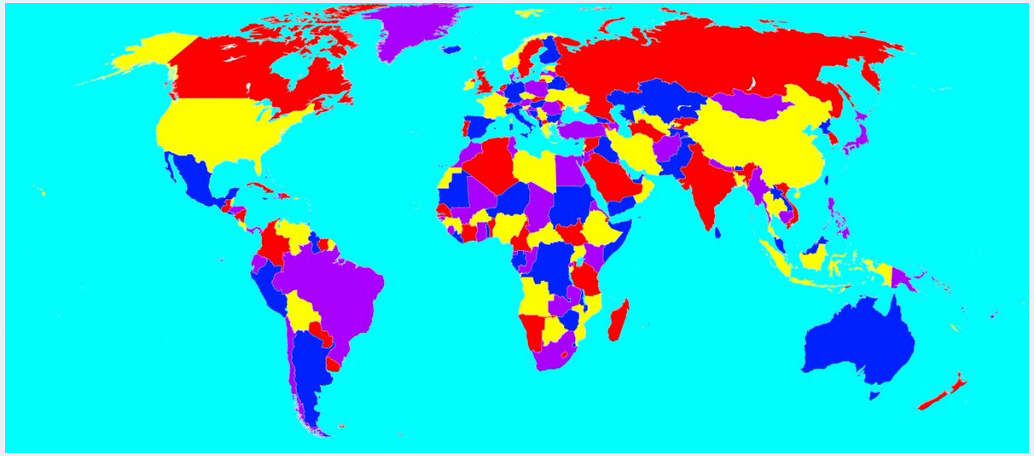
Modelagem via grafos:

Definições e problemas clássicos (Coloração em Grafos)

Problemas Clássicos

Coloração em mapas (1852) – Francis Guthrie

Mapa dos condados da Inglaterra (Teorema das 4 cores)

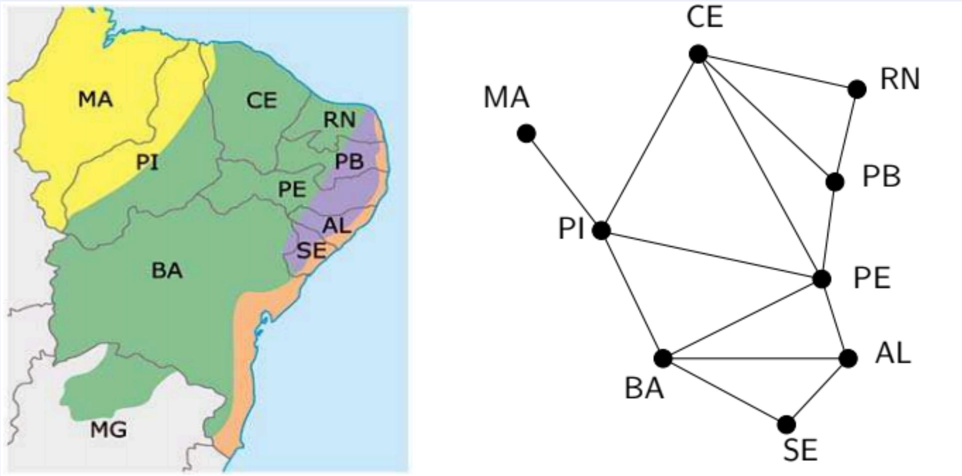


<u>Problema</u>: Qual é o menor número de cores para colorir um mapa considerando que regiões que fazem fronteira não podem receber a mesma cor?

Francis Guthrie notou que 4 cores são suficientes!!

Coloração em mapas

Um mapa em um plano pode ser representado por um grafo chamado grafo dual.



Considere os vértices no interior de cada um dos estados. Em seguida, para cada dois estados vizinhos, com alguma linha de fronteira em comum, desenhamos uma aresta.

Qual é o menor número de cores para colorir os vértices do grafo, dado que vértices adjacentes não podem receber a mesma cor ?

