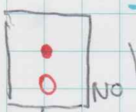
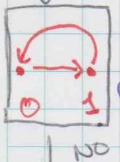
1. Inducción y Recurrencia

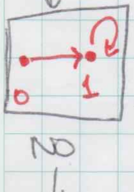
Axiomas de Peano sobre los números naturales ($\mathbb{N}$)



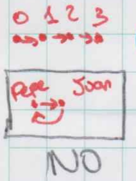
1. 0 pertenece a $\mathbb{N}$. Significa que en los números naturales hay, al menos, un elemento. $\mathbb{N}$ no está vacío.



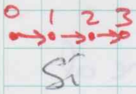
2. Para todo $n \in \mathbb{N}$, existe $\sigma(n)$, que es el siguiente. $\sigma(n) = n^+$. Sin embargo, el siguiente de 0 podría ser el mismo, o 1.



3. 0 no puede ser el siguiente de ningún natural. Sin embargo, podría darse que $\mathbb{N}$ fuera solo dos números, y no es lo que buscamos.



4. Dos números distintos deben tener sucesores distintos. Es decir, que la aplicación $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ es inyectiva. Un número no puede tener dos sucesores. Por ello, el sucesor de 1 no puede ser 1. Sin embargo, dentro de ese conjunto podría haber un subconjunto que rompa los ~~4~~ 3 axiomas anteriores.



5. Si cojo un subconjunto de $\mathbb{N}$ y se cumpliera que los primeros axiomas están, ese subconjunto pertenece a $\mathbb{N}$. (Principio de inducción)

Sin embargo, la suma se define como $\begin{cases} m+0 = m \\ m+\sigma(n) = \sigma(m+n) \end{cases}$

Esta definición se considera recursiva.

El producto se define como $\begin{cases} m0 = 0 \\ m\sigma(n) = mn + m \end{cases}$, el cual puede demostrarse a partir de lo anterior.

Para todo $n \in \mathbb{N}$, n es distinto de su sucesor.

Para todo $n \in \mathbb{N}$, ~~y~~ siendo $n \neq 0$, n es siguiente de un solo natural.

La potencia se define como $\begin{cases} m^0 = 1 \\ m^{\sigma(n)} = m^n \cdot m \end{cases}$

La relación de orden $\leq$ se define como

$$m \leq n \overset{def.}{\Longleftrightarrow} \exists x \in \mathbb{N},\ m + x = n$$

La relación de divisibilidad $|$ se define como

$$m | n \overset{def.}{\Longleftrightarrow} \exists x \in \mathbb{N},\ m x = n$$

Definición alternativa de método de inducción

Si todos los números hasta un natural n cumplen una condición y ésta se cumple para $n+1$, la condición se demuestra para todos los números naturales.

Definición de mínimo

Sea $A \in \mathbb{N}$ un conjunto no vacío. Este conjunto tiene al menos un elemento que es menor o igual que el resto.

Ecuaciones recurrentes.

▷ Ejemplo Supongamos una lista de 0s y 1s de tamaño n. ¿Cuántas listas podemos generar?

Con una lista de 1 elemento, hay 2 posibilidades

Con una lista de 2 elementos, hay 4 posibilidades.

Con una lista de 3 elementos, hay 8 posibilidades.

Al final, si sabemos cuántas posibilidades hubo en un nivel anterior $(n-1)$, el siguiente sería $l_n = 2\, l_{n-1}$

▷ Ejemplo ¿Cuántas listas podemos hacer con 0s y 1s sin que haya 1s consecutivos?

l_n = Nº de listas con n elementos.

$l_1 = 2$
$l_2 = 3$
$l_3 = 5$

Para saber el nº de listas para n:
Si el último elemento es 0, habrá l_{n-1} listas sin 1s consecutivos.
Si el último elemento es 1, a la fuerza, el penúltimo elemento será un 0, habiendo l_{n-2} listas sin 1s consecutivos.

$$l_n = l_{n-1} + l_{n-2}$$

▷ Ejemplo (Las torres de Hanoi) Se da una plataforma con 3 agujas y n discos ordenados de menor a mayor. Un disco no puede ponerse sobre otro más pequeño. ¿Cuál será el mínimo número de movimientos?

h_n = Nº de movimientos con n discos.

$h_1 = 1$
$h_2 = 3$
$h_3 = 7$

$$h_n = 2h_{n-1} + 1$$

▷ Ejemplo ¿Cuántas regiones se dan con n rectas secantes de forma que 2 no sean paralelas y 3 no se corten en un mismo punto?

r_n = Nº de regiones definidas por n rectas.

$r_0 = 1$ $r_2 = 4$ $r_4 = 11$
$r_1 = 2$ $r_3 = 7$

$$r_n = r_{n-1} + n$$

▷ Ejemplo ¿De cuantas formas se puede subir una escalera de n escalones pudiendo subir de 1 en 1 o de 2 en 2?

$a_n = ?$

Discernimos dos casos en los que acabe:

$a_1 = 1$

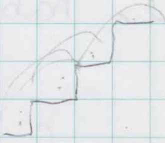
Si acaba subiendo solo un peldaño,

$a_2 = 2$

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}, \quad a_1 = 1, a_2 = 2$$

para $n \geq 3$

$a_3 = 3$



$a_4 = 5$

$a_5 =$

▷ Ejemplo (Sucesión de Fibonacci) Los conejos pueden reproducirse cada ~~2~~ meses a partir del 2º mes. Calculemos el número de parejas que se pueden ir sacando mes a mes.

$f_0 = 1$ $\quad f_2 = 2$ $\quad f_4 = 5$

$f_1 = 1$ $\quad f_3 = 3$

$$f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$$

$$f_0 = 1, \ f_1 = 2$$

Ecuación en recurrencia lineal homogénea con coeficientes constantes de orden K

Una ecuación en recurrencia lineal homogénea con coeficientes constantes de orden K es una ecuación de la forma

$$C_n a_n + C_{n-1} a_{n-1} + \dots + C_{n-k} a_{n-k} = 0$$

donde un término se calcula en función de los anteriores, y los términos aparecen con exponente 1 y no se multiplican (siendo así lineal). Además, todos los términos son de la sucesión (siendo así homogénea). Los C_x se llaman constantes, que son numéricas, distintas de 0 en el caso de C_n y C_{n-k}. K es el orden de la ecuación y era la diferencia entre el primer y último caso.

▷ En los ejemplos,

La lista de 0s y 1s es una ecuación recurrente homogénea de orden 1; $a_n - a_{n-1} = 0$.

La lista sin 1s consecutivos, también; $a_n - a_{n-1} - a_{n-2} = 0$, de orden 2. También se aplica al problema de las escaleras y la cría de conejos.

Las torres de Hanoi no ~~son~~ es un problema que se resuelva con una ecuación recurrente homogénea, ya que no es homogénea; $a_n - 2a_{n-1} = 1$, de orden 1.

Los cortes de plano no es un problema homogéneo.

$$a_n - a_{n-1} = n$$

▷ Ejercicio $a_n + a_{n-1} - 6a_{n-2} = 0$, para $\boxed{n \geq 2}$ $(a_0 = 1,\ a_1 = 2)$

En otras ocasiones será orden. Si se describen otros contextos

↳ $n \geq$ Orden porque empieza en 0

~~(A no ser que empecemos en 0)~~

Primero nos fijamos en la ecuación recurrente y le asignamos un polinomio característico, cada cual con su coeficiente. Al igualarlo a 0, se denominará "ecuación característica".

$$a_n + a_{n-1} - 6a_{n-2} = 0 \rightarrow x^2 + x - 6 = 0$$

Y se resuelve como una ecuación cualquiera.

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+24}}{2} = x = \frac{-1 \pm 5}{2} \begin{array}{l} \rightarrow x = 2 \\ \rightarrow x = -3 \end{array}$$

Con las raíces obtenidas, haremos ~~pondremos~~ una progresión geométrica.

$$g_n = a\,2^n + b(-3)^n$$

Gn genera infinitas soluciones. Al fijarlo con los casos específicos lograremos el valor de **a** y **b**.

$$\left.\begin{array}{l} g_0 = 1\ ;\ 1 = a + b \\ g_1 = 2\ ;\ 2 = 2a - 3b \end{array}\right\} \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{3} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 5 & 0 & 5 \end{array}\right)$$

$\rightarrow 5a = 5 \rightarrow a = 1.$

$\rightarrow 1 + b = 1 \rightarrow b = 0.$

La solución particular que cumpla esas condiciones sería:

$$\boxed{p_n = 2^n}$$

Si cambiamos las condiciones a $a_0 = 2$, $a_1 = -1$:

$$\left.\begin{array}{l} g_0 = 2\ ;\ 2 = a + b \\ g_1 = -1\ ;\ -1 = 2a - 3b \end{array}\right\} \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -3 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow{3} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 5 & 0 & 5 \end{array}\right)$$

$\rightarrow a = 1$

La solución particular es:

$\rightarrow 1 + b = 2 \rightarrow b = 1$

$$p_n = 2^n + (-3)^n$$

▷ Ejercicio $a_n - 6a_{n-1} + 9a_{n-2} = 0$
$(a_0 = 5, a_1 = 12)$

$$x^2 - 6x + 9 = 0 \to x = \frac{6 \pm \sqrt{36-36}}{2} =$$

$$\frac{6}{2} = 3 \text{ (raíz doble)}$$

Si las dos son iguales, ~~sale~~ se hará un polinomio en n de grado (~~raíz~~ multiplicidad -1) junto con la progresión geométrica.

$$g_n = (An + B)3^n$$

$$g_0 = 5; \boxed{B = 5}$$

$$g_1 = 12; \ 3(A+B) = 12 \to 3(A+5) = 12 \to$$

$$3A + 15 = 12 \to 3A = 12 - 15 \to 3A = -3 \to \boxed{A = -1}$$

$$p_n = -\cancel{3n}(-n+5)3^n$$

▷ Ejercicio $a_n - 2a_{n-1} + 2a_{n-2} = 0, a_0 = 0, a_1 = 1$

$$x^2 - 2x + 2 = 0; \ x = \frac{2 \pm \sqrt{4-8}}{2}; \ x = \frac{2 \pm \sqrt{-4}}{2};$$

$$x = \frac{2 \pm 2i}{2}; \ x \begin{cases} 1+i \\ 1-i \end{cases}$$

$$S_n = A(1+i)^n + B(1-i)^n$$

$$S_0 = 0; \ A + B = 0; \ A = -B$$

$$S_1 = 1; \ A(1+i) + B(1-i) = 1; \ A + Ai + B - Bi = 1;$$

$$A + B + (A-B)i \overset{1}{=} ; \ -\cancel{B+B} + (-B-B)i = 1; \ -2Bi = 1$$

$\rightarrow B = -\dfrac{1}{2i}$

$$a_n = \frac{1}{2i}\left((1+i)^n - (1-i)^n\right)$$

$A = -B = \dfrac{1}{2i}$

▷ Ejercicio $a_n - 3a_{n-1} - 4a_{n-2} = 0$, $a_0 = 0, a_1 = 1$

$x^2 - 3x - 4 = 0$; $x = \dfrac{3 \pm \sqrt{9+16}}{2}$; $x = \dfrac{3 \pm 5}{2} \begin{array}{l} \rightarrow 4 \\ \rightarrow -1 \end{array}$

$g_n = A4^n + B(-1)^n$

$a_0 = 0$; $A + B = 0 \rightarrow A = -B$

$a_1 = 1$; $4A - B = 1$; $-4B - B = 1$; $-5B = 1 \rightarrow B = \dfrac{-1}{5}$

$A = -B = 1/5$

▷ Ejercicio (Sucesión de Fibonacci) $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$, $n \geq 2$ $(F_0 = 0, F_1 = 1)$

$x^2 - x - 1 = 0$; $x = \dfrac{1 \pm \sqrt{1+4}}{2} = \dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \begin{array}{l} \rightarrow \frac{1+\sqrt{5}}{2} \\ \rightarrow \frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{array}$

$$S_n = A\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + B\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

$S_0 = 0$; $A + B = 0 \rightarrow A = -B$; $A = 1/\sqrt{5}$

$S_1 = 1$; $A\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right) + B\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right) = 1$; $\dfrac{B\,(1-\sqrt{5}) - (1+\sqrt{5})}{2} = 1$

; $\dfrac{B \cdot (\cancel{1} - \sqrt{5} - \cancel{1} - \sqrt{5})}{2} = 1$; $\dfrac{B \cdot -2\sqrt{5}}{\cancel{2}} = 1$; $-\sqrt{5}B = 1$

; $B = -1/\sqrt{5}$

▷ Ejercicio $a_n - 6a_{n-1} + 9a_{n-2} = 0$
$(a_0 = 5, a_1 = 12)$

$x^2 - 6x + 9 = 0 \rightarrow x = \frac{6 \pm \sqrt{36-36}}{2} =$

$\frac{6}{2} = 3$ (raíz doble)

Si las dos son iguales, ~~se~~ se hará un polinomio en n de grado (multiplicidad − 1) junto con la progresión geométrica.

