Оператор на Лаплас

Разглеждаме ОДУ от втори ред с постоянни коефициенти, което има вида

$$ay'' + by' + cy = f(t),$$

с начални условия

$$y(0) = d, \ y'(0) = e.$$

Идеята е:

1) върху даденото уравнение се прилага операторът на Лаплас L, в резултат на което се получава преобразувано алгебрично уравнение;

2) решава се алгебричното уравнение;

3) върху решението на алгебричното уравнение се прилага обратният оператор на Лаплас L^{-1}, в резултат на което се получава търсеното решение.

Ако образът на една функция $f(t)$ е $F(p)$, пишем $L[f(t)] = F(p)$. Припомняме, че операторът L е линеен, т.е. ако $L[f_1(t)] = F_1(p)$ и $L[f_2(t)] = F_2(p)$, то

$$L[C_1 f_1(t) + C_2 f_2(t)] = C_1 F_1(p) + C_2 F_2(p), \text{ където } C_1, C_2 - \text{ константи.}$$

Освен това ще използваме формулата за диференциране на оригинал, че ако $L[y] = \overline{y}(p)$, то

$$L[y'] = p.\overline{y}(p) - y(0) \text{ и } L[y''] = p^2.\overline{y}(p) - p.y(0) - y'(0)$$

и формулата за диференциране на образ

$$L[t^n f(t)] = (-1)^n F^{(n)}(p), \ n = 1, 2, ...$$

В началото ще започнем с намирането на образите на няколко функции.

Пример 1. Намерете образа на функцията $f(t) = 4t^2 - 2t + 3$.
Решение. От линейното свойство намираме, че

$$\begin{aligned} L\left[4t^2 - 2t + 3\right] &= L\left[4t^2\right] - L[2t] + L[3] = 4L\left[t^2\right] - 2L[t] + 3L[1] \\ &= 4\frac{2!}{p^{2+1}} - 2\frac{1!}{p^{1+1}} + 3\frac{1}{p} \\ &= \frac{8}{p^3} - \frac{2}{p^2} + \frac{3}{p} = \frac{8 - 2p + 3p^2}{p^3}. \end{aligned}$$

Пример 2. Намерете образа на функцията $f(t) = \sin 2t + 3t \cos t$.

Решение. От линейното свойство намираме, че

$$\begin{aligned} L\left[\sin 2t + 3t\cos t\right] &= L\left[\sin 2t\right] + L\left[3t\cos t\right] = L\left[\sin 2t\right] + 3L\left[t\cos t\right] \\ &= \frac{2}{p^2+2^2} + 3\frac{p^2-1^2}{\left(p^2+1^2\right)^2} \\ &= \frac{2}{p^2+4} + \frac{3p^2-3}{\left(p^2+1\right)^2}. \end{aligned}$$

Пример 3. Намерете образа на функцията $f\left(t\right) = t^2\sin 4t$.

Решение. Първо прилагаме оператора на Лаплас към функцията $t\sin 4t$. Имаме,

$$L\left[t\sin 4t\right] = \frac{2p.4}{\left(p^2+4^2\right)^2} = \frac{8p}{\left(p^2+16\right)^2}.$$

След това прилагаме свойството за диференциране на образ $L\left[tf\left(t\right)\right] = \left(-1\right)F'\left(p\right)$, и получаваме

$$L\left[t.t\sin 4t\right] = \left(-1\right)\left(\frac{8p}{\left(p^2+16\right)^2}\right)' = \frac{8\left(3p^2-16\right)}{\left(p^2+16\right)^3}.$$

Разбира се, възможно беше и да намерим $L\left[\sin 4t\right] = \frac{4}{p^2+16}$ и тогава да приложим свойството за диференциране на образ $L\left[t^2f\left(t\right)\right] = \left(-1\right)^2F''\left(p\right)$. Тогава

$$L\left[t^2.\sin 4t\right] = \left(-1\right)^2\left(\frac{4}{p^2+16}\right)'' = \frac{8\left(3p^2-16\right)}{\left(p^2+16\right)^3}.$$

Пример 4. Намерете образа на функцията $f\left(t\right) = te^{-2t}\sin 3t$.

