

Санкт-Петербургский государственный политехнический университет

Институт компьютерных наук и технологий

Кафедра компьютерных систем и программных технологий

Отчет по лабораторным работам № 1,2

на тему

Сигналы телекоммуникационных систем. Ряд Фурье. Преобразование Фурье.  
Корреляция.

**Работу выполнил:**

студент гр. 33501/1

Иванов А.А.

**Преподаватель:**

Богач Н.В.

## 1. Цель работы

Познакомиться со средствами генерации и визуализации простых сигналов.

## 2. Постановка задачи

1. В командном окне MATLAB и в среде Simulink промоделировать синусоидальный и прямоугольный сигналы с различными параметрами. Получить их спектры. Вывести график.
2. Получить их спектры с помощью преобразования Фурье, вывести на график.
3. Выполнить расчет преобразования Фурье. Перечислить свойства преобразования Фурье.
4. С помощью функции корреляции найдите позицию синхропосылки [101] в сигнале [0001010111000010]. Получите пакет данных, если известно, что его длина составляет 8 бит без учета синхропосылки. Вычислите корреляцию прямым методом, воспользуйтесь алгоритмом быстрой корреляции, сравните время работы обоих алгоритмов

## 3. Теоретическая информация

**Сигнал** — материальный носитель информации, используемый для передачи сообщений в системе связи. Сигнал может генерироваться, но его приём не обязателен, в отличие от сообщения, которое рассчитано на принятие принимающей стороной, иначе оно не является сообщением. Сигналом может быть любой физический процесс, параметры которого изменяются (или находятся) в соответствии с передаваемым сообщением.

**Спектр сигнала** — это совокупность простых составляющих сигнала с определенными амплитудами, частотами и начальными фазами. Между спектром сигнала и его формой существует жесткая взаимосвязь: изменение формы сигнала приводит к изменению его спектра и наоборот, любое изменение спектра сигнала приводит к изменению его формы. Это важно запомнить, поскольку при передаче сигналов в системе передачи, они подвергаются преобразованиям, а значит, происходит преобразование их спектров.

### 3.1 Ряд и интеграл Фурье

Любая ограниченная, периодическая функция, имеющая конечное число экстремумов на протяжении периода, может быть представлена в виде ряда Фурье:

$$\varphi_p(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k e^{j2\pi k f_1 t}$$

где  $f_1 = 1/T_1$ ;  $T_1$  период функции  $\varphi_p(t)$ ;  $C_k$  — постоянные коэффициенты. Коэффициенты могут быть найдены следующим образом:

$$C_k = \frac{1}{T_1} \int_{t_0}^{t_0+T_1} \varphi_p(t) e^{-j\pi k f_1 t} dt$$

При этом значение выражения не зависит от  $t_0$ . Обычно берется  $t_0=0$  или  $t_0 = -T_1/2$ .

Приведены формулы можно записать в виде одного выражения:

$$\varphi_p(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left[ \frac{1}{T_1} \int_{t_0}^{t_0+T_1} \varphi_p(t) e^{-j\pi k f_1 t} dt \right] e^{j2\pi k f_1 t}$$

Ряд Фурье справедлив для периодических сигналов, однако на его основе можно вывести соотношения и для непериодических сигналов. В этом случае  $T_1$  стремится к бесконечности, в связи с этим частота  $f_1$  стремится к нулю и обозначается как  $df$ ,  $kf_1$  является текущим значением частоты  $f$ , а сумма меняется на интеграл. В результате получается выражение:

$$\varphi_p(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_p(t) e^{-j2\pi f t} dt \right] \varphi_p(t) e^{-j2\pi f t} df$$

Это выражение называется интегралом Фурье и объединяет прямое преобразование Фурье:

$$\Phi(f) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_p(t) e^{-j2\pi f t} dt$$

и обратное преобразование Фурье:

$$\varphi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_p(f) e^{j2\pi f t} df$$

Приведенные преобразования существуют только для функций с ограниченной энергией:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(t)|^2 dt < \infty$$

В большинстве случаев термин преобразование Фурье обозначает именно интеграл Фурье. Преобразование Фурье сигнала так же называется спектром сигнала.

### 3.2 Свойства преобразования Фурье

Преобразование Фурье имеет ряд свойств:

- Суммирование функций

Преобразование Фурье – линейное преобразование. Отсюда следует:

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i \varphi_i(t) \leftrightarrow \sum_{i=1}^n \alpha_i \Phi_i(f)$$

где  $\alpha_i$  постоянный коэффициент.

- Смещение функций

При смещении функции  $t_0$  ее ПФ умножается на  $e^{j2\pi f t_0}$

$$\varphi(t - t_0) \leftrightarrow e^{-j2\pi f t_0} \Phi(f)$$

- Изменение масштаба аргумента функции

При домножении аргумента функции  $t$  на постоянный коэффициент  $\alpha$ , ПФ функции имеет вид  $\frac{1}{|\alpha|} \Phi\left(\frac{f}{\alpha}\right)$ :

$$\varphi(\alpha t) \leftrightarrow \frac{1}{\alpha} \Phi\left(\frac{f}{\alpha}\right)$$

- Перемножение функций

ПФ произведения двух функции равно свертки ПФ этих функций:

$$\varphi_1(t)\varphi_2(t) \leftrightarrow \Phi_1(f) * \Phi_2(f)$$

- Свертывание функций

ПФ свертки двух функций равно произведению ПФ этих функций:

$$\varphi_1(t)\varphi_2(t) \leftrightarrow \Phi_1(f)\Phi_2(f)$$

- Дифференцирование функции

При дифференцировании функции ее ПФ домножается на  $j2\pi f$ :

$$\frac{d[\varphi(t)]}{dt} \leftrightarrow j2\pi f \Phi(f)$$

- Интегрирование функции

При интегрировании функции ее ПФ делится на  $j2\pi f$ :

$$\int_{-\infty}^t \varphi(t') dt' \leftrightarrow \frac{1}{j2\pi f} \Phi(f)$$

- Обратимость преобразования

Преобразование обратимо с точностью до знака аргумента.