$g_n = (An + B)3^n$

$g_0 = 5; \boxed{B = 5}$

$g_1 = 12; 3(A+B) = 12 \rightarrow 3(A+5) = 12 \rightarrow$

$3A + 15 = 12 \rightarrow 3A = 12 - 15 \rightarrow 3A = -3 \rightarrow \boxed{A = -1}$

$p_n = (-n + 5)3^n$

▷ Ejercicio $a_n - 2a_{n-1} + 2a_{n-2} = 0, a_0 = 0, a_1 = 1$

$x^2 - 2x + 2 = 0; x = \frac{2 \pm \sqrt{4-8}}{2}; x = \frac{2 \pm \sqrt{-4}}{2};$

$x = \frac{2 \pm 2i}{2}; x \begin{cases} 1+i \\ 1-i \end{cases}$

$S_n = A(1+i)^n + B(1-i)^n$

$S_0 = 0; A + B = 0; A = -B$

$S_1 = 1; A(1+i) + B(1-i) = 1; A + Ai + B - Bi = 1;$

$A + B + (A-B)i = 1; \cancel{-B+B} + (-B-B)i = 1; -2Bi = 1$

Ecuación en recurrencia lineal no homogénea con coeficientes constantes de orden K

Estudiaremos aquí aquellas de la forma:

$$C_n a_n + C_{n-1} a_{n-1} + \dots + C_{n-k} a_{n-k} = P(n) b^n$$

siendo C_n y C_{n-k} distintas de 0.

▷ Ejercicio (Torres de Hanoi) $h_n = 2h_{n-1} + 1$

$h_1 = 1$

$h_n - 2h_{n-1} = 1$

Homogénea: Primera parte de la igualdad

No homogénea: Segunda parte de la igualdad

p es el grado de $P(n)$

$(x-b)^{gr(p)+1}$

Polinomio característico: $(x-2)(x-1)$

$(x-2)(x-1) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = 1 \end{cases}$

$h_2 = 2 \cdot 1 + 1 = 2+1 = 3$

$g_n = A 2^n + B$

$h_1 = 1: \ 2A + B = 1$

$h_2 = 3: \ 4A + B = 3$

$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 3 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{array}\right)$ $\begin{array}{l} \rightarrow 2A - 1 = 1 \rightarrow 2A = 2 \rightarrow A = 1 \\ \rightarrow -B = 1 \rightarrow B = -1 \end{array}$

$P_n = \cancel{1}\, 2^n - 1$

Podría hacerse una generalización de esa fórmula

$B = \cancel{a + a + 1} = -1$ $\cancel{= 2a+2a+2}$ $2a$

Si $h_1 = a$: $a = 2A + B$ $\rightarrow B = a - 2A$

$h_2 = 2a + 1$: $2a+1 = 4A + B$ $\rightarrow 2a + 1 = 4A + a - 2A$

$\rightarrow a + 1 = 2A \rightarrow A = \frac{a+1}{2}$

▷ Ejercicio $a_n - 2a_{n-1} + 2a_{n-2} = 0$; $a_0 = 1$, $a_1 = \sqrt{2}$

$$x^2 - 2x + 2 = 0; \quad x = \frac{2 \pm \sqrt{4-8}}{2}; \quad x = \frac{2 \pm 2i}{2};$$

$$x = 1 \pm i$$

▽ En resumen, ¿qué hago si tengo que resolver una ecuación homogénea?

1 Extraer el polinomio característico.

2 Resolver el polinomio 1 para obtener la ~~ecuación~~ fórmula general

▷ Si las raíces son distintas, se pone esa raíz elevada a n. $(C_1 r_1^n + \ldots + C_m r_m^n)$

▷ Si las raíces son iguales, se eleva la raíz a n y se multiplica por un polinomio de grado n-1.

$$(C_1 n^{m-1} + \ldots + C_m) r^n$$

3 Con las limitaciones que se dan en ~~la~~ el enunciado, resolver el sistema de ecuaciones para lograr la ecuación característica.

(En el examen, las recurrencias pueden ser de a lo mucho 2 o 3 raíces, complejas o no)

La ecuación característica de la solución generalísima es:

$$\left(\left(C_n X^k + C_{n-1} X^{k-1} + \dots + C_{n-k-1} X + C_{n-k}\right)(x-b)^{gr(p)+1}\right.$$

-¿Y si hay más de un $p(n)b^n$?

▷ Ejercicio $a_n = 2a_{n-1} + n + 2^n$, $a_0 = 0$

$$a_n - 2a_n = \underset{(1)}{n} + \underset{(2)}{2^n}$$

$p(n)_1 = n$ $\quad p(n)_2 = 1$

$b_2 = 1$ $\quad b_2 = 2$

1. Ecuación característica: $(x-2)\underbrace{(x-1)^2}_{\text{Primer sumando no homogénea}}\underbrace{(x-2)^1}_{\text{segundo sumando no homogéneo}}$

$x = 2$ (doble)

$x = 1$ (doble)

2. Solución generalísima: $S_n = (An+B)2^n + (Cn+D)$

3. Solución general $a_0 = a$, $a_1 = 2a+3$, $a_2 = 4a+12$

$a_3 = 8a + 24 + 11 = 8a + 35$

$a = B + D \to D = a - B = \cancel{5a+6}$ $\to$ $C = a+3-2A-B$, $\cancel{C = 2A+B-a+3}$

$$\begin{cases} 2a+3 = 2A+2B+C+D \\ 4a+12 = 8A+4B+2C+D \\ 8a+35 = 24A+8B+3C+D \end{cases} \quad \begin{cases} a+3 = 2A+B+C \\ 3a+12 = 8A+3B+2C \\ 8a+35 = 24A+7B+3C \end{cases}$$

$$\begin{array}{r} a+3 \\ +3a+10 \\ -8a-19 \\ \hline -4a-6 \end{array}$$

$2a+9+6a+10 \to 8a+19$

$$\begin{cases} 2a+9 = 4A+B \to B = 2a+9-4A = \cancel{\dfrac{4a+18+10}{2}} = 8a+14 \\ 5a+26 = 18A+4B \to -3a-10 = 2A \to A = \dfrac{-3a-10}{2} \\ \quad +8a+36-16A \end{cases}$$

▷ Ejercicio (Regiones del plano) $r_n - r_{n-1} = n$, $r_0 = 1$

$p(n) = n$, $b^n = 1^n$

1. Ecuación característica: $(x-1)(x-1)^2 = 0$

2. Solución generalísima: $(An^2 + Bn + C)1^n = An^2 + Bn + C$

3. Dado un valor cualquiera que cumple esos valores (llamémoslo a), saquemos la solución general:

$r_0 = a$, $r_1 = a+1$, $r_2 = a+3$

$a = C$

$a+1 = A+B+C \rightarrow \cancel{a}+1 = A+B+\cancel{a} \rightarrow 1 = A+B$

$a+3 = 4A+2B+C \rightarrow \cancel{a}+3 = 4A+2B+\cancel{a} \rightarrow 3 = 4A+2B$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 3 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \rightarrow A + 1/2 = 1 \rightarrow A = 1/2 \\ \rightarrow B = 1/2 \end{array}$$

$$a_n = \frac{n^2}{2} + \frac{n}{2} + a = \frac{n^2+n+2a}{2}$$

4. Con los valores reales, saquemos la solución particular:

$$r_0 = 1 : \frac{0^2+0+2a}{2} = 1 \rightarrow \frac{2a}{2} = 1 \rightarrow a = 1$$

$$\boxed{P_n = \frac{n^2+n+2}{2}}$$

2. Álgebra de Boole

Álgebra de Boole: Conjunto de operaciones y elementos que cumplen las siguientes condiciones. Es una sextupla

$$\left(A, \underbrace{\overset{(O)}{\vee}, \overset{(Y)}{\wedge}}_{\text{Operadores binarios}}, \underbrace{\overset{(NOT)}{\square^*}}_{\text{Operadores monarios}}, 0, 1\right)$$

→ Elementos. Debe haber al menos 2.

Condiciones

1. Propiedad asociativa.

$$\forall a,b,c \in A, \quad (a \vee b) \vee c = a \vee (b \vee c)$$
$$(a \wedge b) \wedge c = a \wedge (b \wedge c)$$

2. Propiedad conmutativa

$$\forall a,b \in A, \quad a \vee b = b \vee a \quad y \quad a \wedge b = b \wedge a$$

3. Propiedad distributiva

$$\forall a,b,c \in A, \quad a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c) \quad y \quad a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$$

4. $a \vee a^* = 1$ $\qquad a \wedge a^* = 0$ $\qquad \forall a$

5. Identidad $\qquad a \vee 0 = a$ $\qquad a \wedge 1 = a$

Si $B = \{0, 1\}$

$\vee$	0	1
0	0	1
1	1	1

$\wedge$	0	1
0	0	0
1	0	1

a	a^*
0	1
1	0

Sobre las n-uplas de $\mathbb{B}$

El cardinal de ese tipo de tuplas es 2^n, haciendo un cubo n-dimensional.

AND: $(a,b) \wedge (c,d) = (a \wedge c, b \wedge d)$

OR: $(a,b) \vee (c,d) = (a \vee c, b \vee d)$

NOT: $(a,b)^* = (a^*, b^*)$

Sobre el conjunto Partes de...

$A = \{a, b, c\} \rightarrow P(A) = \{\{\emptyset\}, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{b,c\}, \{a,b,c\}\}$

$P(A)$ podría ser un álgebra de Boole: $(A, \cup, \cap, \square^c, \{\emptyset\}, \{a,b,c\})$

Sobre el conjunto de Divisores de un número

Si lo denotamos como álgebra de Boole,

$$\left(D(n), \text{mcm}, \text{mcd}, \frac{n}{\square}, 1, n\right)$$

Procedamos a ver si se cumplen las propiedades:

$\text{mcm}(a,b) = \text{mcm}(b,a)$

$\text{mcd}(a,b) = \text{mcd}(b,a)$

$\text{mcm}(a, \text{mcd}(b,c)) = \text{mcm}(\text{mcd}(a,b), c)$

$\text{mcd}(a, \text{mcm}(b,c)) = \text{mcd}(\text{mcm}(a,b), c)$

$\text{mcm}\left(a, \frac{1}{a}\right) = n \qquad \text{mcd}\left(a, \frac{1}{a}\right) = 1$

Sin embargo, las dos últimas propiedades no siempre se cumplen.

Si $n = 6$: $1 = 1$, $n = 6$ $(1^* = 6)$ $(2^* = 3)$

$D(6) = \{1, 2, 3, 6\}$

$\text{mcm}(1,6) = 6 \mid \text{mcd}(1,6) = 1$

Si $n = 9$ $1 = 1$, $n = 9$ $(3^* = 3)$

$D(9) = \{1, 3, 9\}$

Demostraciones sobre el Álgebra de Boole

- $a \vee 1 = 1 \wedge (a \vee 1) = (a \vee a^*) \wedge (a \vee 1) = a \vee (a^* \wedge 1)$

  $= a \vee (a^* \wedge 1) = a \vee a^* = 1$

- $a \wedge 0 = 0 \vee (a \wedge 0) = (a \wedge a^*) \vee (a \wedge 0) = a \wedge (a^* \vee 0)$

  $= a \wedge a^* = 0$

- Para todo a y b elementos de A

  $a \vee (a \wedge b) = (a \wedge 1) \vee (a \wedge b) = a \wedge (1 \vee b) = a \wedge 1$
  $= a$

  $a \wedge (a \vee b) = (a \vee 0) \wedge (a \vee b) = a \vee (b \wedge 0) = a \vee 0 = a$

- Para todo $a \in A$:

  $a \vee a = \cancel{a \wedge (a \vee a)}\ a \vee (a \wedge (a \vee a)) = a$

  $a \wedge a = a \wedge (a \vee (a \wedge a)) = a$

- Propiedad asociativa: $(a \vee b) \vee c = a \vee (b \vee c)$

Ley cancelativa $\forall a, b, c \in A$, si $a \vee c = b \vee c$ y $a \wedge c = b \wedge c$ entonces $a = b$

Demostración: ~~a A~~ $a = a \wedge (a \vee c) = a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c) = (b \wedge a) \vee (b \wedge c) = b \wedge (a \vee c) = b \wedge (b \vee c) = b$

Complementación: las propiedades de complementación se cumplen para un único elemento. Si $a \vee x = 1$ y $a \wedge x = 0$, $x = a^*$

- El complemento de 1 es 0 y el complemento de 0 es 1.

