Практическо упражнение No 8

МЕТОДИ И ОПЕРАЦИОННИ БЛОКОВЕ ЗА УМНОЖЕНИЕ НА ДВОИЧНИ ЧИСЛА С ФИКСИРАНА ЗАПЕТАЯ В ПРАВ КОД

1. Цел на упражнението:

Целта на упражнението е, работейки с програмните модели на операционните блокове за умножение, студентите да добият по-ясна представа за начините за реализиране на съответните методи, а също така да се установи степента на усвояване на микроалгоритмите за умножение.

2. Теоретична част:

При умножение на числата в ПК знаковите разряди и разрядите на мантисите се обработват отделно. За определяне кода на знака на произведението се извършва сумиране по mod 2 на кодовете на знаците на множимото и множителя. Кодът на мантисата на резултата се получава като се умножат кодовете на мантисите на двата операнда. Умножението на мантисите може да започне с младшите или със старшите разряди на множителя, при което може да се измества сумата на частичните произведения или множимото, т.е. възможни са 4 основни метода за умножение, които по-долу ще бъдат наричани условно A, B, C и D.

2.1. Метод А.

При този метод произведението се представя по следния начин:

$$
\begin{aligned}
Z &= Y.X = Y.0,x_1x_2x_3...x_{n-1}x_n = Y(\ x_1 2^{-1}+x_2 2^{-2}+x_3\, 2^{-3}+\ ...+x_{n-1}2^{-(n-1)}+x_n 2^{-n}\ )= \\
&= Yx_1 2^{-1} + Yx_2 2^{-2} + Yx_3 2^{-3} + .. + Yx_{n-1}2^{-(n-1)} + Yx_n 2^{-n} = \\
&= 2^{-1}(Yx_1 + 2^{-1}(Yx_2 + 2^{-1}(Yx_3 + .. + 2^{-1}(Yx_{n-1} + 2^{-1}(Yx_n + 0))..))),
\end{aligned}
$$

където с X, Y и Z са означени само мантисите на двата операнда и на резултата. От тук следва, че умножението може да се извърши по следните рекурентни формули:

$$
\begin{aligned}
&П_0 = 0 \\
&П_1 = 2^{-1}(Yx_n + П_0) \\
&П_2 = 2^{-1}(Yx_{n-1} + П_1) \\
&... \\
&П_{i+1} = 2^{-1}(Yx_{n-i} + П_i) \\
&... \\
&П_n \ = 2^{-1}(Yx_1 + П_{n-1}) = Z
\end{aligned}
$$

т.е. умножението се свежда към n-кратно повторение на цикъла:

$\mathbf{П_{i+1} = 2^{-1}(Yx_{n-i} + П_i)}$ при начални условия: $\mathbf{i = 0, П_0 = 0}$.

От тази формула се вижда, че умножението започва с младшите разряди на множителя (x_n) и че на изместване подлежи сумата на частичните произведения (П). Поради това методът се нарича **"умножение с младшите разряди на множителя, с изместване сумата на частичните произведения надясно".**

Схемата на операционния блок за умножение по метод А е показана на фиг.1. Действието на блока ще бъде обяснено от момента, в който в Px и в Py са заредени мантисите на правите кодове на двата операнда, а Pz, Pz' и БрЦ са нулирани. Подава се сигнал НО. През елемента "ИЛИ" този сигнал постъпва на шината за ПрК от Pz в $\sum$, при което в последния се подава $П_o = 0$. Същият сигнал се подава и на един от входовете на елемента "И-1". При това, ако x_n е равно на "1", т.е. ако в тригера Tn на Px е записана "1", то този елемент ще се отвори, сигналът ще премине през него и ще постъпи на шината за ПрК от Py в $\sum$. В противен случай сигнал ПрК няма да се формира. Обобщено може да се приеме, че от Py към суматора се подава Yx_n. След време τ_1 се получава сигнал за ПК от $\sum$ в Pz, а след време τ_2 - сигнал за ИД в Pz, Pz' и в Px. При това в Pz и в Pz' се получава $П_1 = 2^{-1}(Yx_n+П_o)$, а в Tn се записва x_{n-1}. Същият сигнал увеличава с единица съдържанието на БрЦ. След време τ_3 се проверява съдържанието на този брояч. Тъй като в края на първия цикъл (БрЦ) = 1, то на изхода на КСх ще има "0", която затваря елемента "И-3" и не позволява формирането на сигнала КО, а след инвертиране отваря елемента "И-2" и разрешава връщането на сигнала на входа на блока за местно управление. Така описаните действия се повтарят общо n пъти. В края на n-тия цикъл в Pz и в Pz' се получава 2n-разрядната мантиса на произведението на двата операнда, след което се формира сигналът КО.

