Волумен на вртливо (ротационо) тело - задачи

Friday, April 3, 2020 08:00

Задача 7. од Материјали (Гл. 3, стр. 178) - корегирана

Да се пресмета волуменот на телото добиено со ротација околу $y-$оска на рамнинската фигура ограничена со

а) параболата $y^2=2x$ и правите $x=0$, $y=-2$ и $y=2$,

б) параболата $y^2=\dfrac{x}{2}$ и правата $x=8$,

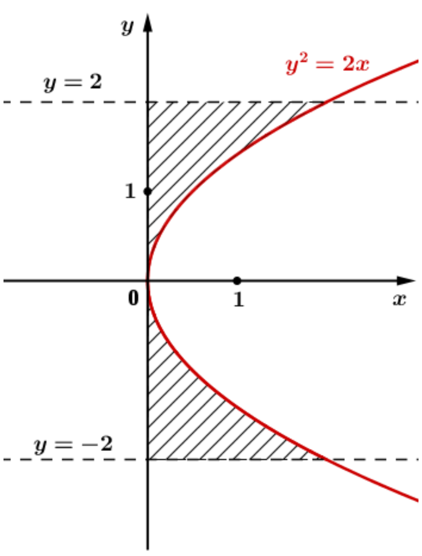
в) елипсата $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ (да се спореди со задача 6, ѓ),

г) кривата $x=\sqrt{y}$, $y-$оска и $x+y=2$,

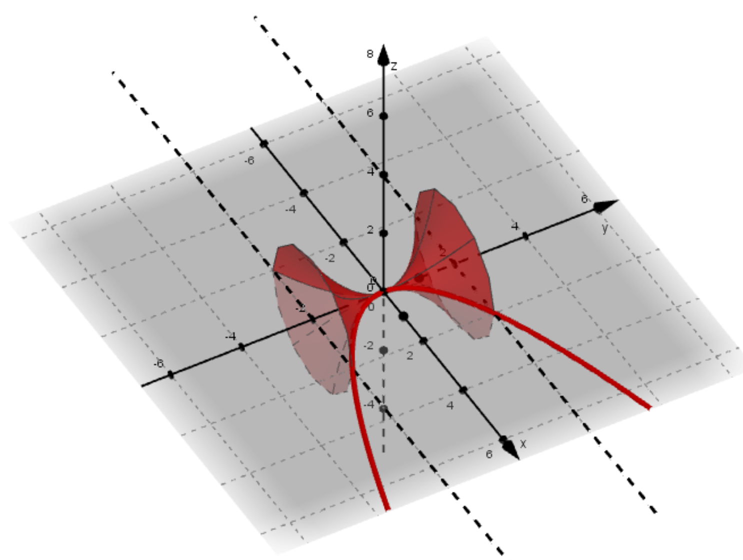
д) кривата $y=\ln x$ и правите $x=0$, $y=-1$ и $y=1$.

Решение:

а) Рамнинската фигура ограничена со параболата $y^2=2x$ и правите $x=0$, $y=-2$ и $y=2$ е дадена на сл. 7.а.1, телото добиено со ротација на оваа фигура околу $y-$оска е дадено на сл. 7.а.2.



сл. 7.а.1



сл. 7.а.2

Деловите од фигурата што се над и под $x-$оската се симетрични еден на друг. Од тука следи дека бараниот волумен ќе биде

$$V = 2V_1,$$

каде V_1 е волуменот на телото што се добива со ротација околу $y-$оска на делот од рамнинската фигура над $x-$оската, односно рамнинската фигура ограничена со

- параболата $y^2 = 2x \quad \Rightarrow \quad \boxed{x = \frac{y^2}{2}}$,
- правата $x = 0$ (т.е. $y-$оска),
- $y = 0$ (долна граница на интеграција), и
- $y = 2$ (горна граница на интеграција),

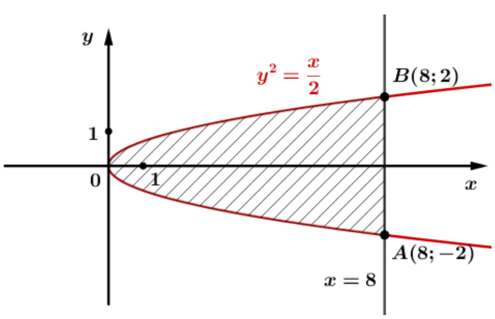
т.е.

