Приложение на определен интеграл

1. Намиране на лице на равнинна фигура.

Лице на равнинна фигура в декартови координати. Ако равнинната фигура D е ограничена от правите $x = a, x = b, (a < b)$ и от графиките на функциите $y = f(x)$ и $y = g(x)$ като $f(x) > g(x)$ за всяко $x \in [a, b]$, то лицето на D се пресмята с формулата

$$S_D = \int_a^b [f(x) - g(x)]\, dx.$$

Намерете лицето на фигурата ограничена от кривите:

Задача 1. $y = x^2 - x$ и $x - y = 0$.

Решение: Уравнението $y = x^2 - x$ задава парабола обърната нагоре, а уравнението $y = x$ е уравнение на права.

За да определим границите, в които се изменя x, трябва да намерим пресечните точки на двете криви. Имаме

$$x^2 - x = x$$
$$x^2 - 2x = 0 \to x_1 = 0, x_2 = 2.$$

Тогава

$$S = \int_0^2 \left[x - \left(x^2 - x\right)\right] dx = \int_0^2 \left(2x - x^2\right) dx = x^2\Big|_0^2 - \frac{x^3}{3}\Big|_0^2 = 4 - \frac{8}{3} = \frac{4}{3}.$$

Задача 2. $y = 2x^2 + 10, y = 22 - x^2$.

Решение: Уравнението $y = 2x^2 + 10$ е уравнение на парабола обърната нагоре, а уравнението $y = 22 - x^2$ е уравнение на парабола обърната надолу. Имаме

$$2x^2 + 10 = 22 - x^2$$
$$3x^2 = 12 \to x_1 = -2, x_2 = 2.$$

Тогава

$$\begin{aligned} S &= \int_{-2}^2 \left[22 - x^2 - \left(2x^2 + 10\right)\right] dx = \int_{-2}^2 \left(12 - 3x^2\right) dx = 12x\Big|_{-2}^2 - 3\frac{x^3}{3}\Big|_{-2}^2 \\ &= 12.2 - 12(-2) - \left(2^3 - (-2)^3\right) = 24 + 24 - (8 + 8) = 48 - 16 = 32. \end{aligned}$$

Лице на равнинна фигура в параметрична форма.

Използваме формулата

$$S_D = \int_a^b y\left(t\right) x'\left(t\right) dt.$$

Задача 3. Намерете лицето на фигурата ограничена от $\left\{ \begin{array}{l} x = 3\sin t \\ y = 4\cos t, 0 \leq t \leq 2\pi. \end{array} \right.$

Решение:

$$\begin{aligned} S &= \int_0^{2\pi} 4\cos t.\left(3\sin t\right)' dt = \int_0^{2\pi} 4\cos t.3\cos t dt = \int_0^{2\pi} 12\cos^2 t dt = 12\int_0^{2\pi} \frac{1+\cos 2t}{2} dt \\ &= 6\int_0^{2\pi} \left(1+\cos 2t\right) dt = 6\int_0^{2\pi} dt + 3\int_0^{2\pi} \cos 2t d2t = 6\ t|_0^{2\pi} + 3\ \sin 2t|_0^{2\pi} = 6\left(2\pi - 0\right) + 3\left(0-0\right) = 12\pi. \end{aligned}$$

Задачи за самостоятелна работа:

Намерете лицето на фигурата, органичена от кривите зададени с уравненията:

1. $y = x^2 + 3, y = 0, x = -1, x = 2.$
Отг. 12.

2. $y = x^2 - 3x, x + y = 0$
Отг. $\frac{4}{3}$.

3. $y = x^2 - 3x + 2, y = 0$
Отг. $\frac{1}{6}$.

4. $y = x^2 + 4x, x - y + 4 = 0$
Отг. $\frac{125}{6}$.

5. $y = x^2 - 3, y = 6x - x^2 - 7$
Отг. $\frac{1}{3}$.

6. $y = xe^{2x}, y = 0, 0 \leq x \leq 1$
Отг. $\frac{1}{4}\left(e^2+1\right)$.

7. $y = 4x\sin 2x, y = 0, 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$
Отгg. π.

