

№ 4552

51

В 949

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА

Методическое руководство

НОВОСИБИРСК
2016

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА

Методическое руководство для выполнения индивидуальных
и лабораторных работ по курсу «Вычислительная математика»
студентами факультета АВТ направления 27.03.04
«Управление в технических системах»

НОВОСИБИРСК
2016

УДК 519.6(076.5)
В 949

Настоящее методическое руководство предназначено для выполнения индивидуальных заданий и лабораторных работ по курсу «Вычислительная математика» с целью получения навыков решения задач вычислительной математики на ЭВМ, для чего разработан специальный пакет прикладных программ.

Составил канд. техн. наук, доц. *Г.П. Чикильдин*

Рецензент д-р техн. наук, проф. *А.А. Воевода*

Работа подготовлена кафедрой автоматики

1. ИНТЕРПОЛИРОВАНИЕ ФУНКЦИЙ

ЦЕЛЬ РАБОТЫ

Ознакомление с методикой приближенного представления функций в виде интерполяционного полинома и способами оценивания погрешностей интерполяции.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Вычислить приближенные значения функции $y = f(x)$, $x \in [a, b]$ с шагом Δx ($\Delta x = 0,1$) посредством интерполяционного полинома $P_n(x)$, $n \in [2, 5]$, $x \in [a, b]$, определенного через $y_i = f(x_i)$ в узлах интерполяции x_i , $i \in [1, N]$ ($N \in [3, 6]$, $N = n + 1$) с шагом $h = (b - a) / (N - 1) = \text{const}$ на интервале $[a, b]$.

Оценить погрешности интерполирования функции $y = f(x)$, $x \in [a, b]$.

Исследовать влияние количества узлов N на точность интерполирования.

ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТЫ

1. Ознакомиться с описанием работы. Уяснить цель и смысл задачи согласно варианту (табл. 1.1). Открыть выполняемый файл «Интерполирование».

2. Выполнить интерполирование $y = f(x)$ для $N = 3, 4, 5, 6$.

3. Зафиксировать результат интерполирования и относительные погрешности, максимальную $E_{\text{мо}}$ и среднеквадратичную $E_{\text{со}}$.

4. Исследовать влияние количества узлов $N \in [3, 6]$ на погрешности интерполяции в виде $E_{\text{мо}} = f(N)$, $E_{\text{со}} = f(N)$.

5. Оформить отчет.

Т а б л и ц а 1.1

№ п/п	$y = f(x)$	$[a, b]$	№ п/п	$y = f(x)$	$[a, b]$
1	$e^{-x} \sin(x)$	[0,8, 4,4]	11	$e^x \lg(x)$	[0,2, 4,0]
2	$x + \sin(x)$	[0,2, 8,2]	12	$e^{-x} + \sin(x)$	[0,5, 5,0]
3	$e^x \sin(x)$	[0,1, 2,9]	13	$x + 6 \sin(2x)$	[1,0, 3,0]
4	$x + \cos(x)$	[0,1, 7,7]	14	$2 \lg(x) + \sin(x)$	[0,1, 2,5]
5	$e^x \cos(x)$	[0,8, 4,0]	15	$\lg(x) \sin(x)$	[1,0, 5,0]
6	$2,5 \lg(x)$	[0,2, 8,2]	16	$e^{-x} \lg(x) + \sin(x)$	[0,2 3,5]
7	xe^{-x}	[0,4, 3,6]	17	$\lg(x) \cos(2x)$	[0,3 3,0]
8	xe^x	[1,5, 5,5]	18	$-x + \cos(x)$	[0,7 5,0]
9	$1,5 \cos(x)$	[0,2, 8,2]	19	$e^x / x + \lg(x)$	[0,2, 2,4]
10	$e^{-x} \cos(x)$	[2,0, 4,8]	20	$xe^{-x} + \cos(x)$	[1,2, 6,0]

СОДЕРЖАНИЕ ОТЧЕТА

1. Цель работы.
2. Постановка задачи.
3. Формула интерполяционного полинома Лагранжа $L_n(x)$ и оценка остаточного члена $R_n(x)$ в общем виде.
4. Результаты вычислений в виде таблиц (см. «Образец» ниже) и рисунков для $N \in [3, 6]$ (графики $f(x)$ и $P_n(x)$ на одном рисунке и погрешностей $e_n(x) = f(x) - P_n(x)$ – на другом).
5. Кривые зависимостей $E_{\text{мо}} = f(N)$ и $E_{\text{со}} = f(N)$, $N \in [3, 6]$.
6. Выводы.

Образец $N = 3$

x_i	y_i	Коэффициенты полинома $P_2(x)$
2,00	$-5,6319e-02$	$a_0 = -5,631935e-2$
3,40	$-3,2265e-02$	$a_1 = 2,405413e-2$
4,80	$7,2009e-04$	$a_2 = 8,931179e-3$

x	$F(x)$	$P_2(x)$	$E(x)$
2,00	$-5,6319e-02$	$-5,6319e-02$	$6,9389e-18$
2,10	$-6,1822e-02$	$-5,4897e-02$	$-6,9243e-03$
2,20	$-6,5208e-02$	$-5,3430e-02$	$-1,1778e-02$
...			
3,30	$-3,6421e-02$	$-3,4280e-02$	$-2,1418e-03$
3,40	$-3,2265e-02$	$-3,2265e-02$	$0,0000e+00$
3,60	$-2,4503e-02$	$2,8100e-02$	$-3,5971e-03$
...			
4,70	$-1.1268e-04$	$-1,9322e-03$	$1,8195e-03$
4,80	$7.2009e-04$	$7,2009e-04$	$4,1200e-18$

КРАТКИЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

В общем случае задача интерполирования функции $y = f(x)$, заданной системой точек $y_i = f(x_i)$, $i \in [0, n]$, на интервале $[a, b]$ поставлена некорректно – имеет неединственное решение. Регуляризация выполняется путем ограничения класса функций, используемых для интерполяции, и единственность решения поставленной задачи будет иметь место при выборе в качестве интерполирующей функции полинома заданной степени n , который можно записать в виде

$$P_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n.$$

Коэффициенты a_i , $i \in [0, n]$, интерполяционного полинома $P_n(x)$ могут быть определены из условия равенства значений $y_i = P_n(x_i)$ в заданных точках x_i , $i \in [0, n]$, называемых узлами интерполяции $N = n + 1$. Действительно, полагая в $P_n(x)$ $x = x_0$, $x = x_1$, $x = x_2, \dots$, $x = x_n$, можно сформировать систему линейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} a_0 + a_1 x_0 + a_2 x_0^2 + \dots + a_n x_0^n = y_0, \\ a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_1^2 + \dots + a_n x_1^n = y_1, \\ a_0 + a_1 x_2 + a_2 x_2^2 + \dots + a_n x_2^n = y_2, \\ \dots \\ a_0 + a_1 x_n + a_2 x_n^2 + \dots + a_n x_n^n = y_n, \end{cases}$$

которая имеет единственное решение, поскольку ее определитель

$$\begin{vmatrix} x_0^0 & x_0^1 & x_0^2 & \dots & x_0^n \\ x_1^0 & x_1^1 & x_1^2 & \dots & x_1^n \\ x_2^0 & x_2^1 & x_2^2 & \dots & x_2^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_n^0 & x_n^1 & x_n^2 & \dots & x_n^n \end{vmatrix}$$

весьма специфичен, известен в математике как определитель Вандермонда и всегда отличен от нуля.

Таким образом, интерполяционный полином $P_n(x)$ для функции $f(x)$ существует, и он единственный.

Определить интерполяционный полином можно, не решая системы алгебраических уравнений, а используя формульные выражения.

Интерполяционный полином Лагранжа, рекомендуемый для интерполирования в общем случае:

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^n y_i \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{(x - x_j)}{(x_i - x_j)}.$$

Существует другая формула записи полинома Лагранжа:

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^n y_i \frac{\omega_n(x)}{(x - x_i)\omega'_n(x_i)},$$

где $\omega_n(x) = (x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_n)$,

$$\omega'_n(x_i) = (x_i - x_0)(x_i - x_1) \cdots (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) \cdots (x_i - x_n).$$

Полиномы Ньютона, используемые только в случае равномерной сетки узлов, т. е. если $x_{i+1} - x_i = \text{const} = h$, $i \in [0, n-1]$. Коэффициенты полиномов выражаются через конечные разности

$$\Delta^k y_i = \Delta(\Delta^{k-1} y_i) = \Delta^{k-1} y_{i+1} - \Delta^{k-1} y_i, \quad i \in [0, n-k],$$

где k — порядок конечной разности.

Различают две формулы интерполяционных полиномов Ньютона.

Первая формула

$$P_n(x) = y_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) + \\ + \dots + a_n(x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_{n-1})$$

с коэффициентами

$$a_i = \frac{\Delta^i y_0}{i! h^i}, \quad i \in [0, n], \quad \Delta^0 y_0 = y_0, \quad 0! = 1$$

лучше интерполирует на левой половине интервала $[a, b]$, в окрестности x_0 .

Вторая формула

$$P_n(x) = y_n + a_1(x - x_n) + a_2(x - x_n)(x - x_{n-1}) +$$

$$+ \dots + a_n(x - x_n)(x - x_{n-1}) \cdots (x - x_1)$$

с коэффициентами

$$a_i = \frac{\Delta^i y_{n-i}}{i! h^i}, \quad i \in [0, n], \quad \Delta^0 y_n = y_n, \quad 0! = 1$$

лучше интерполирует на правой половине интервала $[a, b]$, в окрестности x_n .

Методическая погрешность интерполирования возникает по причине конечности степени n интерполяционного полинома или, говоря, из-за отбрасывания *остаточного члена*, который для общей формулы Лагранжа можно записать как

$$R_n(x) = f(x) - L_n(x)$$

и оценить в виде

$$R_n(x) \leq \max_{x \in [a, b]} \left| f^{(n+1)}(x) \right| \frac{|\omega_n(x)|}{(n+1)!}.$$

Таким образом, методическая погрешность интерполирования зависит от трех факторов: скорости изменения интерполируемой функции ($f^{(n+1)}(x)$ — $(n+1)$ -я производная $f(x)$), количества узлов ($N = n+1$) и расположения узлов на $[a, b]$ ($\omega_n(x) = (x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_n)$). П.Л. Чебышёв показал, что $|\omega_n(x)|$, а значит, и $R_n(x)$ будут минимальны, если узлы интерполяции выбрать на интервале $[a, b]$ в виде

$$x_i = \frac{b+a}{2} + \frac{b-a}{2} \zeta_i, \quad \zeta_i = -\cos \frac{2i+1}{2i+2} \pi, \quad i \in [0, n].$$

Определяемые таким образом узлы являются нулями полиномов Чебышёва первого рода. При этом

$$|\omega_n(x)| \leq 2 \left(\frac{b-a}{4} \right)^{n+1} \quad \text{и} \quad R_n(x) \leq \max_{x \in [a, b]} \left| f^{(n+1)}(x) \right| \frac{(b-a)}{2^{2n+1} (n+1)!}.$$

Узлы, выбранные по Чебышёву, располагаются на интервале $[a, b]$ неравномерно. Они оказываются сгущены на концах интервала и разрежены в середине.

Полином Лагранжа с узлами по Чебышёву обеспечивает минимальную погрешность равномерно по всему интервалу $[a, b]$.

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Методика синтеза интерполяционного полинома. Полином Лагранжа.
2. Интерполяционные полиномы Ньютона.
3. Остаточный член интерполяционной формулы Лагранжа.
4. Рекомендации к использованию интерполяционных полиномов.
5. Погрешности интерполяции, способы их оценивания.
6. Влияние вида интерполируемой функции, количества и расположения узлов интерполирования на погрешности интерполяции.

2. ЧИСЛЕННОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ

ЦЕЛЬ РАБОТЫ

Ознакомление с квадратурными формулами Ньютона–Котеса численного интегрирования, исследования влияния порядка точности квадратурной формулы и шага интегрирования на точность вычисления определенного интеграла.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Вычислить определенный интеграл

$$y = \int_a^b f(x) dx, \quad a = 0, \quad b = 12$$

от функции $f(x)$, заданной на $[a, b]$ с шагом $h \in [0,1, 0,5]$ посредством квадратурных формул Ньютона–Котеса порядка точности $m \in [1, 5]$ (при $m = 1$ имеет место формула левых прямоугольников).

При вычислении погрешностей интегрирования $e = |y_T - y|$ за точное значение интеграла y_T принимается результат интегрирования, полученный с минимальным шагом h и максимальным порядком m .

ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТЫ

1. Ознакомиться с описанием работы. Уяснить цель и смысл задачи согласно варианту (табл. 2.1). Открыть выполняемый файл «Интегрирование».

2. Вычислить значения интеграла от функции $f(x)$ по квадратурным формулам порядка точности $m=1$ и $m=5$ с шагом $h=0,2$. Сравнить результаты.

3. Вычислить значения интеграла от функции $f(x)$ с шагом $h=0,1$ и $h=0,5$ по квадратурной формуле порядка точности $m=2$. Сравнить результаты.

Т а б л и ц а 2.1

№ п/п	$f(x)$	№ п/п	$f(x)$
1	$2,0 + \sqrt{x} \sin(x)$	11	$\sin(1,25x) - 0,4e^{0,15x}$
2	$-1,5 + \sqrt{x} \cos(x)$	12	$0,35x + \sin(x)$
3	$(1 + x^2) \sin(x)$	13	$0,8 \cos(1,5x) + e^{0,18x}$
4	$e^{0,50x}$	14	$0,2e^{0,6x} \sin(2x)$
5	$e^{-0,75x}$	15	$\sin(1,5x) + 2 \cos(0,9x)$
6	$5 + 2e^{-0,50x} \sin(2x)$	16	$0,5x - e^{0,2x}$
7	$8 - 4e^{-0,75x} \cos(3x)$	17	$\sin(0,3x) \cos(1,5x)$
8	$5 + 2,5 \sin(x)$	18	$0,12x^2 - \cos(1,6x)$
9	$8 - 4,0 \cos(x)$	19	$x^2 e^{0,25x} \sin(2x)$
10	$\sin(x)/(1 + x^2)$	20	$2\sqrt{x} - \sin(1,5x)$

4. Проанализировать влияние порядка точности квадратурной формулы и шага интегрирования на полученные результаты.

