Линейная алгебра — это раздел алгебры, который изучает объекты линейной природы, векторы и векторные пространства, матрицы и линейные операторы, которые они порождают, и системы линейных уравнений.

Кванторы

- Символ ∀ читается «для любого» и называется **квантором всеобщности**. он заменяет слова «любой», «всякий», «для любого» и т. п.
- Символ ∃ читается как «существует» и называется **квантором существования**, а ∃! читается как «существует единственный» и называется **квантором существования и единственности**. Заменяет слова «существует», «найдётся» и т.п.
- Знак импликации → (или ⇒) воспринимается как замена слов «следует», «влечёт», «вытекает», «имеет место», «выполняется».
- Знак равносильности или эквивалентности ↔ (или ⇔) заменяет словосочетания «тогда и только тогда, когда», «в том и только том случае, когда», «если и только если».
- Двоеточие: в математических формулах читается как «такой, что».
- Вертикальная черта | означает «при условии, что».

Вектор

Вектор — это набор чисел, записанных в определённом порядке (в столбец или в строку).

Вектор, состоящий из координат, записывается следующим образом:

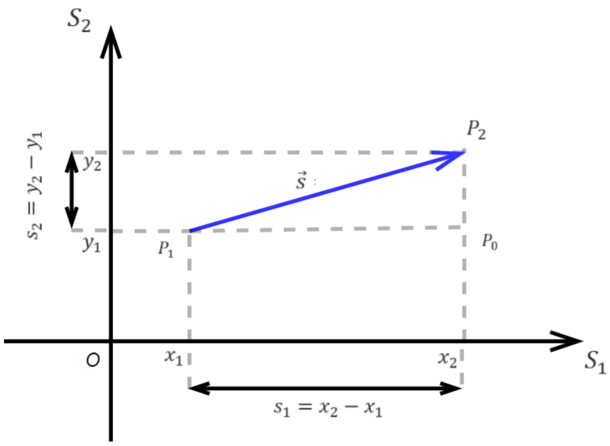
$$\vec{s} = (s_1, s_2, \dots, s_m) \text{ - вектор строка}$$

или

$$\vec{s} = \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ \dots \\ s_m \end{pmatrix} \text{ – вектор столбец}$$

Числа s_1, s_2, …, s_m называются **координатами вектора.** Количество этих координат $dim\left(\vec{s}\right) = m$ называется **размерностью вектора.**

Геометрическая интерпретация вектора



Таким образом, любой вектор $\vec{s}$ размерности 2 можно интерпретировать как направленный отрезок, имеющий конец и начало.

Множество всех возможных векторов s называют **векторным пространством.** *Говорят:* вектор $\vec{s} = (s_1, s_2)$ принадлежит векторному пространству S, запись: $\vec{s} \in S$.

Сложение/вычитание векторов

$$\overrightarrow{v_3} = \overrightarrow{v_1} + \overrightarrow{v_2} = \begin{pmatrix} v_{11} \\ v_{12} \\ \dots \\ v_{1m} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_{21} \\ v_{22} \\ \dots \\ v_{2m} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_{11} + v_{21} \\ v_{12} + v_{22} \\ \dots \\ v_{1m} + v_{2m} \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{v_3} = \overrightarrow{v_2} - \overrightarrow{v_1} = \overrightarrow{v_2} + (-1)\overrightarrow{v_1} = \begin{pmatrix} v_{11} \\ v_{12} \\ \dots \\ v_{1m} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} v_{21} \\ v_{22} \\ \dots \\ v_{2m} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_{11} - v_{21} \\ v_{12} - v_{22} \\ \dots \\ v_{1m} - v_{2m} \end{pmatrix}$$

