НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

Высшая школа бизнеса
Департамент бизнес-информатики

АНАЛИЗ И ПРОГНОЗИРОВАНИЕ НЕОДНОРОДНЫХ ВРЕМЕННЫХ РЯДОВ

Москва, 2022

Меры раннего предупреждения для монофрактальных временных рядов

Стационарные ряды
Метод нормированного размаха (Hurst’s Rescaled-Range Analysis, R/S analysis)

Вход:
$\{\xi_i, i = \overline{0, N}\}$ – наблюдаемый дискретный временной ряд

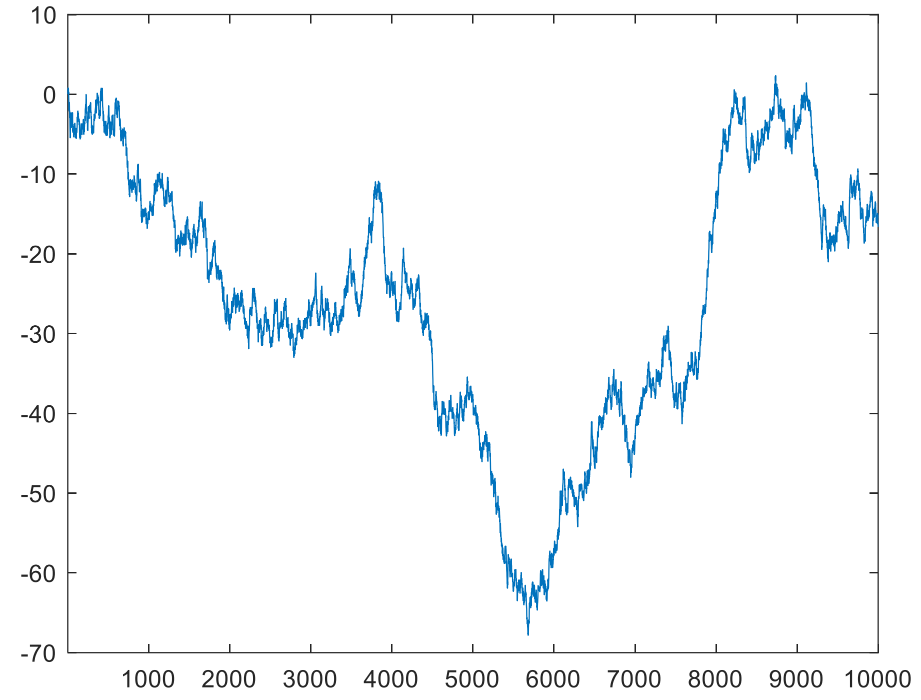
Выход:
H – показатель Херста временного ряда ξ_i

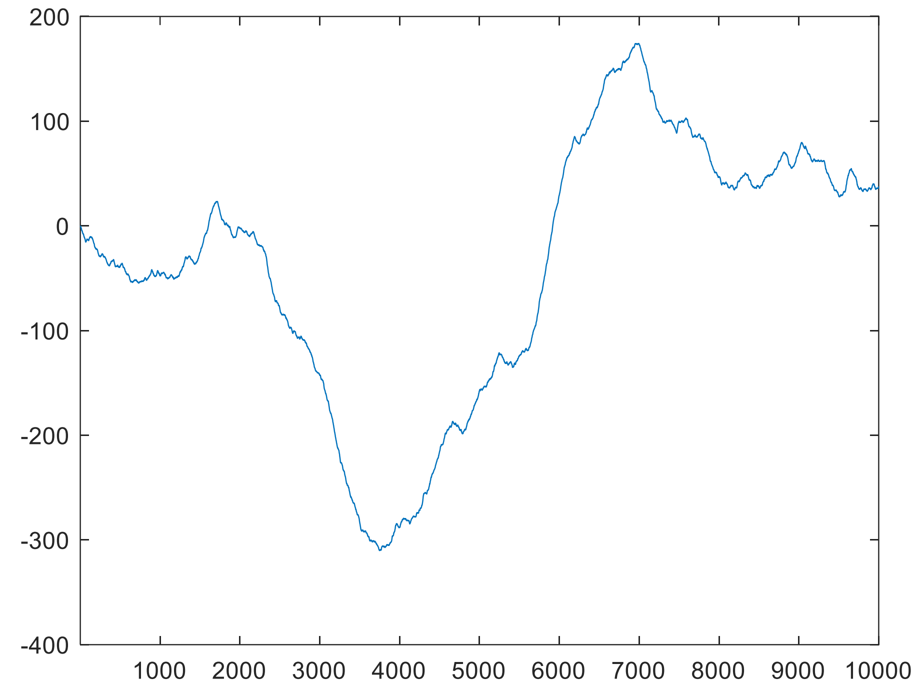
- Если $H = 0.5$ (например, процесс Винера), то ξ_i – временной ряд с нулевой персистентностью (поведение ξ_i на любом интервале не зависит от его поведения на предшествующем интервале)
- Если $H \in (0.5,1)$, то ξ_i – персистентный временной ряд (поведение ξ_i на некотором интервале скорее всего сохранится на следующем интервале)
- Если $H \in (0,0.5)$, то ξ_i – антиперсистентный временной ряд (поведение ξ_i на некотором интервале скорее всего изменится на обратное на следующем интервале)

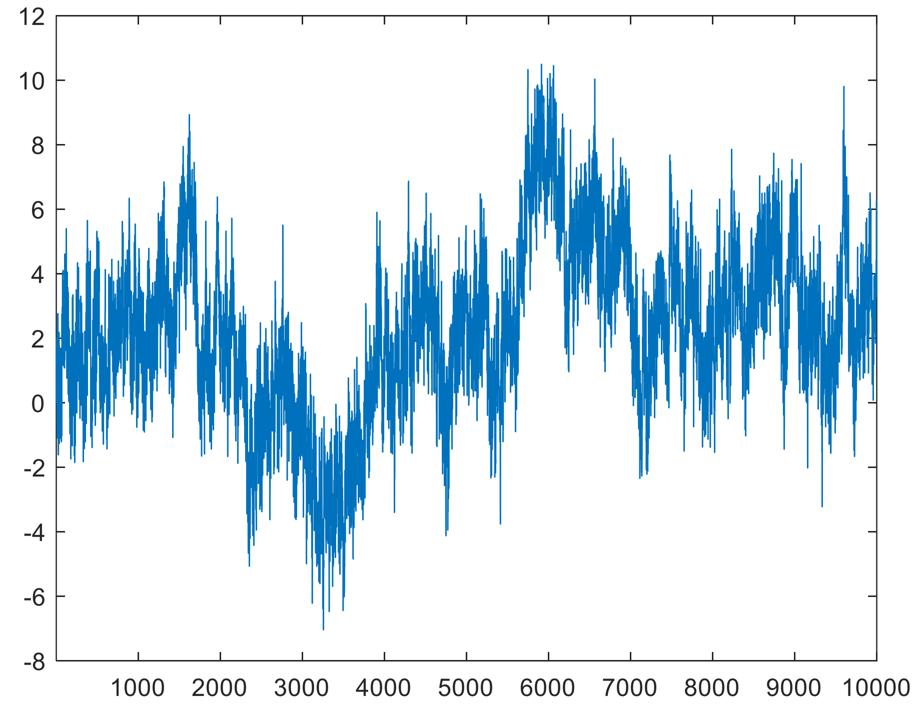
Теорема 1. Пусть функция ξ_t описывает фрактальное броуновское движение (fBm) с параметром $H \in (0.5,1)$. Тогда для показателя α степенного закона для автокорреляционной функции $c_t(\tau) \propto \tau^{-\alpha}\big(\tau \to \infty, \alpha \in (0,1)\big)$ справедливо соотношение

$$\alpha = 2 - 2H$$

Вывод: для персистентного ξ_t «длинна памяти» определяется единственной мерой – показателем Херста, который дает косвенную оценку «длины памяти»


fBm с $H = 0.5$


fBm с $H = 0.9$


fBm с $H = 0.1$

Меры раннего предупреждения для монофрактальных временных рядов

Стационарные ряды
Метод нормированного размаха (Hurst's Rescaled-Range Analysis, R/S analysis)

Шаг 1. Для исходного временного ряда ξ_i строится временной ряд, приведенный к среднему μ_N по всей длине ряда T:

$$\xi_i \to \tilde{\xi}_i \equiv \xi_i - \mu_T$$

Шаг 2. $\tilde{\xi}_i$ разбивается на смежные непересекающиеся сегменты $\nu = 0,1,\dots,N_{s-1}$, длиной s (масштаб времени) каждый ($N_s = \mathrm{int}(N/s)$ – общее число сегментов разбиения)

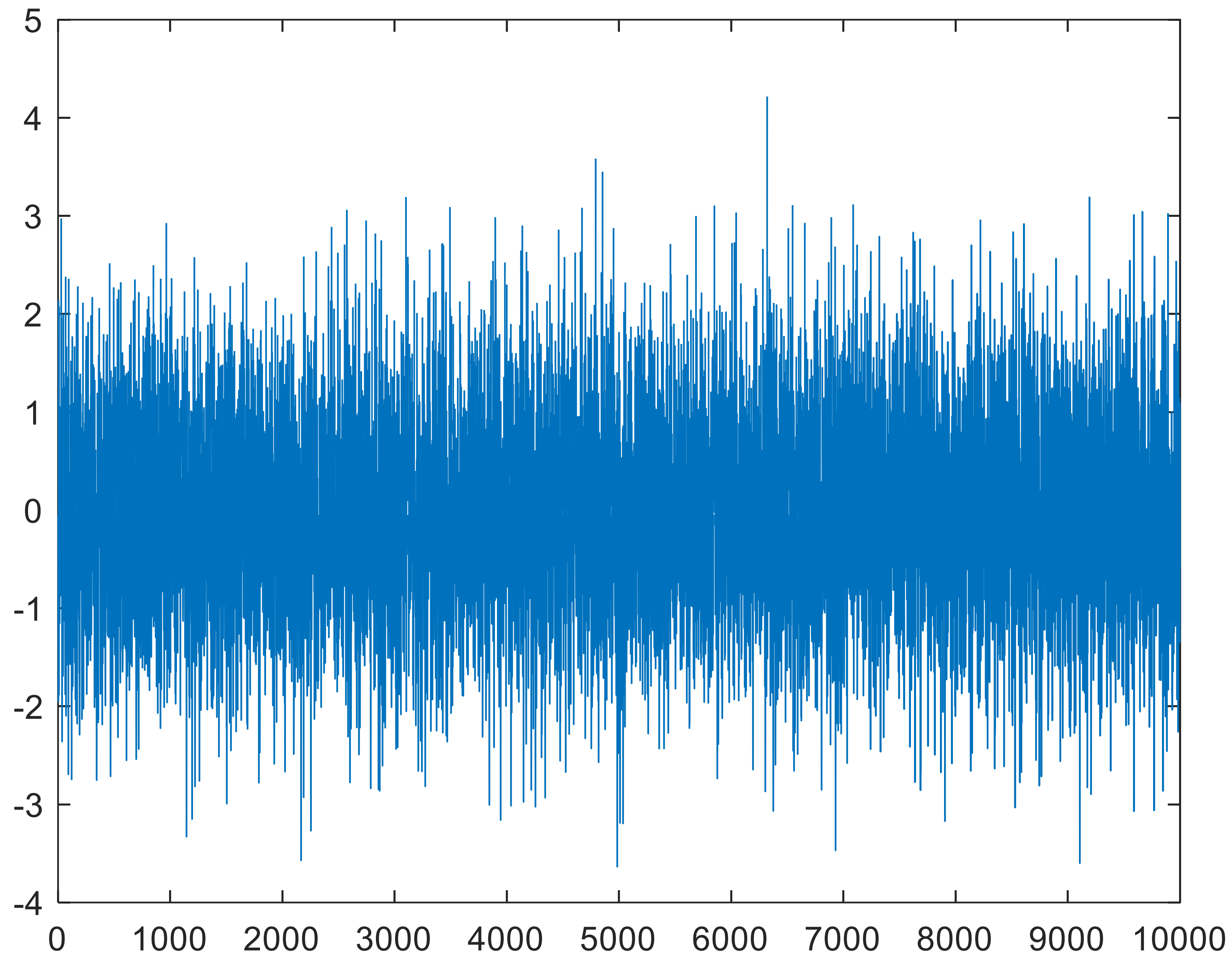
Шаг 3. Рассчитывается ***профиль*** для каждого сегмента ν: отклонение от среднего $\langle\tilde{\xi}^\nu\rangle$ для каждого сегмента ν, включающего j значений ряда

$$Y_j^\nu = \sum_{i=1}^{j}\left(\tilde{\xi}_i^\nu - \langle\tilde{\xi}^\nu\rangle\right)$$

