Граница на функция

Правило на Лопитал: Ако

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0 \text{ или } \lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = \infty,$$

то тогава

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Задача 1. Пресметнете границата $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}$.

Решение. Първо, проверяваме към колко клонят числителят и знаменателят. Имаме, че $\lim\limits_{x\to 0} \sin x = \lim\limits_{x\to 0} x = 0$. Тъй като е изпълнено условието в правилото на Лопитал, то можем да го приложим и като използваме, че $\lim\limits_{x\to 0} \cos x = 1$, получаваме

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{(\sin x)'}{(x)'} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{1} = \frac{1}{1} = 1.$$

Задача 2. Пресметнете границата $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin 3x}{x^2}$.

Решение. Първо, проверяваме към колко клонят числителят и знаменателят. Имаме, че $\lim\limits_{x\to 0} \sin 3x = \lim\limits_{x\to 0} x^2 = 0$. Тъй като е изпълнено условието в правилото на Лопитал, то можем да го приложим и като използваме, че $\lim\limits_{x\to 0} \cos 3x = 1$ и $\lim\limits_{x\to 0} 2x = 0$, получаваме

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin 3x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{(\sin 3x)'}{(x^2)'} = \lim_{x\to 0} \frac{3\cos 3x}{2x} = \infty.$$

Задача 3. Пресметнете границата $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^{7x}-1}{\sin 5x}$.

Решение. Първо, проверяваме към колко клонят числителят и знаменателят. Имаме, че $\lim\limits_{x\to 0} \sin 5x = \lim\limits_{x\to 0} e^{7x} - 1 = 0$. Тъй като е изпълнено условието в правилото на Лопитал, то можем да го приложим и като използваме, че $\lim\limits_{x\to 0} \cos 5x = 1$ и $\lim\limits_{x\to 0} e^{7x} = 1$, получаваме

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{7x}-1}{\sin 5x} = \lim_{x\to 0} \frac{\left(e^{7x}-1\right)'}{(\sin 5x)'} = \lim_{x\to 0} \frac{7e^{7x}}{5\cos 5x} = \frac{7.1}{5.1} = \frac{7}{5}.$$

Задача 4. Пресметнете границата $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin 5x - \sin 3x}{e^{4x} - \cos 7x}$.

Решение. Първо, проверяваме към колко клонят числителят и знаменателят. Имаме, че $\lim\limits_{x\to 0} \sin 5x - \sin 3x = \lim\limits_{x\to 0} e^{4x} - \cos 7x = 0$. Тъй като е изпълнено условието в правилото на Лопитал, то можем да го приложим и като използваме, че $\lim\limits_{x\to 0}\cos 5x = \lim\limits_{x\to 0}\cos 3x = 1$, $\lim\limits_{x\to 0}\sin 7x = 0$ и $\lim\limits_{x\to 0}e^{4x} = 1$, получаваме

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x-\sin 3x}{e^{4x}-\cos 7x} = \lim_{x\to 0}\frac{(\sin 5x-\sin 3x)'}{(e^{4x}-\cos 7x)'} = \lim_{x\to 0}\frac{5\cos 5x-3\cos 3x}{4e^{4x}-(-7\sin 7x)} = \frac{5.1-3.1}{4.1+7.0} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}.$$

Задача 5. Пресметнете границата $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{3x}-\cos 2x}{3x+\sin 4x}$.

Решение. Първо, проверяваме към колко клонят числителят и знаменателят. Имаме, че $\lim\limits_{x\to 0}e^{3x}-\cos 2x = 3x+\sin 4x = 0$. Тъй като е изпълнено условието в правилото на Лопитал, то можем да го приложим и като използваме, че $\lim\limits_{x\to 0}\cos 4x = 1$, $\lim\limits_{x\to 0}\sin 2x = 0$ и $\lim\limits_{x\to 0}e^{3x} = 1$, получаваме

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{3x}-\cos 2x}{3x+\sin 4x} = \lim_{x\to 0}\frac{\left(e^{3x}-\cos 2x\right)'}{(3x+\sin 4x)'} = \lim_{x\to 0}\frac{3e^{3x}-(-2\sin 2x)}{3+4\cos 4x} = \frac{3.1+2.0}{3+4.1} = \frac{3}{7}.$$

Задача 6. Пресметнете границата $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin^3 2x}{x^3}$.

