ФИКТ

Дигитална логика и системи

3

Булова Алгебра. Комбинаторна логика. Техники за редукција.

Доц. д-р Никола Рендевски

nikola.rendevski@fikt.edu.mk

летен семестар, 2017/2018
ФИКТ, УКЛО, Битола

Комбинаторни и Секвенцијални дигитални кола

- Дигиталните кола без разлика дали изведуваат контролни или логички функции припаѓаат на две класи:
  - **Комбинаторни** (Combinational)
  - **Секвенцијални** (Sequential)
- Кај комбинаторните кола излезот/излезите од колото зависат само од тековната состојба на влезовите
- Кај секвенцијалните кола излезот зависи од тековната состојба на влезовите но **И** од претходните состојби на влезовите
  - *Воспоставена е повратна врска од излезот кон влезот
- Секвенцијалната логика се користи за конструкција на т.н. конечни автомати (finite state machines)
- Секвенцијалната логика се дели на синхрона и асинхрона

Комбинаторни и Секвенцијални дигитални кола

- Секвенцијалните кола <u>мораат да содржат мемориски елементи </u>со цел да ја зачуваат „историјата“ на претходните состојби на влезовите
- Комбинаторните кола не содржат мемориски сегменти
- Дигиталните архитектурни реализации најчесто содржат кола од двете класи
- Без разлика дали се работи за комбинаторни или секвенцијални: двата типови содржат исти градбени блокови (AND, OR, NOT) порти
- <u>Разликата е само во начинот на кој логичките порти се поврзани помеѓу себе</u>!

Апликативен Пример: за разликата помеѓу комбинаторна и секвенцијална логика

- Да претпоставиме безбедносен систем на автомобил кој треба да активира аларм: кога алармот системот е вклучен и се отвора врата (сензор) или се детектираат вибрации (преку сензор кој дава 1 при вибрација)
- Ако се користи комбинаторна логика алармот би се исклучил доколку вратата се затвори и вибрациите престанат
- **Реално:** Од системот се очекува да продолжи со сирената се додека сопственикот не го исклучи/деактивира системот
- За да се овозможи таква функционалност системот мора да запампти дека еднаш еден од влезовите дал високо ниво и да продолжи со алармот се додека системот не се ресетира
- Оваа функционалност може да се реализира единствено со секвенцијална логика (секвенцијално коло) со мемориски елементи

Булова алгебра (Закони и правила)

- George Bool во 1854 развил систем на математичка логика (Булова алгебра)
- Врз основа на Буловата идеја, Claude Shannon (Шенон) во 1938 докажал дека колата базирани на бинарни прекинувачи (ON-OFF) можат лесно да се опишат со Буловата Алгебра
- Законите во буловата алгебра се слични со законите во основната математичка алгебра
- OR претставува булово (бинарно) „собирање“
- AND претставува булово (бинарно) „множење“
- Трите основни <u>**закони**</u> од регуларната алгебра важат и во Буловата алгерба:
  - **Комутативен**,
  - **Асоцијативен**
  - **Дистрибутивен**
- **Овие закони важат за било колкав број на влезни променливи (A,B,C,D,E……)**

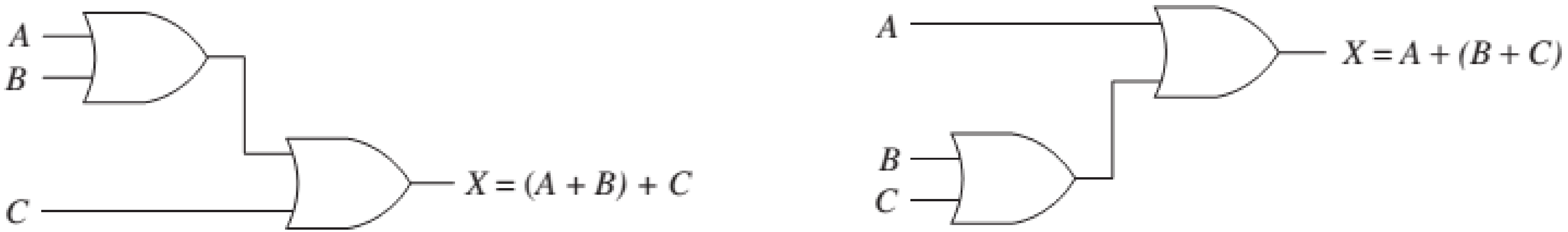
Булова алгебра (Закони)

- Комутативен закон за собирање и множење
  - (A+B)=(B+A);
  - AB=BA

Комутативен закон

Булова алгебра (Закони)