Шаг 4. Для каждого сегмента ν рассчитываются размах и стандартное отклонение:

$$R_s^\nu = \max_j Y_j^\nu - \min_j Y_j^\nu$$

$$S_s^\nu = \sqrt{\frac{1}{s}\sum_{i=1}^{j}\left(\tilde{\xi}_i^\nu - \langle\tilde{\xi}^\nu\rangle\right)^2}$$



Временной ряд $\tilde{\xi}_i \equiv \xi_i - \mu_T$

Меры раннего предупреждения для монофрактальных временных рядов

Стационарные ряды
Метод нормированного размаха (Hurst's Rescaled-Range Analysis, R/S analysis)

Шаг 1. Для исходного временного ряда ξ_i строится временной ряд, приведенный к среднему μ_N по всей длине ряда T:

$$\xi_i \to \tilde{\xi}_i \equiv \xi_i - \mu_T$$

Шаг 2. $\tilde{\xi}_i$ разбивается на смежные непересекающиеся сегменты $\nu = 0,1,\dots,N_{s-1}$, длиной s (масштаб времени) каждый ($N_s = \mathrm{int}(N/s)$ – общее число сегментов разбиения)

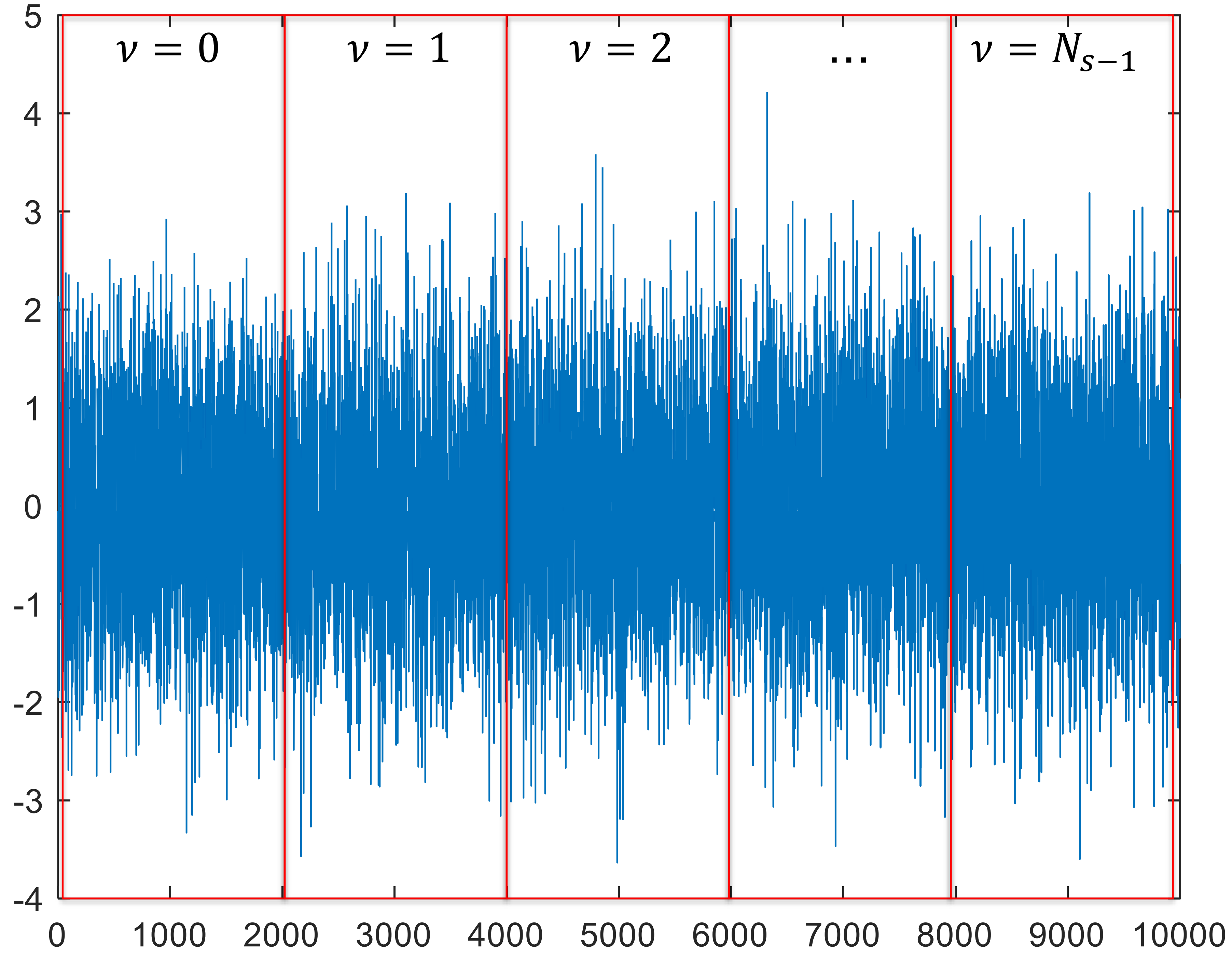
Шаг 3. Рассчитывается ***профиль*** для каждого сегмента ν: отклонение от среднего $\langle\tilde{\xi}^\nu\rangle$ для каждого сегмента ν, включающего j значений ряда

$$Y_j^\nu = \sum_{i=1}^{j}\left(\tilde{\xi}_i^\nu - \langle\tilde{\xi}^\nu\rangle\right)$$

Шаг 4. Для каждого сегмента ν рассчитываются размах и стандартное отклонение:

$$R_s^\nu = \max_j Y_j^\nu - \min_j Y_j^\nu$$

$$S_s^\nu = \sqrt{\frac{1}{s}\sum_{i=1}^{j}\left(\tilde{\xi}_i^\nu - \langle\tilde{\xi}^\nu\rangle\right)^2}$$



Временной ряд $\tilde{\xi}_i \equiv \xi_i - \mu_T$

Меры раннего предупреждения для монофрактальных временных рядов

Стационарные ряды
Метод нормированного размаха (Hurst's Rescaled-Range Analysis, R/S analysis)

Шаг 5. Усреднением по сегментам, рассчитывается ***флуктуационная функция***

$$F_{RS} = \frac{1}{N_s} \sum_{\nu=0}^{N_s-1} \frac{R_s^\nu}{S_s^\nu}$$

Шаг 6. Увеличивается s и повторяются шаги 2–5

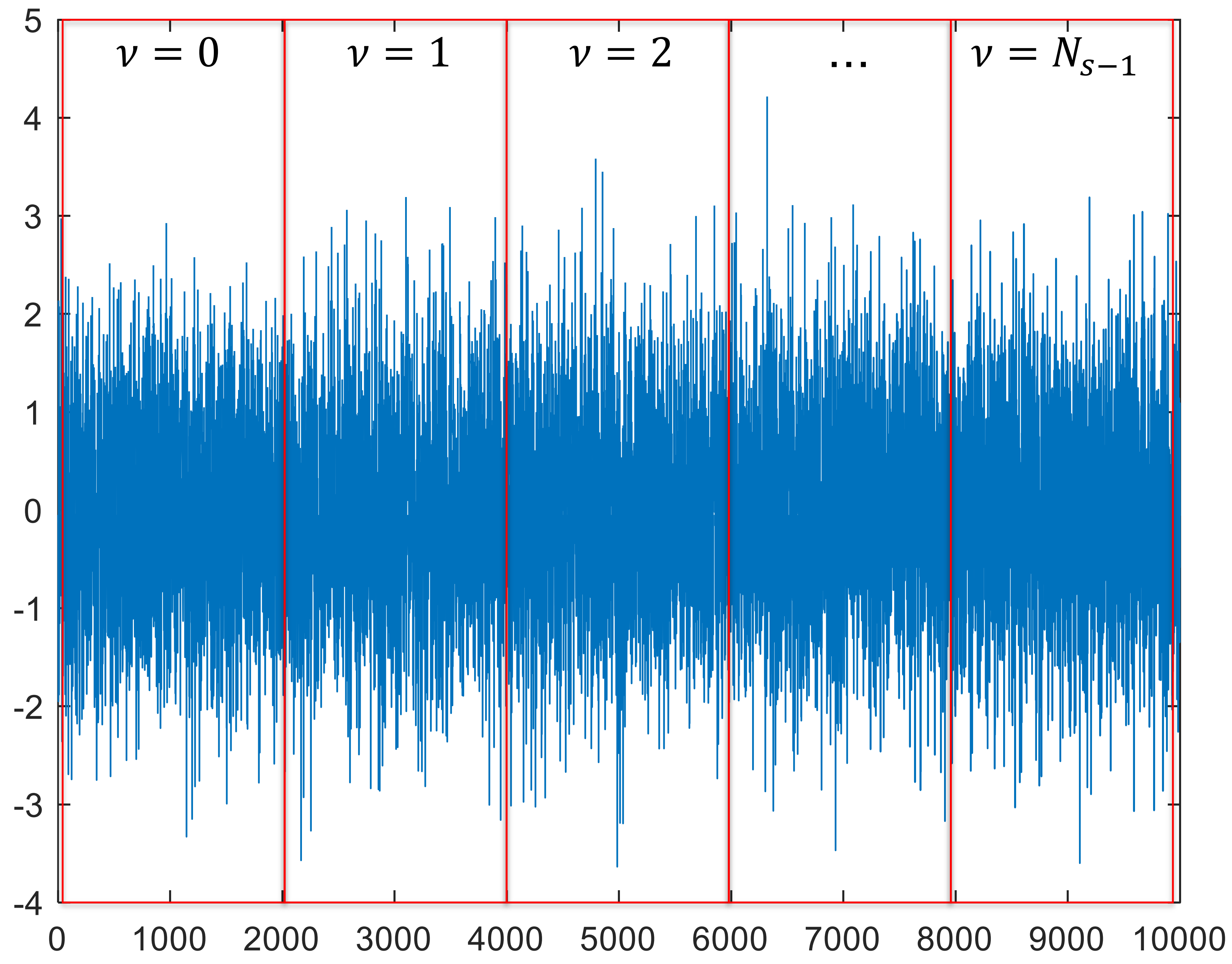
Шаг 7. Если для всех временных масштабов s выполняется скейлинговое соотношение

