Задача 2

Friday, March 27, 2020 08:00

Со помош на определен интеграл да се пресмета плоштината на четириаголникот со темиња

а) $A(2;6)$, $B(2;-1)$, $C(8;2)$ и $D(8;4)$,

б) $A(3;4)$, $B(1;1)$, $C(7;1)$ и $D(6;4)$,

в) $A(3;2)$, $B(5;2)$, $C(6;4)$ и $D(6;8)$.

Решение: Помошни формули (равенка на права низ две точки)

- равенка на права низ две точки **со исти први координати** $T_1(a,y_1)$ и $T_2(a,y_2)$, $y_1 \neq y_2$:

$$x = p_{T_1T_2}(y) = a$$

(правата е паралена со $y-$ оска и нејзината равенка, како функција зависи само од y)

- равенка на права низ две точки **со исти втори координати** $T_1(x_1,b)$ и $T_2(x_2,b)$, $x_1 \neq x_2$:

$$y = p_{T_1T_2}(x) = b$$

(правата е паралена со $x-$ оска и нејзината равенка, како функција зависи само од x)

- равенка на права низ две точки **со различни први и различни втори координати** $T_1(x_1,b)$ и $T_2(x_2,b)$, $x_1 \neq x_2$ и $y_1 \neq y_2$: од изразот

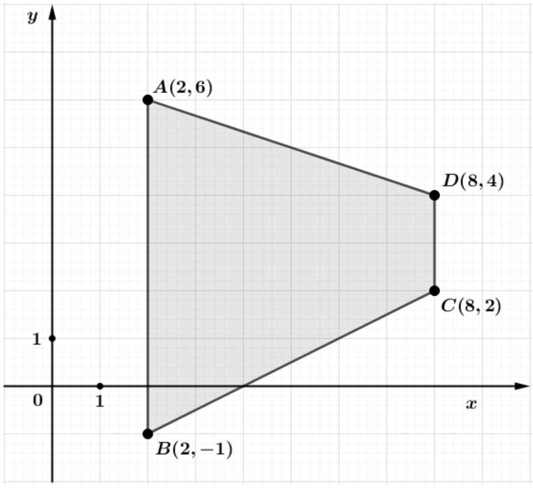
$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1},$$

по претходна замена на вредностите за x_1, x_2, y_1 и y_2; притоа

- ако интегрирањето се врши по променливата x, тогаш
$$y = p_{T_1T_2} = p_{T_1T_2}(x) = \boxed{\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)+y_1},$$

- ако интегрирањето се врши по променливата y, тогаш
$$x = p_{T_1T_2} = p_{T_1T_2}(y) = \boxed{\frac{x_2-x_1}{y_2-y_1}(y-y_1)+x_1}.$$

а) Бидејќи правите AB и CD се паралелни на $y-$ оската, плоштината на четириаголникот $ABCD$ со помош на определен интеграл најбрзо ќе се пресмета како плоштина на рамнинска фигура помеѓу следните две функции:



од горе: правата p_{AD}
од долу: правата p_{BC} ,
x се менува во интервалот [2;8], (т.е. од првата координата на A и B, до првата координата на C и D)

Бараната плоштина ќе биде еднаква на

$$\boxed{P=\int_2^8 (p_{AD}-p_{BC})dx} \ .$$

Преминуваме на определување на равенките на правите p_{AD} и p_{BC}.

- равенка на права низ $A(\overset{x_1}{2};\overset{y_1}{6})$ и $D(\overset{x_2}{8};\overset{y_2}{4})$ (изразена како функција од x):

$$p_{AD}=p_{AD}(x)=\frac{4-6}{8-2}(x-2)+6=-\frac{2}{6}(x-2)+6=-\frac{1}{3}(x-2)+6$$
$$=-\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}+6=\boxed{-\frac{1}{3}x+\frac{20}{3}}$$