Решение. Първо прилагаме оператора на Лаплас към функцията $e^{-2t}\sin 3t$. Имаме,

$$L\left[e^{-2t}\sin 3t\right] = \frac{3}{\left(p+2\right)^2+3^2} = \frac{3}{\left(p+2\right)^2+9}.$$

След това прилагаме свойството за диференциране на образ $L\left[tf\left(t\right)\right] = \left(-1\right)F'\left(p\right)$, и получаваме

$$L\left[t.e^{-2t}\sin 3t\right] = \left(-1\right)\left(\frac{3}{\left(p+2\right)^2+9}\right)' = \frac{6\left(p+2\right)}{\left(\left(p+2\right)^2+9\right)^2}.$$

Сега ще продължим с намирането на оригинала на няколко функции.

Пример 5. Намерете оригинала на функцията $F\left(p\right) = \frac{4}{3(p-1)^3}$.

Решение. Записваме функцията във вида,

$$F\left(p\right)=\frac{4}{3\left(p-1\right)^{3}}=\frac{4}{3}\frac{1}{\left(p+\left(-1\right)\right)^{3}}.$$

След това намираме оригинала

$$f\left(t\right)=\frac{4}{3}\frac{e^{-(-1)t}t^{3-1}}{(3-1)!}=\frac{4}{3}\frac{e^{t}t^{2}}{2!}=\frac{2}{3}e^{t}t^{2}.$$

Пример 6. Намерете оригинала на функцията $F\left(p\right)=\frac{2p}{p^{2}+4p+8}$.

Решение. За да се използват директно формулите, отделяме точен квадрат в знаменателя и получаваме

$$F\left(p\right)=\frac{2p}{p^{2}+4p+8}=\frac{2p}{\left(p+2\right)^{2}+2^{2}}.$$

Тъй като в числителя имаме $2p$, то трябва да го запишем като $2\left(p+2\right)-4$. Имаме

$$F\left(p\right)=\frac{2p}{\left(p+2\right)^{2}+2^{2}}=\frac{2\left(p+2\right)-4}{\left(p+2\right)^{2}+2^{2}}=2\frac{\left(p+2\right)}{\left(p+2\right)^{2}+2^{2}}-4\frac{1}{\left(p+2\right)^{2}+2^{2}}.$$

След това намираме оригинала

$$f\left(t\right)=2e^{-2t}\cos 2t-4\frac{1}{2}e^{-2t}\sin 2t=2e^{-2t}\cos 2t-2e^{-2t}\sin 2t.$$

Пример 7. Намерете оригинала на функцията $F\left(p\right)=\frac{p^{2}}{(p^{2}+9)^{2}}$.

Решение. За да се използват директно формулите, вадим 9 в числителя,

$$F\left(p\right)=\frac{p^{2}}{\left(p^{2}+3^{2}\right)^{2}}=\frac{p^{2}-9}{\left(p^{2}+3^{2}\right)^{2}}+\frac{9}{\left(p^{2}+3^{2}\right)^{2}}.$$

След това намираме оригинала

$$f\left(t\right)=t\cos 3t+9\frac{\sin 3t-3t\cos 3t}{2.3^{3}}=\frac{1}{2}t\cos 3t+\frac{1}{6}\sin 3t.$$

Пример 8. Намерете оригинала на функцията $F\left(p\right)=\frac{p+2}{(p+1)(p^{2}+4)}$.

Решение. Разлагаме на елементарни дроби както следва

$$F\left(p\right)=\frac{p+2}{\left(p+1\right)\left(p^{2}+4\right)}=\frac{A}{p+1}+\frac{Bp+C}{p^{2}+4}.$$

Намираме общ знаменател и приравняваме числителите. Получаваме

$$\frac{p+2}{\left(p+1\right)\left(p^{2}+4\right)}=\frac{A\left(p^{2}+4\right)+\left(Bp+C\right)\left(p+1\right)}{\left(p+1\right)\left(p^{2}+4\right)},$$

или

$$p+2=(A+B)\,p^2+(B+C)\,p+4A+C$$

Сравняваме коефициентите пред степените на p и достигаме до системата

$$\left|\begin{array}{c} A+B=0 \\ B+C=1 \\ 4A+C=2 \end{array}\right. \rightarrow \left|\begin{array}{c} A=-B \\ C=1-B \\ -4B+1-B=2 \end{array}\right. \rightarrow \left|\begin{array}{c} A=-B \\ C=1-B \\ -5B=1 \end{array}\right. \left|\begin{array}{c} A=\frac{1}{5} \\ B=-\frac{1}{5} \\ C=\frac{6}{5} \end{array}\right.$$