5. Получить зависимости $e = f(m)$, $m \in [1, 5]$ для всех h , $h \in [0,1, 0,5]$ и $e = f(h)$, $h \in [0,1, 0,5]$ для всех m , $m \in [1, 5]$.

СОДЕРЖАНИЕ ОТЧЕТА

1. Цель работы.
2. Постановка задачи.
3. Квадратурные формулы (обобщенные) для $m = 0, 1, 2$.
4. Результаты вычислений (значения интегралов, полученные в пп. 2 и 3).
5. График подынтегральной функции $f(x)$, а также таблицы и графики погрешностей $e = f(m)$ (для всех $h = \text{const}$), $e = f(h)$ (для всех $m = \text{const}$).
6. Выводы.

КРАТКИЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

В основе численного интегрирования лежит приближенное вычисление площади под кривой, описываемой подынтегральной функцией. В простейшем случае, если требуется вычислить

$$y = \int_a^b f(x) dx ,$$

площадь, ограниченную функцией $f(x)$, можно представить в виде площади прямоугольника со сторонами $[b-a]$ и $f(a)$ (один из вариантов: $f(a)$ – левых, $f[(a+b)/2]$ – средних, $f(b)$ – правых прямоугольников). Тогда

$$y = \int_a^b f(x) dx \cong (b-a) f(a) .$$

В данном случае можно сказать, что подынтегральная функция заменяется интерполяционным полиномом Лагранжа степени $n=0$.

Возникающая при этом погрешность может быть оценена как остаточный член интерполяционной формулы Лагранжа $L_n(x)$, $n = 0$:

$$e_0(f(x)) \leq 0,5 (b-a)^2 \max_{x \in [a,b]} |f^{(1)}(x)|.$$

Для повышения точности интегрирования отрезок $[a, b]$ можно разбить на $N-1$ равных частей с шагом $h = (b-a)/(N-1)$, вычислить площади элементарных прямоугольников, построенных на h как на одной из сторон, и просуммировать их. Получим обобщенную формулу прямоугольников

$$\int_a^b f(x) dx \cong h \sum_{i=0}^{N-1} f(x_i),$$

$$x_i = a + i \cdot h, \quad i \in [0, N-1],$$

погрешность которой может быть оценена в виде

$$R_{00}(f(x), h) \leq 0,5 (N-1) h^2 \max_{x \in [a,b]} |f^{(1)}(x)|.$$

В общем случае представляя подынтегральную функцию $f(x)$ в виде интерполяционного полинома Лагранжа степени n

$$f(x) = L_n(x) + R_n = \sum_{i=0}^n \frac{(-1)^{(n-i)} \omega(t)}{i! (n-i)! (t-i)} f(x_i) + R_n,$$

$$t = (x - x_0) / h, \quad \omega(t) = t(t-1)(t-2) \cdots (t-n)$$

и заменяя им подынтегральную функцию, после несложных преобразований получим *квадратурные формулы Ньютона–Котеса n -го порядка точности*

$$I = \int_a^b f(x) dx = (b-a) \sum_{i=0}^n H_i f(x_i) + e_n,$$

где

$$H_i = \frac{1}{n} \frac{(-1)^{(n-i)}}{i! (n-i)!} \int_0^n \frac{\omega(t)}{t-i} dt$$

называются *коэффициентами Котеса*.

Полагая $n = 1$, получим формулу трапеций

$$\int_a^b f(x) dx \cong \frac{h}{2} \sum_{i=0}^{N-1} f(x_i) + f(x_{i+1}),$$

погрешность которой

$$e_{10} \leq \left| -\frac{h^2}{2} (b-a) \max_{x \in [a, b]} |f^{(2)}(x)| \right|.$$

При $n = 2$ имеем формулу парабол (число точек $N = 2m + 1$ на $[a, b]$ нечетное, $2m$ – четное количество подынтервалов):

$$\int_a^b f(x) dx \cong \frac{h}{3} \left[f(x_0) + 4 \sum_{i=1}^m f(x_{2i-1}) + 2 \sum_{i=1}^{m-1} f(x_{2i}) + f(x_{2m}) \right]$$

с погрешностью

$$e_{20} \leq \left| -\frac{h^4}{180} (b-a) \max_{x \in [a, b]} |f^{(4)}(x)| \right|.$$

Для рассматриваемых в лабораторной работе порядков точности n коэффициенты C_i , $i \in [0, n]$, и погрешности $R_n[N, f(x)]$ квадратурных формул Ньютона–Котеса имеют следующие значения:

$$n = 0 \quad C_0 = 1; \quad R_n = 0,5000(N-1)h^2 M_1;$$

$$n = 1 \quad C_0 = 1/2; \quad C_1 = 1/2; \quad R_n = -0,0833(N-1)h^3 M_2;$$

$$n = 2 \quad C_0 = 1/6 ; \quad C_1 = 4/6 ; \quad C_2 = 1/6 ; \quad R_n = 0,0056(N-1)h^5 M_4 ;$$

$$n = 3 \quad C_0 = 1/8 ; \quad C_1 = 3/8 ; \quad C_2 = 3/8 ; \quad C_3 = 1/8 ;$$

$$R_n = -0,0125(N-1)h^5 M_4 ;$$

$$n = 4 \quad C_0 = 7/90 ; \quad C_1 = 32/90 ; \quad C_2 = 12/90 ; \quad C_3 = 32/90 ; \quad C_4 = 7/90 ;$$

$$R_n = 0,0021(N-1)h^7 M_6 ,$$

$$\text{где } M_i = \max_{x \in [a,b]} |f^{(i)}(x)| .$$

Таким образом, погрешность численного интегрирования определяется двумя факторами: порядком точности квадратурной формулы Ньютона–Котеса и шагом интегрирования. Порядок точности задается степенью интерполяционного полинома Лагранжа, а шаг интегрирования можно выбрать по правилу Рунге, если погрешность вычисления интеграла не должна превышать задаваемой ε .

Согласно правилу Рунге интеграл вычисляется дважды, с шагом h и $h/2$. При этом для обобщенных квадратурных формул любого порядка точности n погрешность может быть представлена в виде

$$e_{no} \cong \frac{|I_{h/2} - I_h|}{2^k - 1} ,$$

где $I_{h/2}$ и I_h – значения интегралов, вычисленные с шагом $h/2$ и h соответственно, а коэффициент $k = 2$ для формул прямоугольников и трапеций и $k = 4$ для формулы парабол. Далее проверяется соотношение $e_{no} \leq \varepsilon$ и если это так, то выбирается шаг h , а если нет, то e_{no} определяется для $h/2$ и $h/4$ и так до тех пор, пока не выполнится требуемое соотношение.

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Суть численного интегрирования посредством квадратурных формул Ньютона–Котеса.
2. Обобщенная квадратурная формула прямоугольников.
3. Обобщенная квадратурная формула трапеций.
4. Обобщенная квадратурная формула парабол.
5. Правило Рунге выбора шага интегрирования.

3. РЕШЕНИЕ СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

ЦЕЛЬ РАБОТЫ

Практика использования итерационных методов решения системы линейных алгебраических уравнений. Сравнительный анализ алгоритмов.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Решить систему линейных алгебраических уравнений (СЛАУ)

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}, \quad \mathbf{A} = (a_{ij})_n^n, \quad \mathbf{x} = (x_i)_1^n, \quad \mathbf{b} = (b_i)_1^n$$

итерационными методами Зейделя и наискорейшего спуска с точностью до $\varepsilon = 0,001$. Исследовать влияние задаваемых начальных условий на скорость сходимости алгоритмов. Для сравнения с истинными значениями корней выполнить решение СЛАУ методом Гаусса.

ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТЫ

1. Ознакомиться с описанием работы. Уяснить цель и смысл задачи согласно варианту (табл. 3.1). Открыть выполняемый файл «СЛАУ».
2. Решить СЛАУ с выводом результатов на каждой итерации методом Зейделя с начальными условиями $x_i[0] = 0$ и $x_i[0] = \beta_i$ ($\beta_i = b_i / a_{ii}$), $i \in [1, n]$.
3. Решить СЛАУ с выводом результатов на каждой итерации методом наискорейшего спуска с начальными условиями $x_i[0] = 0$ и $x_i[0] = \beta_i$, $i \in [1, n]$.

4. Решить СЛАУ методом Гаусса.
5. Сравнить результаты (скорость сходимости) итерационных алгоритмов.
6. Оформить отчет.

СОДЕРЖАНИЕ ОТЧЕТА

1. Цель работы.
2. Постановка задачи.
3. Алгоритмы (в общем виде) методов Зейделя и наискорейшего спуска.

Таблица 3.1

№ п/п		Варианты заданий				
1 ÷ 5	A	0,380	– 0,050	0,010	0,020	0,070
		0,052	0,595	0,000	– 0,040	0,040
		0,030	0,000	0,478	– 0,140	0,080
		0,060	0,126	0,000	0,470	– 0,020
		0,250	0,000	0,090	0,010	0,560
1	b	– 2,140	1,833	1,736	– 1,242	1,440
2		0,750	– 0,858	3,160	– 1,802	2,910
3		2,320	2,544	3,238	1,534	0,120
4		2,110	3,407	1,432	0,480	2,250
5		1,520	– 1,269	3,500	– 2,988	3,390
6 ÷ 10	A	0,490	0,000	– 0,128	0,090	0,150
		– 0,030	0,320	0,000	– 0,061	0,020
		0,010	– 0,090	0,580	0,011	0,035
		0,030	0,000	– 0,073	0,580	0,000
		0,020	– 0,030	0,145	– 0,012	0,420
6	b	0,964	1,279	– 1,799	– 4,971	2,153
7		1,564	– 1,733	1,393	1,744	– 2,046
8		2,332	– 2,261	– 1,484	0,932	1,758
9		1,946	0,805	1,935	2,741	2,905
10		2,810	0,236	2,859	0,047	1,157
11 ÷ 15	A	0,500	0,000	0,034	0,075	– 0,065
		0,030	0,780	0,080	– 0,045	0,010
		0,020	– 0,090	0,603	0,025	0,000

№ п/п		Варианты заданий				
		0,012	0,080	0,000	0,505	0,056
		0,036	– 0,030	0,010	– 0,010	0,420
11	b	4,189	– 1,382	– 0,110	– 2,848	3,982
12		3,428	4,246	2,809	– 5,846	– 6,184
13		– 2,343	3,936	– 2,978	1,556	3,559
14		3,199	0,637	– 3,721	2,521	1,998
15		0,575	– 2,761	3,210	3,903	– 1,218
16 ÷ 20	A	0,789	0,000	– 0,030	0,010	0,070
		– 0,020	0,450	0,020	– 0,050	0,030
		0,062	– 0,050	0,650	0,031	0,050
		0,000	0,030	0,070	– 0,230	0,040
		– 0,012	0,080	0,090	0,030	0,505
16	b	2,301	4,139	– 2,231	4,982	– 5,556
17		– 2,625	– 3,724	0,469	3,730	2,949
18		– 4,879	1,879	5,060	– 0,302	3,926
19		2,555	1,557	– 5,949	3,468	4,341
20		3,097	1,765	2,570	4,449	– 1,079

4. Результаты вычислений в виде таблиц и графиков сходимости одного из найденных корней $x_i = f(k)$ (k – номер итерации), выполненных:

- 1) методом Зейделя для $x_i[0] = 0$ и $x_i[0] = \beta_i$, $i \in [1, n]$,
- 2) методом наискорейшего спуска для $x_i[0] = 0$ и $x_i[0] = \beta_i$, $i \in [1, n]$.

5. Выводы.

КРАТКИЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

Методы решения СЛАУ подразделяются на прямые (точные) и итерационные (приближенные). Прямые методы позволяют получить точное решение за конечное число арифметических операций. Наибольшее применение среди прямых методов получил метод Гаусса.

Итерационные методы за конечное число итераций позволяют получать искомое решение с некоторой погрешностью ε . Ниже приве-

дены алгоритмы Зейделя и наискорейшего спуска, используемые в работе для решения СЛАУ вида

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b},$$

$$\mathbf{A} = (a_{ij})_n^n, \quad \mathbf{x} = (x_i)_1^n, \quad \mathbf{b} = (b_i)_1^n.$$

В *методе Зейделя* СЛАУ приводится к эквивалентному виду, удобному для проведения итераций

$$\mathbf{x}_{k+1} = \boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\alpha}\mathbf{x}_k, \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

где элементы вектора $\boldsymbol{\beta}$ и матрицы $\boldsymbol{\alpha}$ определяются как

$$\beta_i = b_i / a_{ii}, \quad \alpha_{ij} = \begin{cases} -a_{ij} / a_{ii}, & i \neq j, \\ 0, & i = j, \end{cases}$$

а алгоритм определения корней СЛАУ имеет вид

$$x_i[k+1] = \beta_i - \sum_{j=1}^{i-1} \alpha_{ij} x_j[k+1] - \sum_{j=i+1}^n \alpha_{ij} x_j[k], \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

$$x_i[0] = x_{i0}, \quad i \in [1, n],$$

где $x_i[k]$ – i -я компонента вектора \mathbf{x} на k -й итерации; x_{i0} , $i \in [1, n]$, – начальные условия, которые рекомендуется задавать в виде $x_i[0] = \beta_i$, $i \in [1, n]$.

Метод Зейделя будет сходиться к единственному решению, если какая либо из норм матрицы $\boldsymbol{\alpha}$ будет удовлетворять условию $\|\boldsymbol{\alpha}\| < 1$, а это будет иметь место, когда матрица \mathbf{A} будет иметь преобладающую главную диагональ

$$|a_{ii}| \gg |a_{ij}|, \quad i \in [1, n], \quad j \in [1, n].$$

Останов итерационной процедуры происходит, например, при условии

$$\|\mathbf{g}\| = \|\mathbf{b} - \mathbf{Ax}\| \leq \varepsilon.$$

Метод наискорейшего спуска

$$x_i[k+1] = x_i[k] + \alpha[k]g_i[k], \quad k = 0, 1, \dots,$$

$$g_i[k] = b_i - \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j[k], \quad \alpha[k] = d[k] / c[k],$$

$$d[k] = \sum_{i=1}^n g_i[k]g_i[k], \quad c[k] = \sum_{i=1}^n g_i[k] \sum_{j=1}^n a_{ij}g_j[k],$$

$$x_i[0] = x_{i0}, \quad i \in [1, n],$$

где $x_i[k]$ – i -я компонента вектора \mathbf{x} на k -й итерации; x_{i0} , $i \in [1, n]$, – начальные условия, которые задаются, например, в виде $x_i[0] = 0$, $i \in [1, n]$.