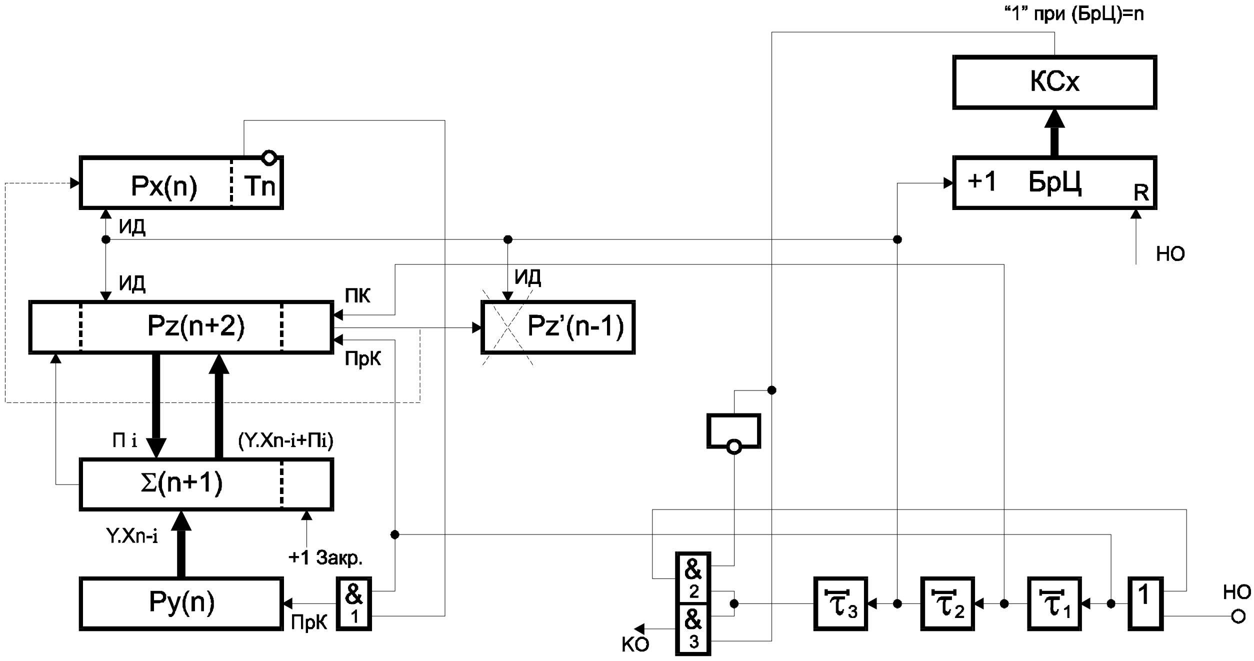
Действието на блока за умножение е пояснено и чрез цифровата диаграма на фиг.2.

Както се вижда от схемата на фиг.1, Pz е с разрядност (n+2), а $\sum$ с разрядност (n+1), за да не се загуби съответно единицата на преноса, който евентуално би могъл да възникне при събиране на $П_i$ и Yx_{n-i} и за да може да се извърши закръгляване на резултата чрез прибавяне на "1" в (n+1)-вия разряд на 2n-разрядното произведение.