### 3.3 Корреляция

Для нахождения посылки в сигнале можно использовать алгоритм взаимной корреляции, где  $N$  – длина всех  $x$  и  $y$ . Для нахождения посылки можно сдвигать один вектор относительно другого, каждый раз находя значение корреляции. Максимальная корреляция будет соответствовать месту искомой посылки:

$$R = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i * y_i$$

Алгоритм быстрой корреляции:

$$R = \frac{1}{N} F_d^{-1}[X_s' * Y]$$

## 4. Ход работы

### 4.1 Синусоидальный сигнал в MATLAB

f- частота

A-Амплитуда

$F_0$ -фазовый сдвиг

```
f = 1;  
f0 = 3;  
A = 5;  
Fs = 50;  
t=0:1/Fs:5;  
s = A * sin(pi*f*t+f0)  
plot(t, s);  
dots = 1024;  
fft(s,dots)  
plot(abs(fft(s, dots)))
```

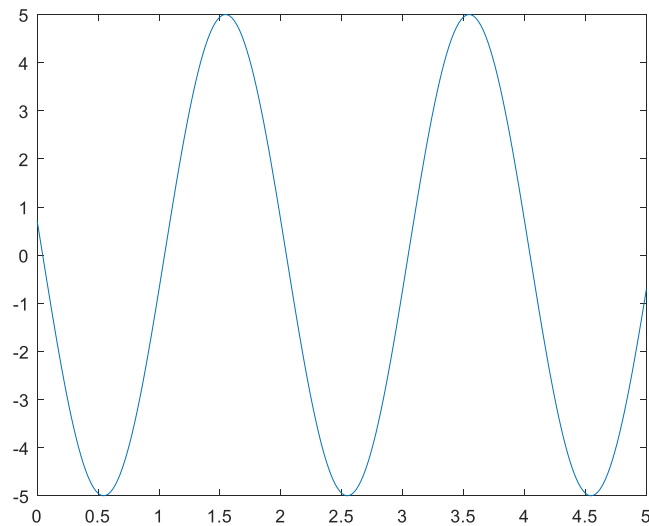
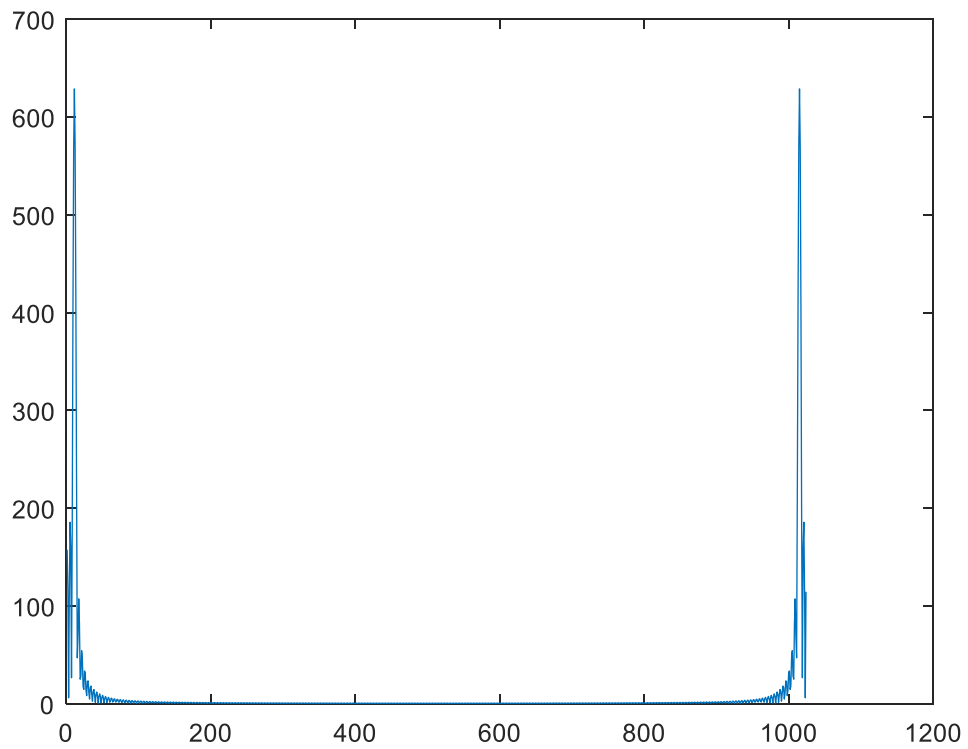