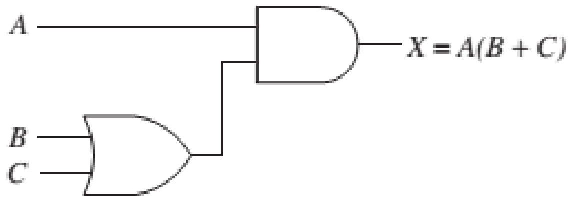
- Асоцијативен закон за собирање (OR) и множење (AND)
  - $A + (B + C) = (A + B) + C$
  - $A(BC) = (AB)C$

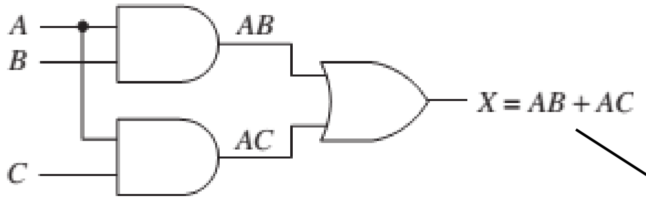


Асоцијативен закон

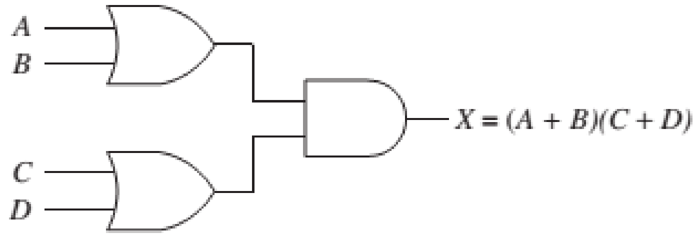
Булова алгебра (Закони)

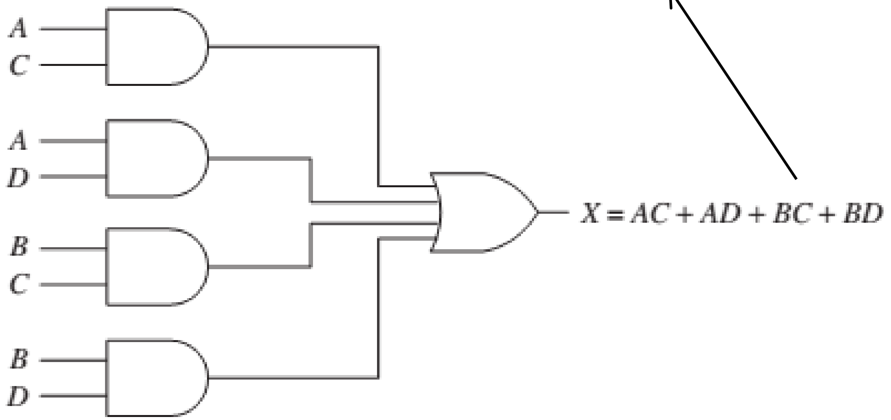
- Дистрибутивен закон
  - $A(B + C) = AB + AC$
  - $(A + B)(C + D) = AC + AD + BC + BD$





Дистрибутивен закон





****Сума од производи!**

SoP

Булова алгебра (Закони)

- Зошто е потребно користењето на законите?
  - Реструктуирање на булови изрази (равенства),
  - Промени во комбинаторните логички кола,
  - Редукција на дигиталните архитектури со главна цел – користење на помал број логички порти
  - Примена во ситуации кога на располагање имаме ограничен број и типови на основни логички порти
- Во комбинација со примена на т.н **Булови ПРАВИЛА** се овозможува редукција т.е елиминација на одредени варијабли кои немаат никакво влијание врз крајната состојба на излезот
- Се овозможува дизајн на значително попрости дигитални архитектури, со оптимизиран број на логички блокови
- Врз основа на буловата алгебра, развиени се и пософистицирани методи за редукција на логички функции

Булова алгебра (Основни Правила)

1	$A \cdot 0 = 0$
2	$A \cdot 1 = A$
3	$A + 0 = A$
4	$A + 1 = 1$
5	$A \cdot A = A$
6	$A + A = A$
7	$A \cdot \overline{A} = 0$
8	$A + \overline{A} = 1$
9	$\overline{\overline{A}} = A$
10	(a) $A + \overline{A}B = A + B$ (b) $\overline{A} + AB = \overline{A} + B$

Булова алгебра (Правила)

- Сите правила можат да бидат докажани на два начини
  - Таблица на вистинитост
  - Со користење на претходно докажани аксиоми и теореми
- **За комплемент (инверезна вредност) се користи **A’ или Ā**
- **Пример:**
  - **Со користење на правилата да се трансформираат изразите:**