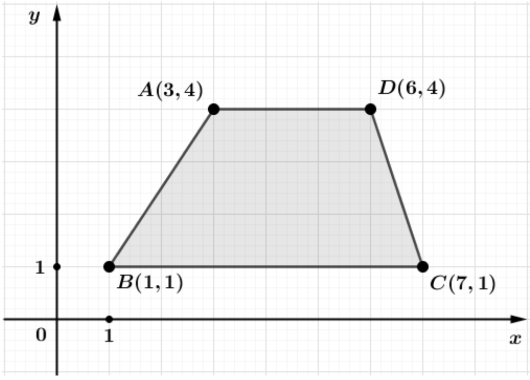
- равенка на права низ $B(\overset{x_1}{2};\overset{y_1}{-1})$ и $C(\overset{x_2}{8};\overset{y_2}{2})$ (како функција од x):

$$p_{BC}=p_{BC}(x)=\frac{2-(-1)}{8-2}(x-2)+(-1)=\frac{3}{6}(x-2)-1$$
$$=\frac{1}{2}(x-2)-1=\boxed{\frac{1}{2}x-2}$$

Од тука следи дека

$$P=\int_2^8\left[\left(-\frac{1}{3}x+\frac{20}{3}\right)-\left(\frac{1}{2}x-2\right)\right]dx=\int_2^8\left(-\frac{5}{6}x+\frac{26}{3}\right)dx=\left(-\frac{5}{12}x^2+\frac{26}{3}x\right)\Bigg|_{x=2}^{x=8}$$
$$=\left(-\frac{5}{12}\cdot 8^2+\frac{26}{3}\cdot 8\right)-\left(-\frac{5}{12}\cdot 2^2+\frac{26}{3}\cdot 2\right)=\left(-\frac{80}{3}+\frac{208}{3}\right)-\left(-\frac{5}{3}+\frac{52}{3}\right)$$
$$=\frac{128}{3}-\frac{47}{3}=\frac{81}{3}=\boxed{27}\ \text{кв.ед.}$$

б) Бидејќи правите BC и AD се паралелни на $x-$ оската, плоштината на четириаголникот $ABCD$ со помош на определен интеграл најбрзо ќе се пресмета како плоштина на рамнинска фигура помеѓу следните две функции:



од десно: правата p_{CD}

од лево: правата p_{AB} ,

y се менува во интервалот [1;4], (т.е. од втората координата на B и C, до втората координата на A и D)

Бараната плоштина ќе биде еднаква на

$$\boxed{P=\int_1^4 (p_{CD}-p_{AB})dy}\,.$$

- равенка на права низ $C(\overset{x_1}{7};\overset{y_1}{1})$ и $D(\overset{x_2}{6};\overset{y_2}{4})$ (изразена како функција од y):

$$p_{CD}=p_{CD}(y)=\frac{6-7}{4-1}(y-1)+7=-\frac{1}{3}(y-1)+7$$
$$=-\frac{1}{3}y+\frac{1}{3}+7=\boxed{-\frac{1}{3}y+\frac{22}{3}}$$

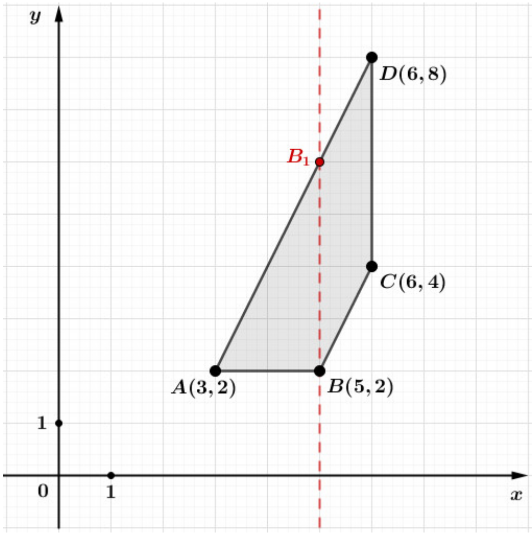
- равенка на права низ $A(\overset{x_1}{3};\overset{y_1}{4})$ и $B(\overset{x_2}{1};\overset{y_2}{1})$ (изразена како функција од y):

$$p_{AB}=p_{AB}(y)=\frac{1-3}{1-4}(y-4)+3=\frac{2}{3}(y-4)+3$$
$$=\frac{2}{3}y-\frac{8}{3}+3=\boxed{\frac{2}{3}y+\frac{1}{3}}$$