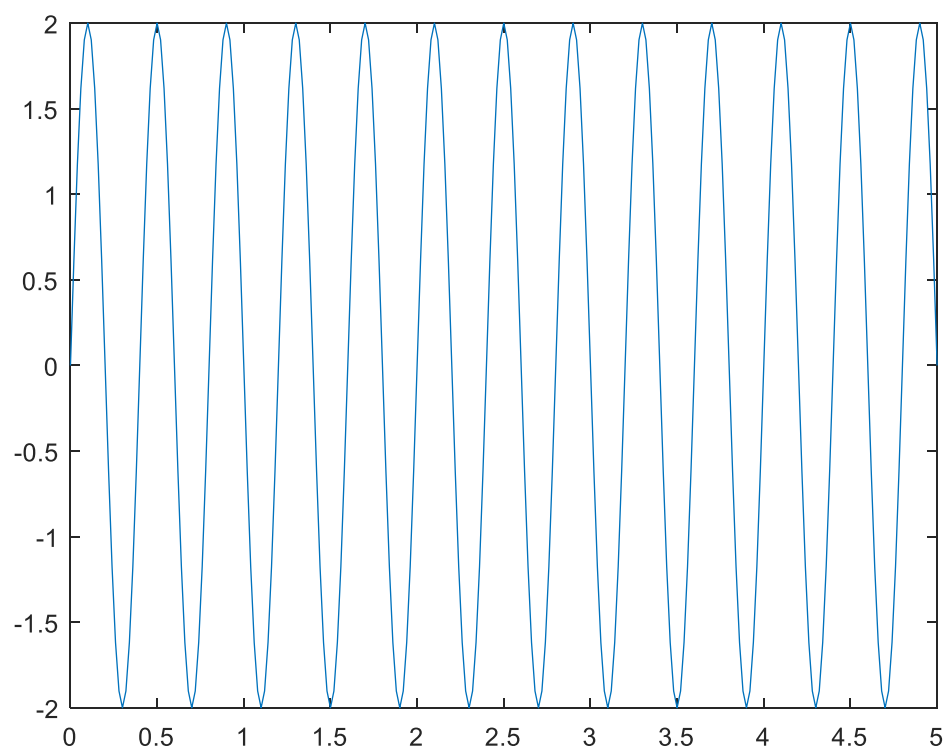
Рисунок 1 Синусоидальный сигнал 1



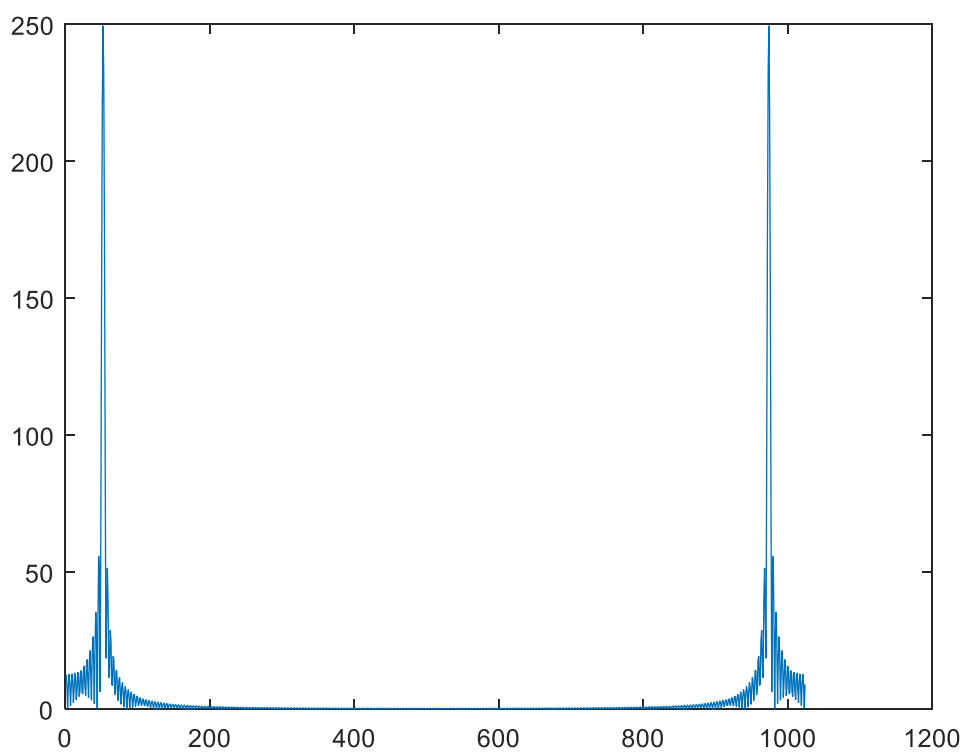
**Рисунок 2 Спектр синусоидального сигнала 1**

Изменим частоту и амплитуду:

```
f = 5;
f0 = 0;
A = 2;
Fs = 30;
t=0:1/Fs:5;
s = A * sin(pi*f*t+f0)
plot(t, s);
dots = 1024;
fft(s,dots);
figure
plot(abs(fft(s, dots)))
```



**Рисунок 3 Синусоидальный сигнал 2**



**Рисунок 4 Спектр синусоидального сигнала 2**

## 4.2 Прямоугольный сигнал в MATLAB

```
clear all
dt=.001;
t=[-25:dt:25];
x=(7/2)*(sign(t+5)-sign(t-5));
plot(t,x);
xlabel('time(ms)');
ylabel('Amplitude(V)');
axis([-20 20 0 8]);

y=fftshift(fft(x));
N=length(y);
n=-(N-1)/2:(N-1)/2; %Разделение компонентов частоты
f=sqrt(y.*conj(y)); % Найти амплитуду гармоник.

title('Rectangular pulse amplitude');
xlabel('frequency component(harmony)');
ylabel('Amplitude of the harmony');

plot(n,f);
axis([-50 50 0 150000]);
```

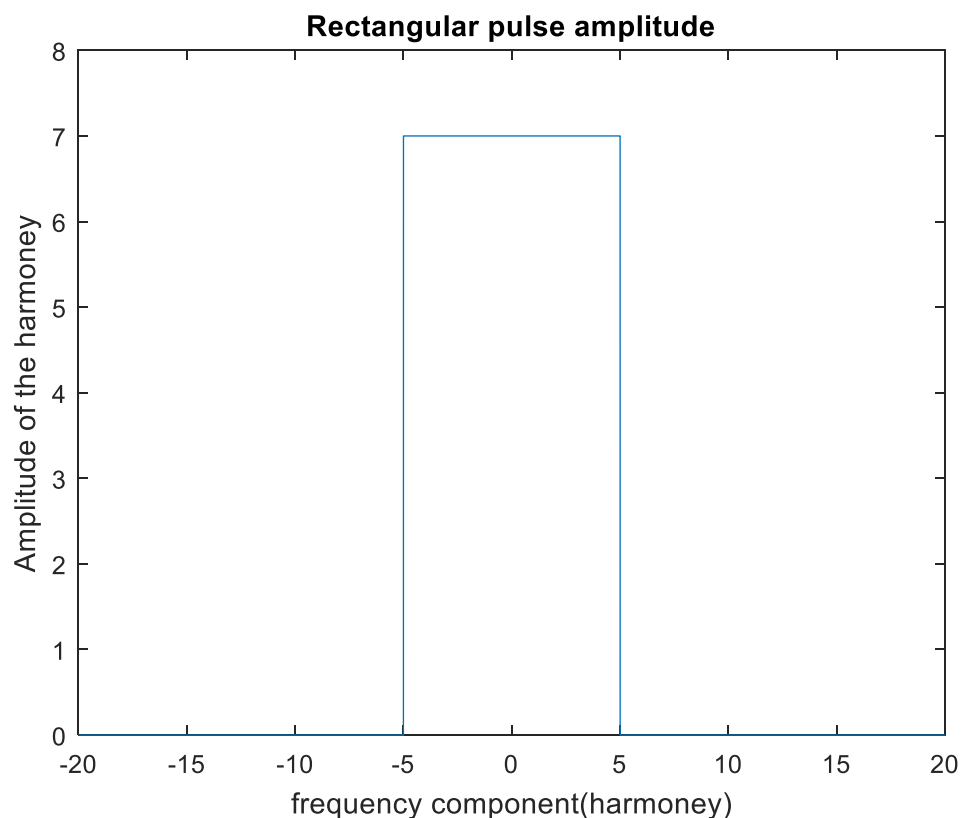
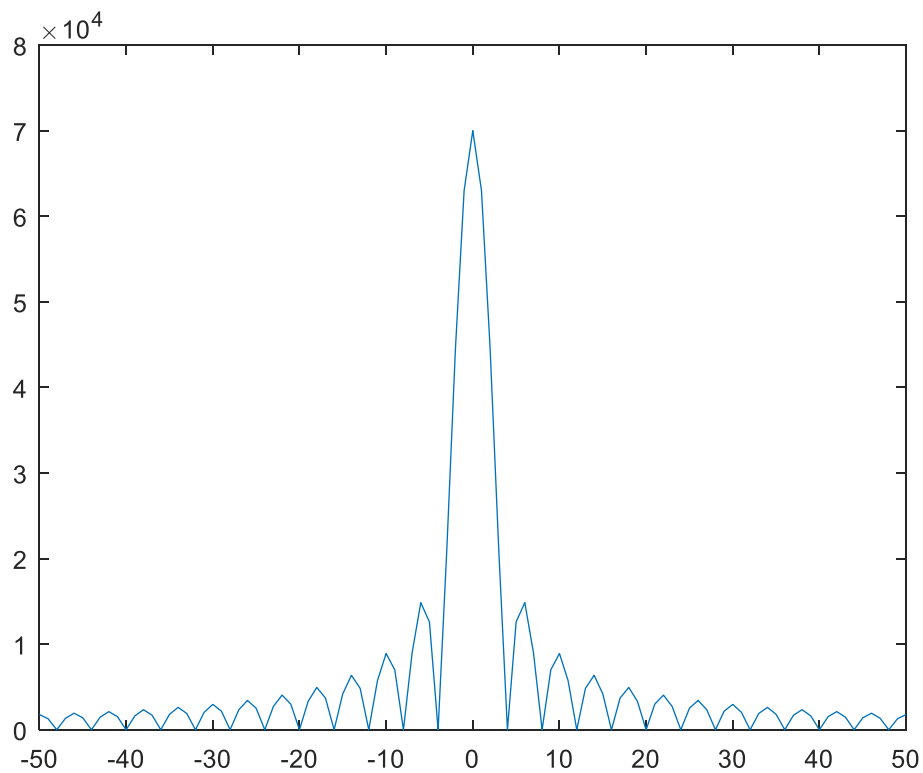