Метод сходится к единственному решению, если матрица \mathbf{A} – положительно определенная (все собственные числа матрицы больше 0).

Для неособенной матрицы \mathbf{A} можно предусмотреть условие сходимости метода путем первой трансформации Гаусса исходной СЛАУ

$$\mathbf{A}^T \mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{A}^T \mathbf{b},$$

где матрица $\mathbf{A}^T \mathbf{A}$ – симметрическая, положительно определенная.

Останов в наискорейшем спуске осуществляется, как и в методе Зейделя.

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Принципы построения итерационных методов.
2. Метод последовательных приближений.
3. Метод Зейделя.
4. Метод наискорейшего спуска.
5. Условия сходимости итерационных методов последовательных приближений, Зейделя и наискорейшего спуска.

4. РЕШЕНИЕ НЕЛИНЕЙНОГО АЛГЕБРАИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

ЦЕЛЬ РАБОТЫ

Исследование итерационных методов Ньютона и спуска решения нелинейного алгебраического уравнения. Анализ влияния вида корней и параметров алгоритмов на точность (количество итераций) определения корней.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Решить нелинейное алгебраическое уравнение с действительными коэффициентами вида

$$a_1 + a_2x + a_3x^2 + \dots + x^6 = 0,$$

корни $x_i = \alpha_i + j\beta_i$, $i \in [1, 6]$ которого:

1) простые, вещественные

$$\alpha_1 = -v, \quad \alpha_2 = v, \quad \alpha_3 = -(v+1), \quad \alpha_4 = (v+1), \quad \alpha_5 = -(v+2), \quad \alpha_6 = (v+2), \\ \beta_1 = 0, \quad \beta_2 = 0, \quad \beta_3 = 0, \quad \beta_4 = 0, \quad \beta_5 = 0, \quad \beta_6 = 0;$$

2) простые, комплексно-сопряженные

$$\alpha_1 = -v, \quad \alpha_2 = -v, \quad \alpha_3 = -(v+1), \quad \alpha_4 = -(v+1), \quad \alpha_5 = (v+2), \quad \alpha_6 = (v+2), \\ \beta_1 = -v, \quad \beta_2 = v, \quad \beta_3 = -(v+1), \quad \beta_4 = (v+1), \quad \beta_5 = -(v+2), \quad \beta_6 = (v+2);$$

3) простые, мнимые

$$\alpha_1 = 0, \quad \alpha_2 = 0, \quad \alpha_3 = 0, \quad \alpha_4 = 0, \quad \alpha_5 = 0, \quad \alpha_6 = 0, \\ \beta_1 = -v, \quad \beta_2 = v, \quad \beta_3 = -(v+1), \quad \beta_4 = (v+1), \quad \beta_5 = -(v+2), \quad \beta_6 = (v+2);$$

4) простые, смешанные

$$\alpha_1 = -v, \quad \alpha_2 = -v, \quad \alpha_3 = -(v+1), \quad \alpha_4 = -(v+1), \quad \alpha_5 = 0, \quad \alpha_6 = 0, \\ \beta_1 = -v, \quad \beta_2 = v, \quad \beta_3 = 0, \quad \beta_4 = 0, \quad \beta_5 = -(v+2), \quad \beta_6 = (v+2);$$

5) кратные, вещественные

$$\begin{array}{cccccc}\alpha_1 = -\nu, & \alpha_2 = -\nu, & \alpha_3 = -\nu, & \alpha_4 = -\nu, & \alpha_5 = -\nu, & \alpha_6 = -\nu, \\ \beta_1 = 0, & \beta_2 = 0, & \beta_3 = 0, & \beta_4 = 0, & \beta_5 = 0, & \beta_6 = 0;\end{array}$$

6) кратные, комплексно-сопряженные

$$\begin{array}{cccccc}\alpha_1 = -\nu, & \alpha_2 = -\nu, & \alpha_3 = -\nu, & \alpha_4 = -\nu, & \alpha_5 = -\nu, & \alpha_6 = -\nu, \\ \beta_1 = -\nu, & \beta_2 = \nu, & \beta_3 = -\nu, & \beta_4 = \nu, & \beta_5 = -\nu, & \beta_6 = \nu;\end{array}$$

7) кратные, мнимые

$$\begin{array}{cccccc}\alpha_1 = 0, & \alpha_2 = 0, & \alpha_3 = 0, & \alpha_4 = 0, & \alpha_5 = 0, & \alpha_6 = 0, \\ \beta_1 = -\nu, & \beta_2 = \nu, & \beta_3 = -\nu, & \beta_4 = \nu, & \beta_5 = -\nu, & \beta_6 = \nu;\end{array}$$

8) кратные, смешанные

$$\begin{array}{cccccc}\alpha_1 = -\nu, & \alpha_2 = -\nu, & \alpha_3 = -\nu, & \alpha_4 = -\nu, & \alpha_5 = (\nu + 1), & \alpha_6 = (\nu + 1), \\ \beta_1 = -\nu, & \beta_2 = \nu, & \beta_3 = -\nu, & \beta_4 = \nu, & \beta_5 = 0, & \beta_6 = 0,\end{array}$$

где ν – номер варианта (задается преподавателем).

ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТЫ

1. Ознакомиться с описанием работы. Уяснить цель и смысл задачи согласно варианту. Открыть выполняемый файл «НАУ».

2. Методом Ньютона решить уравнение с корнями вида 1...8 и $\varepsilon = 10^{-3}$. Результаты сохранить в файл, образец которого показан в виде табл. 4.1.

3. Решить уравнение с корнями вида 2 и $\varepsilon = 10^{-6}$.

4. Исследовать влияние параметра останова при решении уравнения с корнями вида 2, изменяя ε от $\varepsilon_0 = 10^{-9}$ до $\varepsilon_K = 10^{-1}$ в виде $\varepsilon_{i+1} = 10\varepsilon_i$, $i \in [0, K-1]$.

5. Повторить пп. 2, 3 для корней вида 5.

6. Повторить пп. 1–4, решая уравнение методом спуска.

7. Оформить отчет.

Таблица 4.1

Поз.	$E_{\text{мо}}$	$\text{Lg } E_{\text{мо}}$	$E_{\text{со}}$	$\text{Lg } E_{\text{со}}$	КМ	КМО
1	0,4373D-07	-7,359	0,2731D-07	-7,564	47	112
2	0,3280D-07	-7,484	0,1459D-07	-7,836	22	37
3	0,1652D-05	-5,782	0,1055D-05	-5,977	28	37
4	0,1196D-02	-2,922	0,9407D-04	-4,027	17	36
5	0,4226D+00	-0,374	0,4777D-01	-1,321	29	54
6	0,6947D-03	-3,158	0,5007D-03	-3,300	27	48
7	0,4633D-02	-2,334	0,5918D-03	-3,228	36	51
8	0,1422D-03	-3,847	0,7009D-04	-4,154	18	36

СОДЕРЖАНИЕ ОТЧЕТА

1. Цель работы.
2. Постановка задачи.
3. Методы Ньютона и спуска в общем виде.
4. Таблица вида 4.1.
5. Графики сходимости первых выделяемых корней вида 2 и 5 в методах Ньютона и спуска.
6. Графики зависимостей $\lg E_{\text{мо}} = f(\lg \varepsilon \text{PS})$, $\text{КМО} = f(\lg \varepsilon \text{PS})$ для корней вида 2 и 5 в методах Ньютона и спуска.
7. Выводы.

КРАТКИЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

Метод Ньютона. Решение алгебраического уравнения вида

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n = 0$$

выполняется модификацией метода Ньютона, известной как *метод касательных*:

$$x_{k+1} = x_k - f(x_k)/f'(x_k), \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Метод Ньютона сходится к истинному значению корня x_* , если x_0 выбрано достаточно близко к x_* , причем при условии

$$f(x_0)f''(x_0) > 0,$$

а $f(x)$ обладает таким свойством (условие сходимости), что

$$|f(x_k)f''(x_k)| < 0,5|f'(x_k)|^2, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

При этом скорость сходимости метода Ньютона соизмерима со скоростью сходимости геометрической прогрессии.

Останов метода Ньютона производится по условию

$$|f(x_{k+1})| \leq \varepsilon,$$

где ε – требуемая точность определения корня.

Метод спуска решения алгебраического уравнения представляет собой обобщение метода Ньютона. Суть этого метода в том, что если в общем случае корни уравнения комплексные, т. е.

$$x = \alpha + j\beta, \quad j = \sqrt{-1},$$

то $f(x)$ можно представить в виде

$$f(x) = u(\alpha, \beta) + jv(\alpha, \beta),$$

а далее вводится в рассмотрение функционал

$$F(x) = f(x)\bar{f}(x) = u^2(\alpha, \beta) + v^2(\alpha, \beta),$$

где $\bar{f}(x)$ – функция, комплексно-сопряженная $f(x)$, который имеет нулевые минимумы (если корни уравнения вещественные, то $F(x) = f^2(x)$) и задача поиска корней сводится к отысканию нулевых минимумов данного функционала.

Итерационная процедура метода спуска состоит из следующих операций.

1. Задается начальное приближение корня

$$x_0 = \gamma + j\sqrt[n]{|f(\gamma)|/|a_n|},$$

где $\gamma = -[a_{n-1}/a_n]$ – среднее арифметическое всех корней уравнения.

2. Производится уточнение корня

$$x_{k+1} = x_k - h f(x_k) / f'(x_k),$$

причем сходимость процедуры уточнения обеспечивается за счет выбора параметра h . Значение h , для которого в точке x_{k+1} имеет место неравенство

$$F(x_{k+1}) < F(x_k),$$

считается выбранным правильно. Всегда можно подобрать сколь угодно малое значение параметра h , при котором приведенное неравенство будет выполняться. При $h=1$ имеем метод Ньютона и соответственно максимальную скорость сходимости. Поэтому на практике выбор параметра h начинают с $h=1$, а проверку сходимости осуществляют по неравенствам

$$h < \sqrt[n]{|f(x_k)| / |a_n|} \quad \text{или} \quad F(x_{k+1}) < F(x_k).$$

Если неравенство не выполняется, то полагают $h = h / 2$ и так до тех пор, пока оно не станет выполняться.

3. Проверяется условие останова итерационной процедуры уточнения корня так же, как и в методе Ньютона.

4. После определения корня $x_{10} \cong x_{*1}$ (x_{10} – оценка найденного корня) исходное уравнение делится на двучлен $(x - x_{10})$ (трехчлен, если имеет место пара комплексно-сопряженных корней) с целью понижения порядка n исходного уравнения, а далее описанная процедура повторяется для вновь полученного уравнения.

Следует отметить, что метод спуска хорошо работает для простых корней. Кратные и близкие корни определяются менее точно.

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Отделение корней алгебраического уравнения.
2. Уточнение корней методом дихотомии.
3. Уточнение корней методом Ньютона.
4. Метод спуска.
5. Решение алгебраического уравнения третьего порядка с вещественными корнями методом Ньютона.

5. РЕШЕНИЕ СИСТЕМЫ НЕЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

ЦЕЛЬ РАБОТЫ

Исследование итерационных методов Ньютона и наискорейшего спуска решения системы нелинейных алгебраических уравнений. Анализ влияния начальных условий и параметра останова на скорость сходимости алгоритмов, сравнение методов решения.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Решить систему нелинейных алгебраических уравнений.

$$1) \begin{cases} x_1^3 - x_2^2 - 1,1250 = 0, \\ x_1 x_2^3 - x_2 - 3,5625 = 0. \end{cases}$$

Корни системы: $x_{*1} = 1,5$; $x_{*2} = 1,5$.

$$2) \begin{cases} x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_1 x_2 x_3 - 4,25 = 0, \\ x_1 x_2 + x_2 x_3 + x_1 x_3 - 1,50 = 0, \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_1 x_2 x_3 - 0,5 = 0. \end{cases}$$

Корни системы: $x_{*1} = 2,0$; $x_{*2} = -1,0$; $x_{*3} = 0,5$.

$$3) \begin{cases} (x_1 + 5x_2)(x_1 + 1) = 0, \\ x_1(x_1 + 2) - x_2(x_1 + 5x_2) = 0. \end{cases}$$

Корни системы: $x_{*1} = -2,0$; $x_{*2} = 0,4$.

$$4) \begin{cases} x_1^2(2 - x_2^2) + x_2(3 + x_1^2) - 3,75 = 0, \\ x_1(5x_1 + x_2) - x_2(2x_2 - 1) - 4,5 = 0. \end{cases}$$

Корни системы: $x_{*1} = -1,0$; $x_{*2} = 0,5$.

$$5) \begin{cases} x_1^2 - 4x_2^2 - x_3^2 - 5x_4 = 0, \\ x_1(x_2 + x_3 + x_4) + x_2(x_3 + x_4) + x_3x_4 - 1,5 = 0, \\ x_1^2 + 4x_2^3 - 3x_3^3 - 5x_4 + 1,5 = 0, \\ x_1 + x_2^2(x_3^2 - 1) - 5x_4 = 0. \end{cases}$$

Корни системы: $x_{*1} = 2,0$; $x_{*2} = -0,5$; $x_{*3} = 1,0$; $x_{*4} = 0,4$.

$$6) \begin{cases} x_1(x_1 - 5x_2) - 2x_2(2x_2 + 1) - 0,3 = 0, \\ (x_1 + 2x_2)(2x_2 + 5) = 0. \end{cases}$$

Корни системы: $x_{*1} = -0,6$; $x_{*2} = 0,35$.

$$7) \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 2,0 = 0, \\ x_1^3 + x_2^3 + 4x_3^3 + 3,75 = 0, \\ 4x_1x_2x_3 + x_1x_2 + 3x_2x_3 = 0. \end{cases}$$

Корни системы: $x_{*1} = -1,5$; $x_{*2} = 0,5$; $x_{*3} = -0,5$.