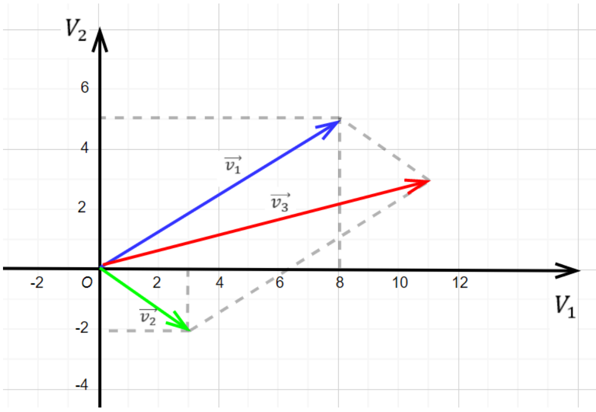
Умножение вектора на скаляр

$$\overrightarrow{v_2} = \omega\overrightarrow{v_1} = \omega\begin{pmatrix} v_{11} \\ v_{12} \\ \dots \\ v_{1m} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega v_{11} \\ \omega v_{12} \\ \dots \\ \omega v_{1m} \end{pmatrix}$$

Геометрическая интерпретация базовых операций с векторами

Сложение/вычитание векторов

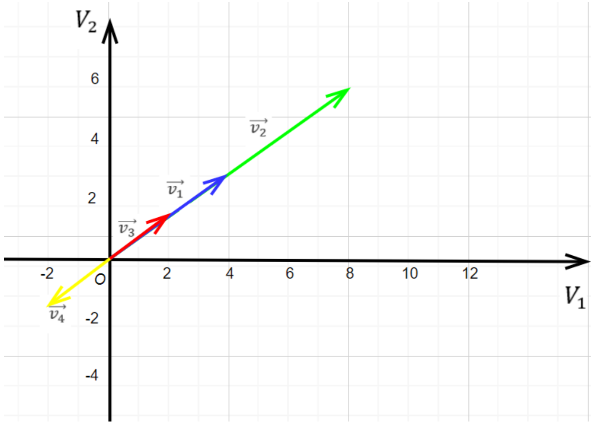
Геометрически сложить два вектора $\vec{v}_1$ и $\vec{v}_2$ — значит вычислить диагональ параллелограмма, построенного на этих векторах. Эта диагональ параллелограмма и будет вектором $\vec{v}_3$.



Умножение вектора на скаляр

Геометрически умножить вектор на скаляр означает изменить его длину в α раз. Если $|\alpha| > 1$, то длина вектора пропорционально увеличивается.

- Если $|\alpha| < 1$, то длина вектора уменьшается.
- Если α — положительное число ($\alpha > 0$), то вектор сохраняет своё направление,
- Если α — отрицательное число ($\alpha < 0$), то вектор меняет своё направление на противоположное.



Линейная комбинация векторов

Линейной комбинацией из n векторов $\vec{v}_1, \vec{v}_2, ..., \vec{v}_n$, каждый из которых принадлежит векторному пространству $\vec{v}_i \in V \subset R^m$ называется новый вектор $u \in V$,

такой что:

$$u = \omega_1 \vec{v_1} + \omega_2 \vec{v_2} + \dots + \omega_n \vec{v_n} = \omega_1 \begin{pmatrix} v_{11} \\ v_{12} \\ \dots \\ v_{1m} \end{pmatrix} + \omega_2 \begin{pmatrix} v_{21} \\ v_{22} \\ \dots \\ v_{2m} \end{pmatrix} + \dots + \omega_n \begin{pmatrix} v_{n1} \\ v_{n2} \\ \dots \\ v_{nm} \end{pmatrix}$$

Линейная комбинация векторов называется **нулевой,** если результат линейной комбинации равен нулевому вектору:

$$\vec{u} = \omega_1 \vec{v}_1 + \omega_2 \vec{v}_2 + \dots + \omega_n \vec{v}_n = (0\ 0\ \dots\ 0) = \vec{0}$$

Нулевая линейная комбинация называется **тривиальной**, если все коэффициенты ω_i равны 0.