Рисунок 5 Прямоугольный сигнал 1





**Рисунок 6 Спектр прямоугольного сигнала 1**

Изменим ширину импульса и его амплитуду.

```
clear all
dt=.001;
t=[-20:dt:20];
x=square(t,70);
plot(t,x);
axis([-20 20 0 1.2]);
```

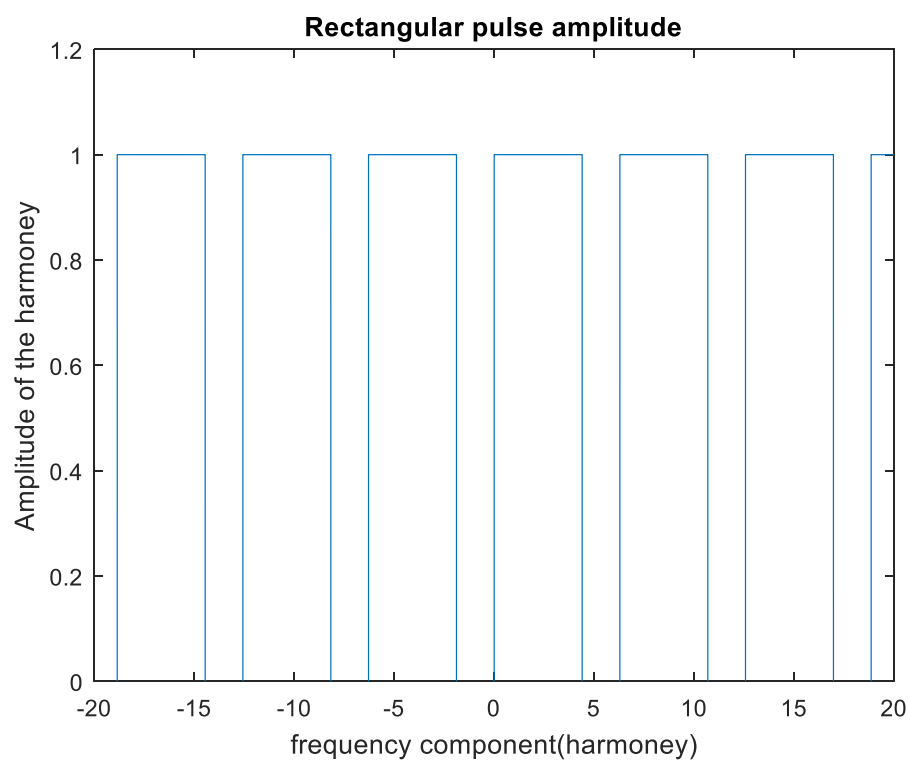


Рисунок 7 Прямоугольный сигнал 2

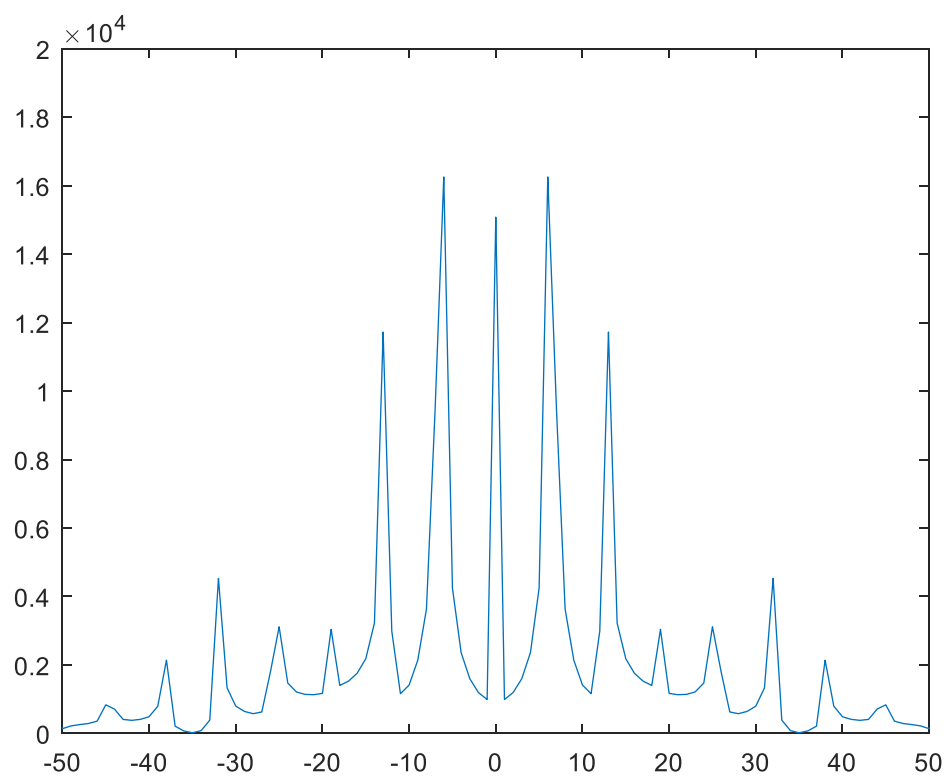


Рисунок 8 Спектр прямоугольного сигнала 2

### 4.3 Синусоидальный сигнал в Simulink

Проведем те же опыты в SimuLink:

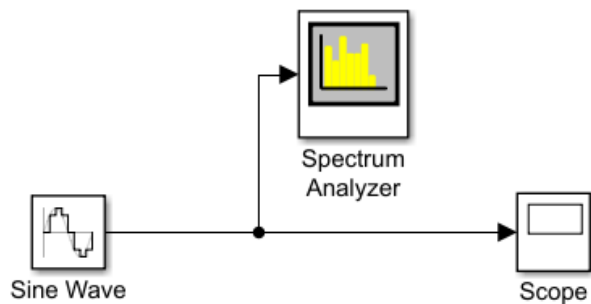


Рисунок 9 Схема для синусоидального сигнала

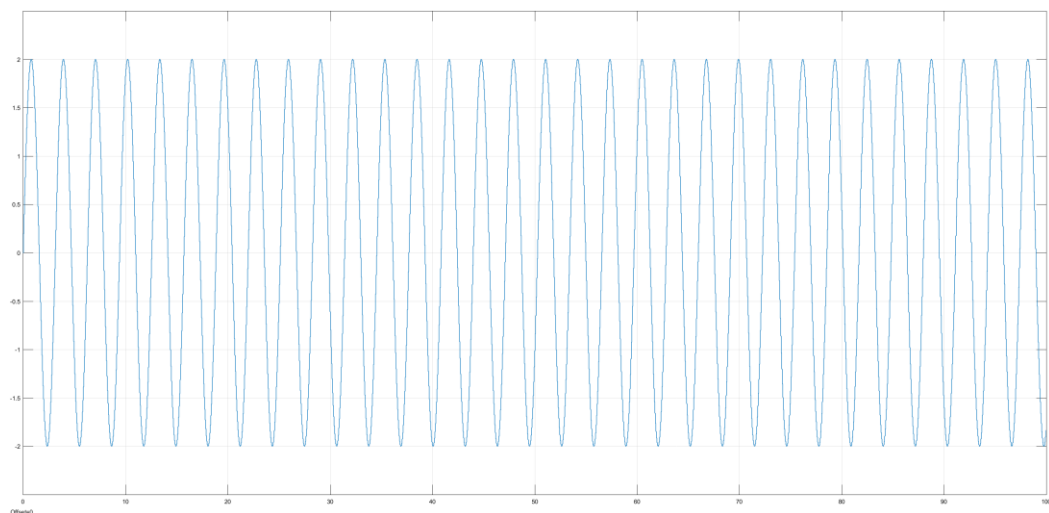
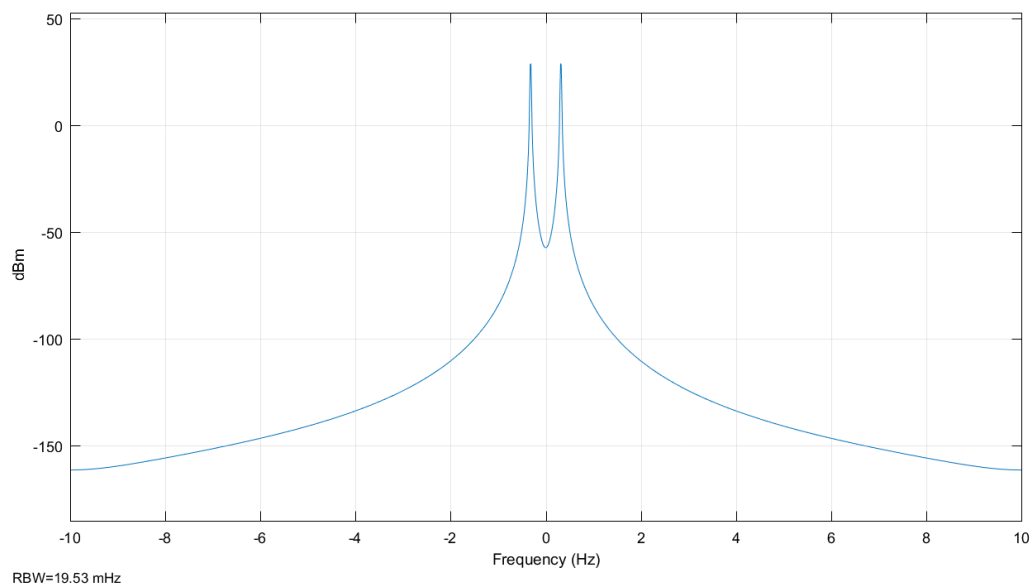
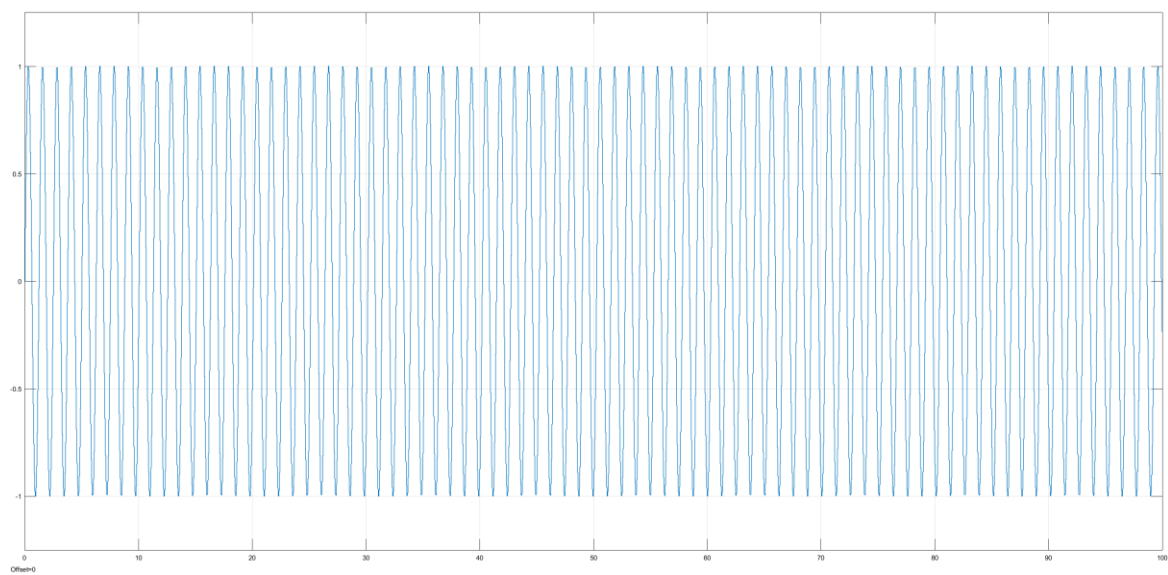