$$8) \begin{cases} x_1x_2^2 - 3x_3^2 + 2x_2^3 - 15,72 = 0, \\ x_1^2 - 8x_2 + 15x_3 - 5,5 = 0, \\ x_1x_2x_3^3 + x_2x_3 - 0,156 = 0. \end{cases}$$

Корни системы: $x_{*1} = 4$; $x_{*2} = 1,5$; $x_{*3} = 0,1$.

$$9) \begin{cases} x_1^2x_2^2x_3^2 - 3x_1^3 - 6x_2^3 - 10x_3^3 + 5,9404 = 0, \\ x_1^4 - 9x_2 + 15x_3 + 0,9264 = 0, \\ 4x_1 + 2x_2^2 - x_3 - 5,20 = 0. \end{cases}$$

Корни системы: $x_{*1} = 1,2$; $x_{*2} = 0,5$; $x_{*3} = 0,1$.

$$10) \begin{cases} x_1(1,5 - x_2)^2 - x_1^3 - 0,12 = 0, \\ x_1^2 + x_2^2 - 0,73 = 0. \end{cases}$$

Корни системы: $x_{*1} = 0,3$; $x_{*2} = 0,8$.

$$11) \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + 4x_4 - 20,7 = 0, \\ x_1^2 + 2x_1x_2 + x_4 - 15,88 = 0, \\ x_1^3 + x_3^2 + x_4 - 21,218 = 0, \\ 3x_2 + x_3x_4 - 21,1 = 0. \end{cases}$$

Корни системы: $x_{*1} = 1,2$; $x_{*2} = 5,6$; $x_{*3} = 4,3$; $x_{*4} = 1$.

$$12) \begin{cases} x_1^2 + 3x_2^3 - 0,618 = 0, \\ x_1x_2^2 - 5x_1 + 4,356 = 0. \end{cases}$$

Корни системы: $x_{*1} = 0,9$; $x_{*2} = -0,4$.

$$13) \begin{cases} x_1^2 + x_2 + x_3^2 - 1 = 0, \\ 2x_1 - 10x_2^2 + 3x_3 - 2,4 = 0, \\ x_1^3 + x_2x_3^2 - 0,544 = 0. \end{cases}$$

Корни системы: $x_{*1} = 0,8$; $x_{*2} = 0,2$; $x_{*3} = 0,4$.

$$14) \begin{cases} 2x_1^3 + x_2^2 - 4x_1x_2 - 24,74 = 0, \\ x_1x_2 + 3x_2^3 - 2,779 = 0. \end{cases}$$

Корни системы: $x_{*1} = 2,5$; $x_{*2} = 0,7$.

$$15) \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0, \\ x_1x_2 + x_2x_3 - x_3x_4 - x_3^2 + 2,0 = 0, \\ x_1^2 - 2x_2^2 - 3x_3 - x_4 - 2,0 = 0, \\ x_1x_2x_3x_4 - 1,5 = 0. \end{cases}$$

Корни системы: $x_{*1} = 2,0$; $x_{*2} = -1,0$; $x_{*3} = 0,5$; $x_{*4} = -1,5$.

$$16) \begin{cases} x_1^3 + 2x_2 - 4(x_3 + x_4^2) + 25,472 = 0, \\ x_1(x_2 + x_3) - x_2x_4 - 3,28 = 0, \\ x_1^2 - x_2x_3x_4 + 5x_1x_2 - 1,44 = 0, \\ 3x_1 - 4x_2^2 + x_3x_4 - 8,96 = 0. \end{cases}$$

Корни системы: $x_{*1} = 1,2$; $x_{*2} = 0,4$; $x_{*3} = 4$; $x_{*4} = 3$.

$$17) \begin{cases} x_1(x_1 + x_2) - x_2(2x_2 + 1) + 3,0 = 0, \\ x_1(1 - x_1) + x_2(1 + x_1x_2) - 4,0 = 0. \end{cases}$$

Корни системы: $x_{*1} = 3,0$; $x_{*2} = -2,0$.

$$18) \begin{cases} 10x_1x_2 - x_2x_3^3 + x_2^2 - 34,86 = 0, \\ x_1^3 + 2x_2x_3 - x_3^2 + 0,922 = 0, \\ x_1x_2x_3^2 - x_1x_2^2x_2 - 4,176 = 0. \end{cases}$$

Корни системы: $x_{*1} = 1,2$; $x_{*2} = 2,4$; $x_{*3} = -0,5$.

$$19) \begin{cases} x_1x_2x_3 - 8x_1 + 5x_2^2 - x_4 + 62,5 = 0, \\ x_1^2x_2 + x_3 - x_3x_4^2 + 46,85 = 0, \\ x_1(x_2 + x_3^3) - 2x_2x_4 - 362,44 = 0, \\ x_1x_2 + 3x_3 - 4x_1x_4 + 7,4 = 0. \end{cases}$$

Корни системы: $x_{*1} = 5$; $x_{*2} = -2$; $x_{*3} = 4,2$; $x_{*4} = 0,5$.

$$20) \begin{cases} x_1(x_2 + x_3)^2 - x_2 - 3,088 = 0, \\ x_1x_3 + x_1x_2^2 - 1,393 = 0, \\ x_3 + x_1x_2 - x_3^3 + 4,749 = 0. \end{cases}$$

Корни системы: $x_{*1} = 0,7$; $x_{*2} = 0,3$; $x_{*3} = 1,9$.

ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТЫ

1. Ознакомиться с описанием работы. Уяснить цель и смысл задачи согласно варианту. Открыть выполняемый файл «СНАУ».

2. Решить систему нелинейных алгебраических уравнений методом Ньютона с начальными условиями, соответствующими параметру $DK = 2$ (DK задает начальные условия корней в виде $x_{i0} = x_{*i}DK$ или $x_{i0} = x_{*i} / DK$, $i \in [1, n]$), положив параметр останова $\varepsilon = \text{const} = 10^{-3}$.

Результаты зафиксировать в виде графика сходимости $x_i = f_i(k)$.

3. Исследовать влияние начальных условий в методе Ньютона, изменяя значение параметра DK от $DK_{\min} = 2$ до $DK_{\max} = 4$ с шагом $HDK = 0,5$.

4. Исследовать влияние параметра останова ε в методе Ньютона, изменяя его значение от $\varepsilon_{\min} = 10^{-9}$ до $\varepsilon_{\max} = 10^{-1}$ в виде $\varepsilon_{i+1} = 10\varepsilon_i$.

5. Повторить пп. 2, 3, 4 для метода наискорейшего спуска.

6. Сравнить результаты.

7. Оформить отчет.

СОДЕРЖАНИЕ ОТЧЕТА

1. Цель работы.

2. Постановка задачи.

3. Алгоритмы (в общем виде) методов Ньютона и спуска.

4. Результаты вычислений в виде таблиц (пп. 2, 3, 4) и графиков (по всем выполненным пунктам).

5. Выводы.

КРАТКИЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

Метод Ньютона. Если в некоторой области, содержащей решение $\mathbf{x}_* = (x_{*1}, x_{*2}, \dots, x_{*n})$ системы

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, \\ \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \end{cases}$$

функции $f_i(x)$, $i \in [1, n]$ непрерывны, имеют непрерывные частные производные и в точке $\mathbf{x} = \mathbf{x}_*$ ($\mathbf{x} = (x_{*1}, x_{*2}, \dots, x_{*n})$) матрица

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

не вырождена, то решение может быть определено посредством итерационной процедуры метода Ньютона

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k - \mathbf{F}^{-1}(\mathbf{x}_k) \mathbf{f}(\mathbf{x}_k), \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}_k) = \{f_1(\mathbf{x}_k), f_2(\mathbf{x}_k), \dots, f_n(\mathbf{x}_k)\}.$$

Условием сходимости метода Ньютона, помимо требований, предъявляемых к функциям $f_i(x)$, $i \in [1, n]$ и матрице $\mathbf{F}(\mathbf{x})$, является соответствующий выбор начальных условий. Вектор \mathbf{x}_0 должен быть выбран достаточно близко к истинному решению \mathbf{x}_* .

В лабораторной работе решение системы нелинейных алгебраических уравнений осуществляется модифицированным методом Ньютона, в котором операция обращения матрицы заменяется процедурой решения системы n линейных алгебраических уравнений. Данный алгоритм реализуется в следующем виде:

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + \Delta \mathbf{x}_k, \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

а $\Delta \mathbf{x}_k = \mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{x}_k$ представляет собой решение линейной системы

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}_k) \Delta \mathbf{x}_k = \mathbf{f}(\mathbf{x}_k),$$

полученной путем элементарных преобразований исходного алгоритма.

Останов итерационной процедуры метода Ньютона можно осуществлять по соотношению

$$\max_{i \in [1, n]} |\Delta \mathbf{x}_k| \leq \varepsilon, \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

где $\varepsilon > 0$ – сколь угодно малое, наперед задаваемое число.

Достоинством метода Ньютона является очень высокая скорость сходимости, а недостатком – сильная чувствительность к начальным условиям и то, что при их очень грубом задании алгоритм может разойтись или привести к другому решению.

Метод наискорейшего спуска. Если функции $f_i(x)$, $i \in [1, n]$, входящие в систему нелинейных уравнений, являются непрерывными, вещественными функциями действительных переменных x_i , $i \in [1, n]$, имеют непрерывные первые частные производные в области определения и только изолированные корни в этой области, то поиск решения такой системы можно свести к поиску минимума функционала

$$\Phi(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n [f_i(\mathbf{x})]^2,$$

причем спуск из некоторой точки x_i функционала $\Phi(\mathbf{x})$ в сторону его минимума может осуществляться в виде

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + h_k \mathbf{v}_k, \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

где \mathbf{v}_k – вектор, задающий направление движения, а h_k – параметр, обеспечивающий уменьшение значения функционала $\Phi(\mathbf{x})$ на данной итерации по сравнению с предыдущей (шаг движения).

В качестве вектора \mathbf{v}_k выбирается

$$-\text{grad } \Phi(\mathbf{x}_k) = \left\{ -\frac{\partial \Phi(\mathbf{x}_k)}{\partial x_1}, -\frac{\partial \Phi(\mathbf{x}_k)}{\partial x_2}, \dots, -\frac{\partial \Phi(\mathbf{x}_k)}{\partial x_n} \right\},$$

так как в направлении этого вектора $\Phi(\mathbf{x})$ убывает с максимальной скоростью.

Параметр h_k , вообще говоря, необходимо определять из условия уменьшения максимальным образом значения функционала $\Phi(\mathbf{x}_{k+1})$ на $(k+1)$ -й итерации по сравнению с $\Phi(\mathbf{x}_k)$ на k -й итерации, что требует достаточно существенных вычислительных затрат, поэтому допускается производить лишь приближенный выбор параметра h_k в виде

$$h_k = \Phi(\mathbf{x}_k) / \sum_{i=1}^n \left[\frac{\partial \Phi(\mathbf{x}_k)}{\partial x_i} \right]^2.$$

Таким образом, градиентный метод наискорейшего спуска определяется соотношением

$$\mathbf{x}_{(k+1)} = \mathbf{x}_k - \left\{ \Phi(\mathbf{x}_k) / \sum_{i=1}^n \left[\frac{\partial \Phi(\mathbf{x}_k)}{\partial x_i} \right]^2 \right\} \text{grad } \Phi(\mathbf{x}_k), \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Окончание итерационной процедуры производится по условию

$$|\Phi(\mathbf{x}_{k+1}) - \Phi(\mathbf{x}_k)| \leq \varepsilon,$$

или

$$|\text{grad } \Phi(\mathbf{x}_{k+1})| \leq \varepsilon,$$

где $\varepsilon > 0$ – сколь угодно малое, наперед задаваемое число.

Метод наискорейшего спуска уступает методу Ньютона в скорости сходимости, однако в данном случае решение системы уравнений может быть найдено при более грубых начальных условиях.

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Метод Ньютона с обращением матрицы.
2. Метод Ньютона с решением линейной алгебраической системы.
3. Метод наискорейшего спуска.
4. Определение шага спуска в методе наискорейшего спуска.
5. Комбинированный метод решения нелинейной системы уравнений.

6. МЕТОДЫ ОДНОМЕРНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ

ЦЕЛЬ РАБОТЫ

Исследование методов общего поиска и золотого сечения решения задачи одномерной оптимизации. Анализ влияния начальной длины интервала неопределенности и параметра останова итерационной процедуры на точность (количество итераций) определения оптимального значения проектного параметра.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Найти оптимальное значение x_* проектного параметра x , при котором целевая функция $u(x)$, $x \in [a, b]$ имеет экстремальное значение.

Вид целевой функции:

$$1) u(x) = x^2 - 20x + 720, \quad x_{*1} = 10,0000;$$

$$2) u(x) = x^2 - 3x - 2 \exp(0,3x), \quad x_{*1} = 2,0559, \quad x_{*2} = b;$$

$$3) u(x) = x^2 + x - 2, \quad x_{*1} = -0,5000;$$

$$4) u(x) = x^4 - 4,7x^3 + 7,4x^2 - 4,3x + 1, \quad x_{*1} = 0,4805,$$

$$x_{*2} = 1,8054;$$

$$5) u(x) = x^4 - 43x^3 + 625x^2 - 3350x + 20000, \quad x_{*1} = 4,4194,$$

$$x_{*2} = 15,9476;$$

$$6) u(x) = 0,5 \sin(2,5x) \exp(-0,4x) + 2, \quad x_{*1} = 1,8215,$$

$$x_{*2} = 4,3348, \quad x_{*3} = 6,8480,$$

$$x_{*4} = 9,3613, \quad x_{*5} = 11,8746;$$

$$7) u(x) = 0,5 + \sin(0,15x - \sqrt{x}), \quad x_{*1} = 6,4205,$$

$$x_{*2} = 17,0780, \quad x_{*3} = 97,1133;$$

- 8) $u(x) = -0,5(5x^3 - 3x)$, $x_{*1} = -0,4472$;
- 9) $u(x) = 2,45 \exp(-3x)(1 - 18x + 54x^2 - 36x^3)$, $x_{*1} = 0,1794$,
 $x_{*2} = 1,6728$;
- 10) $u(x) = -4x^3 + 3x$, $x_{*1} = -0,5000$;
- 11) $u(x) = -8x^3 + 15x^2 + 16x$, $x_{*1} = -0,4000$;
- 12) $u(x) = 2 - \sin(0,1x^2)$, $x_{*1} = 3,9630$;
- 13) $u(x) = 0,8 + \cos(0,5x - 2\sqrt{x})$, $x_{*1} = 4,0000$;
- 14) $u(x) = 44 \exp(-0,5x) \cos(0,5x)$, $x_{*1} = 4,7122$;
- 15) $u(x) = 13 \cos(0,3x) \cos(0,1x)$, $x_{*1} = 9,1170$;
- 16) $u(x) = 3x^4 - 48x^3 + 19x^2 - 3x + 0,25$, $x_{*1} = 11,731$;
- 17) $u(x) = 10x^4 - 48x^2$, $x_{*1} = 1,5450$;
- 18) $u(x) = 6,85x^2 - 128x + 19,75$, $x_{*1} = 9,3440$;
- 19) $u(x) = 2 \sin(0,2x) \cos(0,5x)$, $x_{*1} = 6,5041$;
- 20) $u(x) = -15x^3 \exp(-0,8x)$, $x_{*1} = 3,7500$.

ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТЫ

1. Ознакомиться с описанием работы. Уяснить цель и смысл задачи согласно варианту. Открыть выполняемый файл «М10».

Метод золотого сечения

2. Определить значение проектного параметра, при котором целевая функция имеет экстремум, положив $DK = 2$ (параметр DK задает начальную длину интервала неопределенности $\delta_0 = b - a$ в виде $b = x_* DK$, $a = x_* / DK$) и значение параметра останова $\varepsilon = 0,001$.

3. Исследовать влияние начальной длины интервала неопределенности (параметр DK изменять от $DK_{\min} = 2$ до $DK_{\max} = 5$ через

$HDK = 0,5$) на количество итераций и погрешность алгоритма ($\varepsilon = 0,001$).

4. Исследовать влияние параметра останова ε (изменять ε от $\varepsilon_{\min} = 1,0e^{-8}$ до $\varepsilon_{\max} = 1,0e^{-1}$ в виде $\varepsilon_{(i+1)} = 10\varepsilon_i$) на погрешность алгоритма и количество итераций ($DK = 2$).

Метод общего поиска

5. Повторить п. 2 для метода общего поиска с разовым уменьшением интервала неопределенности, задав коэффициент дробления $\rho = \varepsilon = 0,001$. Зафиксировать количество вычислительных операций, приведенных в файле данных.

6. Выполнить поиск экстремума методом общего поиска с последовательным уменьшением интервала неопределенности, задав коэффициент дробления $\rho = 0,1$ при $\varepsilon = 0,001$. Зафиксировать количество вычислительных операций, приведенных в файле данных, сравнить результаты пп. 5 и 6.

7. Оформить отчет.

СОДЕРЖАНИЕ ОТЧЕТА

1. Цель работы.
2. Постановка задачи.
3. Описание алгоритмов «золотого сечения» и общего поиска.
4. График целевой функции $u(x)$.
5. Результаты выполнения п. 2 в виде таблицы параметров и рисунка с графиками сходимостей.
6. Результаты исследования влияния начальной длины интервала неопределенности на погрешность определения значения проектного параметра и количество итераций (п. 3) в виде графиков $\lg E_0 = f(\lg \varepsilon)$, $K_m = f(\lg \varepsilon)$.
7. Результаты исследования влияния параметра останова на погрешность определения значения проектного параметра и количество итераций (п. 4) в виде графиков $\lg E_0 = f(\lg \varepsilon)$, $K_m = f(\lg \varepsilon)$.
8. Выводы.

КРАТКИЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

Метод общего поиска экстремума унимодальной целевой функции. Суть метода общего поиска, или, как его еще называют, *метода перебора* в том, что исходный интервал неопределенности $[a, b]$ делится на N равных частей с шагом $h = (b - a) / N$ и в $(N + 1)$ узлах полученной сетки вычисляются значения целевой функции $u(x_i)$, $i \in [0, N]$, как показано на рис. 6.1.

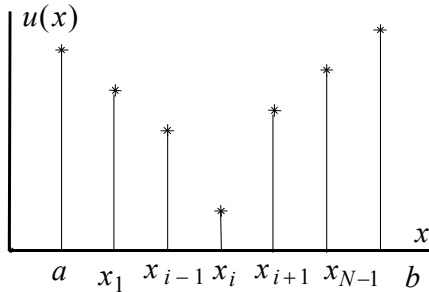


Рис. 6.1

Пусть минимальным из вычисленных значений оказалось $u(x_i)$. Следовательно, оптимальный параметр $x_* \in [x_{i-1}, x_{i+1}]$ и тем самым исходный интервал неопределенности δ_0 удалось сузить до двух шагов сетки. Деление интервала неопределенности на N частей можно характеризовать коэффициентом дробления

$$\rho = \frac{2}{N + 1}.$$

Тогда, чтобы обеспечить $\rho = 0,1$ (получить $\delta = 0,1\delta_0$), необходимо вычислить целевую функцию в 21 точке ($N = 19$ и еще $u(a)$ и $u(b)$), а чтобы обеспечить $\rho = 0,01$ (уменьшить δ_0 в 100 раз), требуется определить 201 значение целевой функции и т. д. В результате описанный способ приводит к существенным вычислительным затратам.

Повысить эффективность метода общего поиска можно путем последовательного сужения интервала неопределенности. Осуществляет-

ся это следующим образом. Предположим, что исходный интервал неопределенности $[a, b]$ необходимо уменьшить в 100 раз ($\rho = 0,01$). Это можно проделать в два этапа. Вначале, вычислив целевую функцию в 21 точке, уменьшим $[a, b]$ в 10 раз, а полученный новый интервал неопределенности $[x_{i-1}, x_{i+1}]$ снова уменьшим в 10 раз, причем во втором случае понадобится 19 вычислений целевой функции, поскольку $u(x_{i-1})$ и $u(x_{i+1})$ уже известны. Таким образом, последовательное сужение интервала неопределенности позволило уменьшить количество вычислений целевой функции до 40 вместо 201 в рассмотренном ранее случае.

Метод золотого сечения является одним из самых эффективных методов одномерной оптимизации унимодальных целевых функций. Последовательное уменьшение интервала неопределенности осуществляется за счет вычисления целевой функции на каждом шаге (кроме первого) лишь в одной, выбираемой специальным образом, точке, которая называется золотым сечением. Геометрически это иллюстрирует рис. 6.2, где ищется минимум целевой функции. Пусть на нулевом шаге длина интервала неопределенности $[a, b]$ задана в виде

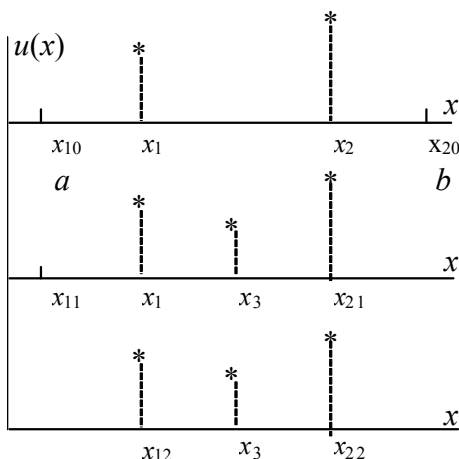


Рис. 6.2

$\delta = b - a = x_{20} - x_{10}$. Внутри $[a, b]$ выбираются две точки x_1 и x_2 и вычисляются $u(x_1)$ и $u(x_2)$. Оказывается, что $u(x_1) < u(x_2)$, следовательно,

искомый минимум располагается между $x_{11} = x_{10}$ и $x_{21} = x_2$. В полученном новом интервале неопределенности $[x_{11}, x_{21}]$ длиной $\delta_1 = [x_{21} - x_{11}]$ необходимо опять выбрать две точки, но одна из них x_1 уже есть, поэтому выбирается точка x_3 и вычисляется $u(x_3) < u(x_1)$. Границы нового интервала неопределенности $x_{12} = x_1$, $x_{22} = x_{21}$, а $\delta_2 = x_{22} - x_{12}$.

Описанная процедура продолжается до тех пор пока, не будет выполнено соотношение

$$\delta_k = x_{2k} - x_{1k} \leq \varepsilon \delta_0, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Точка золотого сечения выбирается из условия

$$l_2 / l = l_1 / l_2,$$

где $l = l_1 + l_2$ представляет собой длину интервала неопределенности. Проведем элементарные преобразования с приведенным выше соотношением

$$l_2^2 = l_1 l, \quad l_2^2 = l_1 (l_1 + l_2), \quad (l_1 / l_2)^2 + l_1 / l_2 - 1 = 0,$$

получим

$$l_1 = \rho_1 l, \quad \rho_1 = (3 - \sqrt{5}) / 2 \approx 0,381966,$$

$$l_2 = \rho_2 \cdot l, \quad \rho_2 = (\sqrt{5} - 1) / 2 \approx 0,618034.$$

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Метод общего поиска.
2. Метод золотого сечения.
3. Влияние начальной длины интервала неопределенности на количество итераций и погрешность метода золотого сечения.
4. Влияние величины параметра останова на количество итераций и погрешность метода золотого сечения.
5. Поиск экстремума неунимодальной целевой функции.

7. МЕТОДЫ МНОГОМЕРНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ

ЦЕЛЬ РАБОТЫ

Исследование итерационных методов покоординатного спуска» и Нелдера–Мида» решения задачи многомерной оптимизации. Анализ влияния корректирующих параметров алгоритмов на точность (количество итераций) определения оптимальных значений проектных параметров.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Найти значения x_{*i} проектных параметров x_i , $i \in [1, n]$, при которых целевая функция $u(x_1, x_2, \dots, x_n)$ имеет экстремальное значение. Вид целевой функции:

$$1) \ n = 3, \ u(x_1, x_2, x_3) = 3(x_1 - 4)^2 + 5(x_2 + 3)^2 + 7(2x_3 + 1)^2,$$

$$x_{*1} = 4 \quad x_{*2} = -3 \quad x_{*3} = -0,5;$$

$$2) \ n = 4, \ u(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 + 10)^2 + 2x_2^2 + 5(x_3 - 5)^2 + 20x_4^4,$$

$$x_{*1} = -10 \quad x_{*2} = 0 \quad x_{*3} = 5 \quad x_{*4} = 0;$$

$$3) \ n = 6, \ u(x_1, x_2, \dots, x_6) = x_1^2 + (x_2 - 2)^2 + (2x_3 + 6)^2 + x_4^2 + x_5^2 + x_6^2,$$

$$x_{*1} = 0 \quad x_{*2} = 2 \quad x_{*3} = -3 \quad x_{*4} = 0 \quad x_{*5} = 0 \quad x_{*6} = 0;$$

$$4) \ n = 2, \ u(x_1, x_2) = (x_1^2 + x_2 - 11)^2 + (x_1 + x_2^2 - 7)^2,$$

$$x_{*1} = 3 \quad x_{*2} = 2;$$

$$5) \ n = 3, \ u(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - 1)^2 + (x_2 - 3)^2 + 4(2x_3 + 5)^2,$$

$$x_{*1} = 1 \quad x_{*2} = 3 \quad x_{*3} = -5;$$

$$6) \quad n=4, \quad u(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 + 10x_2)^2 + 5(x_3 - x_4)^2 + (x_2 - 2x_3)^4 + 10(x_1 - x_4)^4,$$

$$x_{*1} = 0 \quad x_{*2} = 0 \quad x_{*3} = 0 \quad x_{*4} = 0;$$

$$7) \quad n=2, \quad u(x_1, x_2) = x_1^4 + x_2^4 + 2x_1^2 x_2^2 - 4x_1 + 3,$$

$$x_{*1} = 1 \quad x_{*2} = 0;$$

$$8) \quad n=3, \quad u(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - 2)^2 + (x_2 - 5)^2 + (x_3 + 2)^2,$$

$$x_{*1} = 2 \quad x_{*2} = 5 \quad x_{*3} = -2;$$

$$9) \quad n=3, \quad u(x_1, x_2, x_3) = 3(x_1 - 1)^2 + 2(x_2 - 2)^2 + (x_3 - 3)^2,$$

$$x_{*1} = 1 \quad x_{*2} = 2 \quad x_{*3} = 3;$$

$$10) \quad n=2, \quad u(x_1, x_2) = 100(x_2 - x_1^2)^2 + (1 - x_1)^2,$$

$$x_{*1} = 1 \quad x_{*2} = 1;$$

$$11) \quad n=2, \quad u(x_1, x_2) = 4(x_1 - 5)^2 + (x_2 - 6)^2,$$

$$x_{*1} = 5 \quad x_{*2} = 6;$$

$$12) \quad n=2, \quad u(x_1, x_2) = 1 - 2x_1 - 2x_2 - 4x_1x_2 + 10x_1^2 + 2x_2^2,$$

$$x_{*1} = 0,25 \quad x_{*2} = 0,75;$$

$$13) \quad n=2, \quad u(x_1, x_2) = x_1^3 + x_2^2 - 3x_1 - 2x_2 + 2,$$

$$x_{*1} = 1 \quad x_{*2} = 1.$$

ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТЫ

1. Ознакомиться с описанием работы. Уяснить цель и смысл задачи согласно варианту. Открыть выполняемый файл «ММО».

Метод покоординатного спуска

2. Определить значения проектных параметров, при которых целевая функция имеет экстремум, положив $DK = 2$ (параметр DK задает

начальные условия проектных параметров в виде $x_{0i} = x_{*i} \cdot DK$ или $x_{0i} = x_{*i} / DK$, $i \in [1, n]$), и значение параметра останова $\varepsilon = 0,001$.

3. Исследовать влияние начальных условий (параметр DK изменять от $DK_{\min} = 2$ до $DK_{\max} = 7$ через $HDK = 0,5$) на количество итераций и погрешность алгоритма ($\varepsilon = 0,001$).

4. Исследовать влияние параметра останова ε (изменять ε от $\varepsilon_{\min} = 1,0e^{-6}$ до $\varepsilon_{\max} = 1,0e^{-1}$ в виде $\varepsilon_{(i+1)} = 10\varepsilon_i$) на погрешность алгоритма и количество итераций ($DK = 2$).

