Производна на функция на една променлива

Нека $u(x)$ и $v(x)$ са диференцируеми функции. В сила са следните правила за диференциране:

$$\begin{aligned}
(u \pm v)' &= u' \pm v' \\
(Const.u)' &= Const.u' \\
(uv)' &= u'v + uv' \\
\left(\frac{u}{v}\right)' &= \frac{u'v - uv'}{v^2} \\
[f(u(x))]' &= f'(u)\,u'(x)
\end{aligned}$$

Производни на основни елементарни функции:

$$\begin{aligned}
(Const)' &= 0; & (x^n)' &= nx^{n-1}; \\
(\ln x)' &= \frac{1}{x}; & (e^x)' &= e^x; \\
(\sin x)' &= \cos x; & (\cos x)' &= -\sin x; \\
(tgx)' &= \frac{1}{\cos^2 x}; & (\cot gx)' &= -\frac{1}{\sin^2 x}; \\
(\arcsin x)' &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}; & (arctgx)' &= \frac{1}{1+x^2};
\end{aligned}$$

Първо ще покажем как се намират производните на някои основни функции. Като използваме формулата $(x^n)' = nx^{n-1}$ последователно получаваме

$$x' = \left(x^1\right)' = 1.x^{1-1} = 1.x^0 = 1.1 = 1;$$
$$\left(x^2\right)' = 2x^{2-1} = 2x;$$
$$\left(x^3\right)' = 3x^{3-1} = 3x^2;$$
$$\left(x^5\right)' = 5x^{5-1} = 5x^4;$$

По същия начин като се използва, че $\frac{1}{x^n} = x^{-n}$ намираме

$$\begin{aligned}
\left(\frac{1}{x}\right)' &= \left(x^{-1}\right)' = -1.x^{-1-1} = -1.x^{-2} = -\frac{1}{x^2} \\
\left(\frac{1}{x^2}\right)' &= \left(x^{-2}\right)' = -2.x^{-2-1} = -2.x^{-3} = -\frac{2}{x^3}; \\
\left(\frac{1}{x^3}\right)' &= \left(x^{-3}\right)' = -3.x^{-3-1} = -3.x^{-4} = -\frac{3}{x^4}; \\
\left(\frac{1}{x^7}\right)' &= \left(x^{-7}\right)' = -7.x^{-7-1} = -7.x^{-8} = -\frac{7}{x^8};
\end{aligned}$$

Като използваме, че $\sqrt[q]{x^p} = x^{\frac{p}{q}}$ имаме

$$\begin{aligned}
\left(\sqrt{x}\right)' &= \left(x^{\frac{1}{2}}\right)' = \frac{1}{2}.x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2}.x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}};\\
\left(\sqrt[3]{x}\right)' &= \left(x^{\frac{1}{3}}\right)' = \frac{1}{3}.x^{\frac{1}{3}-1} = \frac{1}{3}.x^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}};\\
\left(\sqrt{x^3}\right)' &= \left(x^{\frac{3}{2}}\right)' = \frac{3}{2}.x^{\frac{3}{2}-1} = \frac{3}{2}.x^{\frac{1}{2}} = \frac{3\sqrt{x}}{2};\\
\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)' &= \left(x^{-\frac{1}{2}}\right)' = -\frac{1}{2}.x^{-\frac{1}{2}-1} = -\frac{1}{2}.x^{-\frac{3}{2}} = -\frac{1}{2x\sqrt{x}}.
\end{aligned}$$

В случай, че имаме някоя от основните функции, умножена с произволно число, второто основно свойство ни дава правото да изнесем това число като множител и след това да намираме производната на самата функция

$$\begin{aligned}
(2x)' &= 2\,(x)' = 2.1 = 2;\\
\left(3x^5\right)' &= 3\left(x^5\right)' = 3.5.x^4 = 15x^4;
\end{aligned}$$

