ХАРАКТЕРИСТИКА РАСЧЕТНО-ГРАФИЧЕСКОЙ РАБОТЫ

Работа представляет из себя задачу вычислительной математики: аппроксимации некоторой функции обобщенным рядом Фурье по системе ортонормированных на заданном интервале базисных функций и анализа влияния числа учитываемых членов ряда Фурье на точность аппроксимации.

При решении задачи предусмотрено оценивание погрешностей полученных результатов.

Целью работы является приобретение навыков использования алгоритмов вычислительной математики, организации вычислительных процессов на ЭВМ с использованием библиотеки прикладных программ, анализа и оценивания получаемых результатов.

Материалы выполнения РГР оформляются в виде пояснительной записки, которая должна содержать следующие разделы:

- введение;
- цель работы и постановка задачи;
- описание алгоритма решения задачи;
- результаты решения задачи в виде таблиц и графиков;
- заключение.

1. АППРОКСИМАЦИЯ ФУНКЦИЙ

1.1. Постановка задачи

На интервале $[a,b]$ произвести аппроксимацию реализации функции $f(t)$, заданной на $[a,b]$ с шагом Δt (в табл. 1.1 функция приведена в аналитическом виде), обобщенным рядом Фурье по системе ортонормированных на $[a,b]$ с весом $\rho(t)$ базисных функций $\Psi_r(t)$, $r=1, 2, \ldots, L$. Определить на $[a,b]$ погрешности аппроксимации. Исследовать влияние числа L учитываемых членов ряда Фурье на точность аппроксимации изменяя L от $L_{\min}=3$ до $L_{\max}=7$ с шагом $\Delta L=1$.

Таблица 1.1

Варианты задания

№ п/п	Вид аппроксимируемой функции	Интервал $[a,b]$	Шаг Δt	Базисные функции
1	$e^{-0,5t}\sin(1,5t)$	[0; 6,2]	0,025	Лагерра
2	$\sin(1,5t)$	[0,6; 2,05]	0,025	Лежандра
3				Чебышева
4				Тригонометрические
5	$\cos(2t)$	[0,75; 2,35]	0,025	Лежандра
6				Чебышева
7				Тригонометрические
8	$e^{-0,36t}\cos(t)$	[0; 7]	0,025	Лагерра
9	$5+2,5\sin(0,5t)$	[0.8;6.4]	0,05	Лежандра
10				Чебышева
11				Тригонометрические
12	$4-2\cos(t)$	[1,05; 4,7]	0,025	Лежандра
13				Чебышева
14				Тригонометрические
15	$2,1e^{-0,36t}\sin(0,5t)$	[0; 6]	0,05	Лагерра
16	$3+\sin(t)$	[0; 4,5]	0,025	Лежандра
17				Чебышева
18				Тригонометрические
19	$6-2\cos(0,5t)$	[6,2; 12,6]	0,05	Лежандра
20				Чебышева
21				Тригонометрические
22	$1,5e^{-0,5t}\cos(0,5t)$	[0; 7]	0,05	Лагерра
23	$10-5\sin(t)$	[0,5; 4,5]	0,025	Лежандра
24				Чебышева
25				Тригонометрические
26	$2,5e^{-0,3t}\sin(t)$	[0; 6]	0,025	Лагерра

1.2. Основные теоретические положения

Произвольную, кусочно-непрерывную функцию $f(t) \in L_2$ на $[a,b]$ приближенно можно представить в виде обобщенного ряда Фурье с конечным числом членов

$$f(t) \cong \tilde{f}(t) = \sum_{r=1}^{L} c_r \, \widehat{\Psi}_r(t), \qquad (1.1)$$

где $\widehat{\Psi}_r(t)$, $r \in [1, \; L]$, - система ортогональных с весом $\rho(t)$ на $[a,b]$ базисных функций, а

$$c_r = \int_a^b \rho(t) \; f(t) \; \widehat{\Psi}_r(t) dt \Bigg/ \int_a^b \rho(t) \; [\widehat{\Psi}_r(t)]^2 dt \qquad (1.2)$$

коэффициенты Фурье.

Таким образом, чтобы решить задачу аппроксимации функции $f(t)$ на $[a,b]$, необходимо при заданном базисе $\widehat{\Psi}_r(t)$, $r \in [1, \; L]$, $t \in [a, \; b]$, вычислить коэффициенты Фурье c_r, $r \in [1, L]$, согласно (1.2) и восстановить оценку $\tilde{f}(t)$, $t \in [a, \; b]$ аппроксимируемой функции $f(t)$ по выражению (1.1).

