



НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ  
УНИВЕРСИТЕТ

Московский институт электроники и математики им. А.Н. Тихонова  
Департамент прикладной математики

# СТОХАСТИЧЕСКИЕ ОЦЕНКИ И УПРАВЛЕНИЕ

Дмитриев Андрей Викторович

доктор физ.-мат. наук, проф.  
профессор МИЭМ ВШЭ  
ведущий научный сотрудник ФКН ВШЭ

Москва, 2022



# Корреляционная теория в оценке мер раннего обнаружения критических переходов

---

## Повестка

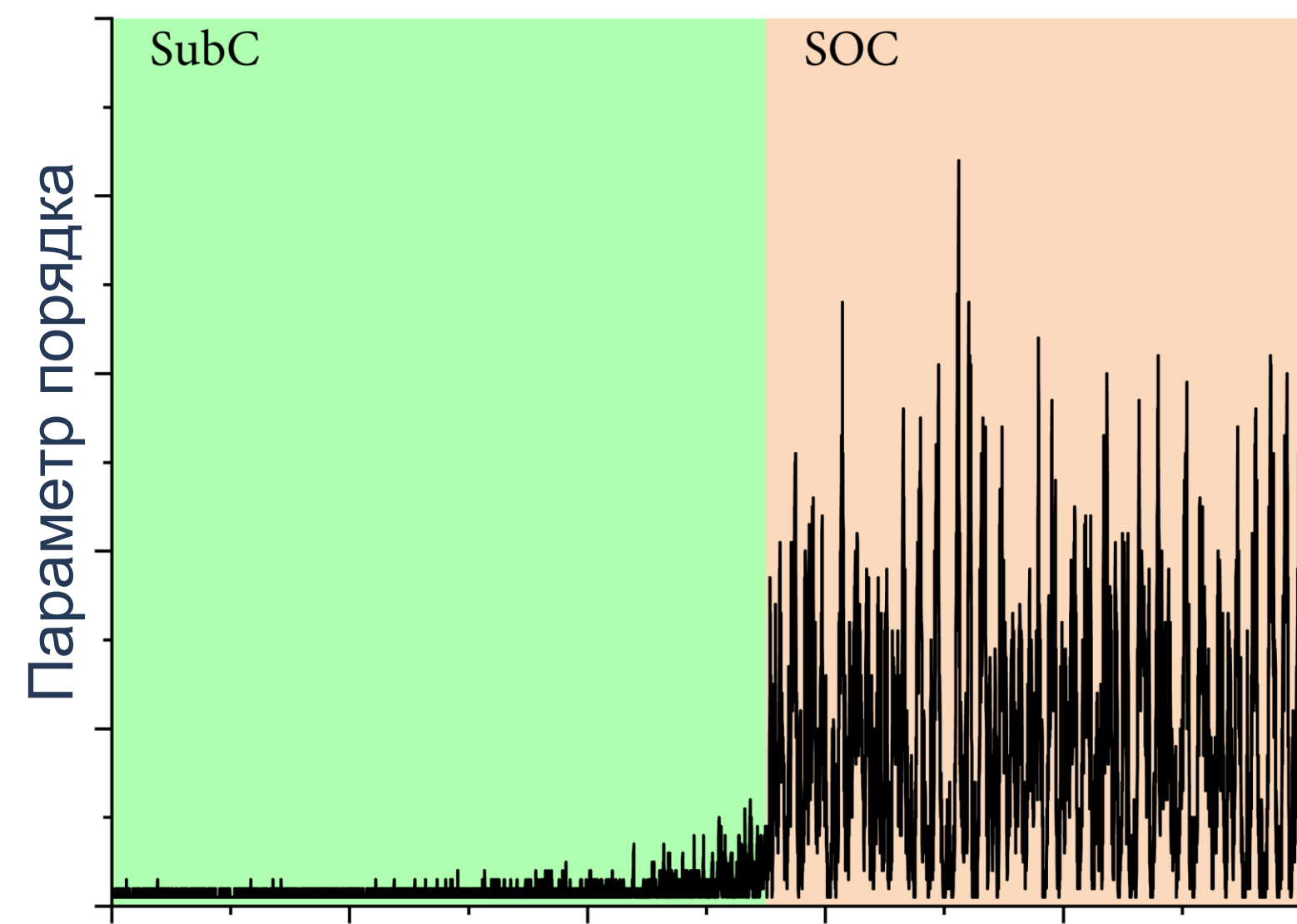
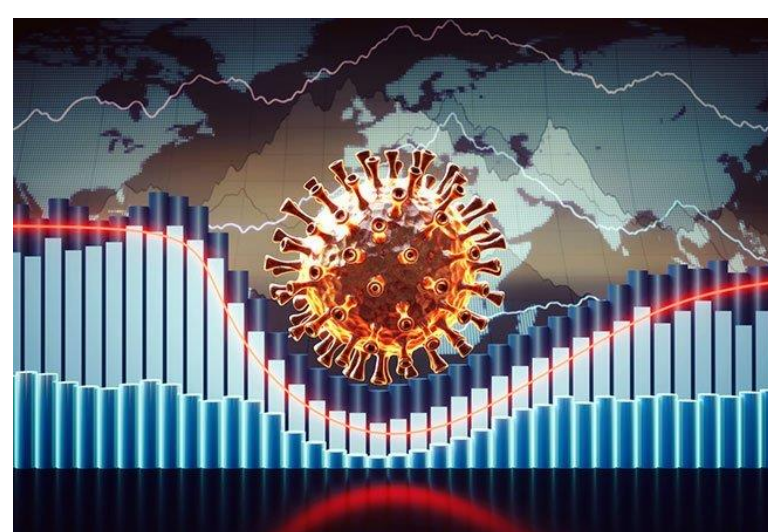
- Немного необходимого из прошлой лекции (критические переходы и скользящие окна)
- Самоорганизованная критичность в теории среднего поля
- Тестовые модели для самоорганизации в критическое и бистабильное состояние
- Визуальные особенности распределения вероятностей при приближении системы к точке критического перехода
- Моменты распределения вероятностей и автокорреляционная функция (лаг-1) как меры раннего предупреждения критического перехода



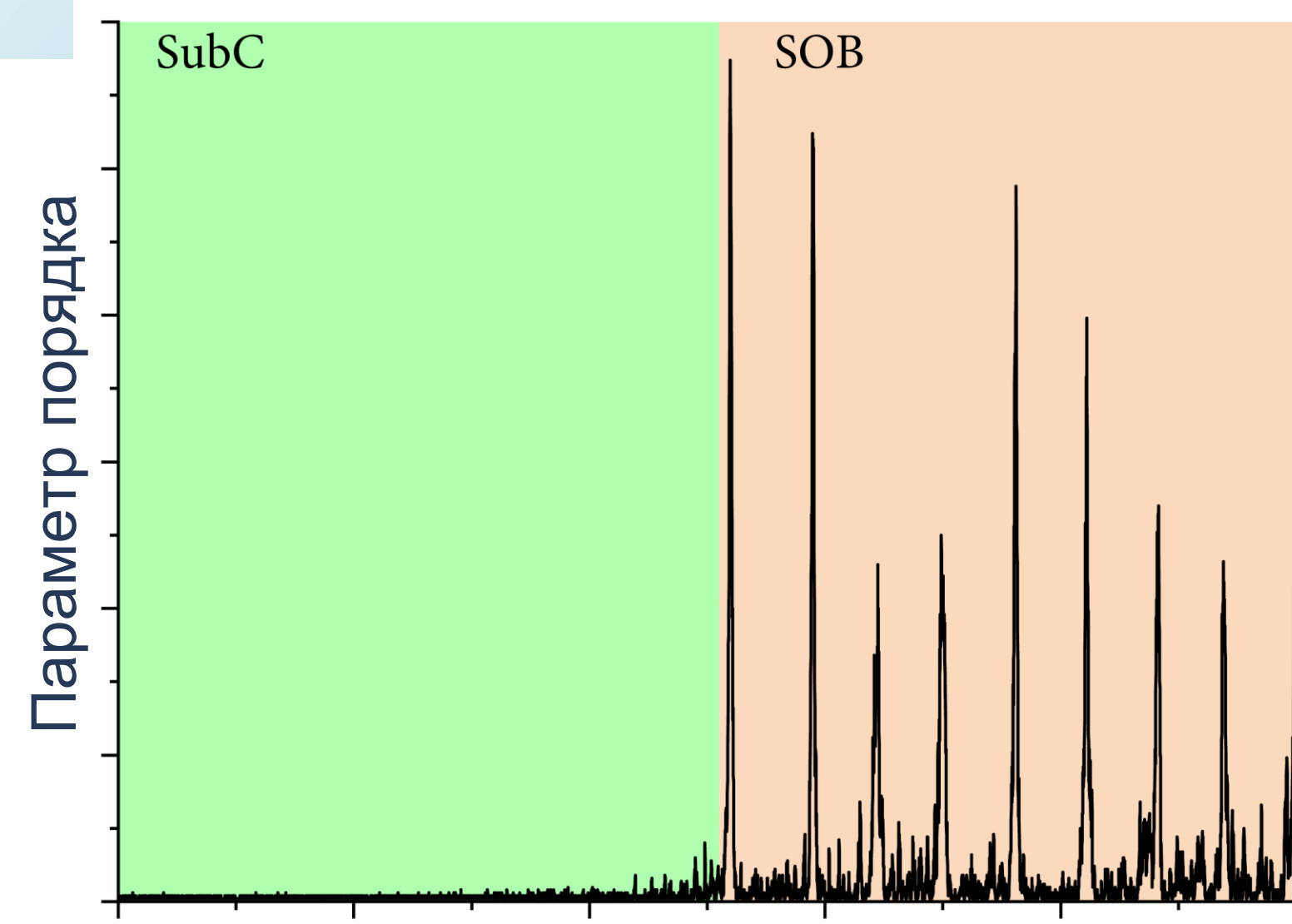


# Корреляционная теория в оценке мер раннего обнаружения критических переходов

## Критические явления в сложных системах: универсальность внешних проявлений



Самоорганизованная критичность (SOC) = критический переход второго рода



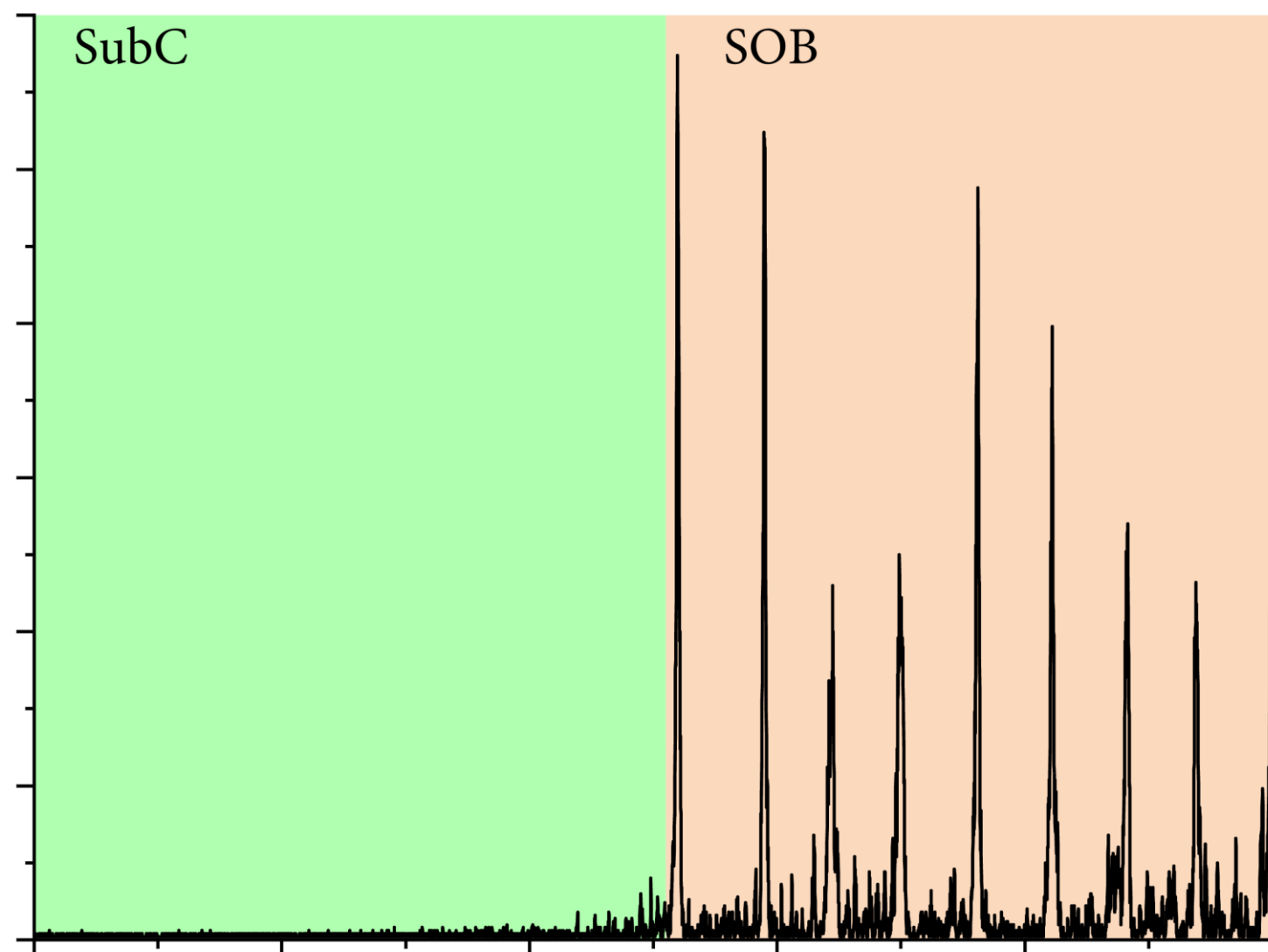
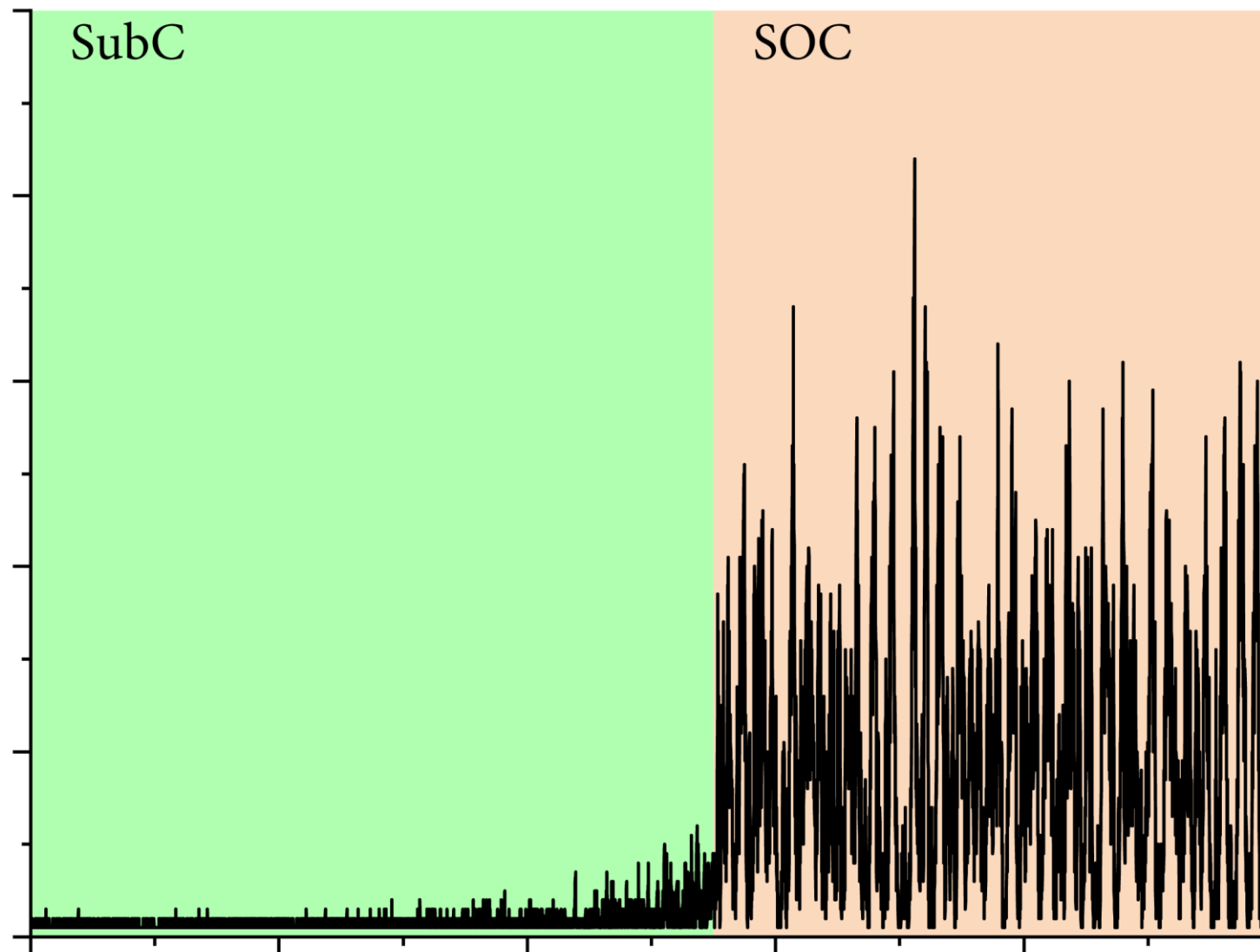
Самоорганизованная бистабильность (SOB) = критический переход первого рода



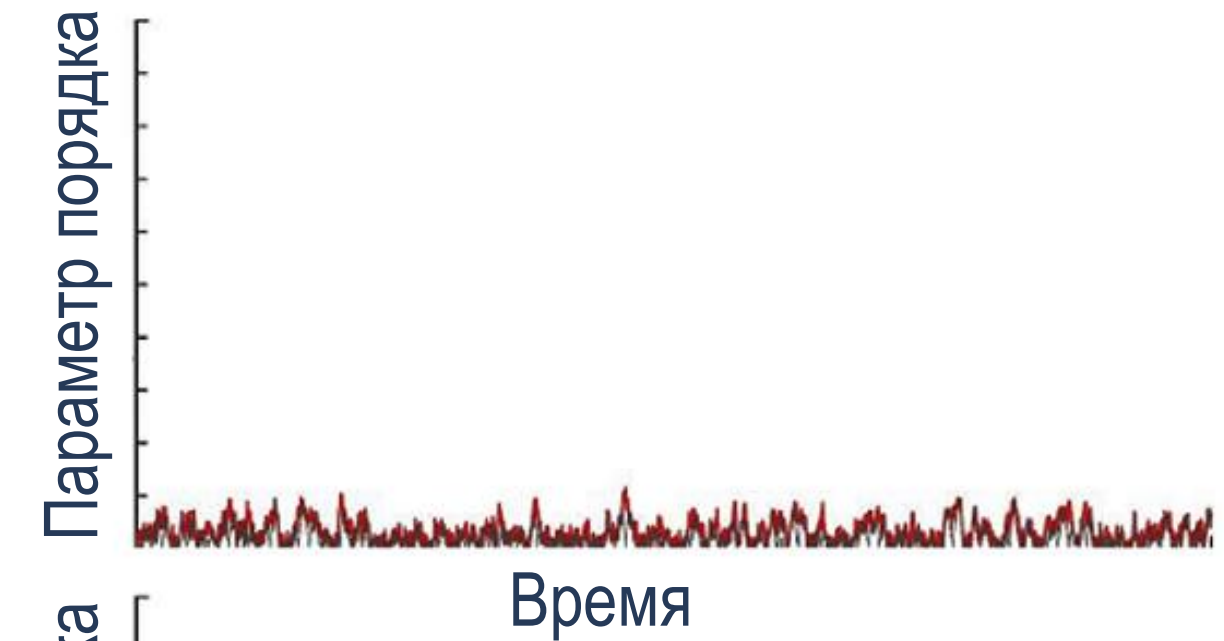
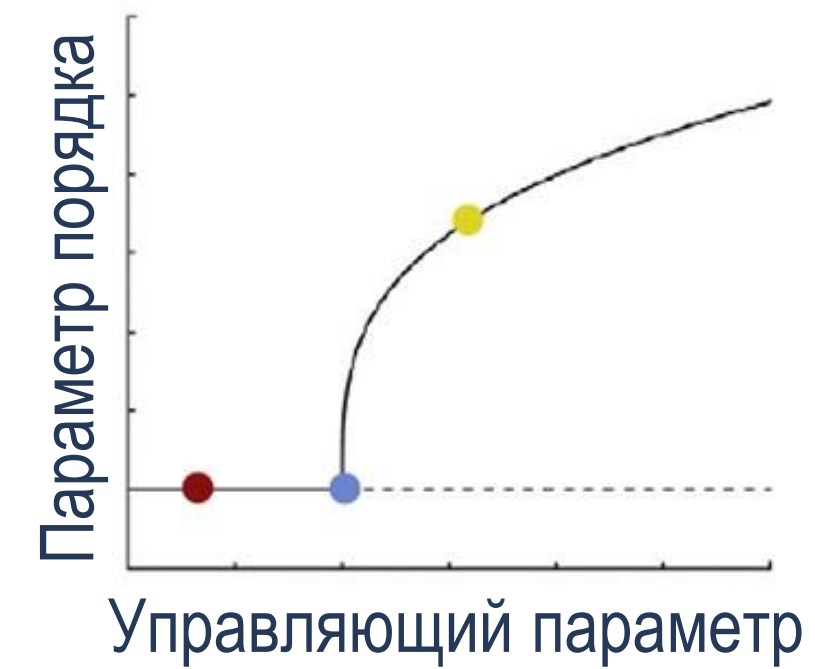


# Корреляционная теория в оценке мер раннего обнаружения критических переходов

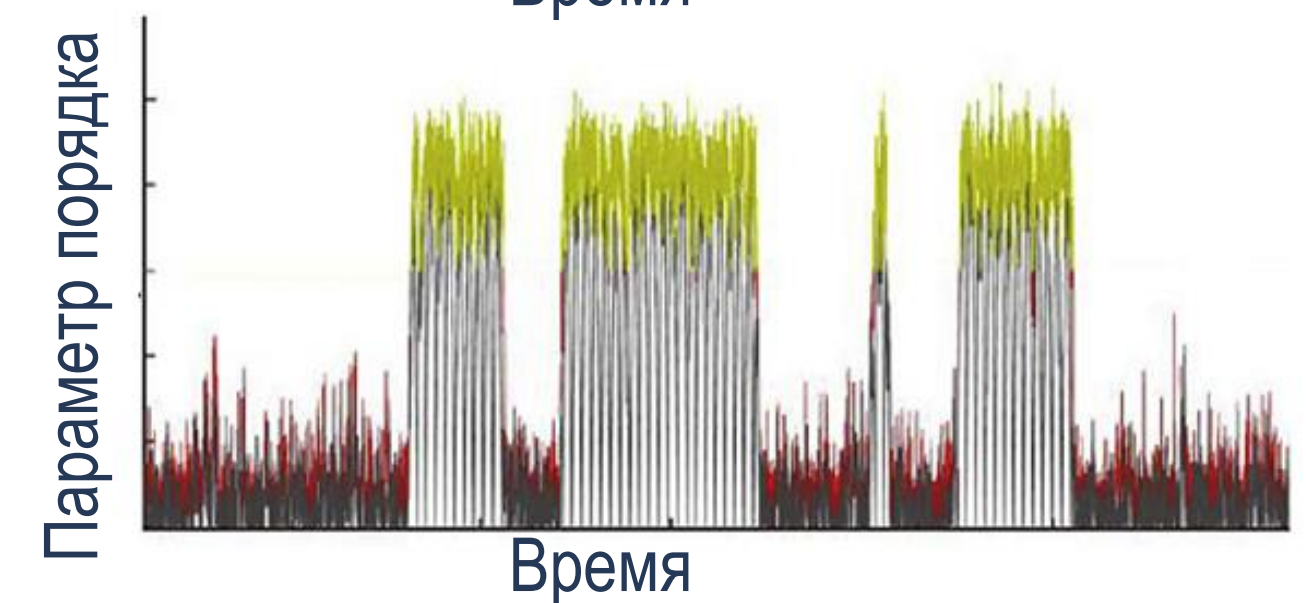
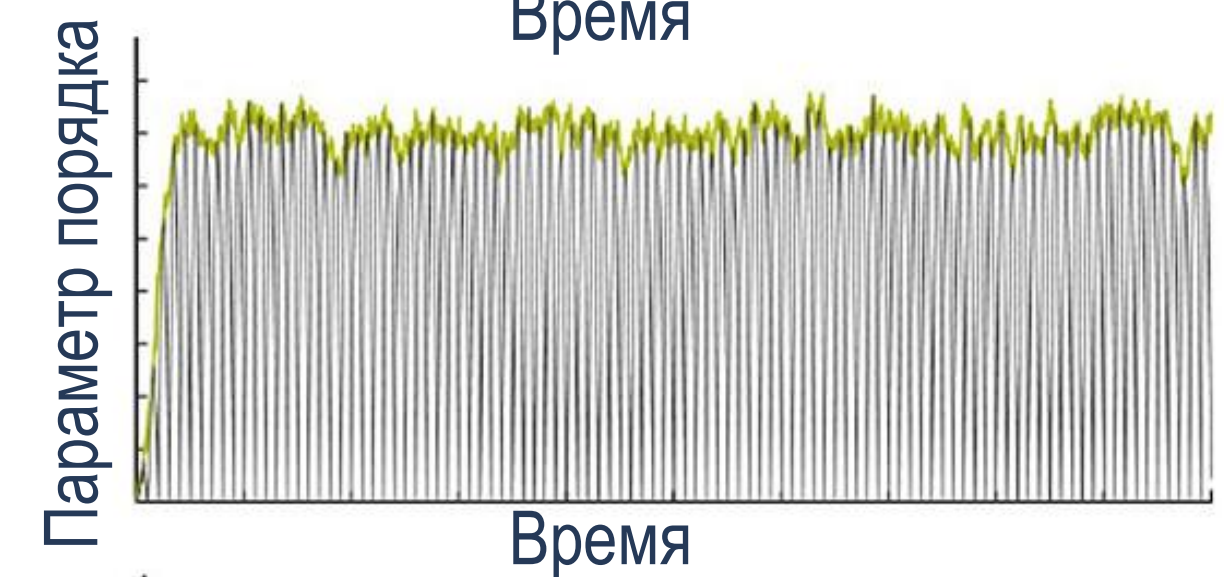
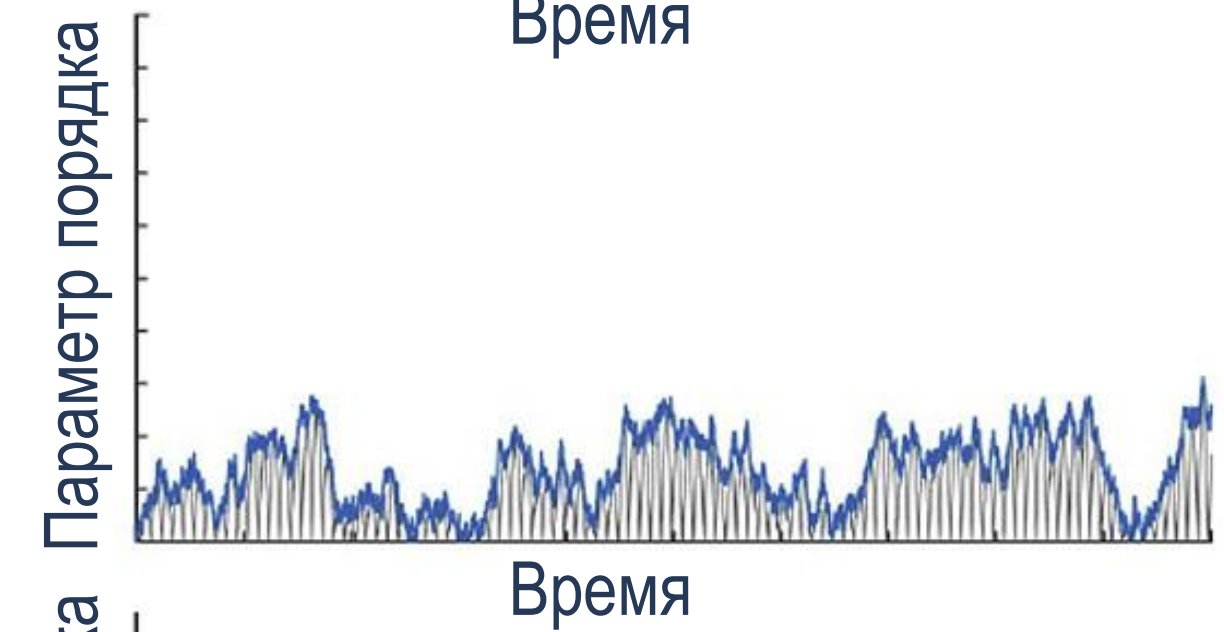
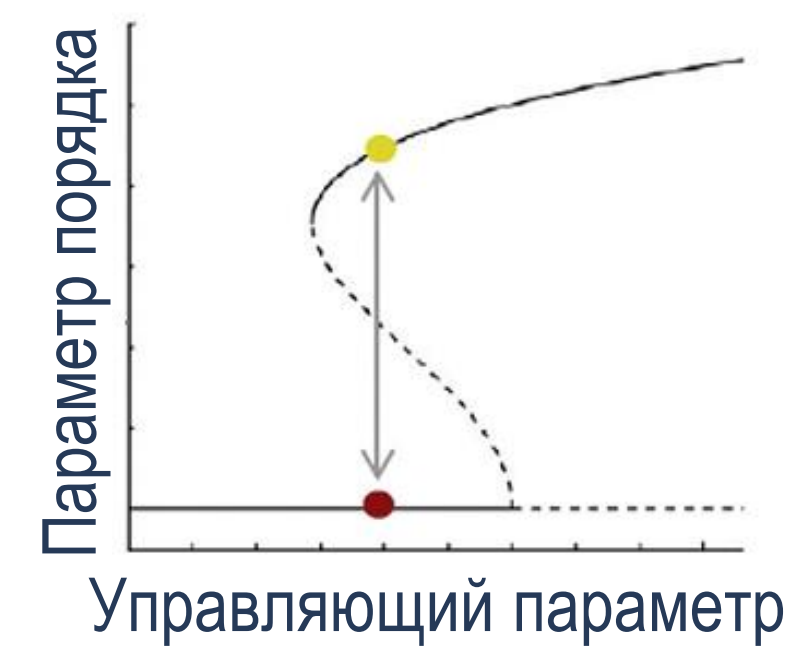
## Виды критических переходов и их особенности



### Самоорганизованная критичность



### Самоорганизованная бистабильность





# Корреляционная теория в оценке мер раннего обнаружения критических переходов

## Самоорганизация в критическое состояние (SOC) в теории среднего поля

$\eta$  – параметр накачки

$\theta$  – наклон кучи песка (управляющий параметр)

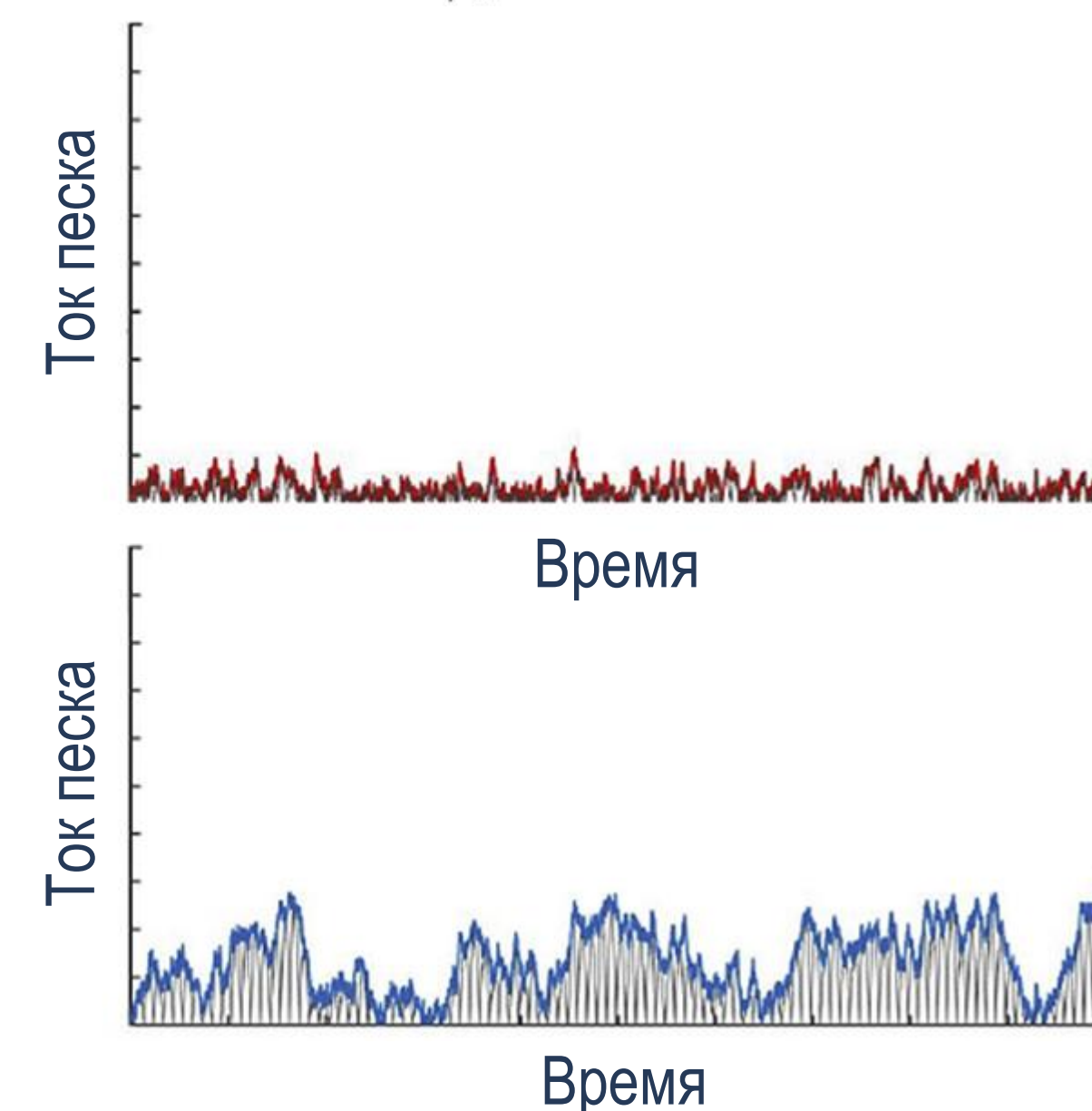
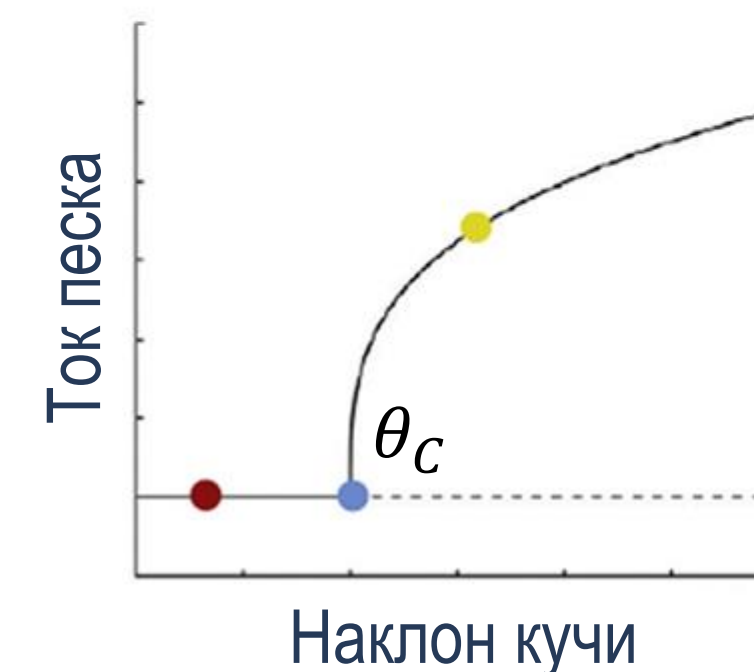
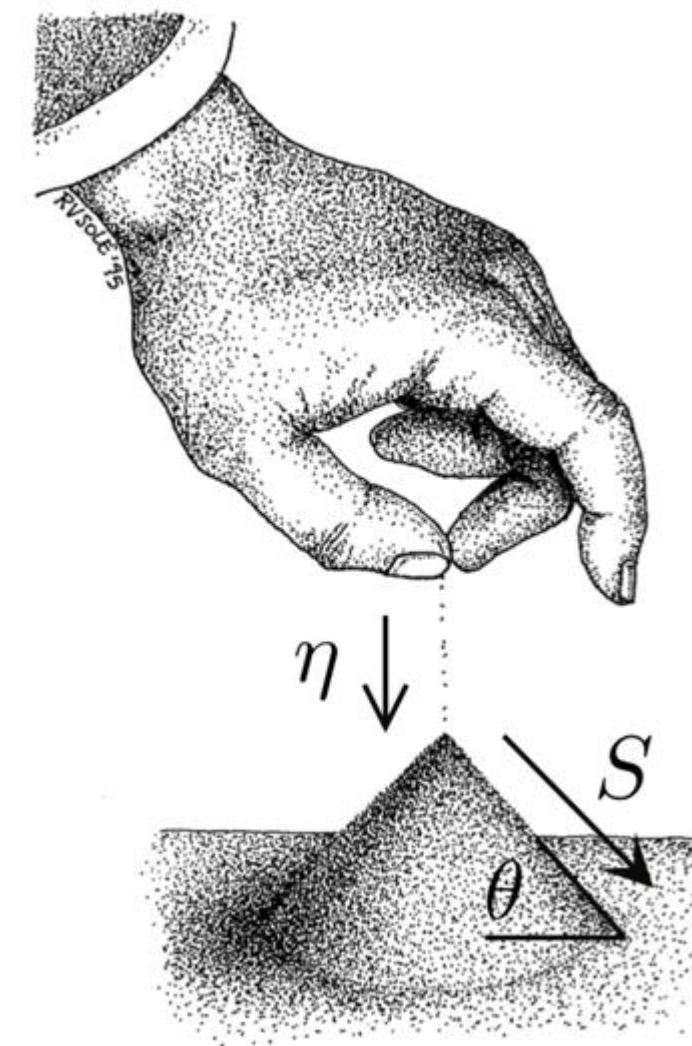
$S$  – ток песка по поверхности кучи (параметр порядка)

- $\theta < \theta_c$  – неупорядоченная фаза с  $S = 0$  (результат множества хаотически направленных микротоков, которые взаимно уравниваются)
- $\theta > \theta_c$  – упорядоченная фаза с  $S \neq 0$  (появлении выделенного направления тока)

При токе  $S = 0^+$ , соответствующем добавлению как минимум одной песчинки за один шаг, система самоорганизуется в состояние (неустойчивое) с критическим наклоном  $\theta = \theta_c$

Имеет место отрицательная обратная связь, вынуждающая наклон принять со временем значение  $\theta = \theta_c$  вне зависимости от начального профиля поверхности:

на любое возмущение при очень большом наклоне система ответит глобальным событием, в результате которого большое количества песка покинет систему и наклон уменьшится