$$F_{RS} \propto s^H$$

то H – показатель Херста временного ряда ξ_i

$$\log F_{RS} = \hat{\alpha}_0 + \widehat{H} \log s$$

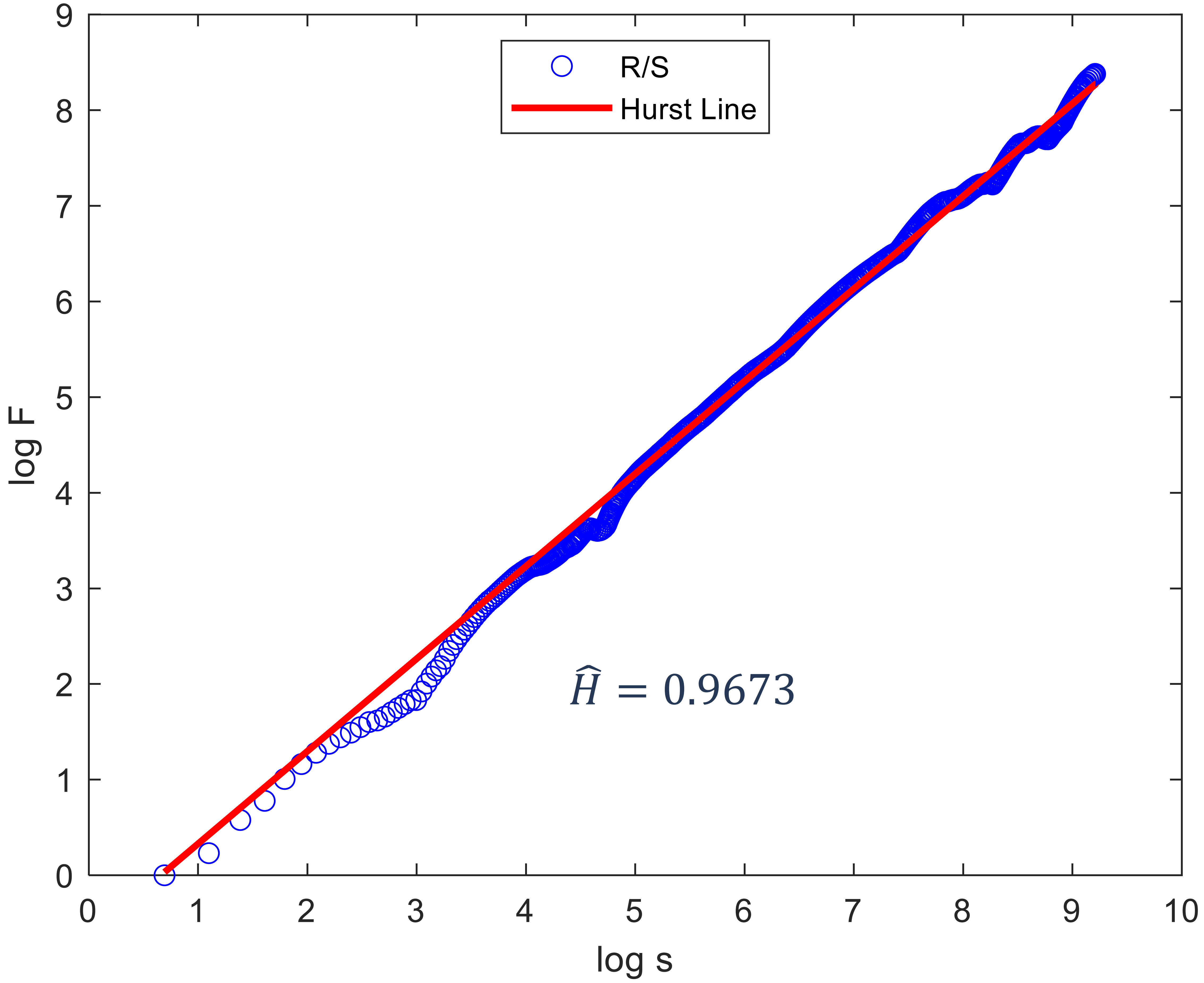
$\widehat{H}$ – статистическая (выборочная) оценка показателя Херста



Временной ряд $\tilde{\xi}_i \equiv \xi_i - \mu_T$

Меры раннего предупреждения для монофрактальных временных рядов

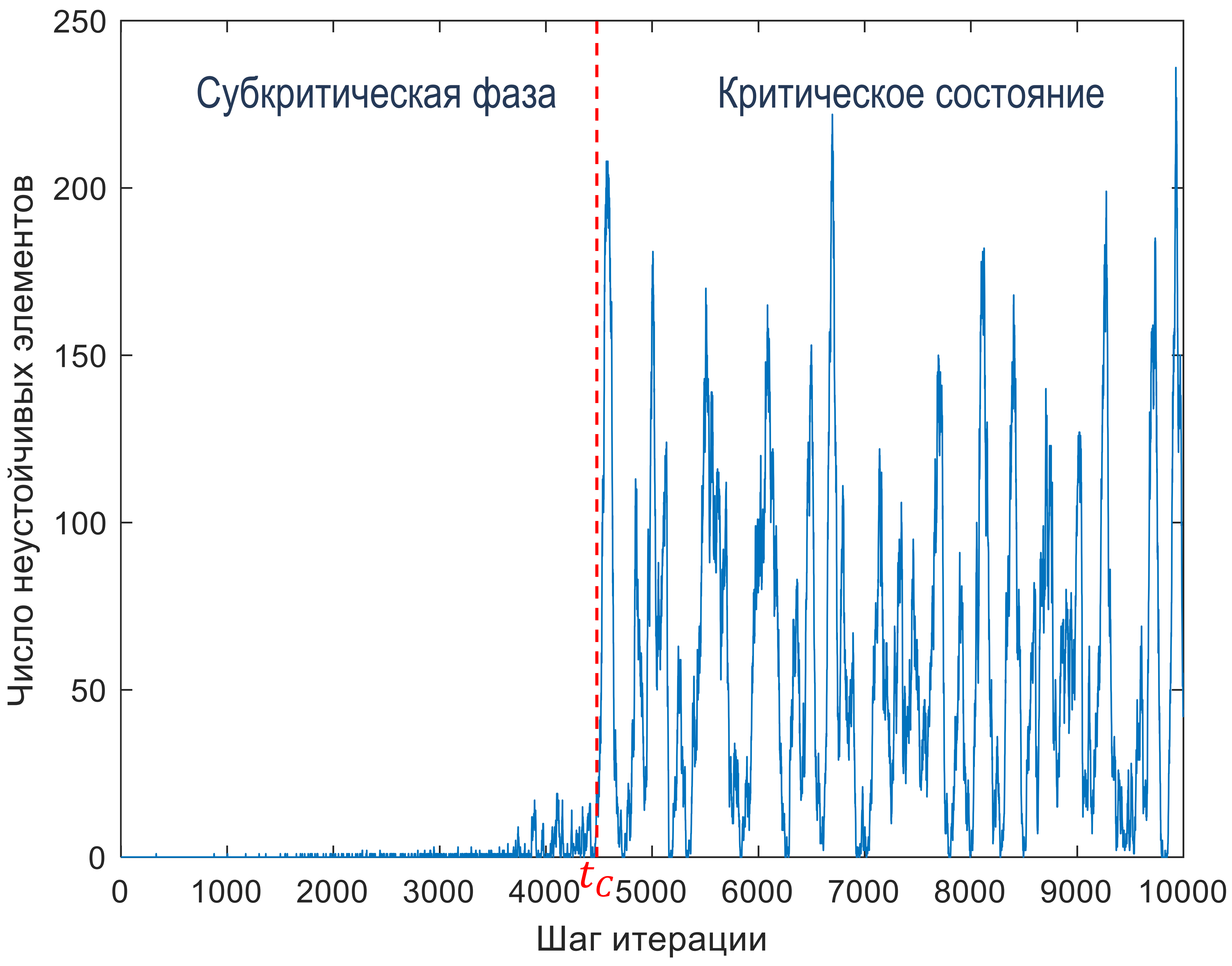
Стационарные ряды
Метод нормированного размаха (Hurst's Rescaled-Range Analysis, R/S analysis)



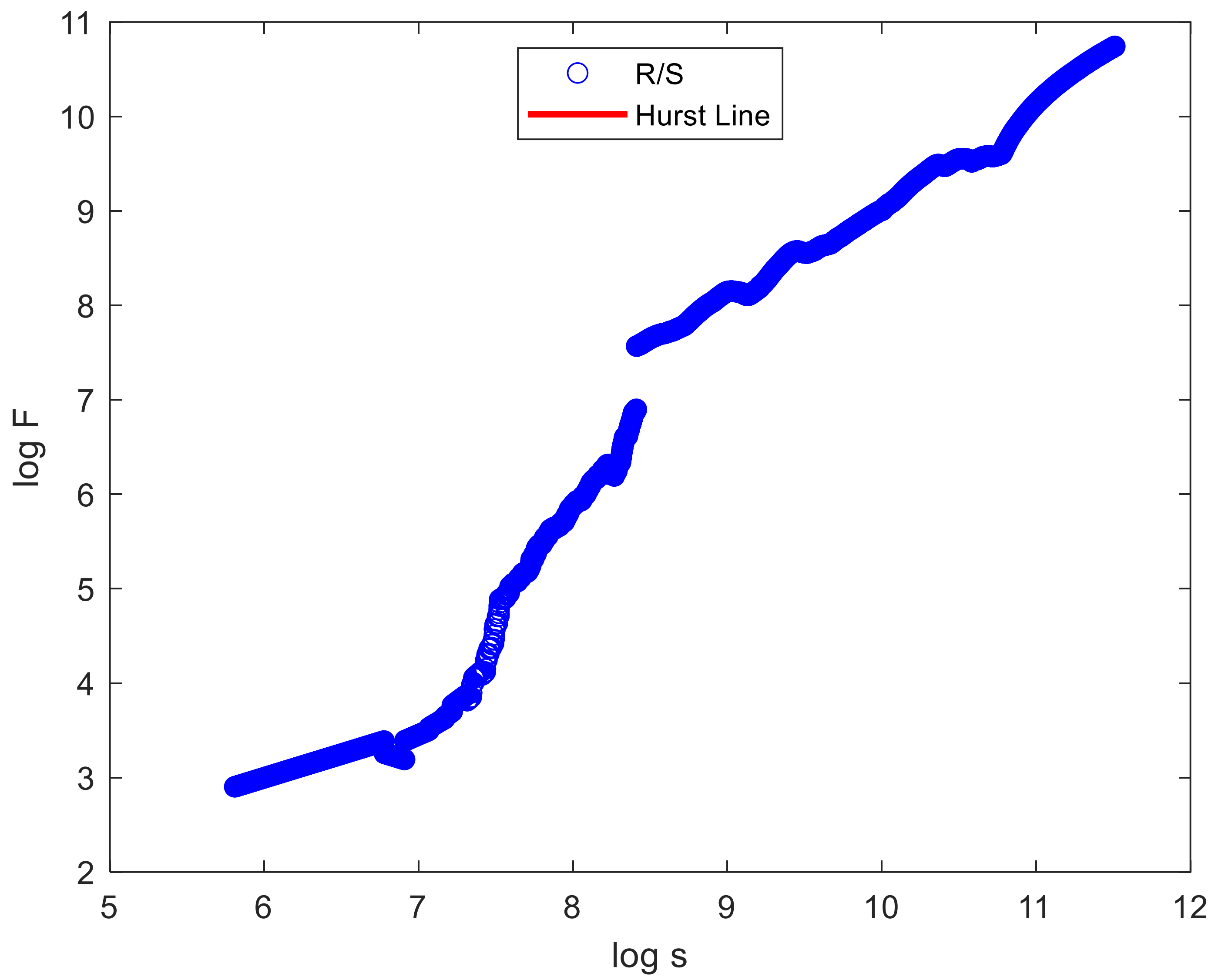
Скейлинговое отношение в двойном логарифмическом масштабе для одной реализации fBm ($H = 0.9$)

Меры раннего предупреждения для монофрактальных временных рядов

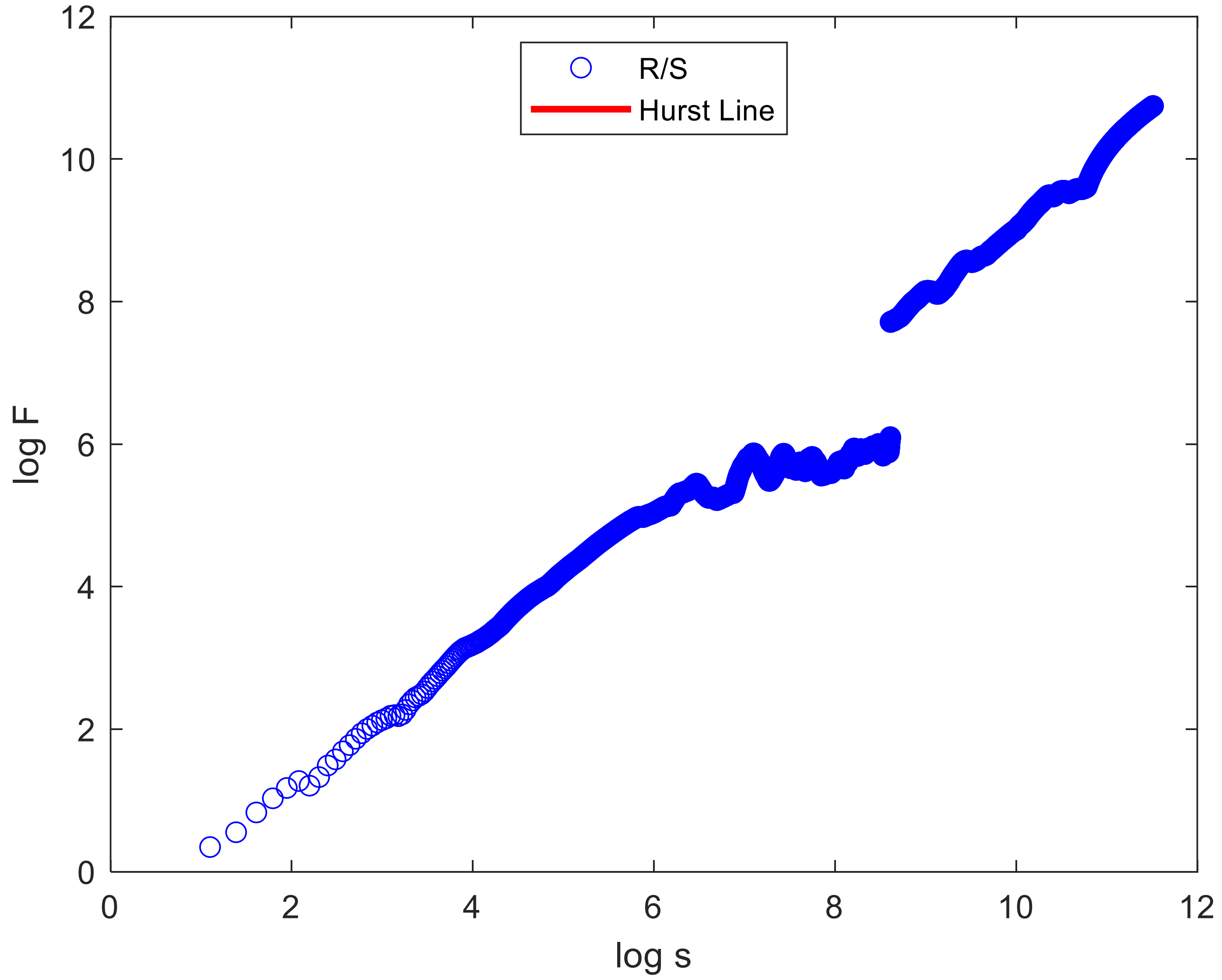
Стационарные ряды
Метод нормированного размаха (Hurst's Rescaled-Range Analysis, R/S analysis)



