**Тотални диференциални уравнения**

Диференциалното уравнение

$$P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = 0$$

се нарича тотално, ако производната на $P$ по $y$ е равна на производната на $Q$ по $x$, т.е., ако $P_y^{'} = Q_x^{'}$.

Тогава, общото решение на уравнението е $U(x,y) = C$, където $U(x,y)$ е решение на системата

$$\left| \begin{array}{l} U_x^{'} = P(x,y) \\ U_y^{'} = Q(x,y) \end{array} \right.$$

**Задача 1.** Да се реши уравнението

$$(2x+y)\,dx + (x+2y)\,dy = 0.$$

Решение: От условието имаме, че $P = 2x + y$ и $Q = x + 2y$. Тогава, $P_y^{'} = 1$ и $Q_x^{'} = 1$, т.е. $P_y^{'} = Q_x^{'}$, откъдето следва, че уравнението е тотално.

Сега търсим функцията $U(x,y)$, която да е решение на системата

$$\left| \begin{array}{l} U_x^{'} = 2x + y \\ U_y^{'} = x + 2y \end{array} \right.$$

След интегриране на първия ред на тази система следва, че

$$\begin{aligned} U &= \int (2x+y)\,dx + c(y) \\ &= \int 2x dx + \int y dx + c(y) \\ &= 2\int x dx + y \int dx + c(y) \\ &= x^2 + xy + c(y). \end{aligned}$$

Остава да намерим $c(y)$. Това става като заместим получената функция $U$ във втория ред на системата.

$$U_y^{'} = x + 2y.$$

$$\left(x^2 + xy + c(y)\right)_y^{'} = x + 2y.$$

$$x + c_y^{'} = x + 2y.$$

$$c_y^{'} = 2y.$$

Интегрираме последния ред и получаваме

$$c = \int 2y dy = 2\int y dy = y^2.$$

Накрая заместваме $c$ в израза на функцията $U$ и намираме общото решение

$$U = x^2 + xy + y^2 = C.$$

**Задача 2.** Да се реши уравнението

$$(9x - 10y)\,dx + (3y - 10x)\,dy = 0.$$

Решение: От условието имаме, че $P = 9x - 10y$ и $Q = 3y - 10x$. Тогава, $P_y^{'} = -10$ и $Q_x^{'} = -10$, т.е. $P_y^{'} = Q_x^{'}$, откъдето следва, че уравнението е тотално.

Сега търсим функцията $U\,(x, y)$, която да е решение на системата

$$\left| \begin{array}{l} U_x^{'} = 9x - 10y \\ U_y^{'} = 3y - 10x \end{array} \right.$$

След интегриране на първия ред на тази система следва, че

$$\begin{aligned} U &= \int (9x - 10y)\,dx + c\,(y) \\ &= \int 9xdx - \int 10ydx + c\,(y) \\ &= 9\int xdx - 10y\int dx + c\,(y) \\ &= 9\frac{x^2}{2} - 10xy + c\,(y)\,. \end{aligned}$$

Остава да намерим $c\,(y)$. Това става като заместим получената функция $U$ във втория ред на системата.

$$U_y^{'} = 3y - 10x.$$

$$\left(9\frac{x^2}{2} - 10xy + c\,(y)\right)_y^{'} = 3y - 10x.$$

$$-10x + c_y^{'} = 3y - 10x.$$

$$c_y^{'} = 3y.$$

Интегрираме последния ред и получаваме

$$c = \int 3ydy = 3\int ydy = 3\frac{y^2}{2}.$$

Накрая заместваме $c$ в израза на функцията $U$ и намираме общото решение

$$U = 9\frac{x^2}{2} - 10xy + 3\frac{y^2}{2} = C.$$

**Задача 3.** Да се реши уравнението

$$\left(3x^2+3y\right)dx+(3x+y)\,dy=0.$$

Решение: От условието имаме, че $P=3x^2+3y$ и $Q=3x+y$. Тогава, $P_y^{'}=3$ и $Q_x^{'}=3$, т.е. $P_y^{'}=Q_x^{'}$, откъдето следва, че уравнението е тотално.

Сега търсим функцията $U(x,y)$, която да е решение на системата

$$\left|\begin{array}{c} U_x^{'}=3x^2+3y \\ U_y^{'}=3x+y \end{array}\right.$$

След интегриране на първия ред на тази система следва, че

$$\begin{aligned} U &= \int\left(3x^2+3y\right)dx+c(y) \\ &= \int 3x^2dx+\int 3ydx+c(y) \\ &= 3\int x^2dx+3y\int dx+c(y) \\ &= x^3+3xy+c(y). \end{aligned}$$

Остава да намерим $c(y)$. Това става като заместим получената функция $U$ във втория ред на системата.

$$U_y^{'}=3x+y.$$

$$\left(x^3+3xy+c(y)\right)_y^{'}=3x+y.$$

$$3x+c_y^{'}=3x+y.$$

$$c_y^{'}=y.$$

Интегрираме последния ред и получаваме

$$c=\int ydy=\frac{y^2}{2}.$$

Накрая заместваме $c$ в израза на функцията $U$ и намираме общото решение

$$U=x^3+3xy+\frac{y^2}{2}=C.$$

**Задача 4.** Да се реши уравнението

$$\left(3x^2y+3xy^2+2\right)dx+\left(x^3+3x^2y\right)dy=0.$$

Решение: От условието имаме, че $P=3x^2y+3xy^2+2$ и $Q=x^3+3x^2y$. Тогава, $P_y^{'}=3x^2+6xy$ и $Q_x^{'}=3x^2+6xy$, т.е. $P_y^{'}=Q_x^{'}$, откъдето следва, че уравнението е тотално.