$$\vec{u} = \omega_1 \vec{v}_1 + \omega_2 \vec{v}_2 + \dots + \omega_n \vec{v}_n = \vec{0} - \text{тривиальная, если } \forall \omega_i = 0,\ i = 1, 2, \dots, n$$

Нулевая линейная комбинация называется **нетривиальной**, если хотя бы один из коэффициентов отличен от 0.

$$\vec{u} = \omega_1 \vec{v}_1 + \omega_2 \vec{v}_2 + \dots + \omega_n \vec{v}_n = \vec{0} - \text{нетривиальная, если } \exists \omega_i \neq 0,\ i = 1, 2, \dots, n$$

Линейная (не)зависимость

Предположим, что нам удалось составить нетривиальную комбинацию, то есть удалось подобрать такие $\omega_i \neq 0$, что вектор $\vec{u} = \vec{0}$. В таком случае векторы, из которых была составлена линейная комбинация $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n$, называются **линейно зависимыми**.

Тогда хотя бы один из векторов, но не обязательно любой, в линейной комбинации можно выразить через другие векторы, представив его как линейную комбинацию.

Также возможен вариант, что, как мы ни старались, нам не удалось подобрать такие коэффициенты $\omega_i \neq 0$, чтобы составить нулевую нетривиальную линейную комбинацию. Такие векторы называются **линейно независимыми.**

В таком случае ни один из векторов не выражается через другие векторы.

Скалярное произведение векторов

Пусть заданы два вектора $\vec{v}_1$ и $\vec{v}_2$ из одного векторного пространства $V \subset R^m$:

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} v_{11} & v_{12} & \ldots & v_{1m} \end{pmatrix} \text{ и } \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} v_{21} & v_{22} & \ldots & v_{2m} \end{pmatrix}$$

Тогда **скалярным произведением** двух векторов $\vec{v}_1$ и $\vec{v}_2$ называется число, равное сумме произведений координат векторов. Скалярное произведение обозначается как $(\vec{v}_1, \vec{v}_2)$ или символом точки: $\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2$.

$$\left(\vec{v}_1, \vec{v}_2\right) = \vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = v_{11}v_{21} + v_{12}v_{22} + \ldots v_{1m}v_{2m} = \sum_{i=1}^{m} v_{1i}v_{2i}$$

В *Python* скалярное произведение векторов вычисляется при помощи функции `np.dot()`.

```
a = np.array([65, 70, 120, 30])
w = np.array([0.4, 0.4, 0.2, 0.8])
```

```
np.dot(a, w)
## 102.0
```

Длина вектора через скалярное произведение

$$\left|\vec{v}\right| = \sqrt{\left(\vec{v}, \vec{v}\right)} = \sqrt{\vec{v} \cdot \vec{v}} = \sqrt{v_1 v_1 + v_2 v_2 + \ldots + v_m v_m}$$

Свойства скалярного произведения:

- Линейность

$$\left(\vec{a} + \vec{b}, \vec{c} + \vec{d}\right) = \left(\vec{a}, \vec{c}\right) + \left(\vec{a}, \vec{d}\right) + \left(\vec{b}, \vec{c}\right) + \left(\vec{b}, \vec{d}\right)$$

- Скалярное произведение двух векторов $\vec{v}_1$ и $\vec{v}_2$ равно произведению длин этих векторов $\left|\vec{v}_1\right|$ и $\left|\vec{v}_2\right|$ на косинус угла между ними $cos(\vec{v}_1, \vec{v}_2)$:

$$\left(\vec{v}_1, \vec{v}_2\right) = \left|\vec{v}_1\right| \left|\vec{v}_2\right| cos\left(\vec{v}_1 \hat{,} \vec{v}_2\right)$$

Откуда:

$$cos\left(\vec{v}_1 \hat{,} \vec{v}_2\right) = \frac{\left(\vec{v}_1, \vec{v}_2\right)}{\left|\vec{v}_1\right| \left|\vec{v}_2\right|}$$

