

Университет ИТМО

Лабораторная работа №2 «Обработка результатов измерений: статистический анализ числовой последовательности»

по дисциплине: Моделирование

вариант: 29/5

Выполнили: Соболев Иван, Верещагин Егор, Р34312

Преподаватель: Тропченко Андрей Александрович

Санкт-Петербург
2024

Содержание

Цель работы	3
Задание	3
Исходные данные	3
Система 1	3
1.1. Описание	3
1.2. Перечень состояний	4
1.3. Граф переходов системы	5
1.4. Матрица интенсивностей переходов	5
1.5. Вычисление значений стационарных вероятностей	6
1.6. Характеристики системы	6
Система 2	8
2.1. Описание	8
2.2. Перечень состояний	9
2.3. Граф переходов системы	10
2.4. Матрица интенсивностей переходов	10
2.5. Вычисление значений стационарных вероятностей	11
2.6. Характеристики системы	11
3. Сравнение	13
4. Выводы	14

Цель работы

Изучение метода марковских случайных процессов и его применение для исследования простейших моделей - систем массового обслуживания (СМО) с однородным потоком заявок.

Задание

Разработка и расчет марковских моделей одно- и многоканальных СМО с однородным потоком заявок и выбор наилучшего варианта построения СМО в соответствии с заданным критерием эффективности. В процессе исследований для расчета характеристик функционирования СМО используется программа MARK.

Исходные данные

Таблица 1. Параметры структурной и функциональной организации исследуемых систем

Вариант	СИСТЕМА_1		СИСТЕМА_2		Критерий эффект.
	П	ЕН	П	ЕН	
29/5	3	0/1/1	3 (H2,5)	1/0/0	(д)

- СИСТЕМА_1 имеет три обслуживающих прибора. Емкость накопителя перед первым прибором - 0, перед вторым – 1, перед третьим – 1.
- СИСТЕМА_2 имеет три обслуживающих прибора и в одном из них длительность обслуживания распределена по гиперэкспоненциальному закону с коэффициентом вариации 2.5. Емкость накопителя перед первым прибором - 1, перед вторым – 0, перед третьим – 0.
- Критерий эффективности является минимальная суммарная длина очередей заявок.

Таблица 2. Параметры нагрузки

Номер варианта	Интенс. потока	Ср. длит. обслуж.	Вероятности занятия прибора		
	λ , 1/с	b, с	П1	П2	П3
312	0,4	10	0.6	0.25	0.15

Интенсивность входного потока $\lambda = 0,4^{-с}$

Средняя длительность обслуживания $b = 10 с$

Система 1

1.1. Описание

Интенсивность обслуживания прибора: $\mu = 1/10 = 0,1 с^{-1}$

Интенсивность входного потока $\lambda = 0,4^{-с}$

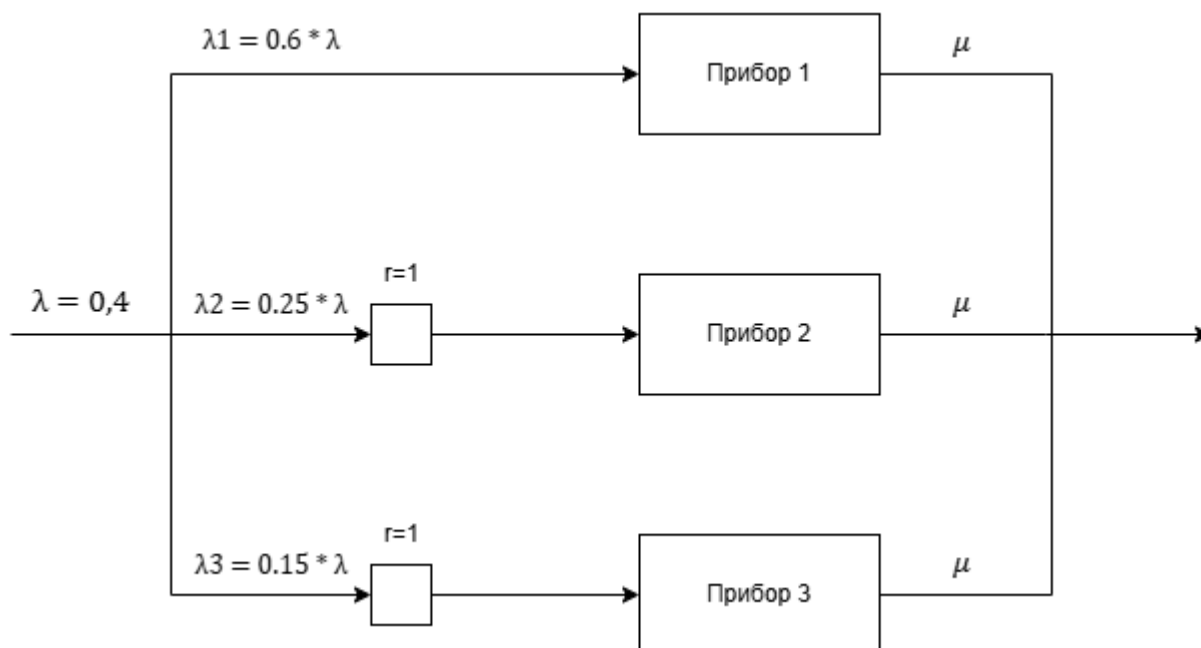


Рисунок 1. Схематичное представление Системы 1

Классификация каждого из приборов по Кендаллу:

- 1) M/M/1/0 – одноканальная без накопителя
- 2) M/M/1/1 – одноканальная с накопителем
- 3) M/M/1/1 - одноканальная с накопителем

1.2. Перечень состояний

Обозначим состояние системы как $n1/n2/q2/n3/q3$, где $n1$ – число заявок на первом приборе, $n2$ – число заявок на втором приборе, $q2$ – число заявок в очереди на второй прибор, $n3$ – число заявок на третьем приборе, $q3$ – число заявок в очереди на третий прибор.

Таблица 7. Перечень возможных состояний Системы 1

№ состояния	Обозначение	Описание
S0	0/0/0/0/0	В системе нет заявок
S1	1/0/0/0/0	В системе 1 заявка, обрабатываемая на приборе 1
S2	0/1/0/0/0	В системе 1 заявка, обрабатываемая на приборе 2
S3	0/0/0/1/0	В системе 1 заявка, обрабатываемая на приборе 3
S4	1/1/0/0/0	В системе 2 заявки, обрабатываемые на приборе 1 и 2
S5	1/0/0/1/0	В системе 2 заявки, обрабатываемые на приборе 1 и 3
S6	0/1/0/1/0	В системе 2 заявки, обрабатываемые на приборе 2 и 3
S7	0/1/1/0/0	В системе 2 заявки, обрабатываемая на приборе 2 и в очереди на прибор 2
S8	0/0/0/1/1	В системе 2 заявки, обрабатываемая на приборе 3 и в очереди на прибор 3
S9	1/1/0/1/0	В системе 3 заявки: на приборах 1, 2 и 3
S10	1/1/1/0/0	В системе 3 заявки: на приборах 1 и 2 и в очереди на прибор 2

S11	1/0/0/1/1	В системе 3 заявки: на приборах 1 и 3 и в очереди на прибор 3
S12	0/1/1/1/0	В системе 3 заявки: на приборах 2 и 3 и в очереди на прибор 2
S13	0/1/0/1/1	В системе 3 заявки: на приборах 2 и 3 и в очереди на прибор 3
S14	1/1/1/1/0	В системе 4 заявки: на приборах 1, 2 и 3 и в очереди на прибор 2
S15	1/1/0/1/1	В системе 4 заявки: на приборах 1, 2 и 3 и в очереди на прибор 3
S16	0/1/1/1/1	В системе 4 заявки: на приборах 2 и 3 и в очередях на приборы 2 и 3
S17	1/1/1/1/1	В системе 5 заявок: на приборах 1,2 и 3 и в очередях на приборы 2 и 3