# Корреляционная теория в оценке мер раннего обнаружения критических переходов

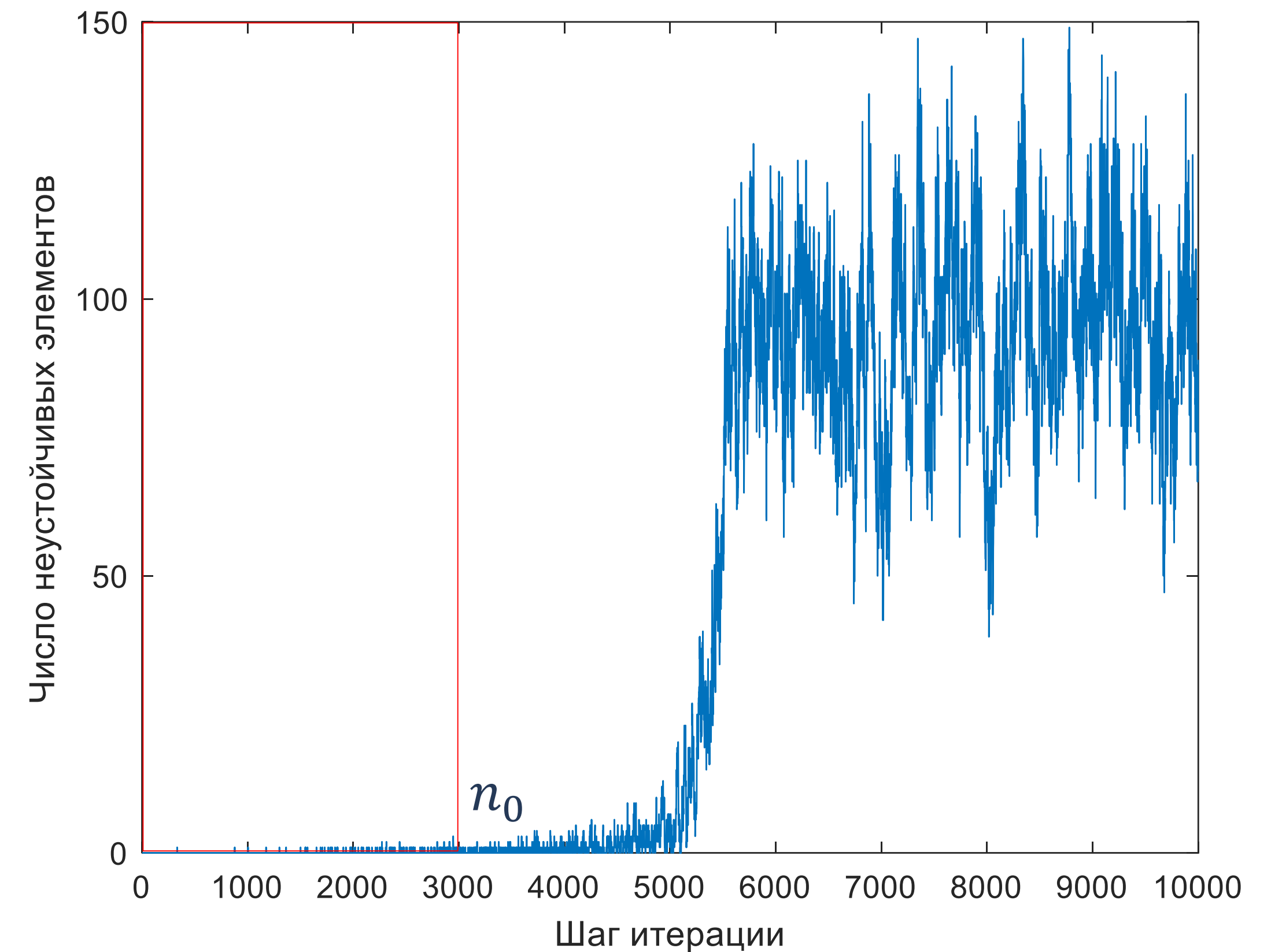
Скользящее окно с левой фиксированной границей для идентификации предвестников критических переходов

$\{\xi_t, t = \overline{0, N}\}$  – наблюдаемый дискретный ряд

$\{m_t, t = \overline{n_0, N}\}$  – ряд мер раннего предупреждения

$[0, n_0]$  – начальное окно

$$\xi_t \rightarrow m_t$$



Окно с фиксированной левой границей и скользящей правой границей





# Корреляционная теория в оценке мер раннего обнаружения критических переходов

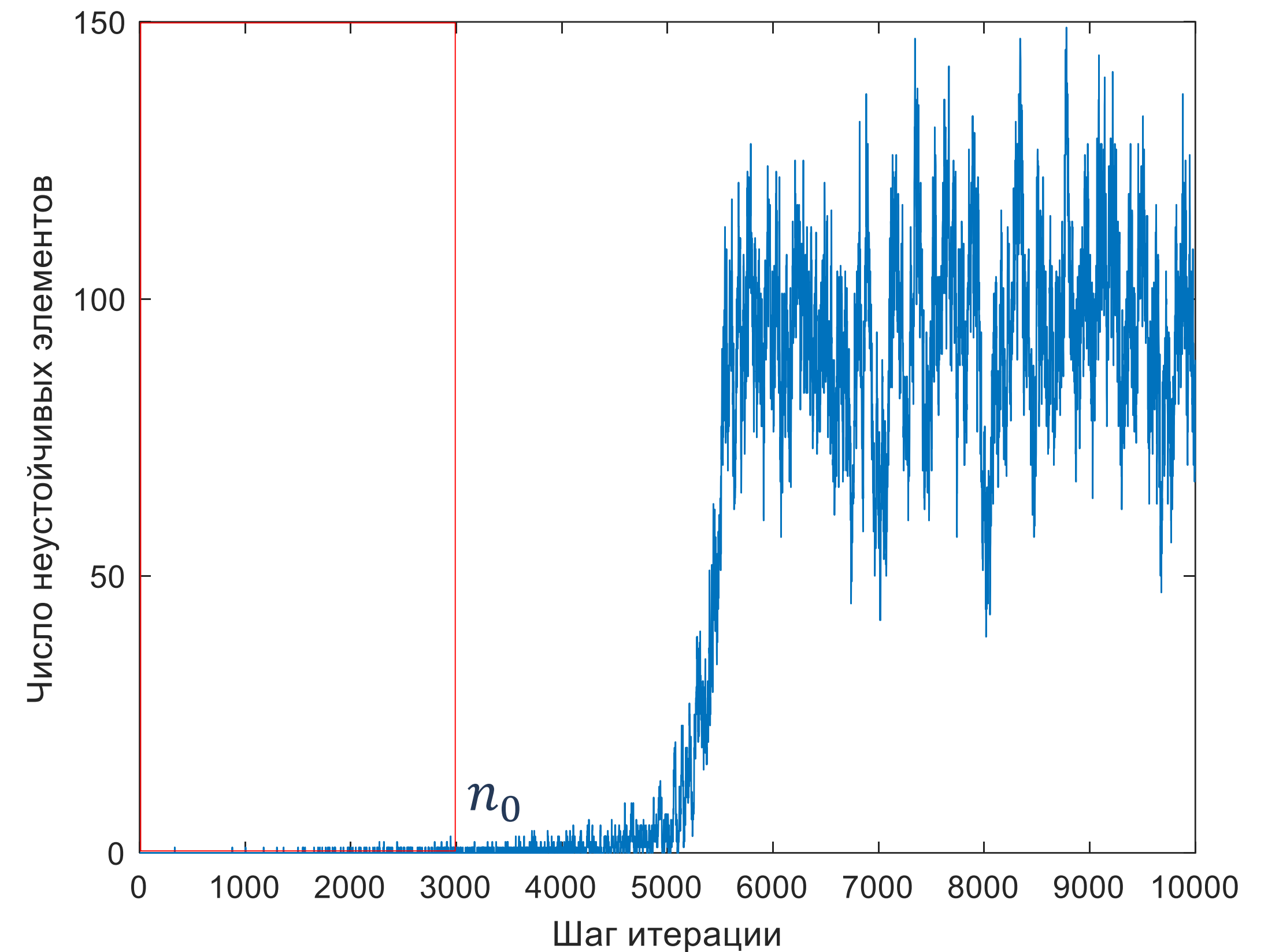
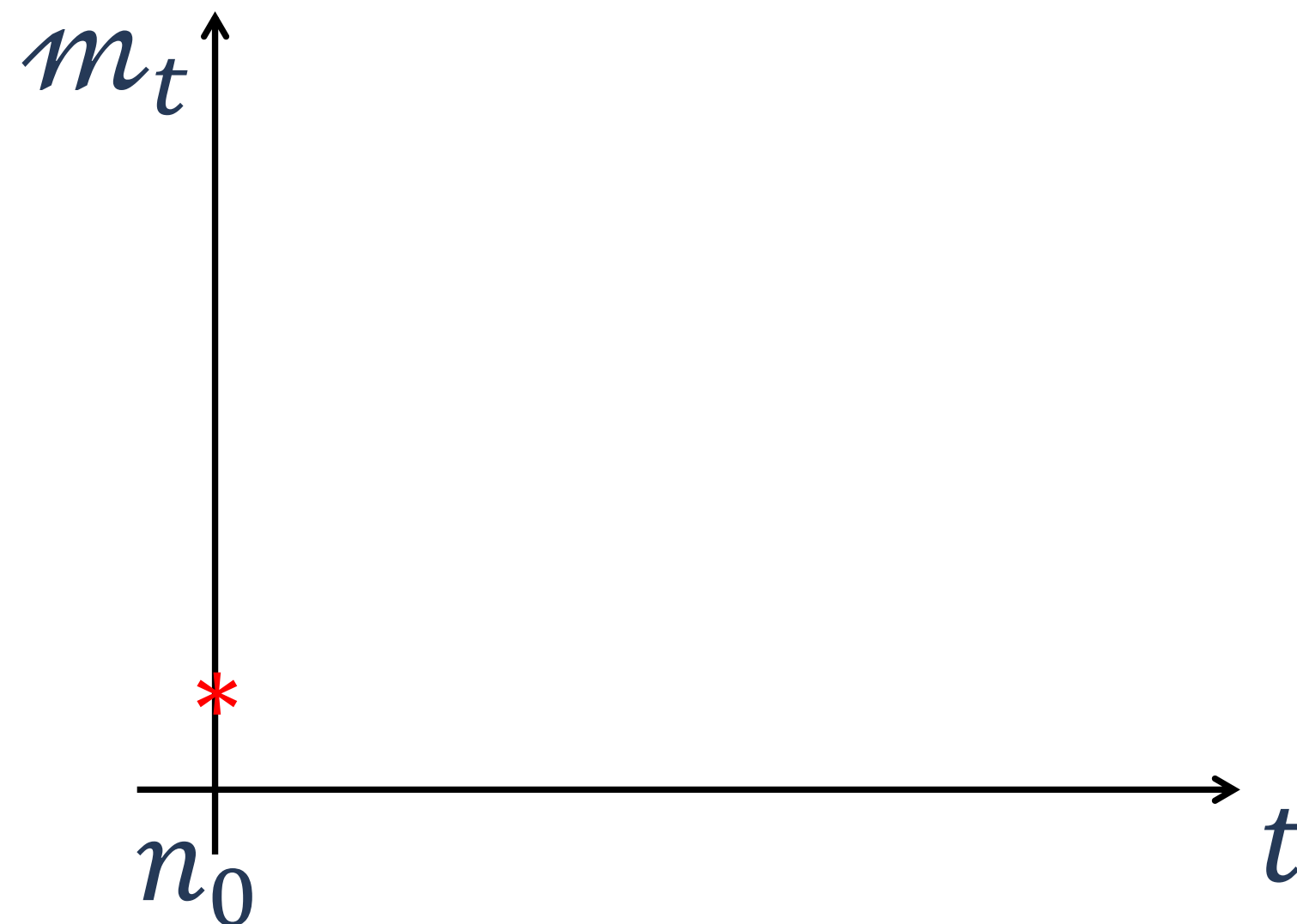
Скользящее окно с левой фиксированной границей для идентификации предвестников критических переходов

$\{\xi_t, t = \overline{0, N}\}$  – наблюдаемый дискретный ряд

$\{m_t, t = \overline{n_0, N}\}$  – ряд мер раннего предупреждения

$[0, n_0]$  – начальное окно

$$\xi_t \rightarrow m_t$$



Окно с фиксированной левой границей и скользящей правой границей



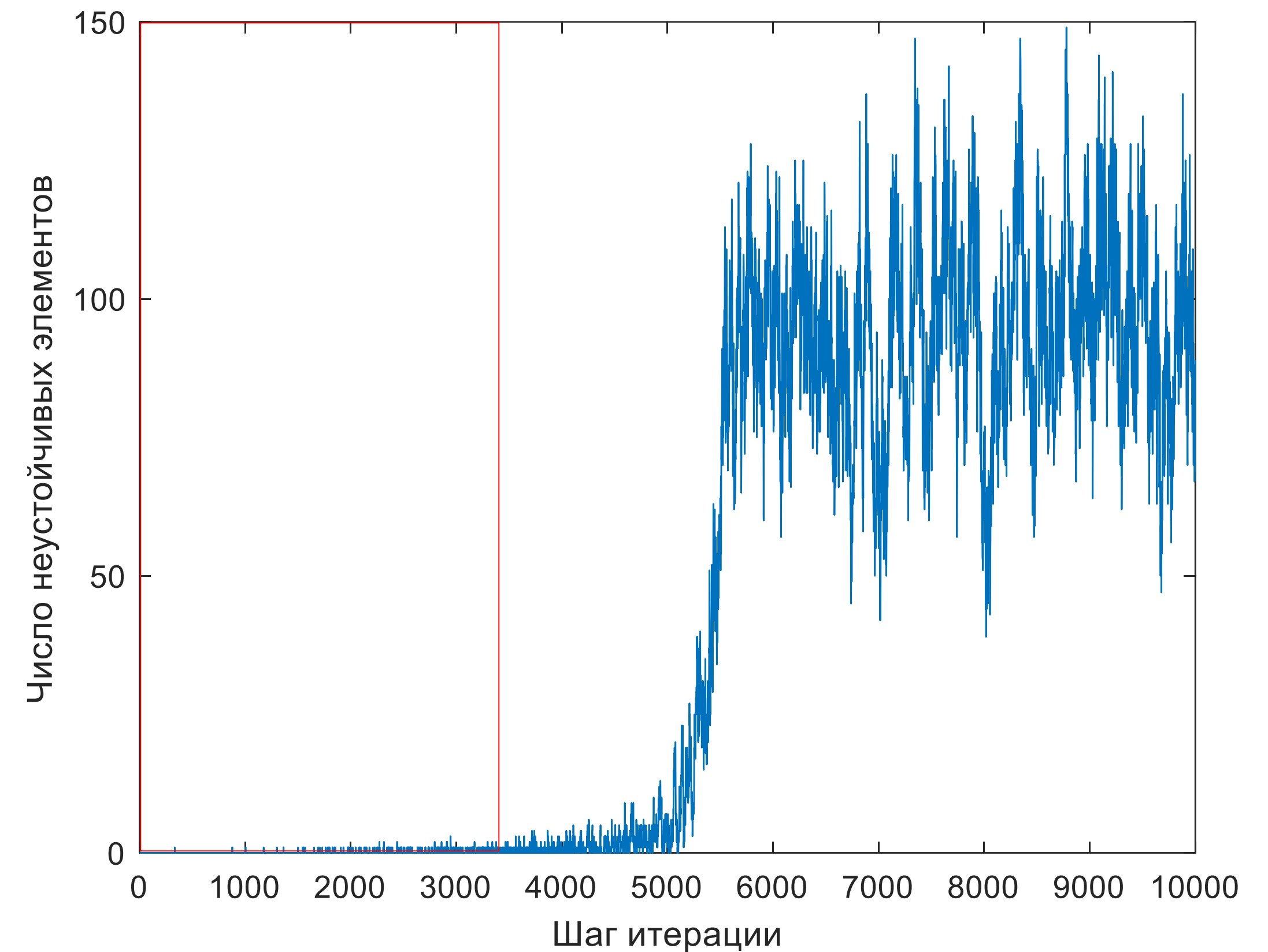
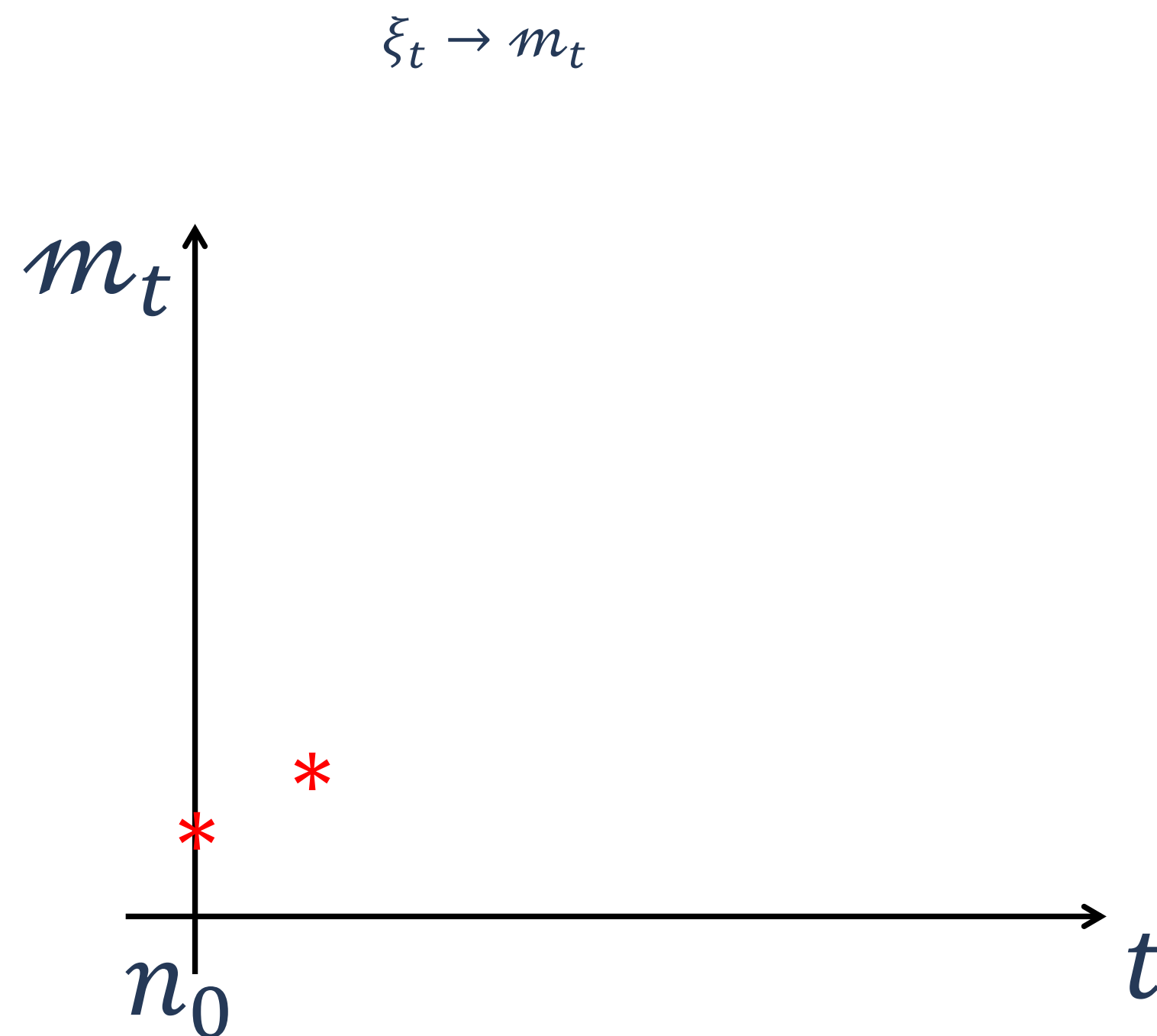
# Корреляционная теория в оценке мер раннего обнаружения критических переходов

Скользящее окно с левой фиксированной границей для идентификации предвестников критических переходов

$\{\xi_t, t = \overline{0, N}\}$  – наблюдаемый дискретный ряд

$\{m_t, t = \overline{n_0, N}\}$  – ряд мер раннего предупреждения

$[0, n_0]$  – начальное окно



Окно с фиксированной левой границей и скользящей правой границей





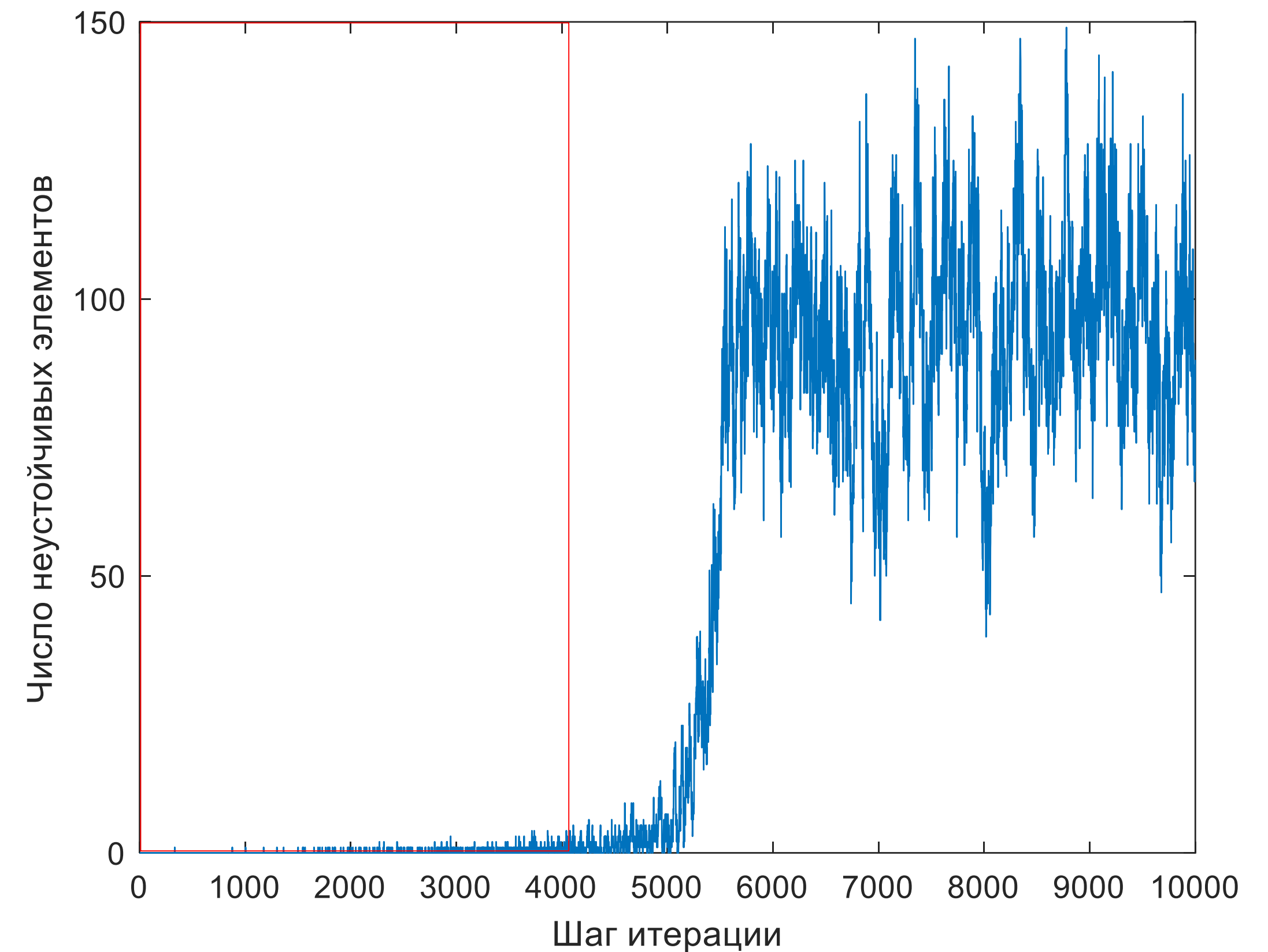
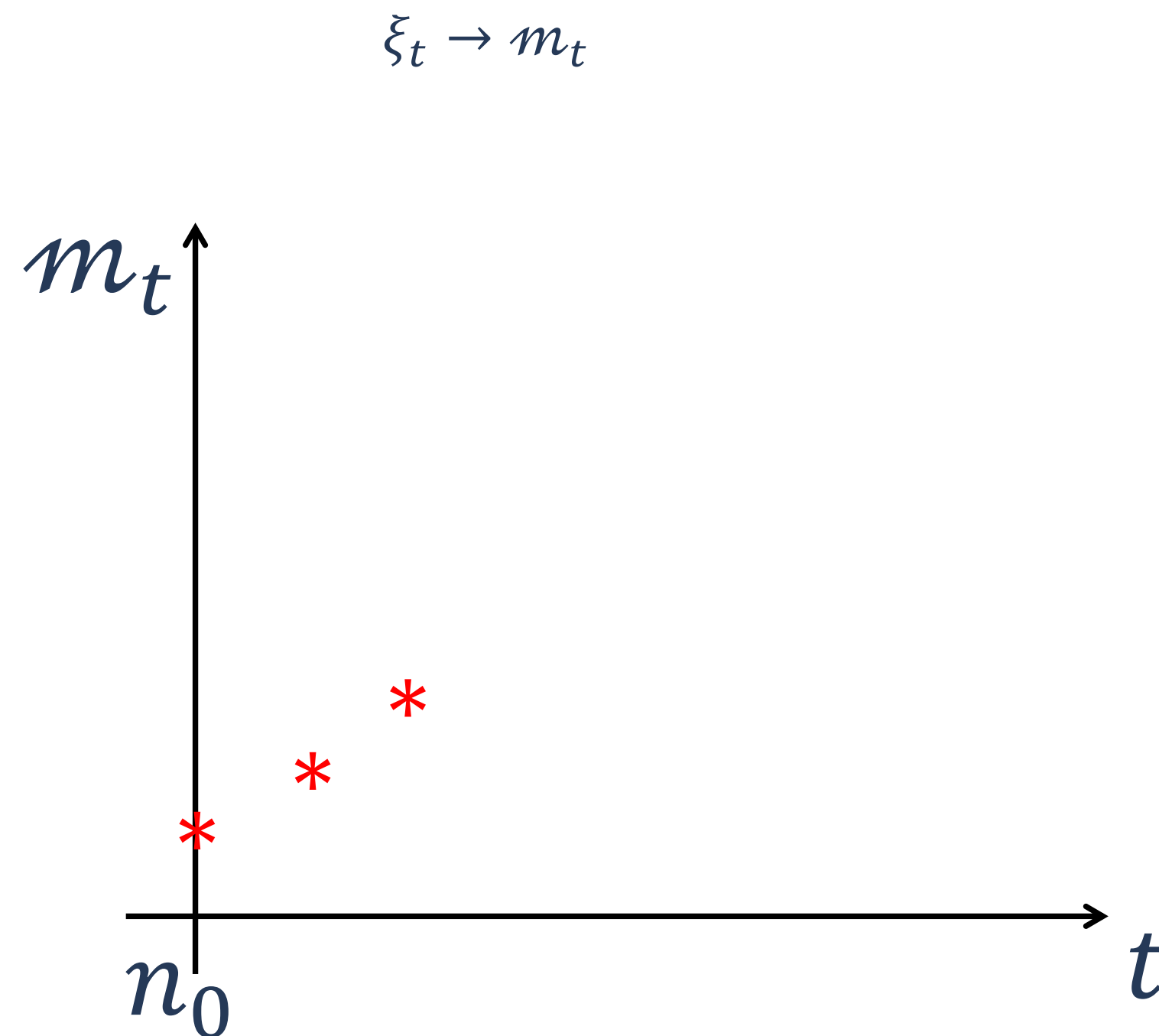
# Корреляционная теория в оценке мер раннего обнаружения критических переходов

Скользящее окно с левой фиксированной границей для идентификации предвестников критических переходов

$\{\xi_t, t = \overline{0, N}\}$  – наблюдаемый дискретный ряд

$\{m_t, t = \overline{n_0, N}\}$  – ряд мер раннего предупреждения

$[0, n_0]$  – начальное окно



Окно с фиксированной левой границей и скользящей правой границей



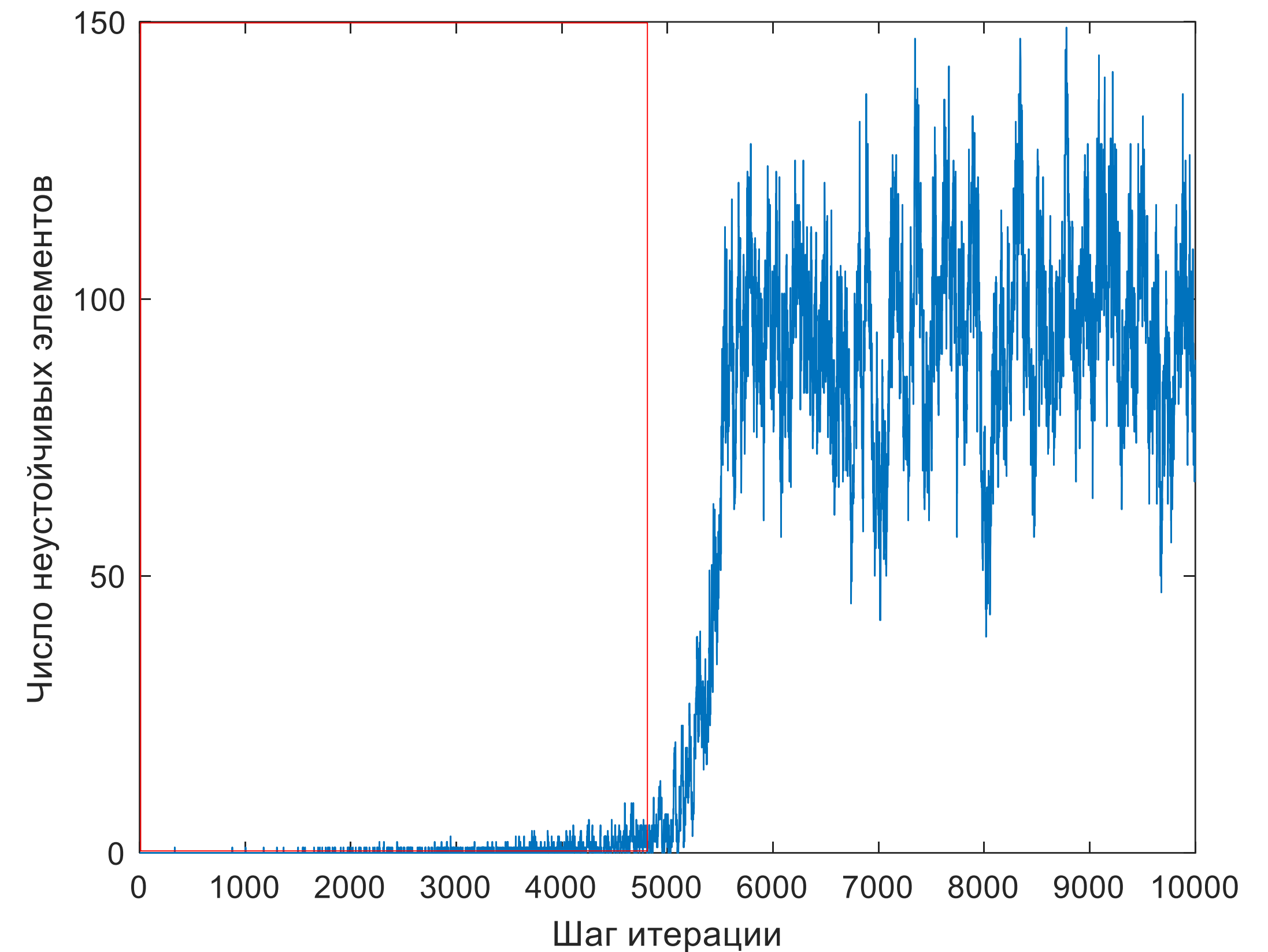
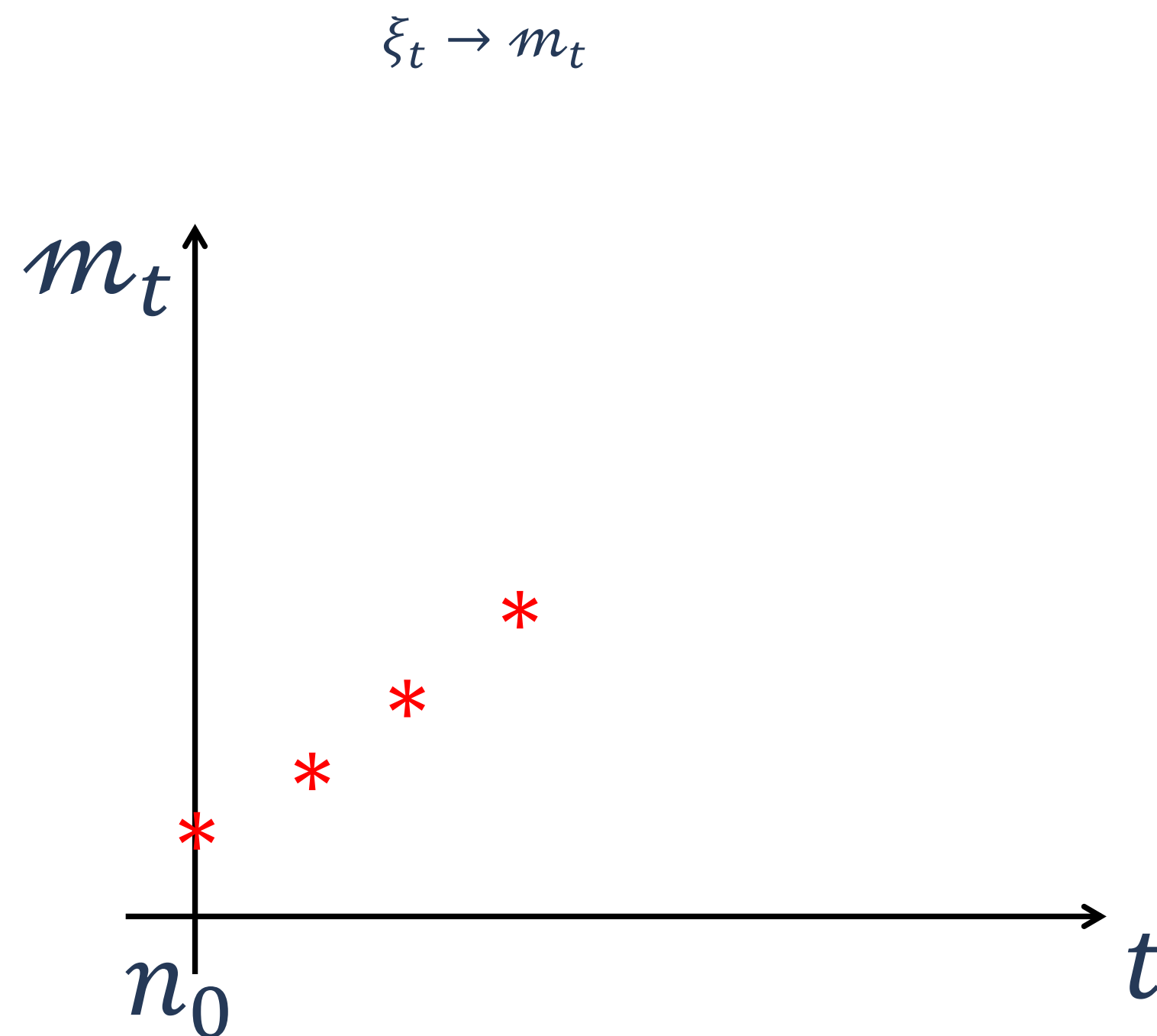
# Корреляционная теория в оценке мер раннего обнаружения критических переходов

Скользящее окно с левой фиксированной границей для идентификации предвестников критических переходов

$\{\xi_t, t = \overline{0, N}\}$  – наблюдаемый дискретный ряд

$\{m_t, t = \overline{n_0, N}\}$  – ряд мер раннего предупреждения

$[0, n_0]$  – начальное окно



Окно с фиксированной левой границей и скользящей правой границей





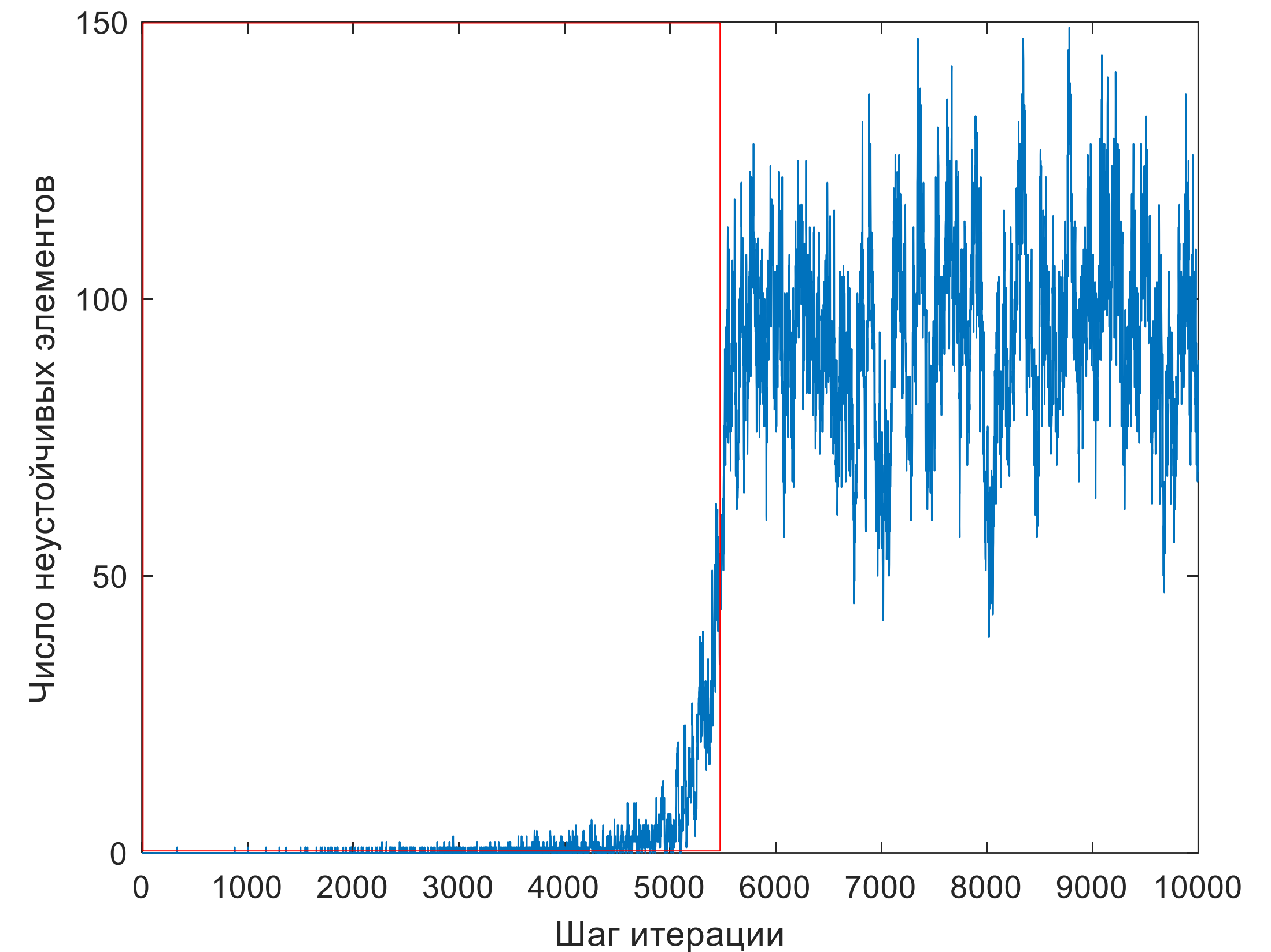
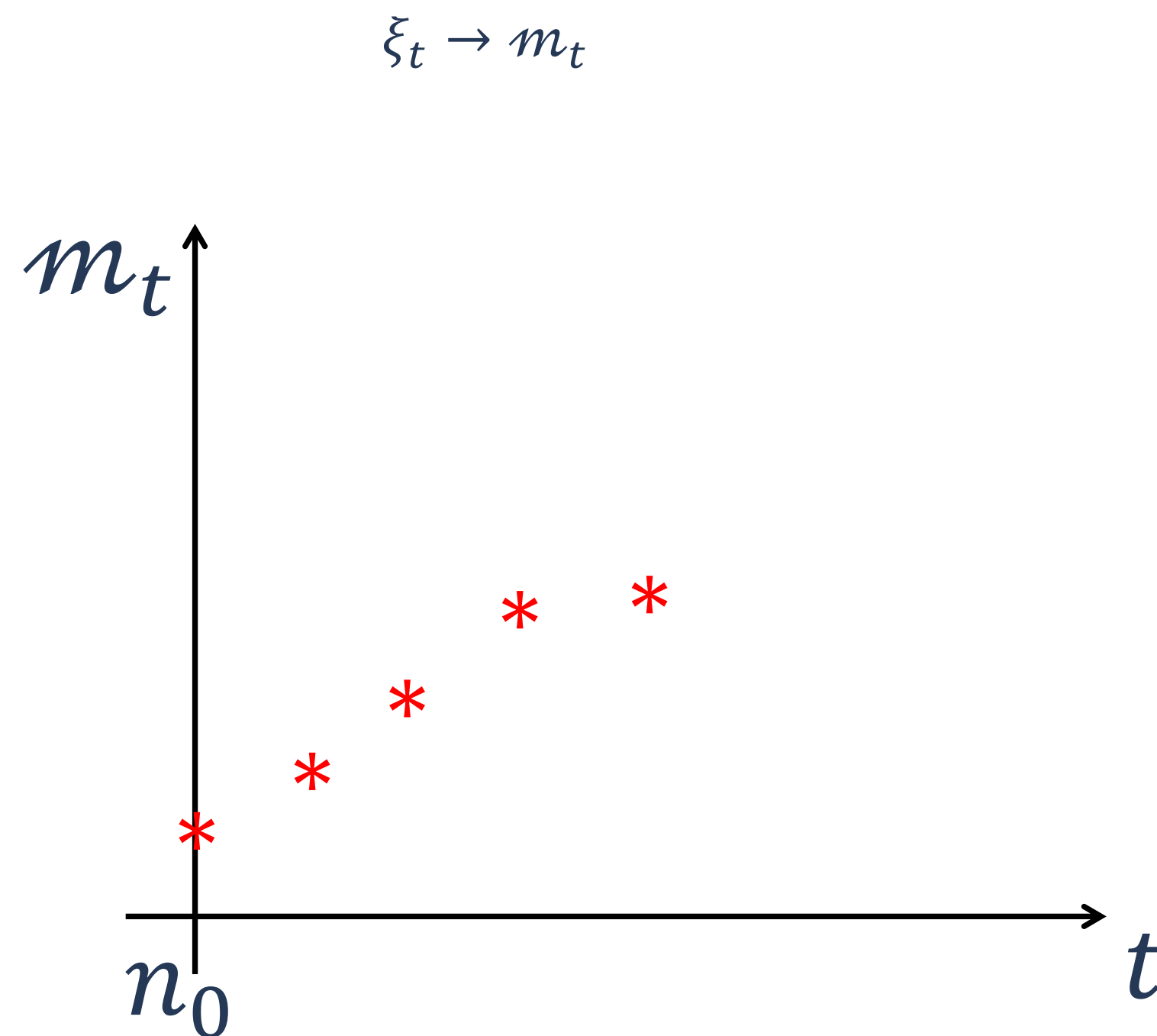
# Корреляционная теория в оценке мер раннего обнаружения критических переходов