- Если скалярное произведение двух векторов $\vec{v}_1$ и $\vec{v}_2$ $(\vec{v}_1, \vec{v}_2)$ равно 0, то векторы ортогональны (находятся под углом $90°$). И наоборот: если векторы ортогональны друг другу, то их скалярное произведение $(\vec{v}_1, \vec{v}_2)$ равно 0:

$$\left(\vec{v}_1, \vec{v}_2\right) = 0 \Leftrightarrow \vec{v}_1 \perp \vec{v}_2$$

Матрицы

> **Матрица** — это структура, представляющая собой таблицу, состоящую из чисел, расположенных по строкам и столбцам.

В линейной алгебре матрицы обозначаются з**аглавными латинскими буквами.** Элементы матрицы обозначаются **прописными латинскими буквами** и нумеруются в формате `{номер_строки}, {номер_столбца}`.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

Математики не любят такую громоздкую запись, поэтому, чтобы обозначить, что матрица состоит из чисел a_{ij}, нередко пишут следующим образом:
$A = \left(a_{ij}\right)\ a_{ij} \in R,\ i = 1, 2, \dots, n\ j = 1, 2, \dots, m$.

Классификация матриц

По форме:

→ **Прямоугольные матрицы** — матрицы, у которых количество строк n не совпадает с количеством столбцов m, т. е. $n \neq m$.

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -5 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & -5 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 12 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 9 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 3 & 0 & \sqrt{5} & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 0.4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

«высокие» «длинные»

→ **Квадратные матрицы** — матрицы, у которых количество строк n совпадает с количеством столбцов m, т. е. $n = m$.

Порядком квадратной матрицы называется количество строк (и столбцов соответственно) в ней.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 4 & 1 & 1 \\ -5 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

порядок 2 порядок 3

→ **Вектор-столбец** — матрица размером $(n,\ 1)$:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

размер 4×1

→ **Вектор-строка** — матрица размером $(1,\ m)$:

$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ размер 1×4

По содержанию:

➔ **Нулевая матрица** — матрица, у которой все элементы являются нулём. Формально записывается как $A = \left(a\right)_{ij}, \forall a_{ij} = 0$:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

квадратная прямоугольная

➔ **Матрица-единица** или **матрица единиц** — матрица, у которой все элементы являются единицей. Формальная запись: $A = \left(a_{ij}\right), \forall a_{ij} = 1$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

квадратная прямоугольная

Примечание. Виды матриц, о которых пойдёт речь далее, бывают только квадратными.

➔ **Треугольная матрица** — квадратная матрица, у которой элементы выше или ниже главной диагонали равны 0.

Формальная запись:

- Нижнетреугольная матрица:
  $A = \left(a_{ij}\right) = \{a_{ij} \neq 0,\ \text{при}\ i \geq j\ a_{ij} = 0,\ \text{при}\ i < j$
- Верхнетреугольная матрица:
  $A = \left(a_{ij}\right) = \{a_{ij} = 0,\ \text{при}\ i \geq j\ a_{ij} \neq 0,\ \text{при}\ i < j:$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 5 & 0 \\ 5 & 2 & 8 & -3 \end{pmatrix}$$

Верхнетреуольная Нижнетреуольная

➔ **Симметричная матрица** — квадратная матрица, у которой элементы равны друг другу относительно главной диагонали. Формально записывается как:

$$S = \left(s_{ij}\right),\ s_{ij} = s_{ji}\ \forall i, j$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ -1 & 3 & 15 \\ 4 & 15 & 4 \end{pmatrix} \qquad s_{ij} = s_{ji}\ \forall i, j$$

➔ **Диагональная матрица** — симметричная матрица, у которой вне главной диагонали стоят нули. Формальная запись:

$$S = \left(s_{ij}\right) = \begin{cases} s_{ij} = s_{ji} = 0, & \text{при } i \neq j \\ s_{ij} \neq 0, & \text{при } i = j \end{cases}$$