1.3. Граф переходов системы

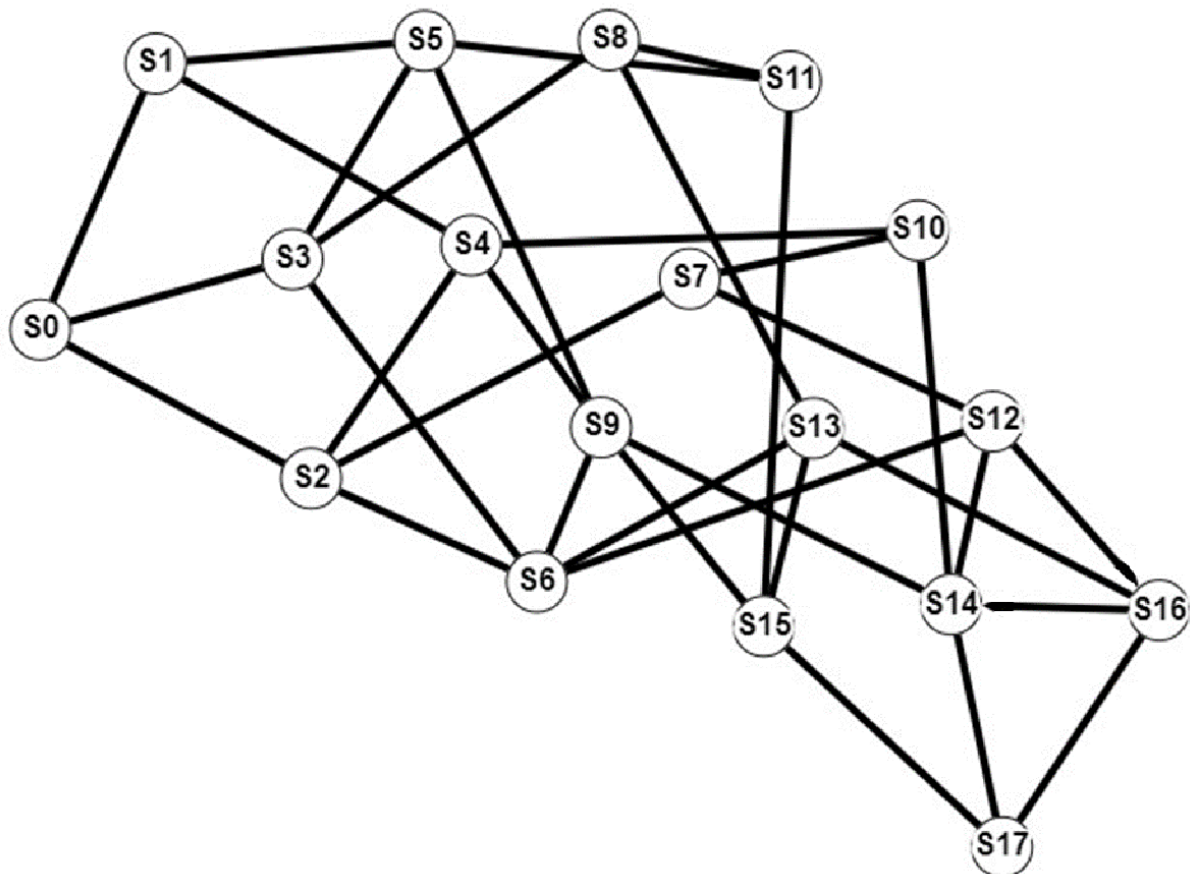


Рисунок 4. Граф переходов Системы 1

1.4. Матрица интенсивностей переходов

Таблица 8. Матрица интенсивностей переходов Системы 1

C1	S0	S1	S2	S3	S4	S5	S6	S7	S8	S9	S10	S11	S12	S13	S14	S15	S16	S17
S0	0	0.24	0.10	0.06														

S1	0.10	1			0.10	0.06												
S2	0.10		2		0.24		0.06	0.10										
S3	0.10			3		0.24	0.10		0.06									
S4		0.10	0.10		4					0.06	0.10							
S5		0.10		0.10		5				0.10		0.06						
S6			0.10	0.10			6			0.24			0.10	0.06				
S7			0.10					7			0.24		0.06					
S8				0.10					8			0.24		0.10				
S9					0.10	0.10	0.10			9					0.10	0.06		
S10					0.10			0.10			10				0.06			
S11						0.10			0.10			11				0.10		
S12							0.10	0.10					12		0.24		0.06	
S13							0.10		0.10					13		0.24	0.10	
S14										0.10	0.10		0.10		14			0.06
S15										0.10		0.10		0.10		15		0.10
S16														0.10	0.10		16	0.24
S17															0.10	0.10	0.10	17

1.5. Вычисление значений стационарных вероятностей

Таблица 9. Значения стационарных вероятностей Системы 1

Обозначение	Вероятность
S0	0.031621
S1	0.103867
S2	0.044711
S3	0.044351
S4	0.112233
S5	0.081931
S6	0.032533
S7	0.047167
S8	0.021871
S9	0.076499
S10	0.116366
S11	0.049692
S12	0.02759
S13	0.019931
S14	0.077119
S15	0.047427
S16	0.018811
S17	0.046281

1.6. Характеристики системы

Таблица 10. Характеристики Системы 1

Хар-ка	Прибор	Расчетная формула	СИСТ.1
--------	--------	-------------------	--------