Скользящее окно с левой фиксированной границей для идентификации предвестников критических переходов

$\{\xi_t, t = \overline{0, N}\}$  – наблюдаемый дискретный ряд

$\{m_t, t = \overline{n_0, N}\}$  – ряд мер раннего предупреждения

$[0, n_0]$  – начальное окно



Окно с фиксированной левой границей и скользящей правой границей

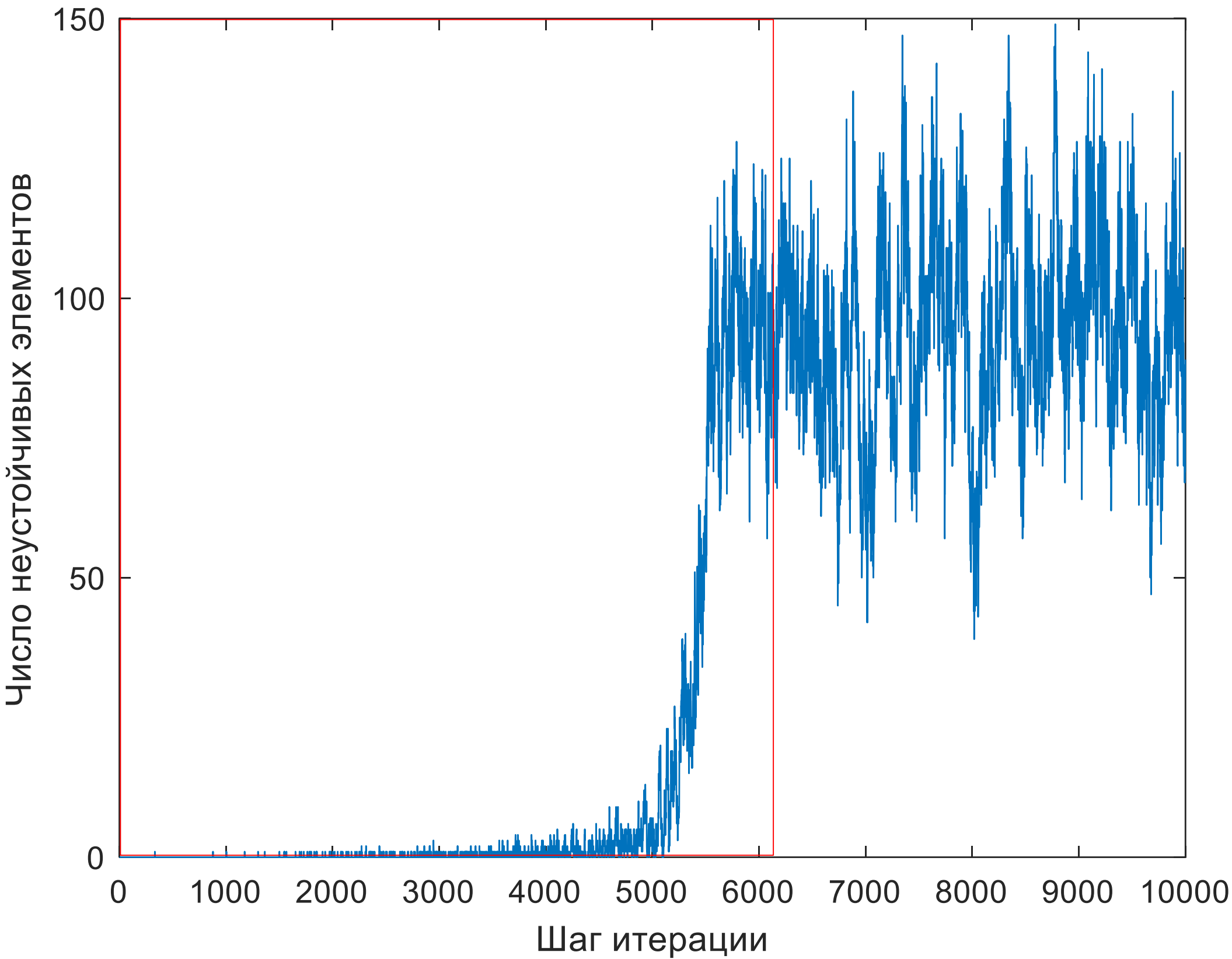
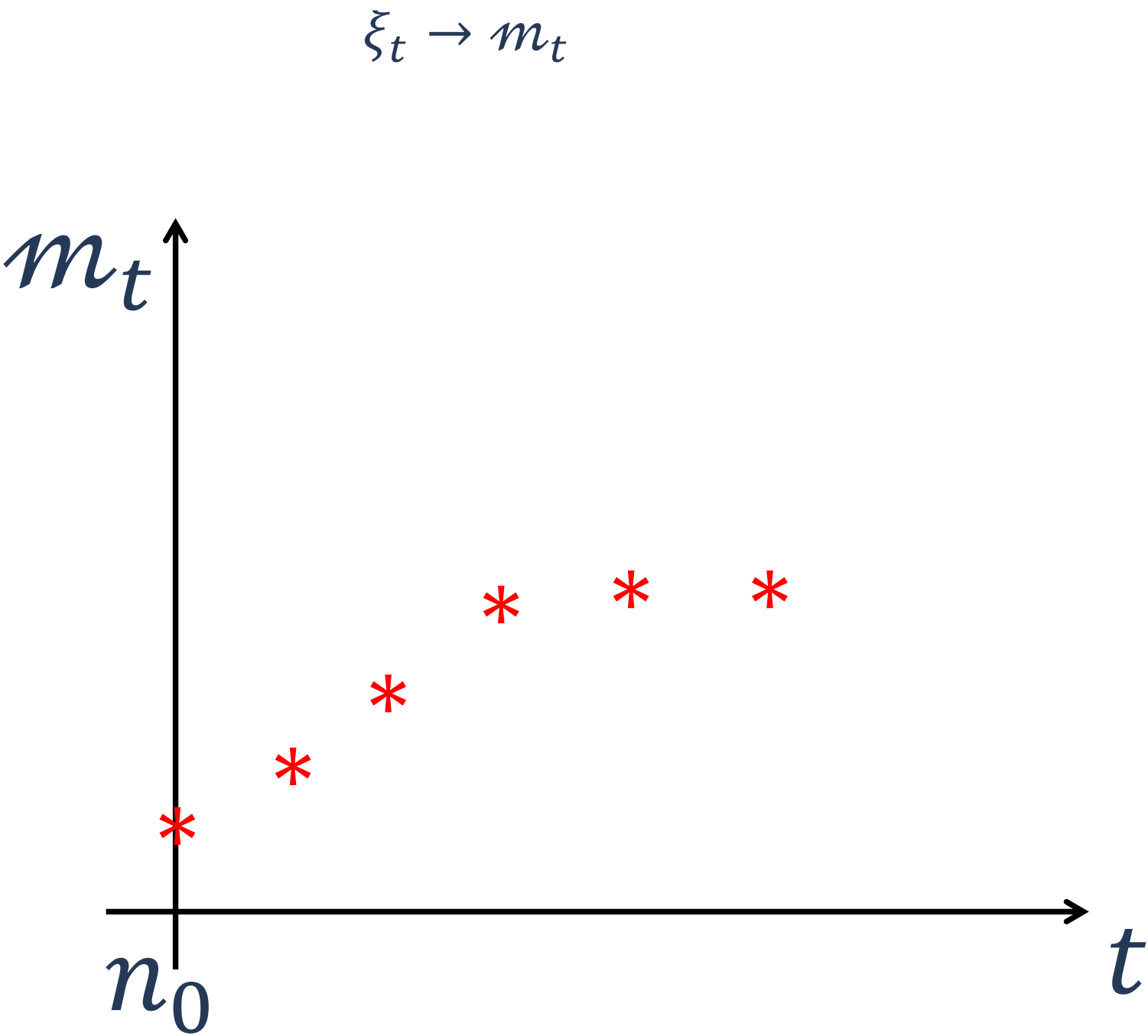


Скользящее окно с левой фиксированной границей для идентификации предвестников критических переходов

$\{\xi_t, t = \overline{0, N}\}$  – наблюдаемый дискретный ряд

$\{m_t, t = \overline{n_0, N}\}$  – ряд мер раннего предупреждения

$[0, n_0]$  – начальное окно



Окно с фиксированной левой границей и скользящей правой границей

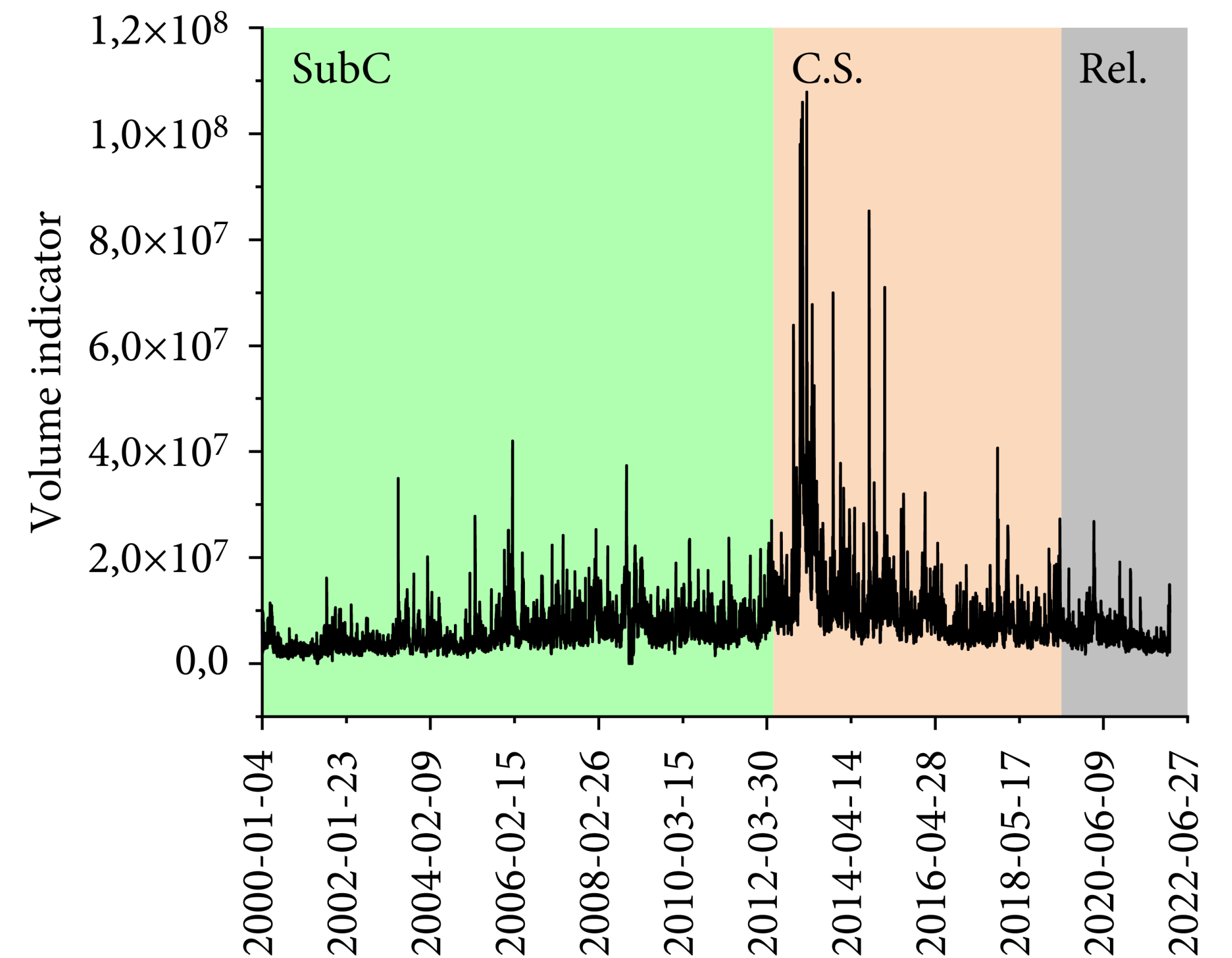
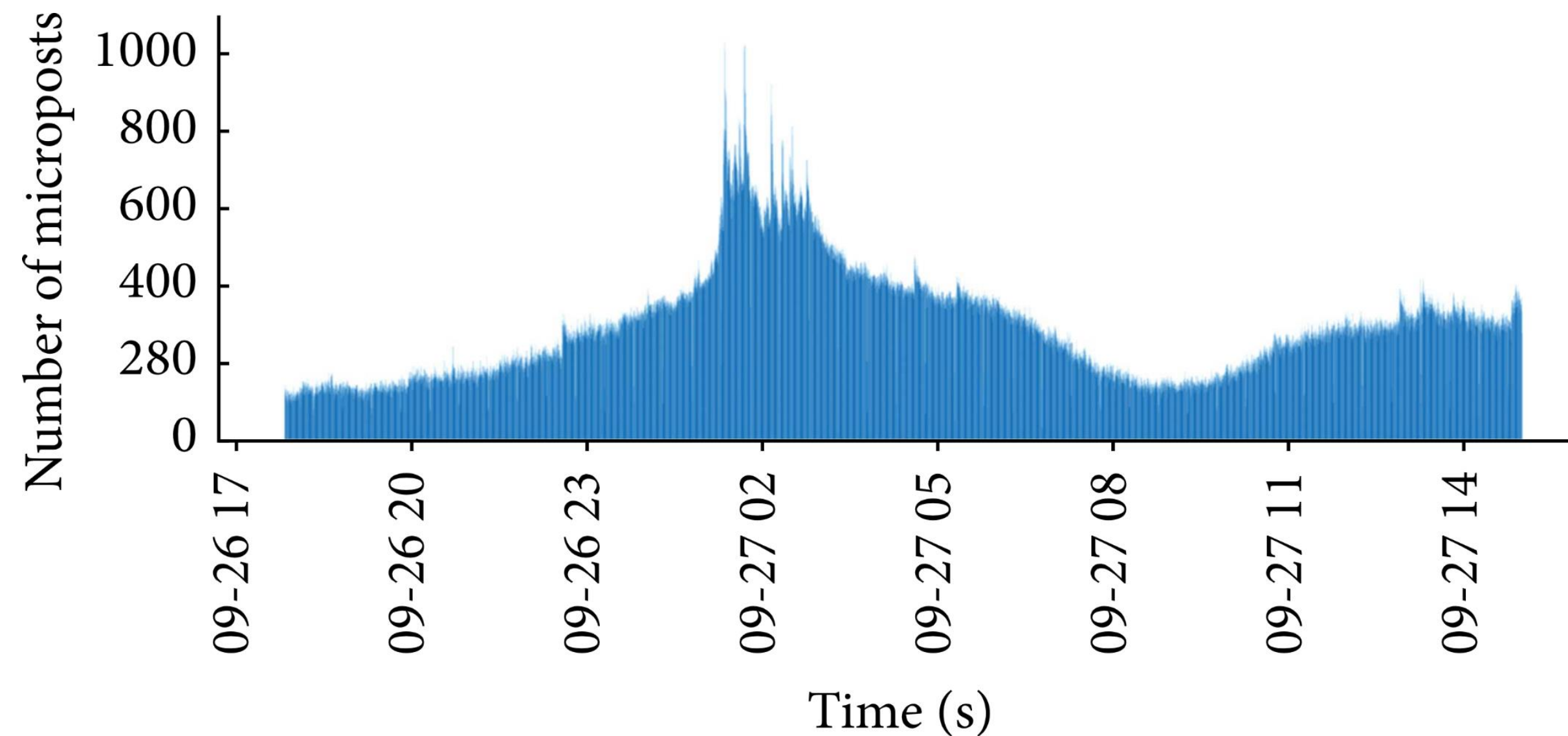




# Корреляционная теория в оценке мер раннего обнаружения критических переходов

Самоорганизация в критическое состояние: тестовые модели самоорганизации в критическое и бистабильное состояния

**Проблема:** в реальных временных рядах заведомо неизвестны особенности поведения мер раннего обнаружения (предвестников) критических переходов и крайне сложно визуально определить критическую точку





# Корреляционная теория в оценке мер раннего обнаружения критических переходов

---

## Самоорганизация в критическое состояние: тестовые модели самоорганизации в критическое и бистабильное состояния

Два класса тестовых моделей

1. Решения (реализации случайного процесса) систем стохастических дифференциальных уравнений, связывающих параметр порядка и управляющий параметр
2. Ряды числа неустойчивых вершин песочных клеточных автоматов (sandpile cellular automata)





# Корреляционная теория в оценке мер раннего обнаружения критических переходов

## Клеточные автоматы, порождающие тестовые временные ряды

Модель Бака–Танга–Визенфельда (песочный клеточный автомат с самоорганизованной критичностью)

Итерация  $i$

1. Случайным образом выбираются ячейки  $(i, j)$  на решетке размера  $L \times L$

2. В эти ячейки добавляется по одной «песчинке»:  $z_{i,j} = z_{i,j} + 1$

3. Возможно одно из двух состояний системы:

- Устойчивое состояние системы – для всех ячеек выполнено неравенство  $z_{i,j} < z_C$  (переход к итерации  $i + 1$ )

$z_C$  – порог устойчивости, одинаковый для всех ячеек

- Неустойчивое состояние системы –  $z_{i,j} \geq z_C$

4. Возмущение – увеличение на 1 значения в соседних ячейках ( $z_{i\pm 1, j\pm 1}^+ = z_{i\pm 1, j\pm 1} + 1$ )

5. Релаксация до устойчивого состояния – опрокидывание неустойчивых ячеек ( $z_{i,j}^- = 4$ )

Итерация  $i + 1$

0	0	0	0
0	4	3	0
0	3	4	0
0	0	3	0

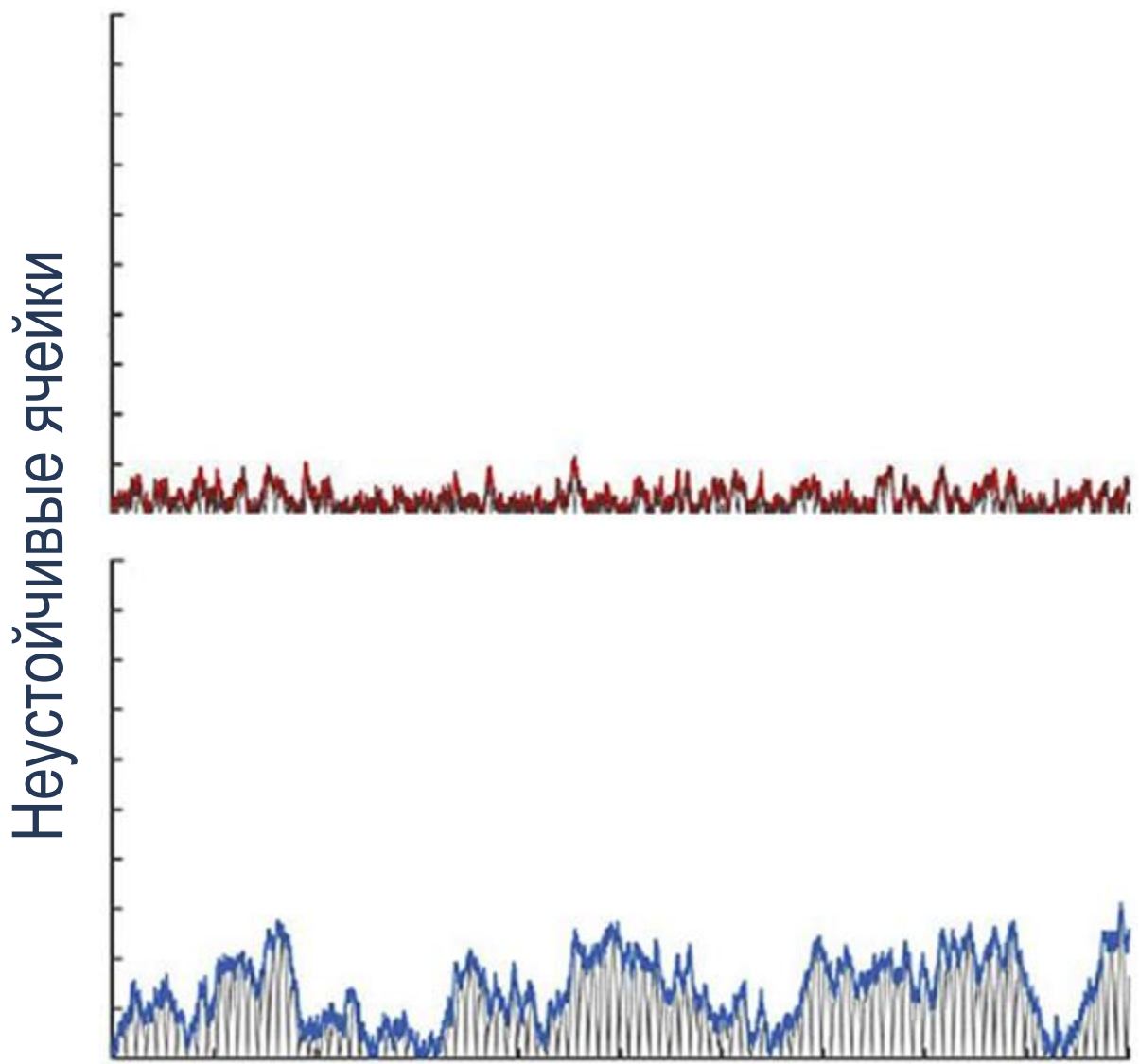
$$z_C = 4$$

0	1	0	0
1	0	5	0
0	5	2	1
0	0	4	0

0	1	1	0
1	2	1	1
1	5	5	1
0	2	0	1

–1

0	1	1	0
1	3	2	1
2	2	2	2
0	3	1	1

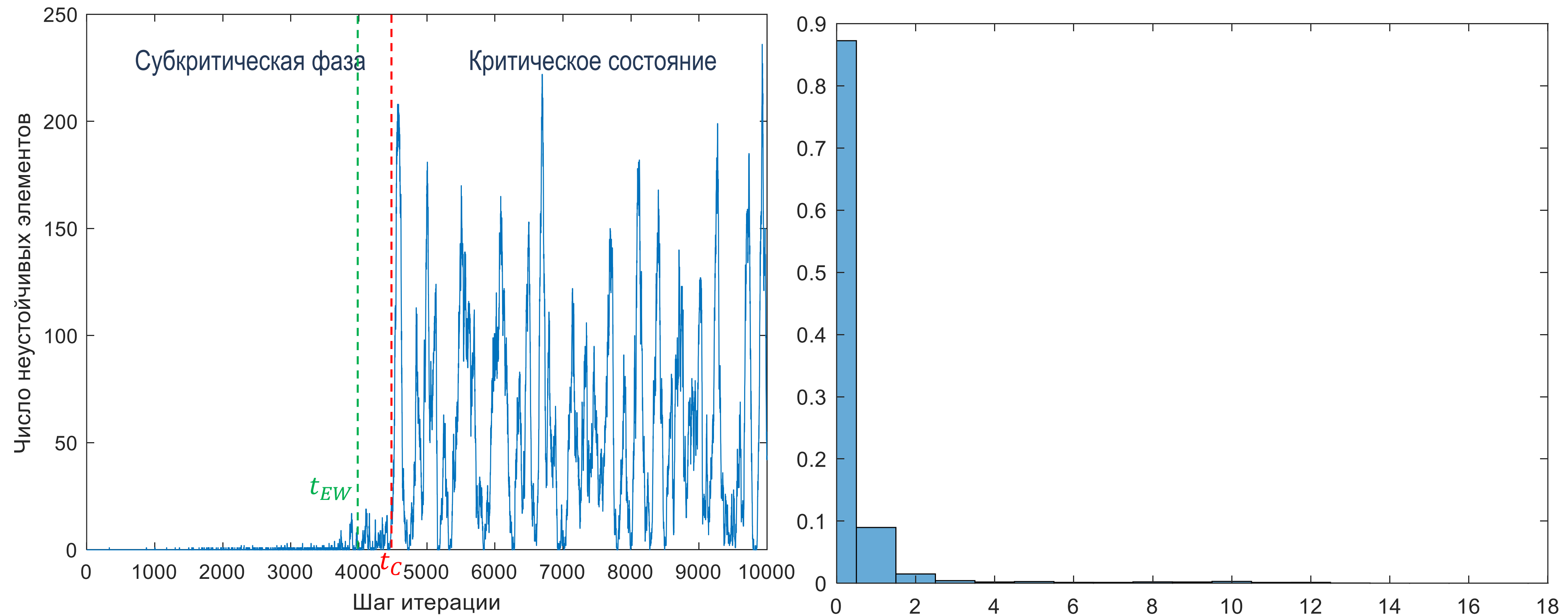




# Корреляционная теория в оценке мер раннего обнаружения критических переходов

Визуальная оценка приближения к критической точке по изменению гистограммы для  $\xi_t$  в окне  $[0, t]$

- критический переход первого рода



Временной ряд, соответствующий критическому переходу первого рода (слева) и гистограмма при  $t' = 4100$

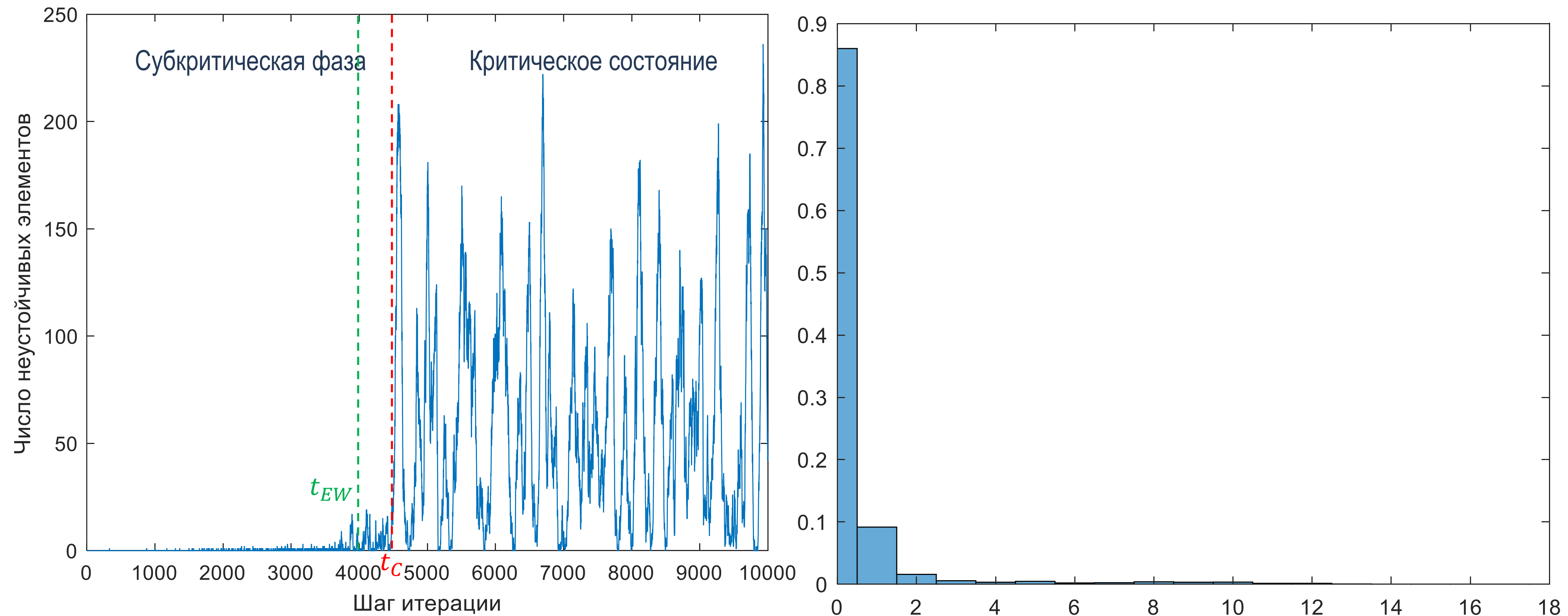




# Корреляционная теория в оценке мер раннего обнаружения критических переходов

Визуальная оценка приближения к критической точке по изменению гистограммы для  $\xi_t$  в окне  $[0, t]$

- критический переход первого рода



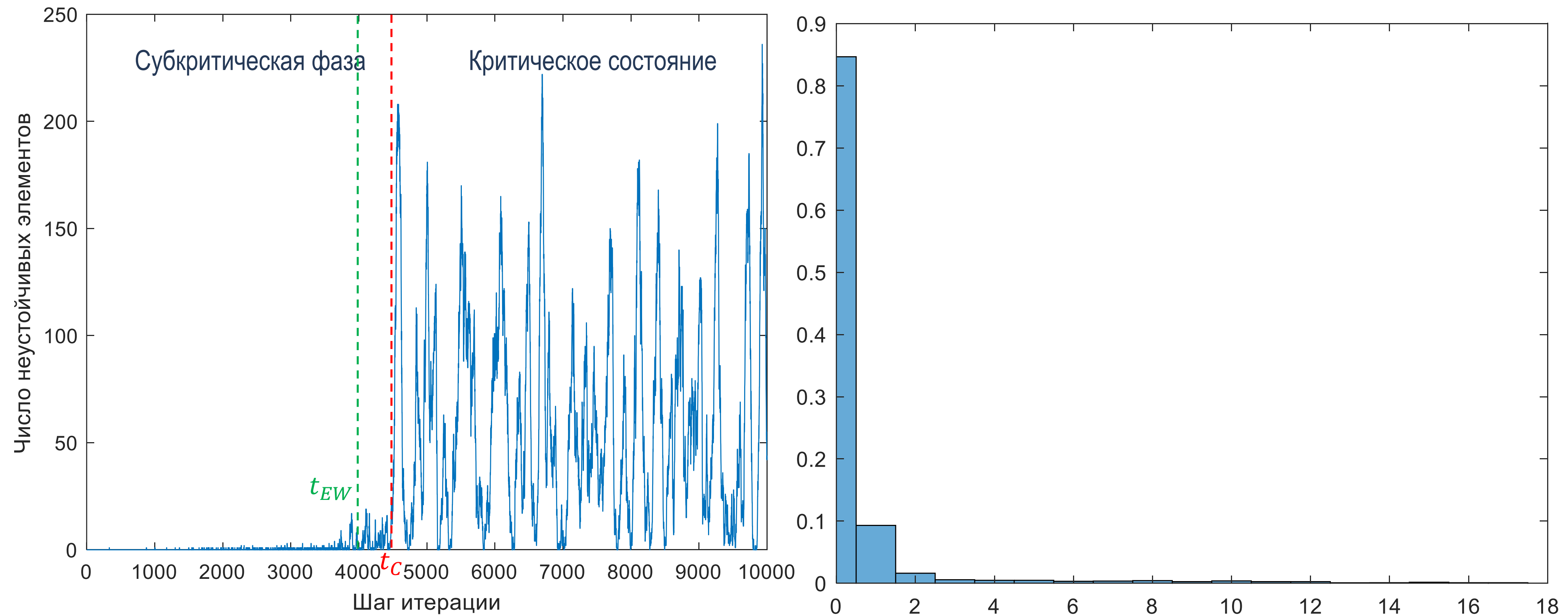
Временной ряд, соответствующий критическому переходу первого рода (слева) и гистограмма при  $t' = 4200$



# Корреляционная теория в оценке мер раннего обнаружения критических переходов

Визуальная оценка приближения к критической точке по изменению гистограммы для  $\xi_t$  в окне  $[0, t]$

- критический переход первого рода



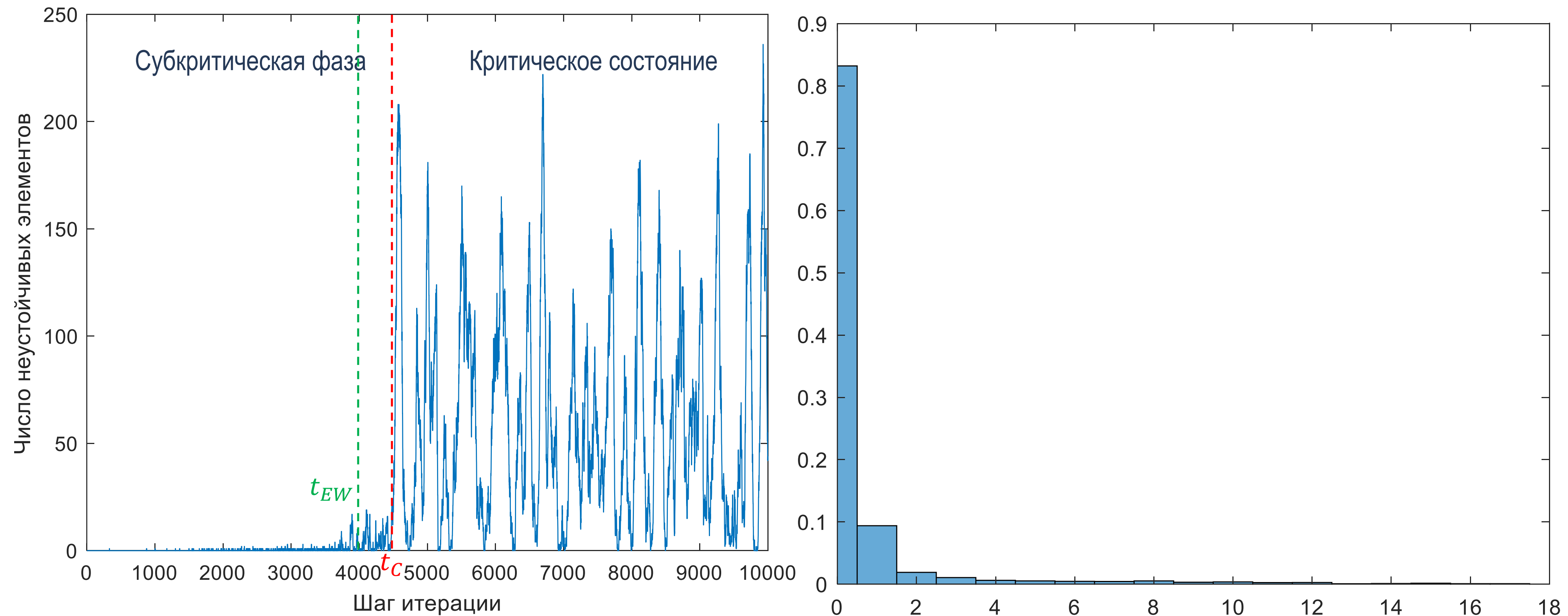
Временной ряд, соответствующий критическому переходу первого рода (слева) и гистограмма при  $t' = 4300$



# Корреляционная теория в оценке мер раннего обнаружения критических переходов

Визуальная оценка приближения к критической точке по изменению гистограммы для  $\xi_t$  в окне  $[0, t]$

- критический переход первого рода



Временной ряд, соответствующий критическому переходу первого рода (слева) и гистограмма при  $t' = 4400$

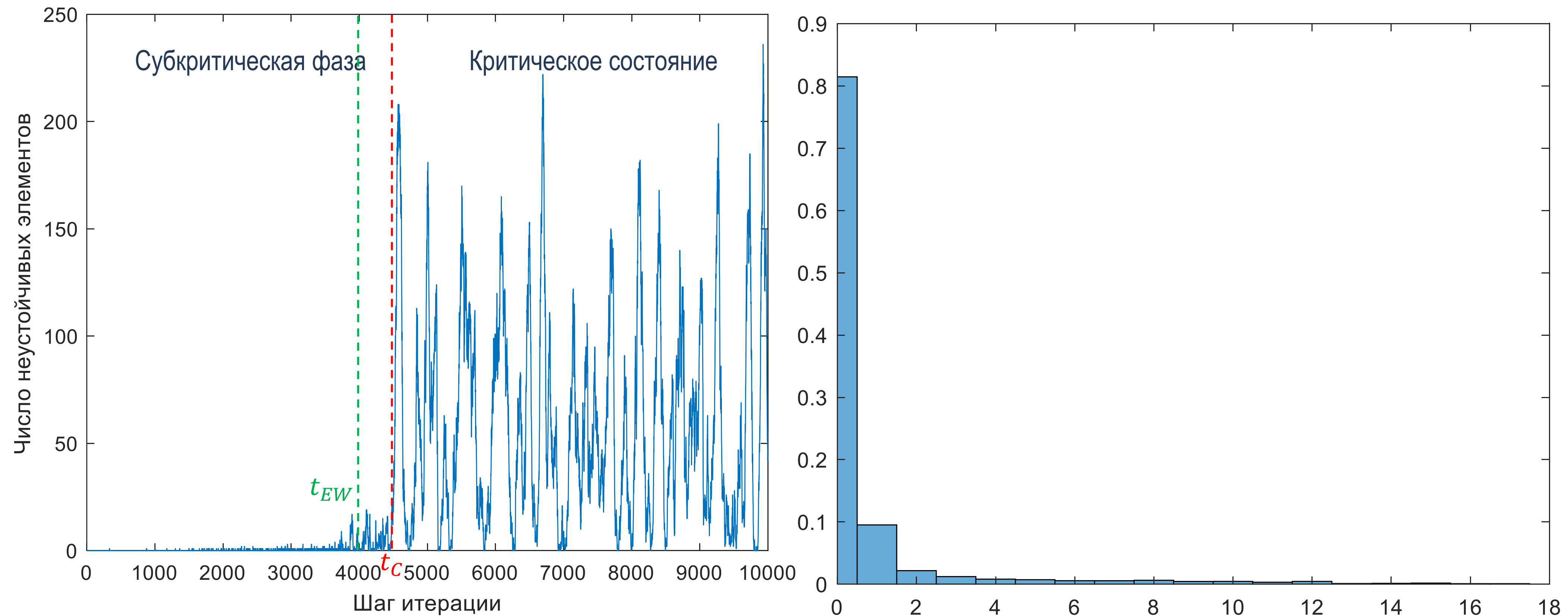




# Корреляционная теория в оценке мер раннего обнаружения критических переходов

Визуальная оценка приближения к критической точке по изменению гистограммы для  $\xi_t$  в окне  $[0, t]$

- критический переход первого рода



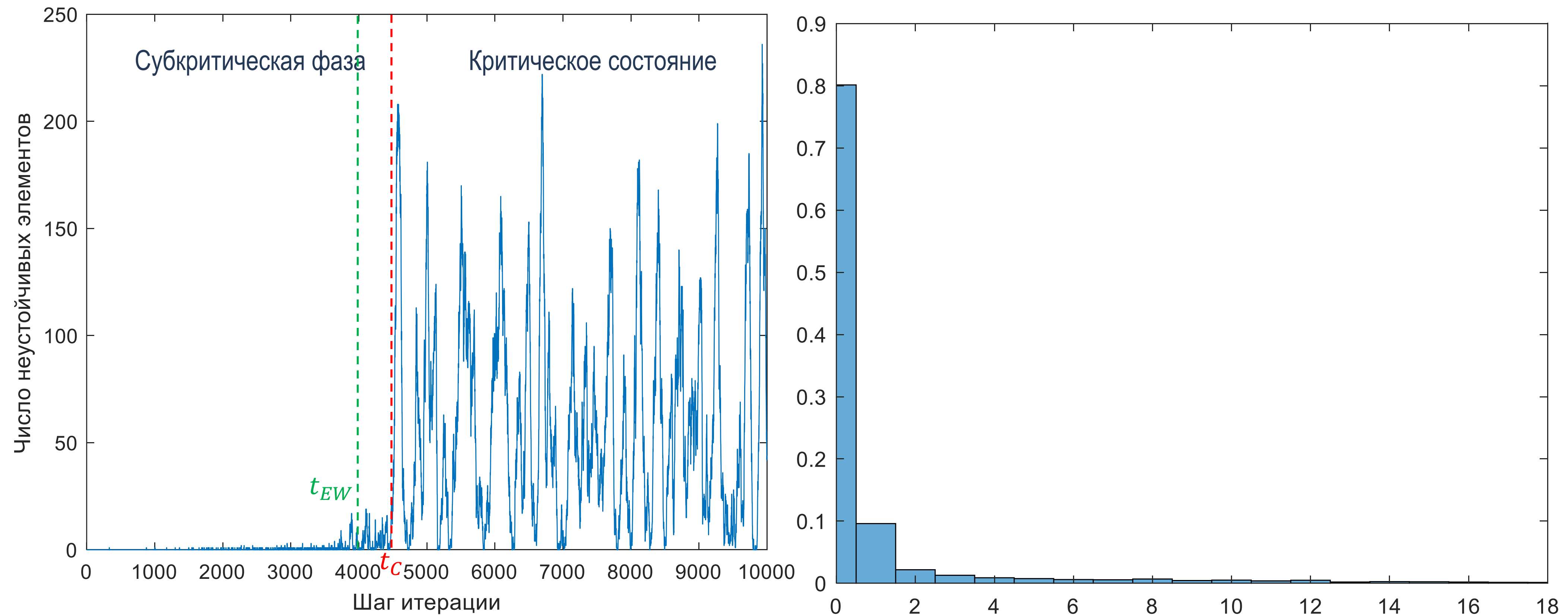
Временной ряд, соответствующий критическому переходу первого рода (слева) и гистограмма при  $t' = 4400$