$$\text{(a)}\ \overline{B} + AB = ?$$

$$\text{(b)}\ B + \overline{B}C = ?$$

  - **Решение а)**

Според комут. закон $\overline{B} + AB = \overline{B} + BA$

Правилото 10 $\overline{A} + AB = \overline{A} + B$

$$\overline{B} + BA = \overline{B} + A = A + \overline{B}$$

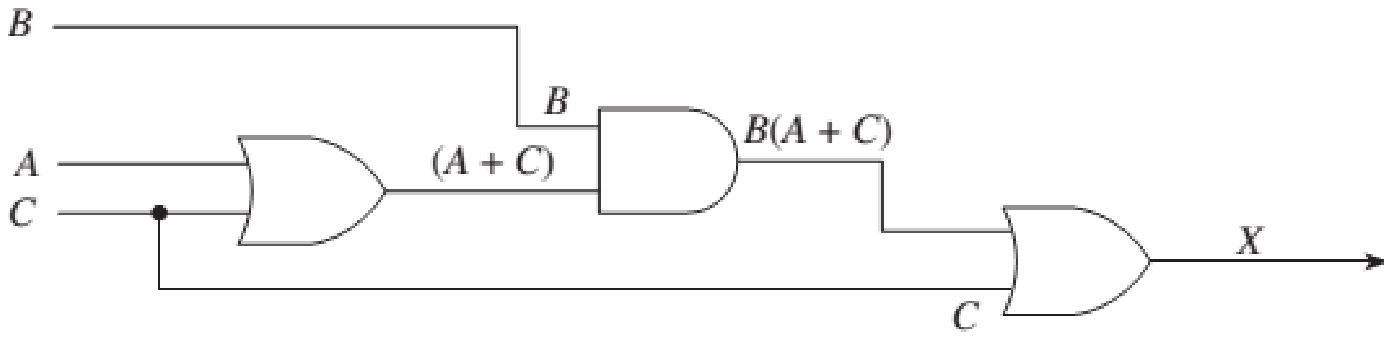
Упростување на комбинаторни кола со примена на Буловите закони и правила

- Често во дигиталната техника: финалниот дизајн претставува комплексна комбинација од голем број на логички порти
- Некои од портите имаат исти влезови, а излезите се влез во други порти
- Во овој момент дизајнерот се враќа наназад да ја ревидира комбинаторната логика во насока да се упрости <u>без притоа да се наруши нејзината функционалност и точност</u>
- Се бара можност истата функционалност да се реализира со помалку порти или влезови

Упростување на комбинаторни кола со примена на Буловите закони и правила

- Овој процес се нарекува и редукција (Reduction)
- Ќе дадеме неколку примери во кои се искористени овие техники
- Следно:
  - Де Морган-ови закони
  - Карнови Мапи
  - Булова функција:
    - Канонoчки, стандардни и нестандардни форми
- Реализација на реален проблем во комбинаторна логика

Задача 1.



Решение:

$$X = B(A + C) + C$$

дистрибутивен закон: $[B(A + C) = BA + BC]$:

$$X = BA + BC + C$$

$$X = BA + C(B + 1)$$

правило 4: $(B + 1 = 1)$:

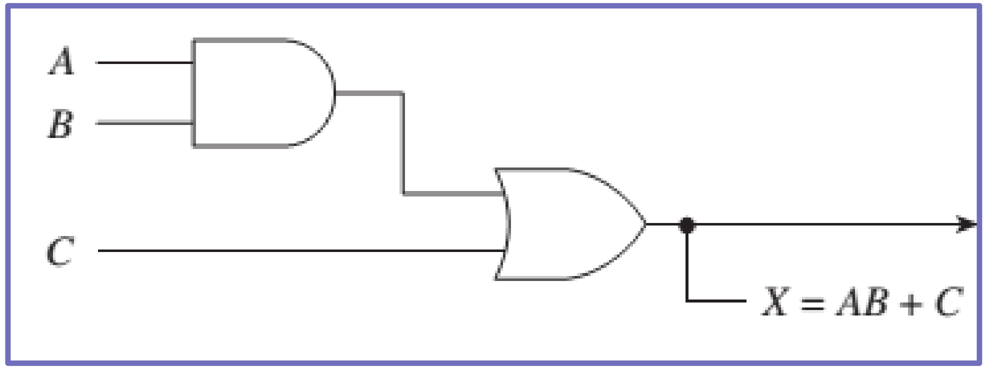
$$X = BA + C \cdot 1$$

правило 2: $(C \cdot 1 = C)$:

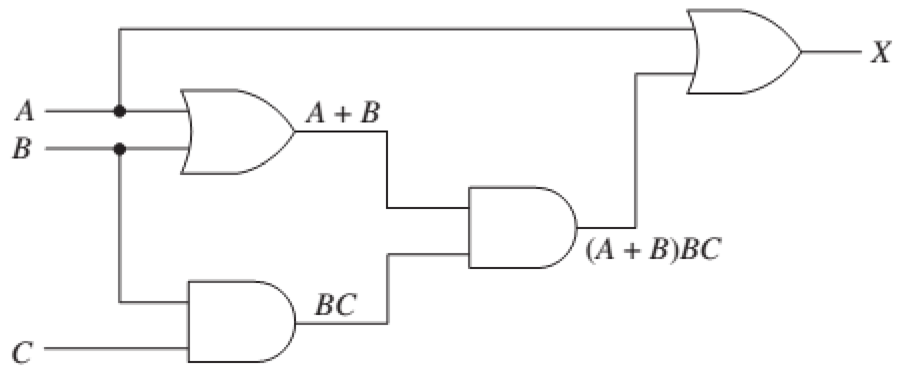
$$X = BA + C$$

$(BA = AB)$: **комутативен закон**

$X = AB + C$ ← **упростена ф-ја**



Задача 2.