Ниже приведены ортогональные $\widehat{\Psi}_r(t)$ (ортонормированные $\Psi_r(t)$) с весом $\rho(t)$ на $[a,b]$ базисные функции, используемые при решении задачи аппроксимации.

Полиномы Лежандра, ортогональные на $[a,b]$ с весом $\rho(t) = 1$, удобно вычислять на ЭВМ по рекуррентной формуле:

$$\widehat{\phi}_r(t) = \frac{2r-3}{r-1} \left(\frac{2}{b-a} t - \frac{b+a}{b-a}\right) \widehat{\phi}_{r-1}(t) - \frac{r-2}{r-1} \widehat{\phi}_{r-2}(t), \qquad (1.3)$$

$$r = 3, 4, ..., L, \quad \widehat{\phi}_1(t) = 1, \quad \widehat{\phi}_2(t) = \frac{2}{b-a} t - \frac{b+a}{b-a}$$

Нормирующий множитель γ_r полиномов Лежандра имеет вид

$$\gamma_r = \sqrt{\frac{2\,r-1}{b-a}} \;, \quad r \in [1, \; L] \qquad (1.4)$$

и ортонормированные полиномы Лежандра могут вычисляться как

$$\phi_r(t) = \gamma_r \, \widehat{\phi}_r(t). \qquad (1.5)$$

Полиномы Чебышева первого рода, ортогональные на $[a, b]$ с весом

$$\rho(t) = \frac{b-a}{2\sqrt{[-t^2 + (b+a)\,t - a\,b]}}, \qquad (1.6)$$

также могут вычисляться по рекуррентной формуле

$$\widehat{T}_r(t) = 2\left(\frac{2}{b-a}t - \frac{b+a}{b-a}\right)\widehat{T}_{r-1}(t) - \widehat{T}_{r-2}(t), \tag{1.7}$$

$$r = 3, 4, ..., L, \quad \widehat{T}_1(t) = 1, \quad \widehat{T}_2(t) = \frac{2}{b-a}t - \frac{b+a}{b-a}.$$

Нормирующий множитель γ_r полиномов Чебышева первого рода

$$\gamma_r = \begin{cases} \sqrt{2}\big/\sqrt{\pi(b-a)}, & r = 1, \\ 2\big/\sqrt{\pi(b-a)}, & r > 1, \end{cases} \tag{1.8}$$

а ортонормированные полиномы Чебышева первого рода определяются в виде

$$T_r(t) = \gamma_r\, \widehat{T}_r(t). \tag{1.9}$$

При вычислении на ЭВМ коэффициентов c_r, $r \in [1, L]$ ряда Фурье по полиномам Чебышева в моменты времени $t{=}a$ и $t{=}b$ подкоренное выражение в весовой функции $\rho(t)$ обращается в нуль. Чтобы избежать операции деления на нуль, в подкоренное выражение введем некоторый малый параметр ε (например $\varepsilon = 10^{-6}\cdot\Delta t$, где Δt - шаг дискретизации). Однако введение параметра ε приводит к дополнительной погрешности в вычислениях коэффициентов Фурье, что в конечном итоге сказывается на погрешности аппроксимации. Причем, как показывает практика, погрешности, порожденные параметром ε, оказываются соизмеримыми с погрешностями от отбрасывания остаточного члена ряда Фурье при L=3, 4 при аппроксимации на $[a, b]$ полупериода синусоиды.

Тригонометрические функции, ортонормированные на $[a, b]$ с весом $\rho(t)$=1

$$G_r\left\{\cos[(r-1)\frac{2\pi}{b-a}t], \quad \sin[(r-1)\frac{2\pi}{b-a}t]\right\}, \qquad r \in [1,\ L] \tag{1.10}$$

образуют гармонический ряд Фурье, который представляется в виде

$$\tilde{f}(t) = \frac{A_1}{2} + \sum_{r=2}^{L} A_r \cos[(r-1)\frac{2\pi}{b-a}t] + B_r \sin[(r-1)\frac{2\pi}{b-a}t] \tag{1.11}$$

