Дополнителни вежби (11.03.2021)
- испитни задачи -

Задача 1. Да се испита конвергенцијата на следните интеграли:

а) $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{dx}{(5x+3)^2}$ (***општ тип 1***: $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{dx}{(ax+b)^n}$

$n\in\mathbb{N},\ n>1, a=const>0, b=const>0$)

б) $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{dx}{\sqrt[3]{(2x+1)^2}}$

в) $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{dx}{\sqrt[5]{(4x+3)^8}}$

(***општ тип 2***: $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{dx}{\sqrt[n]{(ax+b)^m}}$

$m,n\in\mathbb{N}, a=const>0, b=const>0$)

Решение:

а) За $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{dx}{(5x+3)^2}$ подинтегрална функција е $f(x)=\dfrac{1}{(5x+3)^2}$. Нејзината дефинициона област е $D_f=\mathbb{R}\setminus\left\{-\dfrac{3}{5}\right\}$, т.е. функцијата е дефинирана и, дополнително, непрекината и интеграбилна на интервалите од облик $[0,b]$, за секој $b>0$. Тогаш

$$\int_0^{+\infty}\frac{dx}{(5x+3)^2}=\lim_{b\to+\infty}\int_0^{b}\frac{dx}{(5x+3)^2}=\left|\begin{array}{l}\text{смена:}\\ \boxed{5x+3=t}\ \Rightarrow\ 5dx=dt\ \Rightarrow\ dx=\dfrac{dt}{5}\\ 1)\,x=0\ \Rightarrow\ t=5\cdot0+3=3\\ 2)\,x=b\ \Rightarrow\ t=5b+3\end{array}\right|$$

$$=\lim_{b\to+\infty}\int_3^{5b+3}\frac{\frac{dt}{5}}{t^2}=\lim_{b\to+\infty}\frac{1}{5}\int_3^{5b+3}\frac{dt}{t^2}=\frac{1}{5}\cdot\lim_{b\to+\infty}\int_3^{5b+3}t^{-2}dt$$

$$=\frac{1}{5}\cdot\lim_{b\to+\infty}\frac{t^{-2+1}}{-2+1}\Bigg|_{t=3}^{t=5b+3}=\frac{1}{5}\cdot\lim_{b\to+\infty}-\frac{1}{t}\Bigg|_{t=3}^{t=5b+3}=-\frac{1}{5}\cdot\lim_{b\to+\infty}\frac{1}{t}\Bigg|_{t=3}^{t=5b+3}$$

$$=-\frac{1}{5}\cdot\lim_{b\to+\infty}\left(\cancelto{0}{\frac{1}{5b+3}}-\frac{1}{3}\right)=-\frac{1}{5}\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{15}\neq\pm\infty$$

Од тука следи дека дадениот интеграл конвергира.

б) За $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{dx}{\sqrt[3]{(2x+1)^2}}$ подинтегрална функција е $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt[3]{(2x+1)^2}}$. Нејзината дефинициона област е $D_f=\mathbb{R}\setminus\left\{-\dfrac{1}{2}\right\}$, т.е. функцијата е дефинирана и, дополнително, непрекината и интеграбилна на интервалите од облик $[0,b]$, за секој $b>0$. Тогаш

$$\int_0^{+\infty}\frac{dx}{\sqrt[3]{(2x+1)^2}}=\int_0^{+\infty}\frac{dx}{(2x+1)^{2/3}}=\lim_{b\to+\infty}\int_0^{b}\frac{dx}{(2x+1)^{2/3}}=\left|\begin{array}{l}\text{смена:}\\ \boxed{2x+1=t}\ \Rightarrow\ 2dx=dt\ \Rightarrow\ dx=\dfrac{dt}{2}\\ 1)\ x=0\ \Rightarrow\ t=2\cdot 0+1=1\\ 2)\ x=b\ \Rightarrow\ t=2b+1\end{array}\right|$$

