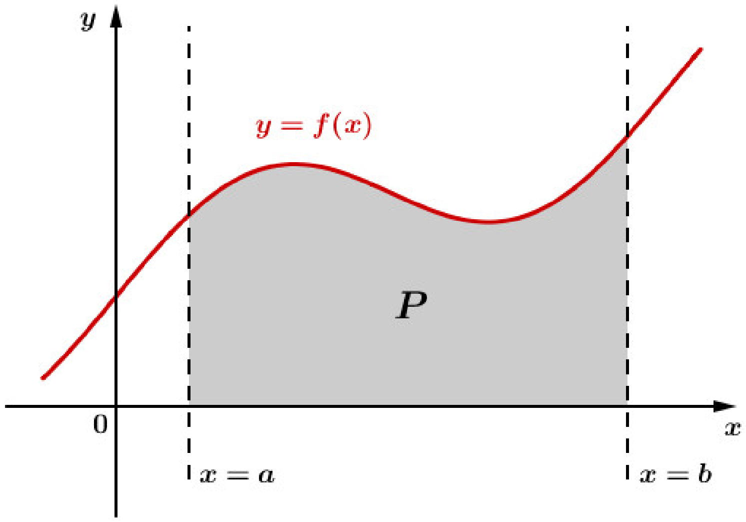
Плоштина на Р.Ф. - правоаголен координатен систем

Thursday, March 26, 2020 13:00

Случај 1: Плоштина на рамнинска фигура ограничена со график на дадена функција $y = f(x)$ и $x -$ оска (интеграција по x)

а)



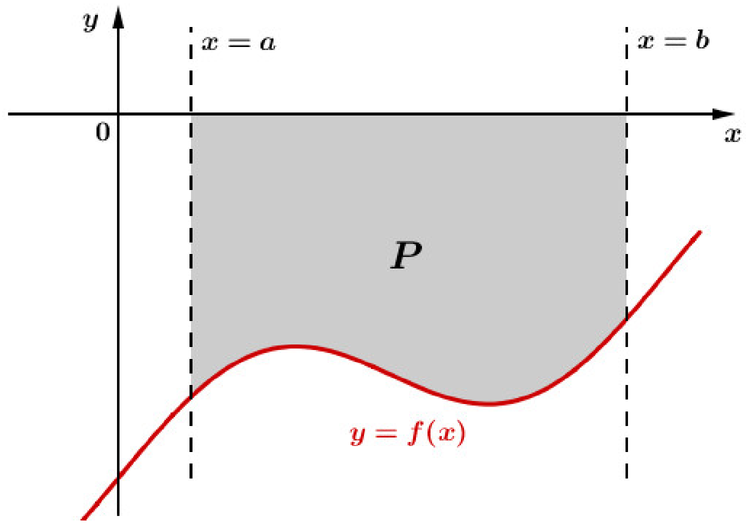
Ако

$$y = f(x) \geq 0, \forall x \in [a, b]$$

тогаш

$$P = \int_a^b y \, \mathrm{d}x = \int_a^b f(x) \, \mathrm{d}x.$$

б)



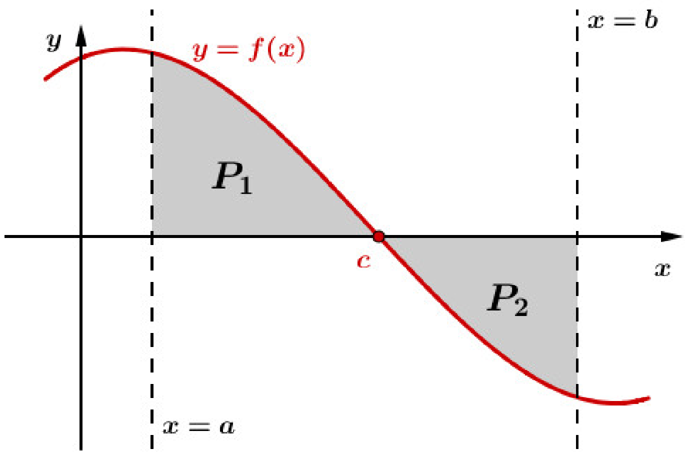
Ако

$$y = f(x) \leq 0, \forall x \in [a, b]$$

тогаш

$$P = -\int_a^b y \, \mathrm{d}x = -\int_a^b f(x) \, \mathrm{d}x.$$

в)



