Семинар от 04.09.2021

Куликов А.В.

Сентябрь 2021

План

- Дисконтирование в дискретном времени
- Дисконтирование в непрерывном времени
- Процентные ставки

Безрисковая процентная ставка

r — **безрисковая процентная ставка в дискретном времени (risk-free rate)**, т.е. % ставка, под которую банк безрисково дает ссуду другому банку.
При вложении суммы денег x на банковский счет в момент времени 0, в момент времени n вкладчик в любом случае получает сумму $(1 + r)^n x$.
Факторы, влияющие на процентную ставку:

- продуктивность производства.
- разброс в ожидаемой продуктивности.
- временные предпочтения людей.
- влияние рискованности валюты.

NB. Банковская ставка — безрисковая $\pm$ премия за риск.

Различные способы начисления процентной ставки с капитализацией

- ежегодно — $(1+r)^{[t]}x$;

Различные способы начисления процентной ставки с капитализацией

- ежегодно — $(1+r)^{[t]}x$;
- ежеквартально — $(1+r/4)^{[4t]}x$;

Различные способы начисления процентной ставки с капитализацией

- ежегодно — $(1+r)^{[t]}x$;
- ежеквартально — $(1+r/4)^{[4t]}x$;
- ежемесячно — $(1+r/12)^{[12t]}x$;

Различные способы начисления процентной ставки с капитализацией

- ежегодно — $(1+r)^{[t]}x$;
- ежеквартально — $(1+r/4)^{[4t]}x$;
- ежемесячно — $(1+r/12)^{[12t]}x$;
- ежедневно — $(1+r/365)^{[365t]}x$;

Различные способы начисления процентной ставки с капитализацией

- ежегодно — $(1+r)^{[t]}x$;
- ежеквартально — $(1+r/4)^{[4t]}x$;
- ежемесячно — $(1+r/12)^{[12t]}x$;
- ежедневно — $(1+r/365)^{[365t]}x$;
- непрерывно — $(1+r/n)^{[nt]}x \to e^{rt}x$.

Реальная годовая процентная ставка при начислении процентной ставки с капитализацией

- ежегодно — $r(10\%)$;
- ежеквартально — $(1 + r/4)^4 - 1(10,38\%)$;
- ежемесячно — $(1 + r/12)^{12} - 1(10,47\%)$;
- ежедневно — $(1 + r/365)^{365} - 1(10,516\%)$;
- непрерывно — $e^r - 1(10,517\%)$.

Дисконтированная выплата — определяется как

$$\frac{P}{(1+r)^n},$$

где P — размер выплаты, n — момент выплаты.
Чистая дисконтированная стоимость контракта определяется как

$$NPV = \sum_{n=1}^{N} \frac{P_{t_n}}{(1+r)^{t_n}},$$

где P_{t_n} — размер выплаты по контракту в момент времени t_n.
Внутренняя норма доходности определяется как

$$IRR : \sum_{n=1}^{N} \frac{P_n}{(1+IRR)^n} = 0.$$

где P_n — размер выплаты по контракту в момент времени n.

NPV

Период окупаемости проекта определяется как

$$PP = \min\{k : \sum_{n=1}^{k} \frac{P_n}{(1+r)^n} \geq 0\},$$

Аннуитет (annuity) — контракт, выплачивающий своему владельцу одинаковую сумму денег x в моменты времени $1, 2, \ldots$.

$$NPV = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{(1+r)^n} = \frac{x}{r}.$$

Реальная процентная ставка

Замечание. Пусть I — *темпы инфляции* (inflation rate), т.е. сумма x в момент времени 0 имеет ту же покупательную стоимость, что и сумма $(1+I)^n x$ в момент времени n.
Тогда **реальная процентная ставка (real interest rate)** определяется следующим образом:

$$R = \frac{1+r}{1+I} - 1.$$

Выплаты по кредитам

Пусть кредит на сумму x взят на n месяцев с помесячным начислением процентов исходя из годовой ставки r Тогда реальная процентная ставка по кредиту $(1 + r/12)^{12} - 1$. Погашение может идти следующими вариантами

- аннуитентный (каждый месяц одна сумма);
- дифференцированный (каждый месяц платятся проценты и одинаковая часть по кредиту)

Выплаты будут выглядеть следующим образом

Выплаты по кредитам

Пусть кредит на сумму x взят на n месяцев с помесячным начислением процентов исходя из годовой ставки r Тогда реальная процентная ставка по кредиту $(1+r/12)^{12}-1$. Погашение может идти следующими вариантами