- El complemento del complemento es el elemento

- Si $a^* = b^*$, entonces $a = b$

- $(a \vee b)^* = a^* \wedge b^*$ y $(a \wedge b)^* = a^* \vee b^*$

Lema Si $(A, \vee, \wedge, ^*, 0, 1)$ es un álgebra de Boole, para todo $a, b \in A$, las propiedades

1. $a \vee b = b$
2. $a \wedge b = a$
3. $a^* \vee b = 1$
4. $a \wedge b^* = 0$

son equivalentes.

Demostración:

$1 \to 2$: $a \wedge b = a \wedge (a \vee b) = \cancel{(a \wedge a) \vee (}\ a$

$2 \to 3$: $a^* \vee b = (a \wedge b)^* \vee b = a^* \vee b^* \vee b = a^* \vee 1 = 1$

$3 \to 4$: $a \wedge b^* = (a^* \vee b)^* = 1^* = 0$

$4 \to 1$: $a \vee b = (a \vee b) \wedge 1 = (a \vee b) \wedge (b \vee b^*) = (a \wedge b^*) \vee b$

$= 0 \vee b = b$

Relación de Álgebras de Boole

$a R b$ se define: "la relación de orden de a y b se cumple si y solo si $a \vee b = b$"

! Es una relación de orden y por ello debe ser:

$\boxed{R : \leq}$

Reflexiva: $a \vee a = a$, aRa

Antisimétrica: $\left.\begin{array}{l} aRb \\ bRa \end{array}\right\} \to \begin{array}{l} a \vee b = b \\ b \vee a = a \end{array} \to b = a$

Transitiva: $\left.\begin{array}{l} aRb \\ bRc \end{array}\right\} \to \begin{array}{l} a \vee b = b \\ b \vee c = c \end{array} \to a \vee c = a \vee (b \vee c) = (a \vee b) \vee c$

$= \boxed{b \vee c = c}$; aRc

Vista la relación, podemos considerar $a \vee b$ como el supremo de a y b; y $a \wedge b$ como el ínfimo de a y b.

Demostración. Tenemos que ver primero que $a \vee b$ es una cota superior de a y b.

$$a \vee (a \vee b) = (a \vee a) \vee b = a \vee b \to a \leq a \vee b$$

$$b \vee (a \vee b) = (b \vee a) \vee b = (a \vee b) \vee b = a \vee (b \vee b)$$

$$= a \vee b \to b \leq a \vee b$$

Ahora veremos que es el supremo, es decir, el mínimo de las cotas superiores.

$$\left.\begin{array}{l} a \leq x \\ b \leq x \end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{l} a \vee x = x \\ b \vee x = x \end{array}\right\} \to (a \vee b) \vee x = a \vee \underbrace{(b \vee x)}$$

$$= \underbrace{a \vee x} = x \to a \vee b \leq x$$

Por dualidad, $a \wedge b$ es el ínfimo de a y b.

▷ Repasando el ejemplo de los hipercubos:

$\mathbb{B} = \{0, 1\}$ $\quad 0 \vee 1 = 1 \rightarrow 0 \leq 1$

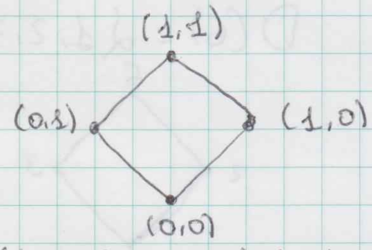
Diagrama de Hasse

$\mathbb{B}^2 = \{(0,0), (0,1), (1,0), (1,1)\}$ $\quad (a,b) \leq (c,d) \Leftrightarrow \begin{cases} a \leq c \\ b \leq d \end{cases}$

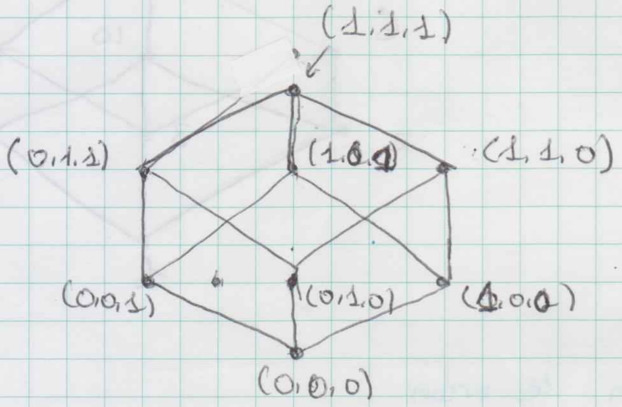
$(0,0) \leq (0,1) \rightarrow (0 \leq 0,\ 0 \leq 1)$

$(0,0) \leq (1,0) \rightarrow (0 \leq 1,\ 0 \leq 0)$

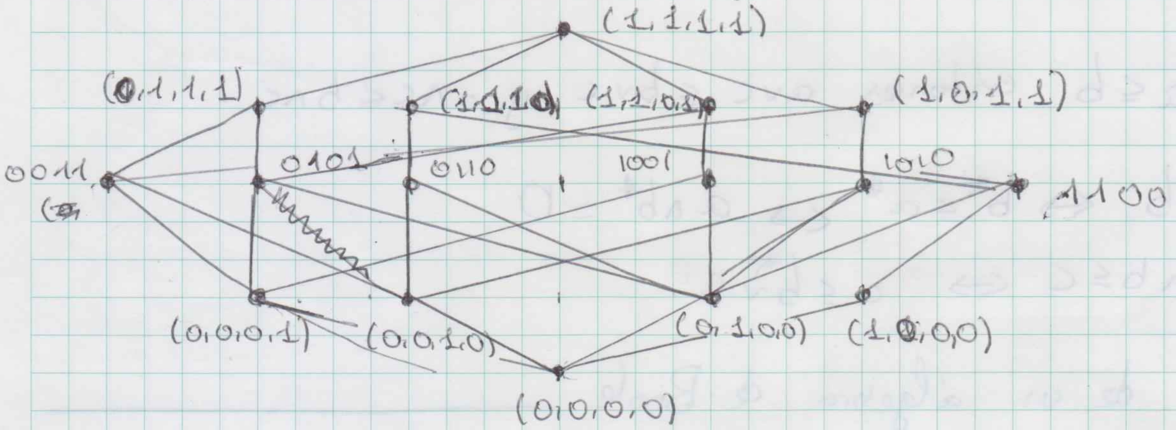
$(1,0) \leq (1,1)$, $(0,1) \leq 1,1)$



$\mathbb{B}^3 = \{(0,0,0), (0,0,1), (0,1,0), (0,1,1), (1,0,0), (1,0,1), (1,1,0), (1,1,1)\}$

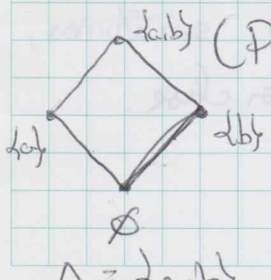


$\mathbb{B}^4 = \{(0,0,0,0) \ \dots \ (1,1,1,1)\}$

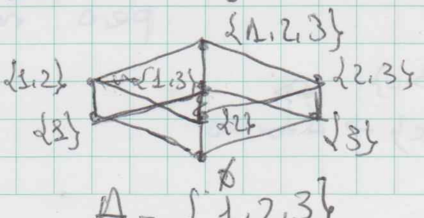


▷ Repasando el ejemplo de los conjuntos partes:

$(\mathcal{P}(A), \cup, \cap, \square^c, \emptyset, A)$ El orden es "estar incluido"



$A = \{a, b\}$

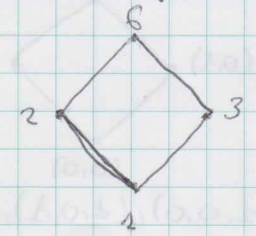


$A = \{1, 2, 3\}$

A raíz de esos ejemplos, podemos ver que son isomorfas, es decir, que se pueden sustituir y conseguir los mismos resultados.

▷ Partiendo del ejemplo de los divisores de un número:

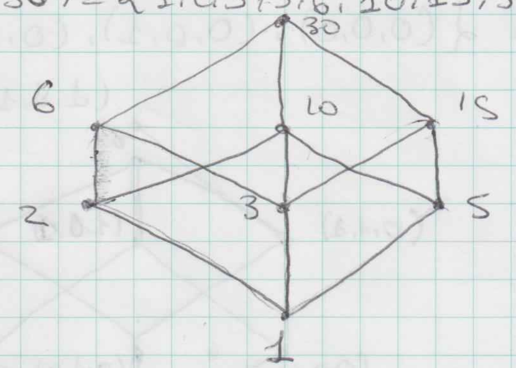
$D(6) = \{1, 2, 3, 6\}$



$(D(n), mcm, mcd, \frac{n}{\square}, 1, n)$

tiene un orden basado en divisibilidad.

$D(30) = \{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30\}$



Ejercicios de demostración de orden

$0 \leq a \leq 1$

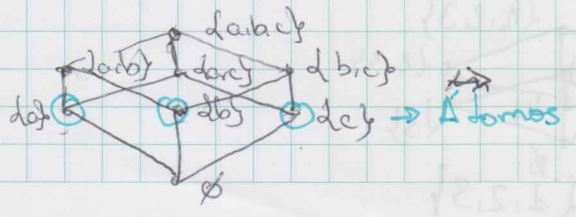
Si $a \leq b$ entonces $a \vee c \leq b \vee c$ y $a \wedge c \leq b \wedge c$

$a \leq b \Leftrightarrow b^* \leq a^* \Leftrightarrow a \wedge b^* = 0$

$a \wedge b \leq c \Leftrightarrow a \leq b^* \vee c$

Átomo de un álgebra de Boole

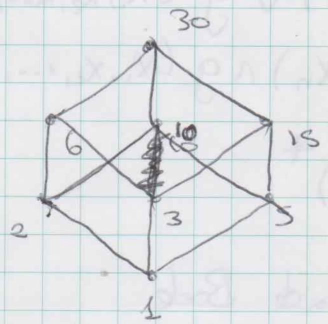
Se llama átomo a los minimales de un conjunto ordenado al que se le quita el 0. Hay álgebras sin átomos, pero no se dan en clase.

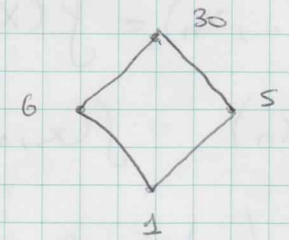


Un álgebra de Boole es aquella a la que, si se le quita un elemento que no es 0, tendrá átomos debajo de él.

Teorema: Toda álgebra de Boole finita es atómica.

Subálgebra de Boole: ~~Conjunto~~ Subconjunto de un álgebra de Boole donde estén el 0 y el 1 y sea cerrada para las operaciones.





Teorema Sea A un álgebra de Boole finita. Para todo $X \in A$:

$$X = \underset{\text{Supremo}}{\bigvee}\{a \le At(A) : a \le X\}$$

X es el supremo de los átomos que hay debajo

Como consecuencia, si un conjunto tiene r átomos, el álgebra de Boole será de 2^r elementos. Habrá una y solo una, siendo los ejemplos maneras de interpretar el álgebra.

