Системи линейни уравнения. Метод на Гаус.

Задача 1. Решете системата

$$\left|\begin{aligned} x_1+x_2-x_3&=0\\ 3x_1+2x_2+x_3&=5\\ 4x_1-x_2+5x_3&=3\end{aligned}\right.$$

Решение. Първо съставяме разширената матрица от коефициентите в системата

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0\\ 3 & 2 & 1 & 5\\ 4 & -1 & 5 & 3\end{array}\right)$$

Искаме да извършим действия (умножение на ред с число и прибавяне на полученото към друг), които да доведат до получаването на нули под главния диагонал.

Тъй като първият ненулев елемент във втория ред е 3, ще умножим първия ред по 3 и от него ще извадим втория. Получаваме

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0\\ 3 & 2 & 1 & 5\\ 4 & -1 & 5 & 3\end{array}\right) \tilde{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0\\ 0 & 1 & -4 & -5\\ 4 & -1 & 5 & 3\end{array}\right)$$

На следващата стъпка, тъй като първият ненулев елемент на третия ред е 4, то умножаваме първия ред по 4 и от него вадим третия. Имаме

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0\\ 0 & 1 & -4 & -5\\ 4 & -1 & 5 & 3\end{array}\right) \tilde{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0\\ 0 & 1 & -4 & -5\\ 0 & 5 & -9 & -3\end{array}\right)$$

Последният ненулев елемент под главния диагонал е 5, следователно ще умножим втория ред по 5 и от него ще извадим третия. Получаваме

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0\\ 0 & 1 & -4 & -5\\ 0 & 5 & -9 & -3\end{array}\right) \tilde{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0\\ 0 & 1 & -4 & -5\\ 0 & 0 & -11 & -22\end{array}\right)$$

След като сме получили нули под главния диагонал записваме системата, съответстваща на преобразуваната разширена матрица.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0\\ 0 & 1 & -4 & -5\\ 0 & 0 & -11 & -22\end{array}\right) \to \left|\begin{aligned} x_1+x_2-x_3&=0\\ x_2-4x_3&=-5\\ -11x_3&=-22\end{aligned}\right.$$

Решаваме я от последния ред към първия като на всяка стъпка намираме по една от неизвестните.

От $-11x_3=-22$ намираме, че $x_3=2$.

Сега заместваме полученото във втория ред. Имаме $x_2-4x_3=x_2-4.2=x_2-8=-5$, откъдето намираме $x_2=3$.

Накрая заместваме x_2 и x_3 в първото уравнение. Получаваме $x_1 + x_2 - x_3 = x_1 + 3 - 2 = x_1 + 1 = 0$, откъдето следва, че $x_1 = -1$.

Задача 2. Решете системата

$$\left| \begin{array}{c} 4x_1 + 2x_2 + x_3 = 7 \\ x_1 - x_2 + x_3 = -2 \\ 2x_1 + 3x_2 - 3x_3 = 11 \end{array} \right.$$

Решение. Образуваме разширената матрица, която има видът

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & 1 & 7 \\ 1 & -1 & 1 & -2 \\ 2 & 3 & -3 & 11 \end{array} \right)$$

Припомняме, че имаме право да разменяме редове. Най-лесно би било ако първият елемент на първия ред е 1. Затова разменяме местата на първия и третия ред. Получаваме

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & 1 & 7 \\ 1 & -1 & 1 & -2 \\ 2 & 3 & -3 & 11 \end{array} \right) \tilde{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & -2 \\ 4 & 2 & 1 & 7 \\ 2 & 3 & -3 & 11 \end{array} \right)$$

Искаме да приведем разширената матрица в диагонален вид. За целта, понеже първият ненулев елемент на втория ред е 4, то умножаваме първия ред по 4 и от него вадим втория. Имаме

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & -2 \\ 4 & 2 & 1 & 7 \\ 2 & 3 & -3 & 11 \end{array} \right) \tilde{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & -6 & 3 & -15 \\ 2 & 3 & -3 & 11 \end{array} \right)$$

На следващата стъпка искаме да занулим първият ненулев елемент в третия ред, който е равен на 2. За целта умножаваме първия ред по 2 и от него вадим третия. Намираме

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & -6 & 3 & -15 \\ 2 & 3 & -3 & 11 \end{array} \right) \tilde{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & -6 & 3 & -15 \\ 0 & -5 & 5 & -15 \end{array} \right)$$