Од тука следи дека

$$P=\int_1^4\left[\left(-\frac{1}{3}y+\frac{22}{3}\right)-\left(\frac{2}{3}y+\frac{1}{3}\right)\right]dy=\int_1^4(-y+7)dy=\left(-\frac{y^2}{2}+7y\right)\Bigg|_{y=1}^{y=4}$$
$$=\left(-\frac{4^2}{2}+7\cdot 4\right)-\left(-\frac{1^2}{2}+7\cdot 1\right)=(-8+28)-\underbrace{\left(-\frac{1}{2}+7\right)}_{=-0,5+7=6,5}=20-6,5=\boxed{13,5}\text{ кв.ед.}$$

в) За четириаголникот $ABCD$ (даден на подолната слика) чии темиња се со координати $A(3;2)$, $B(5;2)$, $C(6;4)$ и $D(6;8)$, важи



• правата CD е паралелна со y – оска,

• правата AB е паралелна со x – оска.

Од тука, за да се пресмета неговата плоштина со помош на определен интеграл, а притоа интеграцијата да биде по променливата x, четириаголникот $ABCD$ се дели на два дела со права повлечена низ темето B која е паралелна на $y-$оската (изборот темете зависи од неговата положба). Во тој случај, плоштината на $ABCD$ ќе биде еднаква на збирот на плоштините на триаголникот ABB_1 и четириаголникот (во овој случај паралелограмот) $BCDB_1$, т.е.

$$\begin{aligned} P &= P_{ABB_1} + P_{BCDB_1} \\ &= \int_3^5 [p_{AD}(x) - p_{AB}(x)]dx + \int_5^6 [p_{AD}(x) - p_{BC}(x)]dx \end{aligned}$$

• права низ точките $A(\overset{x_1}{3}, \overset{y_1}{2})$ и $D(\overset{x_2}{6}, \overset{y_2}{8})$ (како функција од x):

$$\boxed{p_{AD}(x)} = \frac{8-2}{6-3}(x-3)+2 = 2(x-3)+2 = \boxed{2x-4},$$

• права низ точките $A(3,2)$ и $B(5,2)$ кои имаат иста втора координата (како функција од x):

$$\boxed{p_{AB}(x) = 2},$$

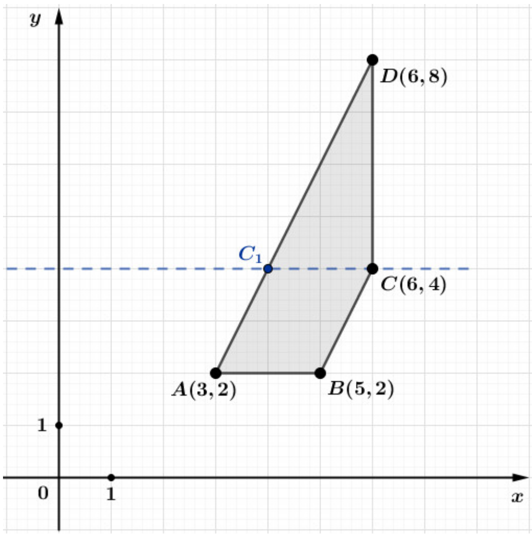
• права низ точките $B(\overset{x_1}{5}, \overset{y_1}{2})$ и $C(\overset{x_2}{6}, \overset{y_2}{4})$ (како функција од x):

$$\boxed{p_{BC}(x)} = \frac{4-2}{6-5}(x-5)+2 = 2(x-5)+2 = \boxed{2x-8}.$$

Од тука следи дека бараната плоштина ќе биде

$$
\begin{aligned}
P &= P_{ABB_1} + P_{BCDB_1} \\
&= \int_3^5 (p_{AD} - p_{AB})dx + \int_5^6 (p_{AD} - p_{BC})dx \\
&= \int_3^5 [(2x-4)-2]dx + \int_5^6 [(2x-4)-(2x-8)]dx = \int_3^5 (2x-6)dx + \int_5^6 4dx \\
&= (x^2-6x)\Big|_{x=3}^{x=5} + 4x\Big|_{x=5}^{x=6} = [(5^2-6\cdot 5)-(3^2-6\cdot 3)] + (4\cdot 6 - 4\cdot 5) = \boxed{8} \text{ кв.ед.}
\end{aligned}
$$

Напомена : За да се определи плоштината на четириаголникот $ABCD$ со помош на определен интеграл, а притоа интеграцијата да биде по променливата y, четириаголникот $ABCD$ се дели на два дела со права повлечена низ темето C која е паралелна на $x-$оската како на десната слика. Во овој случај, плоштината ќе се пресмета според формулата



$$
\begin{aligned}
P &= P_{ABCC_1} + P_{C_1CD} \\
&= \int_2^4 [p_{BC}(y) - p_{AD}(y)]dy + \int_4^8 [p_{CD}(y) - p_{AD}(y)]dy
\end{aligned}
$$

Остатокот од решението се остава за домашна работа.