Por ejemplo, los divisores de 6 y los divisores de 15 son el mismo álgebra "Divisores de un nº de dimensión 2"

Funciones booleanas

La aplicación $Ap(\mathbb{B}^n, \mathbb{B})$ se considera una función booleana elemental.

Si $f(x_1 \dots x_n)$ y $g(x_1 \dots x_n) \in Ap(\mathbb{B}^n, \mathbb{B})$:

$$(f \vee g)(x_1, x_2, \dots, x_n) = f(x_1, x_2, \dots, x_n) \vee g(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

$$(f \wedge g)(x_1, x_2, \dots, x_n) = f(x_1, x_2, \dots, x_n) \wedge g(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

$$f^*(x_1, x_2, \dots, x_n) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)^*$$

Por ello, la aplicación también es un álgebra de Boole

▷ Ejemplo la función $F_n = Ap(\mathbb{B}, \mathbb{B})$

x	$f_0(x)$	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$
0	0	0	1	1
1	0	1	0	1

$f_0(x) = 0$ $\quad f_1(x) = x$ $\quad f_2(x) = \text{NOT } x$ $\quad f_3(x) = \cancel{0}\,1$

▷ Ejemplo la función $F_n = Ap(\mathbb{B}^2, \mathbb{B})$

		0	$x \wedge y$ AND	$x \wedge y^*$	$\pi_{x+y}(x,y)$	$x^* \wedge y$	y	XOR	$x \vee y$ OR	$x^* y^*$ NOR	XNOR	y^*	$x \vee y^*$	x^*	$x^* \vee y$	$\uparrow$ NAND	1
x	y	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8	f_9	f_{10}	f_{11}	f_{12}	f_{13}	f_{14}	f_{15}
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1

! $|F_n| = 2^{(2^n)}$

¿Cómo especificamos una función?

1 Escribir una tabla con las x variables con 2^x renglones, cosa que sería impráctica para $x \geq 4$

2 Poner un índice a la función. ~~No sería práctico si tuviéramos que hacerlo al revés, ya que habría que responderlo.~~ Para dos variables o 3 sería útil.

3 Con una tabla (para 3 o 4 variables) especial denominada **mapa de Karnaugh.**

4. Con expresiones booleanas basadas en $\wedge$, $\vee$ y $\square^*$

Mapa de Karnaugh

3 variables

z \ xy	$\bar{x}\bar{y}$ 00	$\bar{x}y$ 01	xy 11	$x\bar{y}$ 10
0 $\bar{z}$	1	3	7	5
1 z	2	4	8	6

4 variables

zt \ xy	00 $\bar{x}\bar{y}$	01 $\bar{x}y$	11 xy	10 $x\bar{y}$
$\bar{z}\bar{t}$ 00	1	5	13	9
$\bar{z}t$ 01	2	6	14	10
zt 11	4	8	16	12
$z\bar{t}$ 10	3	7	15	11

Expresiones booleanas

1. 0 y 1 son expresiones booleanas, además de x_i.

2. Si e_1 y e_2 son expresiones booleanas, $e_1 + e_2$, $e_1 e_2$ y e_1^* son también expresiones booleanas

3. No hay más expresiones booleanas fuera de las definidas por las anteriores reglas.

Problema: Dos expresiones booleanas pueden dar la misma función, y no es evidente que todas las funciones tengan su propia expresión booleana.

$xy + z^*$, por ejemplo, es una expresión booleana.

xy xz xt yz yt zt

Conjunción en n variables: Expresión $\mu = x_1^{\varepsilon_1} x_2^{\varepsilon_2} \dots x_n^{\varepsilon_n}$, el cual: $\varepsilon_i \in \{0, 1, *\}$

- Si es 0, no se pone
- Si es 1, se pone
- Si es $*$, se pone negado

Así se pueden hacer 3^n conjuntos

- Ejemplo Con 3 variables:

3v $x^* y^* z^*$ $x^* y^* z$ $x^* y z^*$ $x^* y z$ $x y^* z^*$ $x y^* z$

$x y z^*$ $x y z$

A aquellos términos con todas sus variables se les denomina mintérminos.

2v $x^* y^*$ $x^* y$ $x y^*$ $x y$ $x^* z^*$ $x^* z^*$ $x z^*$ $x z$ $y^* z^*$ $y^* z$ $y z^*$ $y z$

1v x^* x y^* y z^* z

0v 1

- Ejemplo Con ~~cuatro~~ 4 variables $3^4 = 81$ elementos

4 variables: $2^4 = 16$ conjuntos (Nº estados, Nº elementos) xyzt (1 pos)

3 variables: $\cancel{8}(2^3) \cdot 4 = 8 \cdot 4 = 32$ conjuntos (Nº posibilidades) xyz xyt xzt yzt (4 pos)

2 variables $2^2 \cdot 6 = 24$ conjuntos xy xz xt yz yt zt (6 pos)

1 variables $2 \cdot 4 = 8$ conjuntos x y z t (4 pos)

0 variables $2^0 \cdot 1 = 1$ conjunto $\emptyset$ (1 pos)

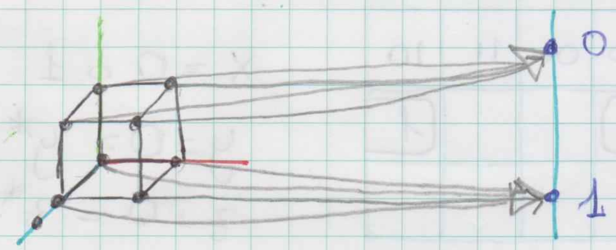
TOTAL = 81

¿Cuántas conjunciones hay de n-variables en las que falten r de ellas?

$$\binom{n}{n-r} 2^{n-r} =$$

$x y^* z$

$A_p(\mathbb{B}^3, \mathbb{B})$



Los átomos de las funciones booleanas son aquellas conjunciones o mintérminos donde solo hay una variable no complementada (es decir, que todos llevan asterisco menos 1)

! Toda función se puede poner de forma única como suma de mintérminos. (debajo del valor de f)

$$f_{172}(x,y,z) = f_{128}(x,y,z) + f_{32}(x,y,z) +$$

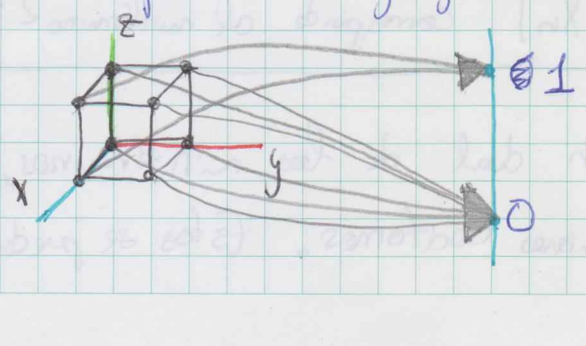
$$f_8(x,y,z) + f_4(x,y,z) = x^* y^* z^* + x^* y z^* + x y^* z^* + x y^* z$$

$m_0(x,y,z) \quad m_2(x,y,z) \quad m_4(x,y,z) \quad m_5(x,y,z)$

Esta función también se considera como el supremo de átomos de una función.

Se considera forma canónica disyuntiva.

Representación gráfica de $x y^*$



▷ Ejemplo Representar x^*z^* en un mapa de Karnaugh

z \ xy	00	01	11	10
0	1	1		
1				

$$x^*z^* = x^*yz^* + x^*y^*z^*$$

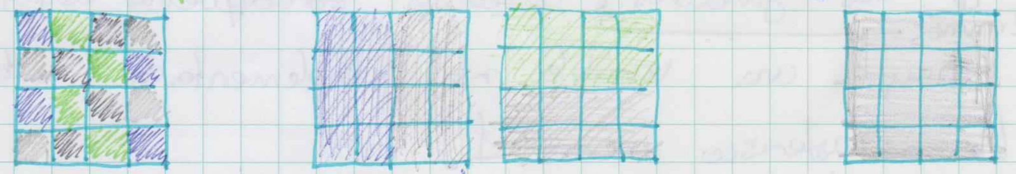
▷ Ejemplo ¿Qué función tiene este mapa de Karnaugh?

z \ xy	00	01	11	10
0	$\boxed{1}$			$\boxed{1}$
1				

$x = 0$ o 1

$$\left.\begin{array}{l} y = 0 = y^* \\ z = 0 = z^* \end{array}\right] \longrightarrow y z^*$$

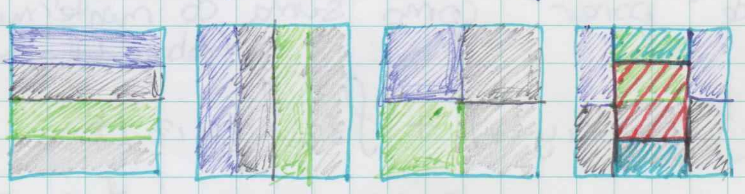
▷ Ejemplo En un mapa de Karnaugh de 4 variables:



Con las 4 variables tenemos 24 conjuntos

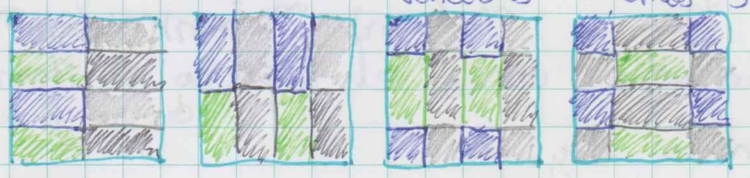
Con ~~2~~ 1 variables tenemos 8 ~~2~~ conjuntos

Con 0 variables tenemos 1 conjunto



Con 2 variables tenemos 24 conjuntos

Con 3 variables tenemos 32 conjuntos



! La función $f_{2^n}(x_1, x_2, \dots, x_n)$ corresponde al mintérmino $2^n - 1$

Los maxtérminos son la definición dual de los mintérminos, es decir, ~~el producto~~ las funciones coátomos. Estos se pueden para hacer términos menores a los de los cocientes. Se identifica de forma única, denominada forma canónica conjuntiva.

Es de la forma $(x_1^{\varepsilon}+x_2^{\varepsilon}+\ldots+x_n^{\varepsilon})\cdot\ldots\cdot(x_1^{\varepsilon}+x_2^{\varepsilon}+\ldots+x_n^{\varepsilon})$, siendo $\varepsilon\in\{0,1,*\}$

Grafo: Definiciones

Un grafo es un par (V,E) que se relaciona por una aplicación $\gamma_G : E \rightarrow \{\{u,v\} : u,v \in V\}$.

V es el conjunto de vértices y E es el conjunto de aristas, y la aplicación cuenta que una ~~la~~ arista une dos puntos de V. Hay libros que lo denominan multigrafo

Un grafo simple no tiene lazos ni lados paralelos.

Los extremos de un lado son los vértices que delimitan el lado.

Un **subgrafo** es un grafo cuando $V_{subgrafo} \subseteq V_{grafo}$ y $E_{subgrafo} \subseteq E_{grafo}$ y que las aristas del subgrafo coincidan con las del grafo.

Un grafo es conexo si dados dos vértices siempre hay un camino que los una.

Matriz de adyacencia de grafos

La matriz de adyacencia de un grafo es una matriz cuyo nº en la fila i y la columna j dice el número de aristas que unen los vértices i y j.

Esta matriz:

- Es simétrica, ya que $M_{ij} = M_{ji}$
- Cambia según la nomenclatura del vértice, es decir, si dos ~~nombres~~ vértices cambian de nombres, se cambia la matriz.
- La matriz de adyacencia de un grafo determina a este.
- La existencia de lados paralelos da la posibilidad de que los valores sean mayores de 1.

Si elevamos la matriz, esta define el número de caminos de tamaño n entre los vértices i y j.

Isomorfismo de grafos

Dos grafos son isomorfos si ~~existen dos~~ sus aplicaciones biyectivas de lados y aristas coinciden.

El **grado** de un vértice corresponde al número de aristas que apunten a un vértice (y no sean autolados). Si agrupamos los vértices con el mismo grado, y numeramos cuantos hay de cada, se llamará sucesión de grados.