Тогава

$$F(p)=\frac{p+2}{(p+1)(p^2+4)}=\frac{\frac{1}{5}}{p+1}+\frac{-\frac{1}{5}p+\frac{6}{5}}{p^2+4}=\frac{1}{5}\frac{1}{p+1}+\frac{-\frac{1}{5}p+\frac{6}{5}}{p^2+2^2}.$$

Накрая намираме оригинала

$$f(t)=\frac{1}{5}e^{-t}-\frac{1}{5}\cos 2t+\frac{6}{5}.\frac{1}{2}\sin 2t=\frac{1}{5}e^{-t}-\frac{1}{5}\cos 2t+\frac{3}{5}\sin 2t.$$

Пример 9. Намерете оригинала на функцията $F(p)=\frac{p+2}{(p+1)(p-2)(p^2+1)}$.

Решение. Разлагаме на елементарни дроби както следва

$$F(p)=\frac{p+2}{(p+1)(p-2)(p^2+1)}=\frac{A}{p+1}+\frac{B}{p-2}+\frac{Cp+D}{p^2+1}.$$

Намираме общ знаменател и приравняваме числителите. Получаваме

$$\frac{p+2}{(p+1)(p-2)(p^2+1)}=\frac{A(p-2)\left(p^2+1\right)+B(p+1)\left(p^2+1\right)+(Cp+D)(p+1)(p-2)}{(p+1)(p-2)(p^2+1)},$$

или

$$p+2=(A+B+C)\,p^3+(-2A+B-C+D)\,p^2+(A+B-2C-D)\,p-2A+B-2D$$

Сравняваме коефициентите пред степените на p и достигаме до системата

$$\left|\begin{array}{c} A+B+C=0 \\ -2A+B-C+D=0 \\ A+B-2C-D=1 \\ -2A+B-2D=2 \end{array}\right. \rightarrow \left|\begin{array}{c} A=-\frac{1}{6} \\ B=\frac{4}{15} \\ C=-\frac{1}{10} \\ D=-\frac{7}{10} \end{array}\right.$$

Тогава

$$F(p)=\frac{p+2}{(p+1)(p-2)(p^2+1)}=-\frac{1}{6}\frac{1}{p+1}+\frac{4}{15}\frac{1}{p-2}+\frac{-\frac{1}{10}p-\frac{7}{10}}{p^2+1}.$$

Накрая намираме оригинала

$$f(t)=-\frac{1}{6}e^{-t}+\frac{4}{15}e^{2t}-\frac{1}{10}\cos t-\frac{7}{10}\sin t.$$

Пример 10. Намерете оригинала на функцията $F(p) = \frac{p}{(p-1)^2(p^2+1)}$.
Решение. Разлагаме на елементарни дроби както следва

$$F(p) = \frac{p}{(p-1)^2(p^2+1)} = \frac{A}{p-1} + \frac{B}{(p-1)^2} + \frac{Cp+D}{p^2+1}.$$

Намираме общ знаменател и приравняваме числителите. Получаваме

$$\frac{p}{(p-1)^2(p^2+1)} = \frac{A(p-1)\left(p^2+1\right) + B\left(p^2+1\right) + (Cp+D)(p-1)^2}{(p-1)^2(p^2+1)},$$

или

$$p = (A+C)p^3 + (-A+B-2C+D)p^2 + (A+C-2D)p - A + D + B$$

Сравняваме коефициентите пред степените на p и достигаме до системата

$$\left|\begin{array}{c} A+C=0 \\ -A+B-2C+D=0 \\ A+C-2D=1 \\ -A+D+B=2 \end{array}\right. \rightarrow \left|\begin{array}{c} A=0 \\ B=\frac{1}{2} \\ C=0 \\ D=-\frac{1}{2} \end{array}\right.$$

Тогава

$$F(p) = \frac{p}{(p-1)^2(p^2+1)} = \frac{1}{2}\frac{1}{(p-1)^2} + \frac{-\frac{1}{2}}{p^2+1}.$$