Сега търсим функцията $U(x,y)$, която да е решение на системата

$$\left| \begin{array}{r} U_x^{'} = 3x^2y + 3xy^2 + 2 \\ U_y^{'} = x^3 + 3x^2y \end{array} \right.$$

След интегриране на първия ред на тази система следва, че

$$\begin{aligned} U &= \int \left(3x^2y + 3xy^2 + 2\right) dx + c(y) \\ &= \int 3x^2ydx + \int 3xy^2dx + \int 2dx + c(y) \\ &= 3y\int x^2dx + 3y^2\int xdx + 2\int dx + c(y) \\ &= yx^3 + 3y^2\frac{x^2}{2} + 2x + c(y)\,. \end{aligned}$$

Остава да намерим $c(y)$. Това става като заместим получената функция $U$ във втория ред на системата.

$$U_y^{'} = x^3 + 3x^2y.$$

$$\left(yx^3 + 3y^2\frac{x^2}{2} + 2x + c(y)\right)_y^{'} = x^3 + 3x^2y.$$

$$x^3 + 3x^2y + c_y^{'} = x^3 + 3x^2y.$$

$$c_y^{'} = 0.$$

Интегрираме последния ред и получаваме

$$c = \int 0dy = 0.$$

Накрая заместваме $c$ в израза на функцията $U$ и намираме общото решение

$$U = x^3y + 3\frac{x^2}{2}y^2 + 2x = C.$$

**Задача 5.** Да се реши уравнението

$$e^y dx + (xe^y - 2y)\,dy = 0.$$

Решение: От условието имаме, че $P = e^y$ и $Q = xe^y - 2y$. Тогава, $P_y^{'} = e^y$ и $Q_x^{'} = e^y$, т.е. $P_y^{'} = Q_x^{'}$, откъдето следва, че уравнението е тотално.

Сега търсим функцията $U(x,y)$, която да е решение на системата

$$\left| \begin{array}{r} U_x^{'} = e^y \\ U_y^{'} = xe^y - 2y \end{array} \right.$$

След интегриране на първия ред на тази система следва, че

$$\begin{aligned} U &= \int e^y dx + c(y) \\ &= e^y \int dx + c(y) \\ &= xe^y + c(y). \end{aligned}$$

Остава да намерим $c(y)$. Това става като заместим получената функция $U$ във втория ред на системата.

$$U_y^{'} = xe^y - 2y.$$

$$(xe^y + c(y))_y^{'} = xe^y - 2y.$$

$$xe^y + c_y^{'} = xe^y - 2y.$$

$$c_y^{'} = -2y.$$

Интегрираме последния ред и получаваме

$$c = \int -2ydy = -2\int ydy = -2\frac{y^2}{2} = -y^2.$$

Накрая заместваме $c$ в израза на функцията $U$ и намираме общото решение

$$U = xe^y - y^2 = C.$$

**Задача 6.** Да се реши уравнението

$$(ye^x - 3x)\,dx + e^x dy = 0.$$

Решение: От условието имаме, че $P = ye^x - 3x$ и $Q = e^x$. Тогава, $P_y^{'} = e^x$ и $Q_x^{'} = e^x$, т.е. $P_y^{'} = Q_x^{'}$, откъдето следва, че уравнението е тотално.

Сега търсим функцията $U(x, y)$, която да е решение на системата

$$\left| \begin{array}{r} U_x^{'} = ye^x - 3x \\ U_y^{'} = e^x \end{array} \right.$$

След интегриране на първия ред на тази система следва, че

$$\begin{aligned} U &= \int (ye^x - 3x)\,dx + c(y) \\ &= \int ye^x dx + \int -3xdx + c(y) \\ &= y\int e^x dx - 3\int xdx + c(y) \\ &= ye^x - 3\frac{x^2}{2} + c(y). \end{aligned}$$

Остава да намерим $c(y)$. Това става като заместим получената функция $U$ във втория ред на системата.

$$U_y^{'} = e^x.$$

$$\left(ye^x - 3\frac{x^2}{2} + c(y)\right)_y^{'} = e^x.$$

$$e^x + c_y^{'} = e^x.$$

$$c_y^{'} = 0.$$

Интегрираме последния ред и получаваме

$$c = \int 0dy = 0.$$

Накрая заместваме $c$ в израза на функцията $U$ и намираме общото решение

$$U = ye^x - 3\frac{x^2}{2} = C.$$

**Задачи за самостоятелна работа:**

**Задача 1.** Решете тоталното диференциално уравнение

$$\left(3x^2y + 8xy^2\right)dx + \left(x^3 + 8x^2y + 12y^2\right)dy = 0.$$

Отг. $x^3y + 4x^2y^2 + 4y^3 = C.$

**Задача 2.** Решете тоталното диференциално уравнение

$$\left(2ye^x - 3x\right)dx + 2e^x dy = 0.$$

Отг. $2e^xy - 3\frac{x^2}{2} = C.$

**Задача 3.** Решете тоталното диференциално уравнение

$$\left(\frac{1}{x^2} - y\right)dx + (y - x)\,dy = 0$$

Отг. $y^2 - xy - \frac{1}{x} = C$

**Задача 4.** Решете тоталното диференциално уравнение

$$\left(2x - 1 - \frac{y}{x^2}\right)dx + \left(\frac{1}{x} - 2y\right)dy = 0$$

Отг. $x^2 - x + \frac{y}{x} - y^2 = C$