Нагрузка	П1	$y_1 = \lambda_1 * b$	2.4
	П2	$y_2 = \lambda_2 * b$	1
	П3	$y_3 = \lambda_3 * b$	0.6
	Сумм.	$Y = y_1 + y_2 + y_3$	4
Загрузка	П1	$\rho_1 = 1 - (p_0 + p_2 + p_3 + p_6 + p_7 + p_8 + p_{12} + p_{13} + p_{16})$	0.711
	П2	$\rho_2 = 1 - (p_0 + p_1 + p_3 + p_5 + p_8 + p_{11})$	0.667
	П3	$\rho_3 = 1 - (p_0 + p_1 + p_2 + p_4 + p_7 + p_{10})$	0.544
	Сумм.	$\rho = (\rho_1 + \rho_2 + \rho_3)/3$	0.641
Вероятность потери	П1	$\pi_1 = p_1 + p_4 + p_5 + p_9 + p_{10} + p_{11} + p_{14} + p_{15} + p_{17}$	0.711
	П2	$\pi_2 = p_7 + p_{10} + p_{12} + p_{14} + p_{16} + p_{17}$	0.333
	П3	$\pi_3 = p_8 + p_{11} + p_{13} + p_{15} + p_{16} + p_{17}$	0.204
	Сумм.	$\pi = \pi_1 * 0,6 + \pi_2 * 0,25 + \pi_3 * 0,15$	0.541
Длина очереди	П1	$l_1 = 0$	0
	П2	$l_2 = p_7 + p_{10} + p_{12} + p_{14} + p_{16} + p_{17}$	0.333
	П3	$l_3 = p_8 + p_{11} + p_{13} + p_{15} + p_{16} + p_{17}$	0.204
	Сумм.	$l = l_1 + l_2 + l_3$	0.537
Число заявок, находящихся в системе	П1	$m_1 = p_1 + p_4 + p_5 + p_9 + p_{10} + p_{11} + p_{14} + p_{15} + p_{17}$	0.711
	П2	$m_2 = p_2 + p_4 + p_6 + p_9 + p_{13} + p_{15} + (p_7 + p_{10} + p_{12} + p_{14} + p_{16} + p_{17}) * 2$	1.000
	П3	$m_3 = p_3 + p_5 + p_6 + p_9 + p_{12} + p_{14} + (p_8 + p_{11} + p_{13} + p_{15} + p_{16} + p_{17}) * 2$	0.748
	Сумм.	$m = m_1 + m_2 + m_3$	2.459
Производит.	П1	$\lambda_1' = (1 - \pi_1) * \lambda_1$	0.069
	П2	$\lambda_2' = (1 - \pi_2) * \lambda_2$	0.067
	П3	$\lambda_3' = (1 - \pi_3) * \lambda_3$	0.048
	Сумм.	$\lambda' = \lambda_1' + \lambda_2' + \lambda_3'$	0.184
Коэффициент простоя системы	П1	$\eta_1 = 1 - \rho_1$	0.289
	П2	$\eta_2 = 1 - \rho_2$	0.333
	П3	$\eta_3 = 1 - \rho_3$	0.456
	Сумм.	$\eta = 1 - \rho$	0.359
Время ожидания	П1	$w_1 = l_1/\lambda_1$	0.000
	П2	$w_2 = l_2/\lambda_2$	5.000
	П3	$w_3 = l_3/\lambda_3$	4.272
	Сумм.	$w = 1/\lambda'$	2.925
Время пребывания	П1	$u_1 = w_1 + b$	10.000
	П2	$u_2 = w_2 + b$	15.000
	П3	$u_3 = w_3 + b$	14.272

	Сумм.	$u = w + b$	12.925
--	-------	-------------	--------

Система 2

2.1. Описание

Интенсивность обслуживания прибора: $\mu = 1/10 = 0,1 \text{ с}^{-1}$

Интенсивность входного потока $\lambda = 0,4 \text{ с}^{-1}$

Параметр $q \leq \frac{2}{1+v^2} = \frac{2}{1+2,5^2} = \frac{8}{29}$ Выбираем $q = 0.2$

$$b_1' = \left[1 + \sqrt{\frac{1-q}{2q}} (v^2 - 1) \right] b = 42.4037 \rightarrow \mu_1' = 0.02358$$

$$b_2' = \left[1 - \sqrt{\frac{q}{2(1-q)}} (v^2 - 1) \right] b = 1.89907 \rightarrow \mu_2' = 0.5265$$

Проверка условия $qb_1' + (1-q)b_2' = b \rightarrow 0.2 \cdot 42.4 + (1-0.2) \cdot 1.89 = 9.992 \approx 10$