Накрая намираме оригинала

$$f(t) = \frac{1}{2}te^t - \frac{1}{2}\sin t.$$

Задача 1. Решете уравнението

$$y'' - 2y' + y = 4,\ y(0) = 4, y'(0) = 2.$$

Решение. Прилагаме оператора на Лаплас към двете страни на уравнението и получаваме

$$L[y''] - 2L[y'] + L[y] = L[4].$$

Като заместим намираме, че

$$\begin{aligned} p^2.\overline{y}(p) - p.y(0) - y'(0) - 2(p.\overline{y}(p) - y(0)) + \overline{y}(p) &= \frac{4}{p}. \\ p^2.\overline{y}(p) - 4p - 2 - 2(p.\overline{y}(p) - 4) + \overline{y}(p) &= \frac{4}{p}. \\ p^2.\overline{y}(p) - 2p.\overline{y}(p) + \overline{y}(p) &= \frac{4}{p} - 6 + 4p. \\ \overline{y}(p)\left(p^2 - 2p + 1\right) &= \frac{4 - 6p + 4p^2}{p} \end{aligned}$$

или

$$\overline{y}(p) = \frac{4-6p+4p^2}{p(p-1)^2}.$$

Разлагаме на елементарни дроби

$$\frac{4-6p+4p^2}{p(p-1)^2} = \frac{A}{p} + \frac{B}{p-1} + \frac{C}{(p-1)^2}.$$

Намираме общ знаменател и приравняваме числителите

$$\frac{4-6p+4p^2}{p(p-1)^2} = \frac{A(p-1)^2 + Bp(p-1) + Cp}{p(p-1)^2},$$

$$4-6p+4p^2 = (A+B)p^2 + (-2A-B+C)p + A.$$

Сравняваме коефициентите пред степените на p и достигаме до системата

$$\left| \begin{array}{c} A+B=4 \\ -2A-B+C=-6 \\ A=4 \end{array} \right. \rightarrow \left| \begin{array}{l} A=4 \\ B=0 \\ C=2 \end{array} \right.$$

Следователно

$$\overline{y}(p) = \frac{4-6p+4p^2}{p(p-1)^2} = \frac{4}{p} + \frac{2}{(p-1)^2}.$$

Накрая прилагаме обратния оператор на Лаплас и намираме, че решението на уравнението е

$$y = 4 + 2te^t.$$

Задача 2. Решете уравнението

$$y'' - 2y' - 3y = e^{3t},\ y(0) = 0, y'(0) = 0.$$

Решение. Прилагаме оператора на Лаплас към двете страни на уравнението и получаваме

$$L[y''] - 2L[y'] - 3L[y] = L\left[e^{3t}\right].$$

Като заместим намираме, че

$$\begin{aligned} p^2.\overline{y}(p) - p.y(0) - y'(0) - 2(p.\overline{y}(p) - y(0)) - 3\overline{y}(p) &= \frac{1}{p-3}. \\ p^2.\overline{y}(p) - 2p.\overline{y}(p) - 3\overline{y}(p) &= \frac{1}{p-3}. \\ \overline{y}(p)\left(p^2 - 2p - 3\right) &= \frac{1}{p-3} \end{aligned}$$

или

$$\overline{y}(p) = \frac{1}{(p+1)(p-3)^2}.$$

Разлагаме на елементарни дроби

$$\frac{1}{(p+1)(p-3)^2} = \frac{A}{p+1} + \frac{B}{p-3} + \frac{C}{(p-3)^2}.$$

Намираме общ знаменател и приравняваме числителите

$$\frac{1}{(p+1)(p-3)^2} = \frac{A(p-3)^2 + B(p+1)(p-3) + C(p+1)}{(p+1)(p-3)^2},$$

$$1 = (A+B)p^2 + (-6A-2B+C)p + 9A - 3B + C.$$

Сравняваме коефициентите пред степените на p и достигаме до системата

$$\left| \begin{array}{c} A+B=0 \\ -6A-2B+C=0 \\ 9A-3B+C=1 \end{array} \right. \rightarrow \left| \begin{array}{c} A=\frac{1}{16} \\ B=-\frac{1}{16} \\ C=\frac{1}{4} \end{array} \right.$$

Следователно

$$\overline{y}(p) = \frac{1}{(p+1)(p-3)^2} = \frac{\frac{1}{16}}{p+1} + \frac{-\frac{1}{16}}{p-3} + \frac{\frac{1}{4}}{(p-3)^2}.$$