# Корреляционная теория в оценке мер раннего обнаружения критических переходов

Визуальная оценка приближения к критической точке по изменению гистограммы для  $\xi_t$  в окне  $[0, t]$

- критический переход первого рода



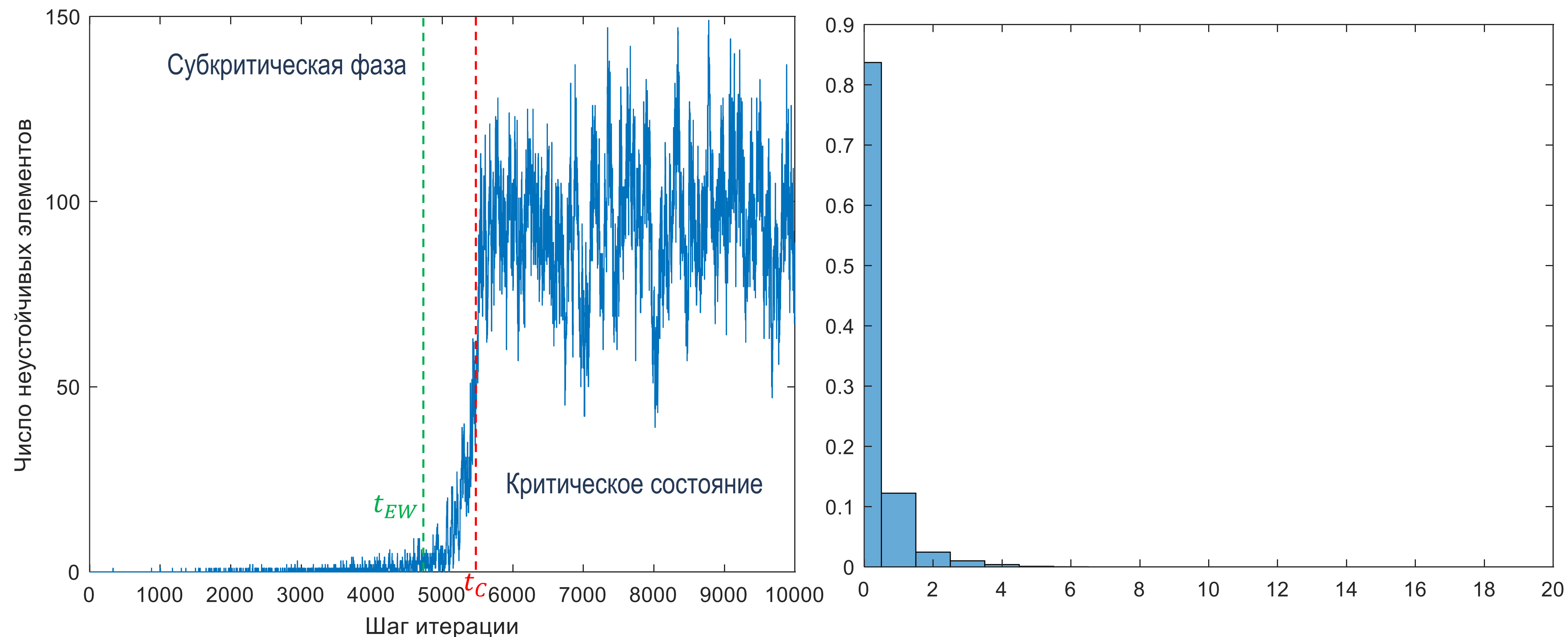
Временной ряд, соответствующий критическому переходу первого рода (слева) и гистограмма при  $t' = 4500$



# Корреляционная теория в оценке мер раннего обнаружения критических переходов

Визуальная оценка приближения к критической точке по изменению гистограммы для  $\xi_t$  в окне  $[0, t]$

- критический переход второго рода



Временной ряд, соответствующий критическому переходу второго рода (слева) и гистограмма при  $t' = 4500$

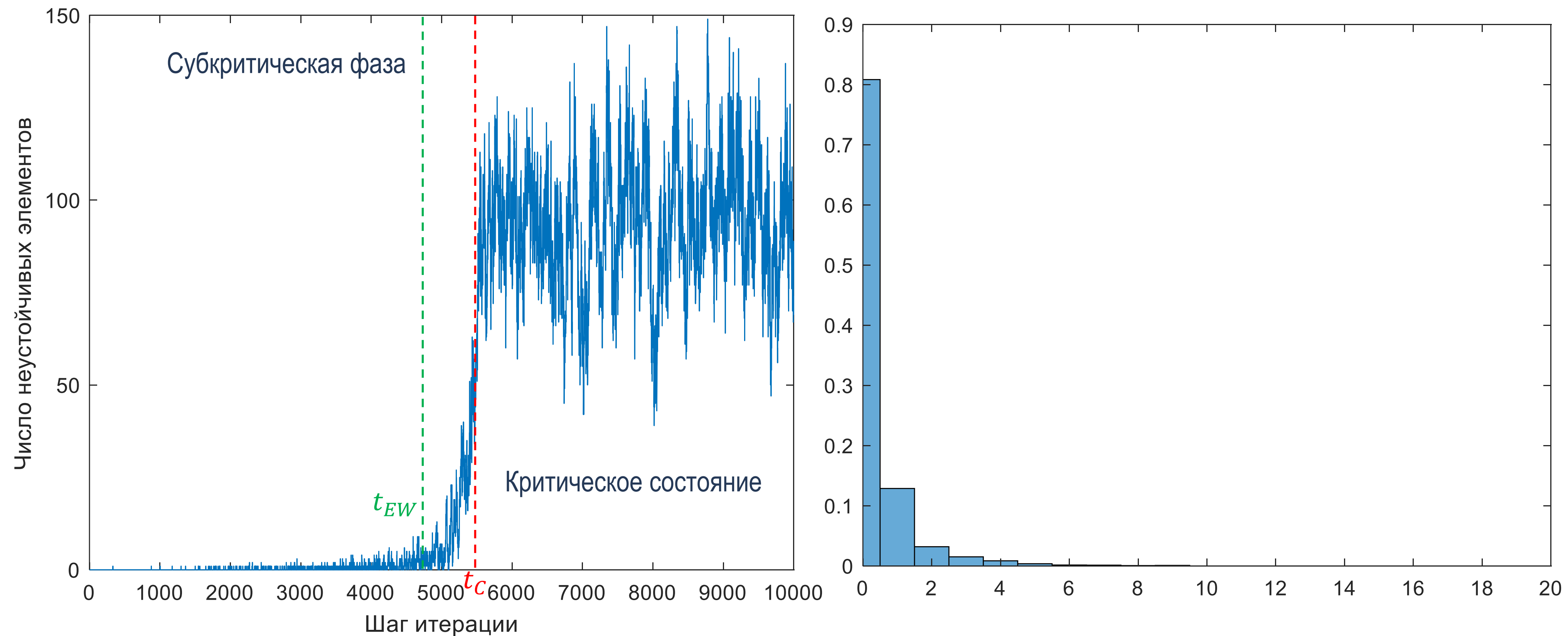




# Корреляционная теория в оценке мер раннего обнаружения критических переходов

Визуальная оценка приближения к критической точке по изменению гистограммы для  $\xi_t$  в окне  $[0, t]$

- критический переход второго рода



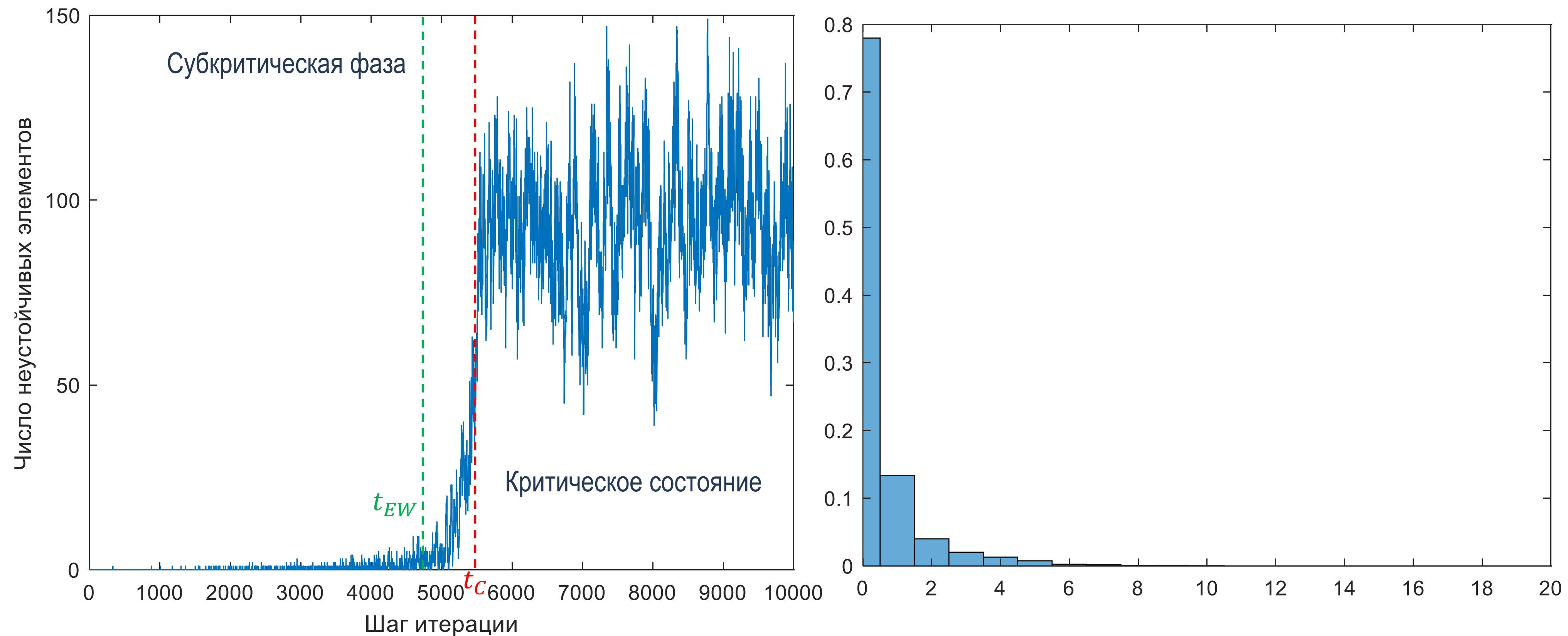
Временной ряд, соответствующий критическому переходу второго рода (слева) и гистограмма при  $t' = 4700$



# Корреляционная теория в оценке мер раннего обнаружения критических переходов

Визуальная оценка приближения к критической точке по изменению гистограммы для  $\xi_t$  в окне  $[0, t]$

- критический переход второго рода



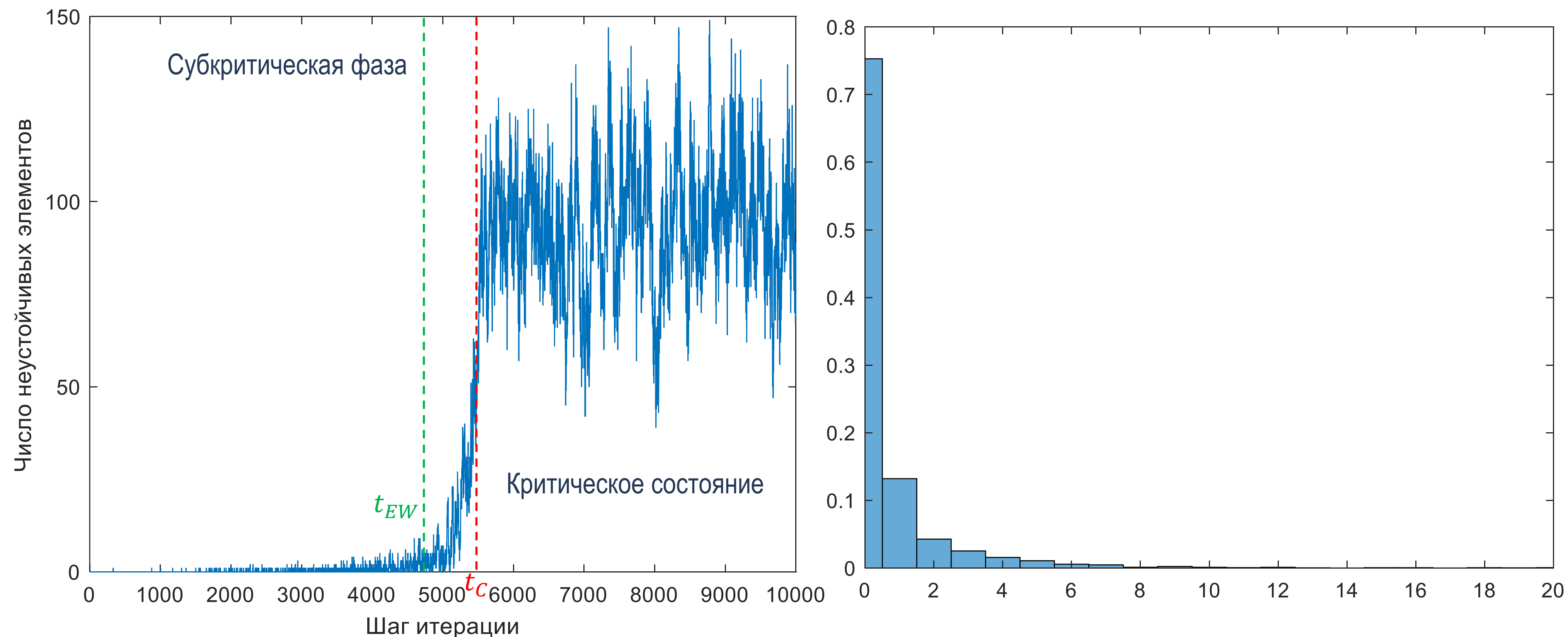
Временной ряд, соответствующий критическому переходу второго рода (слева) и гистограмма при  $t' = 4900$



# Корреляционная теория в оценке мер раннего обнаружения критических переходов

Визуальная оценка приближения к критической точке по изменению гистограммы для  $\xi_t$  в окне  $[0, t]$

- критический переход второго рода



Временной ряд, соответствующий критическому переходу второго рода (слева) и гистограмма при  $t' = 5100$

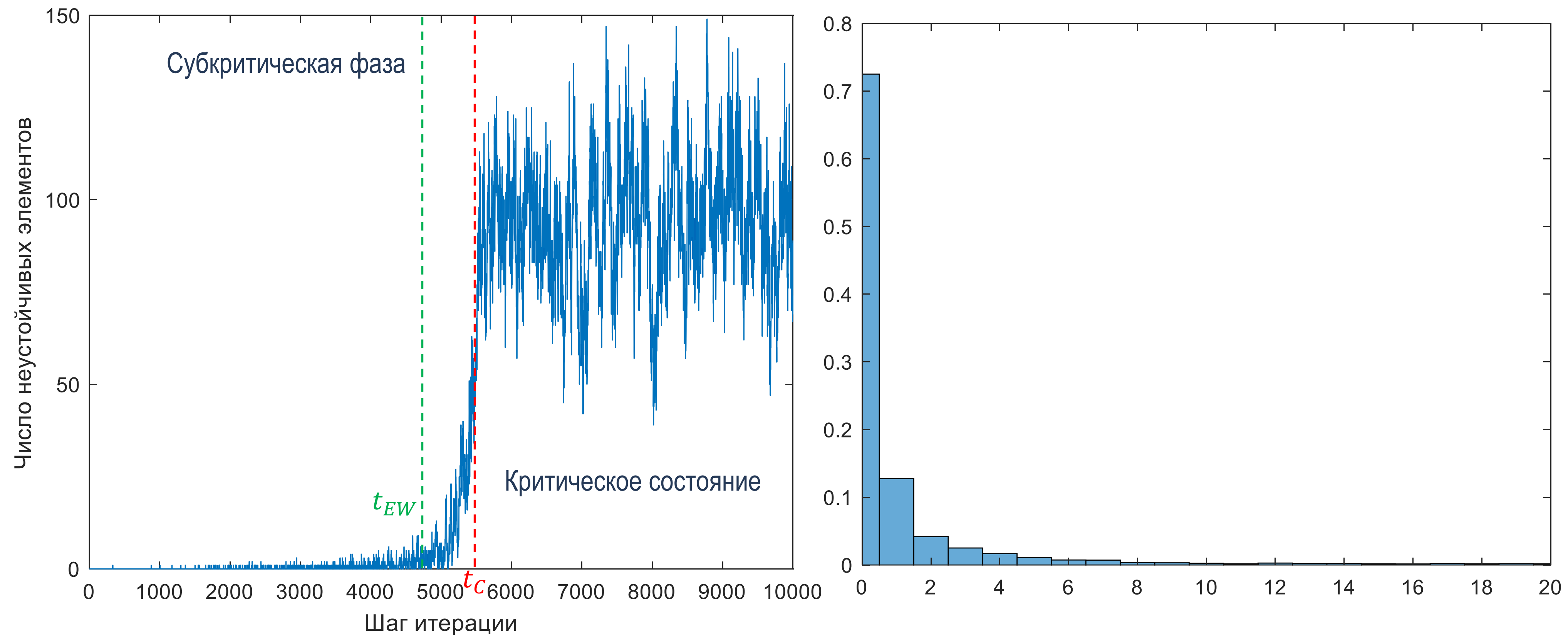




# Корреляционная теория в оценке мер раннего обнаружения критических переходов

Визуальная оценка приближения к критической точке по изменению гистограммы для  $\xi_t$  в окне  $[0, t]$

- критический переход второго рода



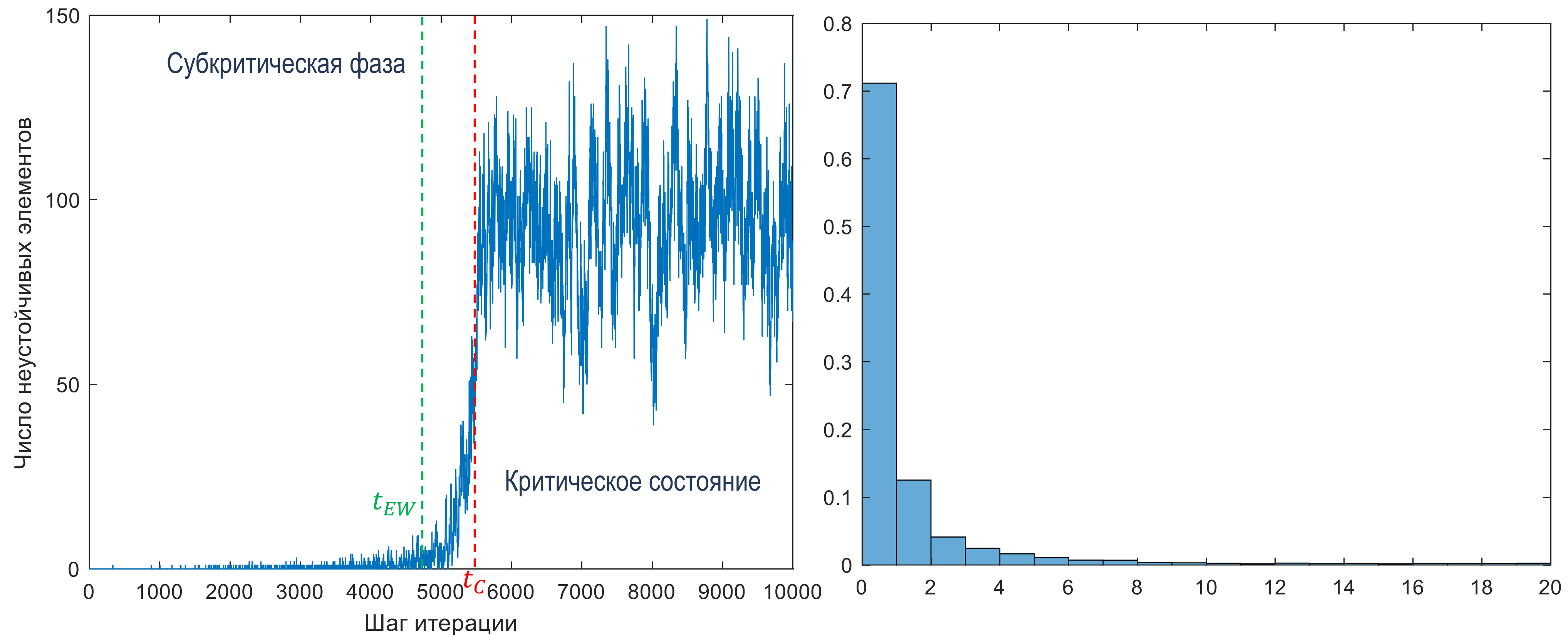
Временной ряд, соответствующий критическому переходу второго рода (слева) и гистограмма при  $t' = 5300$



# Корреляционная теория в оценке мер раннего обнаружения критических переходов

Визуальная оценка приближения к критической точке по изменению гистограммы для  $\xi_t$  в окне  $[0, t]$

- критический переход второго рода

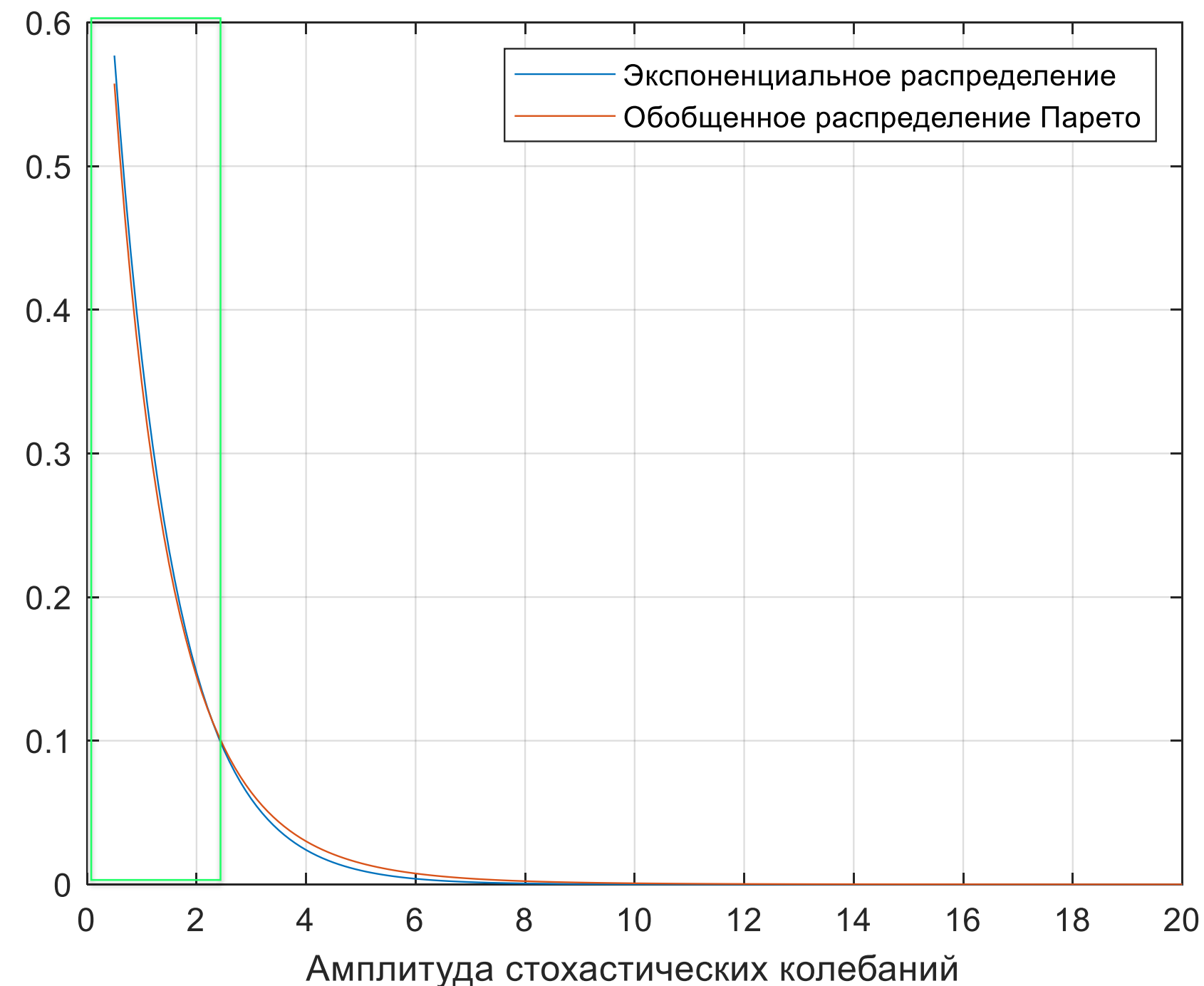


Временной ряд, соответствующий критическому переходу второго рода (слева) и гистограмма при  $t' = 5500$



# Корреляционная теория в оценке мер раннего обнаружения критических переходов

Проблема подгонки вероятностного распределения под гистограмму для  $\xi_t$  в интервале колебаний малых и средних амплитуд



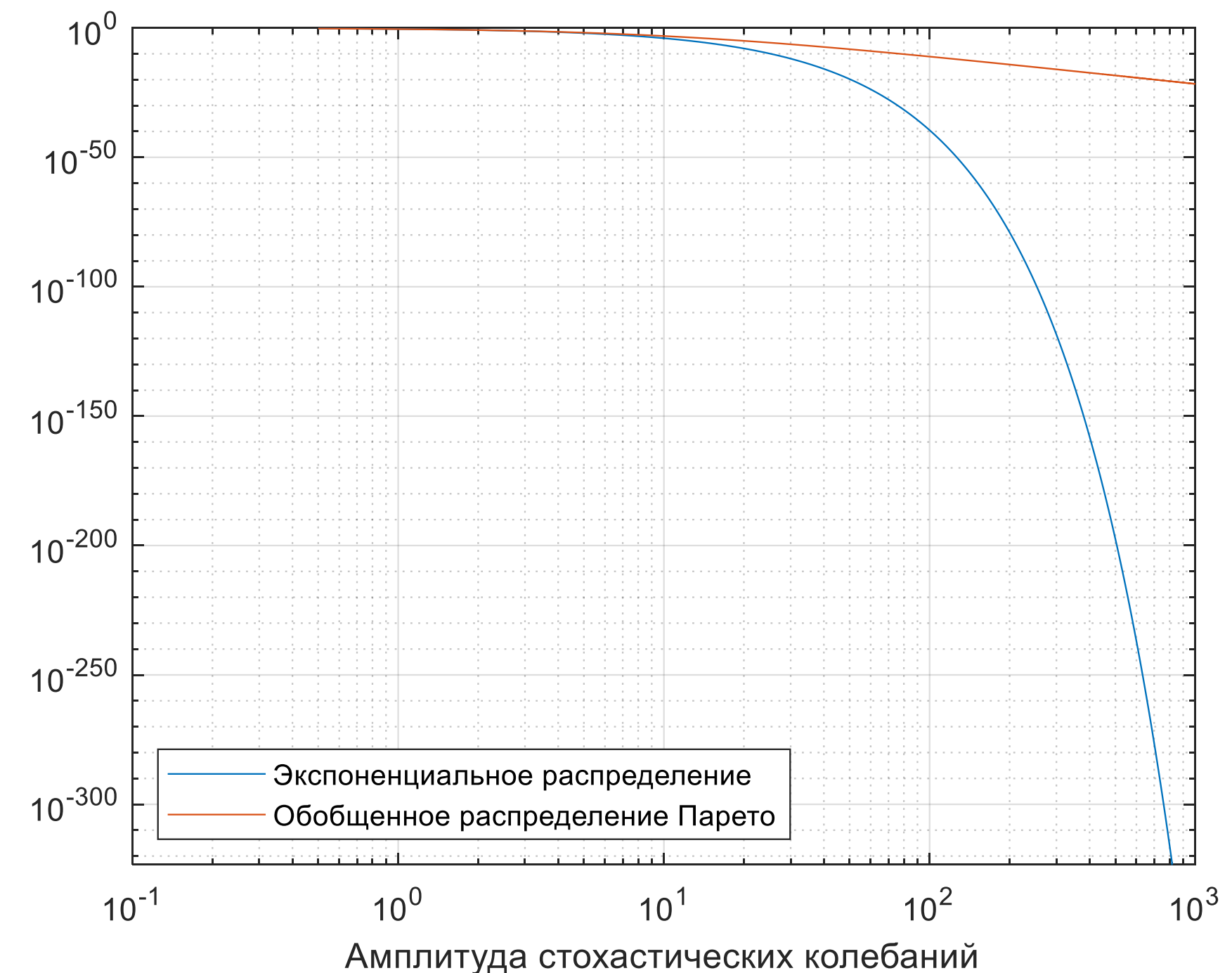
Плотность распределения вероятностей

- обобщенное распределение Парето (тяжелый хвост)

$$p(x|k, \sigma, \theta) = \frac{1}{\sigma} \left( 1 + k \frac{x - \theta}{\sigma} \right)^{-1 - \frac{1}{k}}$$

- экспоненциальное распределение (легкий хвост)

$$p(x|0, \sigma, \theta) = \frac{1}{\sigma} e^{-\frac{x - \theta}{\sigma}}$$



Плотность распределения вероятностей в двойном логарифмическом масштабе

- обобщенное распределение Парето (тяжелый хвост)

$$p(x|k, \sigma, \theta) = \frac{1}{\sigma} \left( 1 + k \frac{x - \theta}{\sigma} \right)^{-1 - \frac{1}{k}}$$

- экспоненциальное распределение (легкий хвост)

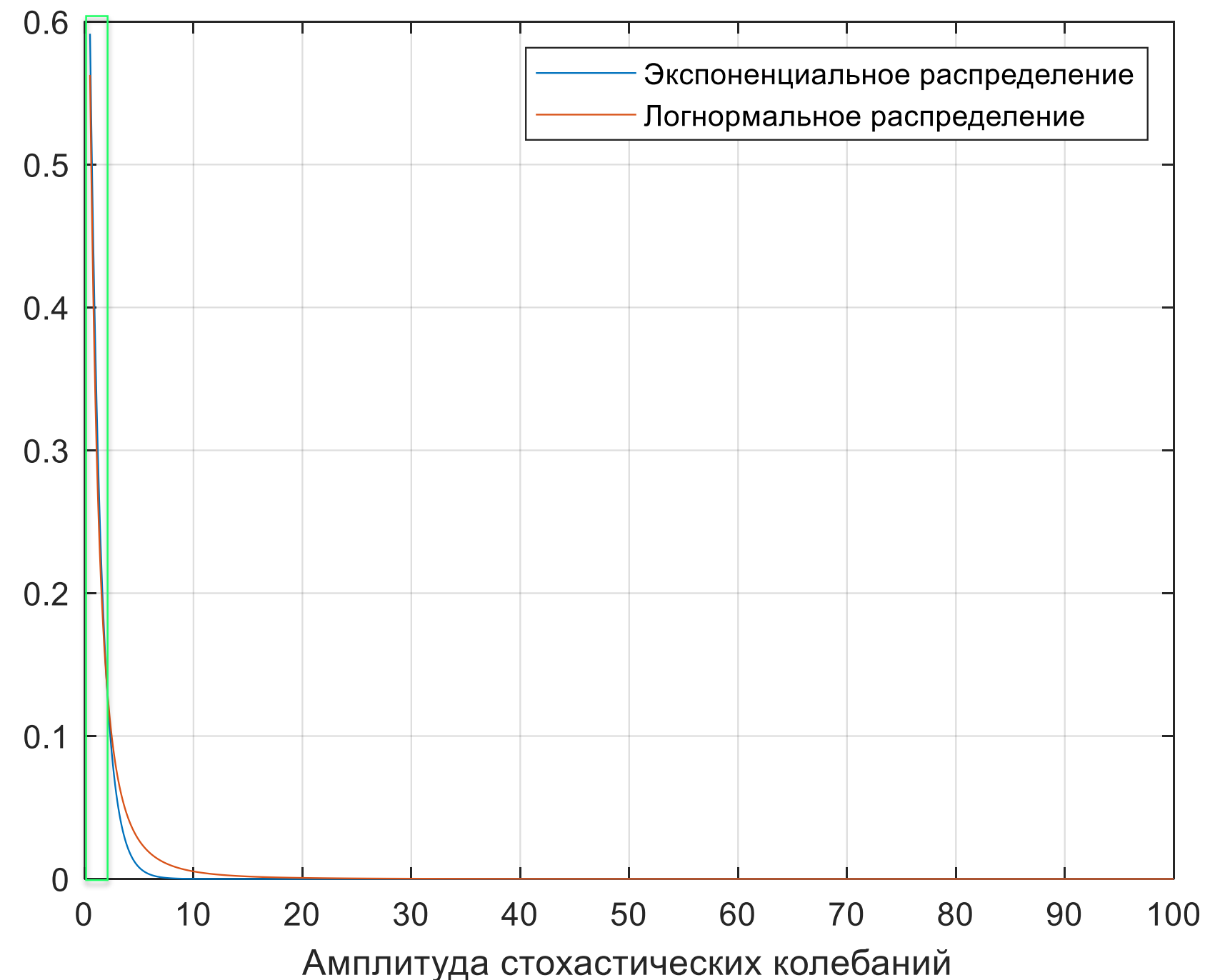
$$p(x|0, \sigma, \theta) = \frac{1}{\sigma} e^{-\frac{x - \theta}{\sigma}}$$





# Корреляционная теория в оценке мер раннего обнаружения критических переходов

Проблема подгонки вероятностного распределения под гистограмму для  $\xi_t$  в интервале колебаний малых и средних амплитуд



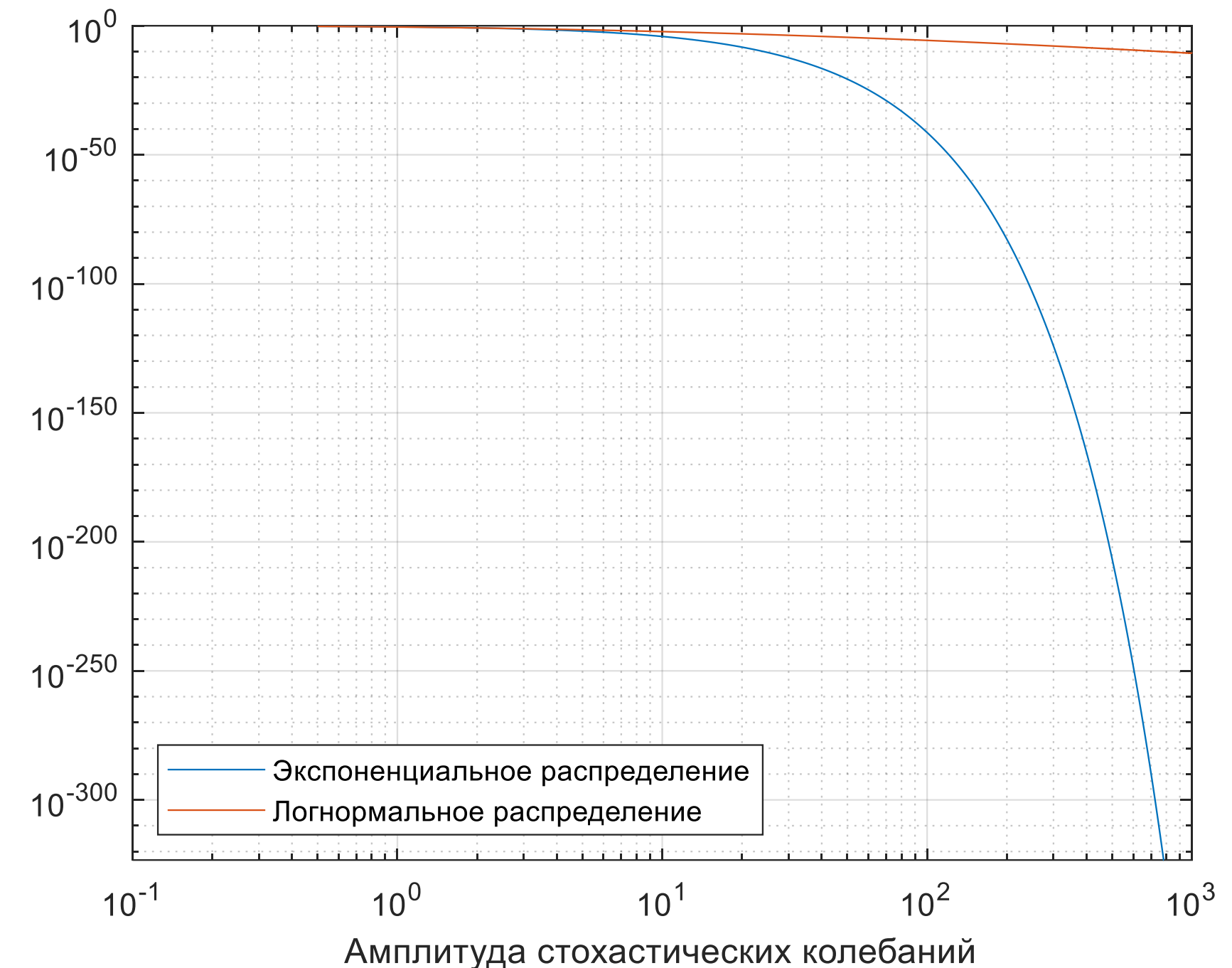
Плотность распределения вероятностей

- экспоненциальное распределение (легкий хвост)

$$p(x|0, \sigma, \theta) = \frac{1}{\sigma} e^{-\frac{x-\theta}{\sigma}}$$

- логнормальное распределение (длинный хвост)

$$p(x|\mu, \sigma) = \frac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{(\log x - \mu)^2}{2\sigma^2}\right\}$$



Плотность распределения вероятностей в двойном логарифмическом масштабе

- экспоненциальное распределение (легкий хвост)

$$p(x|0, \sigma, \theta) = \frac{1}{\sigma} e^{-\frac{x-\theta}{\sigma}}$$

- логнормальное распределение (длинный хвост)

$$p(x|\mu, \sigma) = \frac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{(\log x - \mu)^2}{2\sigma^2}\right\}$$