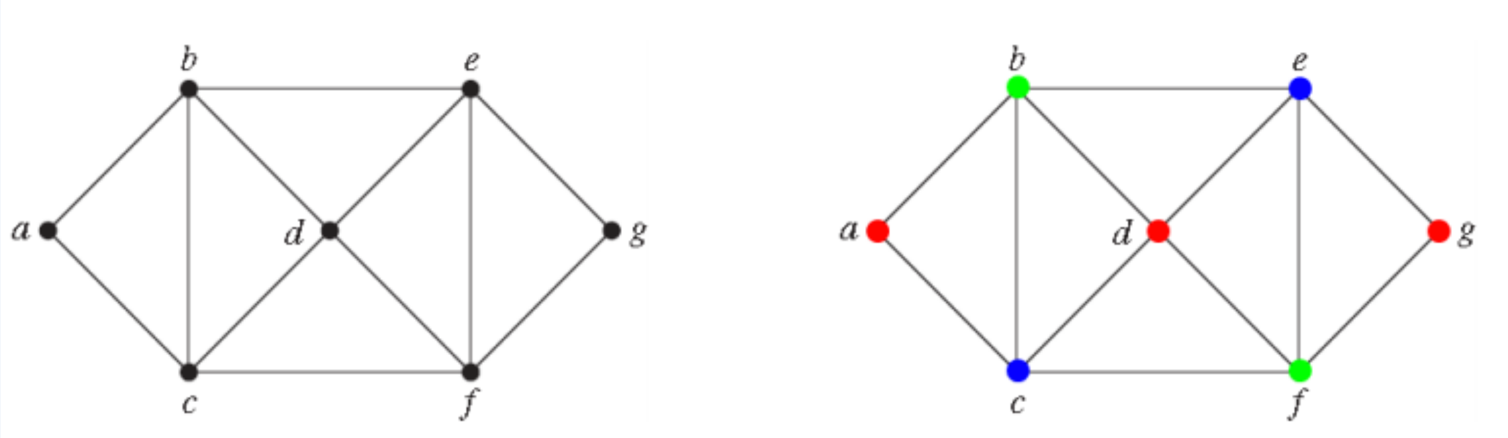
Formalização Matemática

Coloração de um grafo simples: é o assinalamento de uma cor a cada vértice do grafo tal que dois vértices adjacentes não têm a mesma cor

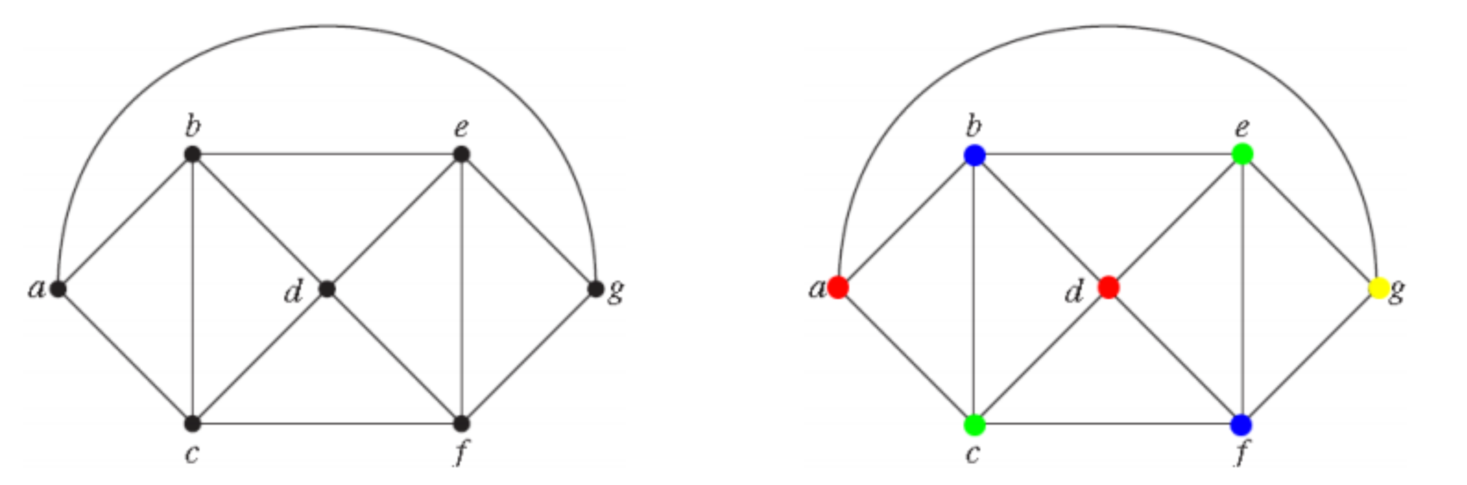
Número cromático de um grafo: é o menor número de cores necessárias à coloração deste grafo. O número cromático de um grafo G é denotado por $\chi(G)$.