! $\sum gr(v_i) = 2l$ (La sumatoria de grados de los vértices del grafo es igual al doble de lados, ya que se cuentan 2 veces)

Tipos de grafos

N_n, Nulos No tienen aristas. Tienen n vértices 

P_n, Caminos Grafo que une todos los vértices a través de un camino del primero al último. Tiene n vértices y n-1 aristas 

K_n. Completos Grafo que conecta todos los vértices con todos. Tiene n vértices y $\frac{n(n-1)}{2}$ aristas  

$K_{m,n}$, Bipartidos Grafo con dos filas de vértices (V y W) que se unen de forma que cada vértice de V se une con todos los de W. Tiene n+m vértices y nm aristas

C_n, Ciclos Es un grafo que tiene los vértices unidos de forma que V_i se une con V_{i+1} y el último se une con el primero. Suelen verse como formas geométricas regulares.
Tiene n vértices y n aristas  

W_n, Ruedas Es un grafo ciclo con un vértice central que se conectan con los vértices del ciclo. Tiene n+1 vértices y 2n aristas.

Sucesiones gráficas

La sucesión gráfica es una lista de números naturales con tantos cifras como vértices tenga el grafo, que representan los grados de cada vértice. Este grafo no podrá tener lados paralelos ni lazos.

Algoritmo de demolición

Dada una sucesión ~~gráfica~~, podemos ver con este algoritmo si es gráfica o no.

1. ¿Son todos los elementos de la sucesión 0? Si lo es, la sucesión es gráfica y hemos acabado
2. ¿Existe un número en la sucesión que es mayor o igual que el número de elementos no nulos de la sucesión? Si lo es, la sucesión NO es gráfica y hemos acabado
3. Genera una nueva sucesión poniendo a 0 el elemento marcado (o pivote) y decrementando 1 vez tantos elementos como grado tenga.
4. Volvemos al paso 1.

Algoritmo de reconstrucción

Si el algoritmo de deconstrucción da una sucesión gráfica, podemos construir el grafo leyendo de abajo hacia arriba.

1 Partimos del grafo nulo con n vértices que corresponde a la última fila de todo ceros.

2 Pasamos a una fila superior añadiendo al grafo de la fila, los lados que conecten ~~con~~ el vértice de la fila superior con aquellos que aumenten el grado en 1.

Grafos de Euler

Un ~~grafo~~ camino de Euler es aquel en el que aparecen todos los lados. Si está cerrado se denomina circuito de Euler

Un circuito se puede encontrar si el grado de cada vértice es par, y un camino, si ~~e~~hay solo 2 grados impares.

Por ello, un grafo de Euler es aquel que tiene un circuito de Euler.

Algoritmo de Fleury

Dado el grafo G, y como salida las sucesiones de vértices y lados del camino buscado.

1 Si todos los vértices son de grado par, cogemos un vértice cualquiera. Si hay dos impares, uno de ellos.

2 Si G tiene a v, devuelve las sucesiones y acaba.

3 Si hay solo un lado que incide en v, llamamos w al otro extremo y quitamos el lado y vértice (vamos al paso 6)

4 Si hay más de un lado, elegimos uno de forma que G siga siendo conexo

5 Añadimos w al final de la sucesión de vértices y el lado a la sucesión de lados.

6 Cambiamos el vértice y volvemos al paso 3

Grafos de Hamilton

Un camino de Hamilton es aquel que recorre todos los vértices una sola vez. Un circuito de Hamilton es un camino cerrado que recorre todos los vértices una sola vez, salvo los extremos. Un grafo hamiltoniano es aquel con un circuito de Hamilton.

Sea G un grafo con n vértices,

1 Si el nº de vértices es mayor o igual que $\frac{(n-1)(n-2)}{2}+2$

y/o

2 Si $n \geq 3$ y para cada par de vértices la suma de sus grados es mayor o igual que el número de vértices

entonces el grafo es hamiltoniano.

Grafos bipartidos

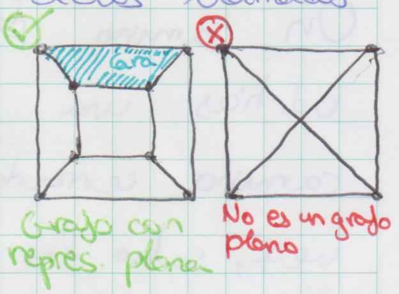
Recordemos que un grafo bipartido es aquel cuyos vértices se dividen en 2 subconjuntos de forma que los vértices del 1er conjunto se conecten con todos los del segundo conjunto, y viceversa. Este no presenta ciclos de longitud impar.

Proposición Un grafo bipartido:

1. Tiene un camino de Hamilton si $|n-m| \leq 1$
2. Es un grafo de Hamilton si $n=m$
3. Tiene un camino de Hamilton si G es completo y $|n-m| \leq 1$
4. Es un grafo de Hamilton si G es completo y $n=m$

Grafos planos

Los grafos planos son aquellos que admiten una representación de forma que no crucen dos lados. Gracias a que no hay cruces, se dan ciertos ciclos llamados caras.



Euler relaciona ~~con las caras~~ a través de la característica de Euler:

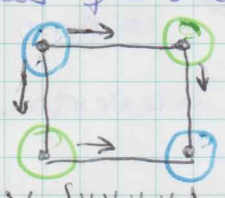
"En un grafo plano y conexo, donde V representa los vértices; l, los lados; y c, las caras; entonces $v-l+c=2$"

Si hubiera χ componentes conexas, entonces $v-l+c=1+\chi$.

A través de la característica de Euler, podemos extraer que $3c \leq 2$ y $l \leq 3v-6$.

Coloración de grafos

Una coloración es una aplicación entre Vértices y Colores $(f: V \to C)$. El conjunto de colores es aquel que se aplica a los vértices de forma que los extremos de los lados que salen de un vértice v tengan colores distintos.



El número cromático (χ_G) es el número de colores mínimo para cubrir todos los vértices.

El polinomio cromático $(P(G,x))$ da como resultado el nº de combinaciones que se pueden hacer con x colores. El valor mínimo que de como resultado $\neq 0$ es el número cromático.

Polinomios cromáticos de K_n y P_n

$$P(K_n, x) = x^{\underline{n}} = x(x-1)\ldots(x-(n-1))$$

$$P(P_n, x) = x(x-1)^n$$

$\underline{n}$ representa la potencia descendente, es decir,

$$x(x-1)(x-2)\ldots(x-(n-1))$$

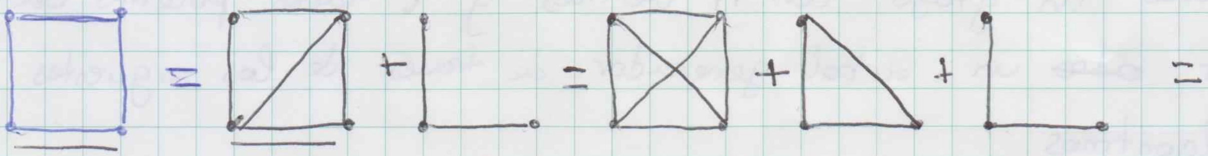
Para calcular el polinomio cromático de un grafo podemos aplicar dos algoritmos, que darán el mismo resultado

Algoritmo de la suma

Se basa en la fórmula:

$$p(G_e, x) = p(G_5, x) + p(G_e', x)$$

Siendo $p(G,x)$ el polinomio del grafo con un lado más; y $p(G_e', x)$ el polinomio del grafo con un vértice menos (al que se le quitan los lados de ese vértice.



$$p(K_4, x) + p(K_3, x) + p(P_3, x) = x^{\underline{4}} + x^{\underline{3}} + x(x-1)^3$$

Algoritmo de la resta

$$P(G, x) = P(G_e', x) - P(G_e, x)$$

Se basa en la misma fórmula del otro algoritmo, pero en este caso $p(G_e, x)$ es el polinomio del grafo con un ~~lado~~ vértice que fusiona dos de estos (eliminando y uniendo los lados de estos dos); y $p(G_e', x)$ el polinomio de un grafo con un lado menos.

$$= p(P_3, x) - p(K_3, x) = \cancel{x^{\underline{3}} + x(x-1)^3}$$

$$x(x-1)^3 - x^{\underline{3}}$$

Árboles

Un **árbol** es un grafo conexo que no tiene ciclos. Si no es conexo se denomina **bosque**. Un subgrafo de este se denomina **árbol generador** si tiene todos los vértices y es un árbol.

Todo viene a raíz de que si un grafo contiene un ciclo y le quitamos uno de los lados, este sigue siendo conexo. (si le quitáramos un lado tras ello dejaría de serlo).

Los árboles son planos y tienen $n-1$ lados, y si se unen ~~por~~ dos vértices a través de un lado, se pondrá un ciclo.

Árboles generadores

Son subgrafos que tienen todos los vértices y es un árbol.

Dado un grafo con n vértices y l lados podemos obtener ~~otro~~ un árbol generador a través de los siguientes algoritmos

Algoritmo de Kruskal constructivo a través de building-up.

Trata de aplicar la estrategia building-up a un árbol generador de peso mínimo. Esta consiste en coger $n-1$ lados de uno en uno, de forma que no haya ciclos (y estos sean de peso mínimo

Algoritmo de Kruskal destructivo vía cutting-down

Se van descartando $l-(n-1)$ lados de uno en uno, quitando así ciclos en el grafo que va resultando. En grafos ponderados, se eliminan los de mayores pesos.

Algoritmo de Prim

Se trabaja con vertices y lados.

1 Se parte de un vertice que se añade al conjunto V.

2 En cada paso añadimos un vertice a V y un lado a E. de forma que:

u sea un vertice que no está en V

u sea adyacente por el lado e a un vertice de V.

e el lado no forme ciclos con los lados de E.

e sea de peso mínimo entre los que cumplen las anteriores condiciones.

3 Esto acaba cuando se eligen n-1 lados.

Arboles con raíz

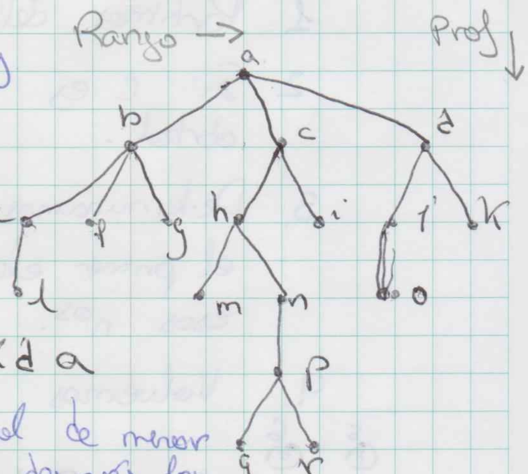
Es un arbol donde hay un nodo denominado raíz de donde dependen las demás ramas. Los demás parámetros son:

Profundidad Distancia al nodo raíz

Altura Altura del subarbol que lo tiene como raíz

Rango Sirve para comparar nodos de la misma profundidad.

Un arbol se puede recorrer de varias maneras.



Preorden Primero se recorre la raíz y luego se recorren los subárboles hijos en preorden en orden creciente de rangos
a b e l f g c h m n p q r i d j o K

Postorden Primero se recorren los subárboles hijos en postorden y luego se recorre la raíz ~~lef~~ le f g b m q r p n h i c o j K d a

Inorden Primero se recorre el subárbol de menor rango en inorden, luego la raíz, y después los subarboles de mayor rango en inorden. l e b f g a m h q p r n c i o j d K

Top-down Se recorren los nodos de arriba a abajo y de izq. a der. a b c d e f g h i j K l m n o p q r

Bottom-up Se recorren los nodos de abajo a arriba, dentro de estos en orden de profundidad y dentro de este en orden de rango

fgikKlmo qr, ej~~s~~p, bdn, h, ca

Árboles etiquetados

Un árbol etiquetado es un árbol con n vertices que tienen como etiquetas unos n^{os} naturales. Dos árboles etiquetados son isomorfos si tienen los mismos vértices y hay un isomorfismo de grafos. El nº de árboles etiquetados con n vertices es n^{n-2}

Creación del código de Prüfer de un árbol etiquetado

El código de Prüfer es una sucesión de longitud n-2 que se obtiene así:

1 Partimos de una sucesión vacía y de un árbol.

2 Si el árbol solo tiene 2 vertices se devuelve el código.

3 Se determina la hoja con la menor etiqueta y se elimina del árbol. Anotamos la etiqueta del nodo adyacente.

4 Volvemos al paso 2.

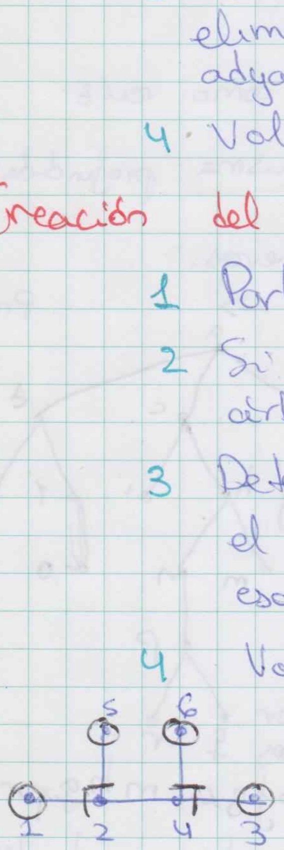
Creación del árbol a través del código de Prüfer

1 Partimos del código de longitud y un árbol vacío.

2 Si c es vacío y el árbol tiene dos vértices se devuelve el árbol.

3 Determinamos el menor nº que no está en el código y el primer elemento del código. Se hace un lado y se quitan esos n^{os}.