Решение: $X = (A + B)BC + A$

дистриб. закон $[(A + B)BC = ABC + BBC]$:

$$X = ABC + BBC + A$$

правило 5: $(B \cdot B = B)$:

$$X = A\underline{BC} + \underline{BC} + A$$

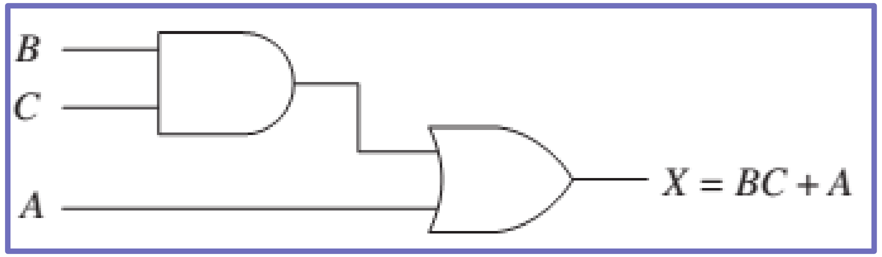
$$X = BC(A + 1) + A$$

правило 4: $(A + 1 = 1)$:

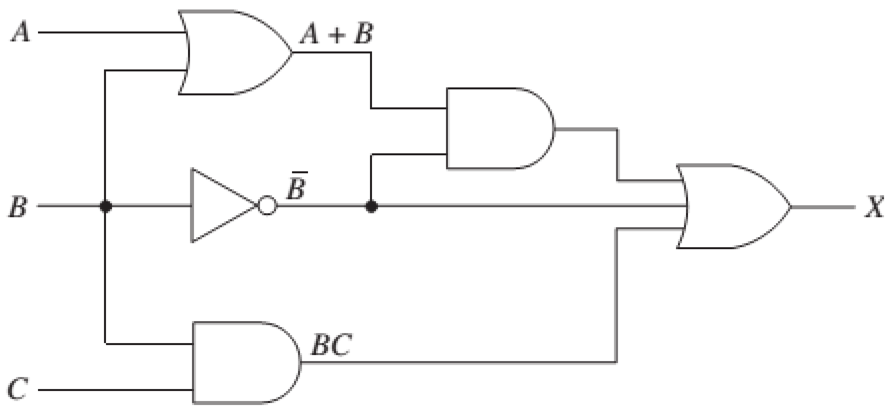
$$X = BC \cdot 1 + A$$

правило 2: $(BC \cdot 1 = BC)$:

$X = BC + A$ ← **упростена ф-ја**



Задача 3.



Решение:

$$X = (A + B)\overline{B} + \overline{B} + BC$$

$$[(A + B)\overline{B} = A\overline{B} + B\overline{B}]:$$

$$X = A\overline{B} + B\overline{B} + \overline{B} + BC$$

$(B\overline{B} = 0)$:

$$X = A\overline{B} + 0 + \overline{B} + BC$$

$(A\overline{B} + 0 = A\overline{B})$:

$$X = A\underline{\overline{B}} + \underline{\overline{B}} + BC$$

$$X = \overline{B}(\underline{A + 1}) + BC$$

$(A + 1 = 1)$:

$$X = \overline{B} \cdot 1 + BC$$

$(\overline{B} \cdot 1 = \overline{B})$:

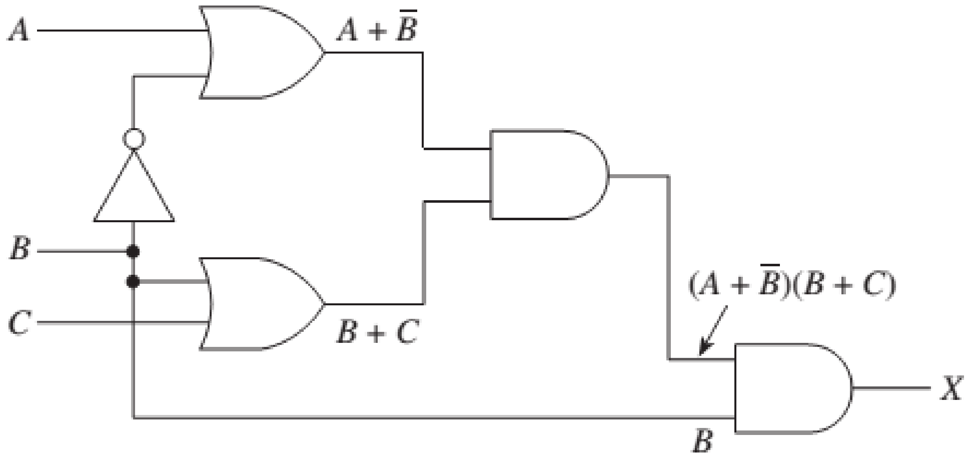
$$X = \overline{B} + BC$$

Правило 10.б $(\overline{B} + BC = \overline{B} + C)$:

$$X = \overline{B} + C$$

Логичката вредност на А не влијае на излезот

Задача 4.



$$X = [(A + \overline{B})(B + C)]B$$

$$X = (AB + AC + \underline{\overline{B}B} + \overline{B}C)B \qquad \cancel{\overline{B}B}=0$$

$$X = (AB + AC + \overline{B}C)\,B$$

$$X = ABB + ACB + \overline{B}CB$$

$$X = ABB + ABC + \underline{\overline{B}B}C$$

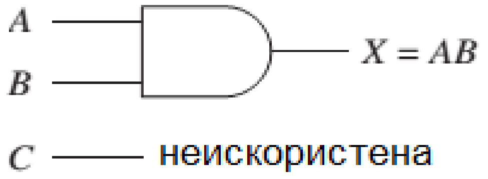
$$X = AB + ABC + 0 \cdot C$$

Логичкото ниво на C не влијае на излезот

$$X = AB + ABC$$

$$X = AB\,\underline{(1 + C)} \qquad *(1+C=1)$$

$X = AB$ ← Упрост.



Теорема на Де Морган

- *Во претходните случаи не искористивме NAND и NOR логички порти
- За упростување на комбинаторните логички кола кои содржат NAND и NOR ја користиме теоремата на Augustus De Morgan
- Оваа теорема овозможува конверзија на булови изрази од збирови и производи кои се комплементирани (инвертирани) → во израз во кој <u>комплементите се само врз варијаблите</u> кои го сочинуваат целиот израз
- После ваквата конверзија можеме слободно да ги применуваме буловите закони и правилата!

Теорема на Де Морган

$$\overline{A \cdot B} = \overline{A} + \overline{B}$$

$$\overline{A + B} = \overline{A} \cdot \overline{B}$$

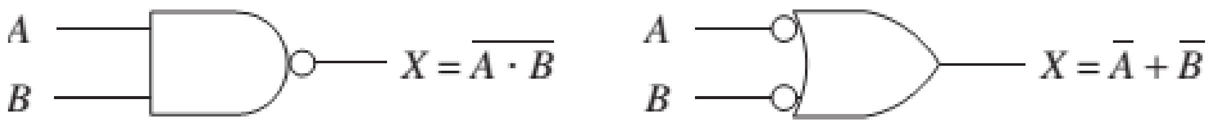
Важи и за повеќе варијабли:

$$\overline{A \cdot B \cdot C} = \overline{A} + \overline{B} + \overline{C}$$

$$\overline{A + B + C} = \overline{A} \cdot \overline{B} \cdot \overline{C}$$

- Го елиминираме комплементот врз целиот збир или производ, го менуваме AND во OR (OR во AND), а комплементот се става на секоја варијабла од под комплементираниот збир/производ

Теорема на Де Морган (Доказ со табела на вистинитост)



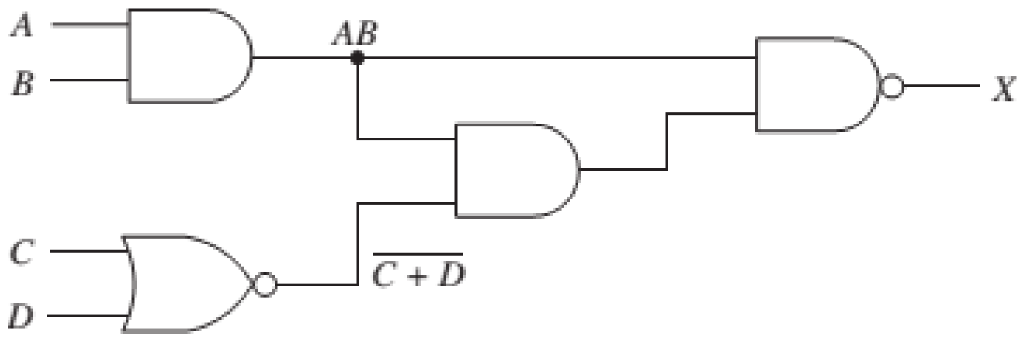
A	B	$X = \overline{AB}$
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

A	B	$X = \overline{A} + \overline{B}$
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Идентично

