Modelagem via grafos:

Definições e problemas clássicos (grafos Hamiltonianos)

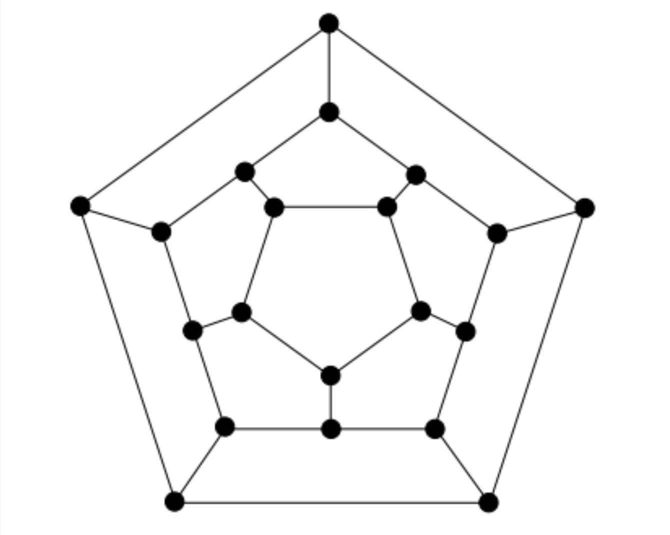
Problemas Clássicos

O jogo “Icosiano” (1859) – Willian Hamilton

Problema: Encontrar um caminho que passa por todos os pontos do tabuleiro (dodecaedro) uma única vez e volta ao ponto inicial.

Problemas Clássicos

Cada vértice recebeu o nome de uma cidade: Londres, Paris, Hong Kong, New York, etc.



Problema: É possível começar em uma cidade e visitar todas as outras cidades exatamente uma única vez e retornar à cidade de partida?

Formalização Matemática

caminho hamiltoniano – é uma caminho que passa por todos os vértices uma única vez

Circuito (ciclo) hamiltoniano – é uma caminho hamiltoniano que começa e termina no mesmo vértice

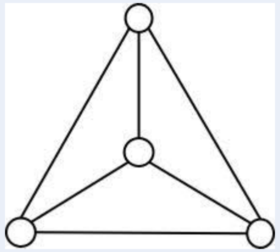
Grafo hamiltoniano – é um grafo que tem um ciclo hamiltoniano

Diferença entre caminho hamiltoniano e caminho euleriano
Circuito euleriano inclui todas arestas uma única vez
Circuito hamiltoniano inclui todos os vértice uma única vez, menos o inicial =final.

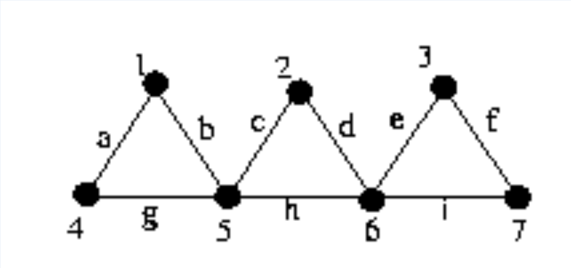
Formalização matemática

Um grafo pode ser:

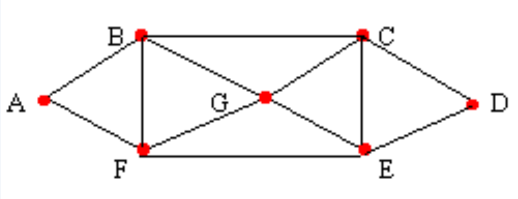
- Só hamiltoniano



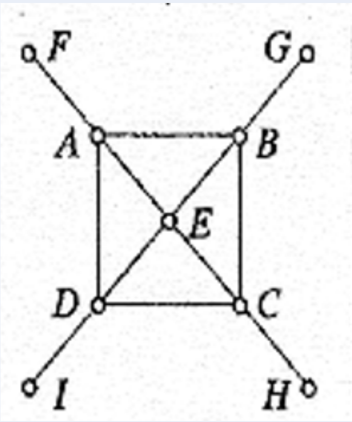
- Só euleriano



- hamiltoniano e euleriano



- Nem hamiltoniano e nem euleriano



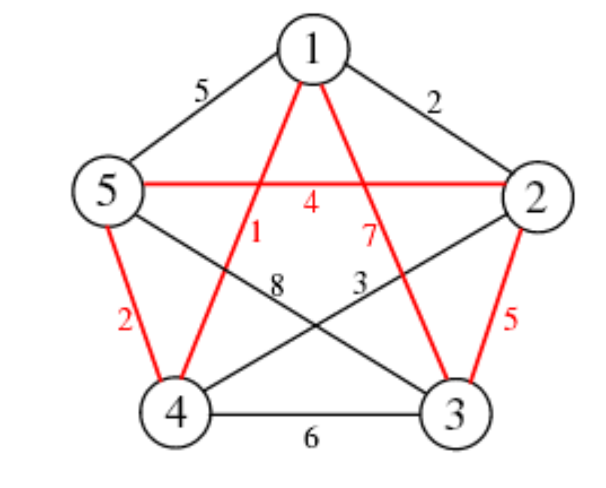
Problema do caixeiro viajante

Um caixeiro viajante necessita visitar várias cidades dentro de sua área de vendas. As cidades estão conectadas (aos pares) por rodovias. Como determinar uma viagem circular (com volta ao ponto de partida) de custo mínimo tal que cada cidade seja visitada apenas uma vez?

O problema pode ser modelado como um grafo:

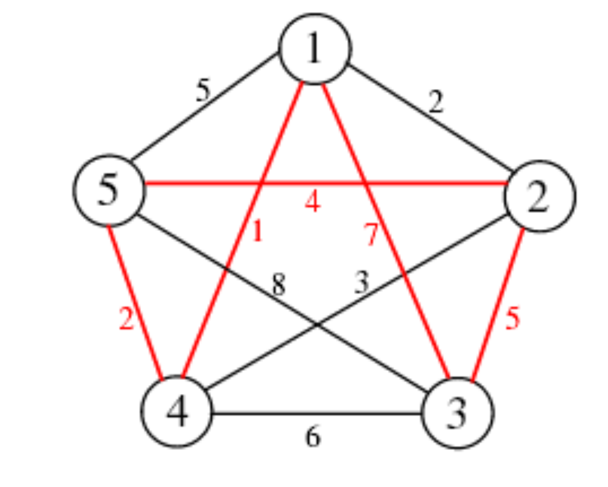
vértices: cidades; arestas: rodovias

distâncias são representadas por pesos nas arestas



Problema do caixeiro viajante

K_5:



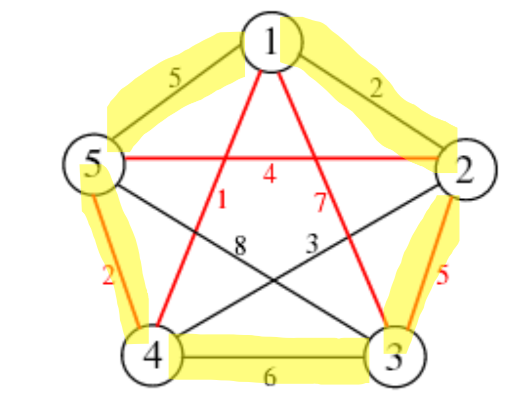
<u>Grafo regular:</u> todos os vértices têm o mesmo grau

<u>Grafo completo:</u> existe uma aresta entre cada par de vértices (denota-se Kn, n é o número de vértices)

Número de arestas em Kn: n(n-1)/2

Solução por força bruta: enumerar todas <u>as soluções possíveis</u>, ou seja, encontar todos os <u>circuitos hamiltonianos no grafo K_5</u> e escolher o de menor custo associado

Problema do caixeiro viajante



Um grafo completo com n vértices tem (n-1)! circuitos hamiltonianos.

Para o nosso exemplo teremos que avaliar (5-1)! =24 soluções possíveis.

Podemos tratar os ciclos como “iguais” se eles tem a mesma sequência de arestas, mesmo que a origem seja diferente. Ex: (5,4,3,2,1,5)=(4,3,2,1,5,4)

Problema do caixeiro viajante

O número de circuitos cresce muito
Rápido com o aumento no número
Cidades!!!