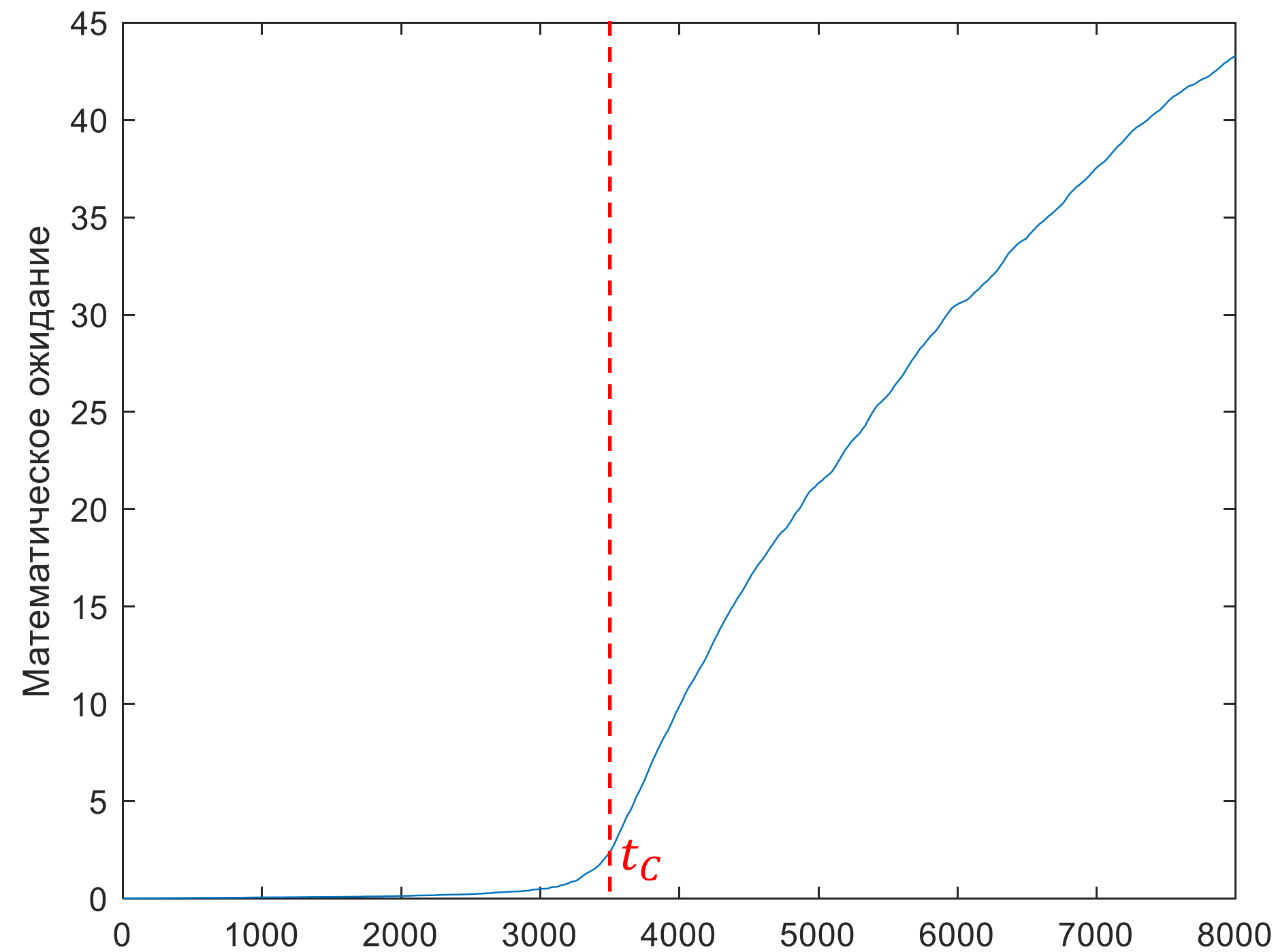


# Корреляционная теория в оценке мер раннего обнаружения критических переходов

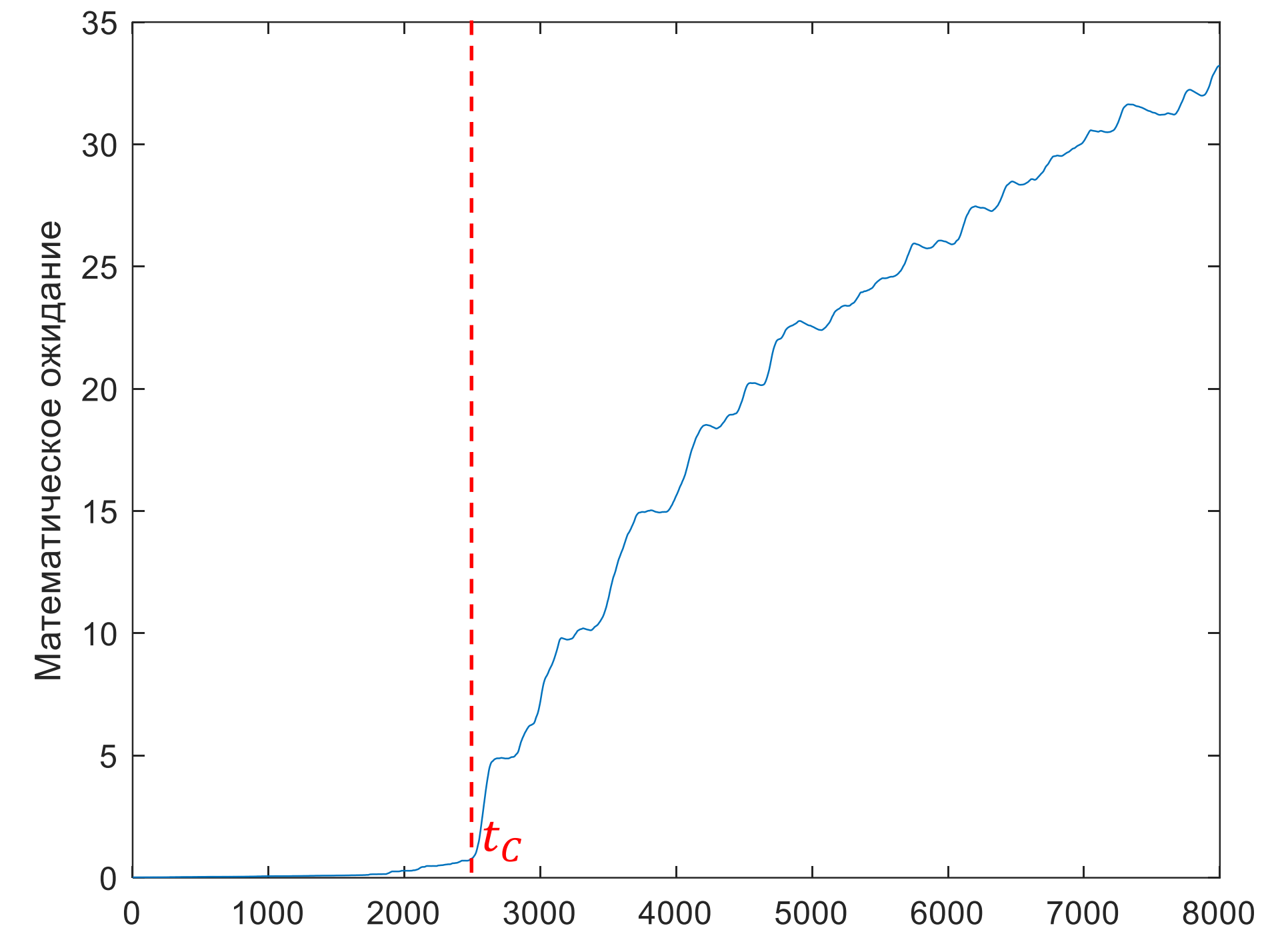
## Моменты распределения как меры раннего предупреждения

- Математическое ожидание ( $m_{t'} \equiv \mu_{t'}$ )

$$m_{t'} \equiv \mu_{t'} = \frac{1}{t'} \sum_{t=t_0}^{t'} \xi_t$$



$m_{t'}$ , соответствующий критическому переходу второго рода



$m_{t'}$ , соответствующий критическому переходу первого рода

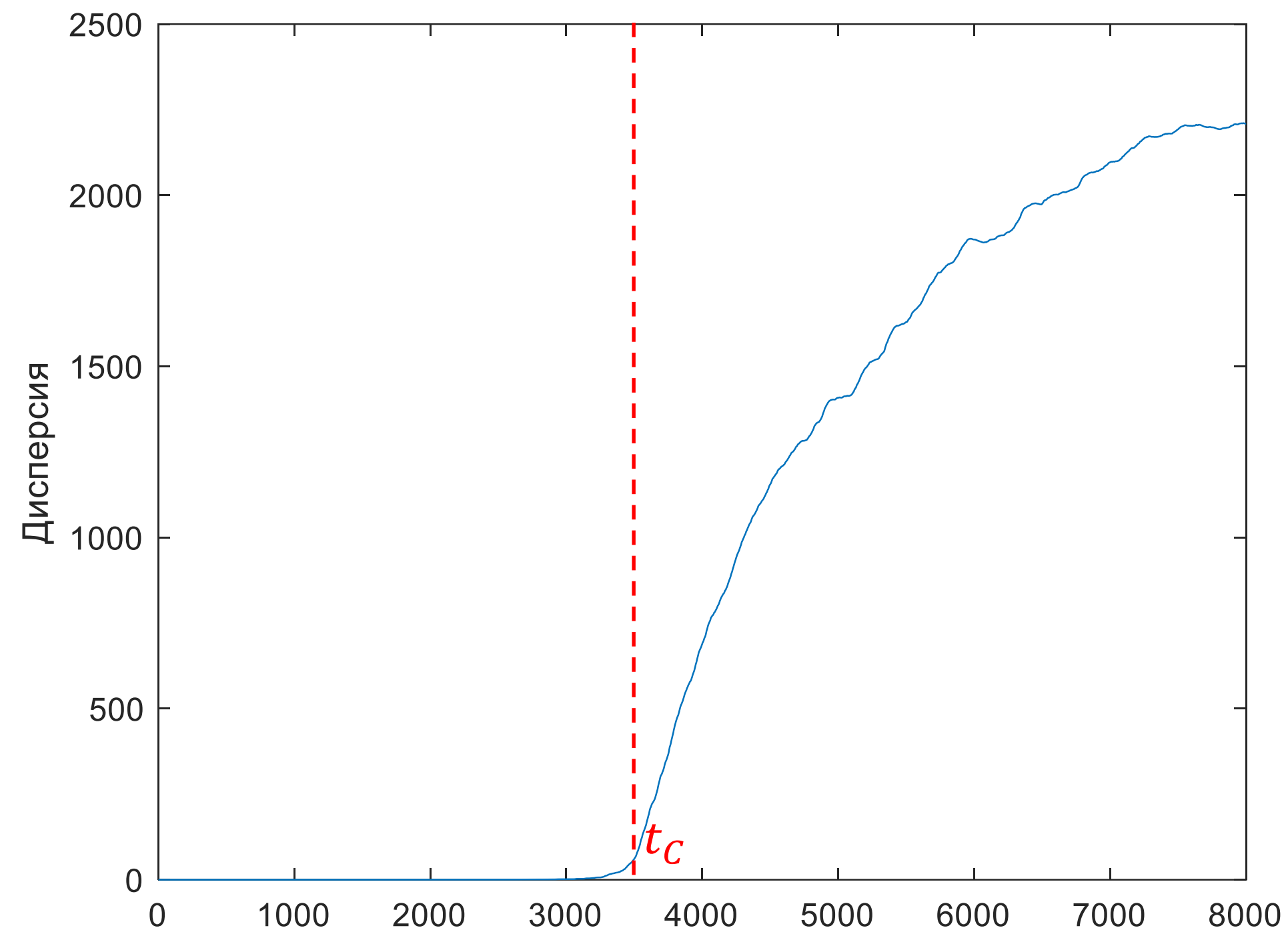


# Корреляционная теория в оценке мер раннего обнаружения критических переходов

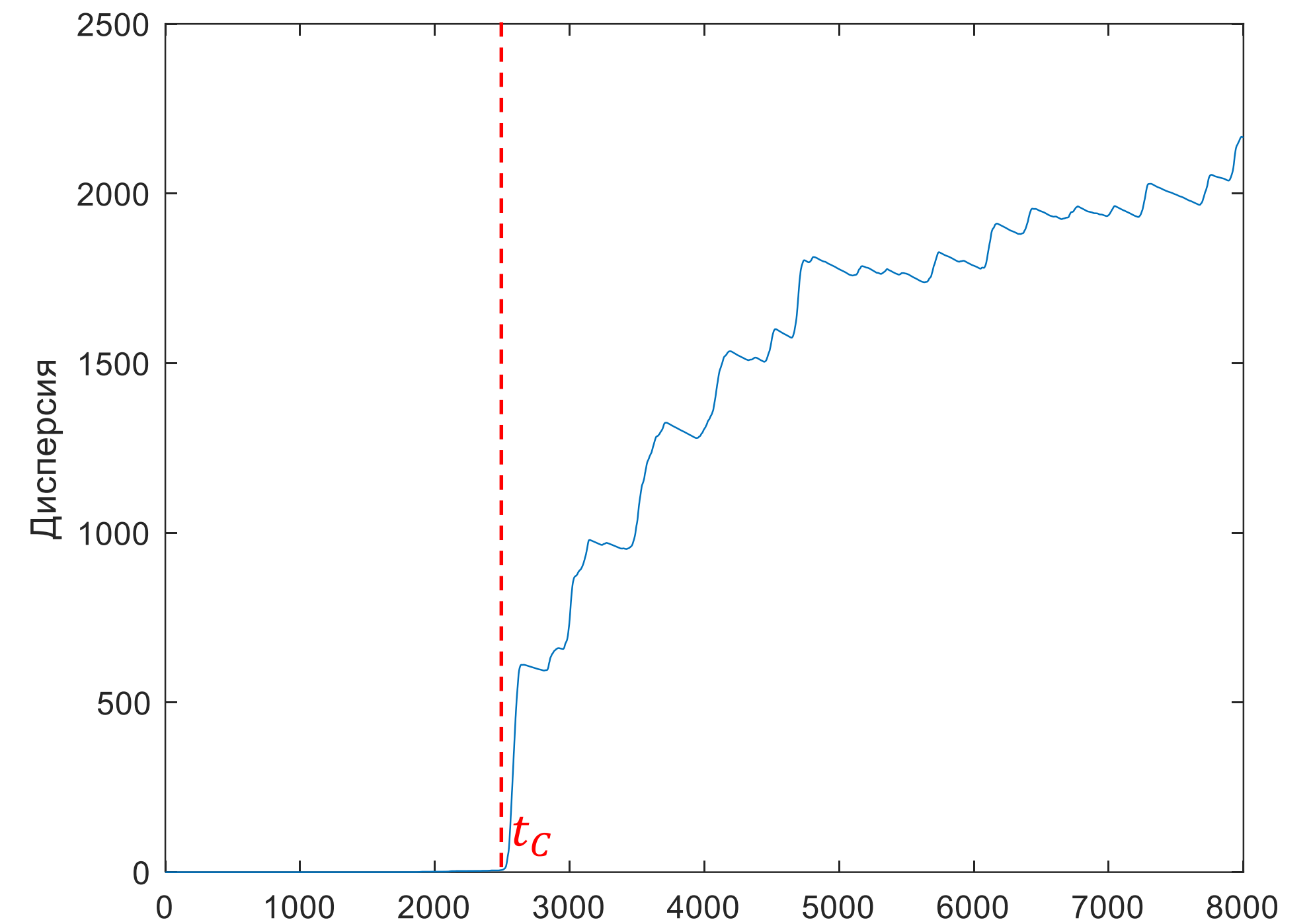
## Моменты распределения как меры раннего предупреждения

- Дисперсия ( $m_{t'} \equiv \sigma_{t'}^2$ )

$$m_{t'} \equiv \sigma_{t'}^2 = \frac{1}{t' - 1} \sum_{t=t_0}^{t'} |\xi_t - \mu_{t'}|^2$$



$m_{t'}$ , соответствующий критическому переходу второго рода



$m_{t'}$ , соответствующий критическому переходу первого рода

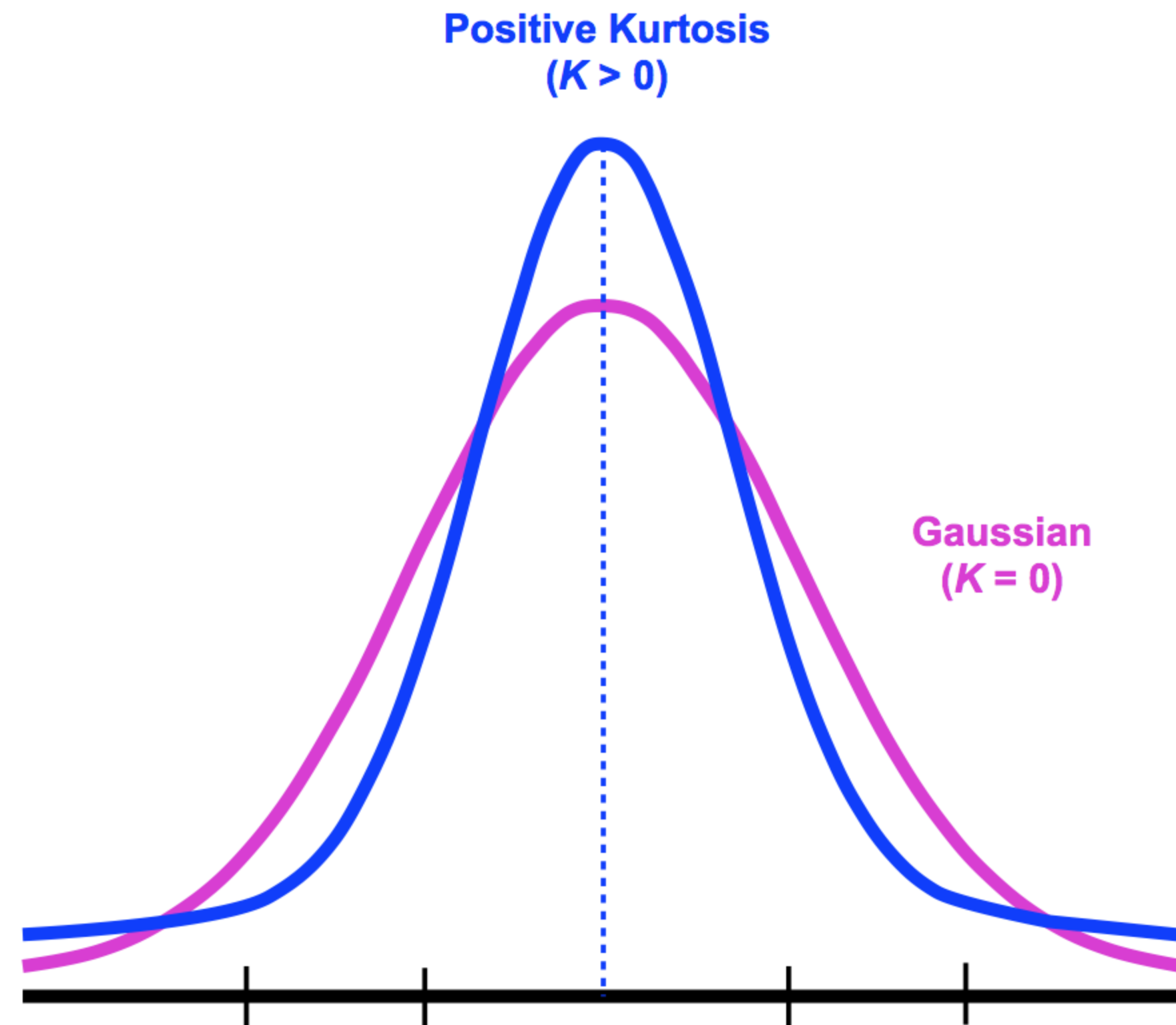


# Корреляционная теория в оценке мер раннего обнаружения критических переходов

## Моменты распределения как меры раннего предупреждения

- Коэффициент эксцесса ( $m_{t'} \equiv \kappa_{t'}$ )

$$m_{t'} \equiv \kappa_{t'} = \frac{(t' - t_0) \sum_{t=t_0}^{t'} |\xi_t - \mu_{t'}|^4}{\left( \sum_{t=t_0}^{t'} |\xi_t - \mu_{t'}|^2 \right)^2} - 3$$





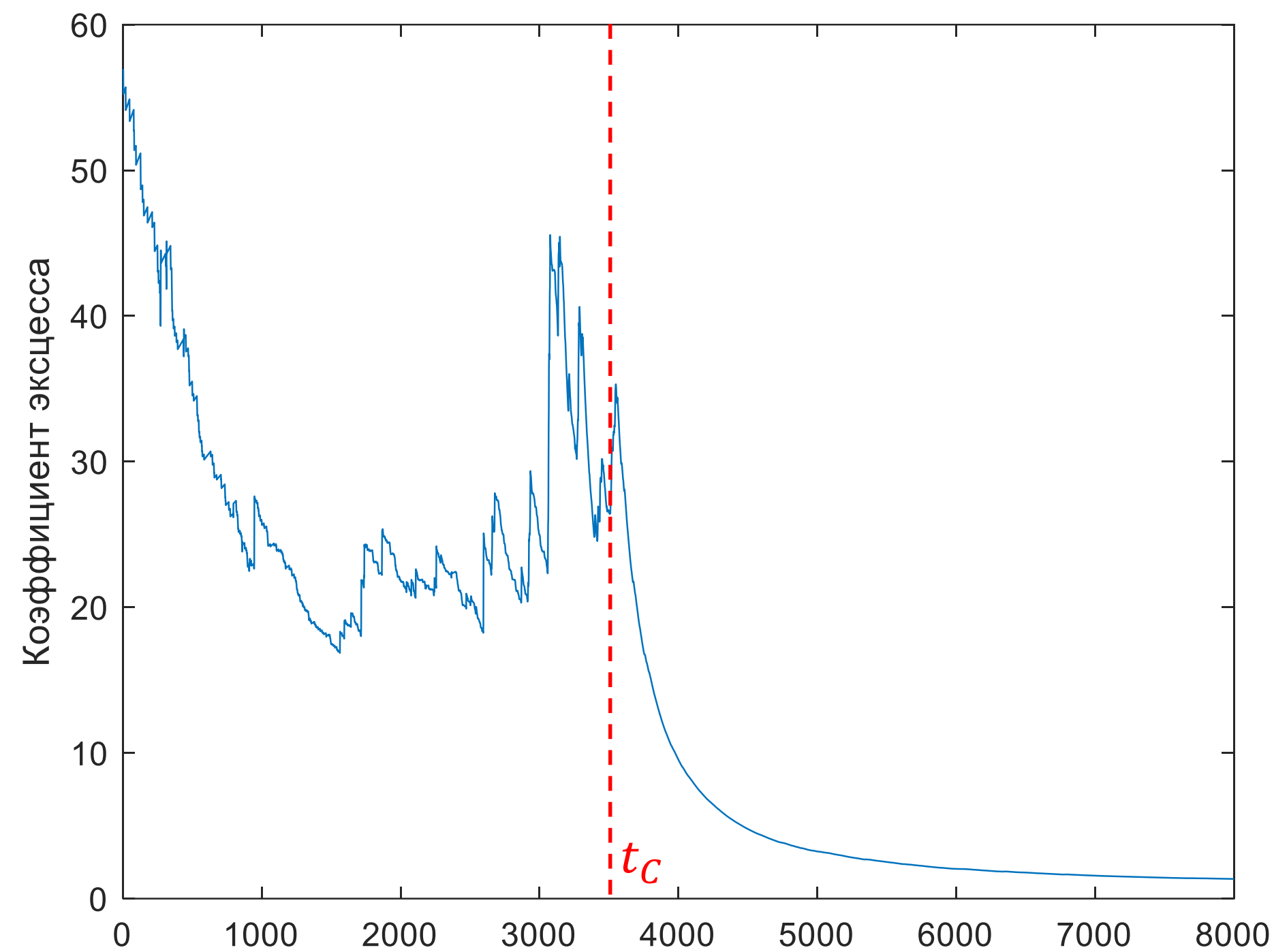


# Корреляционная теория в оценке мер раннего обнаружения критических переходов

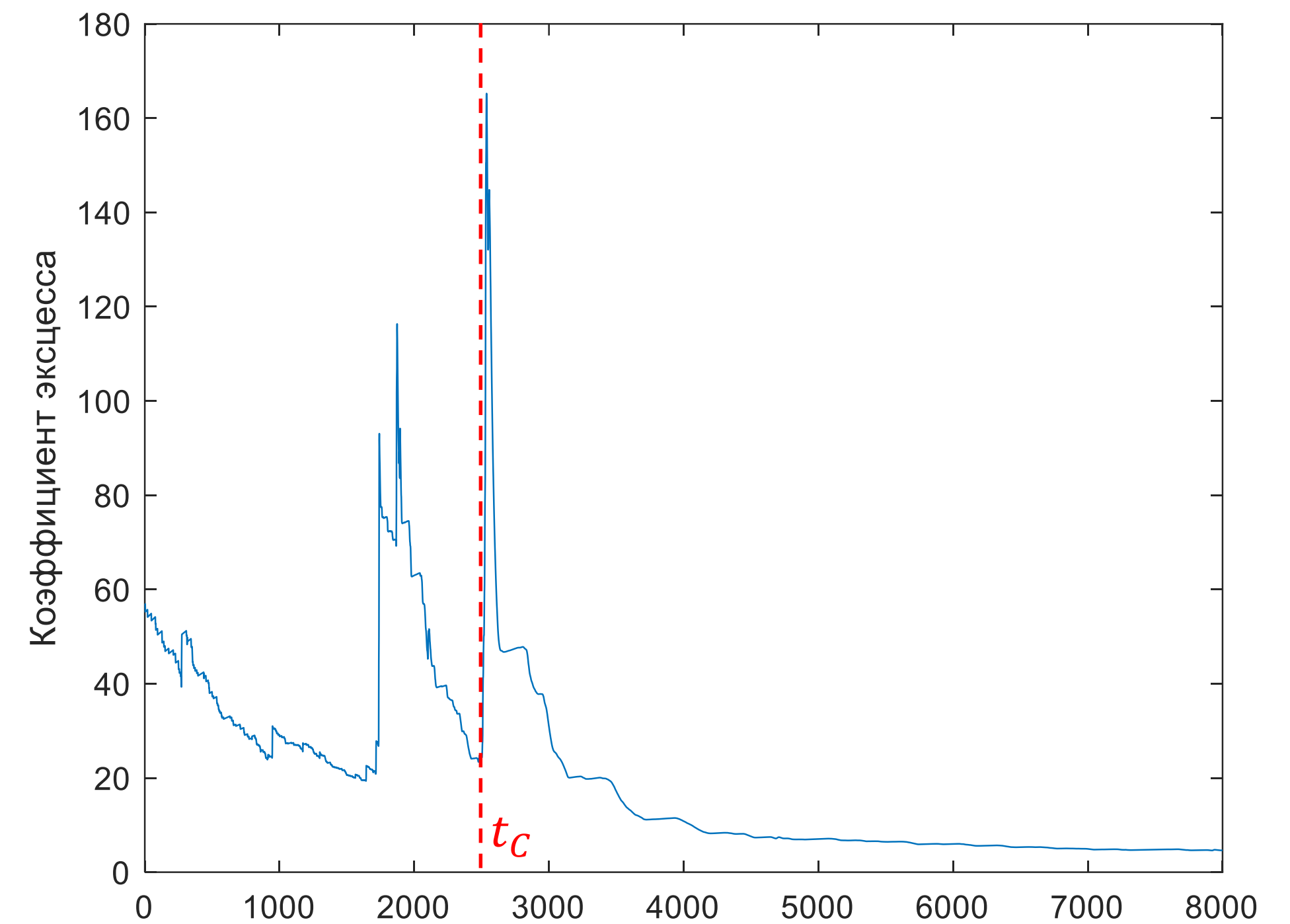
## Моменты распределения как меры раннего предупреждения

- Коэффициент эксцесса ( $m_{t'} \equiv \kappa_{t'}$ )

$$m_{t'} \equiv \kappa_{t'}$$



$m_{t'}$ , соответствующий критическому переходу второго рода



$m_{t'}$ , соответствующий критическому переходу первого рода

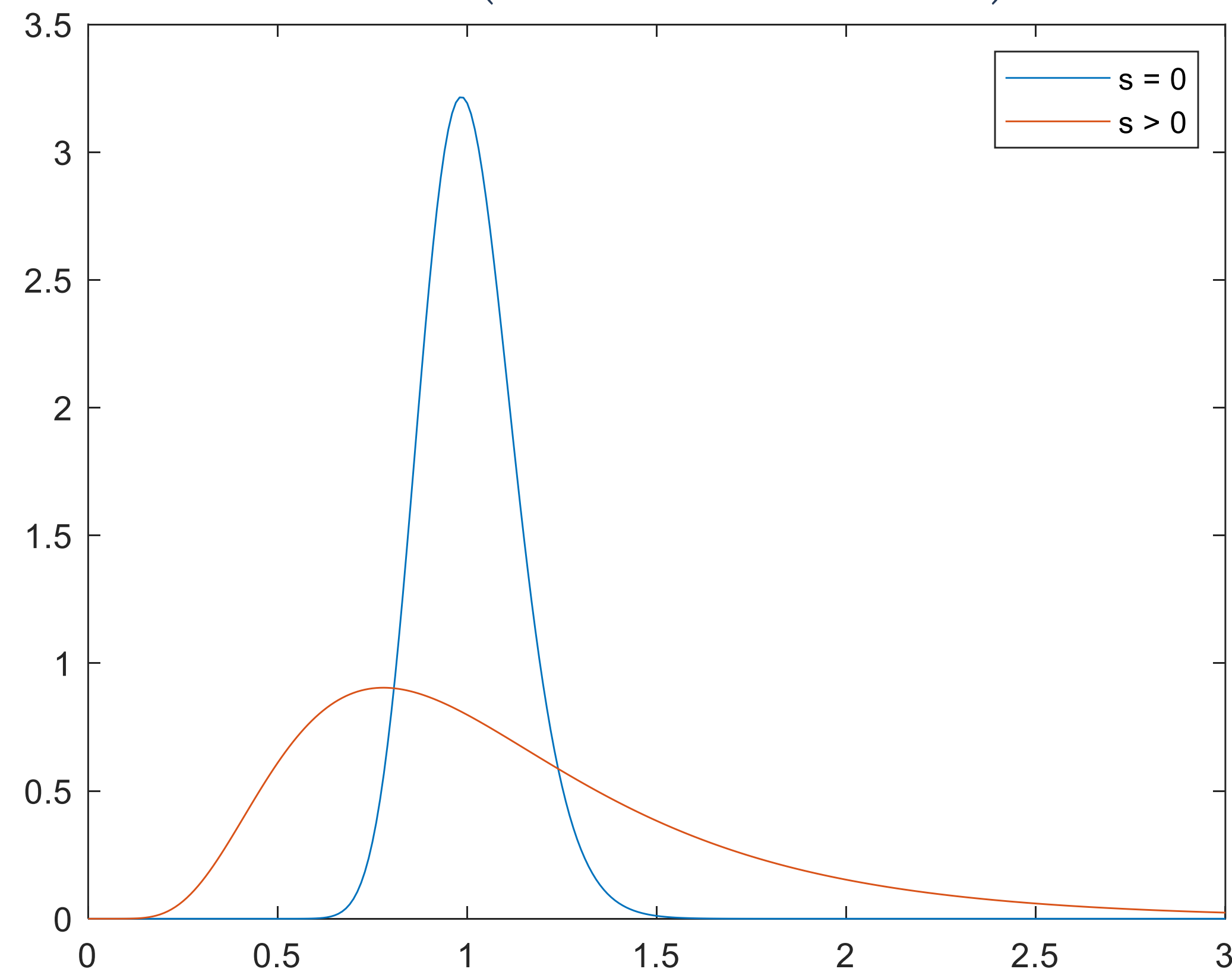


# Корреляционная теория в оценке мер раннего обнаружения критических переходов

## Моменты распределения как меры раннего предупреждения

- Коэффициент асимметрии ( $m_{t'} \equiv s_{t'}$ )

$$m_{t'} \equiv s_{t'} = \frac{\frac{1}{(t' - t_0)} \sum_{t=t_0}^{t'} |\xi_t - \mu_{t'}|^3}{\left( \sqrt{\frac{1}{(t' - t_0)} \sum_{t=t_0}^{t'} |\xi_t - \mu_{t'}|^2} \right)^3}$$



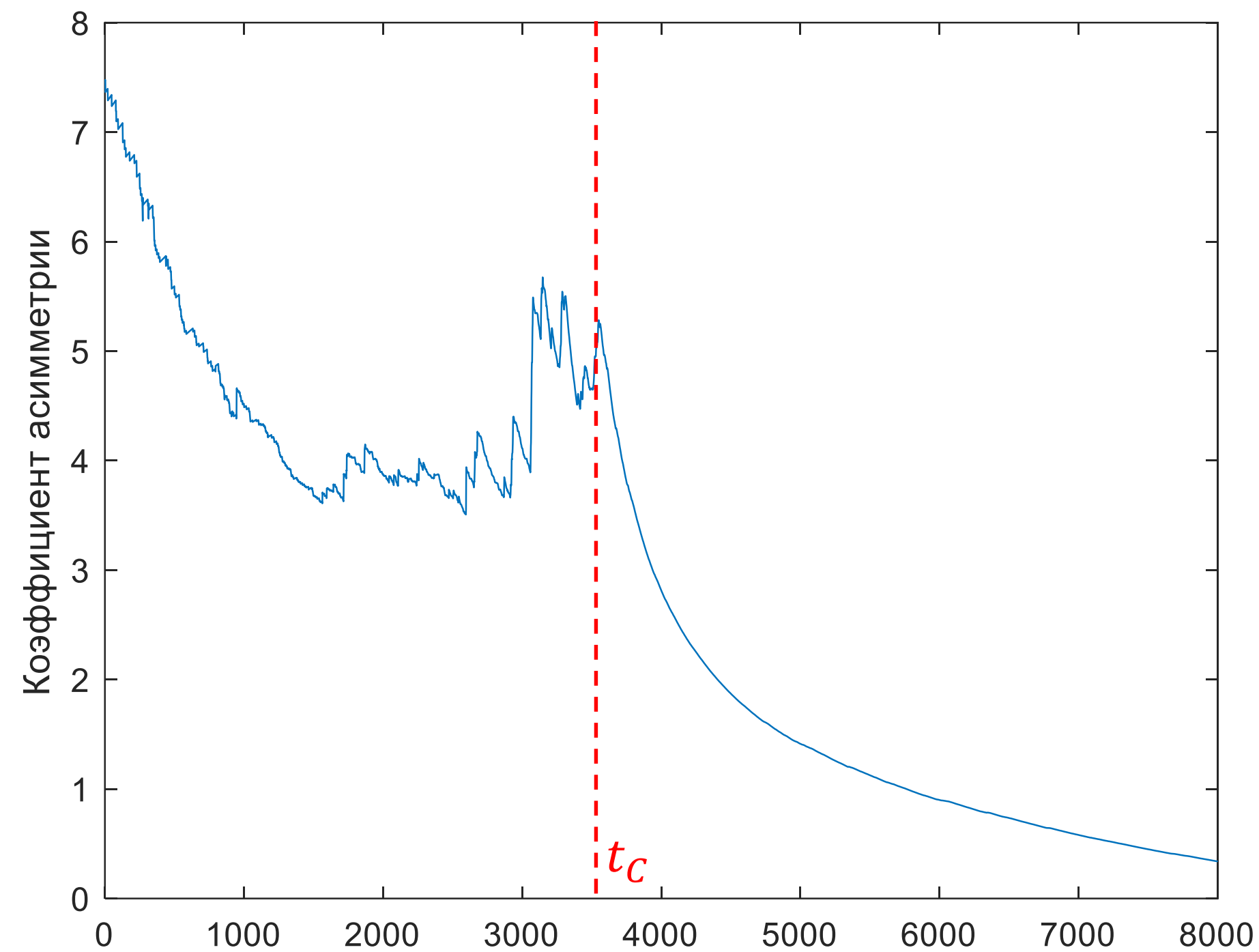


# Корреляционная теория в оценке мер раннего обнаружения критических переходов

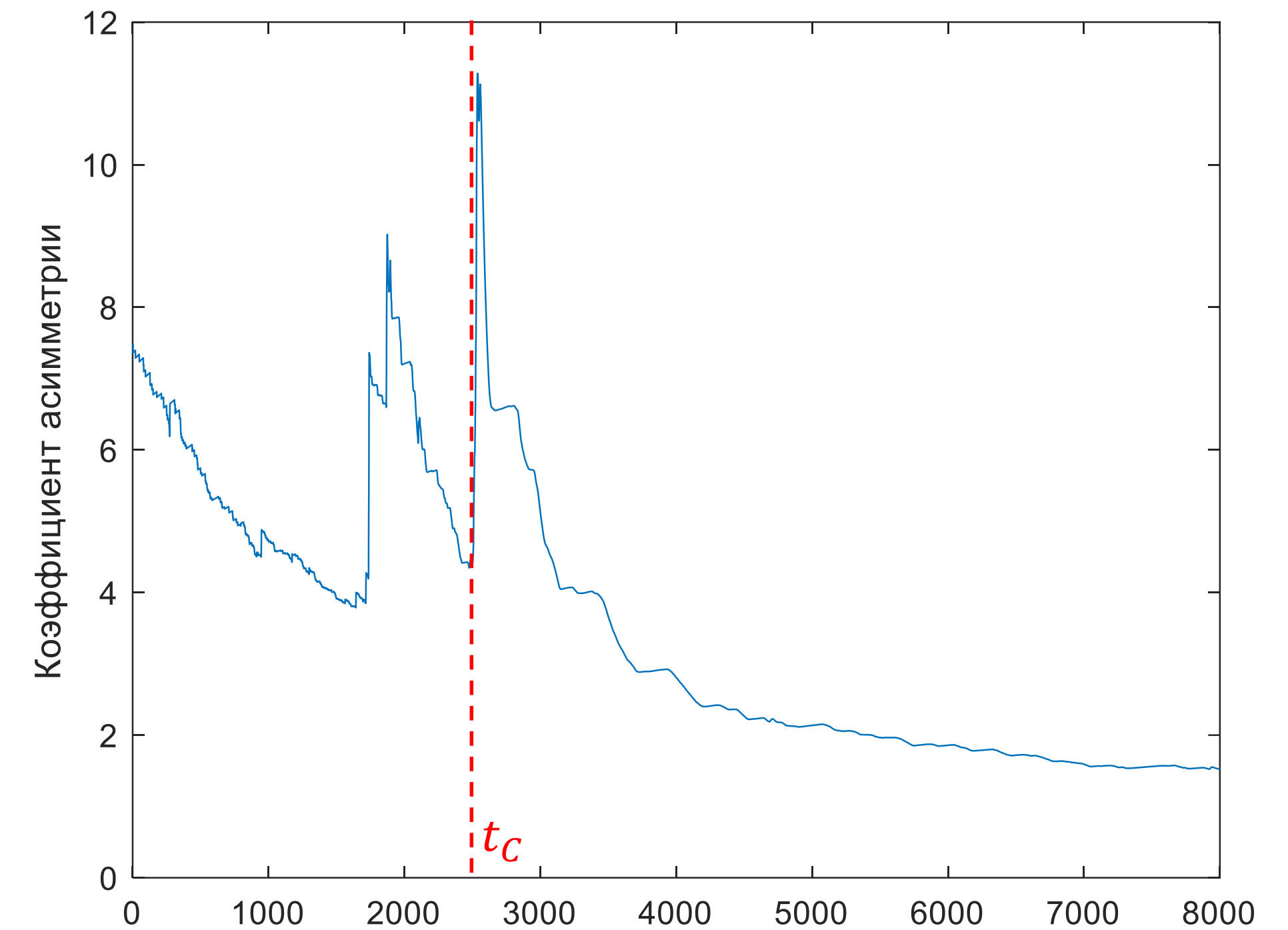
## Моменты распределения как меры раннего предупреждения

- Коэффициент асимметрии ( $m_{t'} \equiv s_{t'}$ )

$$m_{t'} \equiv s_{t'}$$



$m_{t'}$ , соответствующий критическому переходу второго рода



$m_{t'}$ , соответствующий критическому переходу первого рода



# Корреляционная теория в оценке мер раннего обнаружения критических переходов

Визуальная оценка приближения к критической точке по изменению автокорреляционной функции для  $\xi_t$  в окне  $[0, t]$

- Автокорреляционная функция ( $m_{t'} \equiv c_{t'}(\tau)$ )

$$m_{t'} \equiv c_{t'}(\tau) = \frac{1}{\sigma_{t',t'}^2} \sum_{t=t_0}^{t'-\tau} (\xi_t - \mu_{t'}) (\xi_{t+\tau} - \mu_{t'})$$

$\tau$  – временная задержка (лаг)

Автокорреляционная функция измеряет корреляцию между  $\xi_{[0,t]}$  и  $\xi_{[0,t+\tau]}$