Дополнителни задачи за домашна работа од предходниот тип:

Со помош на определен интеграл да се пресмета плоштината на четириаголникот со темиња

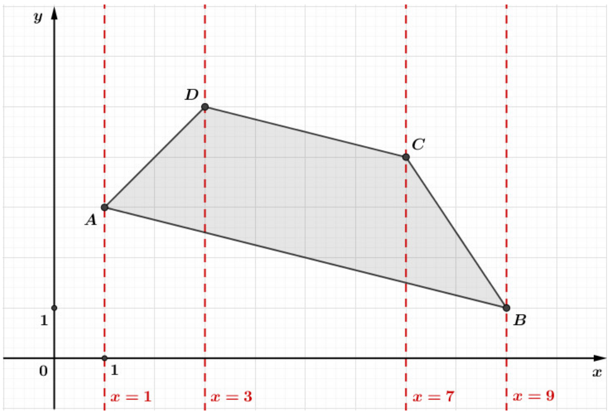
а) $A(-2;2)$, $B(-2;-2)$, $C(4;-3)$ и $D(4;4)$,

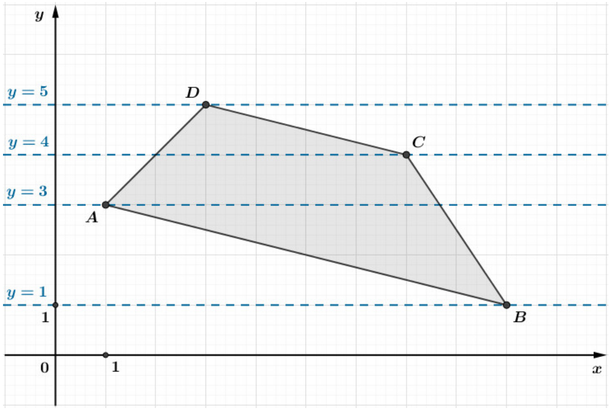
б) $A(0;3)$, $B(-3;-2)$, $C(7;-2)$ и $D(5;3)$,

в) $A(1;6)$, $B(7;0)$, $C(7;3)$ и $D(4;6)$,

г) $A(1;6)$, $B(7;0)$, $C(7;3)$ и $D(4;6)$.

Упатство за г): При интеграција по променливата x четириаголникот да се подели на три дела како на левата слика подолу, а при интеграција по променливата y, четириаголникот да се подели на три дела како на левата слика.





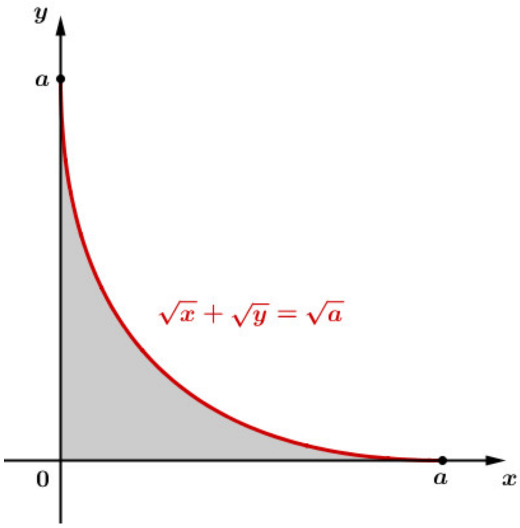
Задача 3

Friday, March 27, 2020 08:00

(Задача 4/стр. 143/Материјали)

Да се пресмета плоштината на рамнинската фигура ограничена со координатните оски и кривата $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{a}$ $(a=const>0)$.