Метод Нелдера–Мида

5. Повторить пп. 2, 3, 4 предыдущего метода, положив шаг задания начального симплекса $H = 0,5$.

6. Исследовать влияние параметра H (изменять H от $H_{\min} = 0,1$ до $H_{\max} = 1,0$ через $DH = 0,1$) на погрешность алгоритма и количество итераций.

7. Оформить отчет.

СОДЕРЖАНИЕ ОТЧЕТА

1. Цель работы.
2. Постановка задачи.
3. Результаты выполнения п. 2 в виде рисунка с графиками сходимостей.
4. Результаты исследования влияния начальных условий и параметра останова на погрешности определения значений проектных параметров (количества итераций) в виде таблиц и графиков.
5. Результаты исследования влияния параметра H в методе Нелдера–Мида на погрешности определения значений проектных параметров (количества итераций) в виде таблиц и графиков.
6. Выводы.

КРАТКИЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

Метод покоординатного спуска. Пусть в n -мерном пространстве проектирования задано начальное приближение

$$\mathbf{x}_0 = (x_{10}, x_{20}, \dots, x_{n0})$$

вектора проектных параметров $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ целевой функции $u(\mathbf{x})$. Зафиксируем координаты x_{20}, \dots, x_{n0} , а $u(\mathbf{x})$ рассмотрим как функцию одной переменной x_1 . Определим

$$\min_{x_1 \in [a_1, b_1]} u(x_1, x_{20}, \dots, x_{n0}).$$

Значение координаты x_1 , при котором имеет место минимум целевой функции, обозначим как x_{11} . На следующем шаге зафиксируем значения координат $x_{11}, x_{30}, \dots, x_{n0}$ и отыщем

$$\min_{x_2 \in [a_2, b_2]} u(x_{11}, x_2, \dots, x_{n0}),$$

который будет иметь место при $x_2 = x_{21}$. В результате после n шагов получим

$$u(x_{11}, x_{21}, \dots, x_{n1}) < u(x_{10}, x_{20}, \dots, x_{n0}),$$

и, таким образом, после одной итерации покоординатного спуска осуществляется переход из точки $u(\mathbf{x}_0)$ в точку $u(\mathbf{x}_1)$. На следующей итерации описанная процедура покоординатного спуска повторяется, и так до тех пор, пока на некоторой k -й итерации для задаваемого ε не выполнится, например, условие

$$|u(\mathbf{x}_k) - u(\mathbf{x}_{k-1})| \leq \varepsilon.$$

В методе покоординатного спуска решение задачи многомерной оптимизации сводится к поиску экстремума функции одной переменной, а в качестве алгоритма одномерной оптимизации обычно используется метод золотого сечения.

Метод Нелдера–Мида представляет собой итерационную процедуру, на каждом k -м ($k = 0, 1, 2, \dots$) шаге которой в n -мерном пространстве искомых параметров x_i , $i \in [1, n]$, формируется неправильный симплекс (выпуклый произвольный многогранник с $(n + 1)$ -й вершиной), определяемый своим вектором параметров $\mathbf{x}_{ks} = [x_{ksi}, i \in [1, n]]$, $s \in [1, n + 1]$ и своим значением целевой функции $u_{ks}(\mathbf{x}_{ks})$, $s \in [1, n + 1]$.

Начальный симплекс, характеризуемый координатами \mathbf{x}_{0s} , $s \in [1, n+1]$, может быть выбран произвольным, хотя его размеры и ориентация заметно влияют на скорость сходимости. Определение координат вершин начального симплекса можно осуществлять по задаваемым параметрам первой точки x_{01i} и приращениям $\Delta x_i = \mu_n x_{01i}$, $i \in [1, n]$ ($0 < \mu_n < 1$), μ_n – шаг приращения, в виде

$$x_{0si} = \begin{cases} x_{01i} & \text{при } i \neq s-1, \\ x_{01i} + \Delta x_i & \text{при } i = s-1, \quad i \in [1, n], \quad s \in [2, n+1], \end{cases}$$

и затем вычислять соответствующие значения целевой функции

$$u_{0s} = u(\mathbf{x}_{0s}), \quad s \in [1, n+1].$$

На k -м шаге алгоритма выполняются следующие операции:

1) определяются три точки \mathbf{x}_{kh} , \mathbf{x}_{kg} и \mathbf{x}_{kl} , характеризующие соответствующими значениями целевой функции

$$\begin{aligned} u_h = u(\mathbf{x}_{kh}) &= \max_{s \in [1, n+1]} u_{ks}, & u_g = u(\mathbf{x}_{kg}) &= \max_{s \in [1, n+1], s \neq h} u_{ks}, \\ u_l = u(\mathbf{x}_{kl}) &= \min_{s \in [1, n+1]} u_{ks}; \end{aligned}$$

2) находится новая точка (центр тяжести)

$$\mathbf{x}_{k0} = \frac{1}{n} \sum_{s=1, s \neq h}^{n+1} u_{ks};$$

3) точка \mathbf{x}_{kh} отражается относительно точки \mathbf{x}_{k0} в точку \mathbf{x}_{ka} (рис. 7.1)

$$\mathbf{x}_{ka} = (1 + \mu_0) \mathbf{x}_{k0} - \mu_0 \mathbf{x}_{kh},$$

где коэффициент отражения μ_0 удовлетворяет условию $\mu_0 > 0$, и вычисляется значение целевой функции $u_a = u(\mathbf{x}_{ka})$;

4) осуществляется сравнение величин u_h , u_g , u_l с u_a и, если:

а) $u_a < u_l$, делается растяжение, т. е. находится новая точка \mathbf{x}_{kb} (рис. 7.2)

$$\mathbf{x}_{kb} = \mu_p \mathbf{x}_{ka} + (1 - \mu_p) \mathbf{x}_{k0},$$

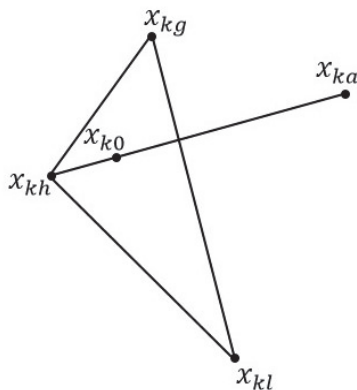


Рис. 7.1

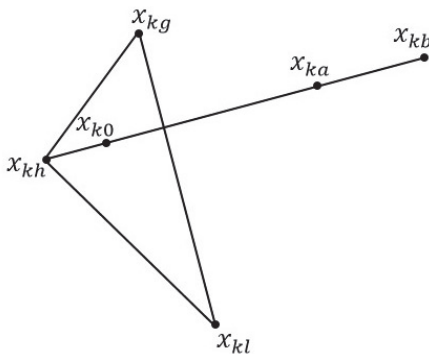


Рис. 7.2

где коэффициент растяжения μ_p удовлетворяет условию $\mu_p > 1$, вычисляется значение целевой функции $u_b = u(\mathbf{x}_{kb})$ и принимается

$$\mathbf{x}_{kh} = \mathbf{x}_{kb} \quad \text{при } u_b < u_a, \quad \mathbf{x}_{kh} = \mathbf{x}_{ka} \quad \text{при } u_b \geq u_a;$$

б) $u_a \geq u_l$ и $u_a \leq u_g$, принимается $\mathbf{x}_{kh} = \mathbf{x}_{ka}$;

в) $u_a \geq u_l$ и $u_a \leq u_g$, полагается

$$\mathbf{x}_{kh} = \mathbf{x}_{kh} \quad \text{при } u_a > u_h, \quad \mathbf{x}_{kh} = \mathbf{x}_{ka} \quad \text{при } u_a \leq u_h,$$

производится сжатие, т. е. находится новая точка \mathbf{x}_{kc} (рис. 7.3)

$$\mathbf{x}_{kc} = \mu_c \mathbf{x}_{ka} + (1 - \mu_c) \mathbf{x}_{k0},$$

где коэффициент сжатия μ_c удовлетворяет условию $0 < \mu_c < 1$, вычисляется значение целевой функции $u_c = u(\mathbf{x}_{kc})$ и при $u_c \leq u_h$ принимается $\mathbf{x}_{kh} = \mathbf{x}_{kc}$, а при $u_c > u_h$ производится редукция, т. е. находят новые вершины симплекса

$$\mathbf{x}_{ks} = (\mathbf{x}_{ks} + \mathbf{x}_{kl}) / 2, \quad s \in [1, n+1],$$

и вычисляются соответствующие значения целевой функции

$$u_{ks} = u(\mathbf{x}_{ks}), \quad s \in [1, n+1];$$

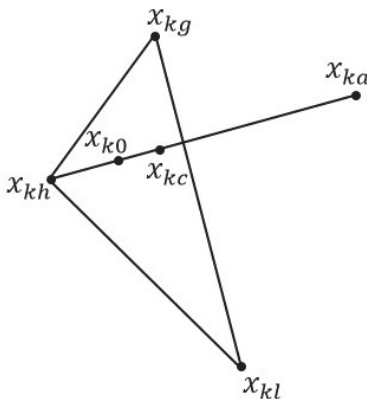


Рис. 7.3

5) определяется функционал

$$\sigma_k = \sqrt{\frac{1}{(n+1)} \sum_{s=1}^{n+1} \left[u_{ks} - \frac{1}{(n+1)} \sum_{s=1}^{n+1} u_{ks} \right]^2}$$

и при выполнении условия (ε – задаваемая малая величина)

$$\sigma_k \leq \varepsilon$$

шаговая процедура заканчивается и принимается

$$K = k, \quad \mathbf{x}_* = \mathbf{x}_{(k+1)l},$$

а в случае невыполнения данного условия полагается

$$\mathbf{x}_{(k+1)s} = \mathbf{x}_{ks}, \quad u_{(k+1)s} = u_{ks}, \quad s \in [1, n+1],$$

и осуществляется переход на следующий $(k+1)$ -й шаг.

Корректирующие параметры алгоритма рекомендуется задавать в виде

$$\mu_n = 0,5, \quad \mu_o = 1,0, \quad \mu_p = 2,0, \quad \mu_c = 0,5, \quad \varepsilon = 10^{-5}.$$

Метод Нелдера–Мида является очень надежным и при $n \leq 6$ – одним из самых эффективных.

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Метод золотого сечения.
2. Метод покоординатного спуска.
3. Симплекс метод.
4. Метод Нелдера–Мида.
5. Корректирующие параметры метода Нелдера–Мида.

ХАРАКТЕРИСТИКА ИНДИВИДУАЛЬНЫХ ЗАДАНИЙ

Индивидуальные задания выполняются в виде решения следующих задач вычислительной математики:

- задачи аппроксимации некоторой функции обобщенным рядом Фурье по системе ортонормированных на заданном интервале базисных функций и анализа влияния числа учитываемых членов ряда Фурье на точность аппроксимации;
- задачи решения обыкновенного, линейного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами (задача Коши) методами Рунге–Кутты и Адамса и анализа влияния шага дискретизации по времени на точность решения.

При решении обеих задач предусмотрено оценивание погрешностей полученных результатов.

Материалы выполнения индивидуальных заданий оформляются в виде пояснительной записки.

1. АППРОКСИМАЦИЯ ФУНКЦИЙ

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

На интервале $[a, b]$ произвести аппроксимацию реализации функции $f(t)$, заданной на $[a, b]$ с шагом Δt (в таблице вариантов функция приведена в аналитическом виде), обобщенным рядом Фурье по системе ортонормированных на $[a, b]$ с весом $\rho(t)$ базисных функций $\Psi_r(t)$, $r=1, 2, \dots, L$. Определить на $[a, b]$ погрешности аппроксимации. Исследовать влияние числа L учитываемых членов ряда Фурье на точность аппроксимации, изменяя L от $L_{\min} = 3$ до $L_{\max} = 7$ ($\Delta L = 1$).

ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ

Ознакомиться с теоретическими положениями в методических указаниях к данному заданию. Открыть выполняемый файл «СКА».

Записать в общем виде приближенное представление функции $f(t) \in L_2[a, b]$ рядом Фурье по системе ортонормированных на $[a, b]$ с весом $\rho(t)$ базисных функций (табл. 1.1) по вариантам.

Т а б л и ц а 1.1

№ п/п	Вид аппроксимируемой функции	Интервал $[a, b]$	Шаг Δt	Базисные функции
1	$e^{-0,5t} \sin(1,5 t)$	$[0; 6,2]$	0,025	Лагеррра
2	$\sin(1,5 t)$	$[0,6; 2,05]$	0,025	Лежандра
3				Чебышёва
4				Тригонометрические
5	$\cos(2 t)$	$[0,75; 2,35]$	0,025	Лежандра
6				Чебышёва
7				Тригонометрические
8	$e^{-0,36 t} \cos(t)$	$[0; 7]$	0,025	Лагеррра
9	$5 + 2,5 \sin(0,5 t)$	$[0,8; 6,4]$	0,05	Лежандра
10				Чебышёва
11				Тригонометрические
12	$4 - 2 \cos(t)$	$[1,05; 4,7]$	0,025	Лежандра
13				Чебышёва
14				Тригонометрические
15	$2,1 e^{-0,36 t} \sin(0,5 t)$	$[0; 6]$	0,05	Лагеррра
16	$3 + \sin(t)$	$[0; 4,5]$	0,025	Лежандра
17				Чебышёва
18				Тригонометрические
19	$6 - 2 \cos(0,5 t)$	$[6,2; 12,6]$	0,05	Лежандра
20				Чебышёва
21				Тригонометрические
22	$1,5 e^{-0,5 t} \cos(0,5 t)$	$[0; 7]$	0,05	Лагеррра
23	$10 - 5 \sin(t)$	$[0,5; 4,5]$	0,025	Лежандра
24				Чебышёва
25				Тригонометрические
26	$2,5 e^{-0,3 t} \sin(t)$	$[0; 6]$	0,025	Лагеррра

В соответствии с вариантом необходимо:

- вычислить на $[a, b]$ с шагом Δt реализацию оценки $\tilde{f}(t)$ аппроксимируемой функции $f(t)$;
- определить погрешности аппроксимации;
- повторить указанные вычисления для всех L согласно вариантам.