8. $\left\{ \begin{array}{l} x = a\left(t - \sin t\right) \\ y = a\left(1 - \cos t\right), 0 \leq t \leq 2\pi. \end{array} \right.$
Отг. $3a^2\pi$.

9. $\left\{ \begin{array}{l} x = 3\cos t + 5\sin t \\ y = 5\cos t - 3\sin t, 0 \leq t \leq 2\pi. \end{array} \right.$
Отг. 34π.

2. Намиране на дължина на крива.

Дължина на крива, зададена с декартово уравнение.
Нека кривата L е зададена с уравнението $y = y(x), a \leq x \leq b$. Тогава дължината на L се пресмята по формулата

$$l(L) = \int_a^b \sqrt{1 + (y'(x))^2} dx.$$

Задача 4. Намерете дължината на кривата, зададена с уравненията $y = 4x^{\frac{3}{2}}, 0 \leq x \leq \frac{2}{3}$.

Решение: Първо намираме $y'(x) = \left(4x^{\frac{3}{2}}\right)' = 6x^{\frac{1}{2}}$. Заместваме във формулата и получаваме

$$\begin{aligned} l &= \int_0^{\frac{2}{3}} \sqrt{1 + \left(6x^{\frac{1}{2}}\right)^2} dx = \int_0^{\frac{2}{3}} \sqrt{1 + 36x} dx = \frac{1}{36} \int_0^{\frac{2}{3}} (1 + 36x)^{\frac{1}{2}} d(36x + 1) \\ &= \frac{1}{36} \left. \frac{(1 + 36x)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \right|_0^{\frac{2}{3}} = \frac{1}{54} \left. (1 + 36x)^{\frac{3}{2}} \right|_0^{\frac{2}{3}} = \frac{1}{54} \left[\left(1 + 36.\frac{2}{3}\right)^{\frac{3}{2}} - (1 + 36.0)^{\frac{3}{2}} \right] \\ &= \frac{1}{54} \left(25^{\frac{3}{2}} - 1^{\frac{3}{2}}\right) = \frac{1}{54}.124 = \frac{62}{27}. \end{aligned}$$

Задача 5. Намерете дължината на кривата, зададена с уравненията $y = \sqrt{e^{2x} - 1} - \arctan \sqrt{e^{2x} - 1}, 0 \leq x \leq 1$.
Решение: Първо намираме

$$\begin{aligned} y'(x) &= \left(\sqrt{e^{2x} - 1} - \arctan \sqrt{e^{2x} - 1}\right)' = \left(\left(e^{2x} - 1\right)^{\frac{1}{2}} - \arctan \left(e^{2x} - 1\right)^{\frac{1}{2}}\right)' \\ &= \frac{1}{2} \left(e^{2x} - 1\right)^{-\frac{1}{2}} . \left(e^{2x} - 1\right)' - \frac{1}{1 + e^{2x} - 1}. \left(\left(e^{2x} - 1\right)^{\frac{1}{2}}\right)' \\ &= e^{2x} \left(e^{2x} - 1\right)^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{e^{2x}}.e^{2x} \left(e^{2x} - 1\right)^{-\frac{1}{2}} = \frac{e^{2x}}{\sqrt{e^{2x} - 1}} - \frac{1}{\sqrt{e^{2x} - 1}} \\ &= \frac{e^{2x} - 1}{\sqrt{e^{2x} - 1}} = \sqrt{e^{2x} - 1}. \end{aligned}$$

Заместваме във формулата и получаваме

$$\begin{aligned} l &= \int_0^1 \sqrt{1 + \left(\sqrt{e^{2x} - 1}\right)^2} dx = \int_0^1 \sqrt{1 + e^{2x} - 1} dx = \int_0^1 e^x dx = \\ &= \left. e^x \right|_0^1 = e - e^0 = e - 1. \end{aligned}$$

Дължина на крива, зададена с параметрични уравнения.