Дальние корреляции характеризуются степенным законом убывание (или медленнее)

$$c_{t'}(\tau) \propto \tau^{-\alpha}, \alpha \in (0,1)$$

Ближние корреляции характеризуются степенным законом убывание (или быстрее)

$$c_{t'}(\tau) \propto \exp\left(-\frac{\tau}{\tau_0}\right)$$



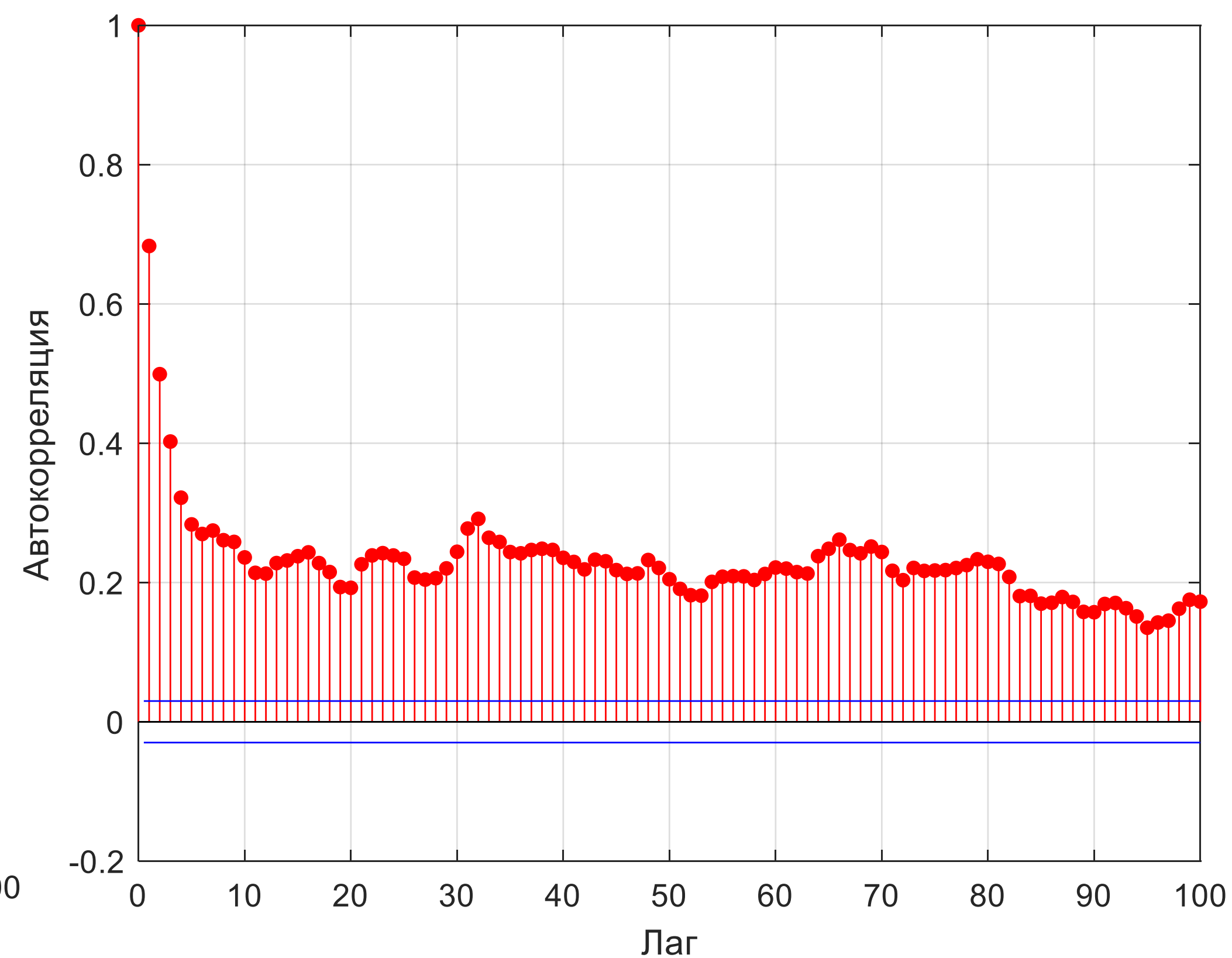
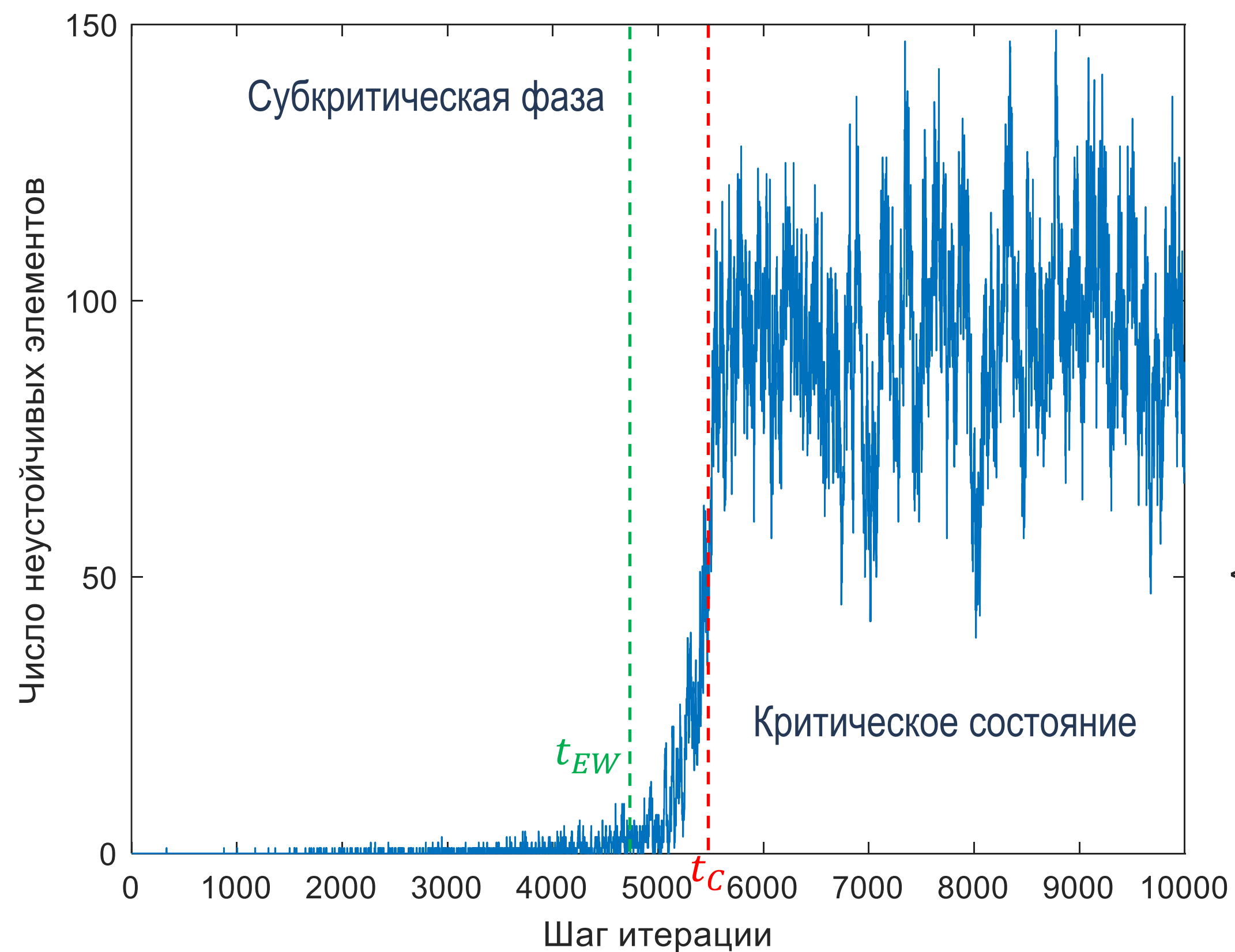


# Корреляционная теория в оценке мер раннего предупреждения

Визуальная оценка приближения к критической точке по изменению автокорреляционной функции для  $\xi_t$  в окне  $[0, t]$

- Автокорреляционная функция ( $m_{t'} \equiv c_{t'}(\tau)$ )

$$m_{t'} \equiv c_{t'}(\tau)$$



Временной ряд, соответствующий критическому переходу второго рода (слева) и автокорреляция при  $t' = 4500$

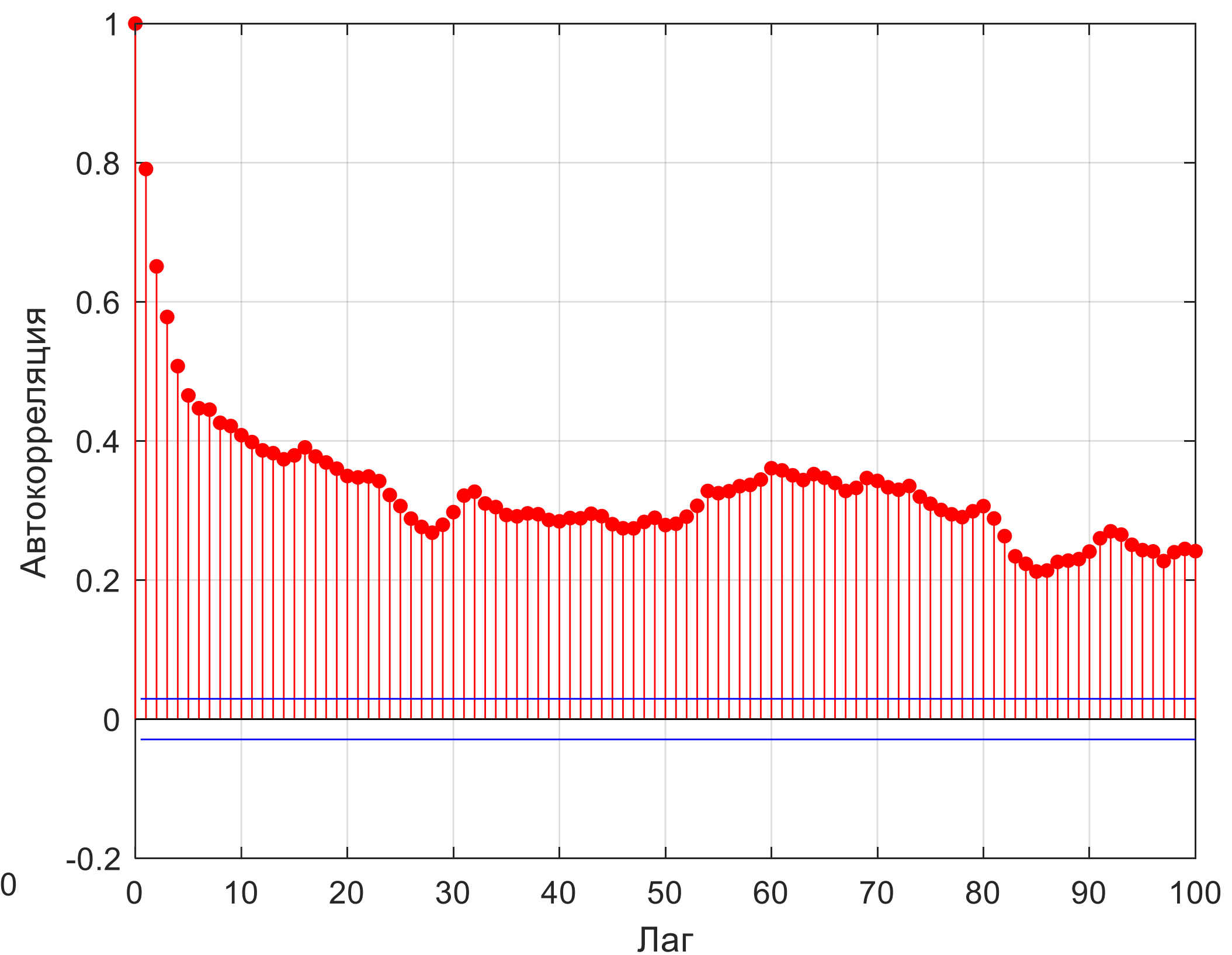
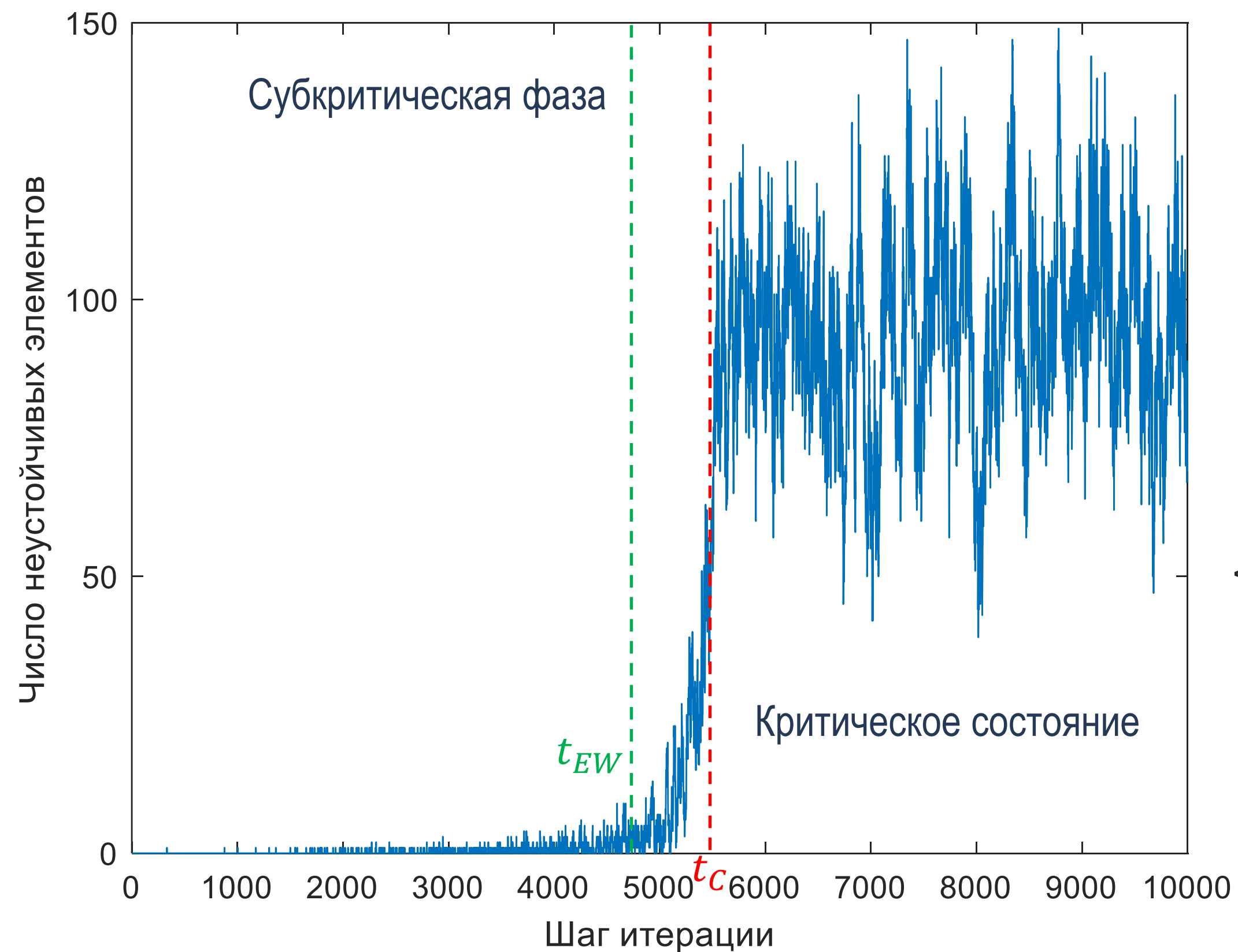


# Корреляционная теория в оценке мер раннего предупреждения

Визуальная оценка приближения к критической точке по изменению автокорреляционной функции для  $\xi_t$  в окне  $[0, t]$

- Автокорреляционная функция ( $m_{t'} \equiv c_{t'}(\tau)$ )

$$m_{t'} \equiv c_{t'}(\tau)$$



Временной ряд, соответствующий критическому переходу второго рода (слева) и автокорреляция при  $t' = 4700$

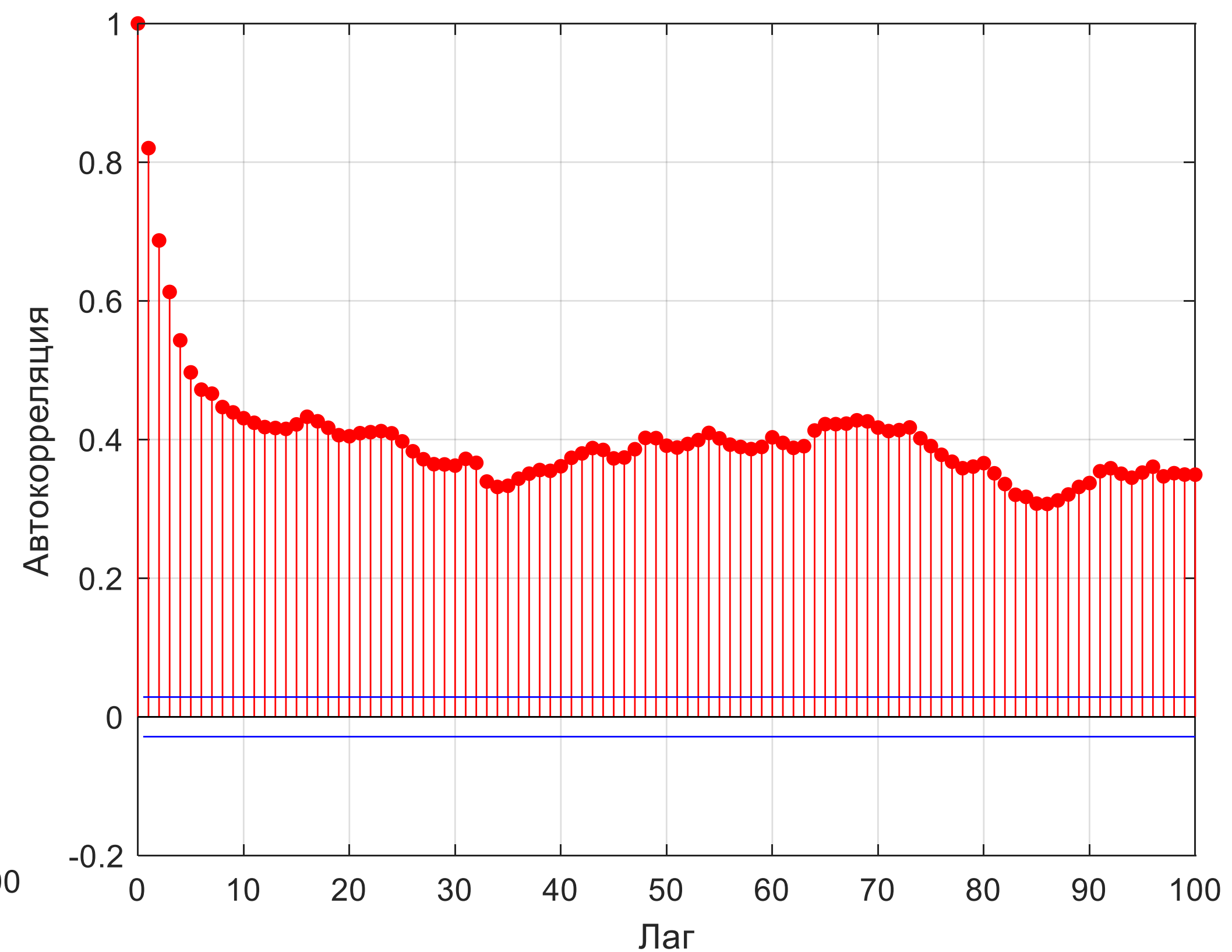
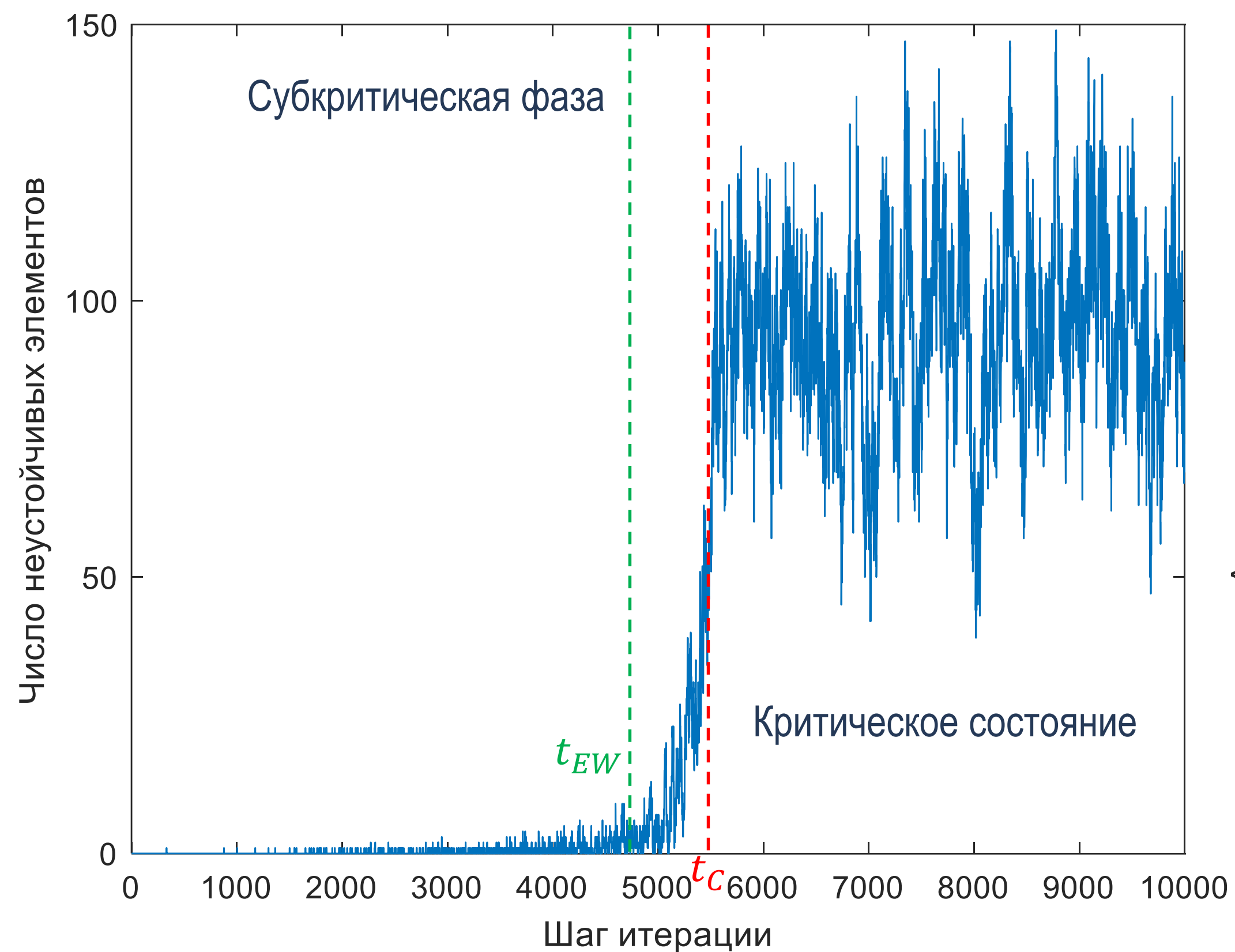


# Корреляционная теория в оценке мер раннего предупреждения

Визуальная оценка приближения к критической точке по изменению автокорреляционной функции для  $\xi_t$  в окне  $[0, t]$

- Автокорреляционная функция ( $m_{t'} \equiv c_{t'}(\tau)$ )

$$m_{t'} \equiv c_{t'}(\tau)$$



Временной ряд, соответствующий критическому переходу второго рода (слева) и автокорреляция при  $t' = 4900$

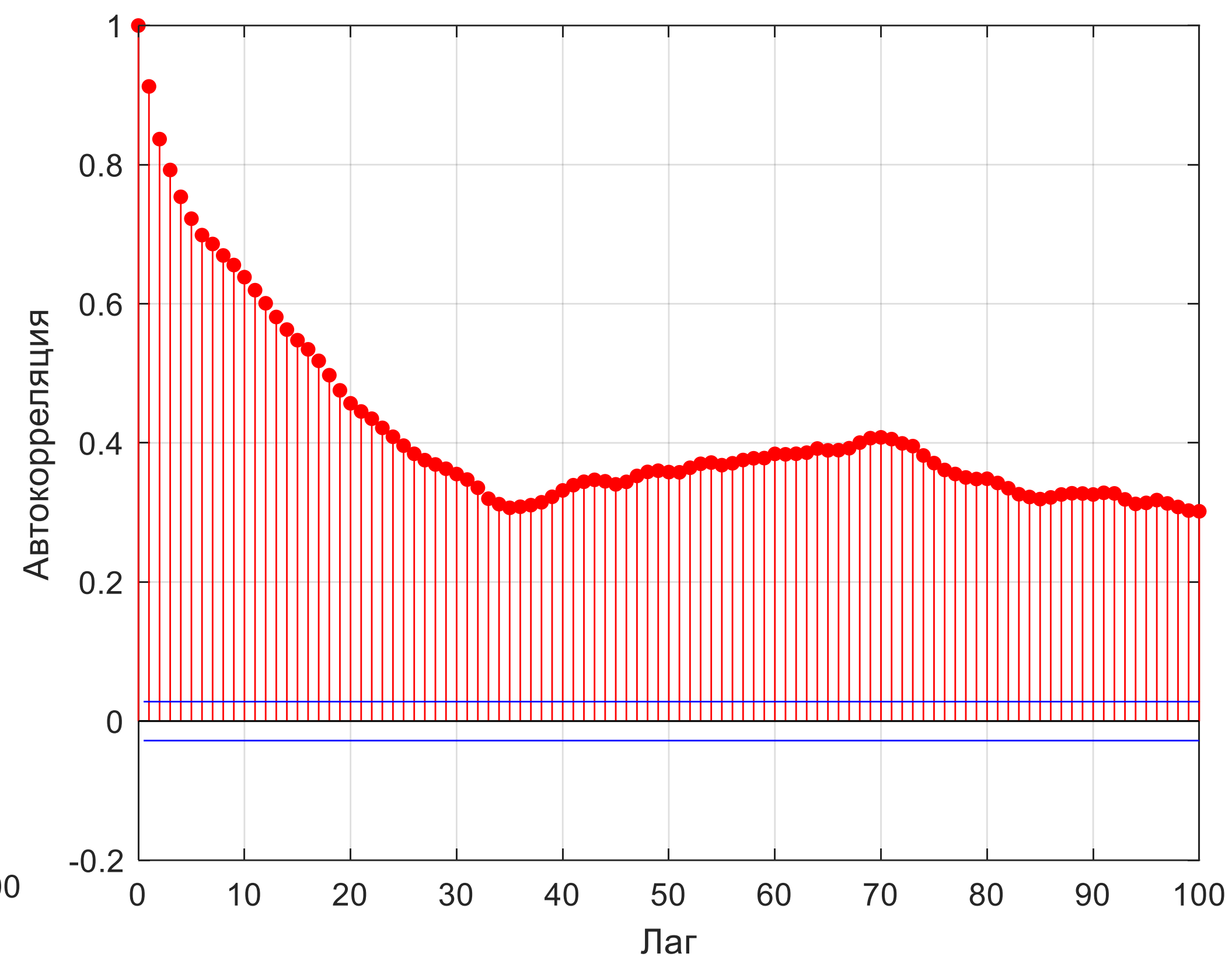
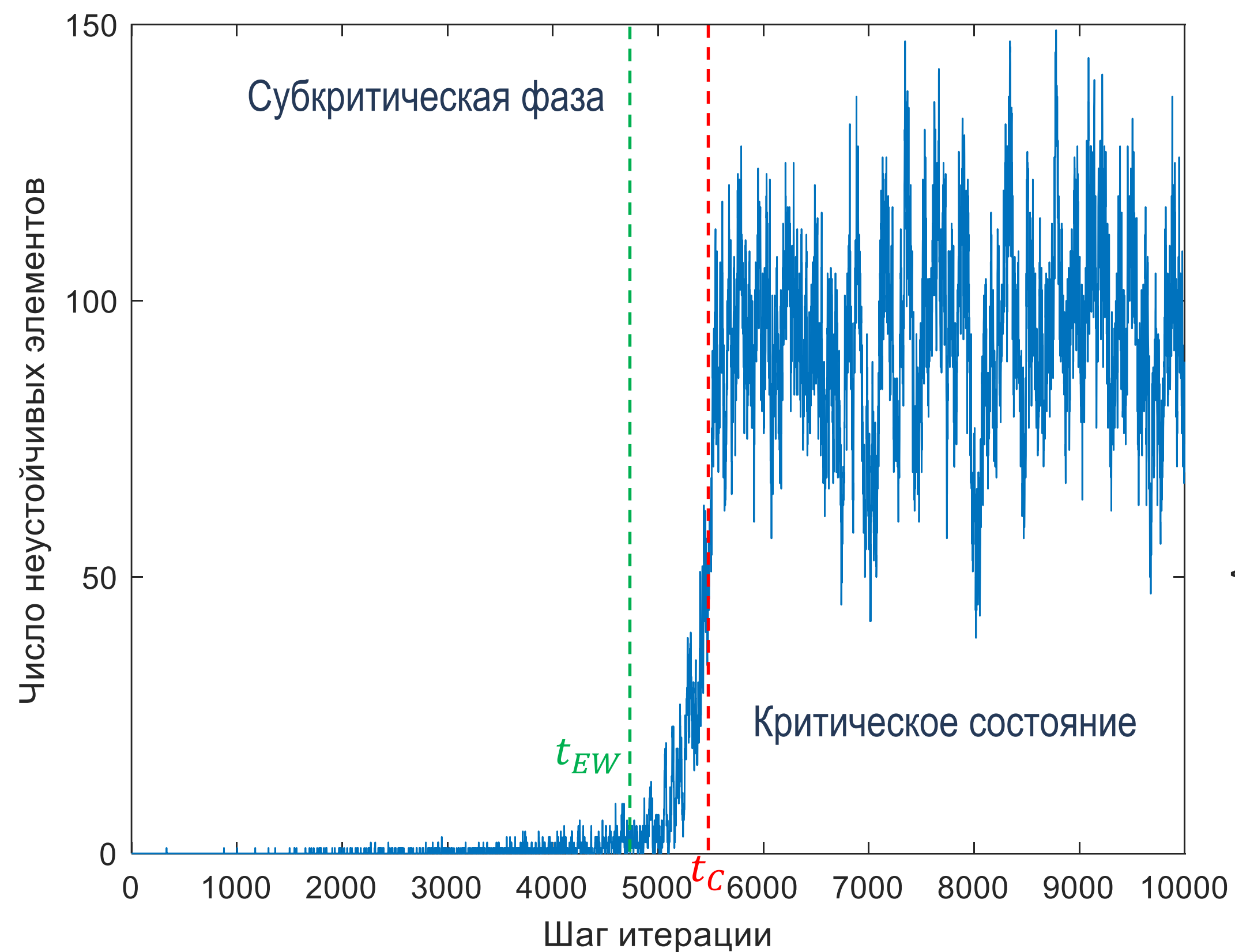


# Корреляционная теория в оценке мер раннего предупреждения

Визуальная оценка приближения к критической точке по изменению автокорреляционной функции для  $\xi_t$  в окне  $[0, t]$

- Автокорреляционная функция ( $m_{t'} \equiv c_{t'}(\tau)$ )

$$m_{t'} \equiv c_{t'}(\tau)$$



Временной ряд, соответствующий критическому переходу второго рода (слева) и автокорреляция при  $t' = 5100$



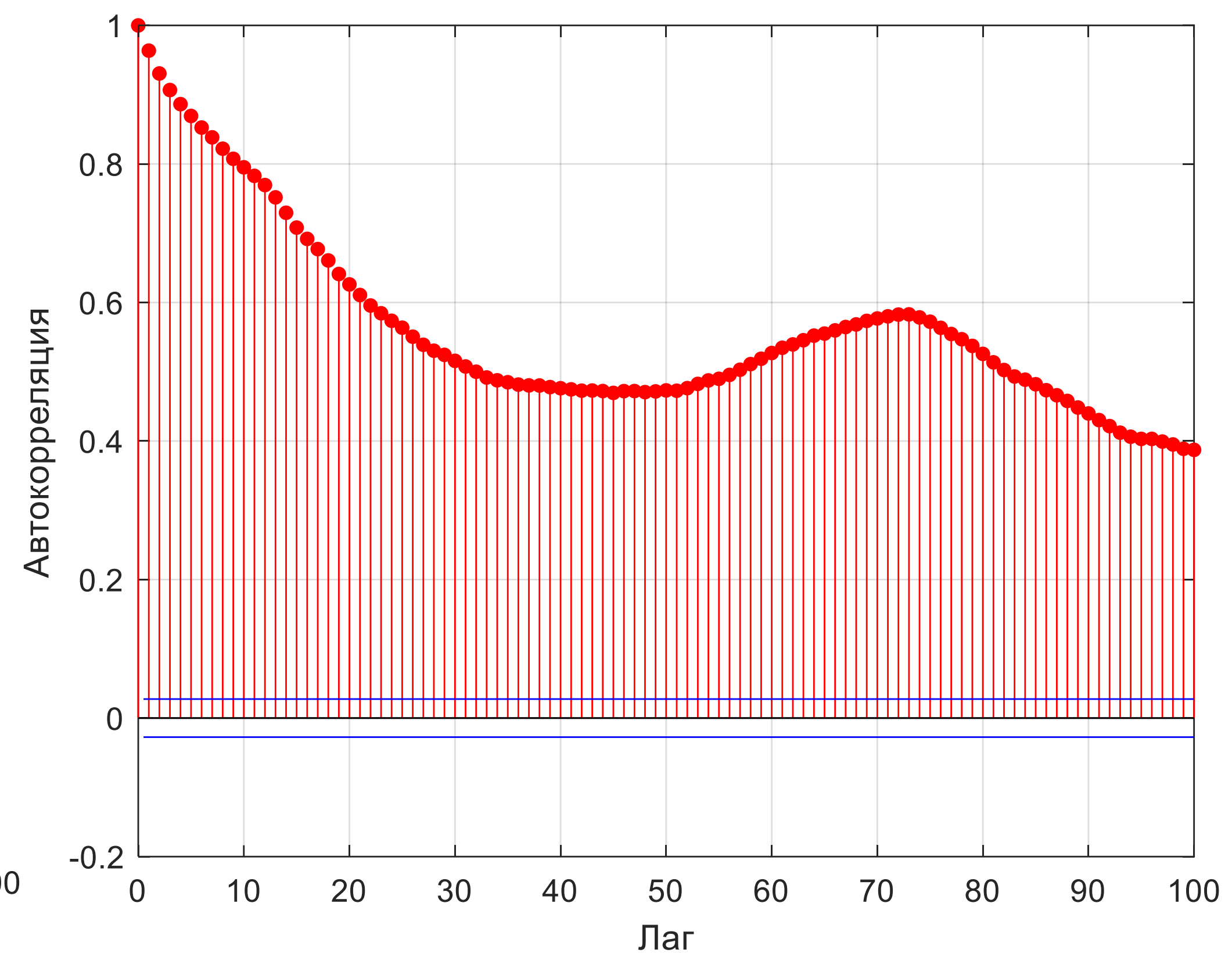
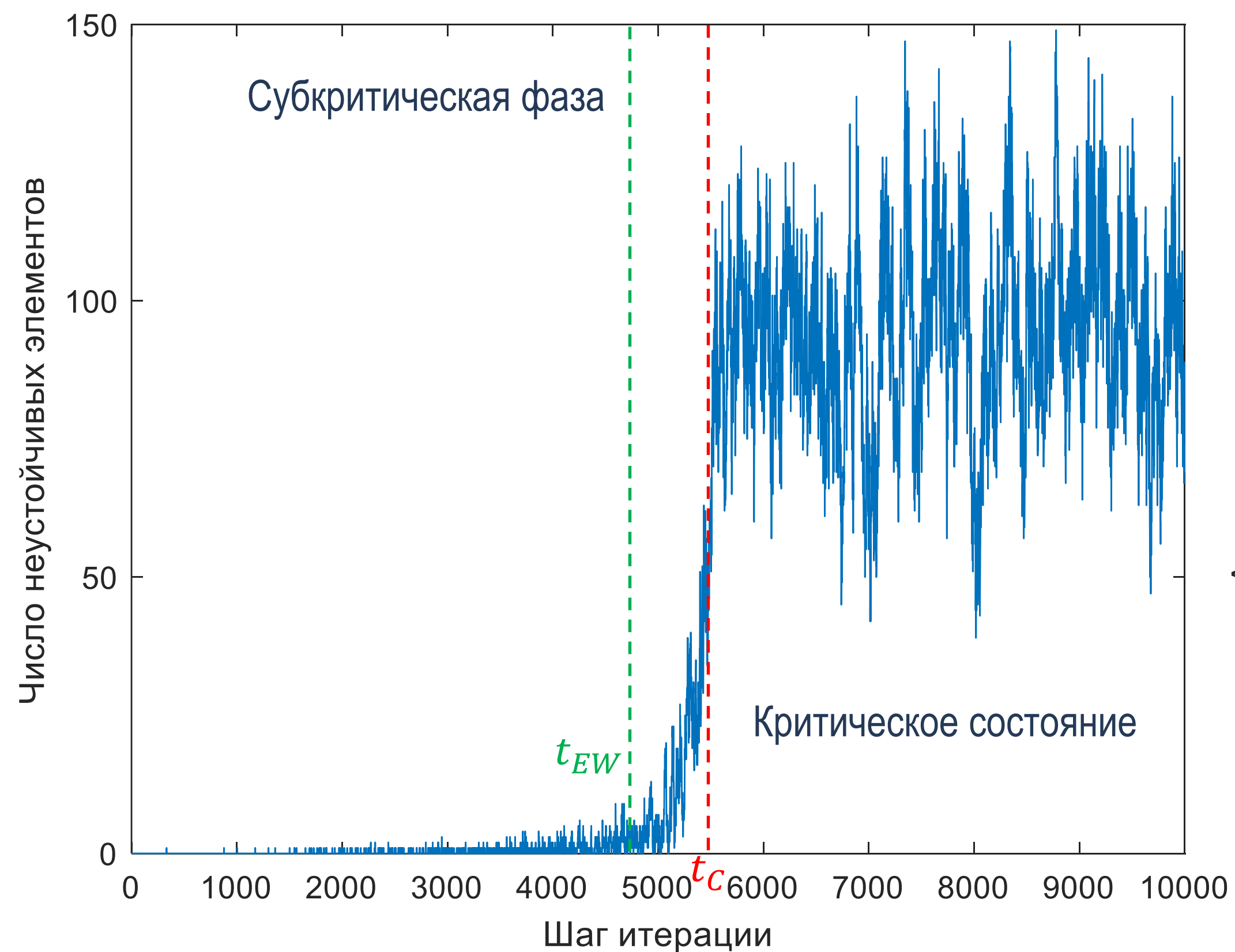


# Корреляционная теория в оценке мер раннего предупреждения

Визуальная оценка приближения к критической точке по изменению автокорреляционной функции для  $\xi_t$  в окне  $[0, t]$

- Автокорреляционная функция ( $m_{t'} \equiv c_{t'}(\tau)$ )

$$m_{t'} \equiv c_{t'}(\tau)$$



Временной ряд, соответствующий критическому переходу второго рода (слева) и автокорреляция при  $t' = 5300$

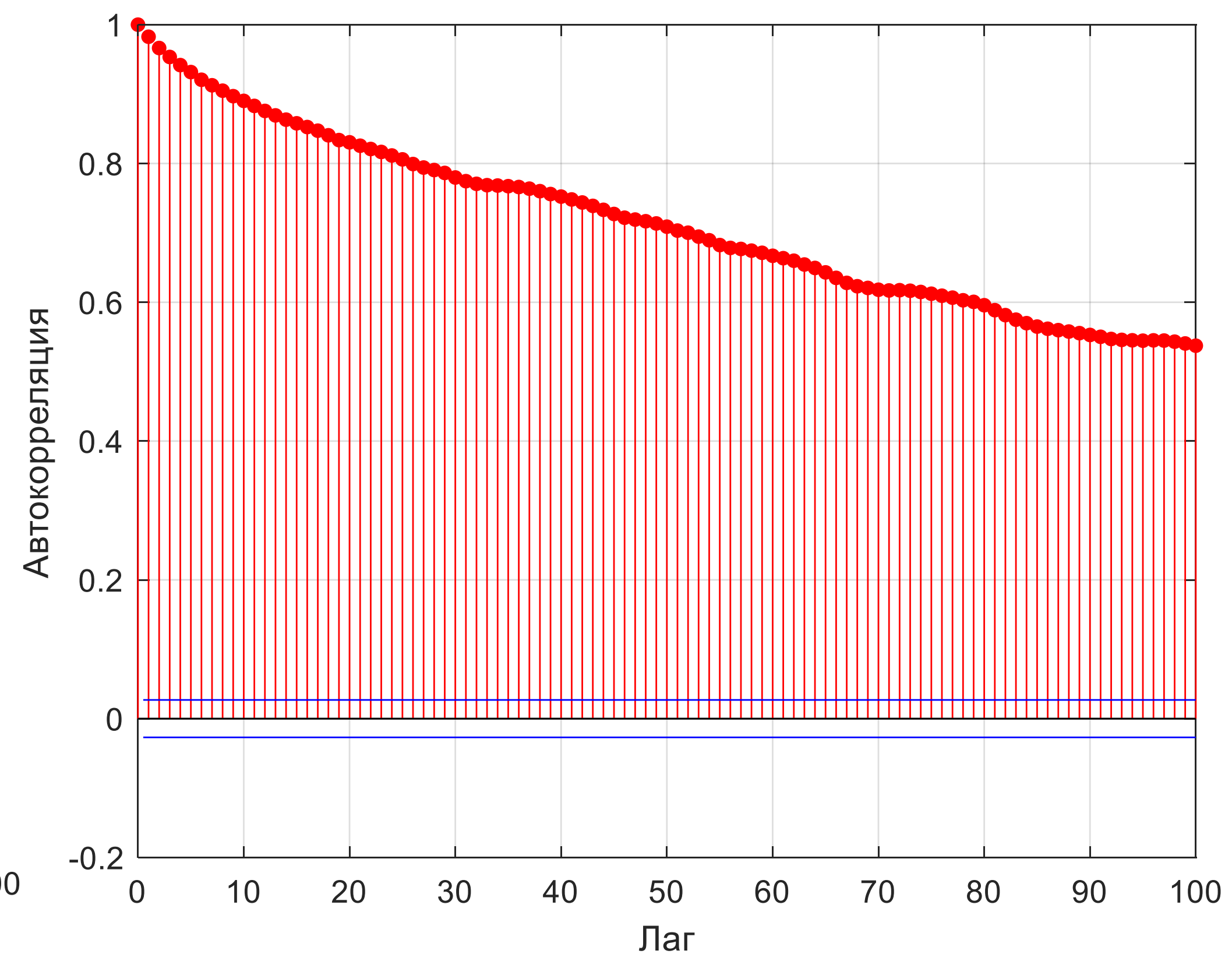
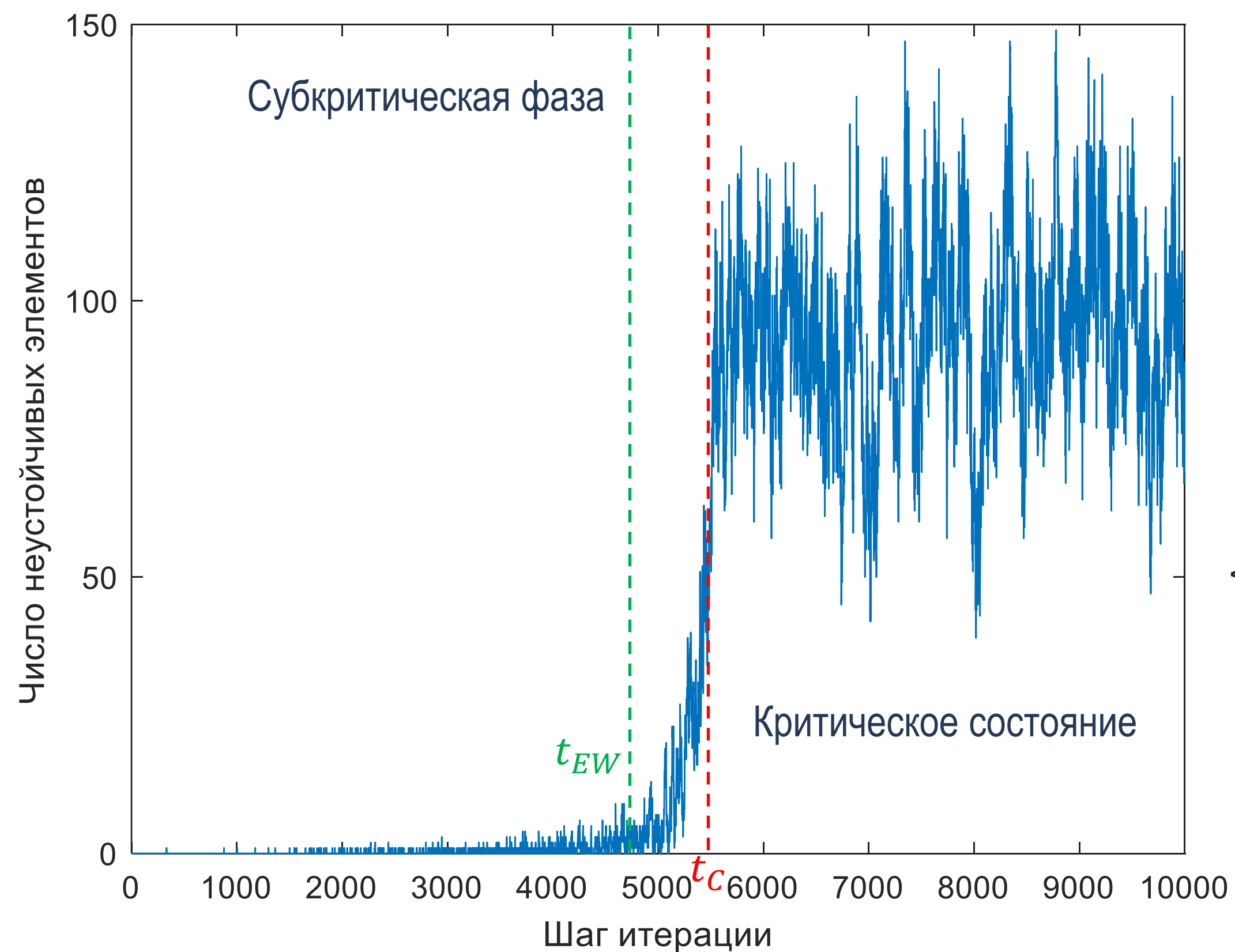