Exemplos:

G_1 Número Cromático de G_1 = 3

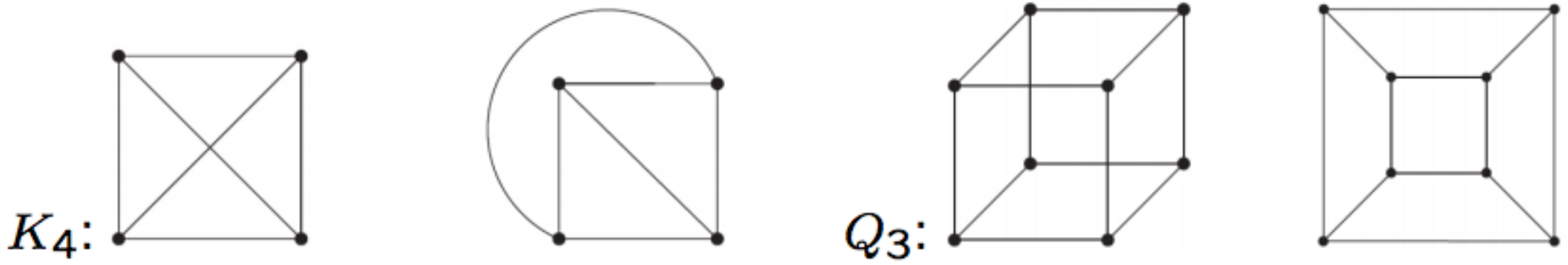


G_2 Número Cromático de G_1 = 4



Formalização Matemática

<u>Grafo planar</u> – Um grafo é planar se puder ser desenhado no plano sem que haja arestas se cruzando
Se o desenho de um grafo tiver cruzamentos, o grafo pode ainda ser planar se puder ser desenhado sem cruzamentos. Exemplos:



Formalização Matemática

Teorema: O número cromático de um grafo planar é no máximo quatro.

Prova em 1977 - Appel e Haken
Todo mapa no plano pode ser colorido com no máximo 4 cores. A prova dependeu do uso de computadores para avaliar muitas configurações!!! Foram necessárias mais de 1200 horas de computação

Aplicações Reais

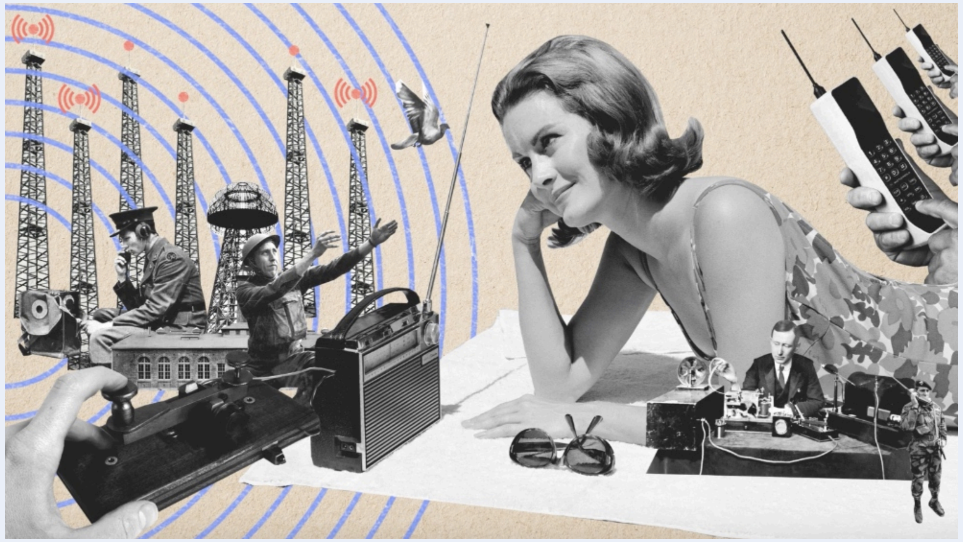
Transporte/armazenamento de produtos químicos