Тъй като всички елементи на втория ред се делят на 3, а на третия - на 5, то за улеснение при по-нататъчните пресмятания, разделяме целия втори ред на 3, а третия - на 5. Получаваме

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & -6 & 3 & -15 \\ 0 & -5 & 5 & -15 \end{array} \right) \tilde{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 1 & -5 \\ 0 & -1 & 1 & -3 \end{array} \right)$$

Накрая, последният ненулев елемент под главния диагонал е -1, следователно ще умножим третия ред по 2 и от него ще извадим втория. Намираме

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 1 & -5 \\ 0 & -1 & 1 & -3 \end{array} \right) \tilde{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array} \right)$$

След като сме получили нули под главния диагонал записваме системата, съответстваща на преобразуваната разширена матрица.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right) \to \left| \begin{array}{c} x_1 - x_2 + x_3 = -2 \\ -2x_2 + x_3 = -5 \\ x_3 = -1 \end{array} \right.$$

От третия ред директно сме получили, че $x_3 = -1$.

Заместваме във втория. Имаме $-2x_2 + x_3 = -2x_2 - 1 = -5$, откъдето следва, че $x_2 = 2$.

Накрая заместваме в първия ред и намираме, че $x_1 - x_2 + x_3 = x_1 - 2 - 1 = -2$, т.е. $x_1 = 1$.

Задача 3. Решете системата

$$\left| \begin{array}{c} 3x_1 - x_2 = 5 \\ -2x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + 4x_3 = 15 \end{array} \right.$$

Решение. Образуваме разширената матрица

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & 0 & 5 \\ -2 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 4 & 15 \end{array}\right)$$

Искаме да получим 0 на първата колона от втория ред. За целта събираме втория и третия ред. Получаваме

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & 0 & 5 \\ -2 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 4 & 15 \end{array}\right) \tilde{} \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 5 & 15 \\ 2 & -1 & 4 & 15 \end{array}\right)$$

Тъй като целият втори ред се дели на 5, го разделяме и понеже в този ред има две нули го разменяме с третия. Тогава

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 5 & 15 \\ 2 & -1 & 4 & 15 \end{array}\right) \tilde{} \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & 0 & 5 \\ 2 & -1 & 4 & 15 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

Накрая, имаме само един ненулев елемент под главния диагонал. Тъй като нямаме 1 в началото на който и да е ред - в първия имаме 3, а във втория имаме 2, унможаваме с идеята да получим най-малкото общо кратно на двете числа, т.е. умножаваме първия ред по 2, а втория по 3 и ги изваждаме. Получаваме

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & 0 & 5 \\ 2 & -1 & 4 & 15 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right) \tilde{} \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & -12 & -35 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

След като сме получили нули под главния диагонал записваме системата, съответстваща на преобразуваната разширена матрица.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & -12 & -35 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right) \to \left|\begin{array}{c} 3x_1 - x_2 = 5 \\ x_2 - 12x_3 = -35 \\ x_3 = 3 \end{array}\right.$$

От третия ред директно сме получили, че $x_3 = 3$.

Заместваме го във втория. Имаме, че $x_2 - 12x_3 = x_2 - 36 = -35$. Оттук, $x_2 = 1$.

Накрая заместваме в първия ред и намираме $3x_1 - x_2 = 3x_1 - 1 = 5$, т.е. $x_1 = 2$.

Задача 4. Решете системата

$$\left|\begin{array}{c} x_1 - 3x_2 + 3x_3 = 7 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 5 \\ 5x_1 - 3x_2 + 3x_3 = 7 \end{array}\right.$$

Решение. Образуваме разширената матрица

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 3 & 7 \\ 2 & 1 & -1 & 5 \\ 5 & -3 & 3 & 7 \end{array}\right)$$

Искаме да получим 0 на първата колона от втория ред. За целта умножаваме първия ред по 2 и от него вадим втория. Получаваме

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 3 & 7 \\ 2 & 1 & -1 & 5 \\ 5 & -3 & 3 & 7 \end{array}\right) \tilde{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 3 & 7 \\ 0 & -7 & 7 & 9 \\ 5 & -3 & 3 & 7 \end{array}\right)$$

На следващата стъпка искаме първият елемент на третия ред да стане 0. Умножаваме първия ред по 5 и от полученото вадим третия. Имаме

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 3 & 7 \\ 0 & -7 & 7 & 9 \\ 5 & -3 & 3 & 7 \end{array}\right) \tilde{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 3 & 7 \\ 0 & -7 & 7 & 9 \\ 0 & -12 & 12 & 28 \end{array}\right)$$