У диагональной матрицы есть ещё одно обозначение:

$$S = diag(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n),$$

где α_i — элементы, стоящие на главной диагонали.

$$\begin{pmatrix} -9 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 11 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}$$

➔ **Скалярная** или **шаровая матрица** — диагональная матрица, у которой по диагонали стоит одно и тоже число α. Формальная запись:

$$S = \left(s_{ij}\right) = \begin{cases} s_{ij} = 0, & \text{при } i \neq j \\ s_{ij} = \alpha, & \text{при } i = j \end{cases}$$

Другая запись:

$$S = diag(\alpha)$$

$$\begin{pmatrix} 14 & 0 & 0 \\ 0 & 14 & 0 \\ 0 & 0 & 14 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}$$

➔ **Единичная матрица** (***не путать с матрицей единиц!***) — скалярная матрица, у которой $\alpha = 1$. Единичная матрица является настолько важной в линейной алгебре, что даже имеет собственное специальное обозначение — латинская буква E.

$$E = \left(e_{ij}\right) = \begin{cases} e_{ij} = 0, & \text{при } i \neq j \\ e_{ij} = 1, & \text{при } i = j \end{cases}$$

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Базовые действия над матрицами

Сложение матриц

Пусть заданы две матрицы $A = (a_{ij})$ и $B = (b_{ij})$, каждая из которых имеет размер $dim\,(A) = dim\,(B) = (n,\ m)$. **Суммой** матриц A и B называется матрица $C = (c_{ij})$ размером $dim\,(C) = (n,\ m)$, такая что $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ или:

$$C = A + B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1m} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nm} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \dots & a_{1m} + b_{1m} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \dots & a_{2m} + b_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} + b_{n1} & a_{n2} + b_{n2} & \dots & a_{nm} + b_{nm} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1m} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{n1} & c_{n2} & \dots & c_{nm} \end{pmatrix}$$

Умножение матрицы на скаляр

Пусть задана матрица $A = (a_{ij})$ размером $dim\,(A) = (n,\ m)$ и число $\omega \in R$.

Произведением матрицы A и число α называется матрица $B = (b_{ij})$ размером $dim\,(B) = (n,\ m)$, такая что $b_{ij} = \omega \cdot a_{ij}$ или:

$$B = \omega \cdot A = \omega \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega \cdot a_{11} & \omega \cdot a_{12} & \dots & \omega \cdot a_{1m} \\ \omega \cdot a_{21} & \omega \cdot a_{22} & \dots & \omega \cdot a_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \omega \cdot a_{n1} & \omega \cdot a_{n2} & \dots & \omega \cdot a_{nm} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1m} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nm} \end{pmatrix}$$

Транспонирование матриц

Пусть задана матрица $A = (a_{ij})$ размером $dim\,(A) = (n,\ m)$. **Транспонированной** матрицей A^T называется матрица $A^T = (a^T_{ij})$ размером $dim\,(A) = (m,\ n)$, такая, что $a_{ij} = a^T_{ji}$ или:

$$A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{22} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{13} & \dots & a_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1m} & a_{2m} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

Матричное умножение

Пусть заданы две матрицы $A = (a_{ij})$ и $B = (b_j)$, причём их размерности $dim\,(A) = (n, m)$ и $dim\,(B) = (m, l)$. **Произведением** матриц A и B называется матрица $C = (c_{ij})$ размером $dim\,(C) = (n,\ l)$, элемент которой, находящийся на пересечении *i*-й строки и *j*-го столбца, равен сумме произведений элементов *i*-й строки матрицы *A* на соответствующие (по порядку) элементы *j*-го столбца матрицы *B*, т. е.