Временной ряд, изображающий критический переход первого рода



Отсутствие скейлинга для субкритической фазы

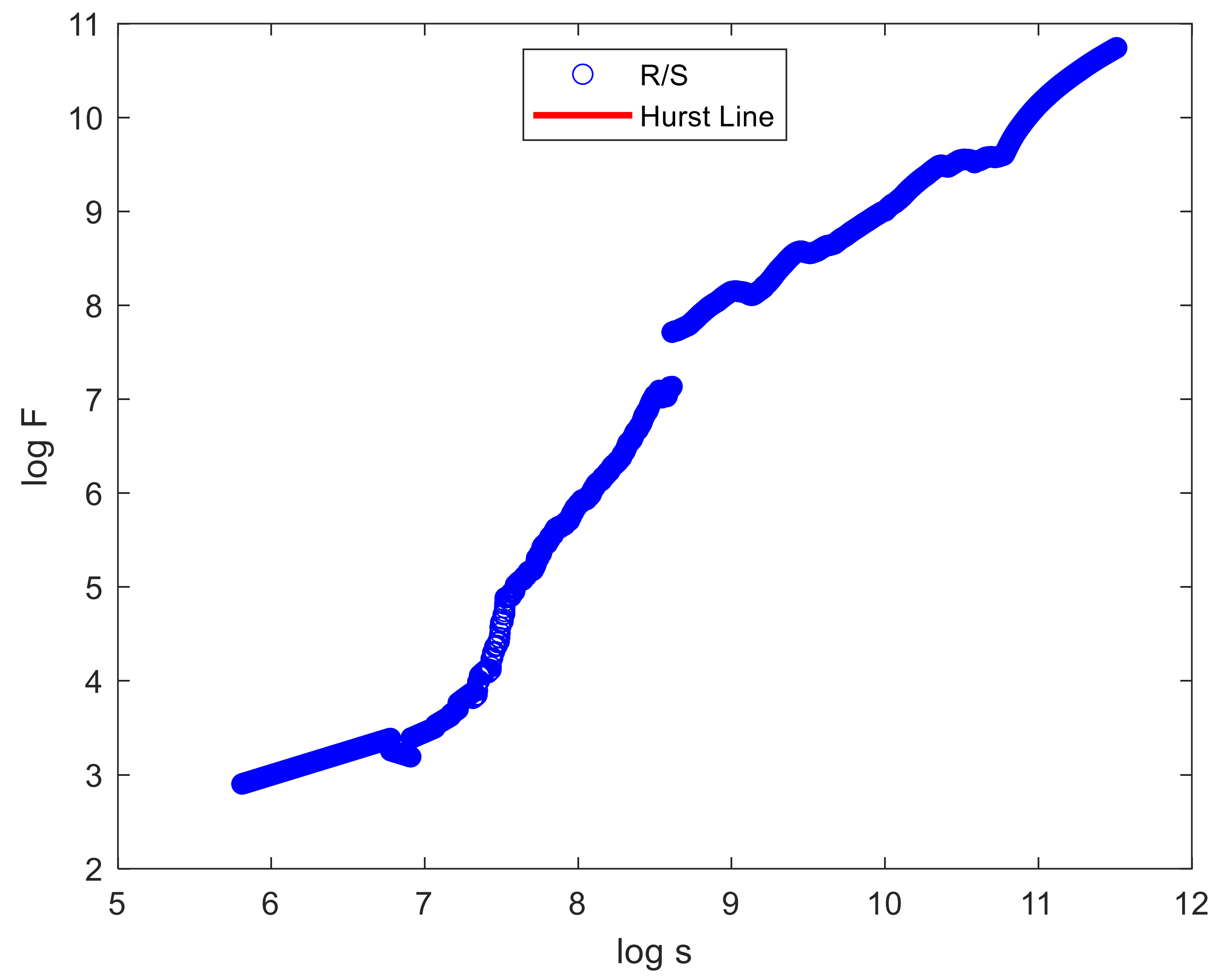


Отсутствие скейлинга для критического состояния

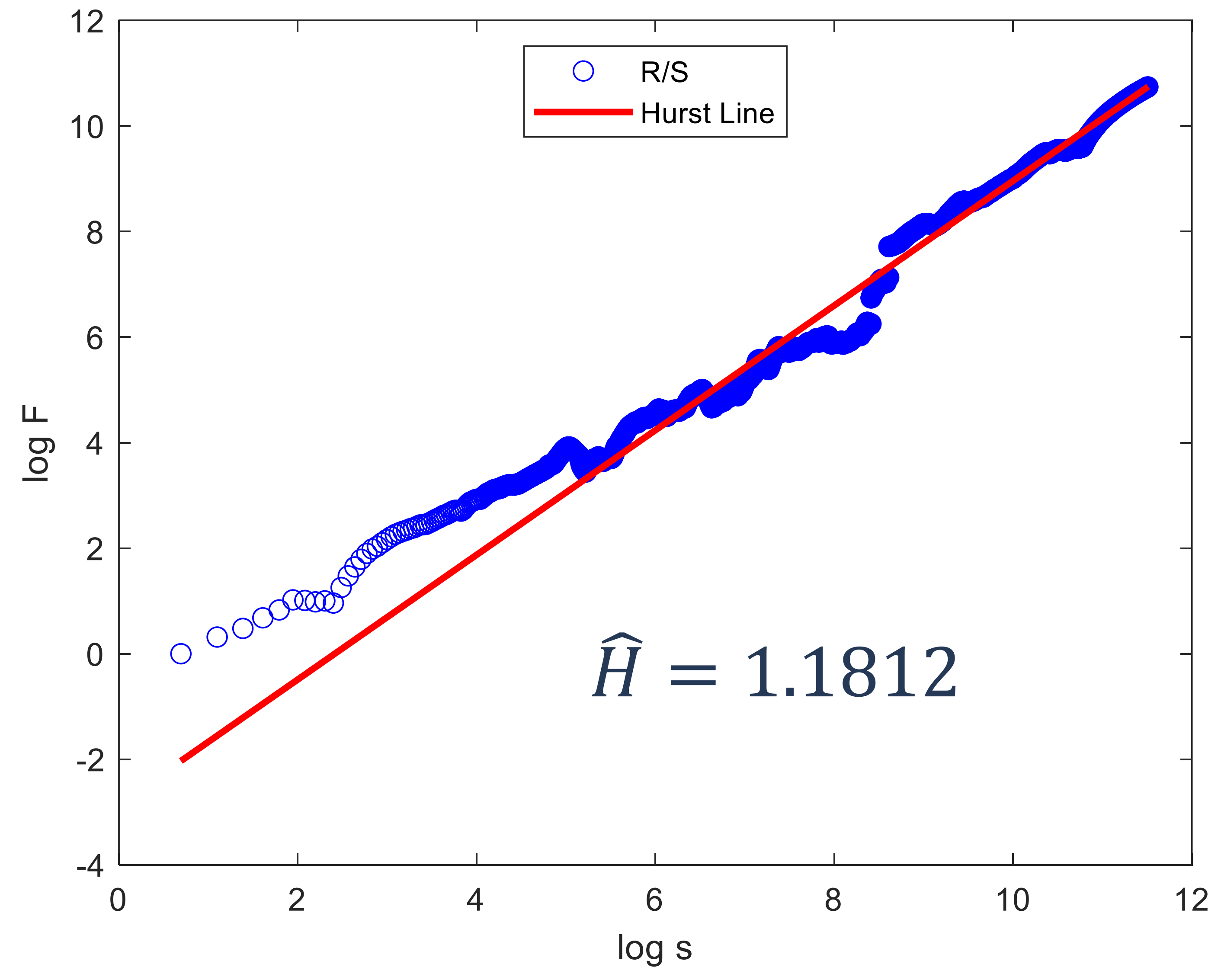
Меры раннего предупреждения для монофрактальных временных рядов

Стационарные ряды
Метод нормированного размаха (Hurst's Rescaled-Range Analysis, R/S analysis)

Временной ряд, изображающий критический переход второго рода



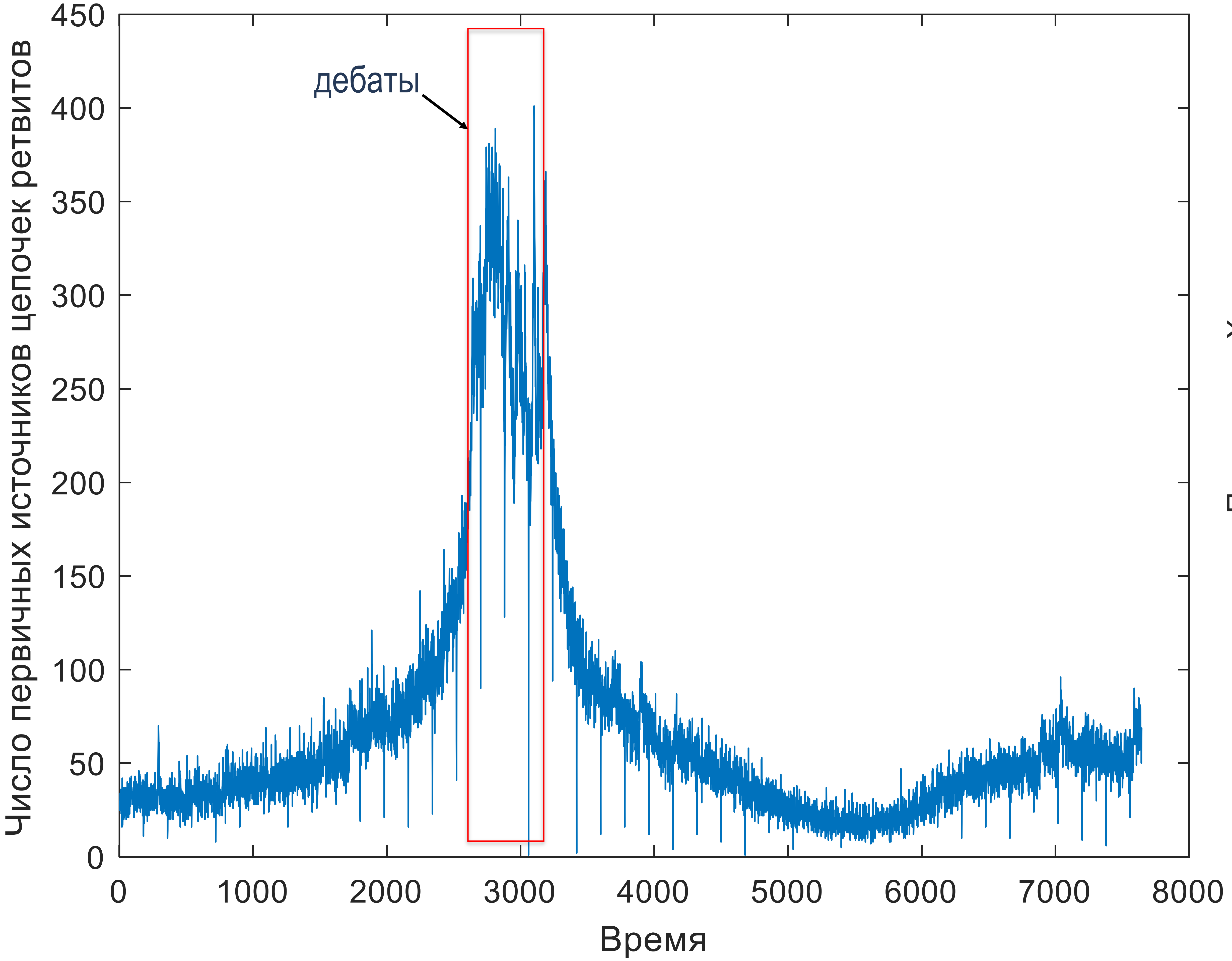
Отсутствие скейлинга для субкритической фазы