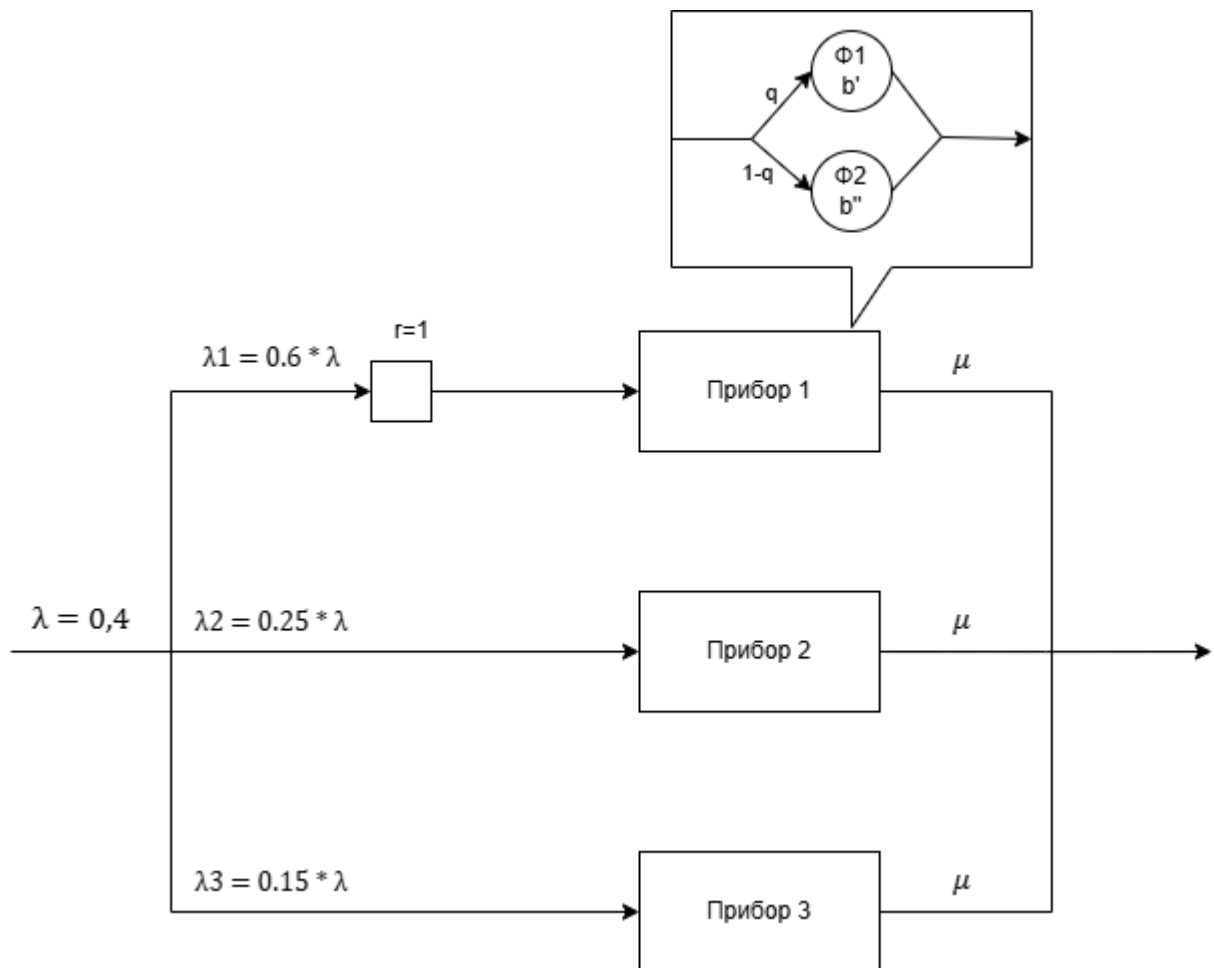


Рисунок 5. Схематичное представление Системы 2

Классификация каждого из приборов по Кендаллу:

- 1) M/H2.5/1/1

2) М/М/1/0 – одноканальная без накопителя

3) М/М/1/0 – одноканальная без накопителя

2.2. Перечень состояний

Обозначим состояние системы как $n_1/n_2/n_3/q_1$, где n_1 – число заявок на первом приборе, n_2 – число заявок на втором приборе, n_3 – число заявок на третьем приборе, q_1 – число заявок в очереди на первый прибор.

Таблица 11. Перечень возможных состояний Системы 1

№ состояния	Обозначение	Описание
S0	0/0/0/0	В системе нет заявок
S1	1 ₁ /0/0/0	В системе 1 заявка, обрабатываемая на приборе 1 на первой фазе
S2	1 ₂ /0/0/0	В системе 1 заявка, обрабатываемая на приборе 1 на второй фазе
S3	0/1/0/0	В системе 1 заявка, обрабатываемая на приборе 2
S4	0/0/1/0	В системе 1 заявка, обрабатываемая на приборе 3
S5	1 ₁ /0/0/1	В системе 2 заявки, обрабатываемая на приборе 1 на первой фазе и в очереди на прибор 1
S6	1 ₂ /0/0/1	В системе 2 заявки, обрабатываемая на приборе 1 на первой фазе и в очереди на прибор 1
S7	0/1/1/0	В системе 2 заявки, обрабатываемая на приборе 2 и на приборе 3
S8	1 ₁ /1/0/0	В системе 2 заявки, обрабатываемая на приборе 1 на первой фазе и на приборе 2
S9	1 ₂ /1/0/0	В системе 2 заявки, обрабатываемая на приборе 1 на второй фазе и на приборе 2
S10	1 ₁ /0/1/0	В системе 2 заявки, обрабатываемая на приборе 1 на первой фазе и на приборе 3
S11	1 ₂ /0/1/0	В системе 2 заявки, обрабатываемая на приборе 1 на второй фазе и на приборе 3
S12	1 ₁ /0/1/1	В системе 3 заявки, обрабатываемая на приборе 1 на первой фазе, обрабатываемая на приборе 3 и в очереди на прибор 1
S13	1 ₂ /0/1/1	В системе 3 заявки, обрабатываемая на приборе 1 на второй фазе, обрабатываемая на приборе 3 и в очереди на прибор 1
S14	1 ₁ /1/0/1	В системе 3 заявки, обрабатываемая на приборе 1 на первой фазе, обрабатываемая на приборе 2 и в очереди на прибор 1
S15	1 ₂ /1/0/1	В системе 3 заявки, обрабатываемая на приборе 1 на второй фазе, обрабатываемая на приборе 2 и в очереди на прибор 1
S16	1 ₁ /1/1/0	В системе 3 заявки, обрабатываемая на приборе 1 на первой фазе, обрабатываемая на приборе 2 и на прибор 3
S17	1 ₂ /1/1/0	В системе 3 заявки, обрабатываемая на приборе 1 на второй фазе, обрабатываемая на приборе 2 и на прибор 3