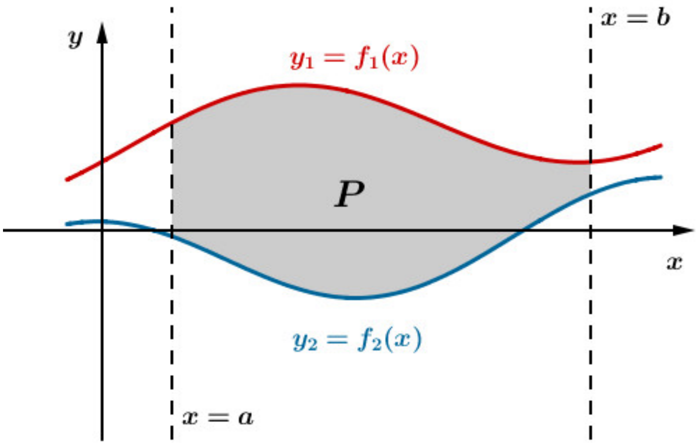
Ако графикот на функцијата $y = f(x)$ ја сечи $x -$ оската во точка чија прва координата е c тогаш

$$\begin{aligned} P &= P_1 + P_2 \\ &= \int_a^c f(x) \, \mathrm{d}x - \int_c^b f(x) \, \mathrm{d}x \end{aligned}$$

Заедничка формула за предходните три случаи:

$$P = \int_a^b |y|\,\mathrm{d}x = \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x.$$

Случај 2: Плоштина на рамнинска фигура ограничена со графици на две функции (интеграција по x)



Ако рамнинската фигура е ограничена

• од **горе** со графикот на $y_1 = f_1(x)$

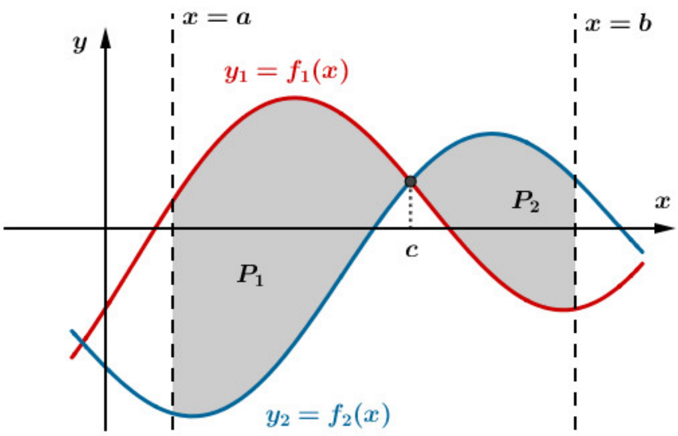
• од **долу** со графикот на $y_2 = f_2(x)$

тогаш

$$P = \int_a^b (y_1 - y_2)\,\mathrm{d}x$$

$$= \int_a^b [f_1(x) - f_2(x)]\,\mathrm{d}x$$

д)

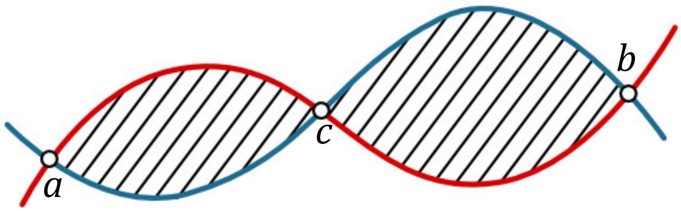


Ако рамнинската фигура е ограничена со графици на функциите $y_1 = f_1(x)$ и $y_2 = f_2(x)$ кои на интервалот $[a, b]$ имаат пресечна точка со прва координата c како на левата слика, тогаш