Тъй като изместването в Pz' и Px се осъществява в една и съща посока, при което старшите разряди на Pz' се запълват, а на Px се освобождават, то вместо Pz' може да се използва Px .

Времето за умножение по този метод с показаната схема може да се определи по следната формула:

$$t_{y\,A} = n(\tau_1+\tau_2+\tau_3) = n(t_{ПрК} + t_{\Sigma} + t_{ПК} + t_{ИК}) = n(t_C + t_{ИК})$$



Фиг.1. Схема на операционен блок за умножение по метод А

Py: 1 1 1 0 0 1 1

	Px		Pz			БрЦ
Px	1 0 1 1 0 1 **1**	Pz	0	0 0 0 0 0 0 0	0 0 0 0 0 0 0	0 0 0 0
		+Y	0	1 1 1 0 0 1 1	0 0 0 0 0 0 0	
ИД	0 1 0 1 1 0 **1**	ИД Pz	0	0 1 1 1 0 0 1	1 0 0 0 0 0 0	0 0 0 1
		+Y	1	0 1 0 1 1 0 0	1 0 0 0 0 0 0	
ИД	0 0 1 0 1 1 **0**	ИД Pz	0	1 0 1 0 1 1 0	0 1 0 0 0 0 0	0 0 1 0
		+0	0	1 0 1 0 1 1 0	0 1 0 0 0 0 0	
ИД	0 0 0 1 0 1 **1**	ИД Pz	0	0 1 0 1 0 1 1	0 0 1 0 0 0 0	0 0 1 1
		+Y	1	0 0 1 1 1 1 0	0 0 1 0 0 0 0	
ИД	0 0 0 0 1 0 **1**	ИД Pz	0	1 0 0 1 1 1 1	0 0 0 1 0 0 0	0 1 0 0
		+Y	1	1 0 0 0 0 1 0	0 0 0 1 0 0 0	
ИД	0 0 0 0 0 1 **0**	ИД Pz	0	1 1 0 0 0 0 1	0 0 0 0 1 0 0	0 1 0 1
		+0	0	1 1 0 0 0 0 1	0 0 0 0 1 0 0	
ИД	0 0 0 0 0 0 **1**	ИД Pz	0	0 1 1 0 0 0 0	1 0 0 0 0 1 0	0 1 1 0
		+Y	1	0 1 0 0 0 1 1	1 0 0 0 0 1 0	
ИД	0 0 0 0 0 0 **0**	ИД Pz	0	1 0 1 0 0 0 1	1 1 0 0 0 0 1	0 1 1 1
				+	1	закръгление
				1 0 1 0 0 1 0		резултат

Фиг.2. Цифрова диаграма на блока за умножение по метод А

2.2. Метод B.

При този метод умножението се свежда към n-кратно повторение на цикъла:

$\mathbf{П_{i+1} = Y_i x_{n-i} + П_i \; ; \; Y_i = Y_{i-1}2}$ при начални условия: $\mathbf{i = 0,\ П_0 = 0,\ Y_0 = Y}$, от където се вижда, че умножението започва с младшите разряди на множителя (x_n) и че на изместване подлежи множимото (Y). Поради това методът се нарича **"умножение с младшите разряди на множителя, с изместване на множимото наляво".**

2.3. Метод C.

При този метод умножението се свежда към n-кратно повторение на цикъла:

$\mathbf{П_{i+1} = (П_i + Yx_{i+1})2}$ при начални условия: $\mathbf{i = 0,\ П_0 = 0,}$ от където се вижда, че умножението започва със старшите разряди на множителя (x_1) и че на изместване подлежи сумата на частичните произведения (П). Поради това методът се нарича **"умножение със старшите разряди на множителя, с изместване сумата на частичните произведения наляво".**

Забележка: Методите B и C не са намерили приложение в компютърната техника и поради това няма да бъдат подробно разглеждани.

2.4. Метод D.