$$C = A \cdot B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1l} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2l} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{ml} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + \dots + a_{1m}b_{m1} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + \dots + a_{1m}b_{m2} & \dots & a_{11}b_{1m} + a_{12}b_{2m} + \dots + a_{1m}b_{ml} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + \dots + a_{2m}b_{m1} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + \dots + a_{2m}b_{m2} & \dots & a_{21}b_{1m} + a_{22}b_{2m} + \dots + a_{2m}b_{ml} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}b_{11} + a_{n2}b_{21} + \dots + a_{nm}b_{m1} & a_{n1}b_{12} + a_{n2}b_{22} + \dots + a_{nm}b_{m2} & \dots & a_{n1}b_{1m} + a_{n2}b_{2m} + \dots + a_{nm}b_{ml} \end{pmatrix}$$

Важно: умножить матрицу А на матрицу В можно только в том случае, если количество столбцов в матрице А совпадает с количеством строк в матрице В!

$$A_{n\times m} \cdot B_{m\times l} = C_{n\times l}$$

Матричное умножение **не перестановочно (не коммутативно)**! То есть перемена сомножителей местами может привести к различным результатам и даже размерностям.

$$A \cdot B \neq B \cdot A$$

Тензорное произведение векторов

Тензорное произведение — это результат матричного умножения вектора-столбца на вектор-строку. Результатом тензорного произведения является матрица.

$$\vec{v} \otimes \vec{u} = \vec{v} \cdot \vec{u}^T$$

Умножение на специальные матрицы

1. Умножение на нулевую и единичную:

$$A \cdot Null = Null \cdot A = Null$$

$$A \cdot E = E \cdot A = A$$

2. Умножение на шаровую матрицу:

$$A \cdot diag(\alpha, \ ..., \alpha) = diag(\alpha, \ ..., \alpha) \bullet A = \alpha A$$

3. Умножение на диагональную матрицу:

$$A \cdot diag\left(\alpha_1, \ ..., \alpha_n\right) \neq diag\left(\alpha_1, \ ..., \alpha_n\right) \bullet A$$

$$diag\left(\alpha_1, \ ..., \alpha_n\right) \cdot diag\left(\beta_1, \ ..., \beta_n\right) = diag\left(\beta_1, \ ..., \beta_n\right) \cdot diag\left(\alpha_1, \ ..., \alpha_n\right) == diag\left(\alpha_1 \beta_1, \ ..., \alpha_n \beta_n\right)$$

Важные выводы:

- ➔ Нулевая и единичная матрицы играют роль нуля и единицы в матричном умножении.
- ➔ Умножение на шаровую матрицу — то же самое, что и умножение на скаляр.
- ➔ Умножение на диагональную матрицу даёт растяжение каждого столбца или строки.
- ➔ Диагональные матрицы коммутативны между собой.

Умножение и транспонирование

При транспонировании меняется порядок произведения матриц:

$$(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$$
$$(A \cdot B \cdot C)^T = (B \cdot C)^T \cdot A^T = C^T \cdot B^T \cdot A^T$$

Матрица Грама

Матрицей Грама системы векторов называется матрица, составленная из их скалярных произведений исходной матрицы. То есть:

$$G_1 = X^T \cdot X \text{ или } G_2 = X \cdot X^T$$

Свойство матрицы Грама G_1 и G_2 в том, что они всегда будут симметричны, независимо от порядка умножения.

Обратная матрица

Обратной к матрице A порядка n называется такая матрица A^{-1} порядка n, которая в произведении с матрицей A даёт единичную матрицу. Формализуем это выражение:

$$A^{-1}, - \text{ такая матрица, что } A \cdot A^{-1} = E,\ dim\left(A^{-1}\right) = dim\,(A) = (n,\ n)$$

Для случая матрицы 2x2 обратная матрица считается как:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}$$