Накрая прилагаме обратния оператор на Лаплас и намираме, че решението на уравнението е

$$y = \frac{1}{16}e^{-t} - \frac{1}{16}e^{3t} + \frac{1}{4}te^{3t}.$$

Задача 3. Решете уравнението

$$y'' + y' - 2y = e^{-t},\ y(0) = 0, y'(0) = -1.$$

Решение. Прилагаме оператора на Лаплас към двете страни на уравнението и получаваме

$$L[y''] + L[y'] - 2L[y] = L\left[e^{-t}\right].$$

Като заместим намираме, че

$$\begin{aligned} p^2.\overline{y}(p) - p.y(0) - y'(0) + p.\overline{y}(p) - y(0) - 2\overline{y}(p) &= \frac{1}{p+1}. \\ p^2.\overline{y}(p) + 1 + p.\overline{y}(p) - 2\overline{y}(p) &= \frac{1}{p+1}. \\ p^2.\overline{y}(p) + p.\overline{y}(p) - 2\overline{y}(p) &= \frac{1}{p+1} - 1. \\ \overline{y}(p)\left(p^2 + p - 2\right) &= \frac{-p}{p+1} \end{aligned}$$

или

$$\overline{y}(p) = \frac{-p}{(p-1)(p+1)(p+2)}.$$

Разлагаме на елементарни дроби

$$\frac{-p}{(p-1)(p+1)(p+2)} = \frac{A}{p-1} + \frac{B}{p+1} + \frac{C}{p+2}.$$

Намираме общ знаменател и приравняваме числителите

$$\frac{-p}{(p-1)(p+1)(p+2)} = \frac{A(p+1)(p+2) + B(p-1)(p+2) + C(p-1)(p+1)}{p(p-1)^2},$$

$$-p = (A+B+C)p^2 + (3A+B)p + 2A - 2B - C.$$

Сравняваме коефициентите пред степените на p и достигаме до системата

$$\left| \begin{array}{c} A+B+C=0 \\ 3A+B=-1 \\ 2A-2B-C=0 \end{array} \right. \rightarrow \left| \begin{array}{c} A=-\frac{1}{6} \\ B=-\frac{1}{2} \\ C=\frac{2}{3} \end{array} \right.$$

Следователно

$$\overline{y}(p) = \frac{-p}{(p-1)(p+1)(p+2)} = \frac{-\frac{1}{6}}{p-1} + \frac{-\frac{1}{2}}{p+1} + \frac{\frac{2}{3}}{p+2}.$$

Накрая прилагаме обратния оператор на Лаплас и намираме, че решението на уравнението е

$$y = -\frac{1}{6}e^{t} - \frac{1}{2}e^{-t} + \frac{2}{3}e^{-2t}.$$

Задача 4. Решете уравнението

$$y'' + 3y' = e^{-3t},\ y(0) = 0, y'(0) = -1.$$

Решение. Прилагаме оператора на Лаплас към двете страни на уравнението и получаваме

$$L[y''] + 3L[y'] = L\left[e^{-3t}\right].$$

Като заместим намираме, че

$$\begin{aligned}
p^2.\overline{y}(p) - p.y(0) - y'(0) + 3(p.\overline{y}(p) - y(0)) &= \frac{1}{p+3}. \\
p^2.\overline{y}(p) + 1 + 3p.\overline{y}(p) &= \frac{1}{p+3}. \\
\overline{y}(p)\left(p^2+3p\right) &= \frac{1}{p+3} - 1. \\
\overline{y}(p)\left(p^2+3p\right) &= \frac{-p-2}{p+3}
\end{aligned}$$

или

$$\overline{y}(p) = \frac{-p-2}{p(p+3)^2}.$$

Разлагаме на елементарни дроби

$$\frac{-p-2}{p\left(p+3\right)^2}=\frac{A}{p}+\frac{B}{p+3}+\frac{C}{\left(p+3\right)^2}.$$

Намираме общ знаменател и приравняваме числителите

$$\frac{-p-2}{p\left(p+3\right)^2}=\frac{A\left(p+3\right)^2+Bp\left(p+3\right)+Cp}{p\left(p+3\right)^2},$$

$$-p-2=\left(A+B\right)p^2+\left(6A+3B+C\right)p+9A.$$

Сравняваме коефициентите пред степените на p и достигаме до системата

$$\left|\begin{array}{c} A+B=0 \\ 6A+3B+C=-1 \\ 9A=-2 \end{array}\right. \rightarrow \left|\begin{array}{c} A=-\frac{2}{9} \\ B=\frac{2}{9} \\ C=-\frac{1}{3} \end{array}\right.$$