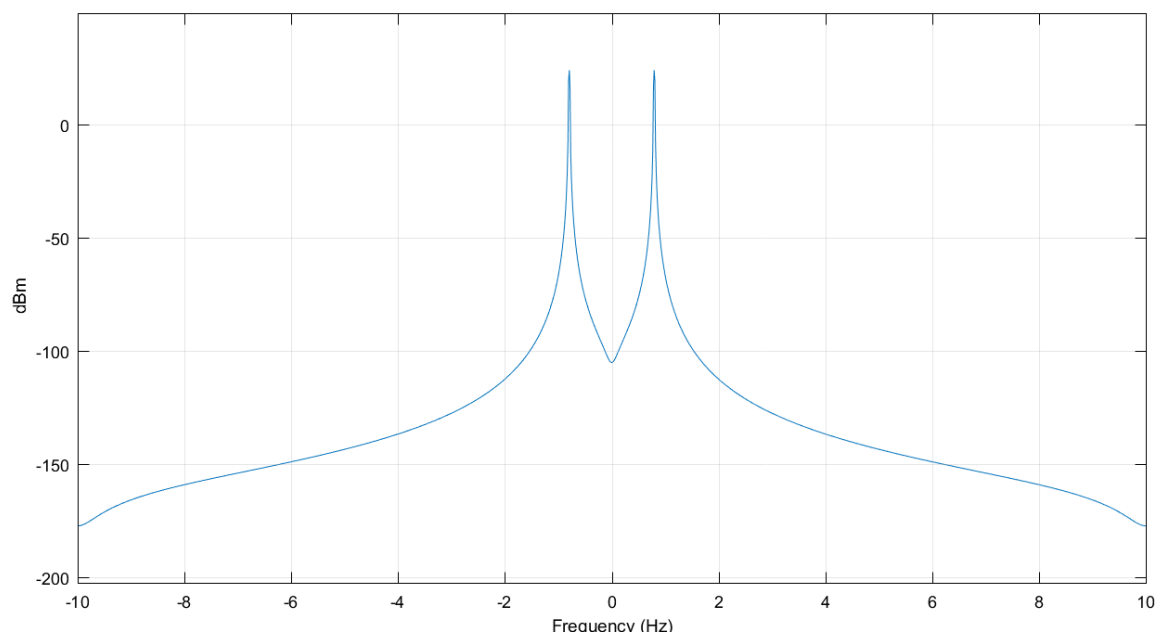
Рисунок 10 Синусоидальный сигнал 1 в Simulink