При този метод произведението се представя по следния начин:

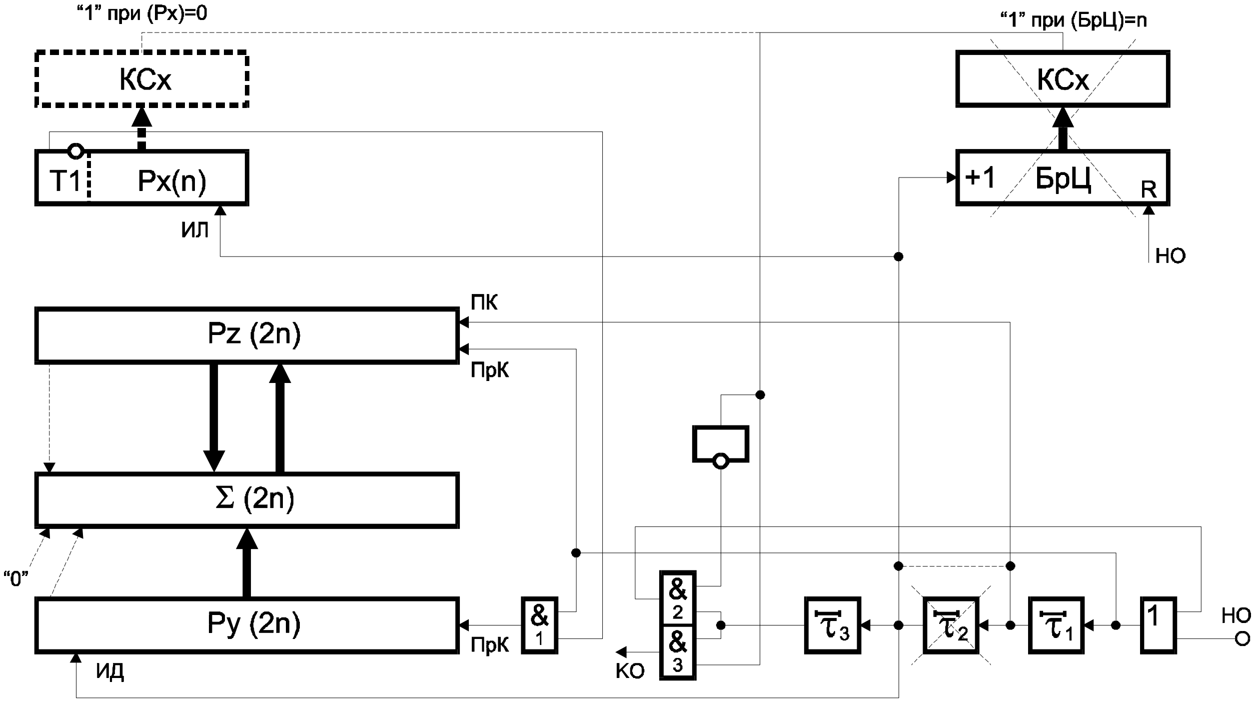
$$\begin{aligned} Z &= Y.X = Y.0,x_1x_2...x_n = Y(x_1 2^{-1} + x_2 2^{-2} + \ldots + x_n 2^{-n}) = \\ &= Y\, x_1 2^{-1} + Y\, x_2 2^{-2} +..+ Y\, x_n 2^{-n} = \\ &= 0 + Y_1 x_1 + Y_2 x_2 + \ldots + Y_n x_n \,, \end{aligned}$$

където $Y_i = Y2^{-i}$. Следователно умножението се свежда към n-кратно повторение на цикъла:

$\mathbf{П_i = П_{i-1} + Y_i x_i \; ; \; Y_i = Y_{i-1} 2^{-1}}$ при начални условия: $\mathbf{i = 1;\ П_0 = 0;\ \ Y_1 = Y2^{-1}}$.