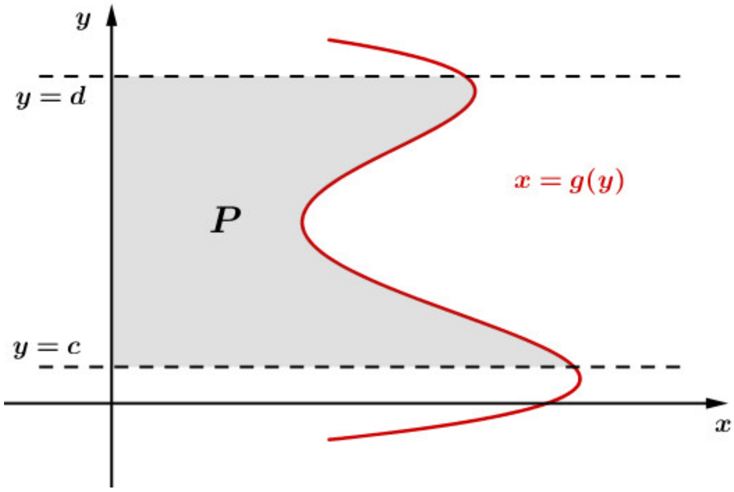
$$P = P_1 + P_2 = \int_a^c (y_1 - y_2)\,\mathrm{d}x + \int_c^b (y_2 - y_1)\,\mathrm{d}x$$

$$= \int_a^c [f_1(x) - f_2(x)]\,\mathrm{d}x + \int_c^b [f_2(x) - f_1(x)]\,\mathrm{d}x.$$

Чест случај: a и b се исто така први координати на пресечни точки на графиците на функциите $y_1 = f_1(x)$ и $y_2 = f_2(x)$ како на десната скица.



Случај 3: Плоштина на рамнинска фигура ограничена со график на функција $x = g(y)$ и $y -$ оска (интеграција по y)



Ако

$$x = g(y) \geq 0, \forall y \in [c, d]$$

тогаш

$$P = \int_c^d x \, \mathrm{d}y = \int_a^b g(y) \, \mathrm{d}y.$$

Напомена 1: За случајот на рамнинска фигура ограничена со график на функција $x = g(y)$ и $y -$ оска важат аналогни формули како за а), б), в), г) и д) од погоре, само што овде треба да се направи следната замена на тремините

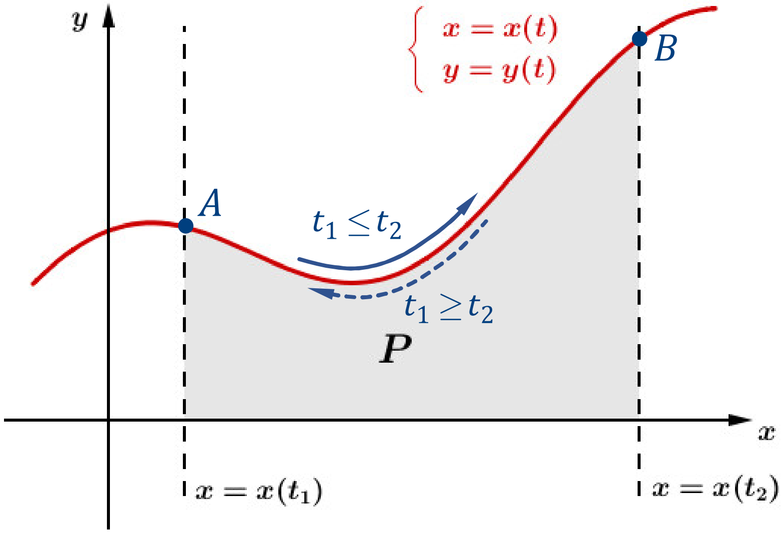
„ограничена од **горе**“ со „ограничена од **десно**“

„ограничена од **долу**“ со „ограничена од **лево**“ .

Напомена 2: Во многу случаи кај дадена рамнинска фигура која од некоја страна е ограничена со график на функција $y = f(x)$, наместо со интеграција по x, пресметувањето на плоштината да биде полесно (или побрзо) со интеграција по y со предходно определување на функција g како инверзна на f

$$y = f(x) \;\Leftrightarrow\; x = g(y).$$

Случај 4: Плоштина на рамнинска фигура ограничена со график на функција $x-$ оска и крива зададена со параметарски равенки