4 Volvemos al paso

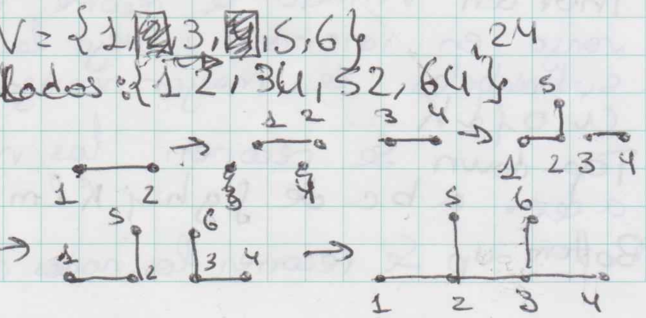


→ 2, 4, 2, 4

c = 2, 4, 2, 4

V = {1, ~~2~~, 3, ~~4~~, 5, 6}

Lados = {1 2, 3 4, 5 2, 6 4}



4. Lógica Proposicional o de enunciados

Introducción

El concepto de lógica es variado:

Concepto ingenuo Usamos "lógica" como calificativo en la conversación, haciendo referencia a su coherencia. No nos sirve como punto de partida.

Etimología Lógica viene del griego "logos", que significa "estudio o tratado racional", el cual se une con otras ciencias. Ej: psicología sería "estudio racional del alma". Los griegos llamaron τα λογικα (las cosas lógicas) a aquella ciencia o tratado que versaba sobre el propio pensamiento, sobre sus fórmulas y leyes.

Concepto histórico Lógica sería el estudio de las formas correctas del razonamiento (según Aristóteles). La escuela megaroestoica dio entonces una forma de tratar la lógica proposicional.

En el siglo XVII se mezcló con ideas filosóficas y psicológicas por las ideas de verdad, dando cuestiones gnoseológicas, constituyendo otro concepto de lógica. Kant y Mill introducen también sus propios conceptos. ~~A partir~~

A partir del siglo XIX, Boole y De Morgan inician la lógica matemática o lógica moderna, enraizada en las nociones griegas y megaroestoicas.

¿Qué es la lógica, entonces?

La lógica como ciencia trata el estudio de las inferencias válidas o razonamientos correctos, el concepto de significado y verdad,

En resumen, el objeto de estudio de la lógica es el razonamiento

La lógica de proposiciones

El apartado más simple de la lógica es el análisis de las proposiciones ya que los razonamientos se expresan mediante el lenguaje. Eso sí, hay que tener en cuenta las preguntas e interjecciones que no dan forma lógica a este. Cuando se afirman o niegan cosas, la lógica podrá analizarlas, siendo eso un uso apodíctico del lenguaje

En un enunciado podremos descomponer en la lógica preposicional tal enunciado en enunciados simples.

"Dieron las seis y llamó Cabra a Licián, fuimos y oímosla todos" →
- Dieron seis
- Llamó Cabra a Licián
- Fuimos
- Oímosla todos

La lógica proposicional se basa en dos grandes pilares

1. Los enunciados u oraciones
2. Las conexiones lógicas entre ellas

Conexiones lógicas

Tratan de ~~conectar~~ hacer frases más complejas a partir de conjunciones.

Las conexiones / conectivas.

Los enunciados del lenguaje que no se pueden dividir en otros se denominan enunciados, proposiciones o sentencias atómicas. Se suelen representar por letras (p, q, r) con subíndices y primas. Estas sentencias atómicas se denominarán variables.

Las conexiones más usadas son:

No (¬) Conexión monaria que niega el valor de una variable.

Y (∧) Conexión binaria de conjunción. Hay que tener cuidado, pues que en el lenguaje natural se puede dar tanto como conjunción de sustantivos, como secuencia temporal, o como condicional

O ($\vee$) Conexión ~~conjuntiva~~ binaria disyuntiva.

Si..., entonces... ($\rightarrow$) El más importante. Solo es falso si $1 \rightarrow 0$.

Sí y solo si ($\leftrightarrow$) Es la unión de dos $\rightarrow$ cada uno en un sentido.

Una expresión se puede pasar a un árbol etiquetado donde las hojas son variables y el resto de nodos son conexiones de forma que si la conexión es monaria tendrá un hijo y si es binaria, dos.

Interpretaciones, valoraciones o mundos posibles

Una valoración asigna un valor de verdad a cada una de las proposiciones lógicas.

Hay dos maneras de hacerlo:

1: Sabiendo ela valoración de las conectivas en función de sumas y productos

$$V(\alpha \vee \beta) = v(\alpha) + v(\beta) + v(\alpha)v(\beta)$$

$$V(\alpha \wedge \beta) = v(\alpha)v(\beta)$$

$$v(\alpha \rightarrow \beta) = 1 + I(\alpha) + I(\alpha)v(\beta)$$

$$v(\alpha \leftrightarrow \beta) = 1 + V(\alpha) + v(\beta)$$

$$v(\neg \alpha) = 1 + v(\alpha)$$

2. Polinomio de Gegalkine.

Trata de saber la valoración usando las fórmulas de 1.

3. Tabla de verdad.

En una tabla se van desgranando los valores de cada sección de la expresión lógica. Su tamaño es de 2^n valoraciones o mundos posibles.

Clasificación de fórmulas

Tautología Para cualquier valoración se dará que es verdad

Satisfacible Sucede si existe al menos una valoración donde sea verdad

Refutable Sucede si existe al menos una valoración donde sea falso

Contradicción Para cualquier valoración se da que es falso

Contingente Si es satisfacible y refutable.

Equivalencia lógica

Son dos fórmulas lógicamente equivalentes si para cada mundo posible se da que $v(\alpha) = v(\beta)$. Se representa $\alpha \equiv \beta$

Hay un conjunto de equivalencias lógicas que están en la chuleta oficial.

Consecuencia lógica

Sea Γ un conjunto de fórmulas $\{\gamma_1, \gamma_2 ...\}$ de un lenguaje proposicional. Se dice que Γ es satisfacible si existe una valoración v en la que $v(\alpha) = v(\beta) = ... = 1$. Si $\Gamma = \emptyset$, entonces es satisfacible. Si no es satisfacible, será insatisfacible.

Entonces, sería equivalente:

1 Γ es insatisfacible

2 $\gamma_1 \wedge \gamma_2 \wedge \dots \wedge \gamma_n$ es una contradicción

3 Que para cualquier mundo posible, $v(\gamma_1 \wedge \gamma_2 \wedge \dots \wedge \gamma_n) = 0$

4 Que para cualquier mundo posible $\prod_{i=1}^{n} v(\gamma_i) = 0$

Implicación semántica

Sea Γ un conjunto de fórmulas y α otra fórmula. ~~Es equivalente decir~~ Diremos que α es consecuencia lógica de Γ si para cualquier mundo posible para que todas las proposiciones de Γ sean verdaderas, α también sean verdaderas. Se escribe $\Gamma \models \alpha$ y se lee "α es consecuencia lógica de Γ" o "Γ implica semánticamente a α". A las fórmulas de Γ se le denominan hipótesis y α sería la conclusión.

Es equivalente decir pues:

$\Gamma \models \alpha$

$\Gamma \cup (\neg \alpha)$ es insatisfacible

Para cualquier mundo posible, se tiene $\left[\prod_{\gamma \in \Gamma} v(\gamma)\right](1 + v(\alpha)) = 0$.

Forma clausulada de una fórmula

Sea α una fórmula que no sea tautología, Entonces existe otra fórmula β lógicamente equivalente a α, y que esté en forma clausulada.

Algoritmo de la forma clausulada.

1 Eliminamos los bicondicionales.

las fórmulas $\alpha_1 \leftrightarrow \alpha_2$ pasan a ser $(\alpha_1 \rightarrow \alpha_2) \wedge (\alpha_2 \rightarrow \alpha_1)$

2 Eliminación del condicional

las fórmulas $\alpha_1 \rightarrow \alpha_2$ pasan a ser $(\neg \alpha_1 \vee \alpha_2)$

3 Interiorización de la negación

las fórmulas $\neg\neg \alpha$ pasan a ser α

$\neg(\alpha_1 \vee \alpha_2)$ se cambia por $\neg \alpha_1 \wedge \neg \alpha_2$

$\neg(\alpha_1 \wedge \alpha_2)$ se cambia por $\neg \alpha_1 \vee \neg \alpha_2$

Con estos pasos anteriores pasamos a tener solo $\vee$, $\wedge$ y $\neg$.

La negación solo afectaría aquí a las fórmulas atómicas.

4 Distribución de $\vee$ sobre $\wedge$

La fórmula $\alpha_1 \vee (\beta_1 \wedge \beta_2)$ ~~equivale~~ cambia a $(\alpha_1 \vee \beta_1) \wedge (\alpha_2 \vee \beta_2)$

La fórmula $(\alpha_1 \wedge \alpha_2) \vee \beta_1$ cambia a $(\alpha_1 \vee \beta_1) \wedge (\alpha_2 \vee \beta_1)$

5 Eliminación de redundancias

Se eliminan los literales por idempotencia. Absorbemos las cláusulas mas grandes por las más chicas.

▷ Ejemplo

$c \wedge (a \vee b) \to \neg a \vee b = \neg(c \wedge (a \vee b)) \vee (\neg a \vee b)$

$= (\neg c \vee \neg(a \vee b)) \vee (\neg a \vee b)$

$= (\neg c \vee (\neg a \wedge \neg b)) \vee (\neg a \vee b)$

$= ((\neg c \vee \neg a) \wedge (\neg c \vee \neg b)) \vee (\neg a \vee b)$

$= (\neg c \vee \neg a \vee \neg a \vee b) \wedge (\neg c \vee \neg b \vee \neg a \vee b)$

$= (\neg c \vee \neg a \vee b) \wedge (\neg c \vee \neg a \vee 1)$

$= (\neg c \vee \neg a \vee b) \wedge 1 = \boxed{\neg c \vee \neg a \vee b}$

El problema de la implicación semántica

Sea Γ un conjunto de fórmulas, Γ' un conjunto de fórmulas que se obtiene sustituyendo cada fórmula por su forma clausular, y Γ'' el conjunto que resulta de sustituir Γ' por las cláusulas que la forman. Entonces son equivalentes:

Γ es insatisfacible

Γ' es insatisfacible

Γ'' es insatisfacible

Algoritmo de Davis-Putnam

Con Γ'' puede determinar si un conjunto es o no satisfacible a través de transformaciones que den lugar a menos cláusulas. Las condiciones de parada son:

- Si llego a $\emptyset$, el conjunto sería satisfacible
- Si llego a $\square$ (cláusula vacía), el conjunto sería insatisfacible
- Si llego a ver dos cláusulas pequeñas que corresponden a una cláusula unidad y su negación, el conjunto sería insatisfacible.

Es posible que durante el proceso se pueda partir la fórmula en 2.

- Si se queda en 1, el resultado final se propaga al inicio.

- Si se parte en 2 y uno de ellos es satisfacible, el conjunto inicial es satisfacible.

- Si se parte en 2 y ambos son insatisfacible, el conjunto inicial es insatisfacible.

El algoritmo se basa en tres reglas. Una regla siguiente sólo se puede aplicar cuando sus anteriores no se pueden aplicar.