$$V_1 = \pi\int_0^2 x^2 dy = \pi\int_0^2 \left(\frac{y^2}{2}\right)^2 dy = \pi\int_0^2 \frac{y^4}{4} dy = \frac{\pi}{4}\int_0^2 y^4 dy$$

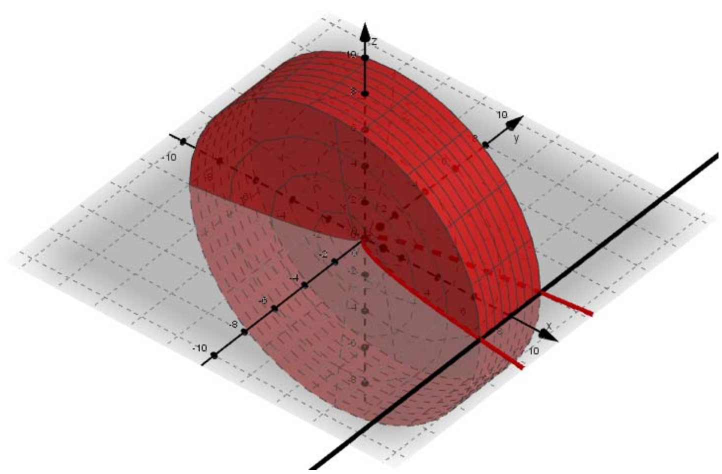
$$= \frac{\pi}{4}\cdot\frac{y^5}{5}\Bigg|_{y=0}^{y=2} = \frac{\pi}{20}\cdot(2^5 - 0^5) = \frac{\pi}{20}\cdot 32 = \frac{8\pi}{5}$$

$$\Rightarrow \quad V = 2V_1 = 2\cdot\frac{8\pi}{5} = \boxed{\frac{16\pi}{5}} \text{ куб.ед.}$$

б) Рамнинската фигура ограничена со параболата $y^2 = \frac{x}{2}$ и правата $x = 8$ е дадена на сл. 7.б.1, а телото добиено со ротација на оваа фигура околу $y-$оска е дадено на сл. 7.б.2.



сл. 7.б.1



сл. 7.б.2

Пресечните точки на параболата $y^2 = \dfrac{x}{2}$ и правата $x = 8$ се добиваат од равенството

$$y^2 = \frac{8}{2} = 4 \quad \Rightarrow \quad y = \pm\sqrt{4} = \pm 2,$$

т.е. пресечните точки се $A(8;-2)$ и $B(8;2)$. Вторите координати се воедно граници на интеграција.

Поради положбата на рамнинската фигура во однос на $y-$оска, бараниот волумен ќе биде еднаков на

$$V = V_1 - V_2,$$

каде

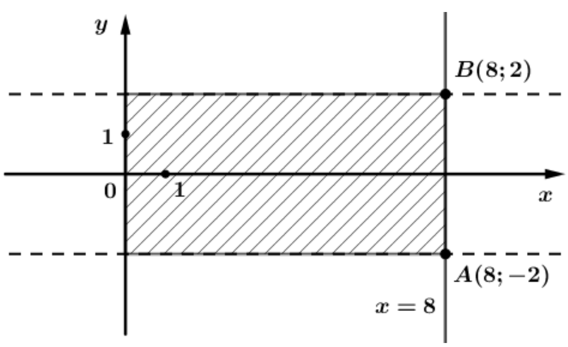
- V_1 е волуменот на телото што се добива со ротација околу $y-$оска на правоаголникот ограничен со правите $x = 0$ (т.е. $y-$оска), $x = 8$, $y = -2$ и $y = 2$ (сл. 7.б.3), или попрецизно, ако ставиме $x_1 = x_1(y) = 8$

$$V_1 = \pi \int_{-2}^{2} (x_1)^2 dy = \pi \int_{-2}^{2} 8^2 dy = 64\pi \, y \Big|_{y=-2}^{y=2} = 64\pi(2-(-2)) = 256\pi,$$