Решение: Рамнинската фигура чија плоштина треба да се пресмета е дадена на десната слика. Равенката на кривата со која оваа фигура е ограничена од горе (од десно) е зададена во имплицитен облик. Ако интеграцијата се врши по променливата x, равенката на кривата треба да се запише во експлицитен облик $y=f(x)$.



$$\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{a} \quad \Rightarrow \quad \sqrt{y}=\sqrt{a}-\sqrt{x} \quad (\cdot)^2$$
$$\Rightarrow \quad y=a-2\sqrt{ax}+x=f(x)$$

Бараната плоштина ќе биде

$$P=\int_0^a y dx=\int_0^a (a-2\sqrt{a}\sqrt{x}+x)dx$$

$$=a\int_0^a dx-2\sqrt{a}\int_0^a \sqrt{x}dx+\int_0^a xdx= \quad ax\Big|_{x=0}^{x=a}+2\sqrt{a}\cdot\frac{2x\sqrt{x}}{3}\Big|_{x=0}^{x=a}+\frac{x^2}{2}\Big|_{x=0}^{x=a}$$

$$= a(a-0)+2\sqrt{a}\left(\frac{2a\sqrt{a}}{3}-\frac{2\cdot 0\cdot\sqrt{0}}{3}\right)+\left(\frac{a^2}{2}-\frac{0^2}{2}\right)$$

$$= a^2-\frac{4a^2}{3}+\frac{a^2}{2}=\boxed{\frac{a^2}{6}}\text{ кв.ед.}$$

Задача 4

Friday, March 27, 2020 08:00

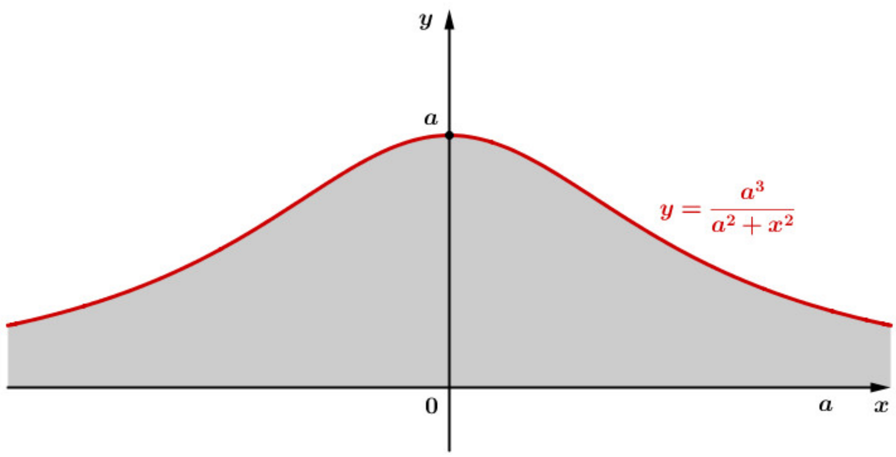
(Задача 10.б/стр. 148/Материјали)

Да се пресмета плоштината на рамнинската фигура ограничена со x – оската и кривата

$$y=\frac{a^3}{a^2+x^2}\ (a=const>0).$$

Решение: Функцијата $y=\dfrac{a^3}{a^2+x^2}$ е со следните особини

- дефинирана е на целата бројна права (т.е. $D=(-\infty,+\infty)$),
- таа е парна, нејзиниот график е симетричен во однос на $y-$оската, дополнително, ова значи дека делот од рамнинската фигура ограничена со дадената крива и $x-$оската кој се наоѓа лево од $y-$оската има иста плоштина како делот кој се наоѓа десно од $y-$оската (т.е. плоштините P_1 и P_2 на подолната слика се еднакви),
- графикот нема ниту една пресечна точка со $x-$оската, што значи дека интервалот по кој треба да се врши интеграција е $(-\infty,+\infty)$.



Од предходното следи дека

$$P=\int_{-\infty}^{+\infty} y dx=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{a^3}{a^2+x^2}dx=2\int_{0}^{+\infty}\frac{a^3}{a^2+x^2}dx=2a^3\int_{0}^{+\infty}\frac{dx}{a^2+x^2}$$

$$=2a^3\lim_{b\to+\infty}\int_{0}^{+\infty}\frac{dx}{a^2+x^2}=2a^3\lim_{b\to+\infty}\left[\frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a}\Big|_{x=0}^{x=b}\right]$$