**Рисунок 11 Спектр синусоидального сигнала 1 в Simulink**



**Рисунок 12 Синусоидальный сигнал 2 в Simulink**



**Рисунок 13** Спектр синусоидального сигнала 2 в Simulink

#### 4.4 Прямоугольный сигнал в Simulink

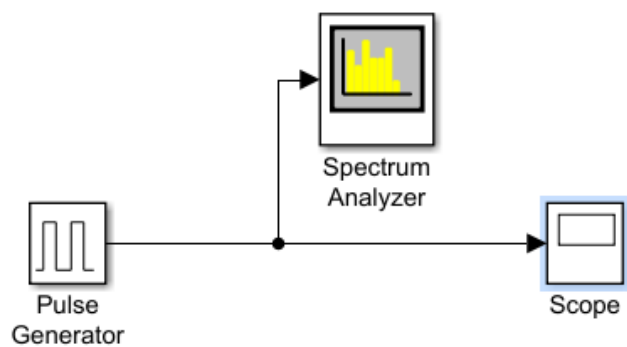


Рисунок 14 Схема для прямоугольного сигнала

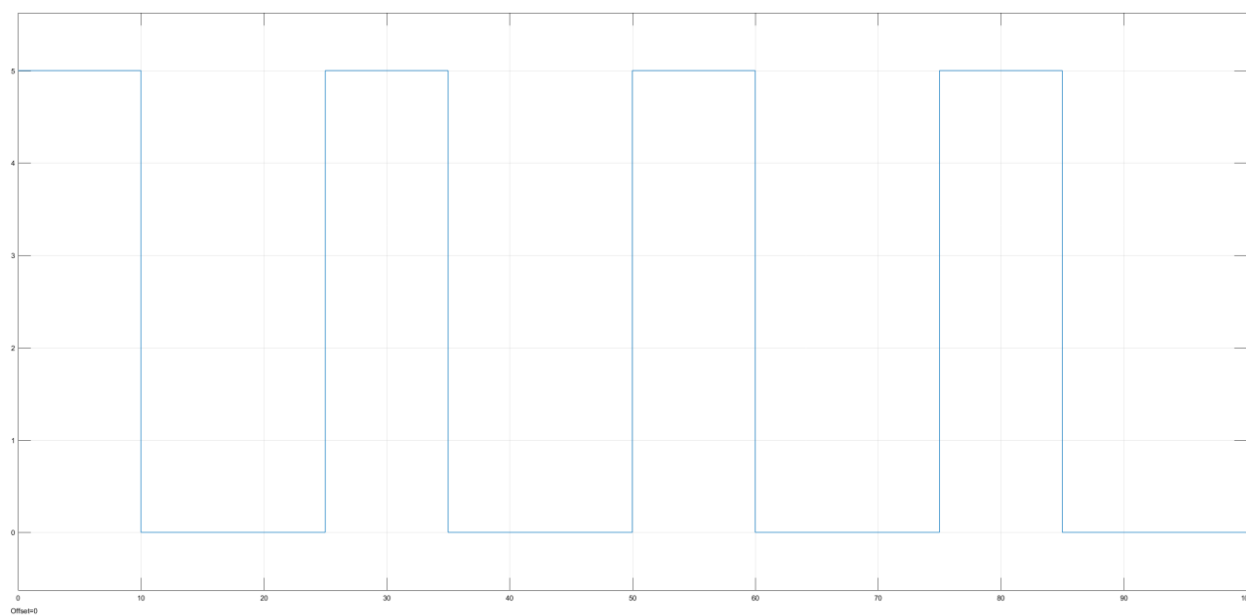
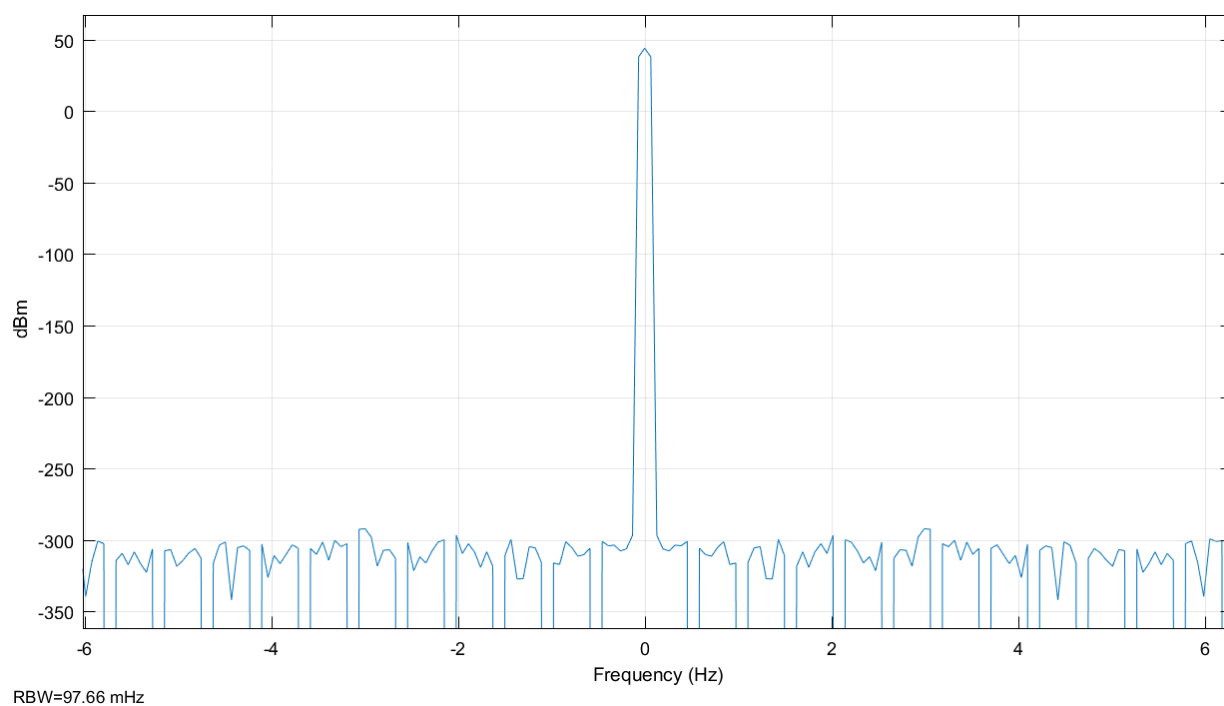
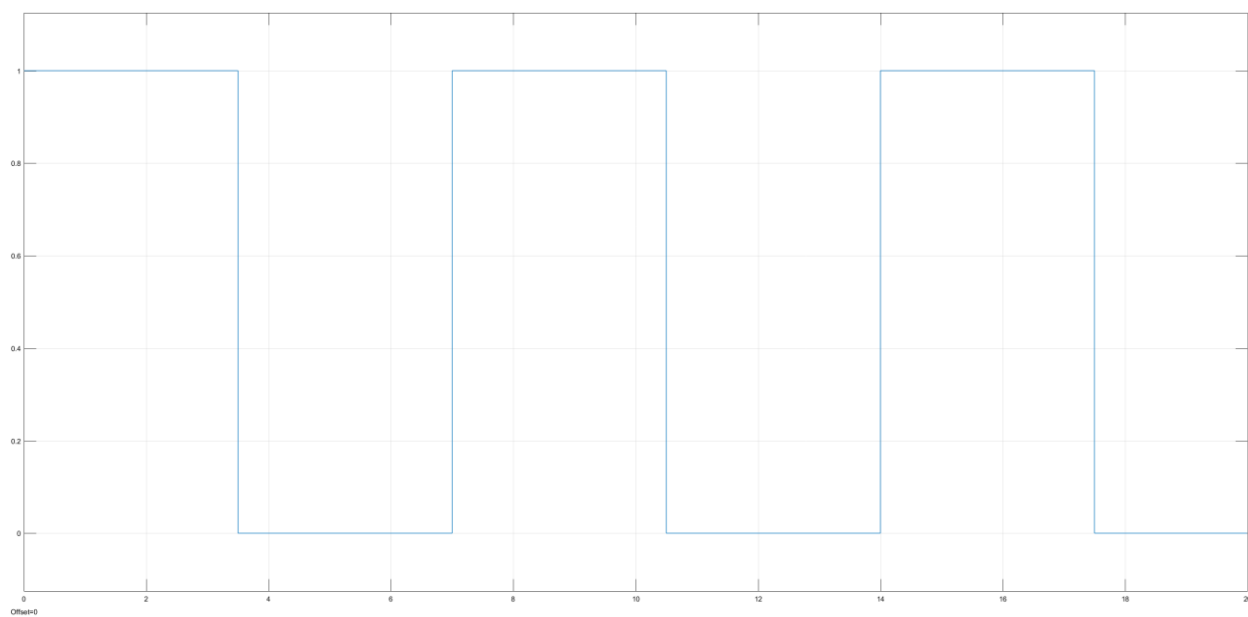