- аннуитентный (каждый месяц одна сумма);
- дифференцированный (каждый месяц платятся проценты и одинаковая часть по кредиту)

Выплаты будут выглядеть следующим образом

- $y_1 = \cdots = y_n = x\frac{r/12}{(1-\frac{1}{(1+r/12)^n})}$, т.к.

$$y_1 \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{(1+r/12)^i} = x.$$

Выплаты по кредитам

Пусть кредит на сумму x взят на n месяцев с помесячным начислением процентов исходя из годовой ставки r Тогда реальная процентная ставка по кредиту $(1 + r/12)^{12} - 1$. Погашение может идти следующими вариантами

- аннуитентный (каждый месяц одна сумма);
- дифференцированный (каждый месяц платятся проценты и одинаковая часть по кредиту)

Выплаты будут выглядеть следующим образом

- $y_1 = \cdots = y_n = x\frac{r/12}{(1-\frac{1}{(1+r/12)^n})}$, т.к.

$$y_1 \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{(1 + r/12)^i} = x.$$

- $z_i = \frac{x}{n} + x\frac{r}{12}\frac{n-i+1}{n}$.

Рыночная норма капитализации

Пусть k — **рыночная норма капитализации (market capitalization rate)** области экономики в дискретном времени, т.е. при вложении суммы денег x в данную область экономики в момент времени 0, в момент времени n вкладчик получает случайную сумму X такую, что $\mathsf{E}X = (1+k)^n x$.

Практический смысл: При инвестировании x в момент 0 в эту область экономики в момент n мы получим сумму денег X, где X — случайная величина такая, что $\mathsf{E}X = (1+k)^n x$.

Факторы, влияющие на норму капитализации ставку, следующие:

- процентная ставка (r).
- влияние рискованности данной области экономики.

NPV

Чистая дисконтированная стоимость инвестиционного проекта из данной области экономики определяется как

$$NPV = \sum_{n=1}^{N} \frac{\mathrm{E}P_{t_n}}{(1+k)^{t_n}}$$

Рыночная норма капитализации

Пусть k — **рыночная норма капитализации (market capitalization rate)** области экономики в дискретном времени, т.е. при вложении суммы денег x в данную область экономики в момент времени 0, в момент времени n вкладчик получает случайную сумму X такую, что $\mathrm{E}X = (1+k)^n x$.

Практический смысл: При инвестировании x в момент 0 в эту область экономики в момент n мы получим сумму денег X, где X — случайная величина такая, что $\mathrm{E}X = (1+k)^n x$.

Факторы, влияющие на норму капитализации ставку, следующие:

- процентная ставка (r).
- влияние рискованности данной области экономики.

NPV

Чистая дисконтированная стоимость инвестиционного проекта из данной области экономики определяется как

$$NPV = \sum_{n=1}^{N} \frac{\mathrm{E}P_{t_n}}{(1+k)^{t_n}}$$

Задачи IRR, NPV

1. Был приведен пример проекта с отсутствующей IRR.
Если все $\mathrm{E}P_n \geq 0, \exists k : \mathrm{E}P_k > 0$, то $\forall r NPV(r) > 0$, а значит не существует IRR

2. Был приведен пример проекта с неединственной IRR.
Пусть $\mathrm{E}P_1 = 6, \mathrm{E}P_2 = -5, \mathrm{E}P_3 = 1$. Тогда

$$\frac{6}{1+IRR} - \frac{5}{(1+IRR)^2} + \frac{1}{(1+IRR)^3} = 0, \frac{1}{1+IRR} = 2 \text{ или } 3.$$

$$IRR = -50\% \text{ или } -\frac{2}{3}.$$

Задачи на дом

1. Задачи 11 и 30 из job interview. Размещено в lms.
2. Пусть проект сначала затратный, а потом генерирует прибыль, те.

$$\exists i : \mathrm{E}P_k \leq 0, k \leq i, \mathrm{E}P_k \geq 0, k > i.$$

$$\exists k \leq i : \mathrm{E}P_k < 0, \exists k > i, \mathrm{E}P_k > 0.$$

Доказать, что

- $\exists ! IRR$;
- $NPV > 0 \leftrightarrow IRR > k$;
- $NPV > 0 \leftrightarrow PP < \infty$.

Спасибо за внимание