Да разгледаме как се намира производната на сума или разлика на няколко функции. Като използваме първото основно свойсто получаваме

$$\left(x^2-3x+2\right)' = \left(x^2\right)' - (3x)' + (2)' = \left(x^2\right)' - 3\,(x)' + (2)' = 2x - 3.1 + 0 = 2x - 3;$$

$$\left(3x^4-2x^3-7\right)' = \left(3x^4\right)' - \left(2x^3\right)' - (7)' = 3\left(x^4\right)' - 2\left(x^3\right)' - (7)' = 3.4x^3 - 2.3.x^2 - 0 = 12x^3 - 6x^2;$$

$$\begin{aligned}
\left(4x^3+5x^2+2x-3\right)' &= \left(4x^3\right)' + \left(5x^2\right)' + (2x)' - (3)' = 4\left(x^3\right)' + 5\left(x^2\right)' + 2\,(x)' - (3)'\\
&= 4.3x^2 + 5.2x + 2.1 - 0 = 12x^2 + 10x + 2;\\
\left(2x^5+4x-\frac{1}{x}\right)' &= \left(2x^5\right)' + 4\,(x)' - \left(\frac{1}{x}\right)' = 2\left(x^5\right)' + 4\,(x)' - \left(x^{-1}\right)'\\
&= 2.5x^4 + 4.1 + \frac{1}{x^2} = 10x^4 + 4 + \frac{1}{x^2};
\end{aligned}$$

Да разгледаме как се прилага правилото за намиране на производна на произведение на две функции

$$(x\sin x)' = (x)'\sin x + x\,(\sin x)' = 1.\sin x + x.\cos x = \sin x + x\cos x;$$

$$(x\cos x)' = (x)'\cos x + x\,(\cos x)' = 1.\cos x + x.\,(-\sin x) = \cos x - x\sin x;$$

$$(xe^x)' = (x)'\,e^x + x\,(e^x)' = 1.e^x + x.e^x = e^x + xe^x;$$

$$(x\ln x)' = (x)'\ln x + x\,(\ln x)' = 1.\ln x + x.\frac{1}{x} = \ln x + 1;$$

$$(\sin x\cos x)' = (\sin x)'\cos x + \sin x\,(\cos x)' = \cos x.\cos x - \sin x.\sin x = \cos^2 x - \sin^2 x;$$

$$\left(x^2\ln x\right)' = \left(x^2\right)'\ln x + x^2\,(\ln x)' = 2x.\ln x + x^2.\frac{1}{x} = 2x\ln x + x;$$

$$\left(x^3e^x\right)' = \left(x^3\right)' e^x + x^3\left(e^x\right)' = 3x^2.e^x + x^3.e^x = 3x^2e^x + x^3.e^x;$$

$$\left(x^4tgx\right)' = \left(x^4\right)' tgx + x^4\left(tgx\right)' = 4x^3.tgx + x^4.\frac{1}{\cos^2 x} = 4x^3tgx + \frac{x^4}{\cos^2 x};$$

Сега ще разгледаме как се прилага правилото за намиране на производна на частно на две функции

$$\left(\frac{x-3}{x+1}\right)' = \frac{(x-3)'(x+1)-(x-3)(x+1)'}{(x+1)^2} = \frac{x+1-x+3}{(x+1)^2} = \frac{4}{(x+1)^2};$$

$$\left(\frac{x^2}{x^2+5}\right)' = \frac{\left(x^2\right)'\left(x^2+5\right)-x^2\left(x^2+5\right)'}{\left(x^2+5\right)^2} = \frac{2x\left(x^2+5\right)-x^2.2x}{\left(x^2+5\right)^2} = \frac{2x^3+10x-2x^3}{\left(x^2+5\right)^2} = \frac{10x}{\left(x^2+5\right)^2};$$

$$\begin{aligned}\left(\frac{x^2-x+4}{x-1}\right)' &= \frac{\left(x^2-x+4\right)'(x-1)-\left(x^2-x+4\right)(x-1)'}{(x-1)^2} = \frac{(2x-1)(x-1)-\left(x^2-x+4\right)}{(x-1)^2} \\ &= \frac{2x^2-2x-x+1-x^2+x-4}{(x-1)^2} = \frac{x^2-2x-3}{(x-1)^2};\end{aligned}$$

$$\left(\frac{x^3}{x+2}\right)' = \frac{\left(x^3\right)'(x+2)-x^3(x+2)'}{(x+2)^2} = \frac{3x^2(x+2)-x^3}{(x+2)^2} = \frac{3x^3+6x^2-x^3}{(x+2)^2} = \frac{2x^3+6x^2}{(x+2)^2};$$

$$\left(\frac{\ln x}{x}\right)' = \frac{(\ln x)' x - (x)'\ln x}{x^2} = \frac{\frac{1}{x}x-\ln x}{x^2} = \frac{1-\ln x}{x^2};$$

$$\left(\frac{1+\cos x}{x}\right)' = \frac{(1+\cos x)' x - (1+\cos x)x'}{x^2} = \frac{-x\sin x-(1+\cos x)}{x^2} = -\frac{x\sin x+1+\cos x}{x^2}.$$