Ако $t_1 \leq t_2$, тогаш

$$P = \int_{t_1}^{t_2} y(t)\dot{x}(t)\,\mathrm{d}t$$

Ако $t_1 \geq t_2$, тогаш

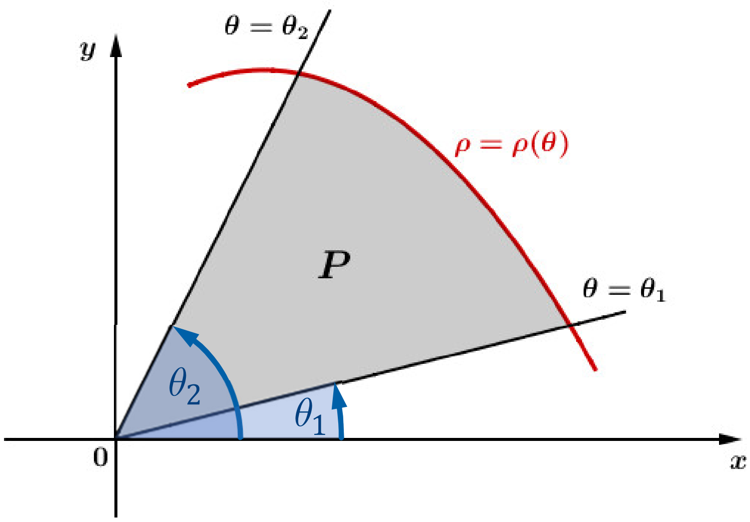
$$P = -\int_{t_1}^{t_2} y(t)\dot{x}(t)\,\mathrm{d}t$$

или, за двата случаи заедно,

$$P = \left|\int_{t_1}^{t_2} y(t)\dot{x}(t)\,\mathrm{d}t\right|.$$

Плоштина на Р.Ф. - поларен координатен систем

Thursday, March 26, 2020 13:00



Плоштина на рамнинска фигура ограничена со крива зададена со поларна равенка

$$\rho = \rho(\theta),$$

и полуправите

$$\theta = \theta_1 \text{ и } \theta = \theta_2,$$

е еднаква на

$$P = \frac{1}{2}\int_{\theta_1}^{\theta_2} [\rho(\theta)]^2\,\mathrm{d}\theta.$$

(Кај Декартов правоаголен систем, пол е координатниот почеток, а поларна оска е позитивниот дел на $x-$ оската.)

Напомена: При решавање на задачи, задолжително треба да се направи што попрецизна скица на графиците на функциите кои ја ограничуваат рамнинската фигура. Границите на интеграција може да не се секогаш зададени во текстот на задачата (понекогаш може да не се воочливи и од скицата) и нивно определување задолжително треба да се направи алгебарски.

Задача 1

Thursday, March 26, 2020 13:00

(Задача 1/стр. 135/Материјали)

Да се пресмета плоштината на рамнинската фигура ограничена со

а) $x-$оската, параболата $y=x^2-4x+5$ и правите $x=0$ и $x=3$,

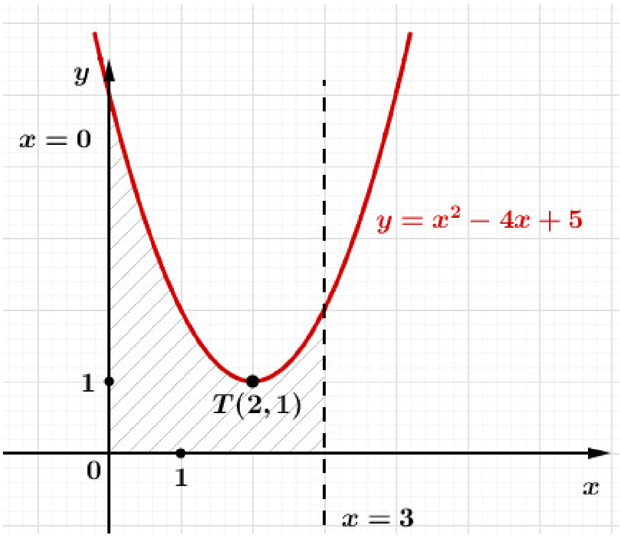
б) $x-$оската и параболата $y=-x^2-2x+8$,

в) $x-$оската, параболата $y=x^2-4x+3$ и правите $x=0$ и $x=5$,

г) параболата $y=x^2-6x+7$ и правата $y-x+3=0$.