# Корреляционная теория в оценке мер раннего предупреждения

Визуальная оценка приближения к критической точке по изменению автокорреляционной функции для  $\xi_t$  в окне  $[0, t]$

- Автокорреляционная функция ( $m_{t'} \equiv c_{t'}(\tau)$ )

$$m_{t'} \equiv c_{t'}(\tau)$$



Временной ряд, соответствующий критическому переходу второго рода (слева) и автокорреляция при  $t' = 5500$

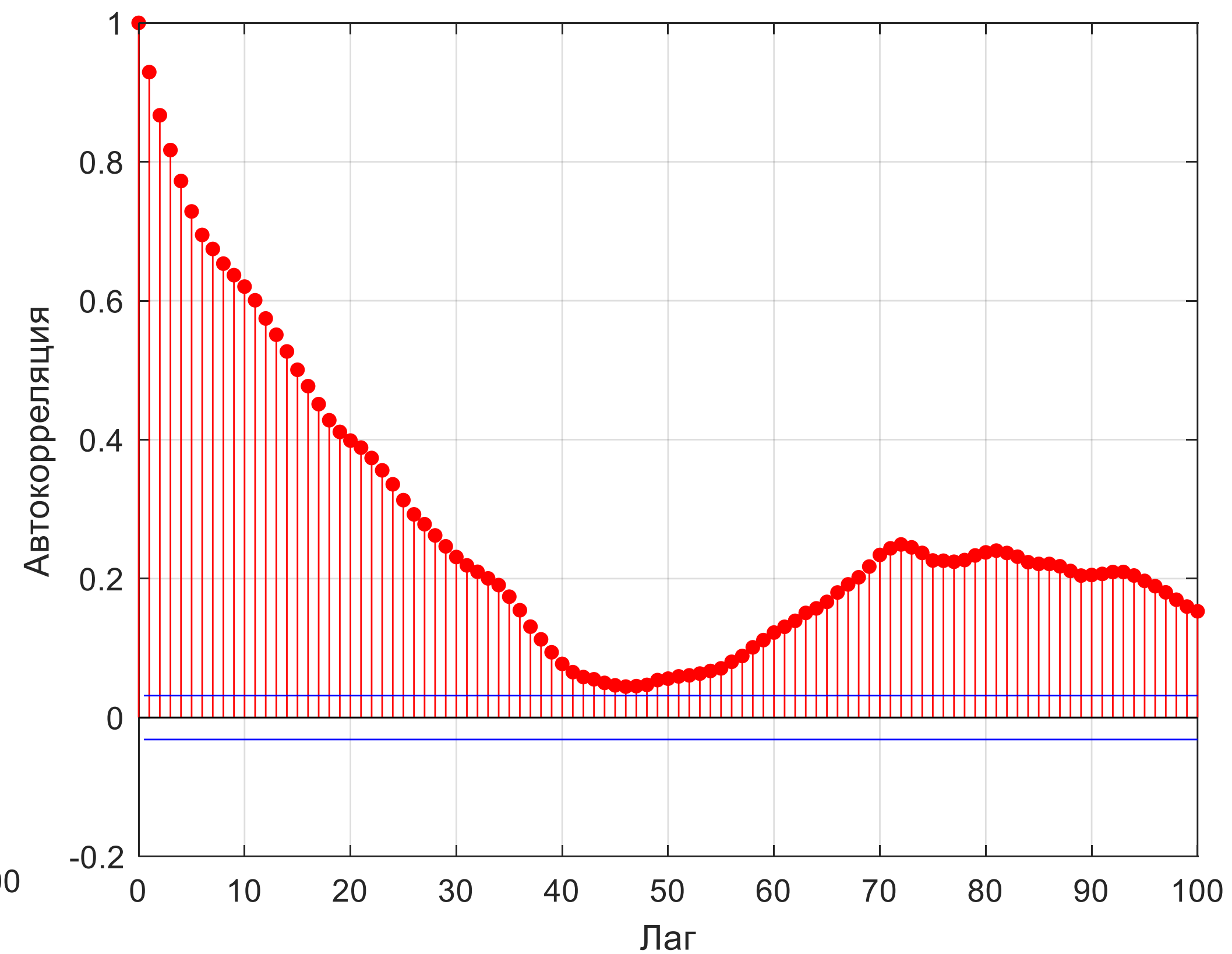
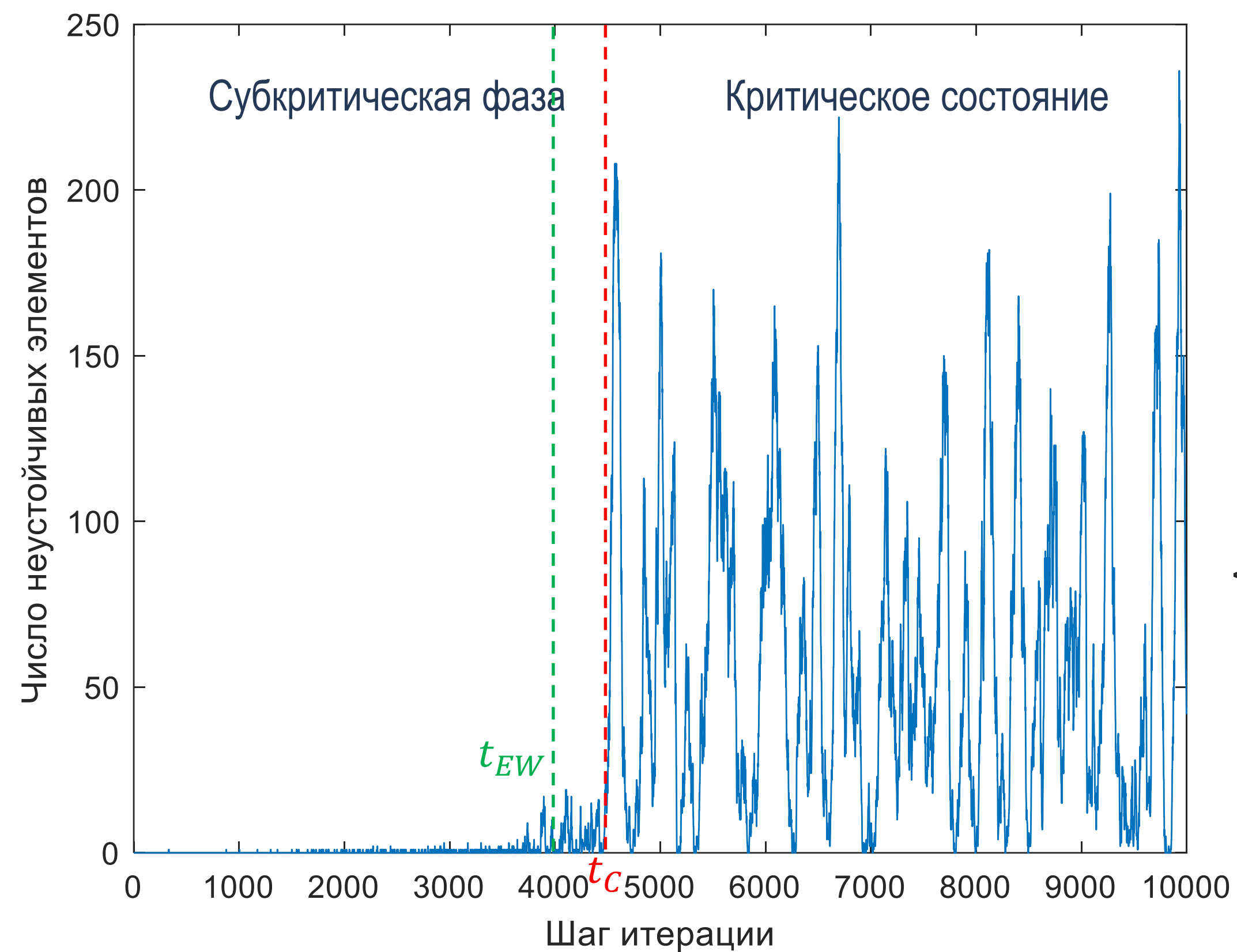


# Корреляционная теория в оценке мер раннего предупреждения

Визуальная оценка приближения к критической точке по изменению автокорреляционной функции для  $\xi_t$  в окне  $[0, t]$

- Автокорреляционная функция ( $m_{t'} \equiv c_{t'}(\tau)$ )

$$m_{t'} \equiv c_{t'}(\tau)$$



Временной ряд, соответствующий критическому переходу второго рода (слева) и автокорреляция при  $t' = 4000$

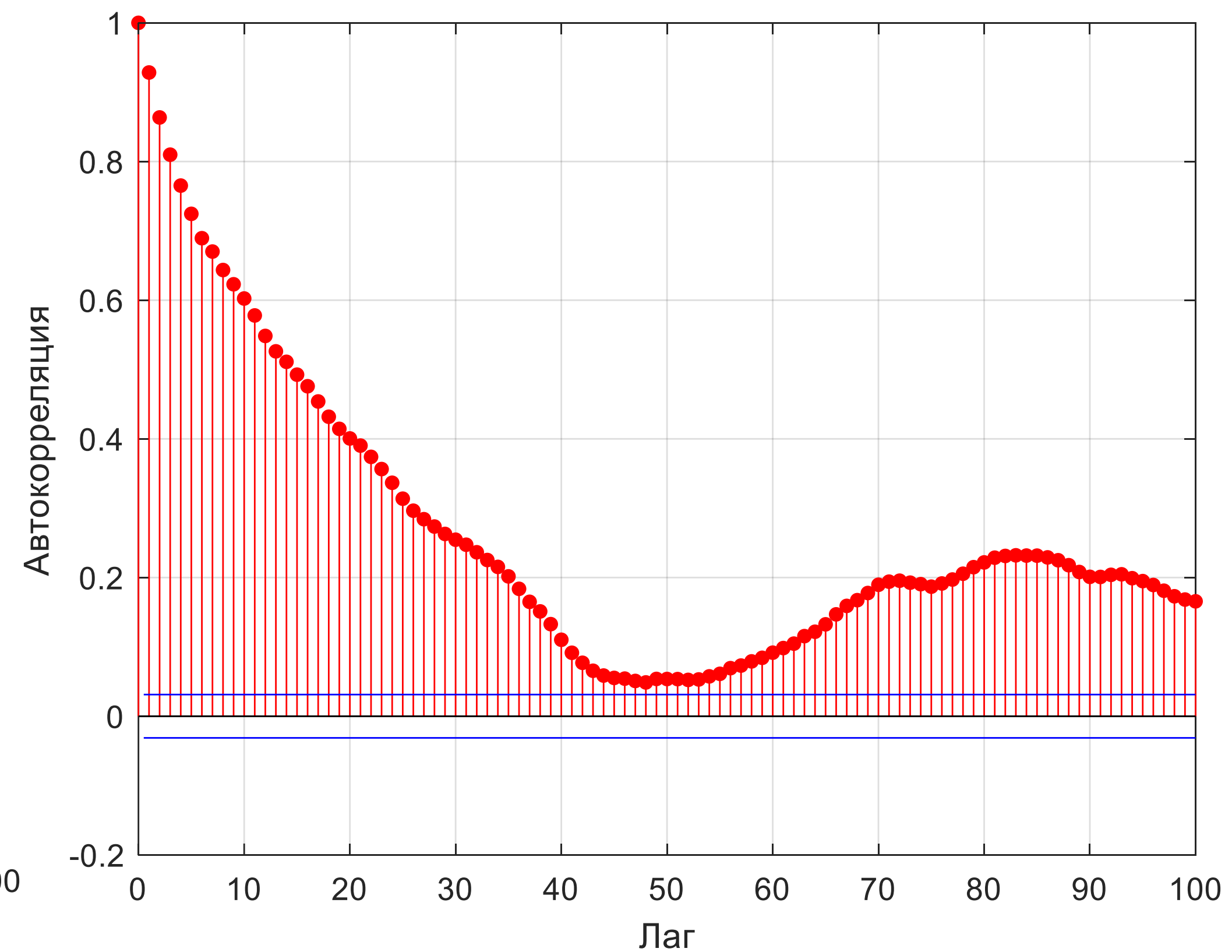
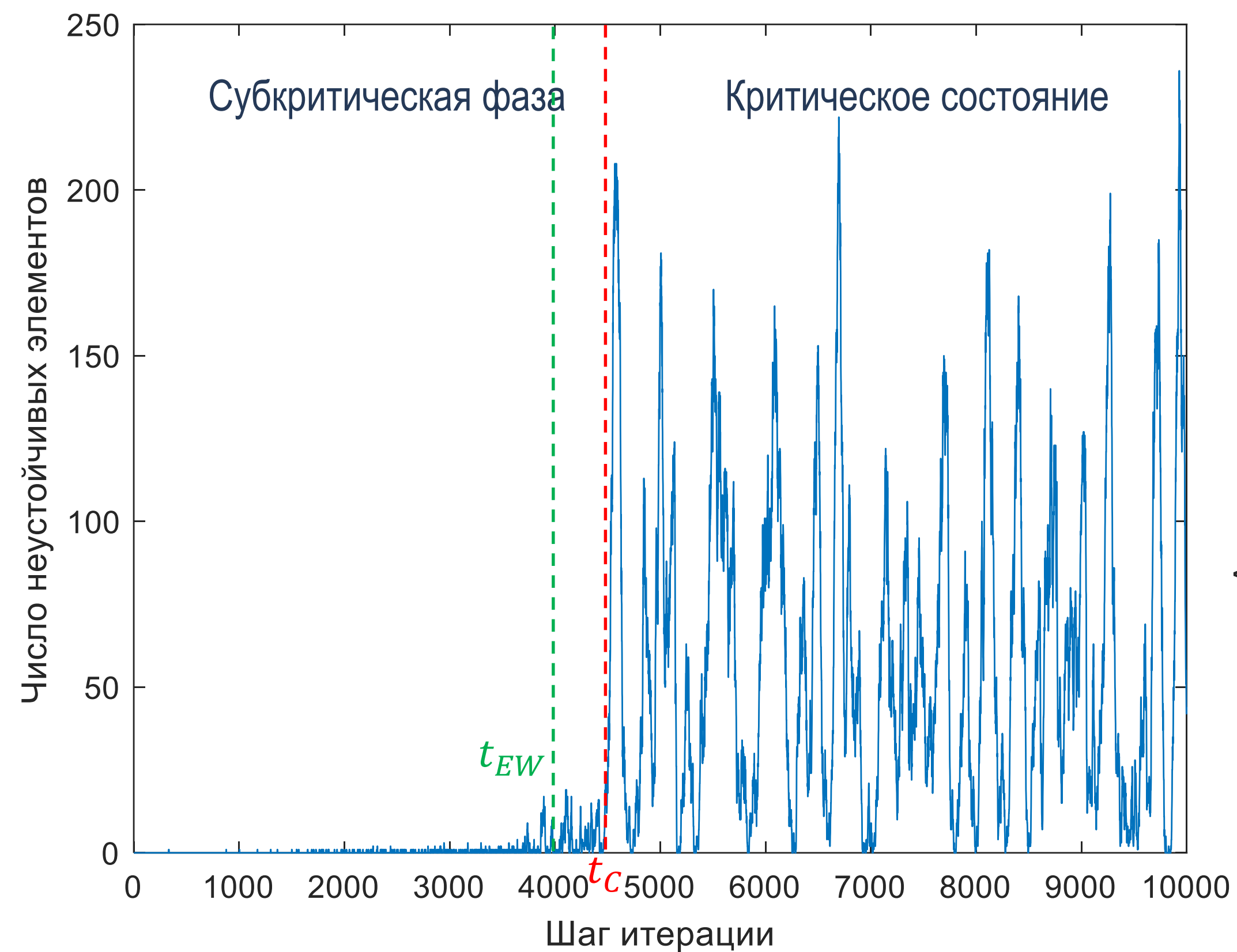


# Корреляционная теория в оценке мер раннего предупреждения

Визуальная оценка приближения к критической точке по изменению автокорреляционной функции для  $\xi_t$  в окне  $[0, t]$

- Автокорреляционная функция ( $m_{t'} \equiv c_{t'}(\tau)$ )

$$m_{t'} \equiv c_{t'}(\tau)$$



Временной ряд, соответствующий критическому переходу второго рода (слева) и автокорреляция при  $t' = 4100$



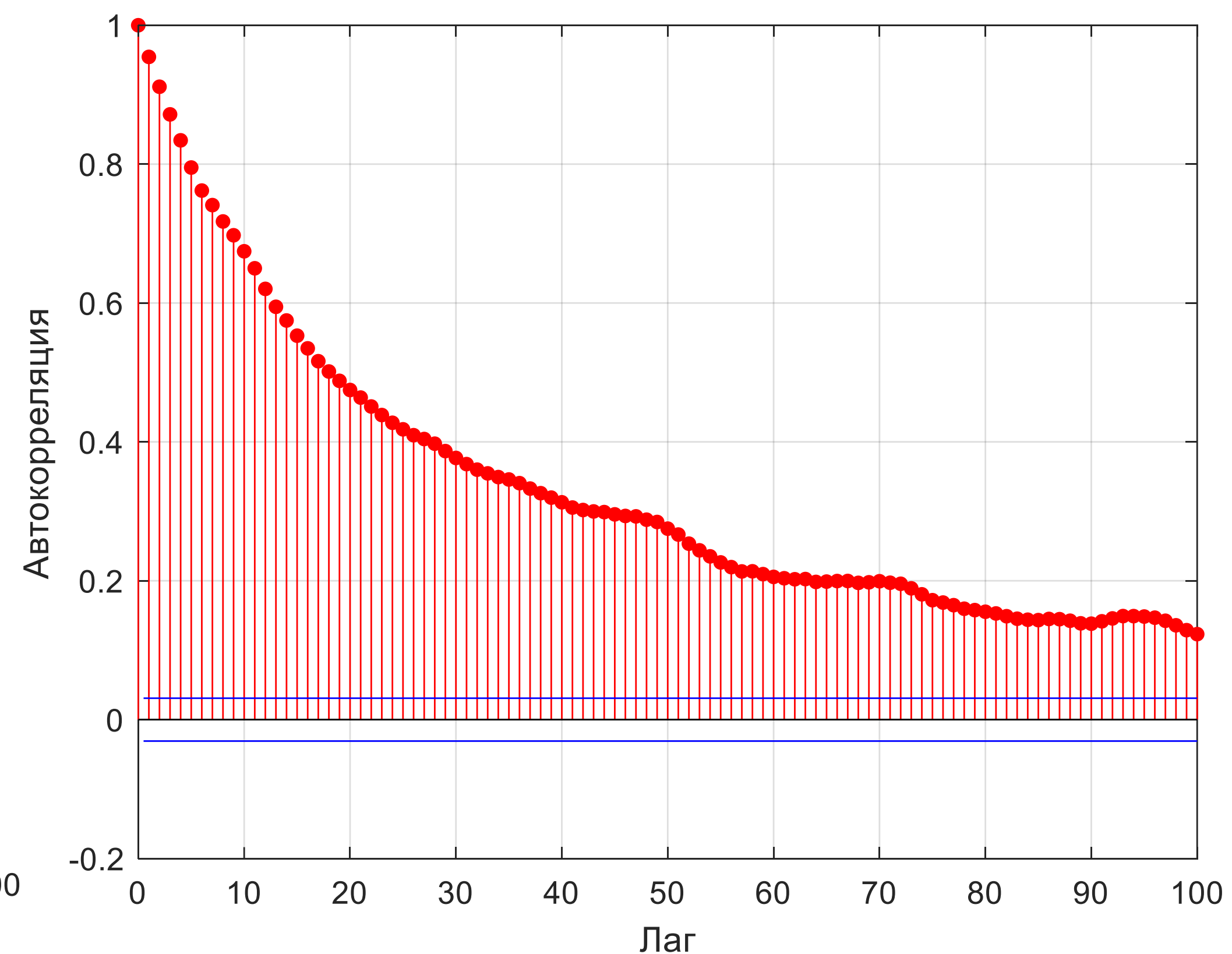
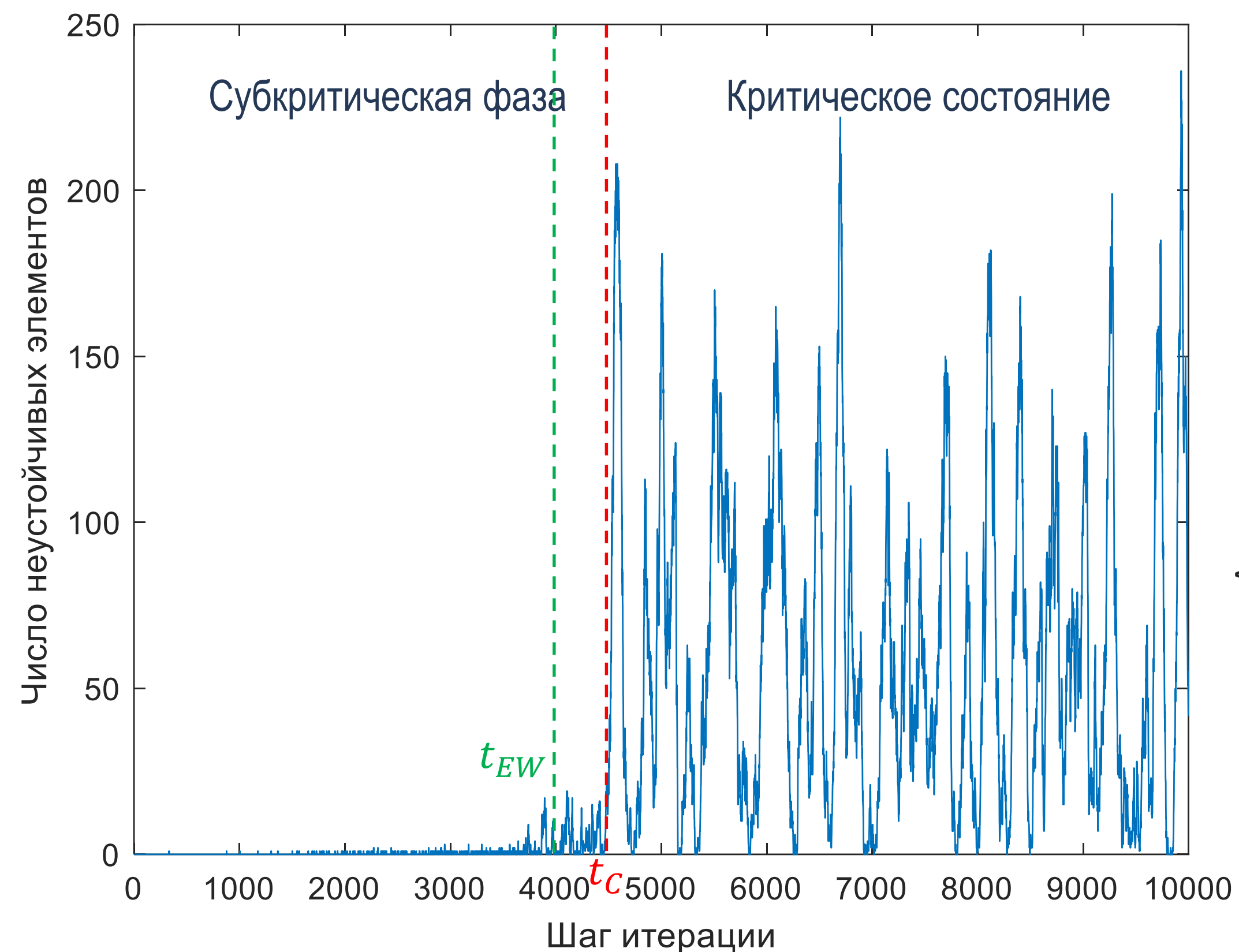


# Корреляционная теория в оценке мер раннего предупреждения

Визуальная оценка приближения к критической точке по изменению автокорреляционной функции для  $\xi_t$  в окне  $[0, t]$

- Автокорреляционная функция ( $m_{t'} \equiv c_{t'}(\tau)$ )

$$m_{t'} \equiv c_{t'}(\tau)$$



Временной ряд, соответствующий критическому переходу второго рода (слева) и автокорреляция при  $t' = 4200$

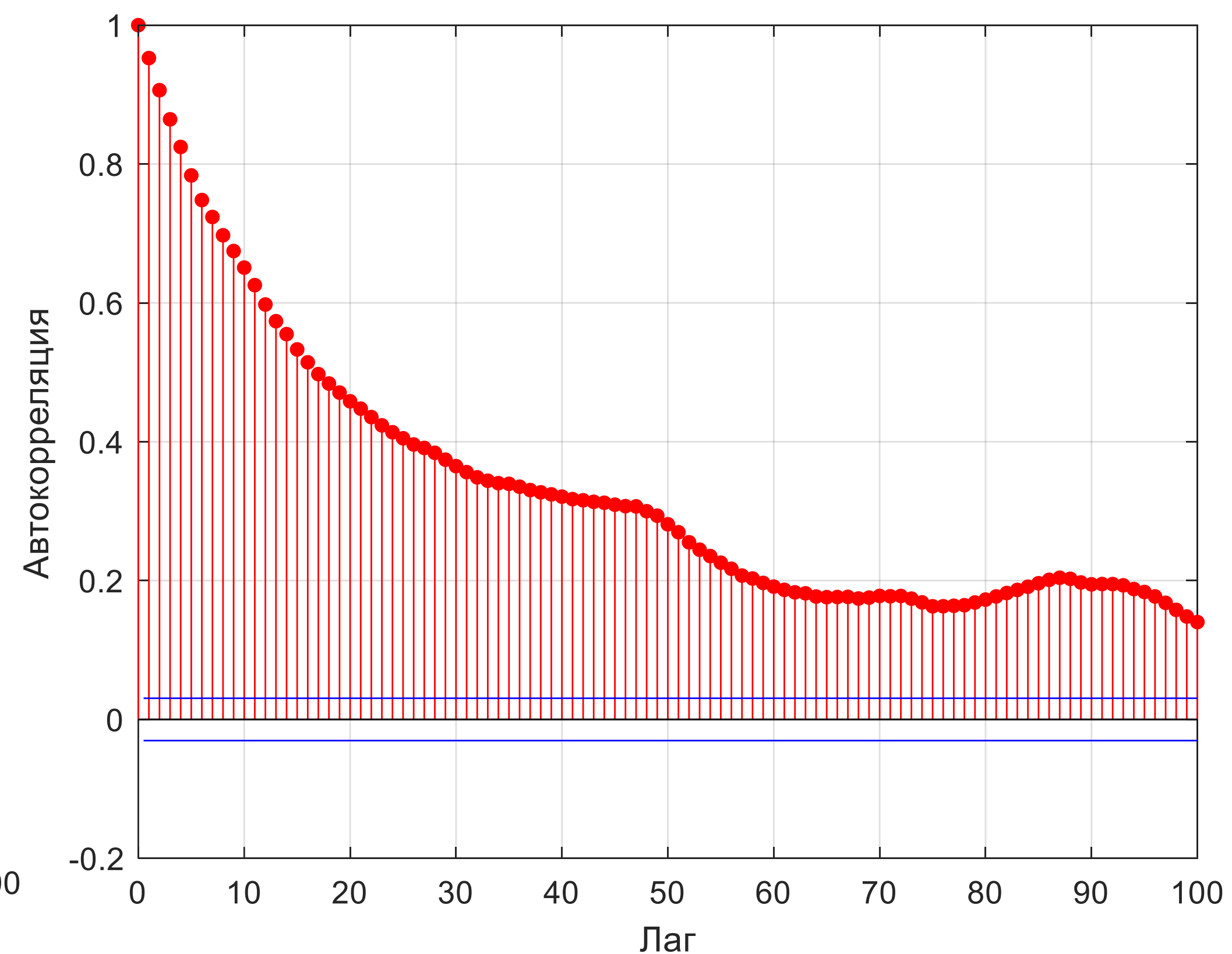
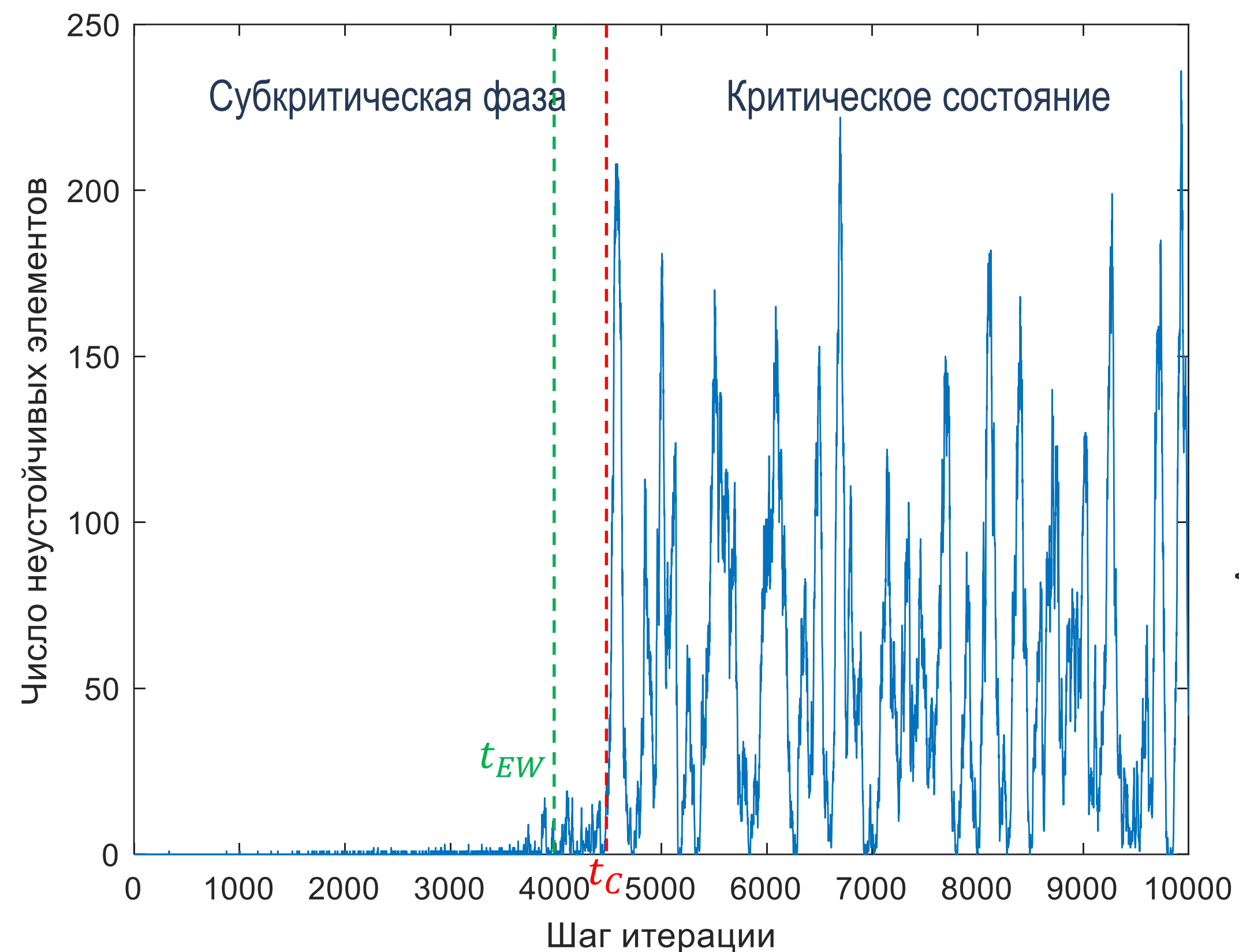


# Корреляционная теория в оценке мер раннего предупреждения

Визуальная оценка приближения к критической точке по изменению автокорреляционной функции для  $\xi_t$  в окне  $[0, t]$

- Автокорреляционная функция ( $m_{t'} \equiv c_{t'}(\tau)$ )

$$m_{t'} \equiv c_{t'}(\tau)$$



Временной ряд, соответствующий критическому переходу второго рода (слева) и автокорреляция при  $t' = 4300$

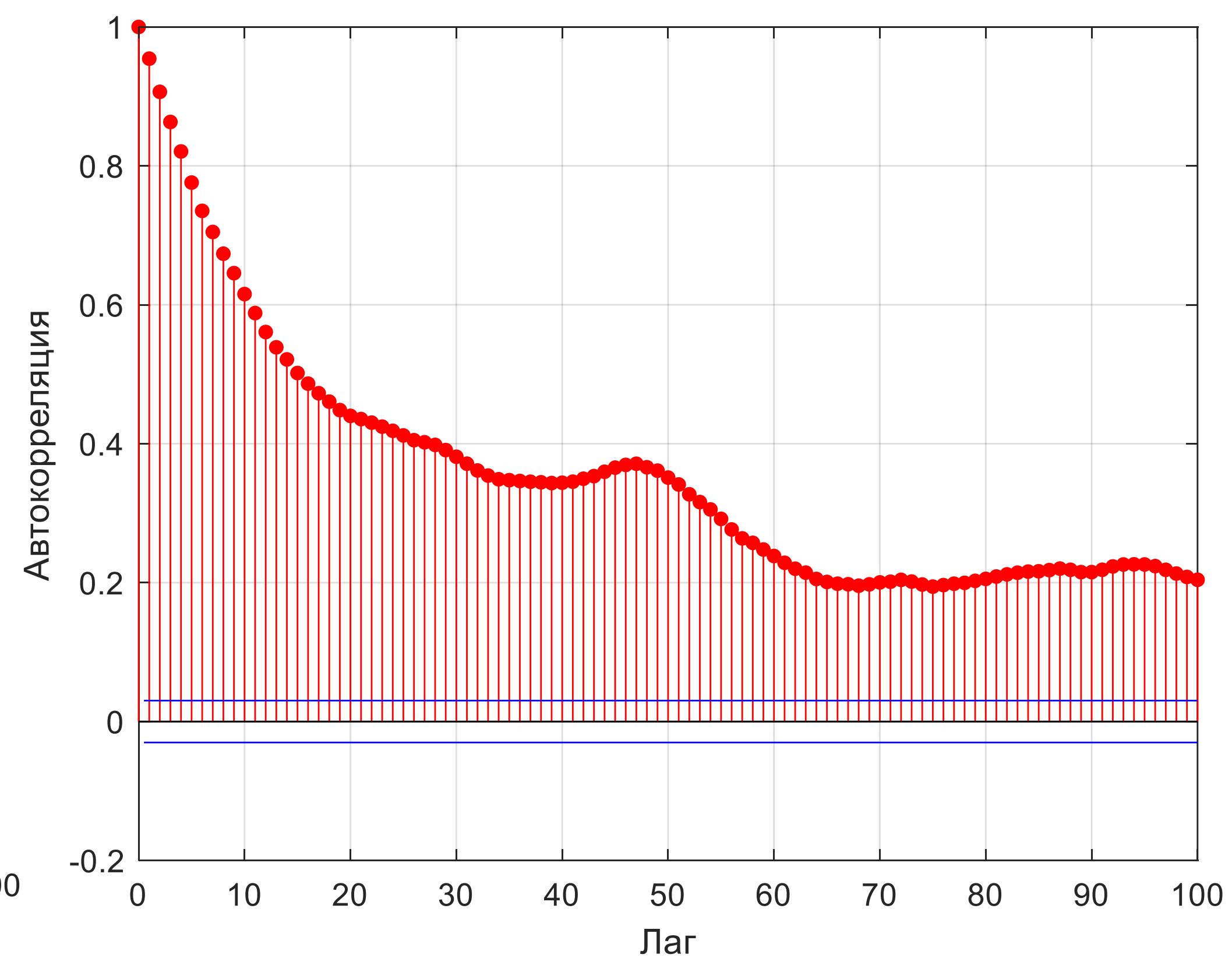
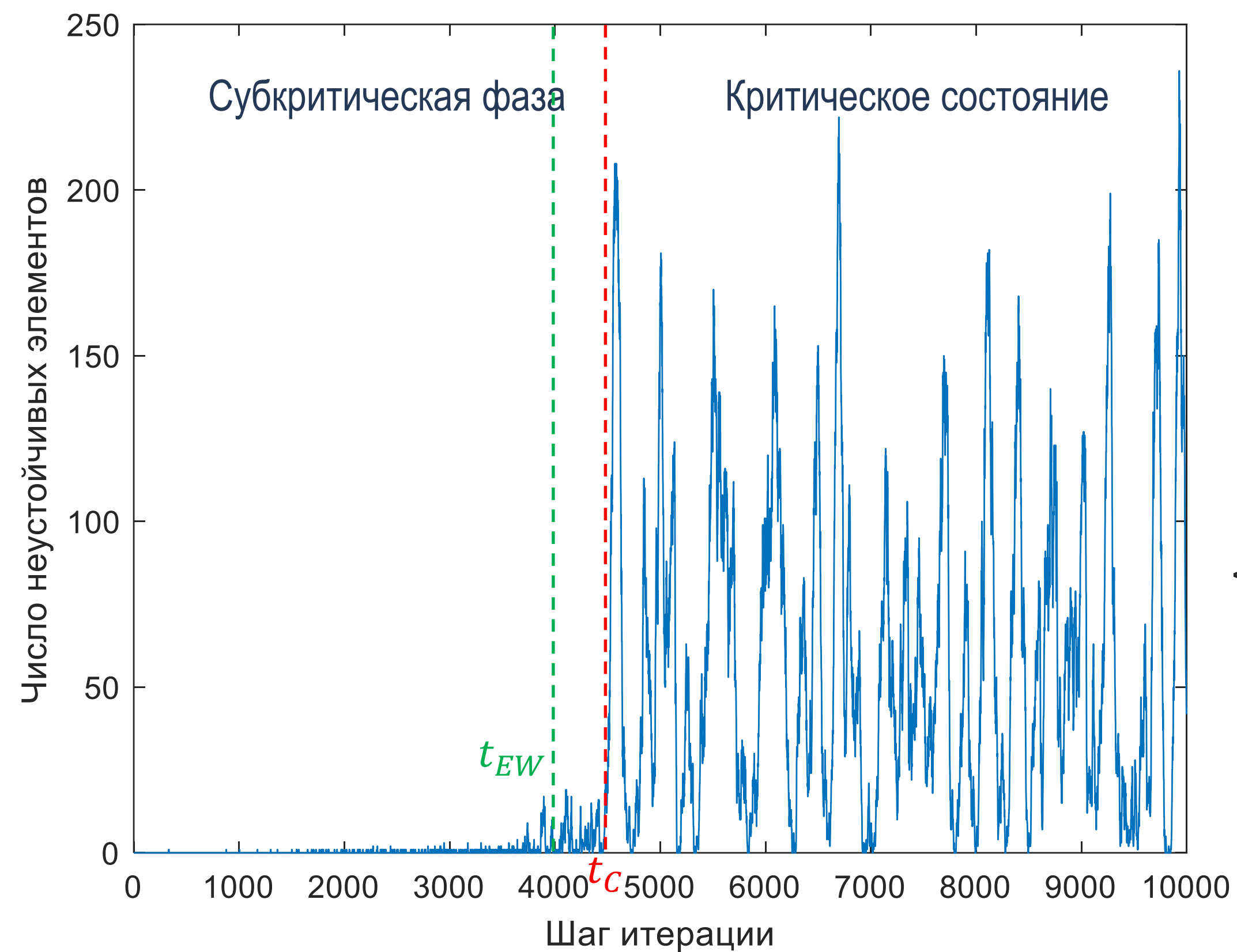