Рисунок 15 Прямоугольный сигнал 1



**Рисунок 16** Спектр прямоугольного сигнала 1



**Рисунок 17** Прямоугольный сигнал 2

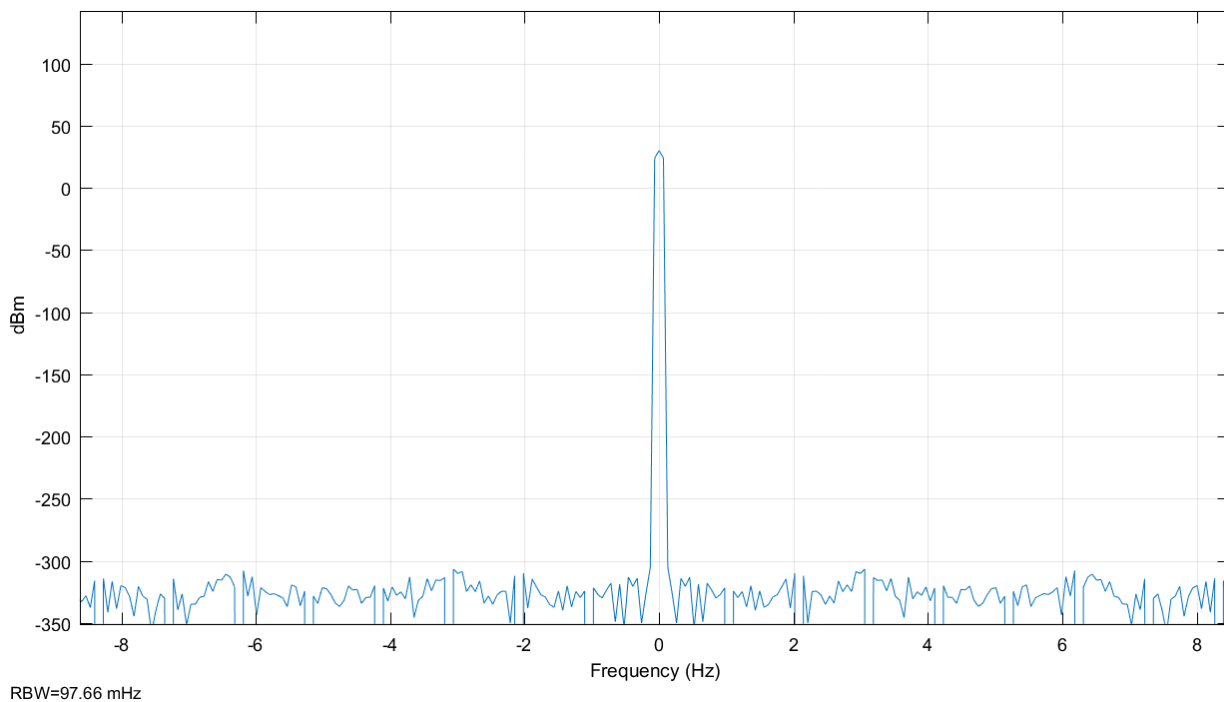


Рисунок 18 Спектр прямоугольного сигнала 2

#### 4.5 Расчет преобразования Фурье

В пунктах 4.1 – 4.4 рассматривались синусоидальные и прямоугольные сигналы. Применим преобразование Фурье для синусоидальной и прямоугольной функций:

```
sin_f = A*sin(2*pi*f*t + ph) + b;
f_ft = fourier(sin_f)

pryam_f = A*rectangularPulse(-T, T, t);
f_ft1 = fourier(pryam_f)
```

где  $A$  – амплитуда,  $f$  – частота,  $ph$  – фаза и  $b$  – смещение.

В результате получим две формулы:

$$f\_ft = 2\pi b \cdot \text{dirac}(w) - A\pi (\text{dirac}(w - 2\pi f) \exp(ph \cdot 1i) - \text{dirac}(w + 2\pi f) \exp(-ph \cdot 1i)) \cdot 1i$$

$$f\_ft1 = A \cdot ((\sin(T \cdot w) + \cos(T \cdot w) \cdot 1i) / w - (\cos(T \cdot w) \cdot 1i - \sin(T \cdot w)) / w)$$

#### 4.6 Корреляция

```
pos = [0 0 0 1 0 1 0 1 1 1 0 0 0 0 1 0];
sp = [1 0 1];

sp_d = zeros(1, length(pos));
sp_d(sp == 1) = 1;
sp_d(sp == 0) = -1;

pos_t = pos;

R = zeros(1, length(pos_t));
```



```

tic % прямой метод
for i = 1:length(pos_t)
    R(i) = sum(pos_t.*circshift(sp_d, i-1, 2))/length(pos_t);
end
toc

tic % быстрый метод
pos_t = fft(pos_t);
sp_d = fft(sp_d);
pos_t = conj(pos_t);
BR=ifft(pos_t.*sp_d)/length(pos_t);
Toc

```

В качестве исходного примера возьмем синхропосылку 101 в сигнале 0001010111000010.

До начала вычисления корреляции изменим синхропосылку с 1 0 1 на 1 -1 1, что обеспечит более точное ее нахождение в посылке, также дополним ее нулями для совпадения длин векторов. Произведем два расчета корреляции – обычным алгоритмом и быстрым с контролем времени на каждую операцию.

Первый алгоритм показал время выполнения - 0.041 мс, а второй – 0.0018.

Можно сделать вывод, что алгоритм быстрой корреляции эффективней обычного. Разница не значительна из-за малой длины посылки.

Стоит отметить, что на таком коротком примере алгоритм быстрой корреляции оказался всего в 2 раза быстрее обычного алгоритма. Его эффективность вырастет во много раз, по сравнению с обычным алгоритмом на больших посылках.

## 5. Вывод

В данной работе мы познакомились со средствами генерации и визуализации простых сигналов в средах Matlab и Simulink. Были выполнены анализы спектров синусоидальных и прямоугольных сигналов.

### 5.1 Признаки классификации сигналов

Основными признаками классификации сигналов являются:

- Характер измерения информативного и временного параметров (аналоговый, дискретный, цифровой).
- Характер изменения во времени (постоянные и переменные).
- По степени наличия априорной информации (детерминированные, квазидетерминированные и случайные).

### 5.2 Примеры применения преобразования Фурье в телекоммуникационных технологиях

Преобразование Фурье применяется при обработке звука и изображений (их сжатие и кодировка, восстановление и улучшение, обработка массивов отсчетов). Также модуляция и демодуляция данных для передачи по каналам связи, фильтрация сигналов.