Детерминанти

Детерминанта от втори ред е число, което съответства на матрицата

$$A_{2\times 2} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

и се пресмята по следния начин:

$$\det A_{2\times 2} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}.a_{22} - a_{12}.a_{21}$$

Например,

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = 1.(-2) - 3.4 = -2 - 12 = -14;$$

$$\begin{vmatrix} -5 & 0 \\ -7 & -1 \end{vmatrix} = -5.(-1) - 0.(-7) = 5 + 0 = 5.$$

Детерминанта от трети ред е число, което съответства на матрицата

$$A_{3\times 3} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

и се пресмята по следния начин (правило на Сарус):

$$\begin{aligned} \det A_{3\times 3} &= \left| \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix} \right| \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix} \\ &= a_{11}.a_{22}.a_{33} + a_{12}.a_{23}.a_{31} + a_{13}.a_{21}.a_{32} - a_{13}.a_{22}.a_{31} - a_{11}.a_{23}.a_{32} - a_{12}.a_{21}.a_{33} \end{aligned}$$

Задача 1. Пресметнете детерминантата $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & -4 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix}$.

Решение:

$$\begin{aligned} \left| \begin{matrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & -4 \\ 1 & 0 & 2 \end{matrix} \right| \begin{matrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \\ 1 & 0 \end{matrix} &= 2.4.2 + 1.(-4).1 + 1.1.0 - 1.4.1 - 2.(-4).0 - 1.1.2 \\ &= 16 - 4 + 0 - 4 - 0 - 2 = 6. \end{aligned}$$

Задача 2. Пресметнете детерминантата $\begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 5 & 0 & 2 \\ -1 & 4 & 2 \end{vmatrix}$.

Решение:

$$\begin{aligned} \left| \begin{matrix} 3 & 0 & 1 \\ 5 & 0 & 2 \\ -1 & 4 & 2 \end{matrix} \right| \begin{matrix} 3 & 0 \\ 5 & 0 \\ -1 & 4 \end{matrix} &= 3.0.2 + 0.2.(-1) + 1.5.4 - 1.0.(-1) - 3.2.4 - 0.5.2 \\ &= 0 + 0 + 20 - 0 - 24 - 0 = -4. \end{aligned}$$

Задача 3. Пресметнете детерминантата $\begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -1 & 4 & 2 \\ 5 & 0 & 2 \end{vmatrix}$.

Решение:

$$\begin{aligned}\left|\begin{array}{ccc|cc} 3 & 0 & 1 & 3 & 0 \\ -1 & 4 & 2 & -1 & 4 \\ 5 & 0 & 2 & 5 & 0 \end{array}\right. &= 3.4.2+0.2.5+1.(-1).0-1.4.5-3.2.0-0.(-1).2 \\ &= 24+0+0-20-0-0=4.\end{aligned}$$

Задача 4. Пресметнете детерминантата $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 4 & 0 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$.

Решение:

$$\begin{aligned}\left|\begin{array}{ccc|cc} 2 & 0 & 3 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & -2 & 4 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right. &= 2.0.1+0.(-2).(-1)+3.4.0-3.0.(-1)-2.(-2).0-0.4.1 \\ &= 0.\end{aligned}$$

Задача 5. Пресметнете детерминантата $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -1 & 1 & -2 \\ 2 & 4 & 4 \end{vmatrix}$.

Решение:

$$\begin{aligned}\left|\begin{array}{ccc|cc} 1 & 3 & 2 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & -2 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & 4 & 2 & 4 \end{array}\right. &= 1.1.4+3.(-2).2+2.(-1).4-2.1.2-1.(-2).4-3.(-1).4 \\ &= 4-12-8-4+8+12=0.\end{aligned}$$

Задача 6. Пресметнете детерминантата $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 4 & 1 & -1 \\ -1 & -3 & -2 \end{vmatrix}$.

Решение:

$$\begin{aligned}\left|\begin{array}{ccc|cc} 1 & 3 & 2 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & -1 & 4 & 1 \\ -1 & -3 & -2 & -1 & -3 \end{array}\right. &= 1.1.(-2)+3.(-1).(-1)+2.4.(-3)-2.1.(-1)-1.(-1).(-3)-3.4.(-2) \\ &= -2+3-24+2-3+24=0.\end{aligned}$$

Някои основни свойства на детерминантите:

1) детерминантата има стойност 0, ако има ред (стълб), чиито елементи са нули (както в задача 4);

2) детерминантата има стойност 0, ако има два пропорционални реда (стълба) (например, в задача 5, първият и третият стълб са пропорционални, а в задача 6 - първият и третият ред);

3) при разместване на два реда (стълба) детерминантата се променя само по знак (например в задачи 2 и 3).