Ако L е параметрично зададена крива с уравнения $x = x(t), y = y(t), t \in [a, b]$, то дължината се пресмята по формулата

$$l(L) = \int_a^b \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}dt.$$

Задача 6. Намерете дължината на кривата зададена с уравненията $\begin{cases} x = 3\sin t + 4\cos t \\ y = 4\sin t - 3\cos t, 0 \le t \le \frac{\pi}{5}. \end{cases}$

Решение: Намираме

$$\begin{aligned} x' &= (3\sin t + 4\cos t)' = 3\cos t - 4\sin t \\ y' &= (4\sin t - 3\cos t)' = 4\cos t + 3\sin t. \end{aligned}$$

Тогава

$$\begin{aligned} l &= \int_0^{\frac{\pi}{5}} \sqrt{(3\cos t - 4\sin t)^2 + (4\cos t + 3\sin t)^2}dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{5}} \sqrt{9\cos^2 t - 24\cos t\sin t + 16\sin^2 t + 16\cos^2 t + 24\cos t\sin t + 9\sin^2 t}dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{5}} \sqrt{25\cos^2 t + 25\sin^2 t}dt = 5\int_0^{\frac{\pi}{5}} dt = 5\ t\Big|_0^{\frac{\pi}{5}} = \pi. \end{aligned}$$

Задача 7. Намерете дължината на кривата зададена с уравненията $\begin{cases} x = e^t(\sin t + \cos t) \\ y = e^t(\cos t - \sin t), 0 \le t \le \ln 2. \end{cases}$

Решение: Намираме

$$\begin{aligned} x' &= \left[e^t(\sin t + \cos t)\right]' = e^t(\sin t + \cos t) + e^t(\cos t - \sin t) = 2e^t\cos t \\ y' &= \left[e^t(\cos t - \sin t)\right]' = e^t(\cos t - \sin t) + e^t(-\sin t - \cos t) = -2e^t\sin t. \end{aligned}$$

Тогава

$$\begin{aligned} l &= \int_0^{\ln 2} \sqrt{(2e^t\cos t)^2 + (-2e^t\sin t)^2}dt = \int_0^{\ln 2} \sqrt{4e^{2t}\cos^2 t + 4e^{2t}\sin^2 t}dt \\ &= \int_0^{\ln 2} \sqrt{4e^{2t}}dt = 2\int_0^{\ln 2} e^t dt = 2\ e^t\Big|_0^{\ln 2} = 2(2-1) = 2. \end{aligned}$$

Задачи за самостоятелна работа:

Намерете дължината на кривата, зададена с уравненията:

1. $y = x^{\frac{3}{2}}, 0 \le x \le \frac{20}{3}$.

Отг. $\frac{56}{3}$.

2. $y=\ln x, \sqrt{3}\leq x\leq\sqrt{8}$.
Отг. $1+\frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}$.

3. $y=\sqrt{x-x^2}-\arcsin\sqrt{x}, 0\leq x\leq 1$.
Отг. 2.

4. $y=\ln\left(1-x^2\right), 0\leq x\leq\frac{1}{2}$.
Отг. $\ln 3-\frac{1}{2}$.

5. $\begin{cases} x=5+3\cos 2t \\ y=5+3\sin 2t, 0\leq t\leq\frac{\pi}{2}. \end{cases}$
Отг. 3π.

6. $\begin{cases} x=6\cos t+8\sin t \\ y=8\cos t-6\sin t, 0\leq t\leq\pi. \end{cases}$
Отг. 10π.

7. $\begin{cases} x=\cos 2t+\sin 2t \\ y=\sin 2t-\cos 2t, 0\leq t\leq\frac{\pi}{2}. \end{cases}$
Отг. $\sqrt{2}\pi$.

8. $\begin{cases} x=2\left(t-\sin t\right) \\ y=2\left(1-\cos t\right), 0\leq t\leq\pi. \end{cases}$
Отг. 8.

9. $\begin{cases} x=e^t\cos t \\ y=e^t\sin t, 0\leq t\leq 1. \end{cases}$
Отг. $\sqrt{2}\left(e-1\right)$.

10. $\begin{cases} x=3\left(\cos t+t\sin t\right) \\ y=3\left(\sin t-t\cos t\right), 0\leq t\leq\pi. \end{cases}$
Отг. $\frac{3\pi^2}{2}$.