Решение:

а) **Прв чекор:** скица на графикот на функцијата $y=x^2-4x+5$



$$y=x^2-4x+5=(x-2)^2+1,$$

што значи дека параболата

• е со теме во $T(-2,1)$,

• бидејќи коефициентот пред x^2 е
$$a=1>0,$$
нејзините гранки се отвораат нагоре (десна слика),

• нема пресечни точки со $x-$оската,

• $y-$оската ја сечи во $Y(0,5)$,

• $y=f(x)\geq 0,\ \forall x\in[0,3]$.

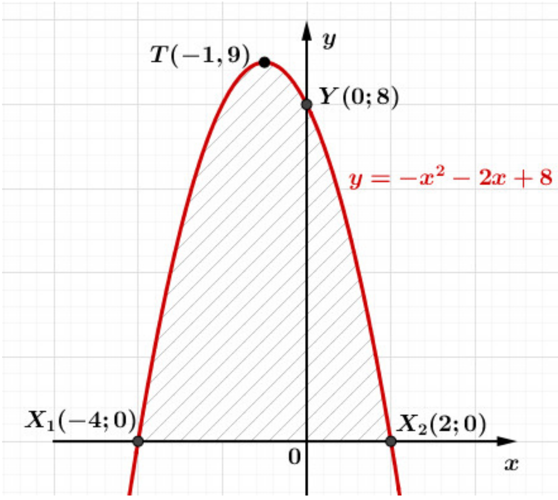
Од тука следи дека бараната плоштина е

$$P=\int_0^3 y\,\mathrm{d}x=\int_0^3 (x^2-4x+5)\,\mathrm{d}x$$

$$=\left(\frac{x^3}{3}-4\cdot\frac{x^2}{2}+5x\right)\Bigg|_{x=0}^{x=3}=\left(\frac{x^3}{3}-2x^2+5x\right)\Bigg|_{x=0}^{x=3}$$

$$= \left(\frac{3^3}{3} - 2\cdot 3^2 + 5\cdot 3\right) - \underbrace{\left(\frac{0^3}{3} - 2\cdot 0^2 + 5\cdot 0\right)}_{=0} = 9 - 18 + 15 = 6 \text{ кв. ед.}$$

б) **за скица**: за параболата



$$y = -x^2 - 2x + 8,$$

• коефициентот пред x^2 е $a = -1 < 0$, што значи дека гранките се отвораат на долу,

• пресек со y − оска

$$Y\big(0, f(0)\big) = Y(0, c) = Y(0; 8),$$

• за пресеци со x − оска $X_1(x_1, 0)$ и $X_2(x_2, 0)$, доколку постојат, првите координати се определуваат од равенката

$$-x^2 - 2x + 8 = 0,$$

$$\Rightarrow \quad x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4\cdot(-1)\cdot 8}}{2\cdot(-1)} = \frac{2 \pm \sqrt{36}}{-2} = \frac{2 \pm 6}{-2}$$

$$\Rightarrow \quad x_1 = -4,\ \ x_2 = 2$$

• теме: коефициентите се $a = -1$, $b = -2$ и $c = 8$; од тука

$$T\left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac - b^2}{4a}\right) = T(-1{,}9).$$

Графикот на параболата е даден на погорната слика. Фигурата ограничена со x − оската и параболата е шрафираната површина. Таа кореспондира на фигура под график на функција која прима позитивни вредности кога $x \in [-4; 2]$.

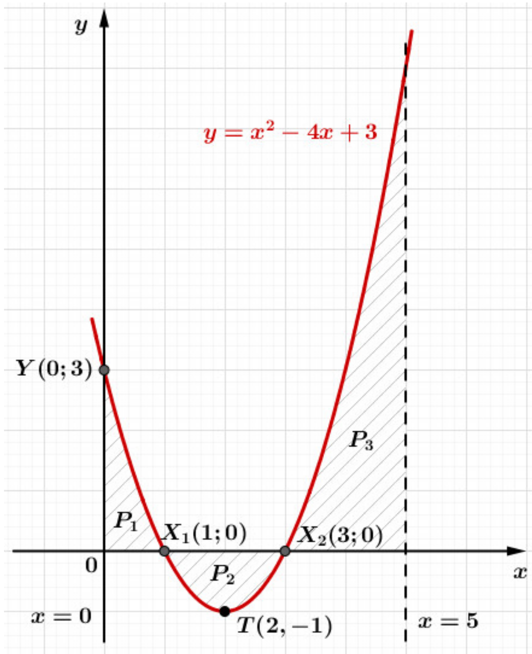
$$P = \int_{-4}^{2} y\, \mathrm{d}x = \int_{-4}^{2} (-x^2 - 2x + 8)\, \mathrm{d}x$$