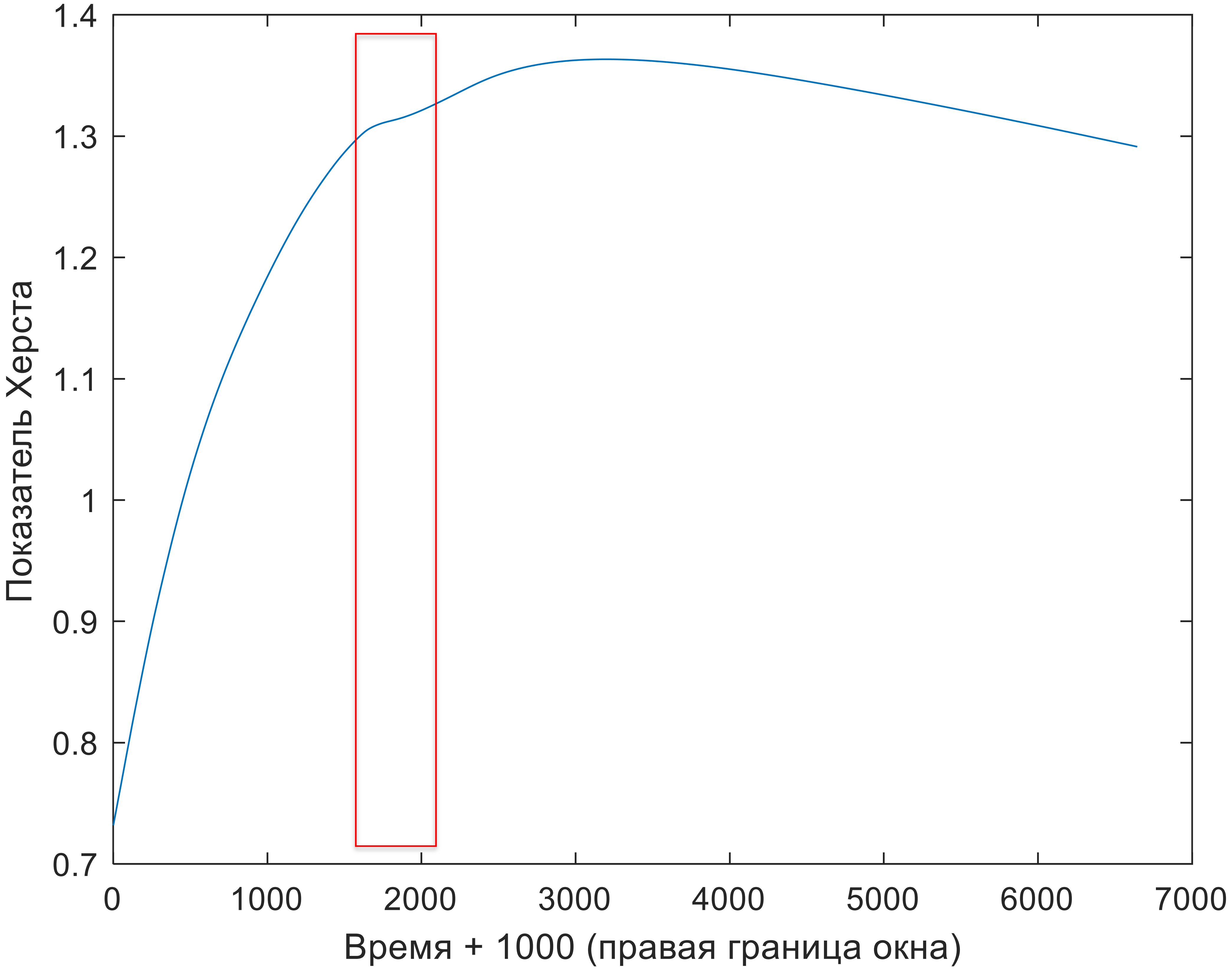
Скейлинговое соотношение для критического состояния

Меры раннего предупреждения для монофрактальных временных рядов

Стационарные ряды
Метод нормированного размаха (Hurst's Rescaled-Range Analysis, R/S analysis)



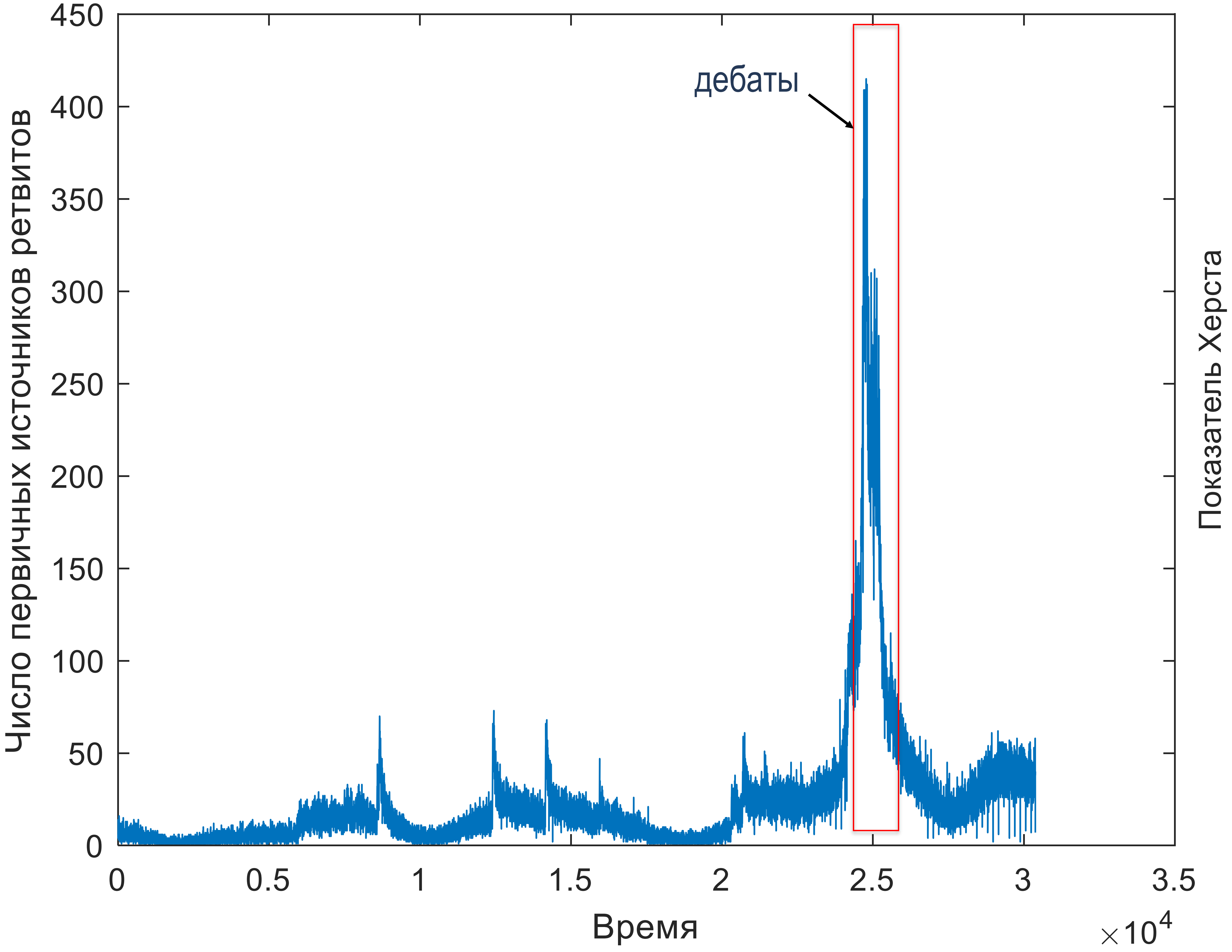
Стохастическая динамика числа первичных источников (пользователей) цепочек ретвитов (первые дебаты, Президентские Выборы 2016 года в США



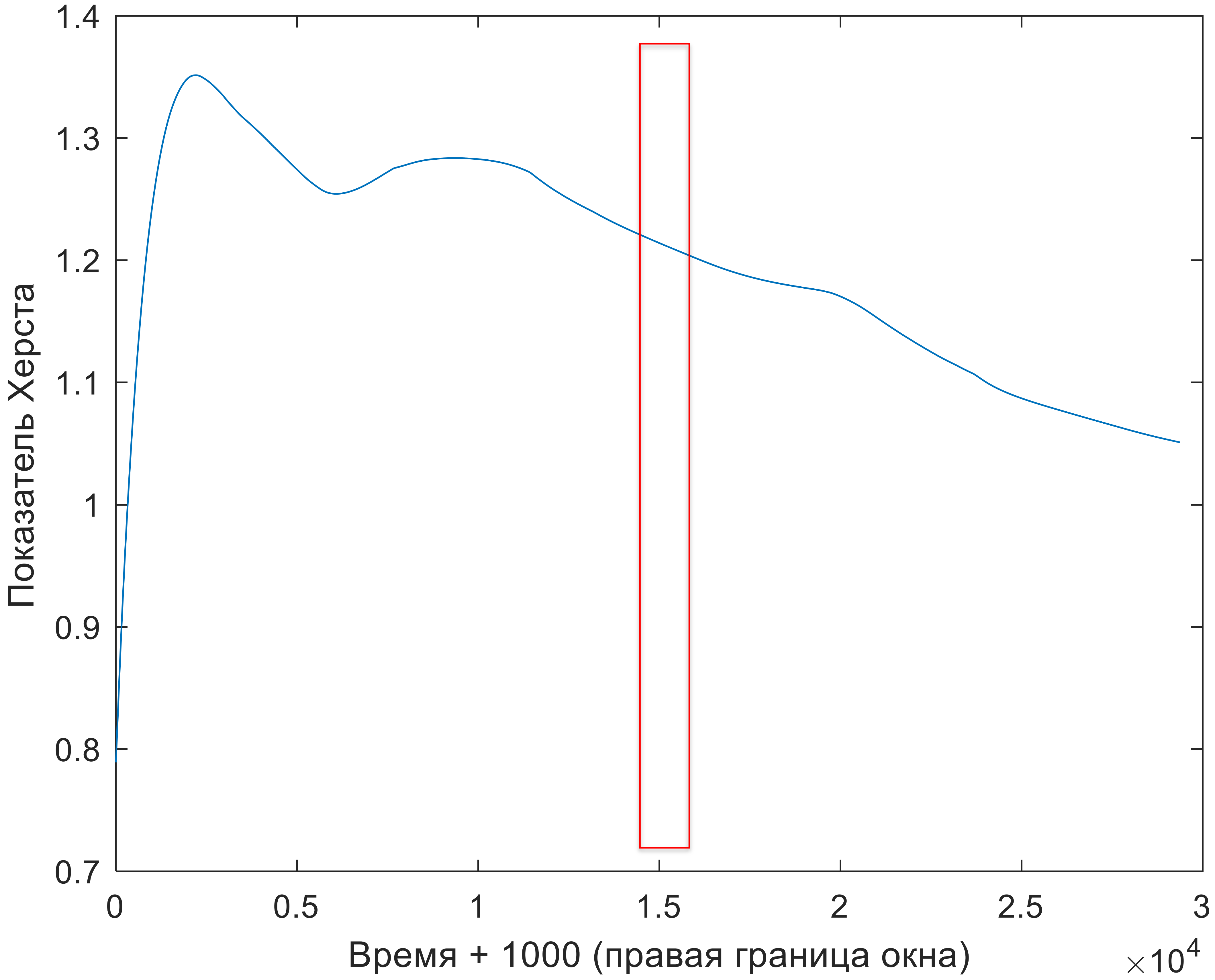
$$m_{t'} \equiv \widehat{H}_{t'}$$

Меры раннего предупреждения для монофрактальных временных рядов

Стационарные ряды
Метод нормированного размаха (Hurst's Rescaled-Range Analysis, R/S analysis)