S18	$1_1/1/1/1$	В системе 4 заявки, обрабатываемая на приборе 1 на первой фазе, обрабатываемая на приборе 2, обрабатываемая на приборе 3 и в очереди на прибор 1
S19	$1_2/1/1/1$	В системе 4 заявки, обрабатываемая на приборе 1 на второй фазе, обрабатываемая на приборе 2, обрабатываемая на приборе 3 и в очереди на прибор 1

2.3. Граф переходов системы

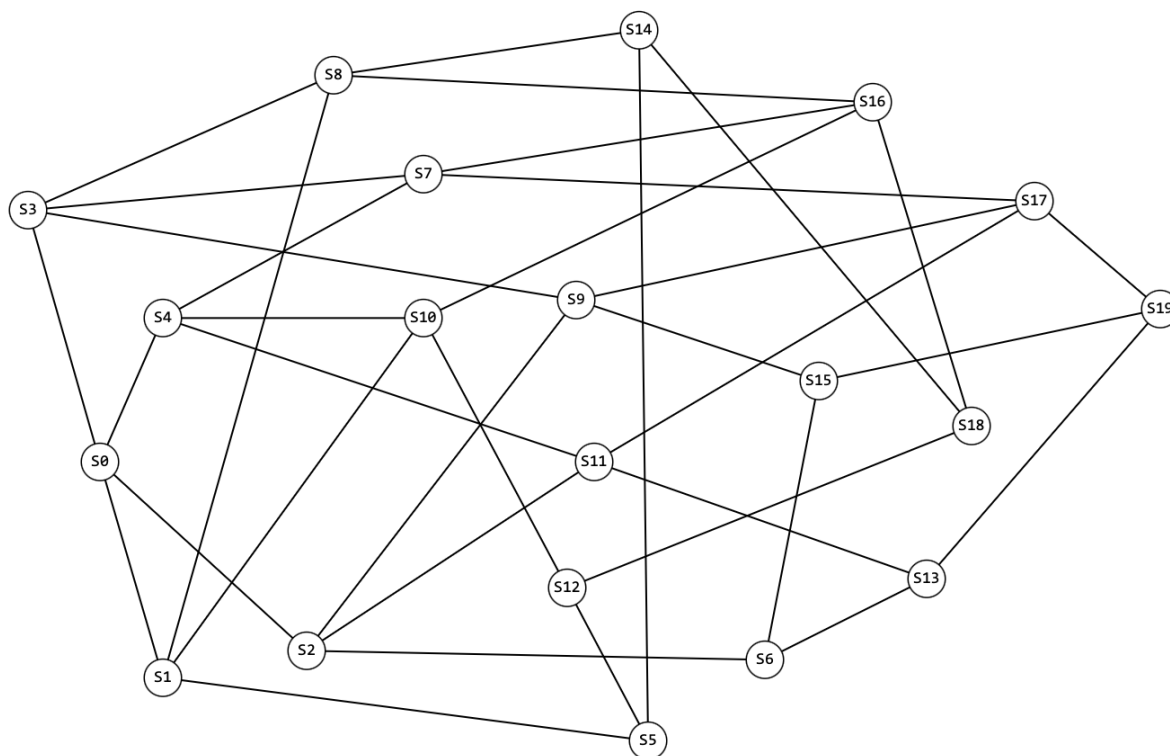


Рисунок 6. Граф переходов Системы 2

2.4. Матрица интенсивностей переходов

Таблица 12. Матрица интенсивностей переходов Системы 2

C 1	S0	S1	S2	S3	S4	S5	S6	S7	S8	S9	S10	S11	S12	S13	S14	S15	S16	S17	S18	S19
S0	0	0.0 48	0.1 92	0.1	0.0 6															
S1	0.0 24	1				0. 24			0.1		0.0 6									
S2	0.5 3		2				0. 24			0.1		0.0 6								
S3	0.1			3				0.1	0.0 48	0.1 92										
S4	0.1				4			0.1			0.0 48	0.1 92								
S5		0.0 24				5							0. 06		0. 1					
S6			0.5 3				6							0. 06		0. 1				
S7				0.1	0.1			7									0.0 48	0.1 92		
S8		0.1		0.0 24					8							0. 24	0.0 6			
S9			0.1	0.5 3						9						0. 24		0.0 6		

S1 0		0.1			0.0 24					10						0.1			
S1 1			0.1		0.5 3						11		0. 24				0.1		
S1 2						0. 1						12						0. 1	
S1 3							0. 1				0.5 3		13						0. 1
S1 4						0. 1			0.0 24					14				0. 06	
S1 5							0. 1			0.5 3					15				0. 06
S1 6								0.0 24	0.1		0.1					16		0. 24	
S1 7								0.5 3		0.1		0.1					17		0. 24
S1 8												0. 1		0. 1		0.0 24		18	
S1 9													0. 1		0. 1		0.5 3		19

