Неопределени интеграли - продолжување

Thursday, March 26, 2020 13:00

Задача: Да се пресметаат следните интеграли:

а) $\int \sin\frac{11x}{2}\sin\frac{3x}{2}dx$ (за дома $\int \sin 4x \sin 7x\, dx$),

б) $\int \sin\frac{x}{2}\cos\frac{5x}{2}dx$, (за дома $\int \sin 3x \cos 4x\, dx$),

в) $\int \cos\frac{x}{2}\cos\frac{3x}{2}dx$, (за дома $\int \cos x \cos 9x\, dx$).

Решение: Помошни интеграли

$$\int \sin ax\,\mathrm{dx} = \left| \begin{array}{c} \text{смена:} \\ ax = t \\ adx = dt \ \Rightarrow dx = \dfrac{dt}{a} \end{array} \right| = \int \sin t \frac{\mathrm{d}t}{a} = \frac{1}{a}\int \sin ax\,\mathrm{dx} = -\frac{1}{a}\cos t + C$$

$$= -\frac{1}{a}\cos ax + C$$

$$\int \cos ax\,\mathrm{dx} = \left| \begin{array}{c} \text{смена:} \\ ax = t \\ adx = dt \ \Rightarrow dx = \dfrac{dt}{a} \end{array} \right| = \int \cos t \frac{\mathrm{d}t}{a} = \frac{1}{a}\int \cos ax\,\mathrm{dx} = \frac{1}{a}\sin t + C$$

$$= \frac{1}{a}\sin ax + C$$

а) подинтегралната функција треба се трансформира според формулата

$$\sin x \sin y = \frac{1}{2}[\cos(x-y) - \cos(x+y)]$$

$$\int \sin\frac{11x}{2}\sin\frac{3x}{2}\mathrm{dx} = \frac{1}{2}\int \left[\cos\left(\frac{11x}{2} - \frac{3x}{2}\right) - \cos\left(\frac{11x}{2} + \frac{3x}{2}\right)\right]\mathrm{dx}$$

$$= \frac{1}{2}\int [\cos 4x - \cos 7x]\,\mathrm{dx} = \frac{1}{2}\int \cos 4x\,\mathrm{dx} - \frac{1}{2}\int \cos 7x\,\mathrm{dx}$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\sin 4x - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{7}\sin 7x + C = \frac{1}{8}\sin 4x - \frac{1}{14}\sin 7x + C$$

б) подинтегралната функција треба се трансформира според формулата

$$\sin x \cos y = \frac{1}{2}[\sin(x-y)+\sin(x+y)]$$

$$\int \sin\frac{x}{2}\cos\frac{5x}{2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int\left[\sin\left(\frac{x}{2}-\frac{5x}{2}\right)+\sin\left(\frac{x}{2}+\frac{5x}{2}\right)\right]\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int[\sin(-2x)+\sin 3x]\,\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{2}\int\sin(-2x)\,\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int\sin 3x\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\int\sin 2x\,\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int\sin 3x\,\mathrm{d}x$$

$\sin(-x) = -\sin x$ (непарна ф-ја)

$$= -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}(-\cos 2x) + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}(-\cos 3x) + C = \frac{1}{4}\cos 2x - \frac{1}{6}\cos 3x + C$$

в) подинтегралната функција треба се трансформира според формулата

$$\cos x \cos y = \frac{1}{2}[\cos(x-y)+\cos(x+y)]$$

$$\int \cos\frac{x}{2}\cos\frac{3x}{2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int\left[\cos\left(\frac{x}{2}-\frac{3x}{2}\right)+\cos\left(\frac{x}{2}+\frac{3x}{2}\right)\right]\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int[\cos(-x)+\cos 2x]\,\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{2}\int\cos(-x)\,\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int\cos 2x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int\cos x\,\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int\cos 2x\,\mathrm{d}x$$

$\cos(-x) = \cos x$ (парна ф-ја)

$$= \frac{1}{2}\sin x + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\sin 2x + C = \frac{1}{2}\sin x + \frac{1}{4}\sin 2x + C$$