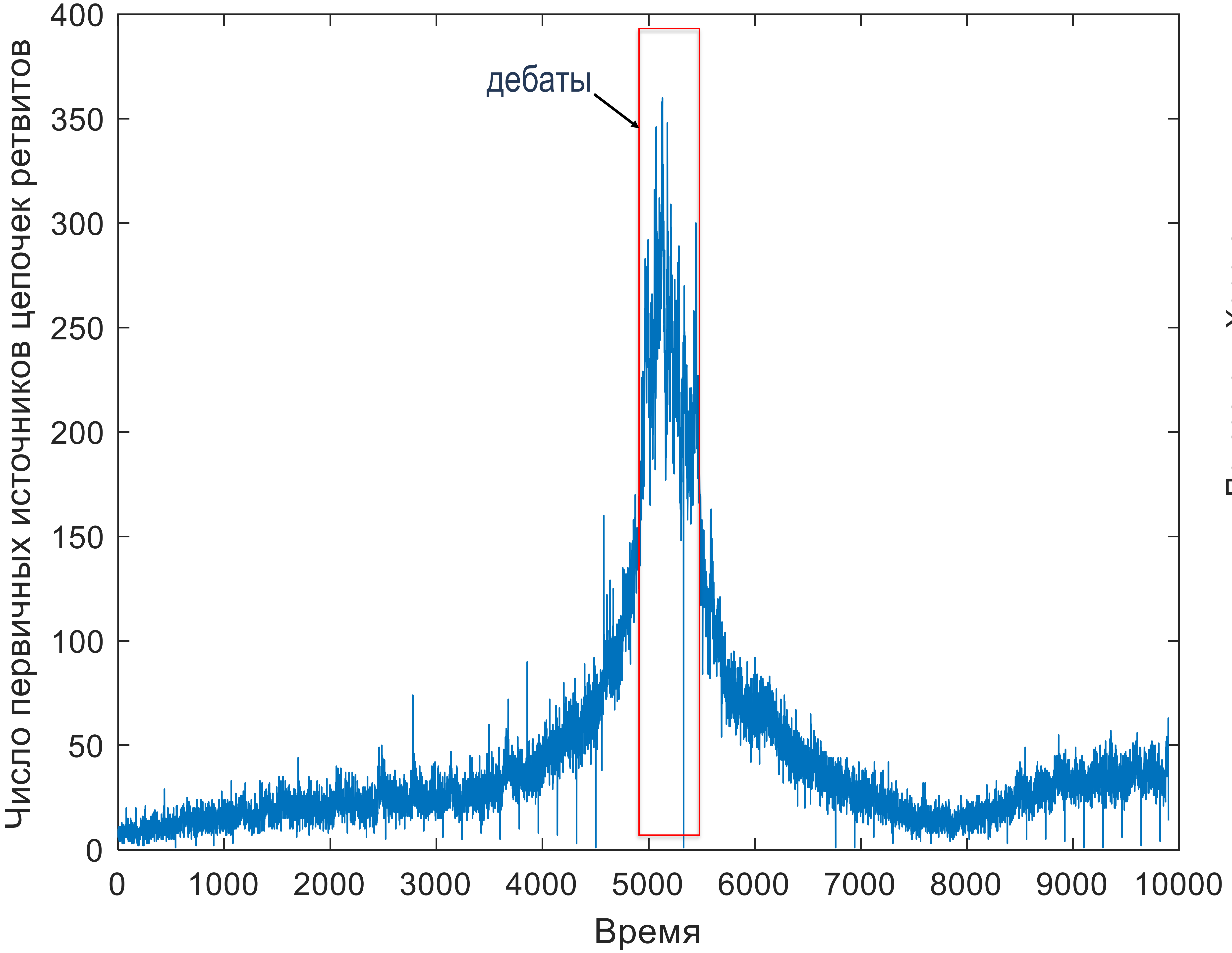
Стохастическая динамика числа первичных источников (пользователей) цепочек ретвитов (вторые дебаты, Президентские Выборы 2016 года в США



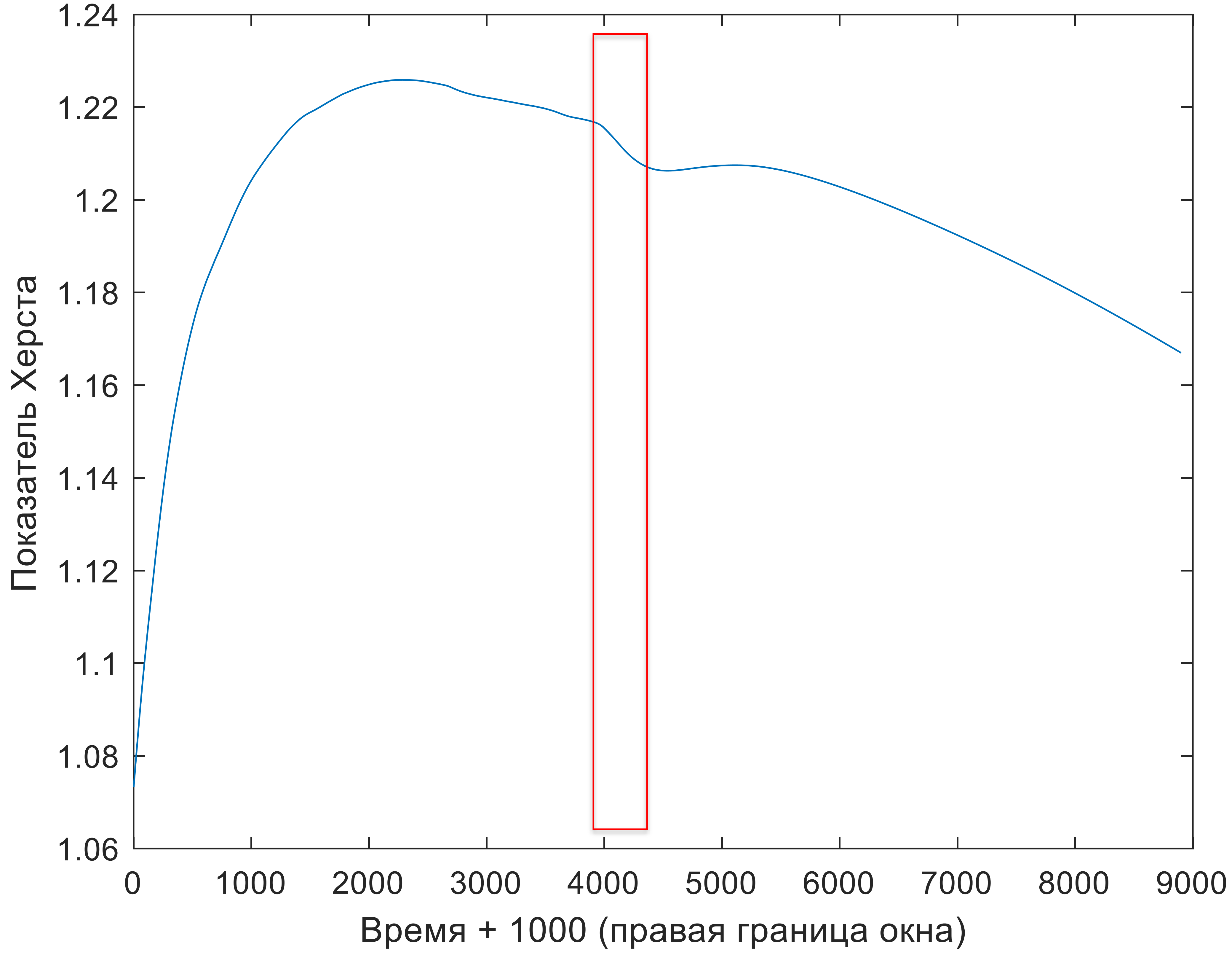
$$m_{t'} \equiv \widehat{H}_{t'}$$

Меры раннего предупреждения для монофрактальных временных рядов

Стационарные ряды
Метод нормированного размаха (Hurst's Rescaled-Range Analysis, R/S analysis)



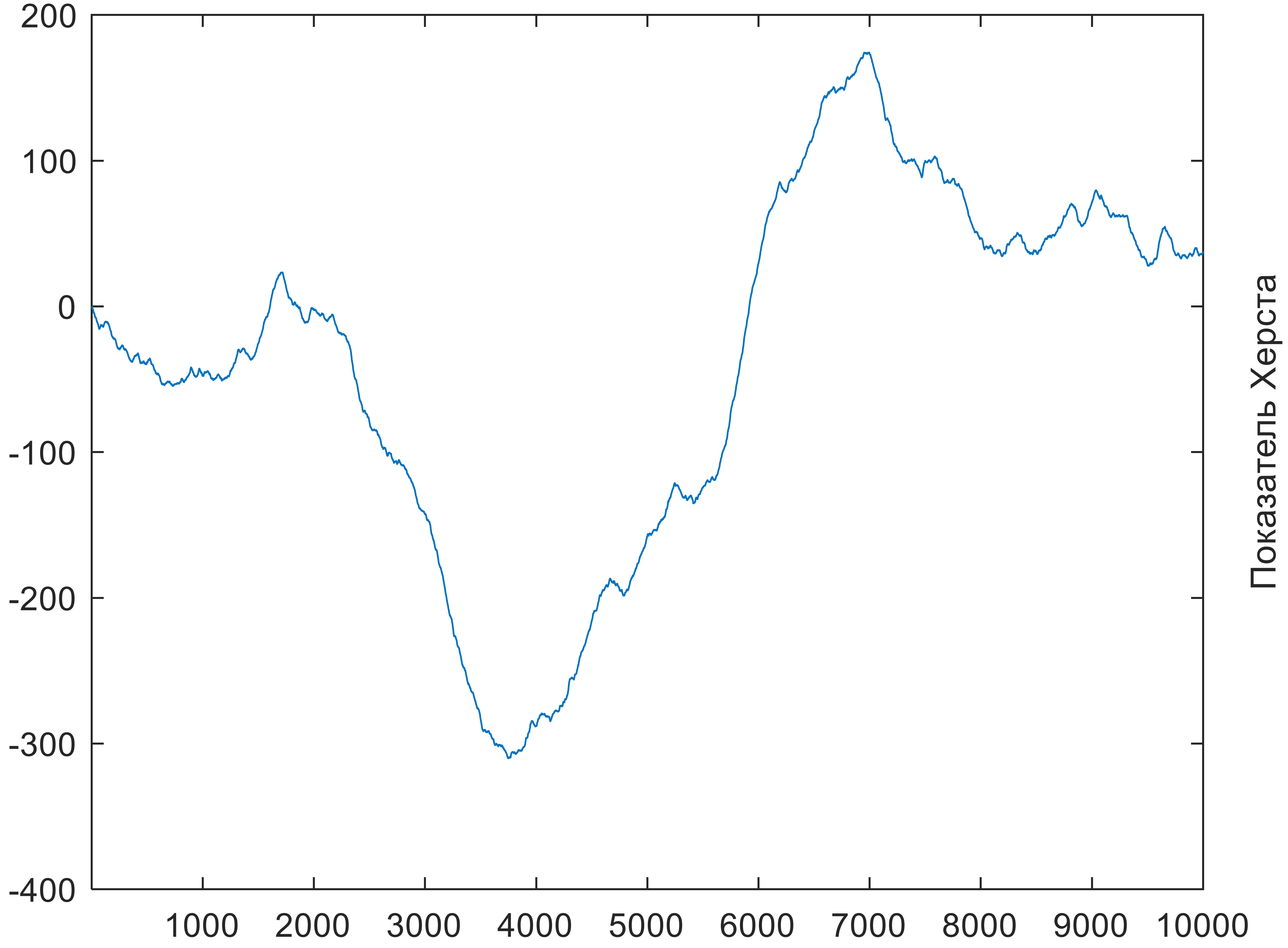
Стохастическая динамика числа первичных источников (пользователей) цепочек ретвитов (третьи дебаты, Президентские Выборы 2016 года в США