$$=2a^3\cdot\frac{1}{a}\lim_{b\to+\infty}\left[\operatorname{arctg}\frac{x}{a}\Big|_{x=0}^{x=b}\right]=2a^2\lim_{b\to+\infty}\left(\operatorname{arctg}\frac{b}{a}-\operatorname{arctg}\frac{0}{a}\right)$$

$$=2a^2\left(\frac{\pi}{2}-0\right)=\boxed{a^2\pi}\text{ кв.ед.}$$

Задача 5

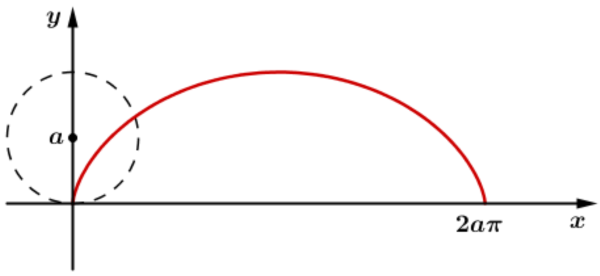
Friday, March 27, 2020 08:00

(Задача 9/стр. 132/Збирка)

Да се пресмета плоштината на рамнинската фигура ограничена со кривата

$$\begin{cases}x=a(t-\sin t)\\ y=a(1-\cos t)\end{cases},\ (0\le t\le 2\pi)$$

и правата $y=0$.



Решение: Со дадените параметарски равенки и интервалот во кој се менува параметарот е опишан еден свод на циклоида (десната слика). Ако циклоидата се интерпретира како траекторија на материјална точка, нараснување на параметарот (т.е. кога t се менува од 2π), ќе ја опиши траекторијата од координатниот почеток до точката со координати $(2a\pi,0)$, бараната плоштина ќе биде

$$P=\int_{t_1}^{t_2} y(t)x_t'(t)dt=\int_{0}^{2\pi} a(1-\cos t)\cdot\underbrace{a(1-\cos t)}_{=x_t'(t)}dt=a^2\cdot\int_{0}^{2\pi}(1-\cos t)^2dt$$

$$=a^2\cdot\int_{0}^{2\pi}(1-2\cos t+\cos^2 t)dt=a^2\left[\int_{0}^{2\pi}dt-2\int_{0}^{2\pi}\cos t dt+\int_{0}^{2\pi}\cos^2 t dt\right]$$

$$=a^2\left[\ t\Big|_{t=0}^{t=2\pi}\ -2\sin t\Big|_{t=0}^{t=2\pi}+\int_{0}^{2\pi}\frac{1+\cos 2t}{2}dt\right]$$

$$=a^2\left[(2\pi-0)-2(\underbrace{\sin 2\pi}_{=0}-\underbrace{\sin 0}_{=0})+\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}dt+\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\cos 2t dt\right]$$

$$=a^2\left[2\pi+\frac{t}{2}\Big|_{t=0}^{t=2\pi}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\sin 2t\Big|_{t=0}^{t=2\pi}\right]=a^2\left[2\pi+\left(\frac{2\pi}{2}-\frac{0}{2}\right)+\frac{1}{4}(\underbrace{\sin 4\pi}_{=0}-\underbrace{\sin 0}_{=0})\right]$$

$$=a^2(2\pi+\pi)=\boxed{3a^2\pi}\text{ кв.ед.}$$

Задача 6

Friday, March 27, 2020 08:00

(Задача 16/стр. 155/Материјали)

Да се пресмета плоштината на рамнинската фигура ограничена со кардиоидата

$$\begin{cases} x=a(2\cos t-\cos 2t) \\ y=a(2\sin t-\sin 2t) \end{cases}.$$

Решение: Со дадените параметарски равенки опишана кардиоида дадена на левата слика. Ако кардиоидата се интерпретира како траекторија на материјална точка

- целата крива ќе се помини кога параметарот се менува во интервалот $[0;2\pi]$ и тоа почнувајќи од точката со координати $(a,0)$ и, движејќи се по делот од кривата над $x-$оската, преку точката со координати $(-3a,0)$ која кореспондира на вредноста $t=\pi$, повторно враќање во точката со координати $(a,0)$ (ова значи дека треба да се искористи формулата со знак „$-$“ пред интеграл).
- делот од рамнинската фигура над $x-$оската има иста плоштина со делот под $x-$оската.