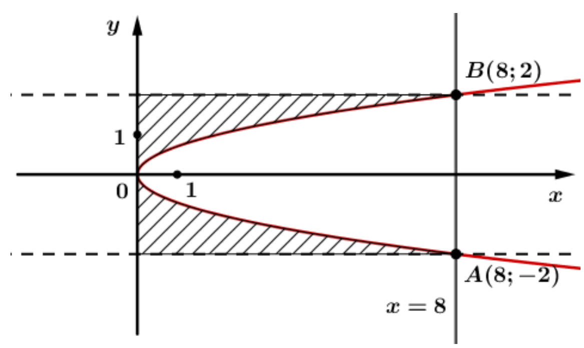
- V_2 е волуменот на телото што се добива со ротација околу $y-$оска на рамнинската фигура ограничена од лево со правата $x = 0$, (т.е. $y-$оска), од десно со параболата $y^2 = x/2$, од долу со правата $y = -2$, од горе со правата $y = 2$ (сл. 7.б.4), или попрецизно, ако ставиме

$$y^2 = \frac{x}{2} \quad \Rightarrow \quad x = \boxed{2y^2 = x_2(y)},$$

тогаш



сл. 7.б.3



сл.7.б.4

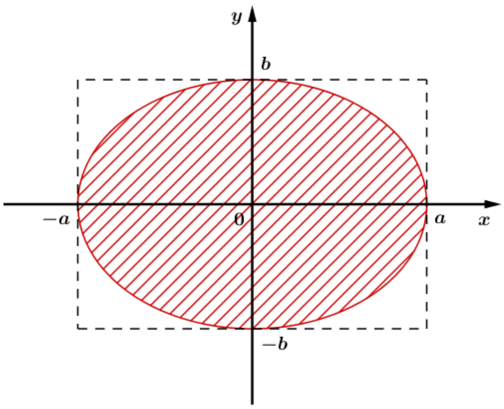
$$V_2 = \pi \int_{-2}^{2} (x_2)^2 dy = \pi \int_{-2}^{2} (2y^2)^2 dy = \frac{4\pi}{5} \cdot y^5 \Big|_{y=-2}^{y=2} = \frac{4\pi}{5} \cdot (2^5 - (-2)^5)$$

$$= \frac{4\pi}{5} \cdot (32 - (-32)) = \frac{256\pi}{5}.$$

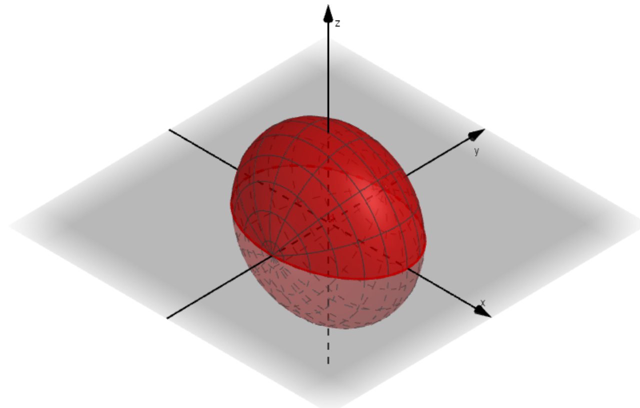
Од предходното следи дека бараниот волумен е

$$V=V_1-V_2=256\pi-\frac{256\pi}{5}=256\pi\left(1-\frac{1}{5}\right)=256\pi\cdot\frac{4}{5}=\boxed{\frac{1024\pi}{5}}\text{ куб. ед.}$$

в) Рамнинската фигура ограничена со елипсата $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ е дадена на сл. 7.в.1, а телото добиено со ротација на оваа фигура околу $y-$оска е дадено на сл. 7.в.2.



сл. 7.в.1



сл.7.в.2

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \quad\Rightarrow\quad \frac{x^2}{a^2}=1-\frac{y^2}{b^2} \quad\Rightarrow\quad x^2=a^2\left(1-\frac{y^2}{b^2}\right).$$

Од тука следи дека бараниот волумен е

$$V=\pi\int_{-b}^{b}x^2dy=\pi\int_{-b}^{b}a^2\left(1-\frac{y^2}{b^2}\right)dy=a^2\pi\int_{-b}^{b}\left(1-\frac{y^2}{b^2}\right)dy=a^2\pi\left(y-\frac{y^3}{3b^2}\right)\Bigg|_{y=-b}^{y=b}$$

$$=a^2\pi\left[\left(b-\frac{b^{\cancel{3}}}{3\cancel{b^2}}\right)-\left(-b-\frac{(-b)^3}{3b^2}\right)\right]=a^2\pi\left[\left(b-\frac{b}{3}\right)-\left(-b+\frac{b^{\cancel{3}}}{3\cancel{b^2}}\right)\right]$$

$$=a^2\pi\left[\left(b-\frac{b}{3}\right)-\left(-b+\frac{b}{3}\right)\right]=\boxed{\frac{4}{3}a^2b\,\pi}\text{ куб. ед.}$$