1! = 1
2! = 2
3! = 6
4! = 24
5! = 120
6! = 720
7! = 5040
8! = 40,320
9! = 362,880
10! = 3,628,800
11! = 39,916,800
12! = 479,001,600
13! = 6,227,020,800
14! = 87,178,291,200
15! = 1,307,674,368,000
16! = 20,922,789,888,000
17! = 355,687,428,096,000
18! = 6,402,373,705,728,000
19! = 121,645,100,408,832,000
20! = 2,432,902,008,176,640,000

Problema do caixeiro viajante

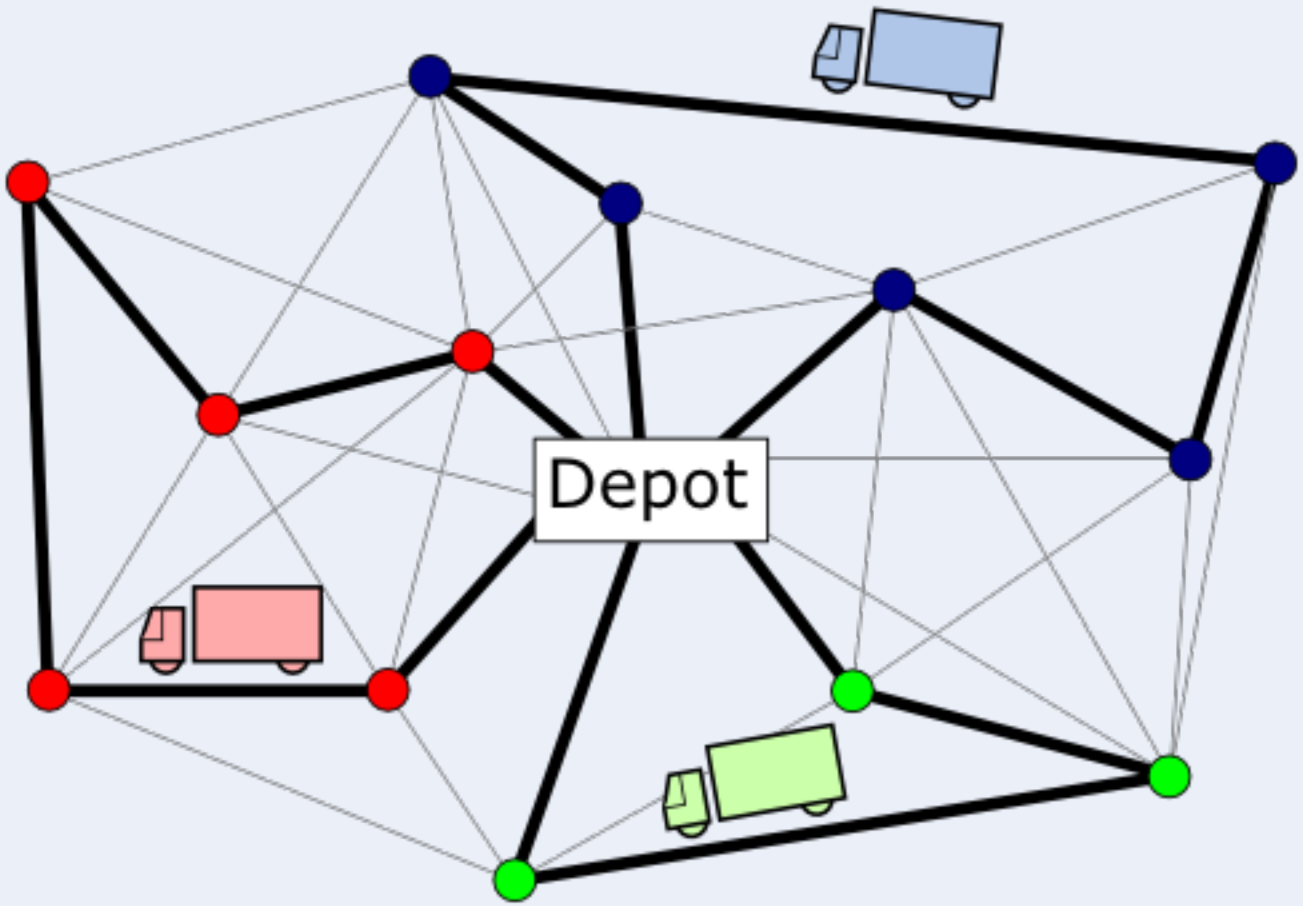
Concurso 1962 para resolver o problema com 33 cidades:
Gerar todas as soluções no supercomputador mais rápido existente levaria 100 trilhões de anos!!