2.5. Вычисление значений стационарных вероятностей

Таблица 13. Значения стационарных вероятностей Системы 2

Обозначение	Вероятность
S0	0.012767
S1	0.026496
S2	0.004616
S3	0.011987
S4	0.008254
S5	0.265482
S6	0.002075
S7	0.009549
S8	0.026435
S9	0.004544
S10	0.016062
S11	0.002878
S12	0.159421
S13	0.001117
S14	0.265477
S15	0.002123
S16	0.016121
S17	0.003378
S18	0.159552
S19	0.001666

2.6. Характеристики системы

Таблица 10. Характеристики Системы 2

Хар-ка	Прибор	Расчетная формула	СИСТ.1
Нагрузка	П1	$y_1 = \lambda_1 * b$	2,4

	П2	$y_2 = \lambda_2 * b$	1
	П3	$y_3 = \lambda_3 * b$	0,6
	Сумм.	$Y = y_1 + y_2 + y_3$	4
Загрузка	П1	$\rho_1 = 1 - (p_0 + p_3 + p_4 + p_7)$	0,957
	П2	$\rho_2 = 1 - (p_0 + p_1 + p_2 + p_4 + p_5 + p_6 + p_{10} + p_{11} + p_{12} + p_{13})$	0,501
	П3	$\rho_3 = 1 - (p_0 + p_1 + p_2 + p_3 + p_5 + p_6 + p_8 + p_9 + p_{14} + p_{15})$	0,378
	Сумм.	$\rho = (\rho_1 + \rho_2 + \rho_3)/3$	0,612
Вероятность потери	П1	$\pi_1 = p_5 + p_6 + p_{12} + p_{13} + p_{14} + p_{15} + p_{18} + p_{19}$	0,857
	П2	$\pi_2 = p_3 + p_7 + p_8 + p_9 + p_{14} + p_{15} + p_{16} + p_{17} + p_{18} + p_{19}$	0,501
	П3	$\pi_3 = p_4 + p_7 + p_{10} + p_{11} + p_{12} + p_{13} + p_{16} + p_{17} + p_{18} + p_{19}$	0,378
	Сумм.	$\pi = \pi_1 * 0,6 + \pi_2 * 0,25 + \pi_3 * 0,15$	0,696
Длина очереди	П1	$l_1 = p_5 + p_6 + p_{12} + p_{13} + p_{14} + p_{15} + p_{18} + p_{19}$	0,857
	П2	$l_2 = 0$	0
	П3	$l_3 = 0$	0
	Сумм.	$l = l_1 + l_2 + l_3$	0,857
Число заявок, находящихся в системе	П1	$m_1 = p_1 + p_4 + p_5 + p_9 + p_{10} + p_{11} + p_{14} + p_{15} + p_{17}$	1,814
	П2	$m_2 = p_2 + p_4 + p_6 + p_9 + p_{13} + p_{15} + (p_7 + p_{10} + p_{12} + p_{14} + p_{16} + p_{17}) * 2$	0,501
	П3	$m_3 = p_3 + p_5 + p_6 + p_9 + p_{12} + p_{14} + (p_8 + p_{11} + p_{13} + p_{15} + p_{16} + p_{17}) * 2$	0,378
	Сумм.	$m = m_1 + m_2 + m_3$	2,693
Производит.	П1	$\lambda_1' = (1 - \pi_1) * \lambda_1$	0,034
	П2	$\lambda_2' = (1 - \pi_2) * \lambda_2$	0,050
	П3	$\lambda_3' = (1 - \pi_3) * \lambda_3$	0,037
	Сумм.	$\lambda' = \lambda_1' + \lambda_2' + \lambda_3'$	0,122
Коэффициент простоя системы	П1	$\eta_1 = 1 - \rho_1$	0,043
	П2	$\eta_2 = 1 - \rho_2$	0,499
	П3	$\eta_3 = 1 - \rho_3$	0,622
	Сумм.	$\eta = 1 - \rho$	0,388
Время ожидания	П1	$w_1 = l_1/\lambda_1'$	24,953
	П2	$w_2 = l_2/\lambda_2'$	0,000
	П3	$w_3 = l_3/\lambda_3'$	0,000
	Сумм.	$w = 1/\lambda'$	7,048
	П1	$u_1 = w_1 + b$	34,953

Время пребывания	П2	$u_2 = w_2 + b$	10,000
	П3	$u_3 = w_3 + b$	10,000
	Сумм.	$u = w + b$	17,048