Следователно

$$\overline{y}\left(p\right)=\frac{-p-2}{p\left(p+3\right)^2}=\frac{A}{p}+\frac{B}{p+3}+\frac{C}{\left(p+3\right)^2}=\frac{-\frac{2}{9}}{p}+\frac{\frac{2}{9}}{p+3}+\frac{-\frac{1}{3}}{\left(p+3\right)^2}.$$

Накрая прилагаме обратния оператор на Лаплас и намираме, че решението на уравнението е

$$y=-\frac{2}{9}+\frac{2}{9}e^{-3t}-\frac{1}{3}te^{-3t}.$$

Задача 5. Решете уравнението

$$y''-3y'+2y=e^t,\ \ y\left(0\right)=1, y'\left(0\right)=0.$$

Решение. Прилагаме оператора на Лаплас към двете страни на уравнението и получаваме

$$L\left[y''\right]-3L\left[y'\right]+2L\left[y\right]=L\left[e^t\right].$$

Като заместим намираме, че

$$\begin{aligned}
p^2.\overline{y}\left(p\right)-p.y\left(0\right)-y'\left(0\right)-3\left(p.\overline{y}\left(p\right)-y\left(0\right)\right)+2\overline{y}\left(p\right) &= \frac{1}{p-1}. \\
p^2.\overline{y}\left(p\right)-p-3p.\overline{y}\left(p\right)+3+2\overline{y}\left(p\right) &= \frac{1}{p-1}. \\
p^2.\overline{y}\left(p\right)-3p.\overline{y}\left(p\right)+2\overline{y}\left(p\right) &= \frac{1}{p-1}+p-3. \\
\overline{y}\left(p\right)\left(p^2-3p+2\right) &= \frac{p^2-4p+4}{p-1}.
\end{aligned}$$

или

$$\overline{y}\left(p\right)=\frac{p^2-4p+4}{\left(p-1\right)^2\left(p-2\right)}.$$

Разлагаме на елементарни дроби

$$\frac{p^2-4p+4}{(p-1)^2(p-2)}=\frac{A}{p-1}+\frac{B}{(p-1)^2}+\frac{C}{p-2}.$$

Намираме общ знаменател и приравняваме числителите

$$\frac{p^2-4p+4}{(p-1)^2(p-2)}=\frac{A(p-1)(p-2)+B(p-2)+C(p-1)^2}{(p-1)^2(p-2)},$$

$$p^2-4p+4=(A+C)p^2+(-3A+B-2C)p+2A-2B+C.$$

Сравняваме коефициентите пред степените на p и достигаме до системата

$$\left|\begin{array}{c} A+C=1 \\ -3A+B-2C=-4 \\ 2A-2B+C=4 \end{array}\right. \rightarrow \left|\begin{array}{c} A=1 \\ B=-1 \\ C=0 \end{array}\right.$$

Следователно

$$\overline{y}(p)=\frac{p^2-4p+4}{(p-1)^2(p-2)}=\frac{1}{p-1}+\frac{-1}{(p-1)^2}.$$

Накрая прилагаме обратния оператор на Лаплас и намираме, че решението на уравнението е

$$y=e^t-te^t.$$

Задачи за самостоятелна работа:

Задача 1. Решете уравнението

$$y''-2y'+y=t-\sin t,\ y(0)=0, y'(0)=0.$$

Отг. $y=\frac{1}{2}te^t-\frac{3}{2}e^t+t+2-\frac{1}{2}\cos t.$

Задача 2. Решете уравнението

$$y''+2y'+y=te^t,\ y(0)=1, y'(0)=2.$$

Отг. $y=\frac{1}{6}t^3e^{-t}+3te^{-t}+e^{-t}.$

Задача 3. Решете уравнението

$$y''-2y'-3y=2t,\ y(0)=1, y'(0)=1.$$

Отг. $y=\frac{5}{9}e^{3t}-\frac{2}{3}t+\frac{4}{9}.$

Задача 4. Решете уравнението

$$y''+2y'=2+e^t,\ y(0)=1, y'(0)=2.$$

Отг. $y=\frac{1}{3}e^t-\frac{1}{3}e^{-2t}+t+1.$

Задача 5. Решете уравнението

$$y''-2y'+2y=2e^t\cos t,\ y(0)=0, y'(0)=0.$$

Отг. $y=te^t\sin t.$