1 Regla de la cláusula unit λ

Una cláusula unit λ es aquella cláusula con solo un elemento.
Si Σ_λ es insatisfacible, Σ también lo es.

2 Regla del literal puro λ

Un literal puro es un elemento que aparece en todas las cláusulas que aparecen, bien negada, bien sin negar (pero no ambos)
Si Σ_λ es insatisfacible, Σ también lo es.

3 Regla de separación $\lambda - \lambda^c$

Si en el conjunto vemos un literal cualquiera, podemos separar la fórmula en dos fórmulas basadas en λ o λ^c.
Si Σ_λ y Σ_{λ^c} son insatisfacibles, Σ también lo es.

▷ Ejemplo

$\{b \vee c, \neg a \vee b \vee c \vee d, \boxed{\neg e}, a \vee \neg c \vee d, \neg a \vee \neg d,$
$c \vee \neg d, a \vee d, \neg c \vee d\}$

$| \ \lambda_{unit} = \neg e, \ e = 0$

$\{\underline{b} \vee c, \neg a \vee \underline{b} \vee c \vee d, a \vee \neg c \vee d, \neg a \vee \neg d, c \vee \neg d, a \vee d, c \vee d\}$

$| \ \lambda_{puro} = b, \ b = 1$

$\{a \vee \neg c \vee d, \neg a \vee \neg d, c \vee \neg d, a \vee d, c \vee d\}$

$| \ \text{Separamos por } \lambda = a, \ \lambda^c = \neg a$

a = 1 | a = 0

$\{\neg d, c \vee \neg d, c \vee d\}$ | $\{\neg c \vee d, c \vee \neg d, d, c \vee d\}$

$| \ \lambda = \neg d, \ d = 0$ | $| \ \lambda = d, \ d = 1$

$\{c\}$ | $\{c\}$

$| \ \lambda = c, \ c = 1$ | $| \ \lambda = c, \ c = 1$

$\emptyset$ | $\emptyset$

Por ello, Σ es satisfacible en:

$a = 1, \ b = 1, \ c = 1, \ d = 0, \ e = 0$

$a = 0, \ b = 1, \ c = 1, \ d = 1, \ e = 0$

Tautologías y consecuencias lógicas

Poder demostrar que α es una tautología es equivalente a probar $\emptyset \models \alpha$ o $\models \alpha$. Si α tuviera ~~que~~ flechas y demás se clausuraría. Al final, sabremos que es tautología si $\Gamma \cup \{\neg \alpha_n\}$ es insatisfacible.

Método de resolución

Teorema: Sean α, β y γ tres fórmulas en un lenguaje proposicional. Entonces, $\{\alpha \vee \beta, \neg \alpha \vee \gamma\} \models \beta \vee \gamma$

Sean C_1 y C_2 dos cláusulas, y λ un literal que aparece en la cláusula C_1 y λ^c el complementario de esa cláusula anterior en C_2. Una cláusula que sea equivalente a $(C_1 - \lambda) \vee (C_2 - \lambda^c)$ se denomina resolvente de C_1 y C_2

! La resolvente va de 1 en 1 cláusulas.

Demostración de una resolución de C

Es una sucesión de cláusulas ~~donde~~ $C_1, C_2, \dots, C_n$ donde $C_n = C$ y $C_i \in \Gamma$ o C_i es una resolvente de $\{C_1, \dots, C_{i-1}\}$

▷ Ejemplo Deducción de la cláusula $\neg d$

$$\Gamma = \{\neg a \vee b, \neg c \vee \neg d, b \vee \neg c, \neg b \vee c, a \vee b, a \vee c\}$$

$C_1: \neg a \vee b \in \Gamma$

$C_2: \neg a \vee c \in \Gamma$

$C_3: b \vee c$, resolvente de C_1 y C_2

$C_4: \neg b \vee c \in \Gamma$

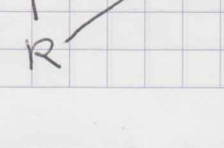
$C_5: c$, resolvente de C_3 y C_4

$C_6: \neg c \vee \neg d \in \Gamma$

$C_7: \neg d$, resolvente de C_5 y C_6

Por ello demostramos que $\Gamma \models d$.

Otra manera de mostrar la deducción podría ser con un árbol de la forma



El ejemplo anterior sería (en forma de árbol):

$$\neg a \vee b \qquad a \vee c$$
$$b \vee c \qquad \neg b \vee c$$
$$c \qquad \neg c \vee \neg d$$
$$d$$

Principio de resolución: Sea Γ un conjunto de cláusulas. Entonces, es insatisfacible si y solo si hay una deducción por resolución de la cláusula vacía.

▷ Ejemplo Demostremos que α es una tautología:

$$\alpha = (a \to (b \to c)) \to (\neg(a \to \neg b) \to c)$$

$$\models (a \to (b \to c)) \to (\neg(a \to \neg b) \to c)$$

$$\Leftrightarrow \{(a \to (b \to c))\} \models \neg(a \to \neg b) \to c$$

$$\{(a \to (b \to c)), \neg(a \to \neg b)\} \models c$$

$$\{(a \to (b \to c)), \neg(a \to \neg b), \neg c\} \text{ insatisfacible}$$

$$\{\neg a \vee \neg b \vee c, a, b, \neg c\} \text{ insatisfacible.}$$

$$\neg a \vee \neg b \vee c \qquad a$$
$$\neg b \vee c \qquad b$$
$$c \qquad \neg c$$
$$\square$$

Por ello es una tautología

~~Método~~ Estrategias de resolución

Si no encontramos la cláusula vacía puede ser que no se pueda encontrar la cláusula vacía; o que se pueda encontrar pero no hemos ido por el camino correcto. Por ello hay ciertas estrategias para buscar ese resolvente, o al menos asegurarse que ~~podemos~~ no se puede hallar.

Estrategia de saturación

Consiste en no hacer demostraciones, sino en extraer resolventes. Pararemos si encontramos la cláusula vacía o si no podemos calcular más resolventes. Al haber 3^n cláusulas con n fórmulas atómicas, el método siempre acaba pero puede ser larguísimo.
Sería una estrategia de resolución mediante fuerza bruta.

Resolución lineal

Una deducción lineal es aquella en la que para crear una nueva resolvente hacemos uso de lo obtenido en etapas inmediatamente anteriores. Es una estrategia completa. Si un conjunto de cláusulas es insatisfacible, entonces hay una deducción lineal de la cláusula vacía.

Estrategia Input

Una deducción es input si al menos una de las dos cláusulas que se usan para calcular cada una de las resolventes pertenece al conjunto Σ

Cláusulas de Horn

Un literal es **positivo** si es una fórmula atómicas, y **negativo** si es la negación de esta.

Una **cláusula** es ~~negativa~~ negativa si todos los literales en ella son negativos.

Una cláusula de Horn es aquella que tiene solo un literal positivo (y los demás negativos)

Un conjunto de cláusulas se denomina conjunto de Horn si tiene exactamente una cláusula negativa y los demás son cláusulas de Horn.

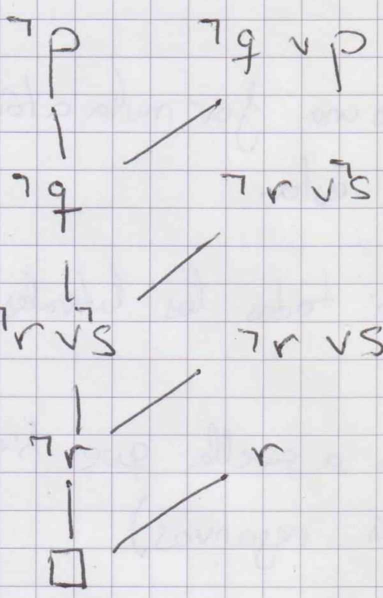
Normalmente, los conjuntos de Horn ~~pueden~~ ~~tienen~~ tienen una deducción de la cláusula vacía mediante resolución lineal input. Eso sí, lo contrario no tiene por qué. Hay resoluciones que no tienen conjuntos de Horn.

▷ Ejemplo Comprueba que es insatisfacible

$$\Sigma = \{\neg q \vee p, \neg r \vee \neg s \vee q, r, \neg p, \neg r \vee s\}$$

Primero veamos si es un conjunto de Horn.

'$\neg q \vee p$', '$\neg r \vee \neg s \vee q$', '$r$' y '$\neg r \vee s$' son cláusulas de Horn. '$\neg p$' es una cláusula negativa. Por ello es un conjunto de Horn. Por ello, podemos ver que habrá una deducción de la cláusula vacía por resolución input.



▷ Ejemplo: "Si apruebo, me dan beca. Si estudio y me ayuda mi amigo Pepe, apruebo. Si me dan beca, me voy de fiesta. Me dice Pepe que si lo invito a comer me ayuda. Lo que hago es ponerme a estudiar y quedar con Pepe para invitarlo a comer. ¿Con seguré irme de fiesta?

Variables

a: Apruebo

b: Me dan beca

e: Estudio

f: Me voy de fiesta

i: Invito a Pepe a comer

p: Pepe me ayuda

Si apruebo me dan beca: $a \to b$

Si estudio y me ayuda Pepe, apruebo: $(e \wedge p) \to a$

Si me dan beca, me voy de fiesta: $b \to f$

Si invito a Pepe a comer, me ayuda: $i \to p$

$a \to b$	$(e \wedge p) \to a$	$b \to f$	$i \to p$
$\neg a \vee b$	$\neg(e \wedge p) \vee a$	$\neg b \vee f$	$\neg i \vee p$
	$\neg e \vee \neg p \vee a$		

Todos son cláusulas de Horn. Si al final implica que me voy de fiesta, es como añadir $\neg f$ al conjunto, siendo así un conjunto de Horn.

"Me puse a estudiar y quedé con Pepe para invitar a comer" se introducen en las cláusulas. Todo queda en

$\{\neg a \vee b, \neg e \vee \neg p \vee a, \neg b \vee f, \neg i \vee p, e, i, \neg f\}$ sea insatisfacible.

$\neg f \qquad \neg b \vee f$

$\neg b \qquad \neg a \vee b$

$\neg a \qquad \neg e \vee \neg p \vee a$

$\neg e \vee \neg p \qquad \neg i \vee p$

$\neg e \vee \neg i \qquad e$

$\neg i \qquad i$

$\square$

▷ Ejemplo $\Sigma = \{\neg a \vee b, a \vee c, \neg c \vee \neg d, \neg b \vee c, b \vee \neg c, d\}$

No es un conjunto de Horn, pero podemos transformarlo en uno si $b' = \neg b$ y $c' = \neg c$

$$\Sigma' = \{\neg a \vee \neg b', a \vee \neg c', c' \vee \neg d, b' \vee \neg c', \neg b' \vee c', d\}$$

Ahora sí, es un conjunto de Horn y podemos usar Σ' para resolverlo de forma lineal-input:

Con Σ'

$\neg a \vee \neg b' \qquad a \vee \neg c'$

$\neg b' \vee \neg c' \qquad b' \vee \neg c'$

$\neg c' \qquad c' \vee \neg d$

$\neg d \qquad d$

$\square$

$\neg b' = b$

$\neg c' = c$

$\Rightarrow$

Con Σ

$\neg a \vee b \qquad a \vee c$

$b \vee c \qquad \neg b \vee c$

$c \qquad \neg c \vee \neg d$

$\neg d \qquad d$

$\square$

5. Lenguajes y lógica de primer orden con igualdad

Introducción

Todo viene a raíz de que la lógica proposicional no es suficiente, ya que hay proposiciones que no llegan a un resultado sin sentido.

Por ejemplo, un silogismo: Ningún fósil puede estar traspasado de amor
en lógica proposicional Las ostras pueden estar traspasadas de amor
se daría $\frac{\alpha \quad \beta}{\gamma}$, cosa Las ostras no son fósiles.

que es válida en su razonamiento, pero se encuentran relaciones que se escapan al ámbito de tal lógica, ya que hay símiles en α y β, que se eliminan y junten lo restante en γ.

Al dividir una proposición, podemos designar elementos que serían objetos o personas. A estos elementos se les llama designadores. Estos designadores pueden ~~conte~~ ser simples, o bien hacerse más complejos conteniendo otros designadores, y estos se denominan functores.