Накрая ще завършим с намирането на производна на сложна (съставна) функция. Използваме формулата

$$[f(u(x))]' = f'(u)u'(x).$$

Например,

$$\left[(2x+1)^5\right]' = 5(2x+1)^4.(2x+1)' = 5(2x+1)^4.2 = 10(2x+1)^4;$$

$$\left[\left(x^2-4x-2\right)^3\right]' = 3\left(x^2-4x-2\right)^2.\left(x^2-4x-2\right)' = 3\left(x^2-4x-2\right)^2(2x-4);$$

$$\left[\sin\left(x^2-3\right)\right]' = \cos\left(x^2-3\right).\left(x^2-3\right)' = 2x\cos\left(x^2-3\right);$$

$$\left[\cos\left(3x^2+6x-5\right)\right]' = -\sin\left(3x^2+6x-5\right).\left(3x^2+6x-5\right)' = -(6x+6)\sin\left(3x^2+6x-5\right);$$

$$\left(e^{-2x}\right)' = e^{-2x}.(-2x)' = -2e^{-2x};$$

$$(tg7x)' = \frac{1}{\cos^2 7x}.(7x)' = \frac{7}{\cos^2 7x};$$

$$\left(\cos^2 x\right)' = \left[(\cos x)^2\right]' = 2.\cos x.(\cos x)' = -2\sin x\cos x;$$

$$\left(\sin^5 x\right)' = \left[(\sin x)^5\right]' = 5.(\sin x)^4.(\sin)' = 5\sin^4 x\cos x;$$

$$\left(\sqrt{1-x^3}\right)' = \left(\left(1-x^3\right)^{\frac{1}{2}}\right)' = \frac{1}{2}\left(1-x^3\right)^{-\frac{1}{2}}.\left(1-x^3\right)' = \frac{1}{2}\left(1-x^3\right)^{-\frac{1}{2}}.\left(-3x^2\right) = -\frac{3x^2}{2}\left(1-x^3\right)^{-\frac{1}{2}};$$

Ако имаме произведение на сложни функции, първо прилагаме формулата за производна на произведение и след това намираме производните на сложните функции

$$\left(x^2e^{3x}\right)' = \left(x^2\right)'e^{3x} + x^2\left(e^{3x}\right)' = 2x.e^{3x} + x^2.e^{3x}.(3x)' = 2xe^{3x} + 3x^2e^{3x};$$

$$\left(e^x\sin 2x\right)' = \left(e^x\right)'\sin 2x + e^x\left(\sin 2x\right)' = e^x\sin 2x + e^x.\cos 2x.(2x)' = e^x\sin 2x + 2e^x\cos 2x;$$

$$\left(x^5tg4x\right)' = \left(x^5\right)'tg4x + x^5\left(tg4x\right)' = 5x^4tg4x + x^5\frac{1}{\cos^2 4x}.(4x)' = 5x^4tg4x + \frac{4x^5}{\cos^2 4x};$$

$$\begin{aligned}\left[\sin(3x-2).e^{5x+1}\right]' &= [\sin(3x-2)]'e^{5x+1} + \sin(3x-2)\left(e^{5x+1}\right)' \\ &= \cos(3x-2).(3x-2)'.e^{5x+1} + \sin(3x-2)e^{5x+1}.(5x+1)'; \\ &= 3\cos(3x-2)e^{5x+1} + 5\sin(3x-2)e^{5x+1};\end{aligned}$$

Задачи за самостоятелна работа:

Задача 1. Намерете производната на функцията $\ln 2x + \sqrt{x} - \frac{5}{x}$.
Отг. $\frac{1}{x} + \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} + \frac{5}{x^2}$

Задача 2. Намерете производната на функцията $\frac{e^x-1}{e^x+1}$.
Отг. $\frac{2e^x}{(e^x+1)^2}$

Задача 3. Намерете производната на функцията $x^2\ln x$.
Отг. $2x\ln x + x$

Задача 4. Намерете производната на функцията $x^5\sin 8x$.
Отг. $5x^4\sin 8x + 8x^5\cos 8x$.