Бидејќи

$$x_t'(t)=[a(2\cos t-\cos 2t)]_t'=a(-2\sin t+2\sin 2t)=2a(\sin 2t-\sin t),$$

според предходното, за бараната плоштина имаме

$$P=2P_1=-2\int_0^{\pi}y(t)x_t'(t)dt=-2\int_0^{\pi}a(2\sin t-\sin 2t)\cdot 2a(\sin 2t-\sin t)dt$$

$$=-4a^2\int_0^{\pi}(2\sin t-\sin 2t)\cdot(\sin 2t-\sin t)dt$$

$$=-4a^2\int_0^{\pi}(2\sin t\sin 2t-2\sin^2 t-\sin^2 2t+\sin 2t\sin t)dt$$

$$=-4a^2\int_0^{\pi}(3\sin 2t\sin t-2\sin^2 t-\sin^2 2t)dt$$

$$=-4a^2\left[3\underbrace{\int_0^{\pi}\sin 2t\sin t\,dt}_{I_1}-2\underbrace{\int_0^{\pi}\sin^2 tdt}_{I_2}-\underbrace{\int_0^{\pi}\sin^2 2tdt}_{I_3}\right].$$

$$I_1=\int_0^{\pi}\sin 2t\sin t\,dt=\int_0^{\pi}(2\sin t\cos t)\sin t\,dt=2\int_0^{\pi}\sin^2 t\cos t\,dt$$

$$=\left|\begin{array}{l}\text{смена:}\\ \sin t=z\Rightarrow \cos tdt=dz\\ t=0\Rightarrow z=\sin 0=0\\ t=\pi\Rightarrow z=\sin\pi=0\end{array}\right|=2\int_0^0 z^2dz=\boxed{0}\,(\text{иста горна и долна граница})$$

Напомена за предходниот интеграл: Ако прво се решава како неопределен интеграл, со предходната смена се добива

$$\int\sin^2 t\cos t\,dt=\int z^2dz=\frac{z^3}{3}=\frac{\sin^3 t}{3},$$

и, последователно

$$I_1=\frac{2}{3}\sin^3 t\Big|_{t=0}^{t=\pi}=\frac{2}{3}(\sin^3\pi-\sin^3 0)=0.$$

$$I_2=\int_0^{\pi}\sin^2 t\;dt=\int_0^{\pi}\frac{1-\cos 2t}{2}dt=\frac{1}{2}\left[\int_0^{\pi}dt-\int_0^{\pi}\cos 2t\,dt\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[t\;\Big|_{t=0}^{t=\pi}-\frac{1}{2}\sin 2t\Big|_{t=0}^{t=\pi}\right]=\frac{1}{2}\left[(\pi-0)-\frac{1}{2}\underbrace{(\sin 2\pi-\sin 0)}_{=0-0=0}\right]=\frac{\pi}{2}$$

$$I_3=\int_0^{\pi}\sin^2 2t\;dt=\int_0^{\pi}\frac{1-\cos 4t}{2}dt=\frac{1}{2}\left[\int_0^{\pi}dt-\int_0^{\pi}\cos 4t\,dt\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[t\;\Big|_{t=0}^{t=\pi}-\frac{1}{4}\sin 4t\Big|_{t=0}^{t=\pi}\right]=\frac{1}{2}\left[(\pi-0)-\frac{1}{2}\underbrace{(\sin 4\pi-\sin 0)}_{=0-0=0}\right]=\frac{\pi}{2}$$

Тогаш

$$\boxed{P=-4a^2\left[3\cdot 0-2\cdot\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}\right]=6a^2\pi\text{ кв.ед.}}$$

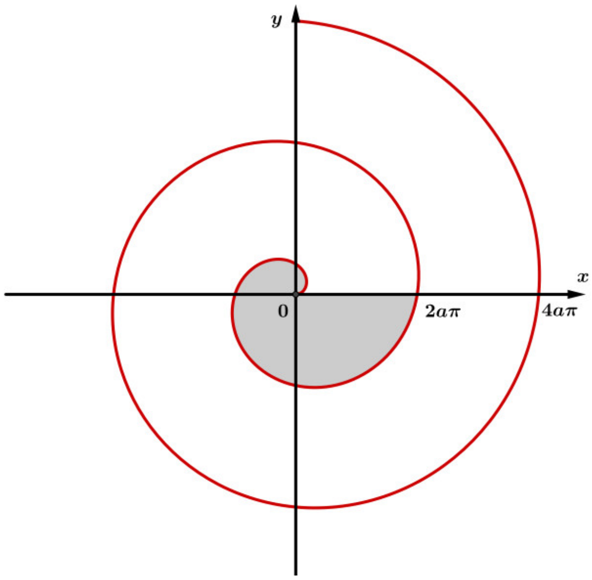
Задача 7

Friday, March 27, 2020 08:00

(Задача 12/стр. 152/Материјали)