Можем да умножим втория ред по -1, а третия да разделим на -4. Тогава

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 3 & 7 \\ 0 & -7 & 7 & 9 \\ 0 & -12 & 12 & 28 \end{array}\right) \tilde{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 3 & 7 \\ 0 & 7 & -7 & -9 \\ 0 & 3 & -3 & -7 \end{array}\right)$$

За да получим диагонален вид на разширената матрица остава да умножим втория ред по 3, а третия по 7 и да ги извадим. Намираме

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 3 & 7 \\ 0 & 7 & -7 & -9 \\ 0 & 3 & -3 & -7 \end{array}\right) \tilde{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 3 & 7 \\ 0 & 7 & -7 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 22 \end{array}\right)$$

След като сме получили нули под главния диагонал записваме системата, съответстваща на преобразуваната разширена матрица.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 3 & 7 \\ 0 & 7 & -7 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 22 \end{array}\right) \rightarrow \left| \begin{array}{c} x_1 - 3x_2 + 3x_3 = 7 \\ 7x_2 - 7x_3 = -9 \\ 0 = 22 \end{array}\right.$$

Тъй като в последния ред имаме очевидно невярно равенство, то системата е несъвместима, т.е. няма решение.

Задача 5. Решете системата

$$\left| \begin{array}{c} x_1 - x_2 + x_4 = 1 \\ x_2 - x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = 1 \end{array}\right.$$

Решение. Образуваме разширената матрица

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Искаме последователно да направим 0 всички елементи под главния диагонал. За целта първо от третия ред вадим първия. Получаваме

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

На следващата стъпка, за да направим първия елемент в последния ред 0, вадим от четвъртия ред 2 пъти по първия.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 & -1 \end{array}\right)$$

Сега, искаме вторият елемент на третия ред да стане 0. За целта, от третия ред вадим 2 пъти по втория. Получаваме

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 & -1 \end{array}\right)$$

След това, искаме вторият елемент в последния ред да стане 0. Вадим от последния ред втория. Имаме

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \end{array}\right)$$

След като сме получили нули под главния диагонал записваме системата, съответстваща на преобразуваната разширена матрица.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \end{array}\right) \rightarrow \left| \begin{array}{c} x_1 - x_2 + x_4 = 1 \\ x_2 - x_3 - x_4 = 0 \\ 3x_3 + x_4 = 1 \\ -x_4 = -1 \end{array}\right.$$

От последния ред директно сме получили, че $x_4 = 1$.

Заместваме го в третия. Имаме $3x_3 + x_4 = 3x_3 + 1 = 1$. Оттук следва, че $x_3 = 0$.

Заместваме във втория ред и намираме, че $x_2 - x_3 - x_4 = x_2 - 0 - 1 = 0$, т.е. $x_2 = 1$.

Накрая, заместваме в първия ред и получаваме $x_1 - x_2 + x_4 = x_1 - 1 + 1 = 1$, откъдето $x_1 = 1$.

Задача 6. Решете системата

$$\left| \begin{array}{c} 3x_1 + x_3 = 2 \\ x_2 + x_4 = -1 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 2 \\ x_3 + x_4 = 1 \end{array}\right.$$

Решение. Образуваме разширената матрица

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Искаме последователно да направим нули всички елементи под главния диагонал. За целта разместваме редовете като третият става първи (понеже започва с 1), а първият става последен. Получаваме

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 0 & 2 \end{array}\right)$$

За да получим 0 в началото на последния ред, умножаваме първия ред по 3 и от него вадим последния. Тогава

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 0 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 & 3 & 4 \end{array}\right)$$

За да получим 0 на втората позиция в последния ред, умножаваме втория ред по 3 и от него вадим последния. Намираме

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 & 3 & 4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & -7 \end{array}\right)$$

На последна стъпка, за да получим 0 на третата позиция в последния ред, умножаваме третия ред по 2 и го събираме с четвъртия. Получаваме

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & -7 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -5 \end{array}\right)$$

След като сме получили нули под главния диагонал записваме системата, съответстваща на преобразуваната разширена матрица.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -5 \end{array}\right) \to \left|\begin{array}{c} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = -2 \\ x_2 + x_4 = -1 \\ x_3 + x_4 = 1 \\ 2x_4 = -5 \end{array}\right.$$

От последния ред намираме, че $x_4 = -\frac{5}{2}$.

Заместваме го в третия. Имаме $x_3 + x_4 = x_3 - \frac{5}{2} = 1$. Оттук следва, че $x_3 = \frac{7}{2}$.