От тази формула се вижда, че умножението започва със старшите разряди на множителя (x_1) и че на изместване подлежи множимото (Y). Поради това методът се нарича **"умножение със старшите разряди на множителя, с изместване на множимото надясно".**

Схемата на операционния блок за умножение по метод D е показана на фиг.3. Както се вижда, i-тият разряд на Py е свързан с (i+1)-вия разряд на суматора, тъй като в първия цикъл трябва да се предаде $Y2^{-1}$. Мантисата на правия код на множимото Y се записва в



Фиг.3. Схема на операционен блок за умножение по метод D

		Py	1 1 1 0 0 1 1 0 0 0 0 0 0 0	БрЦ
Px	**1** 0 1 1 0 1 1	Pz	0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0	0 0 0 0
		$+Y2^{-1}$	0 1 1 1 0 0 1 1 0 0 0 0 0 0	
ИЛ	**0** 1 1 0 1 1 0	ИД Ру	0 1 1 1 0 0 1 1 0 0 0 0 0 0	0 0 0 1
		+0	0 1 1 1 0 0 1 1 0 0 0 0 0 0	
ИЛ	**1** 1 0 1 1 0 0	ИД Ру	0 0 1 1 1 0 0 1 1 0 0 0 0 0	0 0 1 0
		+(Py)	1 0 0 0 1 1 1 1 1 1 0 0 0 0	
ИЛ	**1** 0 1 1 0 0 0	ИД Ру	0 0 0 1 1 1 0 0 1 1 0 0 0 0	0 0 1 1
		+(Py)	1 0 0 1 1 1 1 0 0 0 1 0 0 0	
ИЛ	**0** 1 1 0 0 0 0	ИД Ру	0 0 0 0 1 1 1 0 0 1 1 0 0 0	0 1 0 0
		+0	1 0 0 1 1 1 1 0 0 0 1 0 0 0	
ИЛ	**1** 1 0 0 0 0 0	ИД Ру	0 0 0 0 0 1 1 1 0 0 1 1 0 0	0 1 0 1
		+(Py)	1 0 1 0 0 0 0 1 1 0 1 1 1 0	
ИЛ	**1** 0 0 0 0 0 0	ИД Ру	0 0 0 0 0 0 1 1 1 0 0 1 1 0	0 1 1 0
		+(Py)	**1 0 1 0 0 0 1** 1 1 0 0 0 0 1	
ИЛ	**0** 0 0 0 0 0 0	ИД Ру	0 0 0 0 0 0 0 1 1 1 0 0 1 1	0 1 1 1

Фиг.4. Цифрова диаграма на блока за умножение по метод D

старшите n разряда на Ру. Действието на блока е пояснено чрез цифровата диаграма на фиг.4.

Тъй като сумата на частичните произведения е неподвижна, то е възможно микрооперациите ПК в Pz и ИД в Ру да се съвместят, което на практика става чрез изключване на τ_2 и свързване на шината за ИД към изхода на τ_1. Естествено, при това τ_3 следва да се замести с $\max(\tau_2, \tau_3)$, за да се гарантира правилното изпълнение на всяка една от двете микрооперации. Ако се допусне, че $\tau_2>\tau_3$, то тогава времето за умножение ще стане равно на:

$t_{y\,D} = nt_C$.

Поради това, че сумата на частичните произведения е неподвижна, сигнал КО може да се формира при (Px) = 0. За целта към изходите на Рх трябва да се свърже КСх, на чийто изход се получава “1” при (Px) = 0. При това БрЦ и свързаната към неговите изходи КСх стават излишни. Така се намалява както разходът на апаратура, така и времето за умножение, като последното ще зависи от конкретния множител и по-точно от броя на нулите в младшите му разряди. Използвайки методите на математическата статистика може да се покаже, че при този начин за формиране на сигнала КО броят на циклите се намалява средно с един, т.е. средното време за умножение става равно на:

$t_{y\,D} = (n-1)t_C$.