СОДЕРЖАНИЕ ПОЯСНИТЕЛЬНОЙ ЗАПИСКИ

В пояснительной записке должны быть приведены:

- цель работы и постановка задачи;
 - описание алгоритма решения задачи;
 - результаты решения задачи в виде таблиц и графиков:
- 1) графики функций $f(t)$, $\tilde{f}_L(t)$ (при $L = 3$, $L = 5$, $L = 7$);
 - 2) графики погрешностей аппроксимации $e_L(t) = f(t) - \tilde{f}_L(t)$;
 - 3) графики базисных функций $\Psi_r(t)$, $r \in [1, 5]$ и $\rho(t) \neq 1$;
 - 4) таблица и графики погрешностей $E_{\text{мо}} = f(L)$ и $E_{\text{со}} = f(L)$, $L \in [3, 7]$;
 - 5) выводы.

ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ПОЛОЖЕНИЯ

Произвольную, кусочно-непрерывную функцию $f(t) \in L_2$ на $[a, b]$ приближенно можно представить в виде обобщенного ряда Фурье с конечным числом членов

$$f(t) \cong \tilde{f}(t) = \sum_{r=1}^L c_r \hat{\Psi}_r(t), \quad (1.1)$$

где $\hat{\Psi}_r(t)$, $r \in [1, L]$, – система ортогональных с весом $\rho(t)$ на $[a, b]$ базисных функций, а

$$c_r = \int_a^b \rho(t) f(t) \hat{\Psi}_r(t) dt \bigg/ \int_a^b \rho(t) [\hat{\Psi}_r(t)]^2 dt \quad (1.2)$$

– коэффициенты Фурье.

Таким образом, чтобы решить задачу аппроксимации функции $f(t)$ на $[a, b]$, необходимо при заданном базисе $\hat{\Psi}_r(t)$, $r \in [1, L]$, $t \in [a, b]$, вычислить коэффициенты Фурье, c_r , $r \in [1, L]$, согласно (1.2) и восстановить оценку $\tilde{f}(t)$, $t \in [a, b]$ аппроксимируемой функции $f(t)$ по выражению (1.1).

Ниже приведены ортогональные $\hat{\Psi}_r(t)$ (ортонормированные $\Psi_r(t)$) с весом $\rho(t)$ на $[a, b]$ базисные функции, используемые при решении задачи аппроксимации.

Полиномы Лежандра, ортогональные на $[a, b]$ с весом $\rho(t)=1$, удобно вычислять на ЭВМ по рекуррентной формуле

$$\hat{\Phi}_r(t) = \frac{2r-3}{r-1} \left(\frac{2}{b-a} t - \frac{b+a}{b-a} \right) \hat{\Phi}_{r-1}(t) - \frac{r-2}{r-1} \hat{\Phi}_{r-2}(t), \quad (1.3)$$

$$r = 3, 4, \dots, L, \quad \hat{\Phi}_1(t) = 1, \quad \hat{\Phi}_2(t) = \frac{2}{b-a} t - \frac{b+a}{b-a}.$$

Нормирующий множитель γ_r полиномов Лежандра имеет вид

$$\gamma_r = \sqrt{\frac{2r-1}{b-a}}, \quad r \in [1, L] \quad (1.4)$$

и ортонормированные полиномы Лежандра могут вычисляться как

$$\Phi_r(t) = \gamma_r \hat{\Phi}_r(t). \quad (1.5)$$

Полиномы Чебышёва первого рода, ортогональные на $[a, b]$ с весом

$$\rho(t) = \frac{b-a}{2 \sqrt{[-t^2 + (b+a)t - ab]}}, \quad (1.6)$$

также могут вычисляться по рекуррентной формуле

$$\hat{T}_r(t) = 2 \left(\frac{2}{b-a} t - \frac{b+a}{b-a} \right) \hat{T}_{r-1}(t) - \hat{T}_{r-2}(t), \quad (1.7)$$

$$r = 3, 4, \dots, L, \quad \widehat{T}_1(t) = 1, \quad \widehat{T}_2(t) = \frac{2}{b-a} t - \frac{b+a}{b-a}.$$

Нормирующий множитель γ_r полиномов Чебышёва первого рода

$$\gamma_r = \begin{cases} \sqrt{2}/\sqrt{\pi(b-a)}, & r=1, \\ 2/\sqrt{\pi(b-a)}, & r>1, \end{cases} \quad (1.8)$$

а ортонормированные полиномы Чебышёва первого рода определяются в виде

$$T_r(t) = \gamma_r \widehat{T}_r(t). \quad (1.9)$$

При вычислении на ЭВМ коэффициентов c_r , $r \in [1, L]$, ряда Фурье по полиномам Чебышёва в моменты времени $t=a$ и $t=b$ подкоренное выражение в весовой функции $\rho(t)$ обращается в нуль. Чтобы избежать операции деления на нуль, в подкоренное выражение введем некоторый малый параметр ε (например, $\varepsilon=10^{-6}\Delta t$, где Δt – шаг дискретизации). Однако введение параметра ε приводит к дополнительной погрешности в вычислениях коэффициентов Фурье, что в конечном итоге сказывается на погрешности аппроксимации. Причем, как показывает практика, погрешности, порожденные параметром ε , оказываются соизмеримыми с погрешностями от отбрасывания остаточного члена ряда Фурье при $L=3, 4$ при аппроксимации на $[a, b]$ полупериода синусоиды.

Тригонометрические функции, ортонормированные на $[a, b]$ с весом $\rho(t) = 1$,

$$G_r \left\{ \cos \left[(r-1) \frac{2\pi}{b-a} t \right], \sin \left[(r-1) \frac{2\pi}{b-a} t \right] \right\}, \quad r \in [1, L], \quad (1.10)$$

образуют гармонический ряд Фурье, который представляется в виде

$$\tilde{f}(t) = \frac{A_1}{2} + \sum_{r=2}^L A_r \cos \left[(r-1) \frac{2\pi}{b-a} t \right] + B_r \sin \left[(r-1) \frac{2\pi}{b-a} t \right], \quad (1.11)$$

где

$$A_r = \frac{2}{b-a} \int_a^b f(t) \cos \left[(r-1) \frac{2\pi}{b-a} t \right] dt,$$

$$B_r = \frac{2}{b-a} \int_a^b f(t) \sin \left[(r-1) \frac{2\pi}{b-a} t \right] dt. \quad (1.12)$$

Функции Лагерра, ортонормированные на $[0, \infty)$ с весом $\rho(t) = 1$, могут быть вычислены по рекуррентной формуле

$$L_r(t) = \frac{1}{r-1} (2r-3-2\beta t), L_{r-1}(t) - \frac{r-2}{r-1} L_{r-2}(t), r=3, 4, \dots, L, \quad (1.13)$$

$$L_1(t) = \sqrt{2\beta} \cdot e^{-\beta t}, L_2(t) = \sqrt{2\beta} \cdot e^{-\beta t} (1-2\beta t).$$

Параметр β , фигурирующий в выражениях функций Лагерра, необходимо выбирать из условия сохранения их свойств при аппроксимации не на бесконечном, а на конечном интервале времени, что имеет место при практическом использовании этих функций. Речь идет о количестве нулей функций Лагерра на заданном интервале аппроксимации, а именно если $L_k(t)$ имеет $(k-1)$ нулей на $[0, \infty)$, то и на $[0, T]$ ($a=0, b=T$) она должна иметь $(k-1)$ нулей.

Экспериментально было установлено, что

$$\beta \approx 2L/T, r=1, 2, \dots, L. \quad (1.14)$$

При этом амплитуда L -й функции Лагерра в точке T будет составлять не более 0,1 от максимального на $[0, T]$ значения.

При анализе погрешностей аппроксимации следует иметь в виду, что при выполнении данной работы на ЭВМ результирующая погрешность включает в себя две составляющие: методическую, возникающую из-за неточности методов, используемых при решении задачи аппроксимации (конечное число L членов ряда Фурье, использование квадратурных формул численного интегрирования при определении коэффициентов Фурье), и вычислительную (погрешность округления на ЭВМ). Исходные данные полагаем заданными точно, поэтому погрешность задания исходных данных отсутствует.

Результирующую погрешность аппроксимации $f(t)$ на $[a, b]$ обобщенным рядом Фурье $\tilde{f}(t)$ можно оценить посредством следующих оценок:

– максимальной на $[a, b]$ абсолютной и относительной

$$E_M = \max_{t \in [a, b]} |f(t) - \tilde{f}(t)|, \quad E_{Mo} = \max_{t \in [a, b]} |f(t) - \tilde{f}(t)| / |\tilde{f}(t)|; \quad (1.15)$$

– среднеквадратичной на $[a, b]$ абсолютной и относительной

$$E_c = \sqrt{\int_a^b |f(t) - \tilde{f}(t)|^2 dt}, \quad E_{co} = e_c / \sqrt{\int_a^b |f(t)|^2 dt}. \quad (1.16)$$

2. РЕШЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

На интервале $[0, T_{\Pi}]$ решить дифференциальное уравнение

$$y''(t) + a_2 y'(t) + a_1 y(t) = b x(t), \quad y(0) = y'(0) = 0,$$

$$a_1 = 1/T^2, \quad a_2 = 2\xi/T, \quad b = k, \quad x(t) = 1(t)$$

с шагом дискретизации Δt методом Адамса четвертого порядка точности с прогнозом и коррекцией решения. Необходимое для запуска численной процедуры Адамса количество точек решения вычислить методом Рунге–Кутты четвертого порядка точности.

Определить на $[0, T_{\Pi}]$ погрешности решения дифференциального уравнения, для чего необходимо сравнить полученное решение $\tilde{y}(t)$ с точным $y(t)$, $t \in [0, T_{\Pi}]$, вычисленным аналитически, которое для уравнение второго порядка с правой частью $x(t) = 1(t)$ имеет вид

$$y(t) = \frac{b}{\beta(\alpha^2 + \beta^2)} \left[\beta - e^{-|\alpha|t} (\beta \cos(\beta t) + \alpha \sin(\beta t)) \right],$$

где α и β – вещественная и мнимая части корней характеристического уравнения

$$\lambda^2 + a_2\lambda + a_1 = 0, \quad \lambda_{1,2} = \alpha \pm j\beta, \quad j = \sqrt{-1}.$$

Проанализировать влияние шага Δt решения дифференциального уравнения на точность решения, для чего необходимо изменить параметр Δt от Δt_{\min} до Δt_{\max} с шагом $h_{\Delta t}$.

Оценить методическую погрешность решения дифференциального уравнения по правилу Рунге, задавшись одним из используемых при численном решении значений параметра Δt . Сравнить оценку, вычисленную по правилу Рунге, с полученной при решении дифференциального уравнения методом Адамса.

ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ

Ознакомиться с теоретическими положениями в методических указаниях к данному заданию. Открыть выполняемый файл «ДифУр».

Т а б л и ц а 2.1

№ п/п	T	ξ	k	$[0, T_{\Pi}]$	Δt_{\min}	Δt_{\max}	$h_{\Delta t}$
1	10,0	0,0	10,0	[0; 160]	0,5	2,5	0,5
2	10,0	0,1	10,0	[0; 160]	0,5	2,5	0,5
3	10,0	0,2	10,0	[0; 160]	0,5	2,5	0,5
4	10,0	0,3	10,0	[0; 150]	0,5	2,5	0,5
5	10,0	0,4	10,0	[0; 140]	0,5	2,5	0,5
6	10,0	0,5	10,0	[0; 130]	0,5	2,5	0,5
7	10,0	0,6	10,0	[0; 120]	0,5	2,5	0,5
8	10,0	0,7	10,0	[0; 110]	0,5	2,5	0,5
9	10,0	0,9	10,0	[0; 100]	0,5	2,5	0,5
10	5,0	0,3	5,0	[0; 80]	0,2	1,0	0,2
11	5,0	0,5	5,0	[0; 70]	0,2	1,0	0,2
12	5,0	0,6	5,0	[0; 65]	0,2	1,0	0,2
13	5,0	0,7	5,0	[0; 60]	0,2	1,0	0,2
14	5,0	0,9	5,0	[0; 50]	0,2	1,0	0,2
15	2,0	0,0	2,0	[0; 32]	0,1	0,5	0,1

№ п/п	T	ξ	k	$[0, T_{\Pi}]$	Δt_{\min}	Δt_{\max}	$h_{\Delta t}$
16	2,0	0,1	2,0	$[0; 32]$	0,1	0,5	0,1
17	2,0	0,2	2,0	$[0; 32]$	0,1	0,5	0,1
18	2,0	0,6	2,0	$[0; 24]$	0,1	0,5	0,1
19	2,0	0,8	2,0	$[0; 20]$	0,1	0,5	0,1
20	1,0	0,0	1,0	$[0; 14]$	0,05	0,09	0,01
21	1,0	0,2	1,0	$[0; 12]$	0,05	0,09	0,01
22	1,0	0,4	1,0	$[0; 10]$	0,05	0,09	0,01
23	0,5	0,0	50,0	$[0; 12]$	0,05	0,09	0,01
24	0,5	0,2	50,0	$[0; 12]$	0,05	0,09	0,01
25	0,5	0,4	50,0	$[0; 10]$	0,05	0,09	0,01
26	0,5	0,8	50,0	$[0; 6]$	0,05	0,09	0,01

В соответствии с вариантом (табл. 2.1) необходимо:

- вычислить решение дифференциального уравнения на интервале $[0, T_{\Pi}]$ с заданным шагом дискретизации Δt ;
- вычислить погрешности решения дифференциального уравнения;
- повторить вычисления для всех Δt согласно варианту;
- для любого выбранного момента времени t_k и шага Δt определить по правилу Рунге максимальную относительную погрешность и сравнить ее с полученной на графике погрешностью $E_{\text{мо}}$ для выбранного Δt .

СОДЕРЖАНИЕ ПОЯСНИТЕЛЬНОЙ ЗАПИСКИ

В пояснительной записке должны быть приведены:

- алгоритмы методов Рунге–Кутты и Адамса (с прогнозом и коррекцией решения) четвертого порядка точности;
- графики точного решения $y_T(t)$ и полученные методом Адамса $y(t)$ для $\Delta t = \Delta t_1$, $\Delta t = \Delta t_3$, $\Delta t = \Delta t_5$;
- графики погрешностей $e_i(t) = y_T(t) - y_i(t)$, для $\Delta t = \Delta t_1$, $\Delta t = \Delta t_3$, $\Delta t = \Delta t_5$;
- таблица и графики погрешностей $E_{\text{мо}} = f(\Delta t)$ и $E_{\text{со}} = f(\Delta t)$, для всех Δt ;

- сравнительные результаты погрешностей, вычисленных по правилу Рунге и полученных в процессе решения дифференциального уравнения;
- выводы.

ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ПОЛОЖЕНИЯ

Из численных методов решения линейных, обыкновенных дифференциальных уравнений чаще всего на практике используют методы Рунге–Кутты и Адамса четвертого порядка точности с прогнозом и коррекцией решения.

Пусть необходимо отыскать решение дифференциального уравнения вида

$$y^{(n)}(t) + \sum_{i=1}^n a_{n-i+1} y^{(n-i)}(t) = b x(t), \quad y^{(j)}(0) = y_0^{(j)},$$

$$j=0, 1, \dots, n-1. \quad (2.1)$$

Учитывая, что $t=(k-1)\Delta t$, $k=1, 2, \dots$, выражение (2.1) запишем в виде

$$y^{(n)}[k] + \sum_{i=1}^n a_{n-i+1} y^{(n-i)}[k] = b x[k], \quad y^{(j)}(0) = y_0^{(j)},$$

$$j=0, 1, \dots, n-1. \quad (2.2)$$

Численная реализация метода Рунге–Кутты четвертого порядка точности:

1) для k -го момента времени определяются коэффициенты RK_{ij} ,
 $i = 1, 2, 3, 4$, $j = 1, 2, \dots, n$,

$$RK_{11} = \Delta t \, y'[k-1],$$

$$RK_{12} = \Delta t \, y''[k-1],$$

...

$$RK_{1n} = \Delta t \, y^{(n)}[k-1].$$

$$RK_{21} = \Delta t \{ y' [k-1] + 0,5 RK_{12} \},$$

$$RK_{22} = \Delta t \{ y'' [k-1] + 0,5 RK_{13} \},$$

. . .

$$RK_{2(n-1)} = \Delta t \{ y^{(n-1)} [k-1] + 0,5 RK_{1n} \},$$

$$RK_{2n} = \Delta t \left\{ -a_1 (y[k-1] + 0,5 RK_{11}) - a_2 (y' [k-1] + 0,5 RK_{12}) - \dots \right. \\ \left. \dots - a_n \left(y^{(n-1)} [k-1] + 0,5 RK_{1n} \right) + 0,5 b (x[k-1] + x[k]) \right\},$$

$$RK_{31} = \Delta t \{ y' [k-1] + 0,5 RK_{22} \},$$

$$RK_{32} = \Delta t \{ y'' [k-1] + 0,5 RK_{23} \},$$

. . .

$$RK_{3(n-1)} = \Delta t \{ y^{(n-1)} [k-1] + 0,5 RK_{2n} \},$$

$$RK_{3n} = \Delta t \left\{ -a_1 (y[k-1] + 0,5 RK_{21}) - a_2 (y' [k-1] + 0,5 RK_{22}) - \dots \right. \\ \left. \dots - a_n \left(y^{(n-1)} [k-1] + 0,5 RK_{2n} \right) + 0,5 b (x[k-1] + x[k]) \right\},$$

$$RK_{41} = \Delta t \{ y' [k-1] + 0,5 RK_{32} \},$$

$$RK_{42} = \Delta t \{ y'' [k-1] + 0,5 RK_{33} \},$$

. . .

$$RK_{4(n-1)} = \Delta t \{ y^{(n-1)} [k-1] + 0,5 RK_{3n} \},$$

$$RK_{4n} = \Delta t \left\{ -a_1 (y[k-1] + 0,5 RK_{31}) - a_2 (y' [k-1] + 0,5 RK_{32}) - \dots \right. \\ \left. \dots - a_n \left(y^{(n-1)} [k-1] + 0,5 RK_{3n} \right) + b x[k] \right\};$$

2) для k -го момента времени определяются решение и его производные

$$y[k] = y[k-1] + (RK_{11} + 2RK_{21} + 2RK_{31} + RK_{41}) / 6,$$

$$y'[k] = y'[k-1] + (RK_{12} + 2RK_{22} + 2RK_{32} + RK_{42}) / 6,$$

. . .

$$y^{(n-1)}[k] = y^{(n-1)}[k-1] + (RK_{1n} + 2RK_{2n} + 2RK_{3n} + RK_{4n}) / 6,$$

$$y^{(n)}[k] = -a_1 y[k] - a_2 y'[k] - \dots - a_n y^{(n-1)}[k] + b x[k],$$

при $k=1$, $y^{(j)}[k-1] = y^{(j)}[0] = y_0^{(j)}$, $j=0,1,\dots,n-1$.

Численная реализация метода Адамса четвертого порядка точности с прогнозом и коррекцией решения:

1) для k -го момента времени явным методом Адамса третьего порядка точности вычисляется прогноз решения и его производных:

$$y_{\text{пр}}[k] = y[k-1] + 1/12 \{ 23 y'[k-1] - 16 y'[k-2] + 5 y'[k-3] \} \Delta t,$$

$$y'_{\text{пр}}[k] = y'[k-1] + 1/12 \{ 23 y''[k-1] - 16 y''[k-2] + 5 y''[k-3] \} \Delta t,$$

. . .

$$y_{\text{пр}}^{(n-1)}[k] = y^{(n-1)}[k-1] +$$

$$+ 1/12 \{ 23 y^{(n)}[k-1] - 16 y^{(n)}[k-2] + 5 y^{(n)}[k-3] \} \Delta t,$$

$$y_{\text{пр}}^{(n)}[k] = -a_1 y_{\text{пр}}[k] - a_2 y'_{\text{пр}}[k] - \dots - a_n y_{\text{пр}}^{(n-1)}[k] + b x[k];$$

2) для k -го момента времени неявным методом Адамса третьего порядка точности производится коррекция решения и его производных:

$$y_{\text{кор}}[k] = y[k-1] + 1/12 \{ 5 y'_{\text{пр}}[k] + 8 y[k-1] - y'[k-2] \} \Delta t,$$

$$y'_{\text{кор}}[k] = y'[k-1] + 1/12 \{ 5 y''_{\text{пр}}[k] + 8 y''[k-1] - y''[k-2] \} \Delta t,$$

. . .

$$y_{\text{кор}}^{(n-1)}[k] = y^{(n-1)}[k-1] + \\ + 1/12 \left\{ 5 y_{\text{пр}}^{(n)}[k] + 8 y^{(n)}[k-1] - y^{(n)}[k-2] \right\} \Delta t,$$

3) для k -го момента времени определяются решение и его производные:

$$y[k] = 1/25 \left\{ y_{\text{пр}}[k] + 24 y_{\text{кор}}[k] \right\}, \\ y'[k] = 1/25 \left\{ y'_{\text{пр}}[k] + 24 y'_{\text{кор}}[k] \right\},$$

. . .

$$y^{(n-1)}[k] = 1/25 \left\{ y_{\text{пр}}^{(n-1)}[k] + 24 y_{\text{кор}}^{(n-1)}[k] \right\},$$

$$y^{(n)}[k] = -a_1 y[k] - a_2 y'[k] - \dots - a_n y^{(n-1)}[k] + b x[k].$$

Последняя операция позволяет повысить порядок точности описанного комбинационного алгоритма на единицу, поскольку при суммировании решений прогноза и коррекции погрешности явного и неявного алгоритмов, имеющие противоположные знаки, частично приводятся.

Метод Адамса значительно проще реализуется на ЭВМ и, следовательно, при решении дифференциального уравнения на длительном интервале времени меньше накапливает вычислительных погрешностей. Однако решение методом Адамса четвертого порядка точности в k -й момент времени определяется через известные решения в $(k-1)$ -й, $(k-2)$ -й и $(k-3)$ -й моменты времени (в общем случае необходимое количество точек с известными решениями определяется порядком точности метода). Таким образом, начать процедуру решения дифференциального уравнения методом Адамса четвертого порядка точности нельзя.

От этого недостатка свободен метод Рунге–Кутты, в том числе и четвертого порядка точности, согласно которому решение в k -й момент времени определяется через решение только в $(k-1)$ -й момент.

Но реализация метода Рунге–Кутты четвертого порядка точности гораздо сложнее метода Адамса (из-за вычисления коэффициентов RK на каждом шаге решения), а следовательно, он в большей степени может накапливать вычислительные погрешности на длительных интервалах решения. Поэтому целесообразно использовать сочетание этих алгоритмов. Решение начинают методом Рунге–Кутты, определяют решение в необходимом числе точек, а затем продолжают методом Адамса.

Результирующая погрешность численного решения дифференциального уравнения складывается из двух составляющих: методической (что обусловлено соответствующим выбором шага решения Δt) и вычислительной (полагаем, что исходные данные заданы точно).

Методическую погрешность решения дифференциального уравнения в общем случае приближенно можно оценить по правилу Рунге. Пусть глобальная погрешность на интервале

$$e_p = C_p \Delta t^P,$$

где C_p – неизвестная константа, зависящая от порядка точности алгоритма. Рунге предложил определить ее следующим образом.

Дифференциальное уравнение решается с некоторым шагом $\Delta t_1 = \Delta t$. Тогда для любой точки t_k , $k \in [0, N]$, получаем решение \tilde{y}_{k1} , обеспечивающее

$$y_k - \tilde{y}_{k1} \cong C_p \Delta t^P.$$

После этого производится решение с шагом $\Delta t_2 = \Delta t / 2$. В результате в той же точке t_k имеем

$$y_k - \tilde{y}_{k2} \cong C_p (\Delta t / 2)^P.$$

Вычитая второе соотношение из первого, получаем

$$\tilde{y}_{k2} - \tilde{y}_{k1} \cong C_p \Delta t^P (1 - 1/2^P),$$

откуда

$$C_p \cong \frac{2^p (\tilde{y}_{k2} - \tilde{y}_{k1})}{\Delta t^p (2^p - 1)}.$$

Таким образом, приближенно максимальную относительную погрешность, согласно Рунге, можно выразить в виде

$$E_{\text{мо}} \cong C_p \Delta t^p / \tilde{y}_{k1} \cong \frac{2^p (\tilde{y}_{k2} - \tilde{y}_{k1})}{\Delta t^p (2^p - 1)} \Delta t^p / \tilde{y}_{k1}.$$

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Ахиезер Н.И.* Лекции по теории аппроксимации. – М.: Наука, 1965. – 408 с.
2. *Банди Б.* Методы оптимизации. Вводный курс: пер. с англ. – М.: Радио и связь, 1988. – 128 с.
3. *Бахвалов Н.С.* Численные методы. – М.: Наука, 1973. – 632 с.
4. *Березин И.С., Жидков Н.П.* Методы вычислений. Том 1. – М.: Наука, 1966. – 632 с.
5. *Боглаев Ю.П.* Вычислительная математика и программирование. – М.: Высшая школа, 1990. – 544 с.
6. *Волков Е.А.* Численные методы. – М.: Наука, 1987. – 248 с.
7. *Гончаров В.А.* Теория интерполирования и приближения функций. – М.; Л.: Гостехтеориздат, 1934. – 316 с.
8. *Демидович Б.П., Марон И.А.* Основы вычислительной математики. – М.: Наука, 1966. – 664 с.
9. *Джексон Д.* Ряды Фурье и ортогональные полиномы. – М.: Изд-во иностранной литературы, 1948. – 260 с.
10. *Загускин В.Л.* Справочник по численным методам решения уравнений. – М.: Физматгиз, 1960. – 216 с.
11. *Калиткин Н.Н.* Численные методы. – М.: Наука, 1978. – 512 с.
12. *Крылов В.И., Бобков В.В., Монастырный П.И.* Вычислительные методы. Том 1. – М.: Наука, 1976. – 304 с.
13. *Крылов В.И., Бобков В.В., Монастырный П.И.* Вычислительные методы. Том 2. – М.: Наука, 1977. – 400 с.
14. *Суетин П.К.* Классические ортогональные многочлены. – М.: Наука, 1976. – 328 с.
15. *Турчак Л.И.* Основы численных методов. – М.: Наука, 1987. – 320 с.
16. *Фаддеев Д.К., Фаддеева В.Н.* Вычислительные методы линейной алгебры. – М.: Физматгиз, 1960. – 656 с.
17. *Хайпер Э. и др.* Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Нежесткие задачи. – М.: Мир, 1990. – 512 с.
18. *Химмельблау Д.* Прикладное нелинейное программирование: пер. с англ. – М.: Мир, 1975. – 534 с.
19. *Чикильдин Г.П.* Вычислительная математика: учеб. пособие. – Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2004. – 112 с.
20. *Чикильдин Г.П.* Разработка и исследование метода текущей идентификации параметров по их нестационарным спектральным характеристикам: автореф. дис. ... канд. техн. наук / Новосиб. электротехн. ин-т. – Новосибирск, 1982. – 191 с.
21. *Шуп Т.* Решение инженерных задач на ЭВМ: практическое руководство; пер. с англ. – М.: Мир, 1982. – 238 с.

ОГЛАВЛЕНИЕ

1. Интерполирование функций	3
2. Численное интегрирование	9
3. Решение системы линейных алгебраических уравнений	15
4. Решение нелинейного алгебраического уравнения	20
5. Решение системы нелинейных алгебраических уравнений	25
6. Методы одномерной оптимизации	33
7. Методы многомерной оптимизации	39
Характеристика индивидуальных заданий	47
1. Аппроксимация функций	47
2. Решение дифференциального уравнения	53
Библиографический список	62

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА

Методическое руководство

Редактор *И.Л. Кескевич*
Выпускающий редактор *И.П. Брованова*
Корректор *И.Е. Семенова*
Компьютерная верстка *Л.А. Веселовская*

Налоговая льгота – Общероссийский классификатор продукции
Издание соответствует коду 95 3000 ОК 005-93 (ОКП)

Подписано в печать 25.01.2016. Формат 60 × 84 1/16. Бумага офсетная. Тираж 150 экз.
Уч.-изд. л. 3,72. Печ. л. 4,0. Изд. № 314/15. Заказ № 207. Цена договорная

Отпечатано в типографии
Новосибирского государственного технического университета
630073, г. Новосибирск, пр. К. Маркса, 20