Заместваме във втория ред и получаваме $x_2 + x_4 = x_2 - \frac{5}{2} = -1$, т.е. $x_2 = \frac{3}{2}$.

Накрая заместваме в първия ред. Имаме $x_1+x_2+x_3+x_4 = x_1+\frac{3}{2}+\frac{7}{2}-\frac{5}{2} = -2$, откъдето $x_1 = -\frac{1}{2}$.

Задача 7. Решете системата

$$\left|\begin{array}{c} x_1 + 3x_2 - 3x_4 = 1 \\ x_2 - x_3 + x_4 = -3 \\ 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 = -4 \\ -7x_2 + 3x_3 + x_4 = -3 \end{array}\right.$$

Решение. Образуваме разширената матрица

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -3 \\ 2 & -2 & 3 & -4 & -4 \\ 0 & -7 & 3 & 1 & -3 \end{array}\right)$$

Искаме последователно да направим нули всички елементи под главния диагонал. За целта, първо умножаваме първия ред по 2 и от него вадим третия. Получаваме

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -3 \\ 2 & -2 & 3 & -4 & -4 \\ 0 & -7 & 3 & 1 & -3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & 8 & -3 & -2 & 6 \\ 0 & -7 & 3 & 1 & -3 \end{array}\right)$$

След това, за да получим 0 на втората позиция в третия ред, умножаваме втория ред по 8 и от него вадим третия. Тогава

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & 8 & -3 & -2 & 6 \\ 0 & -7 & 3 & 1 & -3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & -5 & 10 & -30 \\ 0 & -7 & 3 & 1 & -3 \end{array}\right)$$

Разделяме всички елементи от третия ред на -5. Получаваме

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & -5 & 10 & -30 \\ 0 & -7 & 3 & 1 & -3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 6 \\ 0 & -7 & 3 & 1 & -3 \end{array}\right)$$

За да получим 0 на втората позиция в последния ред, умножаваме втория ред по 7 и към него прибваме последния. Намираме

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 6 \\ 0 & -7 & 3 & 1 & -3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 6 \\ 0 & 0 & -4 & 8 & -24 \end{array}\right)$$

Разделяме последния ред на -4 и получаваме

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 6 \\ 0 & 0 & -4 & 8 & -24 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 6 \end{array}\right)$$

На последна стъпка, от четвъртия ред вадим третия и намираме

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 6 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

След като сме получили нули под главния диагонал записваме системата, съответстваща на преобразуваната разширена матрица.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \to \left|\begin{array}{c} x_1 + 3x_2 - 3x_4 = 1 \\ x_2 - x_3 + x_4 = -3 \\ x_3 - 2x_4 = 6 \\ 0 = 0 \end{array}\right.$$

Последният ред не ни дава никаква информация, затова решаваме третия.

Имаме $x_3 - 2x_4 = 6$. Полагаме $x_4 = p$ и изразяваме $x_3 = 6 + 2p$.

Заместваме във втория ред и получаваме

$$x_2 - x_3 + x_4 = x_2 - (6 + 2p) + p = x_2 - 6 - p = -3,$$

откъдето намираме, че $x_2 = 3 + p$.

Замествайки накрая в първия ред имаме

$$x_1 + 3x_2 - 3x_4 = x_1 + 3\,(3 + p) - 3p = x_1 + 9 = 1,$$

откъдето $x_1 = -8$.

Окончателният отговор е $x_1 = -8, x_2 = 3 + p, x_3 = 6 + 2p, x_4 = p$.

Задачи за самостоятелна работа:

Задача 1. Решете системата

$$\left|\begin{array}{c} x_1 + 3x_2 - 6x_3 + 2x_4 = 3 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 4 \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 + 10x_4 = 2 \\ 5x_1 - 3x_2 + 4x_3 - 2x_4 = 12 \end{array}\right.$$

Отг. $x_1 = 2, x_2 = -3, x_3 = -\frac{3}{2}, x_4 = \frac{1}{2}$.

Задача 2. Решете системата

$$\left|\begin{array}{c} x_1 - x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 4 \\ 3x_1 - 2x_2 - x_3 - x_4 = -1 \\ 5x_1 - 3x_2 - 4x_3 - 2x_4 = -4 \\ 7x_1 - 4x_2 - 7x_3 - 5x_4 = -7 \end{array}\right.$$

Отг. $x_1 = 5p - 5, x_2 = 7p - 7, x_3 = p, x_4 = 0$.