Vértices = Produtos químicos
Se dois produtos são reagentes existirá uma aresta entre eles

Embarcar os produtos químicos que reagem entre si. Qual é o menor número de containers necessários para embarcar os produtos com segurança? As cores representam os contêineres

Aplicações Reais

Frequências de rádio:



Vértices = transmissores da estação de rádio
Se a área de transmissão de duas estações se
Sobrepõem existirá uma aresta entre elas

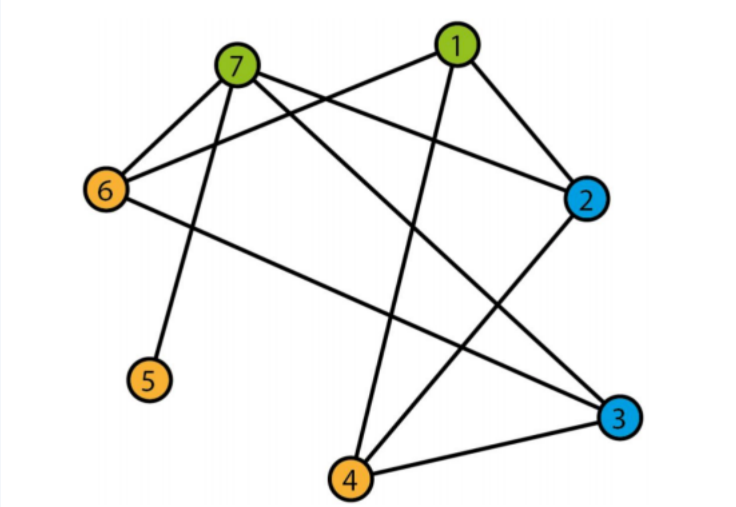
Estações que podem receber a mesma frequência terão a mesma cor

Aplicações Reais

Agendamento de provas

	1	2	3	4	5	6	7
1	-	x		x		x	
2	x	-		x			x
3			-	x		x	x
4	x	x	x	-			
5					-		x
6	x		x			-	x
7		x	x		x	x	-

Vértices = disciplinas
Se duas disciplinas tem estudantes em comum existe uma aresta entre elas

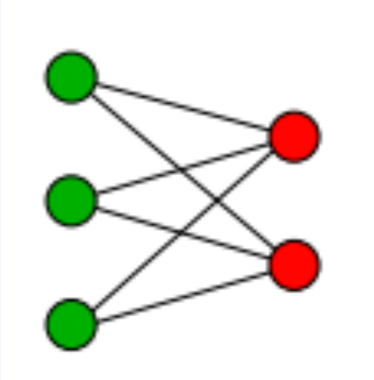


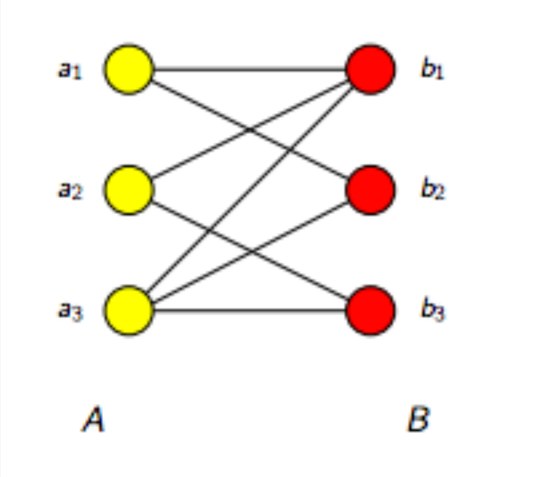
Agendar exames tal que duas disciplinas que tenham estudantes em comum tenham provas agendadas em dias distintos. Qual é o menor número de dias necessários para agendar as provas? As cores representam os dias!!