$$=\lim_{b\to+\infty}\int_1^{2b+1}\frac{\frac{dt}{2}}{t^{2/3}}=\lim_{b\to+\infty}\frac{1}{2}\int_1^{2b+1}\frac{dt}{t^{2/3}}=\frac{1}{2}\cdot\lim_{b\to+\infty}\int_1^{2b+1}t^{-2/3}dt$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\lim_{b\to+\infty}\frac{t^{-2/3+1}}{-\frac{2}{3}+1}\Bigg|_{t=1}^{t=2b+1}=\frac{1}{2}\cdot\lim_{b\to+\infty}\frac{t^{1/3}}{\frac{1}{3}}\Bigg|_{t=1}^{t=2b+1}=\frac{1}{2}\cdot\lim_{b\to+\infty}3t^{1/3}\Big|_{t=1}^{t=2b+1}$$

$$=\frac{3}{2}\cdot\lim_{b\to+\infty}\sqrt[3]{t}\Big|_{t=1}^{t=2b+1}=\frac{3}{2}\cdot\lim_{b\to+\infty}\left(\sqrt[3]{2b+1}-\sqrt[3]{1}\right)=\frac{3}{2}\cdot(+\infty-1)=+\infty$$

Од тука следи дека дадениот интеграл дивергира.

в) За $\int_0^{+\infty}\frac{dx}{\sqrt[5]{(4x+3)^8}}$ подинтегрална функција е $f(x)=\frac{1}{\sqrt[5]{(4x+3)^8}}$. Нејзината дефинициона област е $D_f=\mathbb{R}\setminus\left\{-\frac{3}{4}\right\}$, т.е. функцијата е дефинирана и, дополнително, непрекината и интеграбилна на интервалите од облик $[0,b]$, за секој $b>0$. Тогаш

$$\int_0^{+\infty}\frac{dx}{\sqrt[5]{(4x+3)^8}}=\int_0^{+\infty}\frac{dx}{(4x+3)^{8/5}}=\lim_{b\to+\infty}\int_0^{b}\frac{dx}{(4x+3)^{8/5}}=\left|\begin{array}{l}\text{смена:}\\ \boxed{4x+3=t}\ \Rightarrow\ 4dx=dt\ \Rightarrow\ dx=\dfrac{dt}{4}\\ 1)\ x=0\ \Rightarrow\ t=4\cdot 0+3=3\\ 2)\ x=b\ \Rightarrow\ t=4b+3\end{array}\right|$$

$$=\lim_{b\to+\infty}\int_3^{4b+3}\frac{\frac{dt}{4}}{t^{8/5}}=\lim_{b\to+\infty}\frac{1}{4}\int_3^{4b+3}\frac{dt}{t^{8/5}}=\frac{1}{4}\cdot\lim_{b\to+\infty}\int_3^{4b+3}t^{-8/5}dt$$

$$=\frac{1}{4}\cdot\lim_{b\to+\infty}\frac{t^{-8/5+1}}{-\frac{8}{5}+1}\Bigg|_{t=3}^{t=4b+3}=\frac{1}{4}\cdot\lim_{b\to+\infty}\frac{t^{-3/5}}{-\frac{3}{5}}\Bigg|_{t=3}^{t=4b+3}=\frac{1}{4}\cdot\lim_{b\to+\infty}\left(-\frac{5}{3}\right)\frac{1}{t^{3/5}}\Bigg|_{t=3}^{t=4b+3}$$

$$=\frac{1}{4}\cdot\left(-\frac{5}{3}\right)\cdot\lim_{b\to+\infty}\frac{1}{\sqrt[5]{t^3}}\Bigg|_{t=3}^{t=4b+3}=\frac{1}{4}\cdot\left(-\frac{5}{3}\right)\cdot\lim_{b\to+\infty}\left(\cancelto{0}{\frac{1}{\sqrt[5]{(4x+3)^3}}}-\frac{1}{\sqrt[5]{3^3}}\right)$$

$$=\frac{1}{4}\cdot\left(-\frac{5}{3}\right)\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt[5]{3^3}}\right)=\frac{5}{12\cdot\sqrt[5]{27}}\neq\pm\infty$$

Од тука следи дека дадениот интеграл конвергира.