Матрици, действия с матрици, матрични уравнения

Правоъгълната таблица от числа

$$A_{m\times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & ... & a_{1n} \\ ... & ... & ... \\ a_{m1} & ... & a_{mn} \end{pmatrix}$$

с m реда и n стълба се нарича матрица.

Сума (разлика) на матрици

$$\begin{pmatrix} a_{11} & ... & a_{1n} \\ ... & ... & ... \\ a_{m1} & ... & a_{mn} \end{pmatrix} \pm \begin{pmatrix} b_{11} & ... & b_{1n} \\ ... & ... & ... \\ b_{m1} & ... & b_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}\pm b_{11} & ... & a_{1n}\pm b_{1n} \\ ... & ... & ... \\ a_{m1}\pm b_{m1} & ... & a_{mn}\pm b_{mn} \end{pmatrix}$$

Произведение на матрица с число λ

$$\lambda \begin{pmatrix} a_{11} & ... & a_{1n} \\ ... & ... & ... \\ a_{m1} & ... & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & ... & \lambda a_{1n} \\ ... & ... & ... \\ \lambda a_{m1} & ... & \lambda a_{mn} \end{pmatrix}$$

Единична матрица. Квадратна матрица $E_{n\times n}$ се нарича единична, ако всички елементи по главния диагонал са единици, а останалите - нули. Например,

$$E_{2\times 2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix};\ E_{3\times 3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ и т.н.}$$

Нека

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ и } B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Тогава

$$A+B = \begin{pmatrix} 1+3 & 2+2 & 1+1 \\ 1+1 & -1+1 & 0+2 \\ -1+1 & 1+2 & 1+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Също така

$$B+A = \begin{pmatrix} 3+1 & 2+2 & 1+1 \\ 1+1 & 1+(-1) & 2+0 \\ 1+(-1) & 2+1 & 3+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Изобщо, за всеки две матрици A и B в сила е $A+B=B+A$.

Задача 1. Да се пресметне изразът $2A+3B-4E$ за следните матрици

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 6 \\ 2 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} 3 & -1 & 5 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ и } E=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Решение:

$$\begin{aligned} 2A+3B-4E &= 2\begin{pmatrix} 1 & 0 & 6 \\ 2 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}+3\begin{pmatrix} 3 & -1 & 5 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}-4\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 & 0 & 12 \\ 4 & 2 & 8 \\ 2 & 4 & 2 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 9 & -3 & 15 \\ 3 & 0 & 6 \\ 3 & 3 & 0 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2+9-4 & 0+(-3)-0 & 12+15-0 \\ 4+3-0 & 2+0-4 & 8+6-0 \\ 2+3-0 & 4+3-0 & 2+0-4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 7 & -3 & 27 \\ 7 & -2 & 14 \\ 5 & 7 & -2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Задача 2. Да се пресметне изразът $3A-2B+4E$ за следните матрици

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -2 & 3 \\ -1 & 3 & -5 \\ 2 & 4 & -1 \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 5 & 4 & -4 \\ 5 & 1 & -1 \end{pmatrix} \text{ и } E=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Решение:

$$\begin{aligned} 3A-2B+4E &= 3\begin{pmatrix} 2 & -2 & 3 \\ -1 & 3 & -5 \\ 2 & 4 & -1 \end{pmatrix}-2\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 5 & 4 & -4 \\ 5 & 1 & -1 \end{pmatrix}+4\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 6 & -6 & 9 \\ -3 & 9 & -15 \\ 6 & 12 & -3 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 6 & -2 & 4 \\ 10 & 8 & -8 \\ 10 & 2 & -2 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 6-6+4 & -6-(-2)+0 & 9-4+0 \\ -3-10+0 & 9-8+4 & -15-(-8)+0 \\ 6-10+0 & 12-2+0 & -3-(-2)+4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 & -4 & 5 \\ -13 & 5 & -7 \\ -4 & 10 & 3 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Умножение на матрици. Умножението на матрици се извършва по правилото ”ред по стълб” като

$$AB=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix}$$

$$c_{11}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}=1.3+2.1+1.1=3+2+1=6;$$

$$c_{12} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 1.2 + 2.1 + 1.2 = 2 + 2 + 2 = 6;$$

$$c_{13} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = 1.1 + 2.2 + 1.3 = 1 + 4 + 3 = 8;$$

$$c_{21} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 1.3 + (-1).1 + 0.1 = 3 - 1 + 0 = 2;$$

$$c_{22} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 1.2 + (-1).1 + 0.2 = 2 - 1 + 0 = 1;$$

$$c_{23} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = 1.1 + (-1).2 + 0.3 = 1 - 2 + 0 = -1;$$

$$c_{31} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = (-1).3 + 1.1 + 1.1 = -3 + 1 + 1 = -1;$$

$$c_{32} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = (-1).2 + 1.1 + 1.2 = -2 + 1 + 2 = 1;$$

$$c_{33} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = (-1).1 + 1.2 + 1.3 = -1 + 2 + 3 = 4;$$

Така получаваме

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 6 & 8 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Обратно, ако умножим BA получаваме

$$BA = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 4 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

В общия случай за произволни матрици $AB \neq BA$.