Não há um algoritmo eficiente para encontrar um circuito hamiltoniano de menor custo. Este problema é NP-completo.

Este é um dos problemas do Prémio Millennium (P versus NP) quem resolver pode ganhar $1 milhão!!

Aplicações Reais

Roteamento de veículos

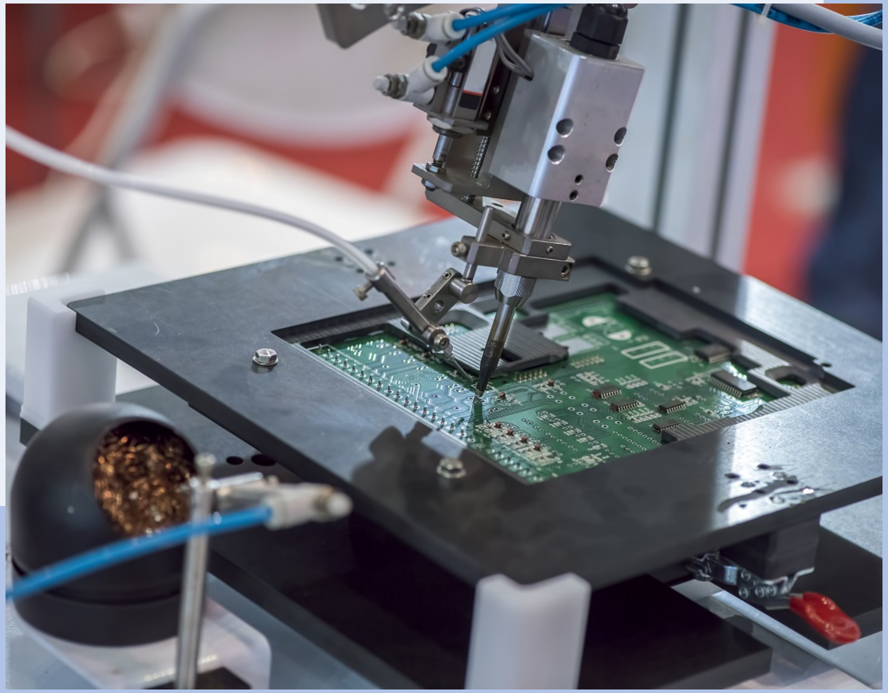


Aplicações Reais

Fabricação de circuitos integrados:

Inserção automática de componentes

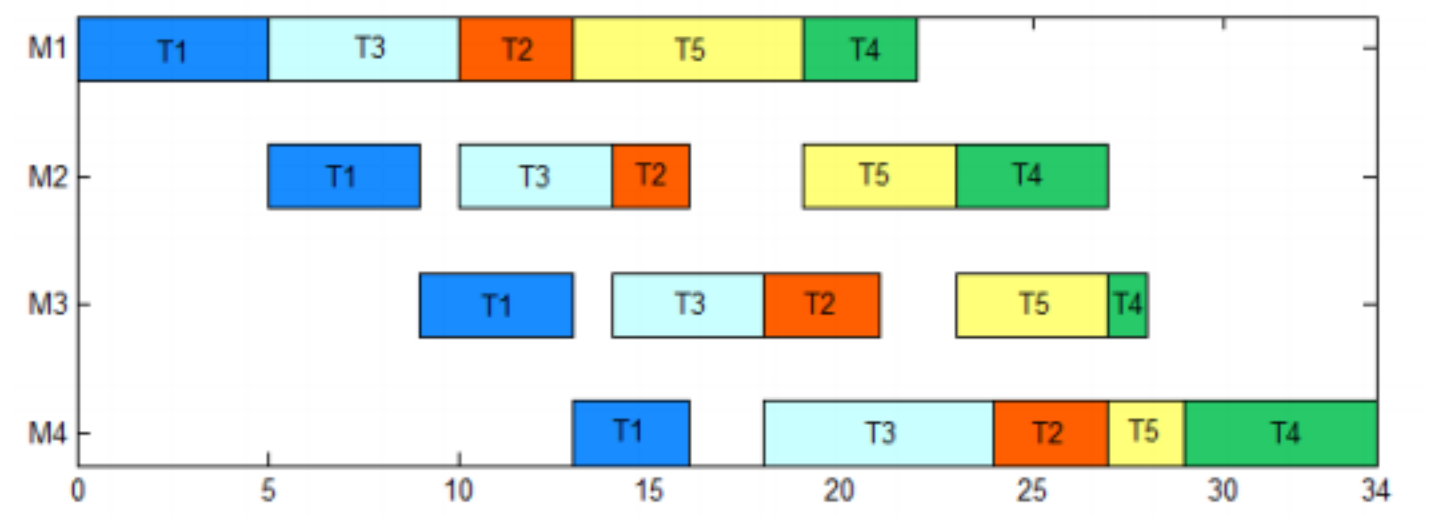
Cidades são representadas pelas posições na placa