г) Рамнинската фигура ограничена со кривата $x=\sqrt{y}$, $y-$оска и $x+y=2$ е дадена на сл. 7.г.1, а телото добиено со ротација на оваа фигура околу $y-$оска е дадено на сл. 7.г.2. Прво треба алгебарски да се определи пресечната точка на кривата $x=\sqrt{y}$ и правата $x+y=2$. Бидејќи ротацијата е $y-$оска и, последователно, интеграцијата е по променливата y, имаме

$$\begin{cases} x=\sqrt{y} \\ x+y=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\sqrt{y} \\ x=2-y \end{cases} \Rightarrow \sqrt{y}=2-y \quad /(\cdot)^2$$

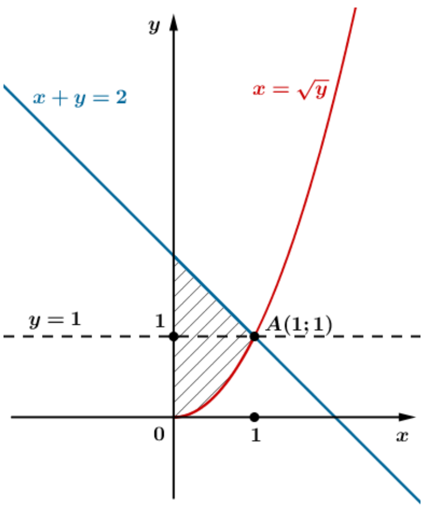
$$\Rightarrow \quad y=(2-y)^2=4-4y+y^2$$

$$\Rightarrow \quad y^2-5y+4=0$$

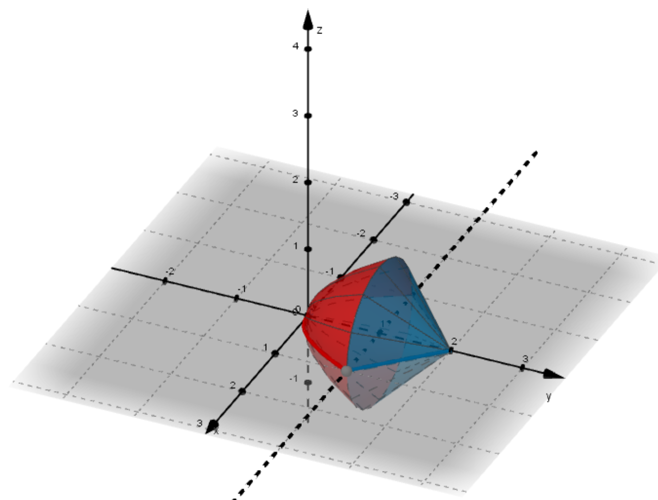
$$\Rightarrow \quad y_{1,2}=\frac{5\pm\sqrt{5^2-4\cdot1\cdot4}}{2\cdot1}=\frac{5\pm\sqrt{9}}{2}=\frac{5\pm3}{2}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{y_1=1} \;\; \text{и} \;\; y_2=4$$

$B(-2;4)$ (***не*** припаѓа на график на $x=\sqrt{y}$), што значи дека бараната т.е. пресечна точка е $A(1;1)$ (првата координата се добива со замена на $y=1$ во $x+y=2$).



сл. 7.г.1



сл.7.г.2

Бараниот волумен е еднаков на $\boxed{V=V_1+V_2}$, каде

- V_1 е волуменот на телото што се добива со ротација околу $y-$оска на триаголникот ограничен со $y-$оската и правите $y=1$ и $x+y=2$ или ако ставиме $x+y=2 \;\Rightarrow\; x=\boxed{2-y=x_1(y)}$,

$$V_1=\pi\int_1^2 (x_1)^2dy=\pi\int_1^2(2-y)^2dy=\pi\int_1^2(4-4y+y^2)dy$$

$$=\pi\left(4y-4\cdot\frac{y^2}{2}+\frac{y^3}{3}\right)\Bigg|_{y=1}^{y=2}=\pi\left(4y-2y^2+\frac{y^3}{3}\right)\Bigg|_{y=1}^{y=2}$$

$$=\pi\left[\left(4\cdot2-2\cdot2^2+\frac{2^3}{3}\right)-\left(4\cdot1-2\cdot1^2+\frac{1^3}{3}\right)\right]$$

$$=\pi\left[\left(8-8+\frac{8}{3}\right)-\left(4-2+\frac{1}{3}\right)\right]=\pi\left[\frac{8}{3}-2-\frac{1}{3}\right]=\boxed{\frac{\pi}{3}}\text{ куб.ед.}$$