# Корреляционная теория в оценке мер раннего предупреждения

Визуальная оценка приближения к критической точке по изменению автокорреляционной функции для  $\xi_t$  в окне  $[0, t]$

- Автокорреляционная функция ( $m_{t'} \equiv c_{t'}(\tau)$ )

$$m_{t'} \equiv c_{t'}(\tau)$$



Временной ряд, соответствующий критическому переходу второго рода (слева) и автокорреляция при  $t' = 4400$

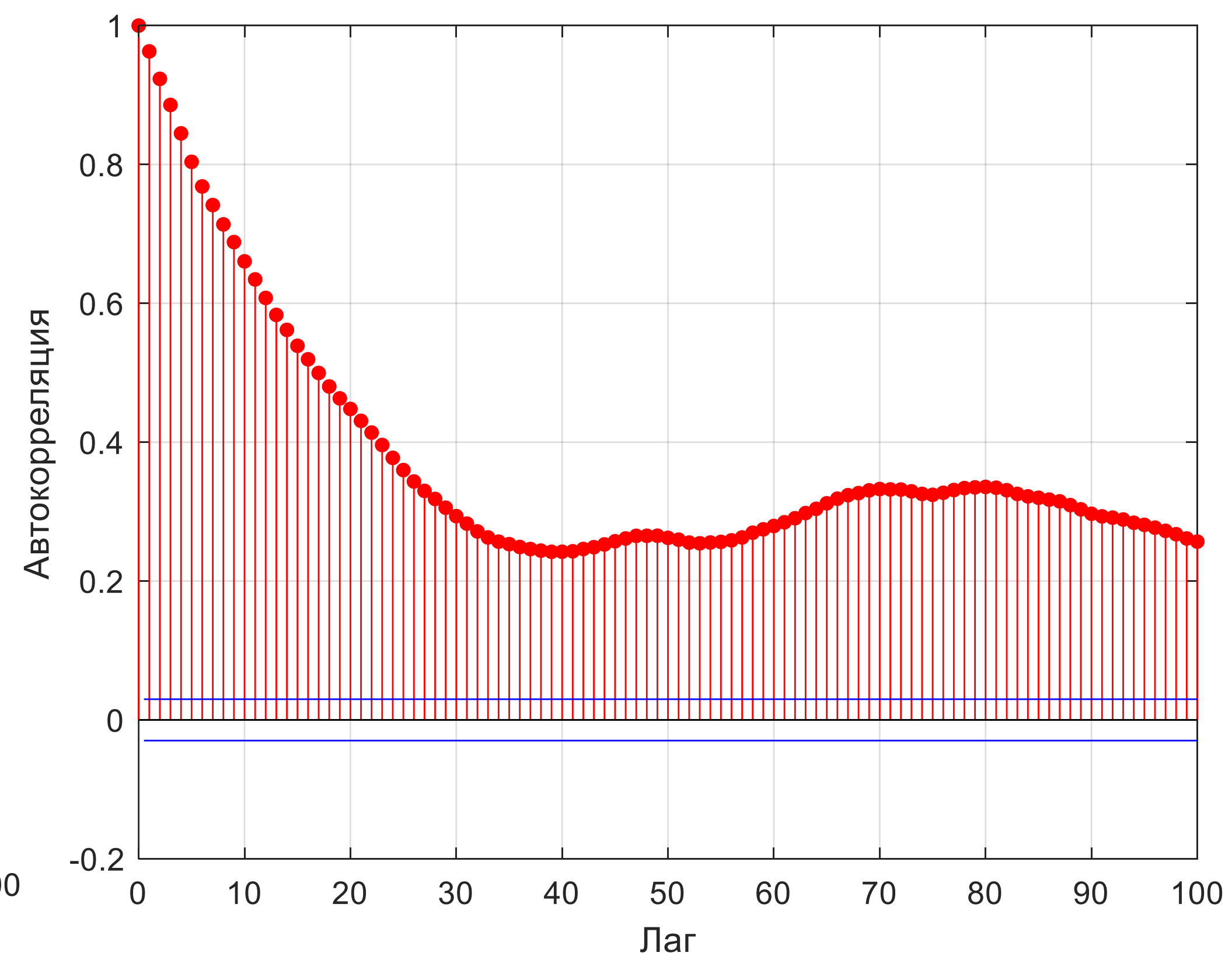
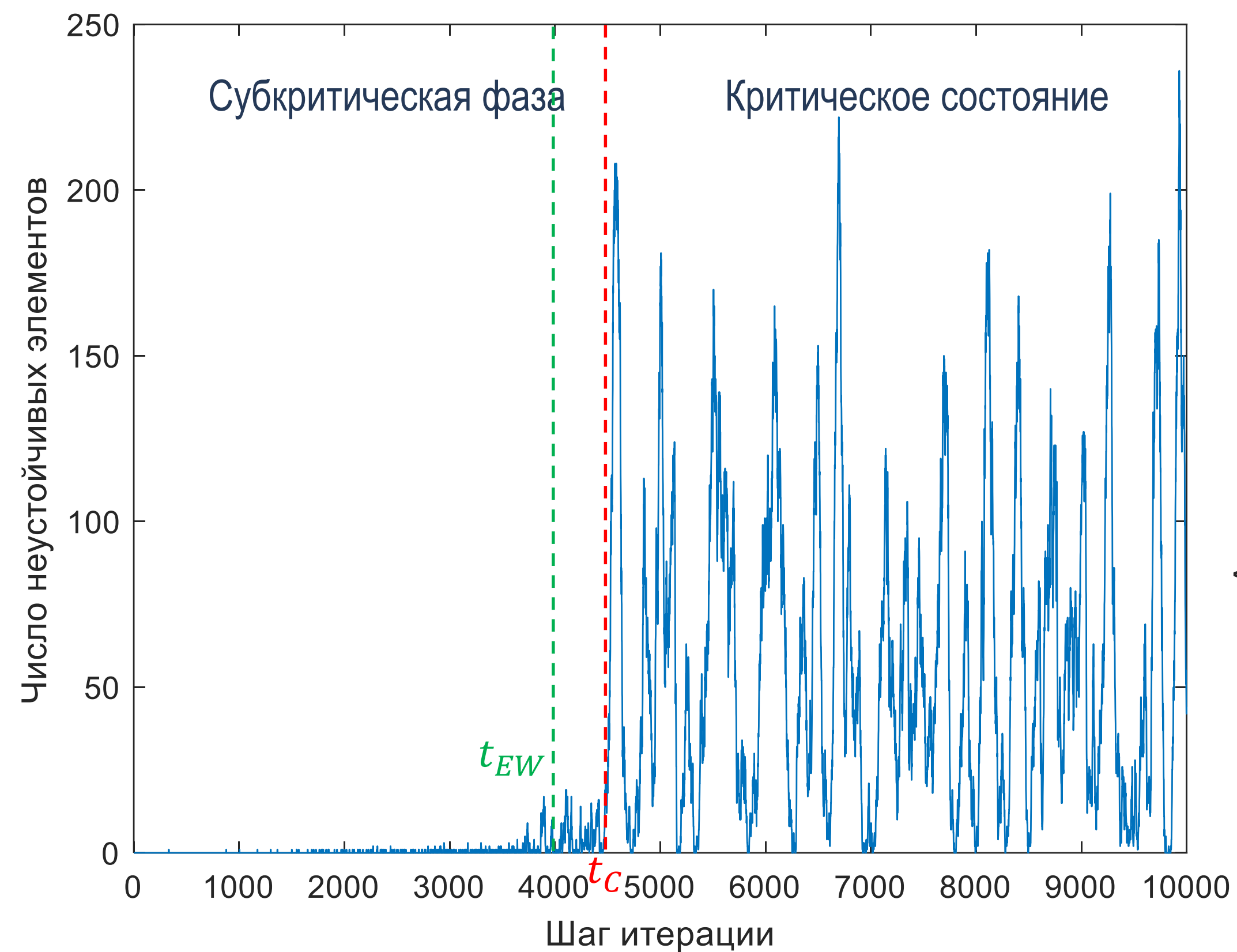


# Корреляционная теория в оценке мер раннего предупреждения

Визуальная оценка приближения к критической точке по изменению автокорреляционной функции для  $\xi_t$  в окне  $[0, t]$

- Автокорреляционная функция ( $m_{t'} \equiv c_{t'}(\tau)$ )

$$m_{t'} \equiv c_{t'}(\tau)$$



Временной ряд, соответствующий критическому переходу второго рода (слева) и автокорреляция при  $t' = 4500$

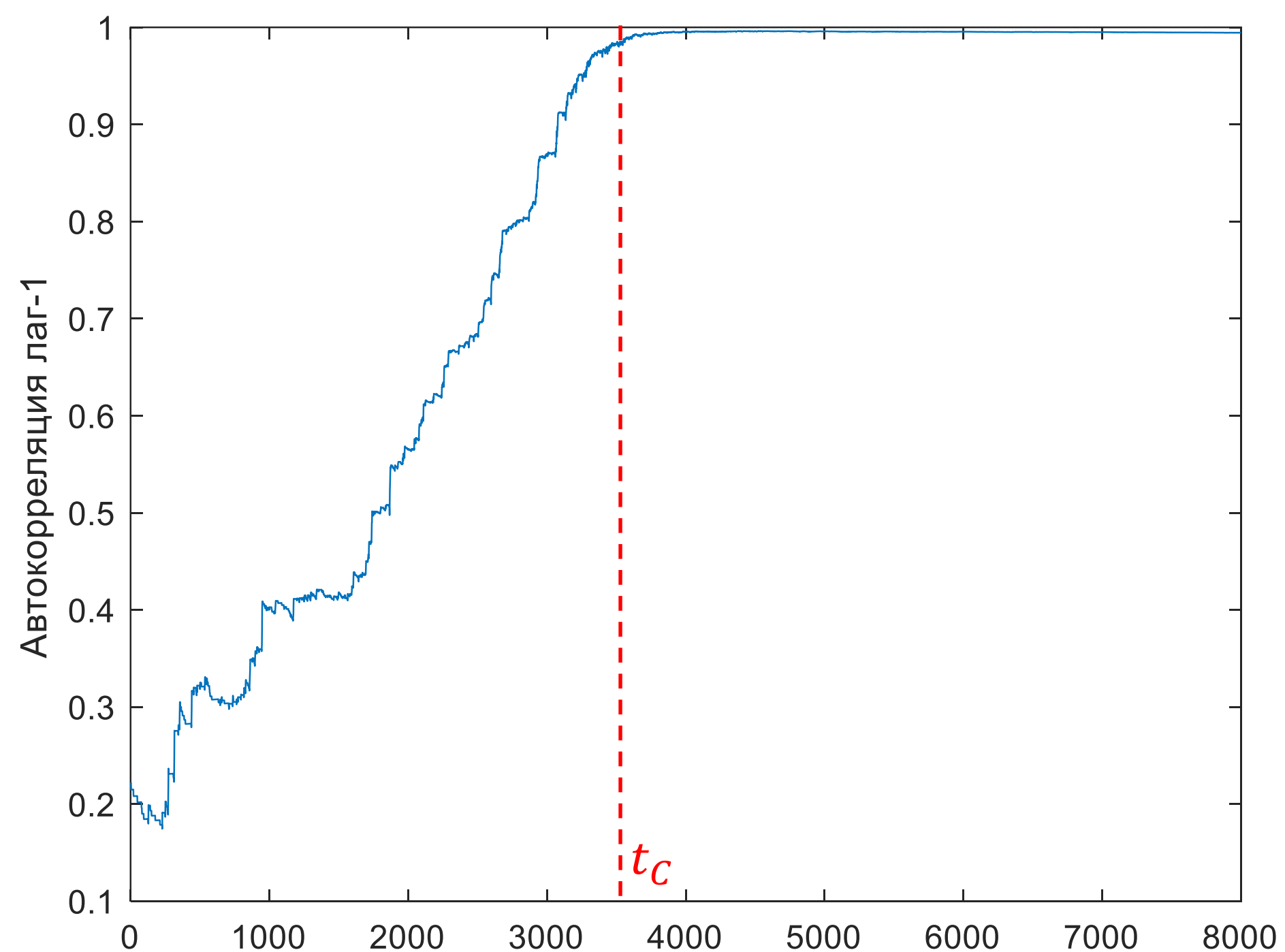




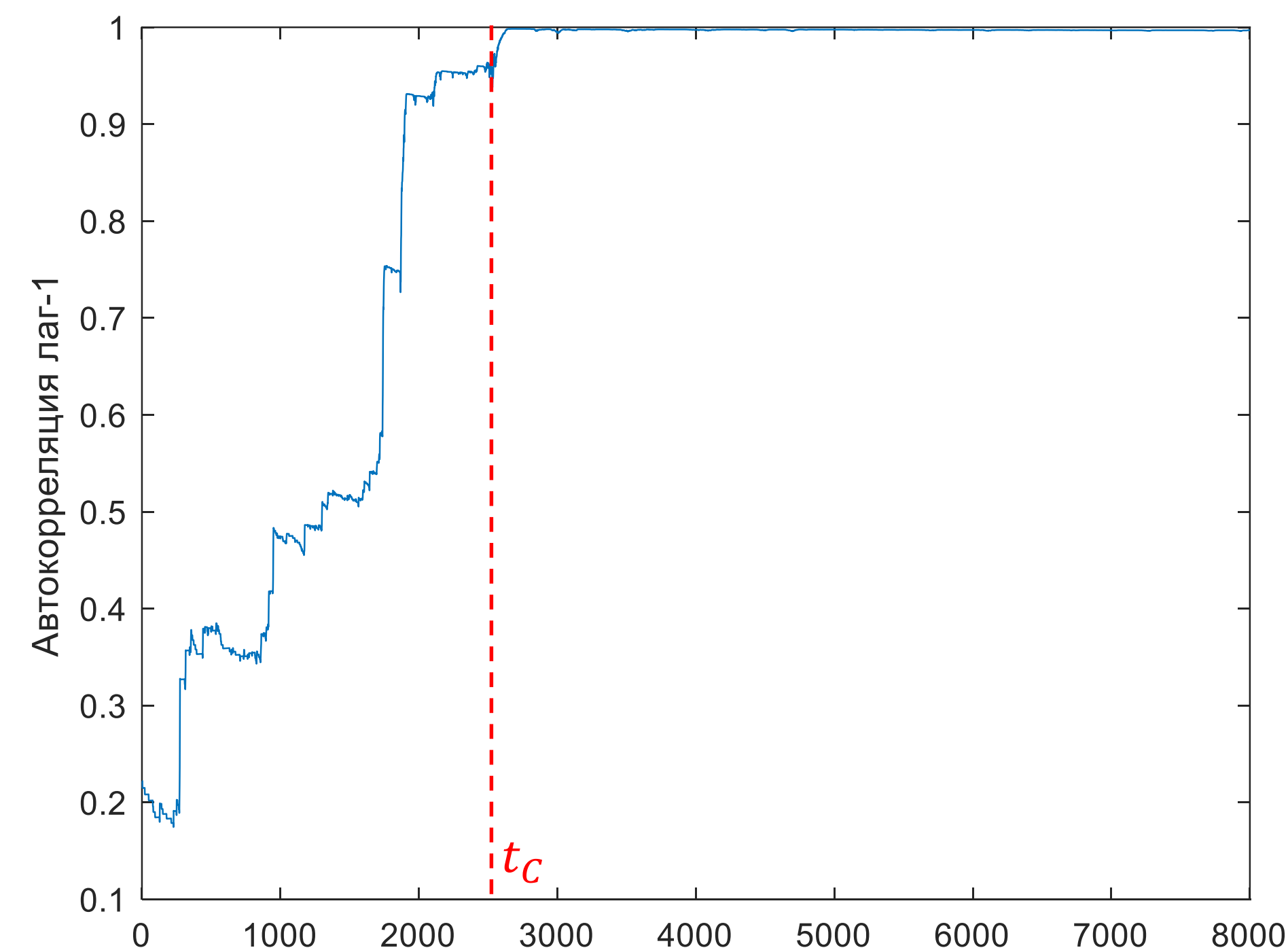
# Корреляционная теория в оценке мер раннего предупреждения

## Автокорреляция лаг-1 как мера раннего предупреждения

$$c_{t'}(1) = \frac{1}{\sigma_{t'}^2 t'} \sum_{t=t_0}^{t'-1} (\xi_t - \mu_{t'}) (\xi_{t+1} - \mu_{t'})$$



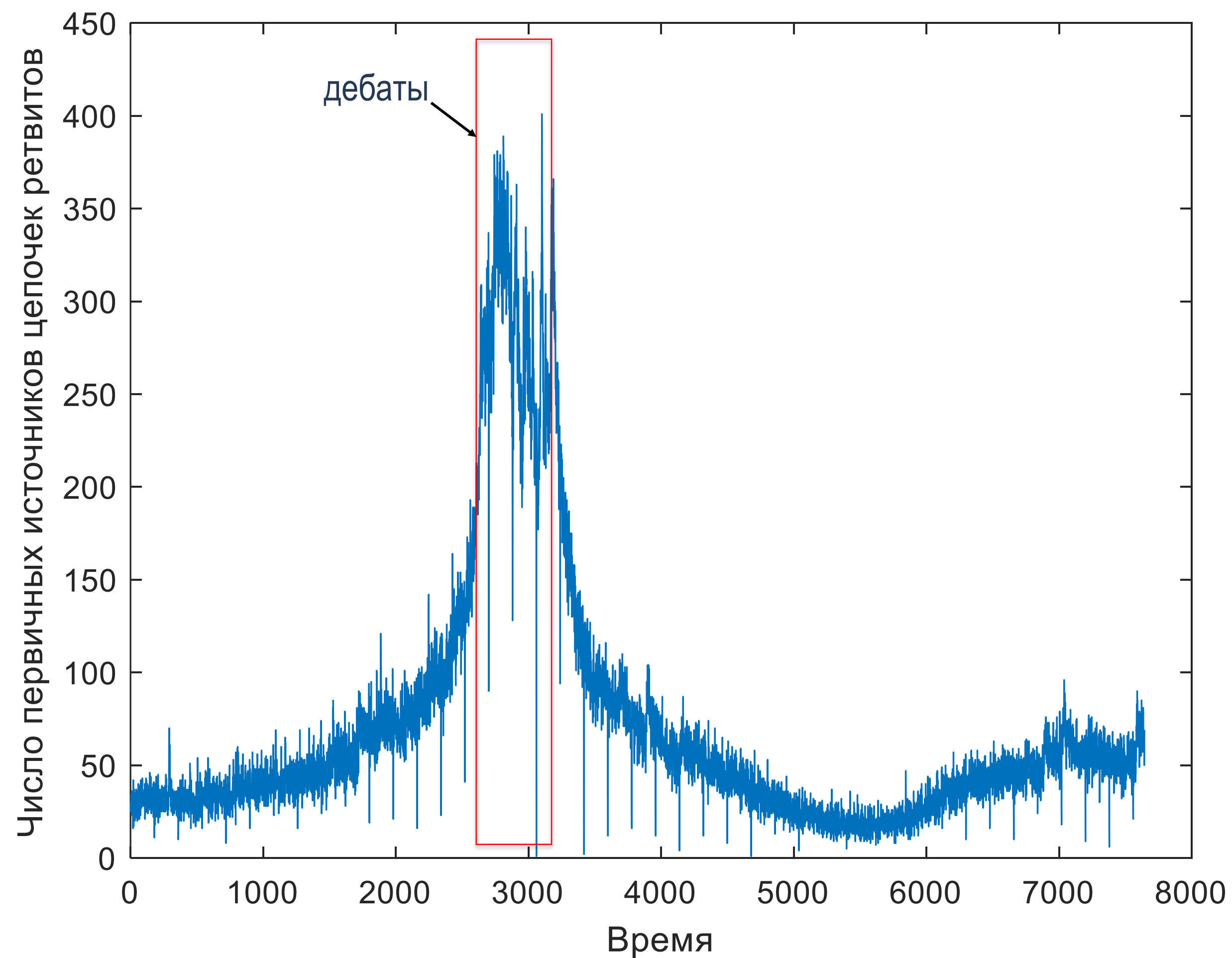
$m_{t'}$ , соответствующий критическому переходу второго рода



$m_{t'}$ , соответствующий критическому переходу первого рода



# Корреляционная теория в оценке мер раннего предупреждения

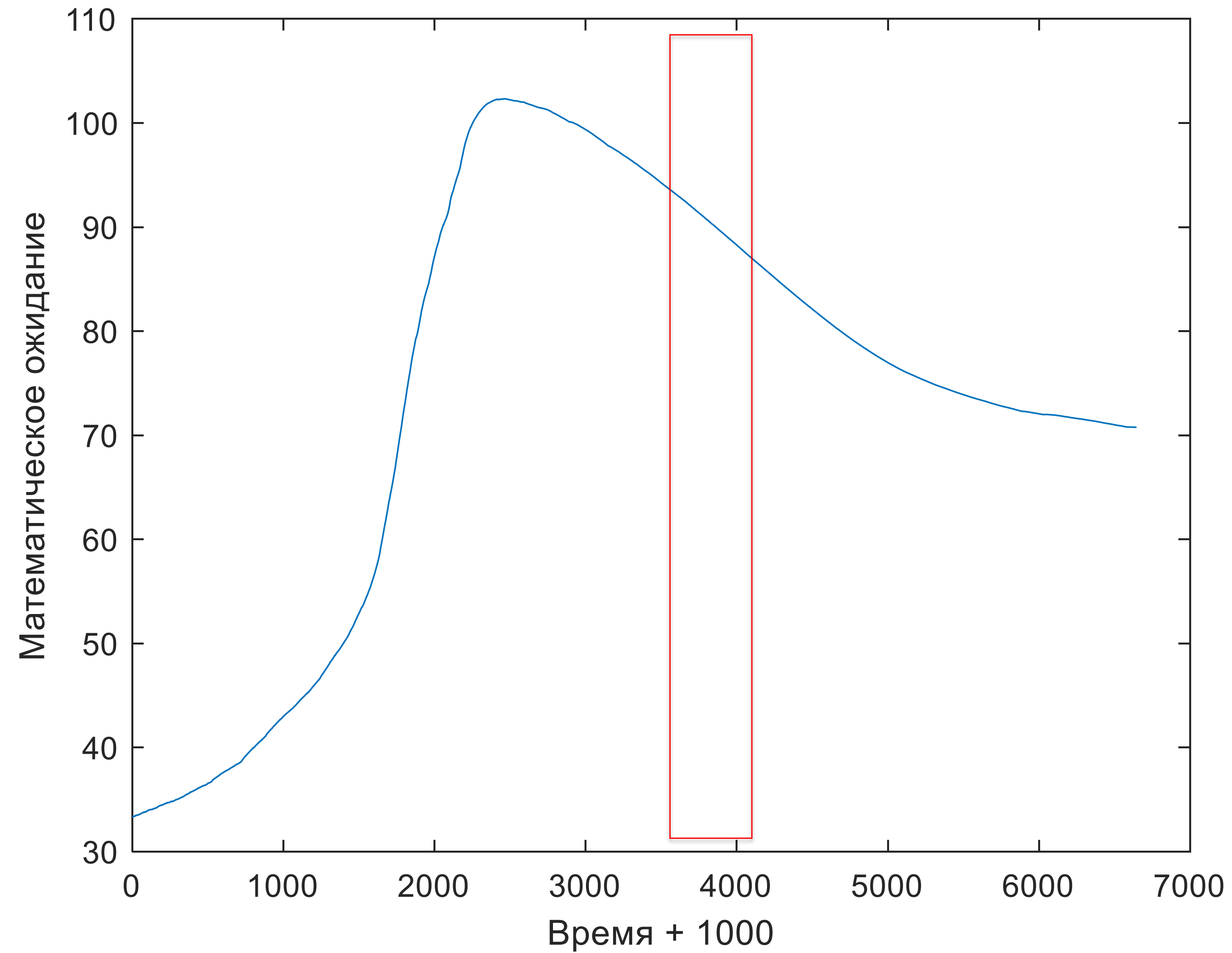


Стохастическая динамика числа первичных источников (пользователей) цепочек ретвитов, соответствующая первым дебатам предвыборной гонки Президентских Выборов 2016 года в США



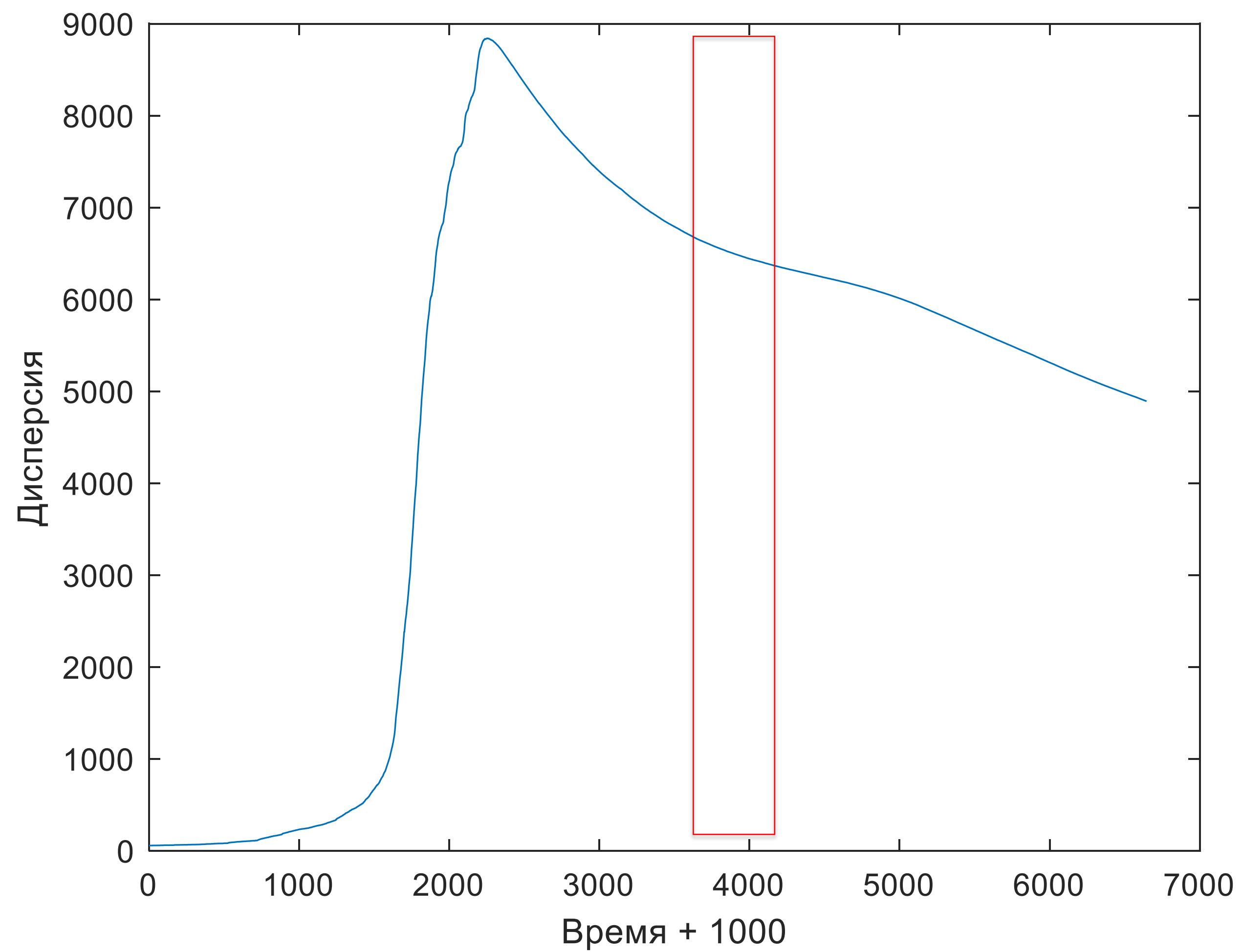
# Корреляционная теория в оценке мер раннего предупреждения

## Автокорреляция лаг-1 как мера раннего предупреждения



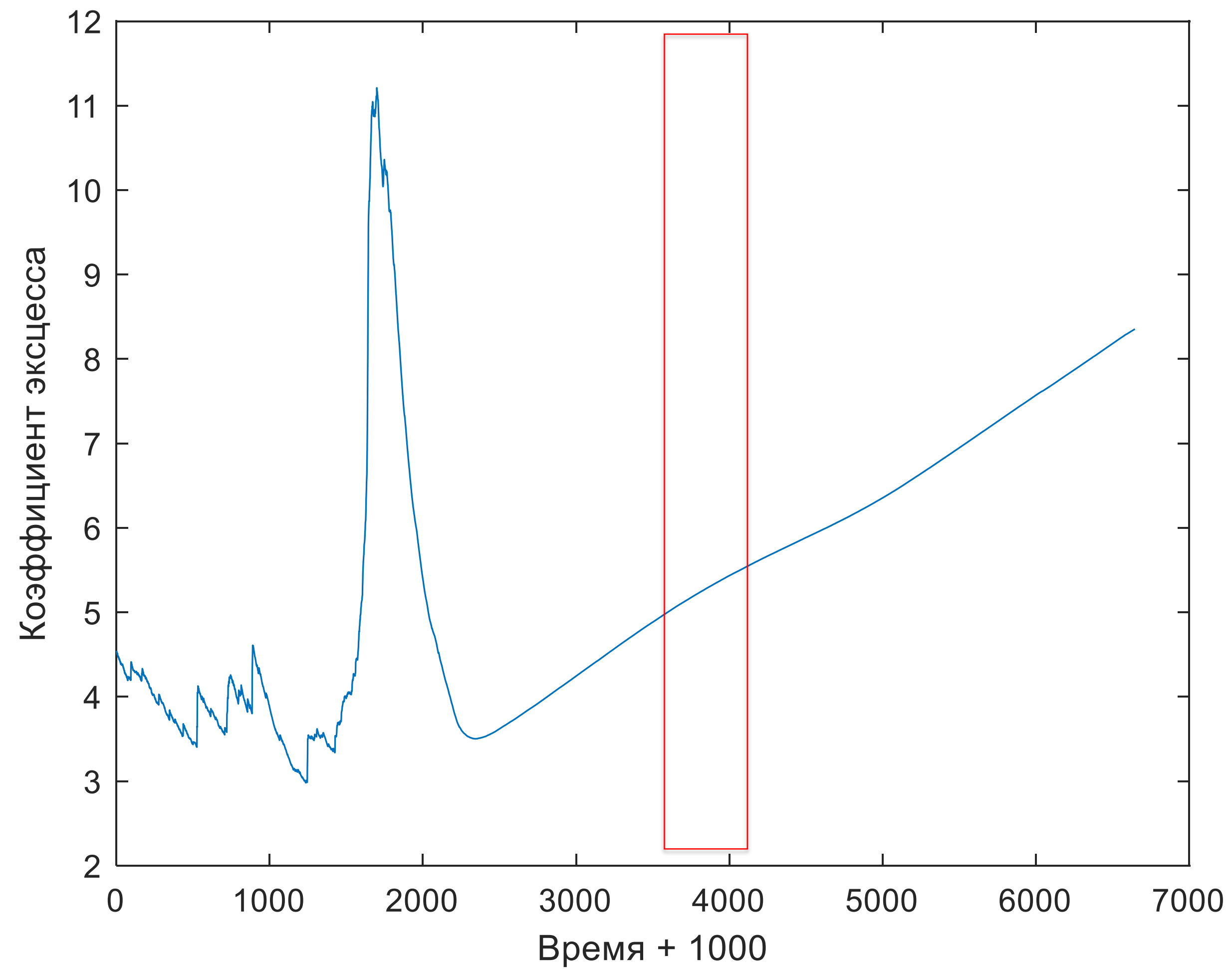


# Корреляционная теория в оценке мер раннего предупреждения





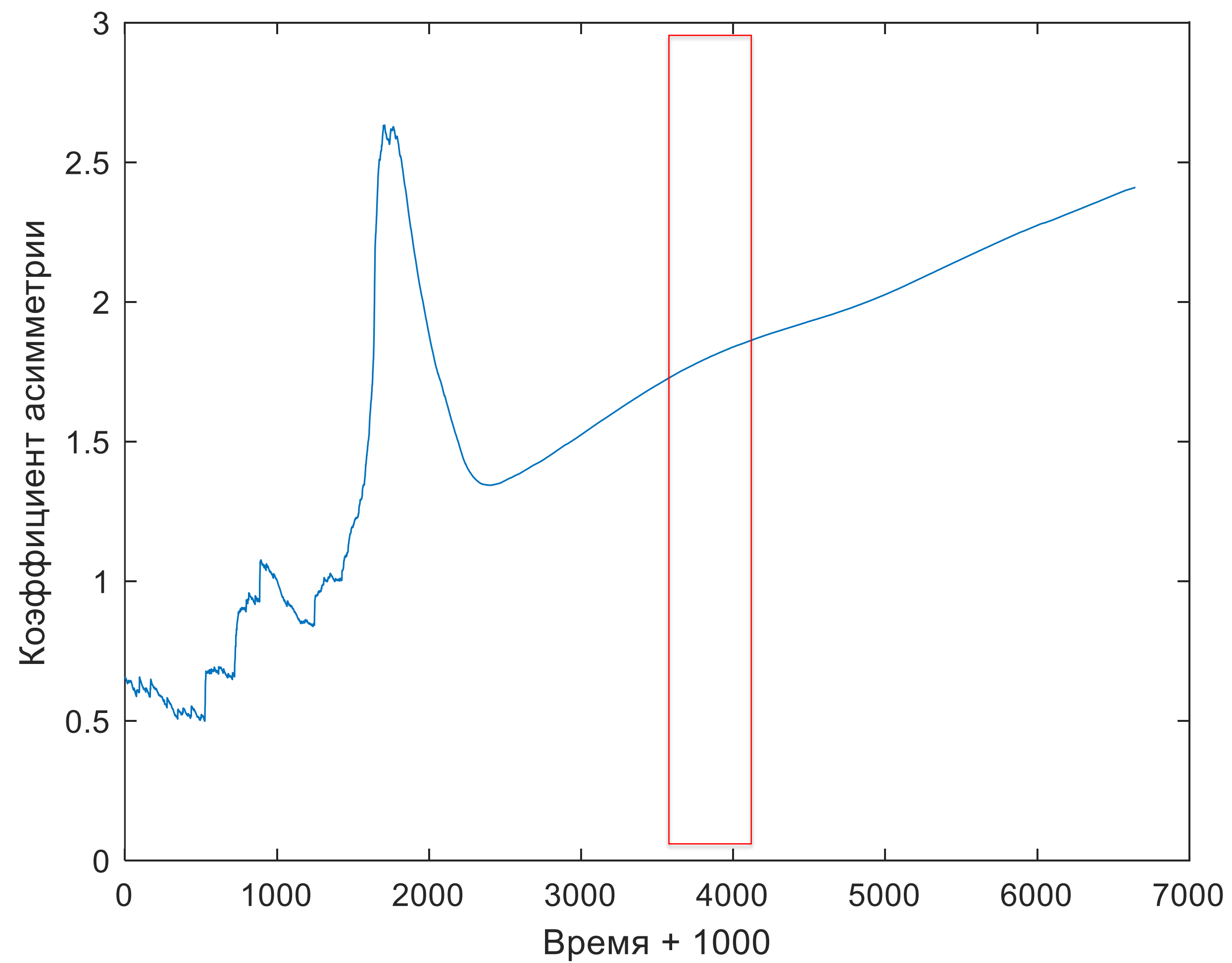
# Корреляционная теория в оценке мер раннего предупреждения





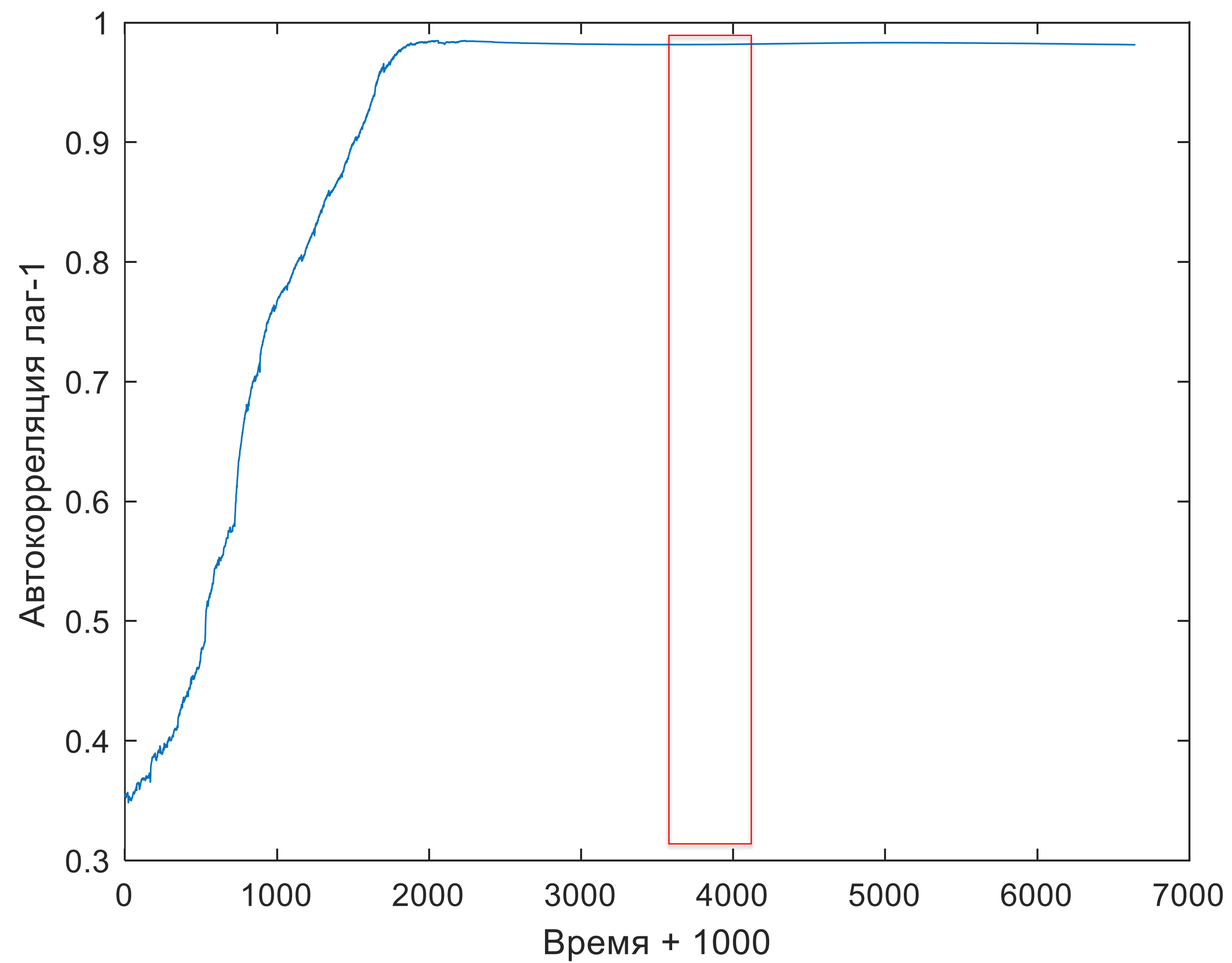


# Корреляционная теория в оценке мер раннего предупреждения





# Корреляционная теория в оценке мер раннего предупреждения





НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ  
УНИВЕРСИТЕТ