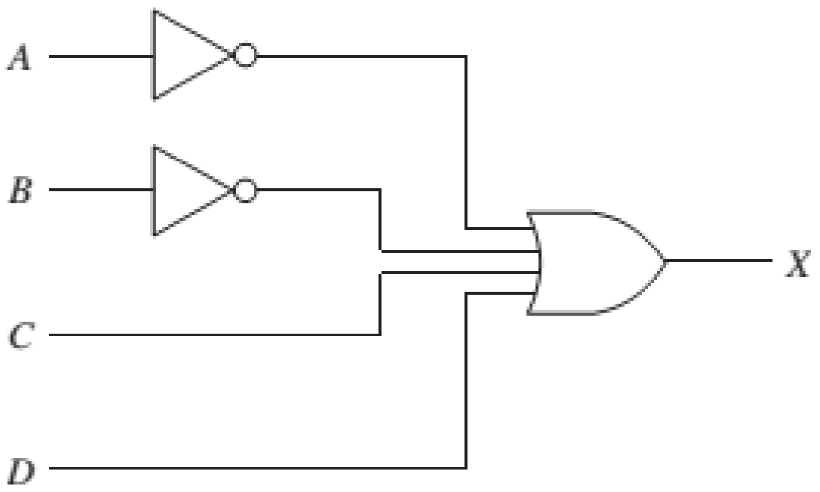
- Напомена: Теоремата да Де Морган има <u>универзална примена</u> во голем број на области од компјутерските науки. Пример во пребарување на текст, структури и бази на податоци итн.

Задача 5.

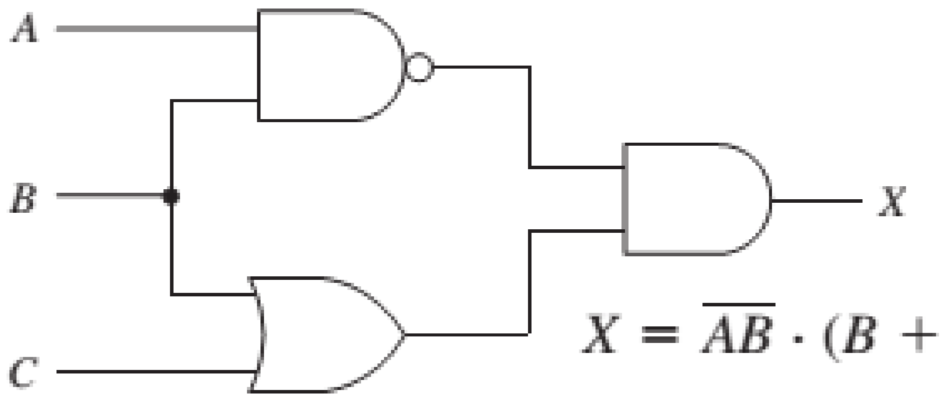


Решение:

$$
\begin{aligned}
X &= \overline{(AB \cdot \overline{C+D})AB} \\
&= \overline{AB \cdot \overline{C+D}} + \overline{AB} \\
&= \overline{AB} + \overline{\overline{C+D}} + \overline{AB} \\
&= \overline{A} + \overline{B} + C + D + \overline{A} + \overline{B} \\
&= \overline{A} + \overline{B} + C + D \quad \leftarrow \text{Редуциран израз}
\end{aligned}
$$



Задача 6.



$$X = \overline{AB} \cdot (B + C)$$

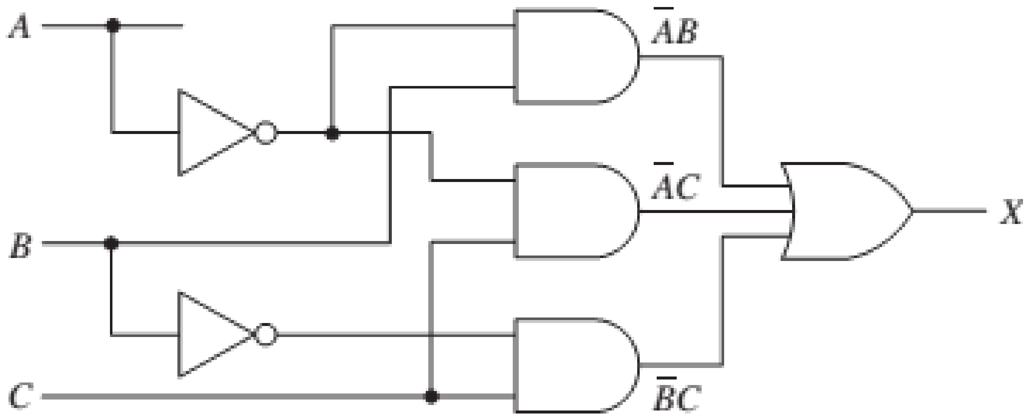
- Новодобиеното комбинаторно коло е покомплексно од оригиналното.
- Теоремата на Де Морган ги елиминира NOR (NAND) логичките порти. Сама по себе не гарантира редукција на комплексноста (бројот)!
- Резултатот по примената на Де Морган и Буловата алгерба е една многу значајна форма кај буловите функции „Сума од производи“ (Sum-of-Products) која има значајна улога при креирањето на таблица на вистинитост и употребата на Карновите мапи.