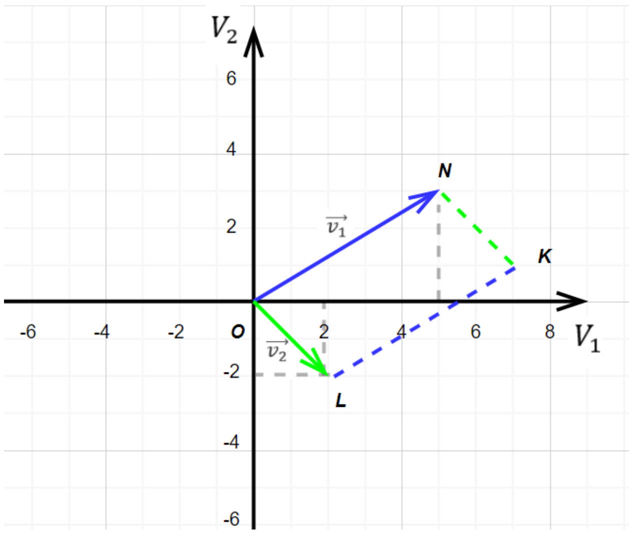
В Python обратная матрица считается с помощью функции `np.linalg.inv()`.

Определитель матрицы

Определитель матрицы — это число, специальная числовая характеристика квадратных матриц, которая является своего рода мерой вырожденности

матрицы: чем ближе определитель к нулю, тем хуже работают стандартные численные алгоритмы для вычисления обратных матриц.
Обозначение: $det(A)$ или $|A|$.

У определителя также имеется и геометрический смысл.
Модуль определителя равен объёму n-мерного параллелепипеда, натянутого на столбцы матрицы.



В простейшем случае матрицы 2x2 определитель считается следующим образом:

$$det(A) = det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

В Python определитель считается функцией `np.linalg.det()`.

Свойства определителя:

- Определитель единичной матрицы равен единице:

$$det\,(E) = 1$$

- Для диагональной определитель равен произведению диагональных элементов:

$$det\left(diag(\alpha_1,\ \alpha_2,\ ...,\alpha_n)\right) = \alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot ... \cdot \alpha_n$$

- При умножении матрицы на константу $\beta \in R$ определитель увеличивается в β^n раз, где n — порядок матрицы:

$$det\,(\beta A) = \beta^n det(A)$$

- При транспонировании определитель матрицы не изменяется:

$$det\,(A) = det(A^T)$$

- Определитель произведения матриц A и B равен произведению определителей этих матриц и не зависит от порядка умножения:

$$det\,(A \cdot B) = det(B \cdot A) = det(A) \cdot det(B)$$

- Определитель обратной матрицы равен $\frac{1}{det(A)}$ в случае, если определитель матрицы А не равен нулю:

$$det\left(A^{-1}\right) = \frac{1}{det\,(A)},\ det\,(A) \neq 0$$

Вырожденность матриц

Матрица A называется ***вырожденной***, если её определитель равен 0:

$$A - \text{вырожденная, если } det(A) = 0$$

Для вырожденных матриц не существует обратных матриц, так в противном случае пришлось бы делить на 0 при подсчёте. Строки и столбцы такой матрицы являются линейно зависимыми и выражаются друг через друга.

Системы линейных алгебраических уравнений

Совокупность уравнений первой степени, в которых каждая переменная и коэффициенты в ней являются вещественными числами, называется **системой линейных алгебраических уравнений (СЛАУ)** и в общем случае записывается как:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1m}x_m = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2m}x_m = b_2 \\ \dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nm}x_m = b_n \end{cases} \quad (1)$$

где n — количество уравнений,
m — количество переменных,
x_i — неизвестные переменные системы,
a_{ij} — коэффициенты системы,

b_i — свободные члены системы.

СЛАУ (1) называется **однородной**, если все свободные члены системы равны 0 $b_1 = b_2 = \ldots = b_n = 0$:

$$\text{СЛАУ} - \text{однородная, если } \forall b_i = 0$$

СЛАУ (1) называется **неоднородной**, если хотя бы один из свободных членов системы отличен от 0:

$$\text{СЛАУ} - \text{однородная, если } \exists b_i \neq 0$$

Решением СЛАУ (1) называется такой набор значений неизвестных переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$, при котором каждое уравнение системы превращается в равенство.