- V_2 е волуменот на телото што се добива со ротација околу $y-$оска на рамнинската фигура ограничена од $y-$оската, кривата $x=\sqrt{y}$ и правата $y=1$ ако ставиме

  $$x_2=x_2(y)=\sqrt{y},$$

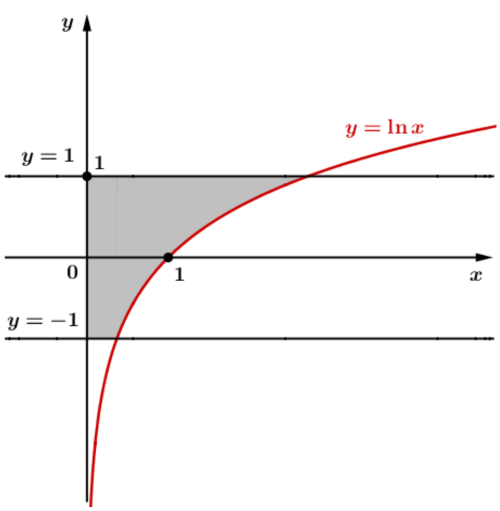
  тогаш

$$V_2=\pi\int_0^1(x_2)^2dy=\pi\int_0^1(\sqrt{y})^2dy=\pi\int_0^1 ydy=\pi\left.\frac{y^2}{2}\right|_{y=0}^{y=1}=\pi\left(\frac{1^2}{2}-\frac{0^2}{2}\right)=\boxed{\frac{\pi}{2}}\text{ куб.ед.}$$

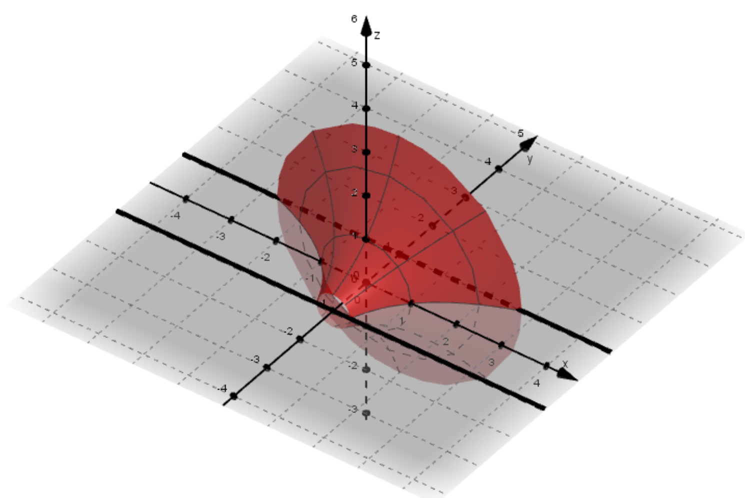
и, последователно,

$$V=V_1+V_2=\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{3}=\boxed{\frac{5\pi}{6}}\text{ куб.ед.}$$

д) Рамнинската фигура ограничена со кривата $y=\ln x$ и правите $x=0$ (т.е. $y-$оска), $y=-1$ и $y=1$ е дадена на сл. 7.д.1, а телото добиено со ротација на оваа фигура околу $y-$оска е дадено на сл. 7.д.2. Вредностите $y=-1$ и $y=1$ се воедно граници на интеграција.



сл. 7.г.1



сл.7.г.2

$$y=\ln x\quad\Rightarrow\quad\boxed{x=e^y}.$$

Бараниот волумен е

$$V_2=\pi\int_{-1}^{1}x^2dy=\pi\int_{-1}^{1}(e^y)^2dy=\pi\int_{-1}^{1}e^{2y}dy=\left|\begin{array}{l}\text{смена: }2y=t,dy=\frac{dt}{2}\\ y=-1\quad\Rightarrow\quad t=-2\\ y=1\quad\Rightarrow\quad t=2\end{array}\right|$$

$$=\frac{\pi}{2}\int_{-2}^{2} e^{t}dt=\frac{\pi}{2}\cdot e^{t}\Big|_{t=-2}^{t=2}=\frac{\pi}{2}(e^{2}-e^{-2})=\frac{\pi}{2}\left(e^{2}-\frac{1}{e^{2}}\right)$$

$$=\boxed{\frac{\pi(e^{4}-1)}{2e^{2}}}\text{ куб.ед.}$$