Со примена на Де Морган:

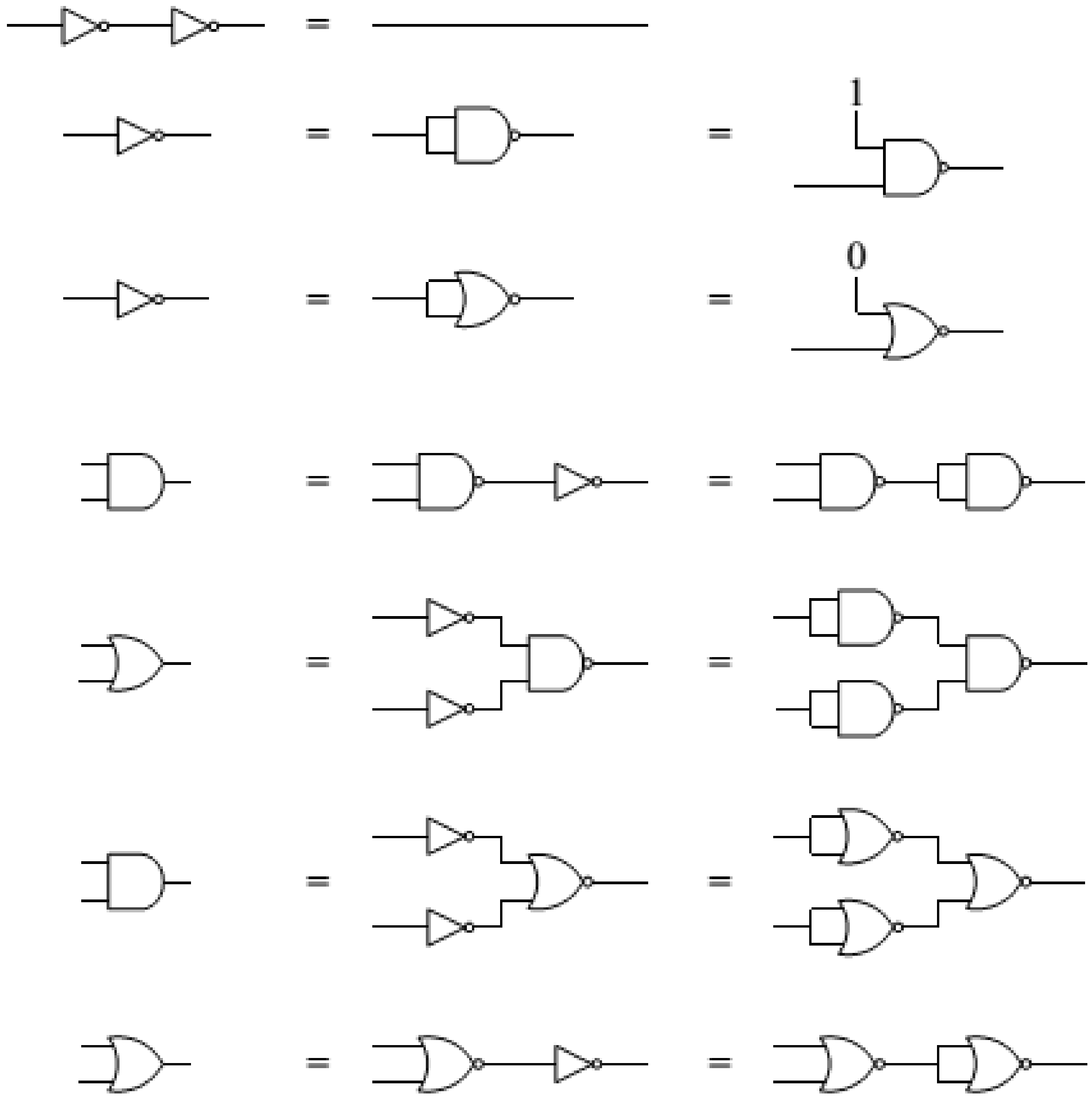
$$X = (\overline{A} + \overline{B}) \cdot (B + C)$$