В разгледаните схеми на блокове за умножение се получава произведение с 2n-разрядна мантиса. Но тъй като клетките на ОП са n-разрядни, то се налага младшите n разряда на произведението да се отсичат, което означава, че изчисляването на цялото произведение, т.е. на всичките 2n разряда е излишно. Това може да се използва за намаляване разхода на апаратура. При метод А, ако ролята на Pz' се изпълнява от Рх, опростяване е невъзможно. Но при метод D могат да бъдат скъсени от страната на младшите разряди Ру, Pz и $\sum$, т.е. тези възли могат да бъдат направени (n+k) разрядни < 2n. При това, ако k се избере от условието :

$k \geq 1 + \log_2(n-k-1)$,

то се гарантира, че грешката вследствие на скъсяването няма да превиши половината от теглото на n-тия разряд, т.е. $2^{-n}/2$. Така например при $23 \leq n \leq 39$ се получава, че k = 6.

При метод D, ако споменатите регистри и суматорът са скъсени, сигнал КО може да се формира и при (Py) = 0 по описания по-горе начин, което при малки стойности на Y може да доведе до значително намаляване на времето за умножение.

Желателно е, с цел да се намали грешката, получаваща се в резултат на това, че в ОП се предават само старшите n разряда на мантисата, преди изпращане в ОП резултатът да се закръглява чрез прибавяне на "1" в (n+1)-вия разряд.

3. Задачи за изпълнение:

3.1. Да се преобразуват в двоичната система десетичните числа X = 0,...... и Y = 0,...... с точност 7 знака след запетаята.

3.2. Да се попълнят цифровите диаграми за методите A и D.

3.3. Да се извърши умножение по метод A със съответния програмен модел (фиг.5), като междинните резултати се сравняват с цифровата диаграма.

3.4. Да се извърши умножение по метод D със съответния програмен модел без и със скъсяване на Py, Pz и $\sum$ (фиг.6), като междинните резултати се сравняват с цифровата диаграма.

4. Контролни въпроси:

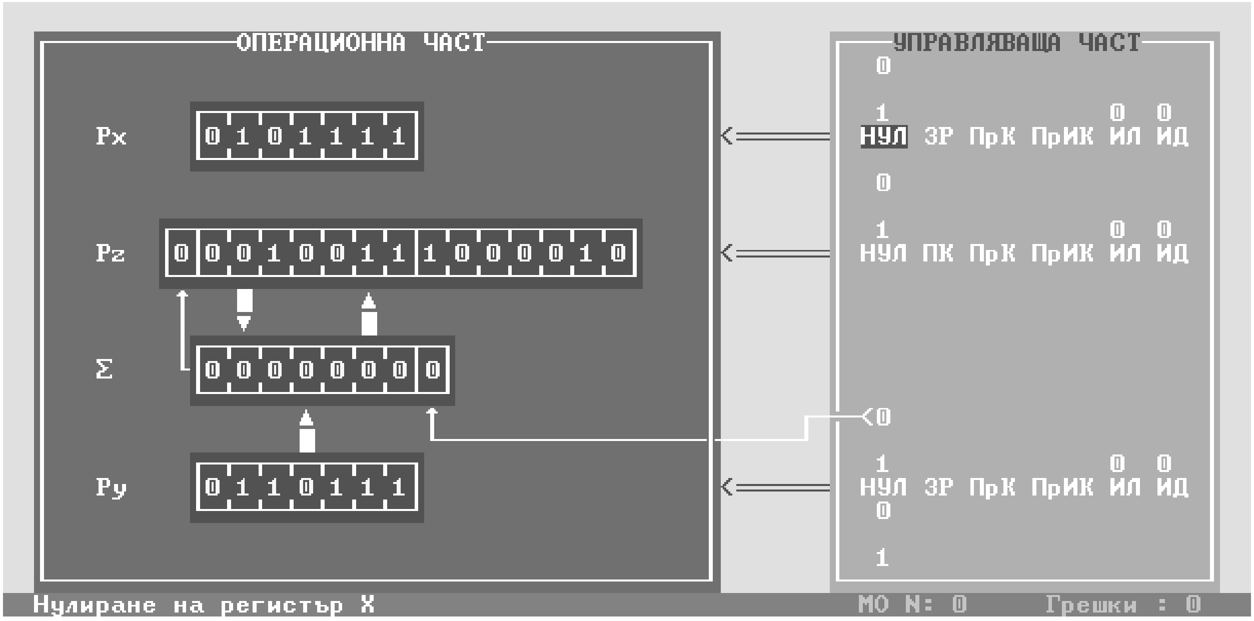
4.1. С кои разряди на множителя започва умножението при метод A, кое подлежи на изместване и в каква посока? Каква трябва да бъде разрядността на отделните регистри и на суматора?