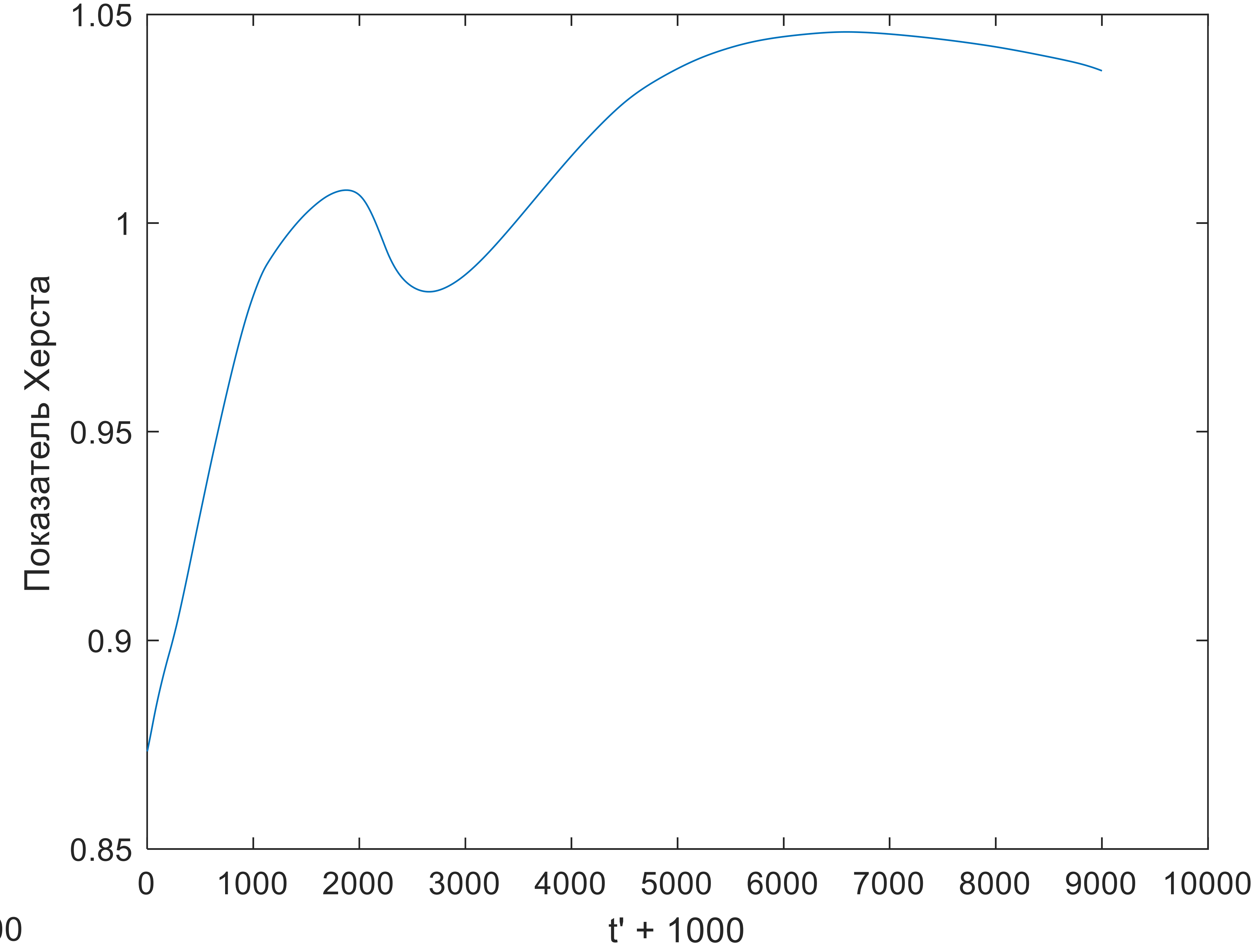
$$m_{t'} \equiv \widehat{H}_{t'}$$

Меры раннего предупреждения для монофрактальных временных рядов

Стационарные ряды. Метод нормированного размаха. Влияние объема выборки на точность оценки H



Одна из реализаций fBm($H = 0.9$)



Меры раннего предупреждения для монофрактальных временных рядов

Нестационарные ряды
Бестрендовый флуктуационный анализ (Detrended Fluctuation Analysis)

Вход:
$\{\xi_i, i = \overline{1, N}\}$ – наблюдаемый дискретный временной ряд

Выход:
H_G – обобщенный показатель Херста временного ряда ξ_i

DFA полностью воспроизводит значения H для fBm
- $H_G \in (0{,}0.5)$ – антиперсистентный временной ряд
- $H_G = 0.5$ – временной ряд с нулевой персистентностью (белый шум)
- $H_G \in (0.5{,}1)$ – персистентный временной ряд

- $H_G > 1$ – нестационарный по математическому ожиданию процесс
- $H_G = 1$ – 1/f-шум (розовый шум)
- $H_G = 1.5$ – броуновский шум

Меры раннего предупреждения для монофрактальных временных рядов

Нестационарные ряды
Бестрендовый флуктуационный анализ (Detrended Fluctuation Analysis)

Шаг 1. Для исходного временного ряда ξ_i строится флуктуационный профиль со средним μ_N по всей длине ряда N:

$$\xi_i \to \hat{\xi}_i \equiv \sum_{k=1}^{i} (\xi_i - \mu_N)$$

Шаг 2. $\hat{\xi}_i$ разбивается на смежные непересекающиеся сегменты $\nu = 1, \dots, N_s$, длиной s (масштаб времени) каждый ($N_s = \mathrm{int}(N/s)$) – общее число сегментов разбиения)

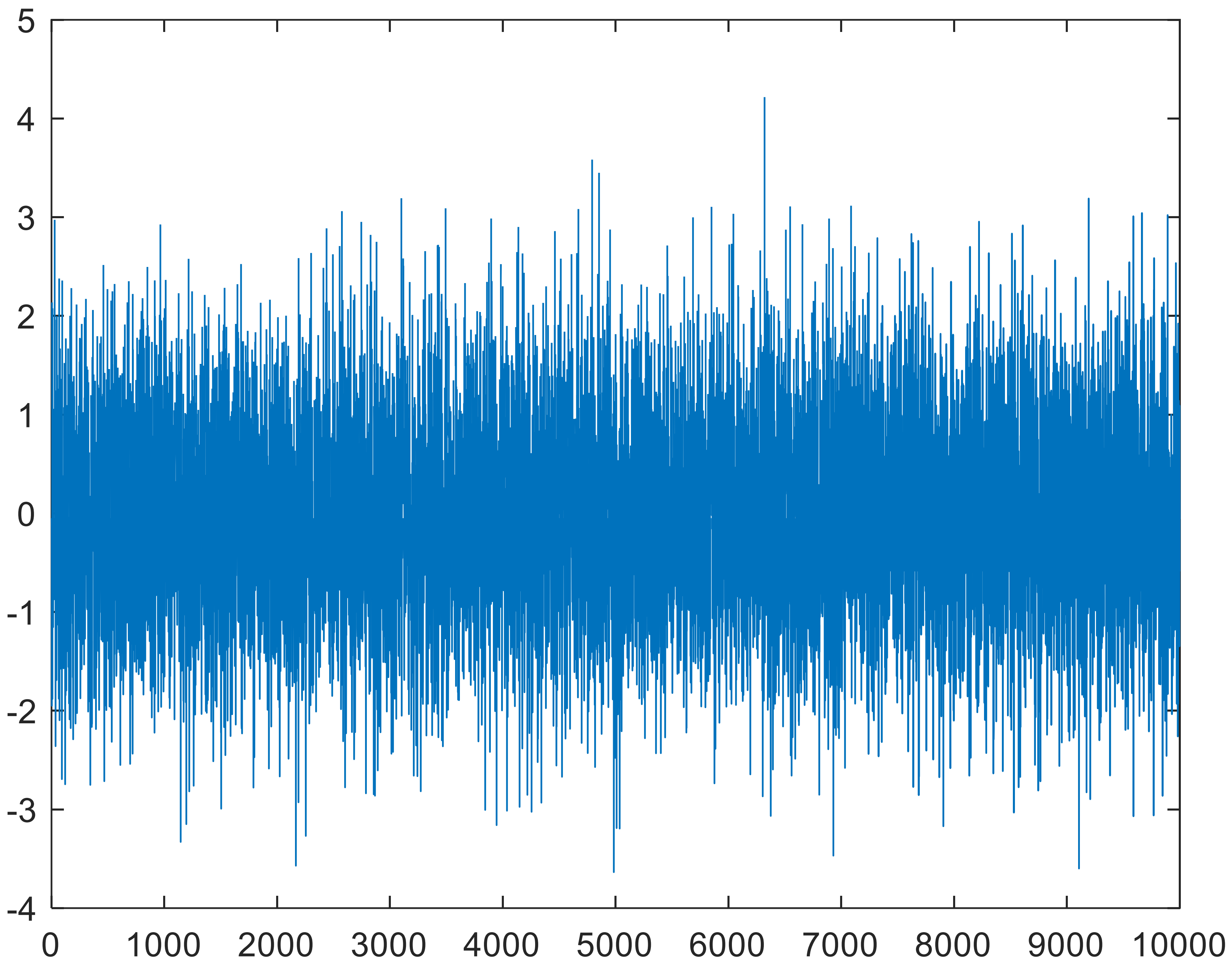
Шаг 3. Для каждого из N_s сегментов (например, методом наименьших квадратов) определяется ***локальный тренд*** y_i^ν – уравнение линейной или нелинейной зависимости, аппроксимирующей последовательность $\{\hat{\xi}_i\}$

Шаг 4. Определяются отклонения флуктуационного профиля от локального тренда (удаление тренда)

$$\Delta Y_i^\nu = \hat{\xi}_i^\nu - y_i^\nu$$

Шаг 5. Вычисляется дисперсия D_s^ν выборки ΔY_i^ν для каждого из сегментов

$$D_s^\nu = \frac{1}{s} \sum_{i=1}^{s} \left(\hat{\xi}_i^\nu - y_i^\nu\right)^2$$



Временной ряд $\hat{\xi}_i$

Меры раннего предупреждения для монофрактальных временных рядов

Нестационарные ряды
Бестрендовый флуктуационный анализ (Detrended Fluctuation Analysis)

Шаг 1. Для исходного временного ряда ξ_i строится флуктуационный профиль со средним μ_N по всей длине ряда N:

$$\xi_i \to \hat{\xi}_i \equiv \sum_{k=1}^{i} (\xi_i - \mu_N)$$

Шаг 2. $\hat{\xi}_i$ разбивается на смежные непересекающиеся сегменты $\nu = 1, \dots, N_s$, длиной s (масштаб времени) каждый ($N_s = \mathrm{int}(N/s)$ – общее число сегментов разбиения)