Забележка: За да можем да умножим две матрици трябва задължително броят на елементите в реда на първата матрица да е равен на броя на елементите в стълба на втората! Т.е., не всеки две матрици могат да се умножават!

Задача 3. Нека $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Намерете AB и BA.

Решение:

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.3 + 1.2 + 1.1 & 0.1 + 1.1 + 1.0 \\ 3.3 + 0.2 + 1.1 & 3.1 + 0.1 + 1.0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 10 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$BA = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3.0+1.3 & 3.1+1.0 & 3.1+1.1 \\ 2.0+1.3 & 2.1+1.0 & 2.1+1.1 \\ 1.0+0.3 & 1.1+0.0 & 1.1+0.1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Обратна матрица

Нека

$$A_{n\times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & ... & a_{1n} \\ ... & ... & ... \\ a_{n1} & ... & a_{nn} \end{pmatrix} \text{ и } \det A \neq 0.$$

Тогава съществува обратна на матрицата A, такава че

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} A_{11} & ... & A_{n1} \\ ... & ... & ... \\ A_{1n} & ... & A_{nn} \end{pmatrix},$$

където $A_{i,j}$ са съответните адюнгирани количества.

Задача 4. Намерете обратната матрица на $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$.

Решение: Пресмятаме детерминантата $\det A = -1.3 - 0.2 = -3 \neq 0$.
$A_{11} = (-1)^{1+1}.3 = 3$; $A_{12} = (-1)^{1+2}.2 = -2$;
$A_{21} = (-1)^{2+1}.0 = 0$; $A_{22} = (-1)^{2+2}.(-1) = -1$.
Така получаваме $A^{-1} = \frac{1}{-3} \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$.

Задача 5. Намерете обратната матрица на $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

Решение: Първо пресмятаме детерминантата $\det A = -1$. След това

$$A_{11} = (-1)^{1+1}. \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 1.3 = 3;$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2}. \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = -1.3 = -3;$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3}. \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 1.(-2) = -2;$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1}. \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -1.7 = -7;$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2}. \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = 1.6 = 6;$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3}. \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -1.(-5) = 5;$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} . \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1.1 = 1;$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2} . \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1.1 = -1;$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3} . \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1.(-1) = -1.$$

Така $A^{-1} = \frac{1}{-1} \begin{pmatrix} 3 & -7 & 1 \\ -3 & 6 & -1 \\ -2 & 5 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 7 & -1 \\ 3 & -6 & 1 \\ 2 & -5 & 1 \end{pmatrix}$.

Матрични уравнения

Ако $AX = B$, то $X = A^{-1}B$. Ако $XA = B$, то $X = BA^{-1}$.

Задача 6. Решете матричното уравнение $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$.

Решение: Нека $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. Тогава $\det A = 3.1 - (-1).(-1) = 2$.
След това
$A_{11} = (-1)^{1+1}.1 = 1$; $A_{12} = (-1)^{1+2}.(-1) = 1$;
$A_{21} = (-1)^{2+1}.(-1) = 1$; $A_{22} = (-1)^{2+2}.3 = 3$.
Тогава $A^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$. Следователно

$$X = A^{-1} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -8 & 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}.$$

Задача 7. Решете матричното уравнение $X \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$.

Решение: Нека $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Тогава $\det A = 2.1 - 3.1 = -1$. След това
$A_{11} = (-1)^{1+1}.1 = 1$; $A_{12} = (-1)^{1+2}.1 = -1$;
$A_{21} = (-1)^{2+1}.3 = -3$; $A_{22} = (-1)^{2+2}.2 = 2$.
Следователно $A^{-1} = \frac{1}{-1} \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$. Получаваме

$$X = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ -2 & 7 \end{pmatrix}.$$

Задачи за самостоятелна работа:

Задача 1. Ако $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 4 \\ 5 & -3 & 2 \\ -2 & 1 & 6 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -4 \\ 6 & 1 & 5 \end{pmatrix}$, пресметнете

a) $2A - 3B + E$; b) AB; c) BA

Отг. a) $\begin{pmatrix} -10 & 6 & 5 \\ 10 & -8 & 16 \\ -22 & -1 & -2 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} 21 & 6 & 19 \\ 27 & -11 & 27 \\ 30 & 11 & 24 \end{pmatrix}$; c) $\begin{pmatrix} -15 & 7 & 14 \\ 13 & -7 & -22 \\ -11 & 2 & 56 \end{pmatrix}$.

Задача 2. Решете матричните уравнения.

a) $X \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$.

Отг. a) $\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{4} \\ -1 & \frac{3}{4} \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} -\frac{7}{6} & -\frac{1}{2} \\ \frac{4}{3} & -1 \end{pmatrix}$.