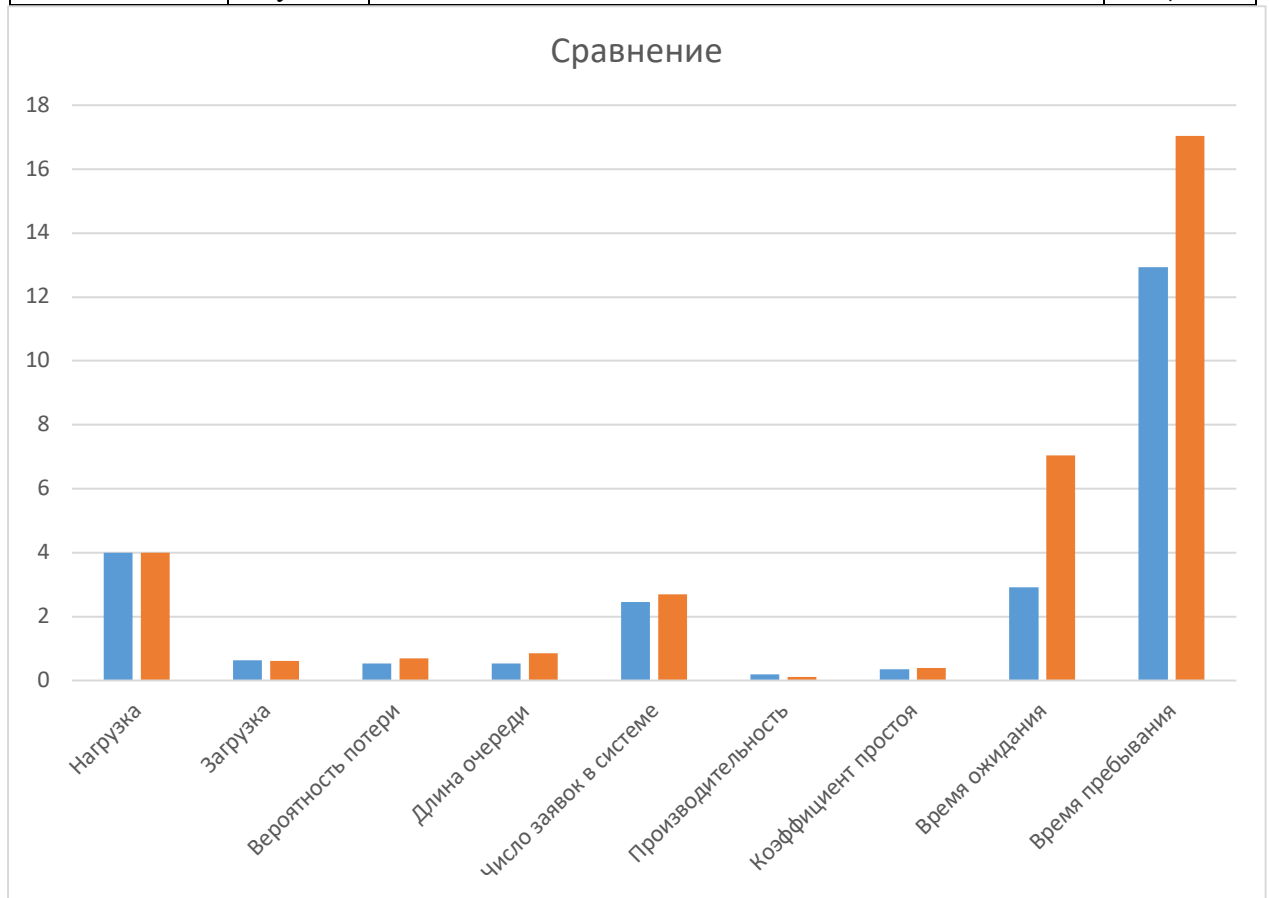


Рисунок 5. Сравнение рассчитанных характеристик систем

3. Сравнение

Сравним полученные характеристики обеих систем:

- Системы имеют одинаковую нагрузку, что ожидаемо при одинаковых параметрах нагрузки, заданных по варианту.
- Система 1 имеет большее значение загрузки, чем система 2. (4.7% разница)
- Система 1 имеет меньше значение длины очереди, чем система 2. (37% разница). Так как данный параметр является критерием эффективности, стоит выбрать первую систему.
- Система 1 имеет меньше число заявок в системе, чем система 2. (8.7% разница)
- Система 1 имеет меньше время ожидания, чем система 2. Это говорит о том, что система 1 значительно быстрее обрабатывает заявки. (58% разница)
- Система 1 имеет меньшее время пребывания заявки в системе, чем система 2. (24% разница)
- Система 2 имеет больше вероятность потери заявки, чем система 1. (22% разница)
- Система 1 имеет больше производительность, чем система 2. (50% разница)

4. Выводы

В начале выполнения УИР были проанализированы состояния марковских процессов для систем 1 и 2. На их основе были построены графы переходов марковских процессов, а впоследствии и матрицы интенсивностей переходов. С помощью программы MARK были получены значения стационарных вероятностей, используя полученные матрицы интенсивностей переходов. Получив значения стационарных вероятностей, можно было приступить к этапу расчета характеристик для систем 1 и 2. Полученные характеристики для систем 1 и 2 были сопоставлены. В результате выяснилось, что система 1 имеет наименьшую суммарную длину очереди заявок. Именно поэтому ей было отдано предпочтение при выборе наилучшей реализации из данных двух.