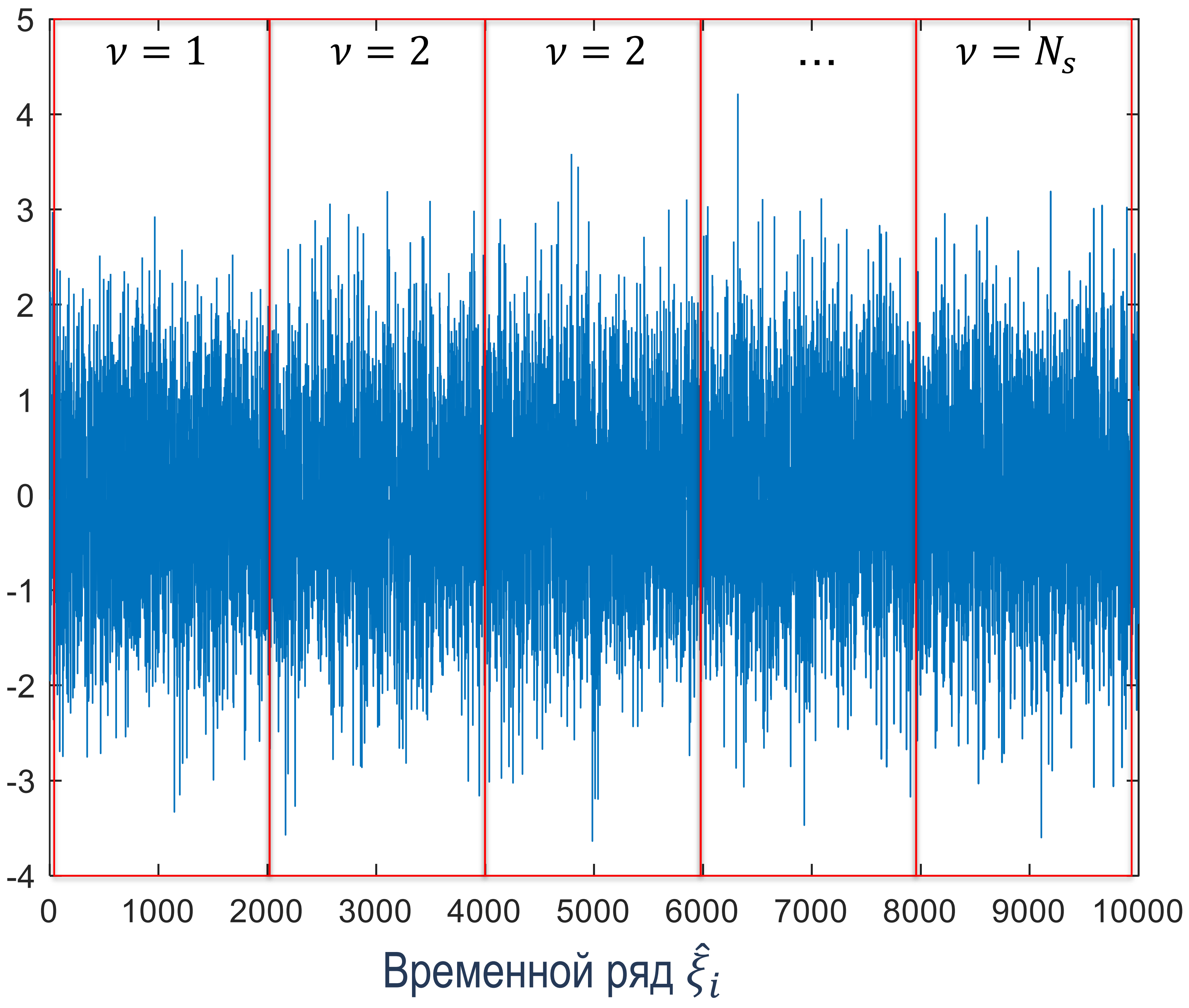
Шаг 3. Для каждого из N_s сегментов (например, методом наименьших квадратов) определяется ***локальный тренд*** y_i^ν – уравнение линейной или нелинейной зависимости, аппроксимирующей последовательность $\{\hat{\xi}_i\}$

Шаг 4. Определяются отклонения флуктуационного профиля от локального тренда (удаление тренда)

$$\Delta Y_i^\nu = \hat{\xi}_i^\nu - y_i^\nu$$

Шаг 5. Вычисляется дисперсия D_s^ν выборки ΔY_i^ν для каждого из сегментов

$$D_s^\nu = \frac{1}{s} \sum_{i=1}^{s} \left(\hat{\xi}_i^\nu - y_i^\nu\right)^2$$



Меры раннего предупреждения для монофрактальных временных рядов

Нестационарные ряды
Бестрендовый флуктуационный анализ (Detrended Fluctuation Analysis)

Шаг 1. Для исходного временного ряда ξ_i строится флуктуационный профиль со средним μ_N по всей длине ряда N:

$$\xi_i \to \hat{\xi}_i \equiv \sum_{k=1}^{i} (\xi_i - \mu_N)$$

Шаг 2. $\hat{\xi}_i$ разбивается на смежные непересекающиеся сегменты $\nu = 1, \dots, N_s$, длиной s (масштаб времени) каждый ($N_s = \mathrm{int}(N/s)$ – общее число сегментов разбиения)

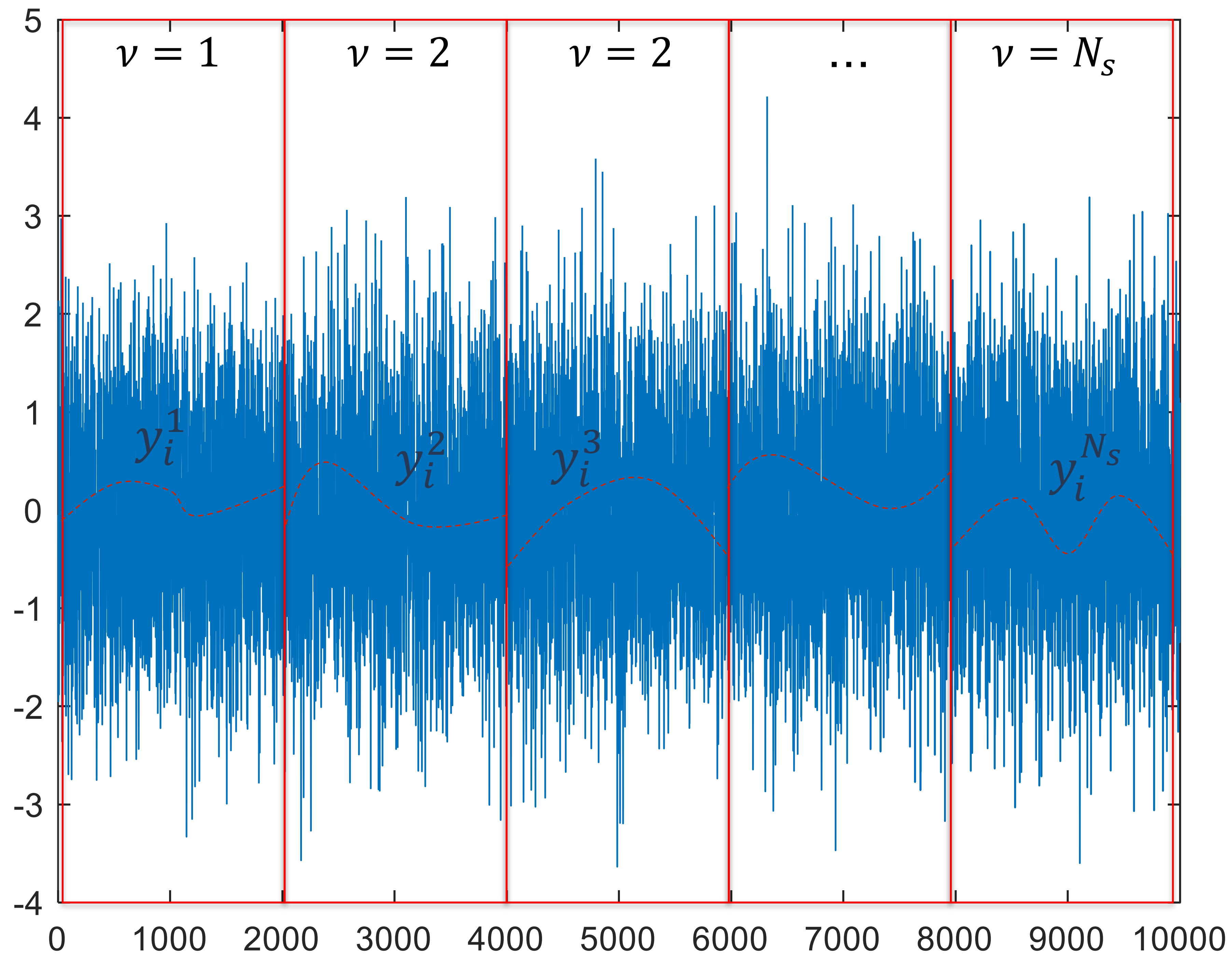
Шаг 3. Для каждого из N_s сегментов (например, методом наименьших квадратов) определяется ***локальный тренд*** y_i^ν – уравнение линейной или нелинейной зависимости, аппроксимирующей последовательность $\{\hat{\xi}_i\}$

Шаг 4. Определяются отклонения ***флуктуационного профиля*** от локального тренда (удаление тренда)

$$\Delta Y_i^\nu = \hat{\xi}_i^\nu - y_i^\nu$$

Шаг 5. Вычисляется дисперсия D_s^ν выборки ΔY_i^ν для каждого из сегментов

$$D_s^\nu = \frac{1}{s} \sum_{i=1}^{s} \left(\hat{\xi}_i^\nu - y_i^\nu\right)^2$$



Временной ряд $\hat{\xi}_i$

Меры раннего предупреждения для монофрактальных временных рядов

Нестационарные ряды
Бестрендовый флуктуационный анализ (Detrended Fluctuation Analysis)

Шаг 6. Усреднением по сегментам, рассчитывается ***флуктуационная функция***

$$F_{DFAm} = \sqrt{\frac{1}{N_s}\sum_{\nu=1}^{N_s} D_s^{\nu}}$$

Шаг 7. Увеличивается s и повторяются шаги 2–6

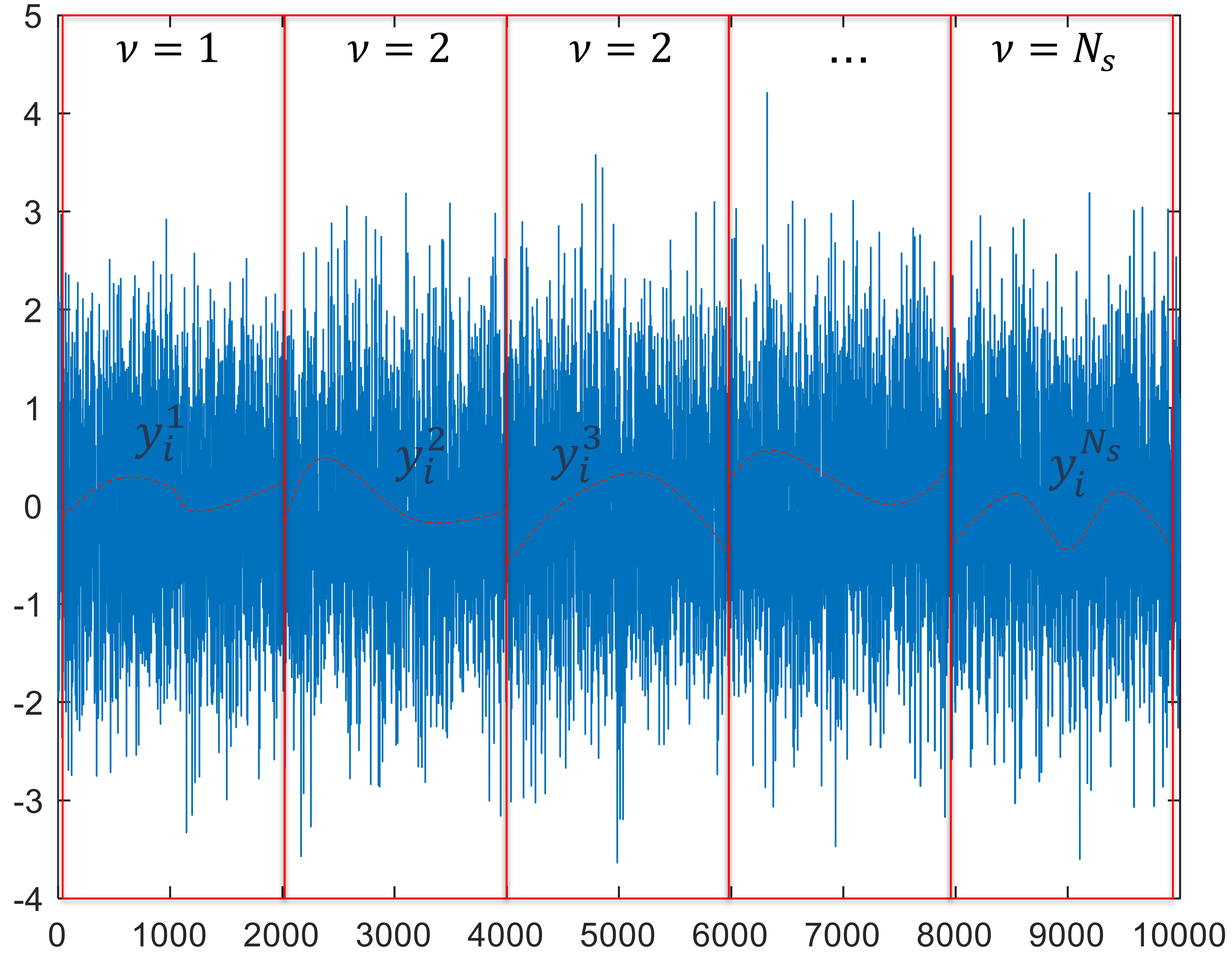
Шаг 8. Если для всех временных масштабов s выполняется скейлинговое соотношение

$$F_{DFAm} \propto s^{H_G}$$

то H_G – обобщенный показатель Херста временного ряда ξ_i

$$\log F_{DFAm} = \hat{\alpha}_0 + \hat{H}_G \log s$$

$\hat{H}_G$ – статистическая (выборочная) оценка обобщенного показателя Херста



Временной ряд $\hat{\xi}_i$

НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