$$= \left(-\frac{x^3}{3} - 2\cdot\frac{x^2}{2} + 8x\right)\Bigg|_{x=-4}^{x=2} = \left(-\frac{x^3}{3} - x^2 + 8x\right)\Bigg|_{x=-4}^{x=2}$$

$$= \left(-\frac{2^3}{3} - 2^2 + 8\cdot 2\right) - \left(-\frac{(-4)^3}{3} - (-4)^2 + 8\cdot(-4)\right)$$

$$= \left(-\frac{8}{3} - 4 + 16\right) - \left(-\frac{-64}{3} - 16 + 32\right) = 36 \text{ кв. ед.}$$

в) **за скица**: за параболата $y = x^2 - 4x + 3$,



• коефициентот пред x^2 е $a = 1 > 0$, што значи дека гранките се отвараат нагоре,

• пресек со $y -$ оска

$$Y\big(0, f(0)\big) = Y(0, c) = Y(0; 3),$$

• за пресеци со $x -$ оска $X_1(x_1, 0)$ и $X_2(x_2, 0)$, доколку постојат, првите координати се определуваат од равенката

$$x^2 - 4x + 3 = 0,$$

$$\Rightarrow x_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3}}{2 \cdot 1}$$

$$= \frac{4 \pm \sqrt{4}}{2} = \frac{4 \pm 2}{2}$$

$$\Rightarrow x_1 = 1, \;\; x_2 = 3$$

• теме: коефициентите се $a = 1, b = -4$ и $c = 3$, последователно

$$T\left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac - b^2}{4a}\right) = T(2, -1).$$

Графикот на параболата е даден на погорната слика. Треба да се пресмета плоштината на исенчаната површина од која со $x -$ оската е поделена на три дела со плоштини P_1, P_2 и P_3.

$$P \;\; = P_1 + P_2 + P_3 = \int_0^1 y \, \mathrm{d}x - \int_1^3 y \, \mathrm{d}x + \int_3^5 y \, \mathrm{d}x$$

$$= \int_0^1 (x^2 - 4x + 3) \, \mathrm{d}x - \int_1^3 (x^2 - 4x + 3) \, \mathrm{d}x + \int_3^5 (x^2 - 4x + 3) \, \mathrm{d}x$$

$$= \left(\frac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x\right)\Bigg|_{x=0}^{x=1} - \left(\frac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x\right)\Bigg|_{x=1}^{x=3} + \left(\frac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x\right)\Bigg|_{x=3}^{x=5}$$

$$= \left[\left(\frac{1^3}{3} - 2 \cdot 1^2 + 3 \cdot 1\right) - \left(\frac{0^3}{3} - 2 \cdot 0^2 + 3 \cdot 0\right)\right]$$

$$- \left[\left(\frac{3^3}{3} - 2 \cdot 3^2 + 3 \cdot 3\right) - \left(\frac{1^3}{3} - 2 \cdot 1^2 + 3 \cdot 1\right)\right]$$

$$+ \left[\left(\frac{5^3}{3} - 2 \cdot 5^2 + 3 \cdot 5\right) - \left(\frac{3^3}{3} - 2 \cdot 3^2 + 3 \cdot 3\right)\right]$$

$$= \left[\frac{4}{3} - 0\right] - \left[0 - \frac{4}{3}\right] + \left[\frac{20}{3} - 0\right] = \frac{28}{3} \text{ кв. ед.}$$