4.2. Как може да се намали разходът на апаратура при метод A?

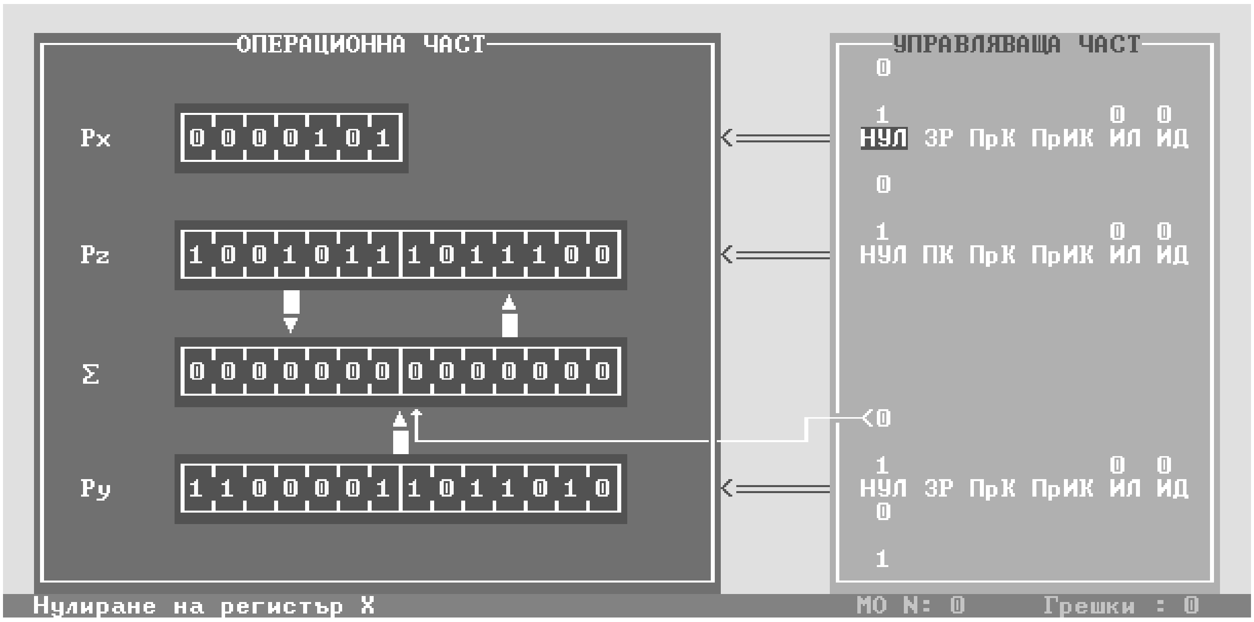
4.3. С кои разряди на множителя започва умножението при метод D, кое подлежи на изместване и в каква посока? Каква трябва да бъде разрядността на отделните регистри и на суматора?

4.4. Как може да се намали времето за умножение и разходът на апаратура при метод D?

4.5. Кой от двата метода позволява да се получи по-малко време за умножение и кой - по-малък разход на апаратура.



Фиг.5. Програмен модел на блока
за умножение по метод A



Фиг.6. Програмен модел на блока
за умножение по метод D

BACK