Да се пресмета плоштината на рамнинската фигура ограничена Архимедовата спирала $\rho=a\theta$ кога θ се менува од 0 до 2π.

Решение: Треба да се пресмета плоштината на сиво обоената фигура на десната слика. Бидејќи кривата е зададена со поларна равенка, за бараната плоштина имаме



$$P=\frac{1}{2}\cdot\int_0^{2\pi}[\rho(\theta)]^2d\theta=\frac{1}{2}\cdot\int_0^{2\pi}(a\theta)^2d\theta$$

$$=\frac{a^2}{2}\cdot\int_0^{2\pi}\theta^2d\theta=\frac{a^2}{2}\cdot\frac{\theta^2}{3}\Big|_{\theta=0}^{\theta=2\pi}$$

$$=\frac{a^2}{6}\cdot[(2\pi)^3-0^3]=\frac{a^2}{6}\cdot 8\pi^3$$

$$=\boxed{\frac{4a^2\pi^3}{3}}\text{ кв.ед.}$$

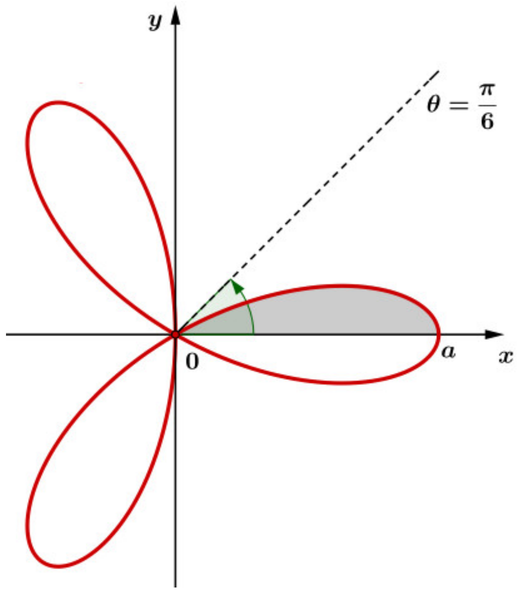
Задача 8

Friday, March 27, 2020 08:00

(Задача 13/стр. 152/Материјали)

Да се пресмета плоштината на рамнинската фигура ограничена трилистната роза $\rho=a\cos 3\theta$.

Решение: Сите три листови на розата се со иста плоштина што имплицира дека бараната плоштината е еднаква на тројната плоштина на листот пресечен со позитивниот дел од $x-$ оската. Оваа пак плоштина е еднаква на двојната вредност на плоштината на сиво обоениот дел на десната слика кој е ограничен со кривата кога аргументот се менува од 0 до $\pi/6$. Од тука следи дека бараната плоштина е еднаква на



$$P = 6P_1 = 6\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\pi/6}[\rho(\theta)]^2 d\theta = 3\int_0^{\pi/6}(a\cos 3\theta)^2 d\theta = 3a^2\cdot\int_0^{\pi/6}\cos^2 3\theta d\theta$$

$$= 3a^2\cdot\int_0^{\pi/6}\frac{1+\cos 6\theta}{2}d\theta = \frac{3a^2}{2}\left[\int_0^{\pi/6}d\theta + \int_0^{\pi/6}\cos(6\theta)d\theta\right]$$

$$= \frac{3a^2}{2}\left[\underbrace{\theta\Big|_{\theta=0}^{\theta=\pi/6}}_{=\pi/6} + \underbrace{\frac{1}{6}\sin(6\theta)\Big|_{\theta=0}^{\theta=\pi/6}}_{=0}\right] = \frac{3a^2}{2}\cdot\frac{\pi}{6} = \boxed{\frac{a^2\pi}{4}} \text{ кв.ед.}$$