г) Графиците на параболата $y = x^2 - 6x + 7$ и правата $y - x + 3 = 0$ се дадени на десната слика. Ако за параболата ставиме

$$y_1 = f_1(x) = x^2 - 6x + 7,$$

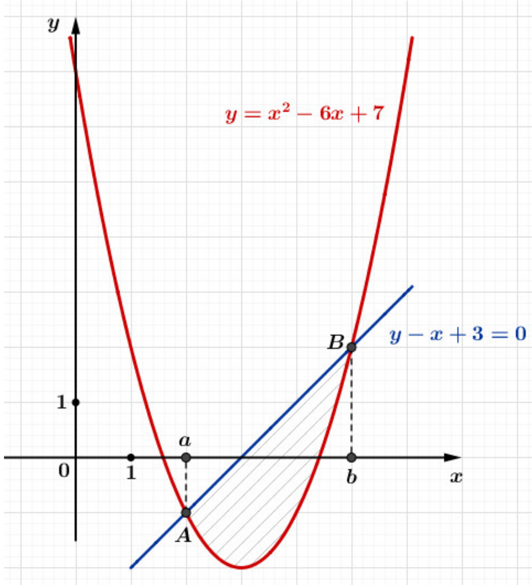
а за правата

$$y - x + 3 = 0 \quad \Rightarrow \quad y = x - 3 = f_2(x) = y_2,$$

тогаш бараната плоштина е

$$P = \int_a^b (y_2 - y_1)\,\mathrm{d}x.$$

каде a и b се првите координати на пресечните точки на прават и параболата кои ***треба алгебарски да се определат***.



Вредностите за a и b треба истовремено да ја задоволуваат и равенката на параболата и равенката на правата. Што значи дека

$$\begin{aligned} y_1 = y_2 \quad &\Rightarrow \quad x^2 - 6x + 7 = x - 3 \\ &\Rightarrow \quad x^2 - 7x + 10 = 0 \\ &\Rightarrow \quad x_{1,2} = \frac{7 \pm \sqrt{7^2 - 4 \cdot 1 \cdot 10}}{2 \cdot 1} = \frac{7 \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{7 \pm 3}{2 \cdot 1} \\ &\Rightarrow \quad a = x_1 = 2, \quad b = x_2 = 5. \end{aligned}$$

Од тука следи дека

$$P = \int_2^5 (y_2 - y_1)\,\mathrm{d}x = \int_2^5 [(x-3) - (x^2 - 6x + 7)]\,\mathrm{d}x$$

$$= \int_2^5 (-x^2 + 7x - 10)\,\mathrm{d}x = \left(-\frac{x^3}{3} + 7\frac{x^2}{2} + 10x\right)\Bigg|_{x=2}^{x=5}$$

$$= \left(-\frac{5^3}{3} + 7 \cdot \frac{5^2}{2} + 10 \cdot 5\right) - \left(-\frac{2^3}{3} + 7 \cdot \frac{2^2}{2} + 10 \cdot 2\right) = \frac{9}{2} \text{ кв. ед.}$$

За дома:

Задача 1.А. Да се пресмета плоштината на рамнинската фигура ограничена со

а) $x -$ оската, параболата $y = -x^2 + 5x - 9$ и правите $x = -1$ и $x = 3$,

б) $x -$ оската и параболата $y = x^2 - x - 6$,

в) $x -$ оската, параболата $y = -x^2 + 3x + 4$ и правите $x = -2$ и $x = 3$,

г) параболата $y = -x^2 + 3x + 1$ и правата $x - y + 1 = 0$.

Задача 1.Б. Да се пресмета плоштината на рамнинската фигура ограничена со

а) $y -$ оската, параболата $x = y^2 - y + 1$ и правите $y = -2$ и $y = 2$,

б) $y -$ оската и параболата $x = y^2 - 2x - 15$,

в) $y -$ оската, параболата $x = y^2 - 5x + 4$ и правите $y = 0$ и $y = 6$,

г) параболата $x = y^2 - 3y + 2$ и правата $x + y = 5$.

Задача 1.В. Да се пресмета плоштината на рамнинската фигура ограничена со

а) $y -$ оската, параболата $y^2 + x + 1 = 0$ и правите $y = -2$ и $y = 2$,

б) $y -$ оската, параболата $x = -y^2 + 7x - 10$,

в) $y -$ оската, $x -$ оската, параболата $y^2 + x + 3y + 2 = 0$ и правата $y = -3$,

г) параболата $x = -y^2 + 3y + 4$ и правата $x - 2y + 2 = 0$.

Упатство: Задачите 1.Б и 1.В се препорачува да се решат со интеграција по y, (II начин на решавање на задачите 2.а) и 2.б) на стр. 137 од материјалите).