где

$$A_r = \frac{2}{b-a}\int_a^b f(t)\cos[(r-1)\frac{2\pi}{b-a}t]\,dt, \quad B_r = \frac{2}{b-a}\int_a^b f(t)\sin[(r-1)\frac{2\pi}{b-a}t]\,dt. \tag{1.12}$$

Функции Лагерра, ортонормированные на $[0, \infty]$ с весом $\rho(t)$=1, могут быть вычислены по рекуррентной формуле

$$L_r(t) = \frac{1}{r-1}(2r - 3 - 2\beta t)\, L_{r-1}(t) - \frac{r-2}{r-1}L_{r-2}(t), \quad r = 3,\ 4,\ ...,\ L\ , \tag{1.13}$$

$$L_1(t) = \sqrt{2\beta}\ e^{-\beta t}, \qquad L_2(t) = \sqrt{2\beta}\ e^{-\beta t}\ (1-2\beta t).$$

Параметр β, фигурирующий в выражениях функций Лагерра, необходимо выбирать из условия сохранения их свойств при аппроксимации не на бесконечном, а на конечном интервале времени, что имеет место при практическом использовании этих функций. Речь идет о количестве нулей функций Лагерра на заданном интервале аппроксимации, а именно, если $L_k(t)$ имеет $(k-1)$ нулей на $[0, \infty)$, то и на $[0, T]\,(a=0,\ b=T)$ она должна иметь $(k-1)$ нулей.

Экспериментально было установлено, что

$$\beta \approx 2\,L\,/\,T, \qquad r = 1,\ 2,\ ...,\ L\,. \tag{1.14}$$

При этом амплитуда L-й функции Лагерра в точке T будет составлять не более 0,1 от максимального на $[0,\ T]$ значения.

При анализе погрешностей аппроксимации следует иметь в виду, что при выполнении данной работы на ЭВМ результирующая погрешность включает в себя две составляющие: методическую, возникающую из-за неточности методов, используемых при решении задачи аппроксимации (конечное число L членов ряда Фурье, использование квадратурных формул численного интегрирования при определении коэффициентов Фурье), и вычислительную (погрешность округления на ЭВМ). Исходные данные полагаем заданными точно, поэтому погрешность задания исходных данных отсутствует.

Результирующую погрешность аппроксимации $f(t)$ на $[a,\ b]$ обобщенным рядом Фурье $\tilde{f}(t)$ можно оценить посредством следующих оценок:

- максимальной на $[a, b]$ абсолютной и относительной

$$e_{\text{м}} = \max_{t\in[a,b]}\left|f(t)-\tilde{f}(t)\right|, \quad e_{\text{мо}} = \max_{t\in[a,b]}\left|f(t)-\tilde{f}(t)\right| / \left|\tilde{f}(t)\right|\ ; \tag{1.15}$$

- среднеквадратичной на $[a, b]$ абсолютной и относительной

$$e_{\text{с}} = \sqrt{\int_a^b \left|f(t)-\tilde{f}(t)\right|^2 dt}, \quad e_{\text{со}} = e_{\text{с}} \Big/ \sqrt{\int_a^b \left|f(t)^2\right| dt}\ . \tag{1.16}$$

1.3. Порядок выполнения работы

Ознакомиться с теоретическими положениями в методических указаниях к данному заданию и пакетом прикладных программ (см. приложение), необходимых для его выполнения.

Записать в общем виде приближенное представление функции $f(t)\in L_2[a,b]$ рядом Фурье по системе ортогональных (ортонормированных) на $[a, b]$ с весом $\rho(t)$ базисных функций (см. табл. 1.1) по вариантам.

В соответствии с вариантом необходимо:

- осуществить ввод исходных данных;

- вычислить на $[a,b]$ с шагом Δt реализацию оценки $\tilde{f}(t)$ аппроксимируемой функции $f(t)$;
- определить погрешности аппроксимации;
- повторить указанные вычисления для всех L согласно вариантам.

В пояснительной записке должны быть приведены:
- графики функций $f(t)$, $\tilde{f}_L(t)$, (при L=3, L=5, L=7);
- графики погрешностей аппроксимации $e_L(t) = f(t) - \tilde{f}_L(t)$;
- графики базисных функций $\Psi_r(t)$, $r \in [1,\ 5]$ и $\rho(t) \neq 1$;
- погрешности $e_{\text{мо}} = f(L)$ и $e_{\text{со}} = f(L)$, для всех $L \in [3,\ 7]$.