Aplicações Reais

Escalonamento de trabalho em máquinas: K tarefas, n máquinas, mesma ordem

O problema consiste em determinar uma seqüência de tarefas dentre k! seqüências possíveis, que é mantida para todas as máquinas, de modo otimizar uma determinada medida de desempenho da programação, associada geralmente ao fator tempo

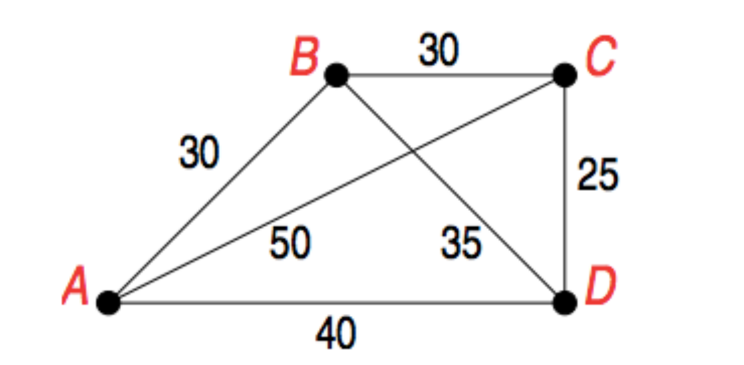


Nesta aula:

1. Estudamos grafos hamiltonianos (problema de visitar um conjunto de cidades uma única vez)
2. Definimos mais termos usados na teoria dos grafos: Grafo completo, grafo regular, caminho hamiltoniano, ciclo hamiltoniano
3. Revisamos o problema do caixeiro viajante (PVC) e vimos alguns problemas reais que podem ser modelados usando o PVC

Exercícios

1. Considere o mapa abaixo mostrando quatro cidades (A,B,C,D) e as distância em km entre elas. Determine a menor distância a ser percorrida por um caixeiro viajante, considerando que ele deve sair da cidade A visitar cada cidade exatamente uma vez
E retornar a cidade A



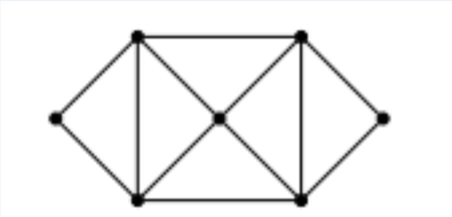
(dica: enumere todos os circuitos
Hamiltonianos começando e terminando em A

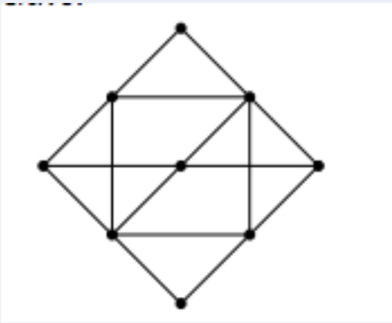
Exercícios

2. Considere o problema com 10 cidades. Qual o tempo necessário para resolver esse problema em um computador equipado com um programa capaz de examinar 1 milhão de rotas por segundo? E se agora, tivéssemos que resolver o problema com 20 cidades. Ainda seria viável?

3. Quantos vértices tem um grafo regular de grau 4 com 10 arestas.

4. Verifique se os grafos abaixo são eulerianos e/ou hamiltonianos. Exiba o circuito euleriano e/ou hamiltoniano caso seja possível.





Próxima Aula

1. Mais conceitos sobre grafos
2. Formas de representar grafos
3. Noções sobre algoritmos para resolver alguns problemas em grafos