$$X = \overline{A}B + \overline{A}C + \overline{B}B + \overline{B}C$$

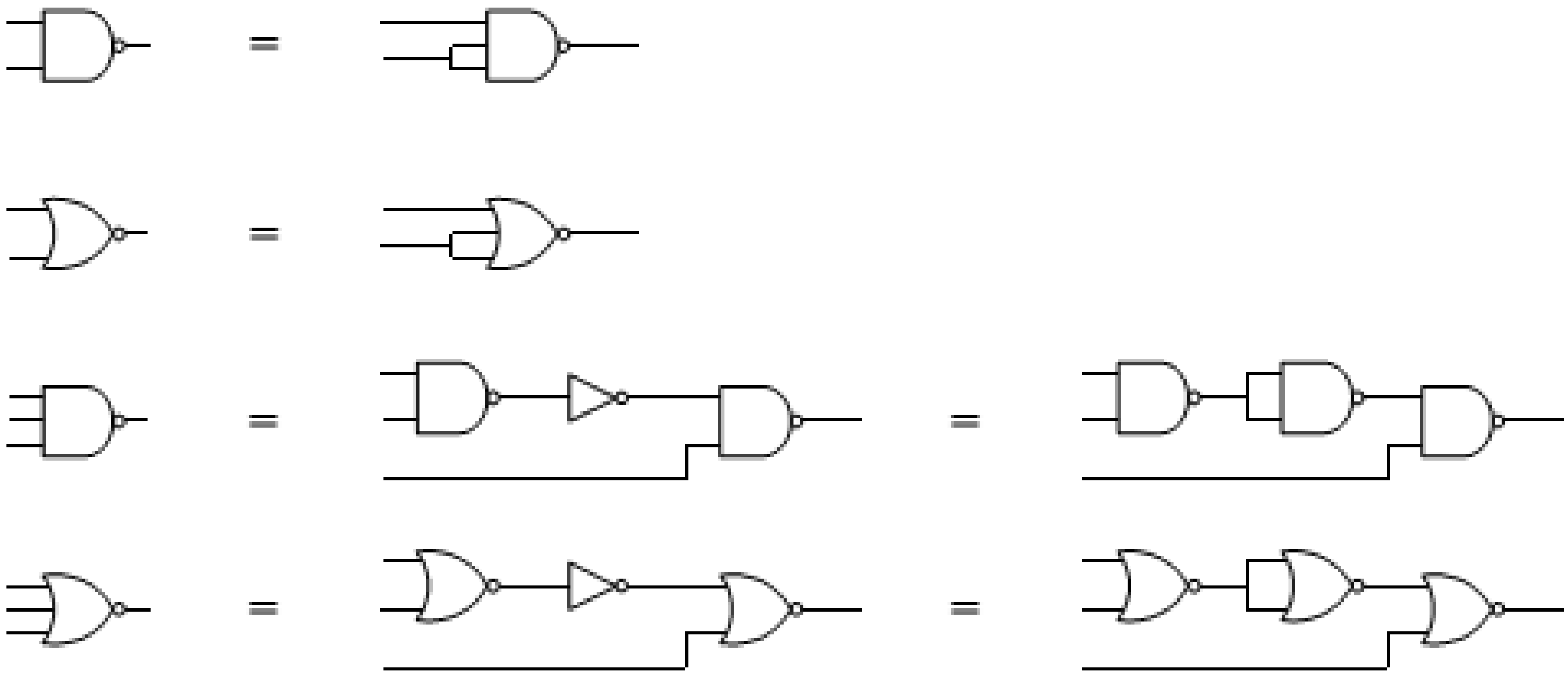
$$= \overline{A}B + \overline{A}C + \overline{B}C$$



Конверзија од AND, OR и NOT во NAND и NOR



Конверзија од двовлезен во тровлезен NAND и NOR и обратно



SoP, PoS

- Редукцијата на буловите изрази резултира со една од двете форми
  - PoS (Product of Sums) – Производ на суми
  - SoP (Sum of Products) – Сума на производи
- <u>SoP формата ни овозможува лесна реализација на таблицата на вистинитост</u>
- Преминот од PoS во SoP и обратно се реализира со примена на теоремата на Де Морган и дистрибутивниот закон
- Пример:

SoP, PoS

$$X = \overline{A\overline{B} + \overline{C}D}$$

$$X = \overline{A\overline{B}} \cdot \overline{\overline{C}D}$$

A	B	C	D	X
0	0	0	0	1
0	0	0	1	0
0	0	1	0	1
0	0	1	1	1
0	1	0	0	1
0	1	0	1	0
0	1	1	0	1
0	1	1	1	1
1	0	0	0	0
1	0	0	1	0
1	0	1	0	0
1	0	1	1	0
1	1	0	0	1
1	1	0	1	0
1	1	1	0	1
1	1	1	1	1

Бараме членови во SoP кои даваат 1!

$$X = (\overline{A} + B) \cdot (C + \overline{D}) \quad \leftarrow \text{POS}$$

$$X = \overline{A}C + \overline{A}\,\overline{D} + BC + B\overline{D} \quad \leftarrow \text{SOP}$$

0 1   0 0   1 1   1 0

1   1   1   1

Пополнување на таблица на вистинитост од SoP