Grafos Bipartidos

<u>Grafo bipartido</u> – seus vértices podem ser particionados em dois conjuntos independentes

<u>Conjunto independente</u>: subconjunto de vértices de que não possuem arestas em comum.





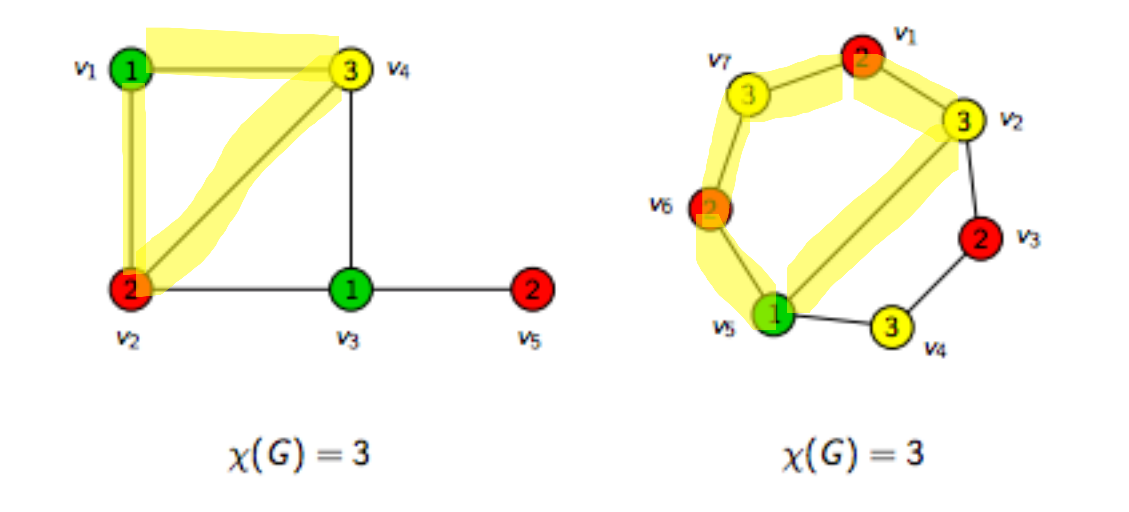
Conj. Independente
Ex: {a1,a2,a3}
{b1,b2,b3}
{a1,a3}
{b3}

O número cromático de um grafo bipartido é 2!!

Grafos Bipartidos

<u>Circuitos ímpares</u> – um circuito em um grafo não dirigido é impar se e somente se o número de arestas no circuito é ímpar.

<u>Teorema:</u> Um grafo é bipartido se e somente se ele não contém ciclo ímpar



Não são grafos bipartidos. Ambos contém Circuitos (ciclos) ímpares

Nesta aula:

1. Estudamos problemas de coloração em grafos
2. Definimos mais termos usados na teoria dos grafos: Grafo planar, número cromático, grafos bipartidos
3. Revisamos algumas aplicações reais em que problemas podem ser formulados como problema de coloração em grafos

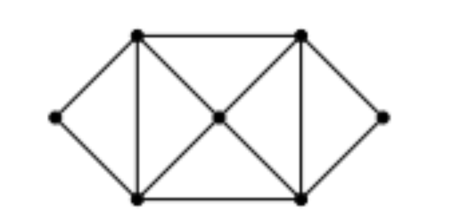
Exercícios

1. Em um canil de reabilitação de cães abandonados, a equipe acabou de receber 6 novos cachorros encontrados, e precisa colocá-los em diferentes casinhas para passar a primeira noite. Constatou-se que alguns desses cães ficam extremamente agressivos na presença de alguns do mesmo grupo, logo, terão que alocá-los em casinhas diferentes. O cachorro A não pode ficar com os cachorros C, D ou E. Os cachorros B e F não podem ficar juntos. O cachorro E não pode ficar com os cachorros D nem F. Quantas casinhas serão necessárias para acomodar os 6 cachorros?
(dica: formule o problema como um grafo e determine o número cromático)

