

Exemplo 1.2: Leis de Morgan

Um conjunto de relações entre união e intersecção de conjuntos, conhecidos como Leis de Morgan, auxilia na demonstração de vários resultados.

Elas são dadas por:

$$(i) \left(\bigcup_{i=1}^n A_i \right)^c = \bigcap_{i=1}^n A_i^c \quad e \quad (ii) \left(\bigcap_{i=1}^n A_i \right)^c = \bigcup_{i=1}^n A_i^c$$

Vamos verificar a relação (i) e deixamos ao leitor a demonstração da outra parte, que é análoga. O caminho usual, para demonstrar igualdades entre conjuntos, é provar que cada um deles está contido no outro. Dessa forma, temos duas partes a serem verificadas:

$$\left(\bigcup_{i=1}^n A_i \right)^c \subset \bigcap_{i=1}^n A_i^c \quad (parte1) \quad e \quad \left(\bigcap_{i=1}^n A_i \right)^c \supset \bigcup_{i=1}^n A_i^c \quad (parte2).$$

Prova da Parte 1:

Suponha que $w \in \left(\bigcup_{i=1}^n A_i \right)^c$. Então $w \notin \bigcup_{i=1}^n A_i$ e, ainda, $w \notin A_i$ para todo

i. Dessa forma $w \in A_i^c$ para todo i e, consequentemente, $w \in \bigcap_{i=1}^n A_i^c$