СЛАУ (1) называется **определённой**, если она имеет только одно решение, и **неопределённой**, если имеет более одного решения.

Матричная запись СЛАУ

$$A\vec{x} = \vec{b}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2m} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_n \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2m} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nm} \end{pmatrix}$$ – матрица системы

$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \ldots & x_m \end{pmatrix}$ — вектор неизвестных переменных

$\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & \ldots & b_n \end{pmatrix}$ — вектор свободных членов

Линейная зависимость системы векторов

Набор векторов называется **линейно зависимым**, если нам удалось создать нетривиальную нулевую линейную комбинацию, т. е. взять такую взвешенную сумму векторов $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_m$ с коэффициентами $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_m$, что в итоге получился нулевой вектор и при этом не все коэффициенты ω равны нулю:

То есть $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_m$ — линейно зависимы, если $\exists\ \omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_m$:

$$\omega_1\vec{v}_1 + \omega_2\vec{v}_2 + \ldots + \omega_m\vec{v}_m = \vec{0}$$

Алгоритм определения линейной (не)зависимости с помощью СЛАУ:

1. Для начала необходимо составить условие линейной зависимости векторов:
$$\omega_1\vec{v}_1 + \omega_2\vec{v}_2 + \ldots + \omega_m\vec{v}_m = \vec{0}$$
2. Затем преобразовать полученную СЛАУ к матричному виду, $A\vec{\omega} = \vec{0}$, привести её к ступенчатому виду и решить.
3. Если у системы имеется ненулевое решение, есть хотя бы один из коэффициентов $\omega_i \neq 0$, то векторы являются линейно зависимыми
4. В противном случае векторы линейно независимы.

Ранг матрицы. Базис

Ранг матрицы — это количество линейно независимых столбцов.
Обозначение: rk или $rank$

Ранг системы векторов — размерность этой системы.
Неформально ранг — это количество ненулевых строк в ступенчатой матрице.

Примеры:

$$rk\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix} = 2$$

$$rk\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix} = 3$$

Чтобы провести исследование системы векторов $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n$, каждый вектор размерности $\dim dim\left(\vec{v}\right) = n$ на линейную зависимость при помощи ранга, нам достаточно записать их в виде матрицы

$$\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n \to A$$

и найти её ранг $rk(A)$. Он будет равен максимальному количеству линейно независимых векторов в системе.

> Если ранг равен количеству векторов в системе $rk(A) = n$, то система векторов является линейно зависимой. Если же ранг меньше, чем количество векторов в системе $rk(A) < n$, можно смело говорить, что система векторов является линейно зависимой.

В Python ранг матрицы вычисляется с помощью функции `np.linalg.matrix_rank()`.

Знание ранга даёт нам только количество линейно независимых векторов, но не говорит, какие именно векторы выражаются или не выражаются друг через друга. Для ответа на этот вопрос необходимо найти базис системы.

> **Базис** — это такая часть системы векторов $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_k$, через которую можно выразить все остальные векторы $k \le n$.

Базис — максимальная линейно независимая подсистема векторов $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n$.

Свойства ранга матрицы:

Пусть задана прямоугольная матрица A размерностью $dim\ (A) = (n,\ m)$.

- Ранг матрицы не может быть больше, чем количество её строк или столбцов:

$$rk(A) \leq min(n,\ m)$$

- Если же ранг равен одному из этих показателей, то такая матрица называется **матрицей максимального (или полного) ранга**.

$$rk(A) = min(n,\ m)$$

Пусть задана квадратная матрица A размерностью $dim\ (A) = (n,\ n)$.

Любая квадратная матрица не максимального ранга вырождена (у неё нет обратной A^{-1}), и чем меньше ранг, тем меньше линейно независимых столбцов и строк в матрице:

$$rk(A) < n$$