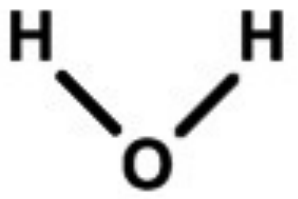


Estruturas Moleculares

Elementos = vertices (V)
ligações = arestas (E)
G (V,E)



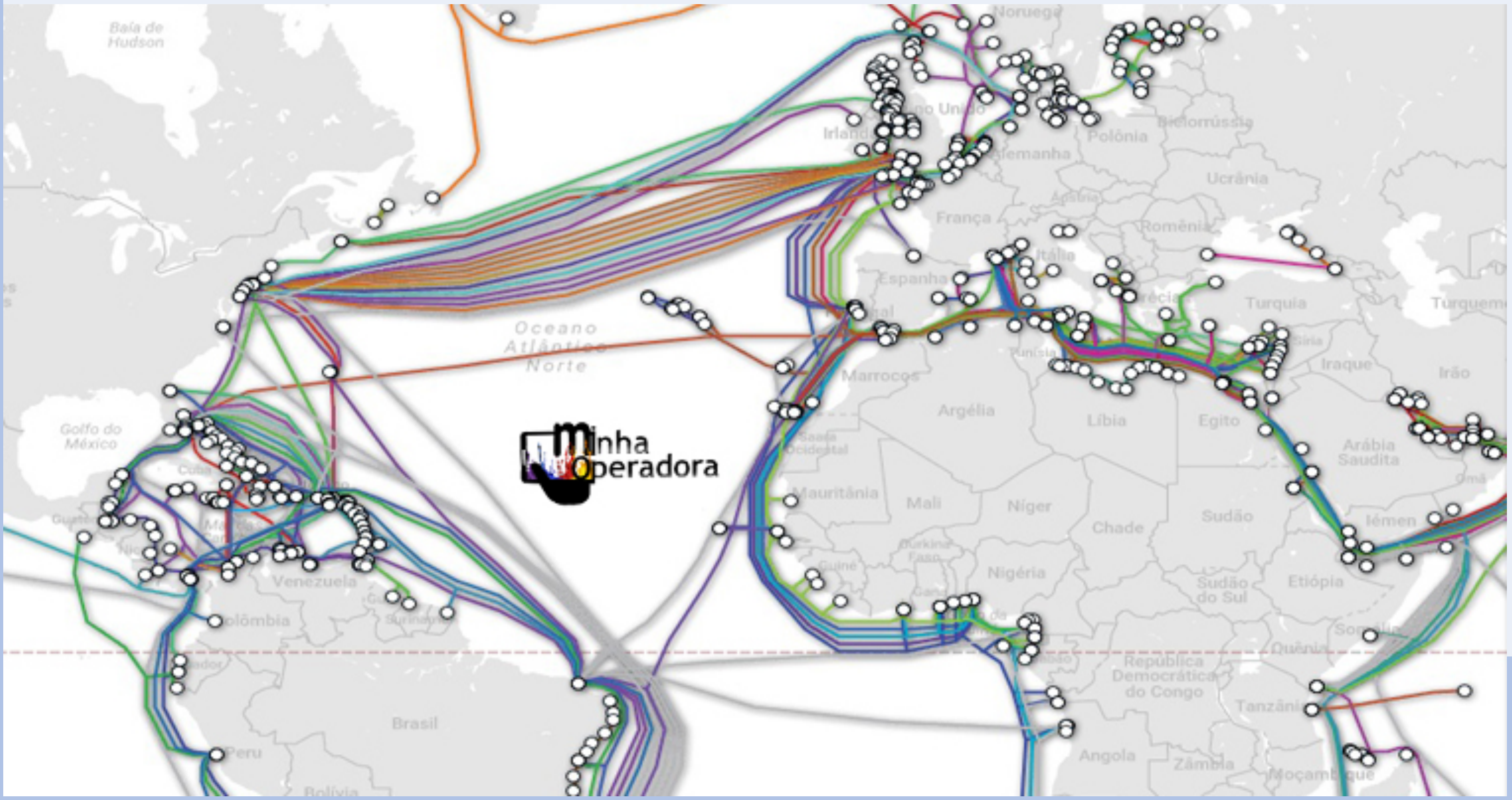
Fórmula estrutural do benzeno



Fórmula estrutural do água

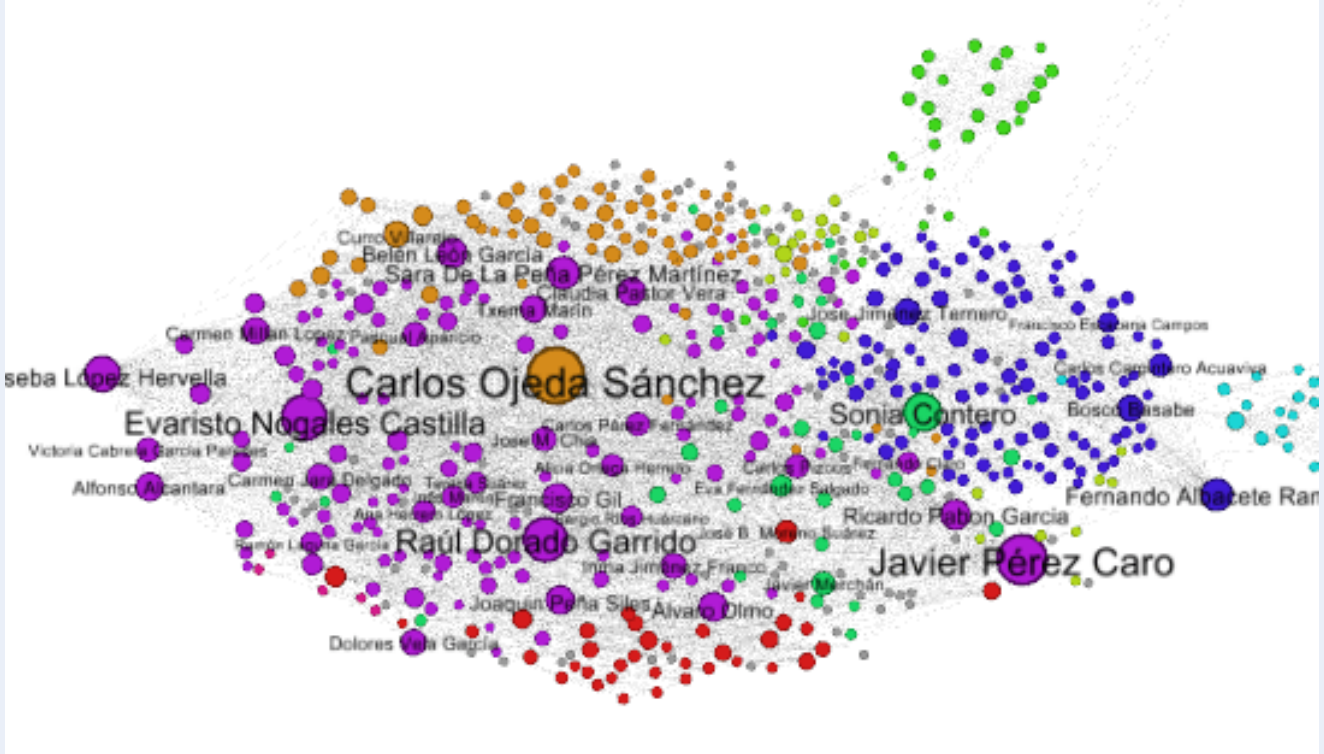
Redes de Internet

Computadores = vertices (V)
links de fibra ótica = arestas (E)
G (V,E)



Redes Sociais

Pessoas = vertices (V)
relações de amizade = arestas (E)
G (V,E)



....E muitas outras aplicações

Nesta aula:

1. Revisamos um pouco da história da introdução do grafos (problema das sete pontes - Euler)
2. Definimos alguns termos usados na teoria dos grafos: Grafos, passeios, trilhas, trilha Euleriana, circuito Euleriano
3. Vimos diversos problemas reais que podem ser modelados por grafos

Exercícios

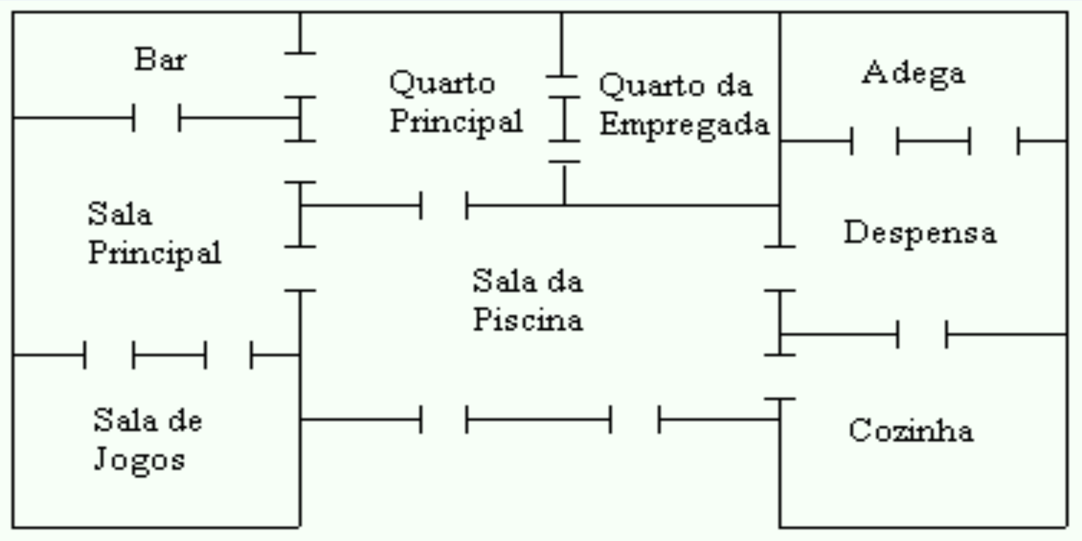
1. Faça um grafo representado as relações de amizade entre você e seus 05 melhores amigos no facebook. Determine o vértice de maior grau.

Responda:

Esse grafo é direcionado? Tem laços? E arestas paralelas? Tem ciclos? O grafo é conexo? Qual a relação entre a soma do grau do vértices e o número de arestas? (Justifique todas as respostas)

Exercícios

2. Sherlock Holmes foi acionado para desvendar um assassinato na residência de um bilionário



O mordomo alega ter visto o jardineiro entrar na sala da piscina (lugar onde ocorreu o assassinato) e logo em seguida viu-o sair daquela sala pela mesma porta que havia entrado

Exercícios

O jardineiro afirma que ele não poderia ser a pessoa vista pelo mordomo, pois ele havia entrado na casa, passado por todas as portas uma única vez e, em seguida, deixado a casa.

Sherlock Holmes avaliou a planta da residência e em poucos minutos declarou solucionado o caso. Justifique qual foi o argumento usado pelo detetive para solucionar o caso.

(Dica: modele a planta da casa como um grafo e avalie a veracidade das afirmações feitas pelo jardineiro e pelo mordomo)

Próxima Aula

1. Problema do caixeiro viajante
2. Problemas de coloração em grafos

e mais conceitos sobre grafos ...