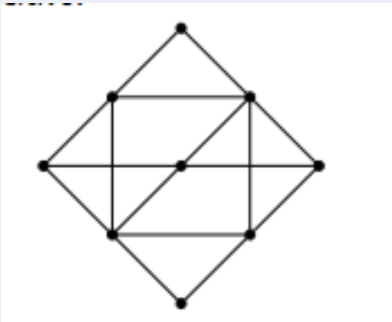
Exercícios

2. Determine o número cromático dos grafos dados a seguir

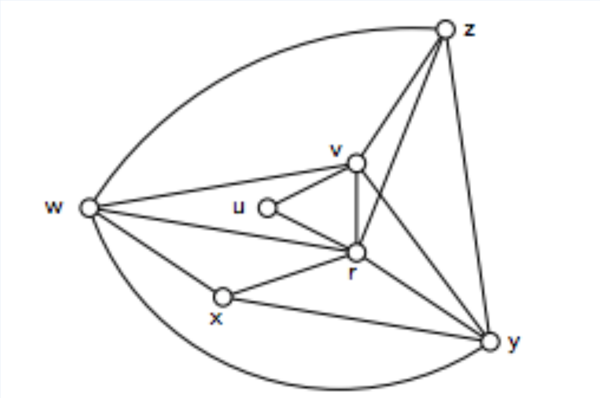
G_1



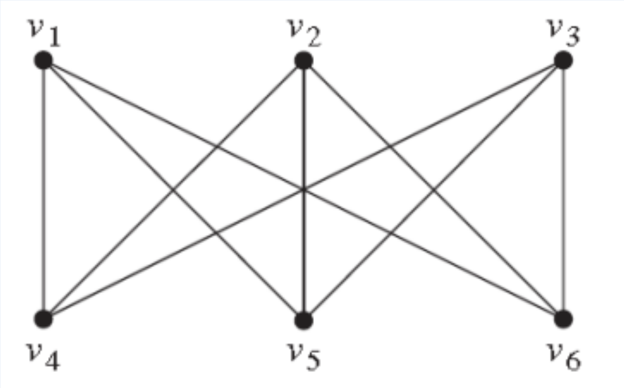
G_2



G_3



G_4



3. Determine quais dos grafos de exercício 2 são planares.

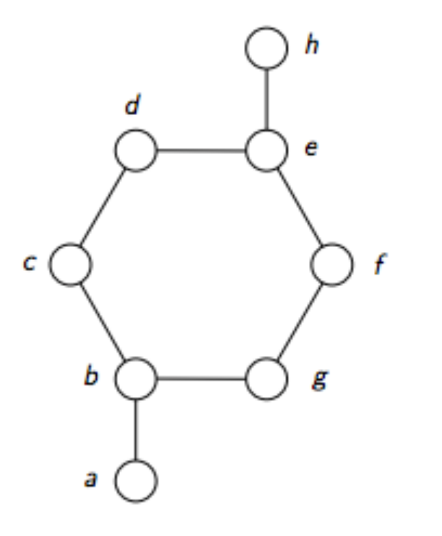
Exercícios

3. Emissoras de televisão vão ser instaladas em estações em oito cidades de nosso estado. Segundo regulamento, a mesma emissora não pode ser instalada em duas cidades com distância inferior a 150Km. As distâncias entre as cidades estão descritas na tabela abaixo. Indique o menor número de emissoras que devem ser instaladas para contemplar as nove cidades?

	A	B	C	D	E	F	G	H
A	-	85	127	130	160	90	182	115
B		-	165	40	130	60	200	80
C			-	200	120	340	210	120
D				-	170	80	220	100
E					-	210	300	50
F						-	140	230
G							-	230
H								-

Exercícios

4. Verifique se o grafo a seguir é bipartido.



Esse grafo contém ciclo (circuito) ímpar?
Os vértices desse grafo podem ser particionados em dois subconjuntos de vértices independentes?

Próxima Aula

1. Formas de representar grafos
2. Noções sobre algoritmos para resolver alguns problemas em grafos