Los functores pueden ser monarios o monádicos, donde usan un designador para poder tener sentido; o binarios o diádicos donde usan dos.

Además de los functores, hay expresiones que junto a un número de designadores, forman un enunciado. Estos se denominan relatores. Estos también pueden ser monarios o binarios, y pueden usar functores.

Si en un enunciado sustituimos un designador por una variable (o varios designadores por variables), el resultado se denomina preenunciado o enunciado abierto.

Ejemplo: El preenunciado de $5+7 \geq 10$ es $x+y \geq 10$

Esas variables serán predesignadores.

Cuantificadores

A veces nos encontramos con expresiones que nos sirven para decir algo de todos los objetos de una clase determinada, o para decir algo sobre algunos objetos de una clase, siendo así que al menos existe un objeto así.

En general, estas expresiones se denominan cuantificadores. Si describen a todos, se denomina cuantificador es universales y se escribe $\forall x$. Si describen a algunos, se denominan cuantificadores existenciales, denotándose como $\exists x$.

Habrá tantos cuantificadores, como mucho, como variables haya.

Lenguaje de primer orden

Es un conjunto de designadores $\mathbb{C}$ (constantes), functores $\mathbb{F}$, relatores $\mathbb{R}$ y ρ, que es una aplicación de $\mathbb{F} \cup \mathbb{R}$ llamada ariedad, que es un número $\mathbb{N}^+$ (natural sin cero)

Si la naturaleza de ariedad de los símbolos es conocida, se identifica el lenguaje $\mathcal{L}$ a $\mathbb{C} \cup \mathbb{F} \cup \mathbb{R}$

Además de los símbolos utilizaremos estos símbolos comunes a todos los lenguajes de primer orden:

$V = \{ v_i : i \in \mathbb{N}^+ \}$, que son las variables

Conectores $= \{ \neg, \vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow, \approx \} \cup \{ \forall x : x \in V \} \cup \{ \exists x : x \in V \}$

A partir de ello podemos considerar el conjunto de los términos, que se denota $Ter(\mathcal{L})$.

Todo símbolo de constante es un término

Toda variable es un término

Si f es un símbolo de función n-ario, y $t_1 \ldots t_n \in Ter(\mathcal{L})$, entonces $f(t_1, \ldots, t_n) \in Ter(\mathcal{L})$

Las variables de un término es una aplicación $Ter(\mathcal{L}) \rightarrow P(V)$ de forma que

$$Var(c) = \emptyset \quad \text{para toda } c \in C$$

$$Var(x) = \{x\} \quad \text{para todo } x \in C$$

$$Var(f(t_1, \ldots, t_n)) = \bigcup_{i \text{ de } 1 \text{ a } n} Var(t_i)$$

Un término cerrado es aquel que $Var(t) = \emptyset$

Fórmulas de un lenguaje

Se definen recursivamente:

toda fórmula atómica es una fórmula

Si φ y ψ son fórmulas, lo son también $\neg\varphi$, $\varphi \vee \psi$, $\varphi \wedge \psi$, $\varphi \rightarrow \psi$, $\varphi \leftrightarrow \psi$

Si φ es una fórmula y x una variable, es una fórmula $\forall x \varphi$ y $\exists x \varphi$.

Se pueden representar como árboles de forma que:

Si el nodo es una fórmula atómica, esta será una hoja

Si un nodo tiene la etiqueta en $\mathbb{C}$, la aridad del símbolo es el nº de hijos del nodo.

Sentencias de un lenguaje

En un preenunciado podemos ver que los cuantificadores tienen un ámbito que correspondería a ver qué ~~hay en~~ está ligada a una variable de un functor.

Una sentencia es un enunciado cuyas variables no son libres de cuantificadores.

Semántica de un lenguaje

La semántica se basa en una estructura del lenguaje.

Una estructura del lenguaje $\mathcal{L}$ es una cuatrupla:

$$\mathcal{E} = (A, \{c^{\varepsilon} : c \in \mathbb{C}\}, \{f^{\varepsilon} : f \in \mathbb{F}\}, \{r^{\varepsilon} : r \in \mathbb{R}\})$$

donde

A es el universo o dominio de la estructura. Dice de qué estamos hablando y da significado a los cuantificadores.

c^{ε} es un símbolo de constante del universo

f^{ε} es una función del universo

r^{ε} es una relación, o sea, una aplicación entre el universo y $\mathbb{Z}_2$ (es decir, que saldrá 0 o 1)

Una asignación en $\mathcal{E}$ es una aplicación $\mathbf{a}: V \to \mathcal{E}$, es decir, una elemento de $Ap(V, \mathcal{E}) = \mathcal{E}^V$

Una variante de una asignación $\mathbf{a}(x/a)$ es una asignación donde

El significado de un término dados $t \in Ter(\mathcal{L})$ $\mathcal{A} \in \mathcal{E}(\mathcal{L})$, es una aplicación $t^{\mathcal{A}}: A^V \to A$ que cumple:

$$c^{\mathcal{A}}(\mathbf{a}) = c^{\mathcal{A}} \quad \text{para todo } c \in \mathcal{C}$$

$$x^{\mathcal{A}}(\mathbf{a}) = \mathbf{a}(x) \quad \text{para todo } x \in V$$

$$f(t_1, t_2, \ldots, t_n)^{\mathcal{A}}(\mathbf{a}) = f^{\mathcal{A}}(t_1^{\mathcal{A}}(\mathbf{a}), t_2^{\mathcal{A}}(\mathbf{a}), \ldots, t_n^{\mathcal{A}}(\mathbf{a}))$$

El conjunto de satisfacibilidad es un conjunto de asignaciones donde ~~el~~ ela ~~estructura~~ significado sea verdadero. Este cumple:

$$(t_1 \approx t_2)^{\mathcal{A}} = \{\mathbf{a} \in A^V : t_1^{\mathcal{A}}(\mathbf{a}) = t_2^{\mathcal{A}}(\mathbf{a})\}$$

$$R(t_1, t_2, \ldots, t_n)^{\mathcal{A}} = \{\mathbf{a} \in A^V : \langle t_1^{\mathcal{A}}(\mathbf{a}), t_2^{\mathcal{A}}(\mathbf{a}), \ldots, t_n^{\mathcal{A}}(\mathbf{a})\rangle \in R^{\mathcal{A}}\}$$

$$(\neg \varphi)^{\mathcal{A}} = A^V \setminus \varphi^{\mathcal{A}}$$

$$(\varphi \vee \psi)^{\mathcal{A}} = \varphi^{\mathcal{A}} \cup$$

Satisfacibilidad

$\mathbf{a}$ satisface a φ en $\mathcal{A}$ si $\mathbf{a} \in \varphi^{\mathcal{A}}$

El conjunto de satisfacibilidad de Γ en $\mathcal{A}$ es $\Gamma^{\mathcal{A}} = \bigcap\{\gamma^{\mathcal{A}} : \gamma \in \Gamma\}$

Γ es satisfacible en $\mathcal{A}$ si $\Gamma^{\mathcal{A}} = \emptyset$

Γ es satisfacible si existe $\mathcal{A}$ tal que Γ es satisfacible en $\mathcal{A}$. Se denota $\mathrm{Sat}(\Gamma)$

Lema de coincidencia

Clasificación semántica de las fórmulas

φ es válida en $\mathcal{A}$ si todas las asignaciones de $\mathcal{A}$ satisfacen a φ. Se dice entonces que $\mathcal{A}$ es modelo de φ.

φ es satisfacible en $\mathcal{A}$ si hay una asignación en $\mathcal{A}$ que satisfaga φ

φ es refutable en $\mathcal{A}$ si hay una asignación en $\mathcal{A}$ que satisfaga φ

φ es 'no válida' o 'falsa' o 'insatisfacible' en $\mathcal{A}$ si ninguna asignación de $\mathcal{A}$ satisface φ

Implicación semántica

Una fórmula φ es consecuencia lógica de Γ si para toda estructura $\mathcal{A}$ se cumple $\Gamma^{\mathcal{A}} \subseteq \varphi^{\mathcal{A}}$. La dificultad ahora consiste en que hay infinitos mundos posibles, ya que hay infinitas estructuras. La única manera de poder valorarlo es con técnicas finitas. Sin embargo, las propiedades de $\models$ son las mismas.

Teorema Es equivalentes $\Gamma \models \varphi$ y $\Gamma \cup \{\varphi\}$ es insatisfacible

Teorema de la Deducción Es equivalente $\Gamma \models \varphi \to \psi$ y $\{\Gamma, \varphi\} \models \psi$

Equivalencia lógica

Dadas dos fórmulas φ y ψ de un lenguaje $\mathcal{L}$. φ y ψ son ~~equivalentemente~~ lógicamente equivalentes si para toda $\mathcal{L}$-estructura $\mathcal{A}$ se cumple $\varphi^{\mathcal{A}} = \psi^{\mathcal{A}}$.

Podemos ver las equivalencias en la chuleta.

Formas normales

Forma prenexa

Es una fórmula con formato

$$C_1 x_1 \dots C_n x_n \varphi$$

Donde C_x es un cuantificador $\forall$ o $\exists$, y φ una fórmula sin cuantificadores. Es decir, esta forma es una fórmula en la que todos los cuantificadores se ponen antes de φ

Para toda fórmula φ existe otra fórmula φ^* en forma prenexa lógicamente equivalente a φ

▷ Ejemplo $\forall_x S(x) \to \exists_z \forall_y R(z,y)$

Hay cuatro maneras de hacerlo

1/ $\cancel{\forall} \exists x (S(x) \to \exists_z \forall_y R(z,y))$

$\exists \cancel{x} \exists_z (S(x) \to \forall_y R(z,y))$

$\exists x \cancel{\exists_z} \forall_y (S(x) \to R(z,y))$

2/ $\exists_z (\exists_x \cancel{\$} S(x) \to \forall_y R(z,y))$

$\exists_z \exists x (S(x) \to \forall_y R(z,y))$

$\exists_z \exists_x \forall_y (S(x) \to R(z,y))$

3/ $\exists_z (\forall_x S(x) \to \forall_y R(z,y))$

$\exists_z \forall_y (\forall_x S(x) \to R(z,y))$

$\exists_z \forall_y \exists_{\cancel{x}} (S(x) \to R(z,y))$

4/ $\forall x S(x) \to \exists_x \forall_y R(x,y)$

$\exists x (S(x) \to \forall_y R(x,y))$

$\exists_x \forall_y (S(x) \to R(x,y))$

! Dado un conjunto de fórmulas Γ, y considerando Γ^* al hacer la forma normal prenexa de Γ^*, es Γ insatisfacible si y solo si Γ^* es insatisfacible

Forma normal de Skolem

Es una fórmula de la forma $\forall x_1 \ldots \forall x_n \cancel{\phi} \phi$, es decir, sin cuantificadores existenciales.

Si ~~ten~~ una formula en forma normal prenexa hay cuantificadores existenciales:

- Caso 1: Si no hay cuantificadores universales antes, se cambia la variable por una constante que no esté ya en la formula
- Caso 2: Si los hay se hace una función en base a los cuantificadores universales que le preceden.

Al convertir una fórmula de forma normal prenexa a forma normal de Skolem, la satisfacibilidad se mantiene

Ejemplos

$\exists x \forall y (\neg S(x) \vee R(x,y))$

↓ Caso 1. Constantes

$\forall y (\neg S(a) \vee R(a,y))$

$\forall x \exists z (R(x,y) \wedge \neg R(x,z))$

↓ Caso 2. Funciones

$\forall x (R(x,y) \wedge \neg R(x, f(x)))$

$\forall x \exists y \forall z \exists u (R(x,y,u) \vee S(y, f(z)))$

1 ↓ $\forall x \forall z \exists u (R(x,g(x),u) \vee S(g(x), f(z)))$

1 ↓ $\forall x \forall z (R(x,g(x),h(x,z)) \vee S(g(x), f(z)))$

Forma clausulada

Literal Forma atómica o su negación

Cierre universal Literal precedido por los cuantificadores universales de sus variables.

Cláusula Cierre universal de una disyunción de literales.

Una conjunción de cláusulas se denomina forma clausulada.

Al pasar una fórmula de forma de Skolem a forma clausulada, la satisfacibilidad se mantiene.