4) ако към даден ред (стълб) се прибави линейна комбинация на другите редове (стълбове), то стойността на детерминантата не се променя.

Детерминанта от четвърти ред е число, което съответства на матрицата

$$A_{4\times 4} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}$$

и се пресмята чрез развиване по ред (стълб) и пресмятане на детерминанти от трети ред.

Например, ако развием детерминантата по първия ред получаваме

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = a_{11}.(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} + a_{12}.(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$
$$+a_{13}.(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{vmatrix} + a_{14}.(-1)^{1+4}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{vmatrix}$$

След това остава да се пресметнат четирите получени детерминанти от трети ред по правилото на Сарус и да се замести.

Например,

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 2 & 4 & -1 & 5 \\ 3 & 0 & -3 & 1 \\ -1 & 1 & 4 & 3 \\ 1 & -5 & 2 & 1 \end{vmatrix} &= 2.(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 0 & -3 & 1 \\ 1 & 4 & 3 \\ -5 & 2 & 1 \end{vmatrix} + 4.(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 3 & -3 & 1 \\ -1 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} \\ &\quad + (-1).(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \\ 1 & -5 & 1 \end{vmatrix} + 5.(-1)^{1+4}\begin{vmatrix} 3 & 0 & -3 \\ -1 & 1 & 4 \\ 1 & -5 & 2 \end{vmatrix} \\ &= 2.1.70 + 4.(-1).(-24) - 1.1.52 + 5.(-1).54 \\ &= 140 + 96 - 52 - 270 = -86. \end{aligned}$$

Прави впечатление, че ако някой от елементите в реда (стълба), по който развиваме има стойност 0, то не е нужно да пресмятаме последващата детерминанта от трети ред, тъй като независимо от нейната стойност, цялото произведение ще бъде равно на 0. Например,

$$
\begin{aligned}
\begin{vmatrix} 2 & 4 & -1 & 5 \\ 3 & 0 & -3 & 1 \\ -1 & 1 & 4 & 3 \\ 1 & -5 & 2 & 1 \end{vmatrix} &= 4.\left(-1\right)^{1+2}\begin{vmatrix} 3 & -3 & 1 \\ -1 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} + 0.\left(-1\right)^{2+2}\begin{vmatrix} 2 & -1 & 5 \\ -1 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} \\
& +1.\left(-1\right)^{2+3}\begin{vmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 3 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} + \left(-5\right).\left(-1\right)^{2+4}\begin{vmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 3 & -3 & 1 \\ -1 & 4 & 3 \end{vmatrix} \\
&= 4.\left(-1\right).\left(-24\right) + 0 + 1.\left(-1\right).37 + \left(-5\right).1.29 \\
&= 96 - 37 - 145 = -86.
\end{aligned}
$$

Бихме могли и сами да преработваме дадена детерминанта (като към даден ред прибавяме друг ред, умножен с подходящо число - според основното правило 4, стойността на детерминантата не се променя). Например, ако разгледаме същата детерминанта, но този път от ред 1 извадим 4 пъти ред 3, получаваме

$$
\begin{vmatrix} 2 & 4 & -1 & 5 \\ 3 & 0 & -3 & 1 \\ -1 & 1 & 4 & 3 \\ 1 & -5 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6 & 0 & -17 & -7 \\ 3 & 0 & -3 & 1 \\ -1 & 1 & 4 & 3 \\ 1 & -5 & 2 & 1 \end{vmatrix}.
$$

Сега към четвъртия ред прибавяме 5 пъти ред 3 и получаваме

$$
\begin{vmatrix} 6 & 0 & -17 & -7 \\ 3 & 0 & -3 & 1 \\ -1 & 1 & 4 & 3 \\ 1 & -5 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6 & 0 & -17 & -7 \\ 3 & 0 & -3 & 1 \\ -1 & 1 & 4 & 3 \\ -4 & 0 & 22 & 16 \end{vmatrix} = 0+0+1.(-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 6 & -17 & -7 \\ 3 & -3 & 1 \\ -4 & 22 & 16 \end{vmatrix} + 0 = -1.86 = -86.
$$

Задачи за самостоятелна работа:

Задача 1. Пресметнете стойността на следните детерминанти от трети ред а) $\begin{vmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 4 & -1 & -2 \\ 3 & 1 & 5 \end{vmatrix}$; b) $\begin{vmatrix} -1 & 3 & -2 \\ -1 & 7 & 4 \\ 3 & 1 & -5 \end{vmatrix}$; c) $\begin{vmatrix} 5 & 1 & 3 \\ -1 & 4 & -2 \\ 6 & -3 & 5 \end{vmatrix}$.

Отг. a) 28; b) 104; c) 0.

Задача 2. Пресметнете стойностите на следните детерминанти от четвърти ред

a) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \end{vmatrix}$; b) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$.

Отг. a) 12; b) 5.