Решение. Първо, проверяваме към колко клонят числителят и знаменателят. Имаме, че $\lim\limits_{x\to 0}\sin^3 2x = x^3 = 0$. Тъй като е изпълнено условието в правилото на Лопитал, то можем да го приложим и като използваме, че $\lim\limits_{x\to 0}\cos 2x = 1$, $\lim\limits_{x\to 0}\sin^2 2x = 0$ и $\lim\limits_{x\to 0}x^2 = 0$, получаваме

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin^3 2x}{x^3} = \lim_{x\to 0}\frac{\left(\sin^3 2x\right)'}{(x^3)'} = \lim_{x\to 0}\frac{3\sin^2 2x.2\cos 2x}{3x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2 2x}{x^2}.$$

Понеже $\lim\limits_{x\to 0}\sin^2 2x = \lim\limits_{x\to 0}x^2 = 0$, отново прилагаме правилото на Лопитал като използваме, че $\lim\limits_{x\to 0}\cos 2x = 1$, $\lim\limits_{x\to 0}\sin 2x = 0$ и $\lim\limits_{x\to 0}x = 0$, получаваме

$$\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2 2x}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{\left(2\sin^2 2x\right)'}{(x^2)'} = \lim_{x\to 0}\frac{2.2\sin 2x.2\cos 2x}{2x} = \lim_{x\to 0}\frac{4\sin 2x}{x}.$$

Отново имаме, че $\lim\limits_{x\to 0}\sin 2x = \lim\limits_{x\to 0}x = 0$ и затова отново прилагаме правилото на Лопитал. Накрая, като използваме, че $\lim\limits_{x\to 0}\cos 2x = 1$, достигаме до

$$\lim_{x\to 0}\frac{4\sin 2x}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{(4\sin 2x)'}{(x)'} = \lim_{x\to 0}\frac{4.2\cos 2x}{1} = \frac{4.2.1}{1} = 8.$$

Задача 7. Пресметнете границата $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}-2}{1-\cos 2x}$.

Решение. Първо, проверяваме към колко клонят числителят и знаменателят. Имаме, че $\lim\limits_{x\to 0}e^x+e^{-x}-2 = 1-\cos 2x = 0$. Тъй като е изпълнено условието в правилото на Лопитал, то можем да го приложим и като използваме, че

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}-2}{1-\cos 2x}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(e^x+e^{-x}-2\right)'}{\left(1-\cos 2x\right)'}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}}{-(-2\sin 2x)}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}}{2\sin 2x}.$$

Понеже $\lim\limits_{x\to 0}e^x=\lim\limits_{x\to 0}e^{-x}=1$ и $\lim\limits_{x\to 0}\sin 2x=0$, отново прилагаме правилото на Лопитал и получаваме

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}}{2\sin 2x}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(e^x-e^{-x}\right)'}{\left(2\sin 2x\right)'}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}}{2.2.\cos 2x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}}{4\cos 2x}=\frac{1+1}{4.1}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}.$$

Задача 8. Пресметнете границата $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}-2x}{x-\sin x}$.

Решение. Първо, проверяваме към колко клонят числителят и знаменателят. Имаме, че $\lim\limits_{x\to 0}e^x-e^{-x}-2x=x-\sin x=0$. Тъй като е изпълнено условието в правилото на Лопитал, то можем да го приложим и като използваме, че

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}-2x}{x-\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(e^x-e^{-x}-2x\right)'}{\left(x-\sin x\right)'}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}-2}{1-\cos x}.$$

Подобно на предната задача, тъй като $\lim\limits_{x\to 0}e^x=\lim\limits_{x\to 0}e^{-x}=\lim\limits_{x\to 0}\cos x=1$, то $\lim\limits_{x\to 0}e^x+e^{-x}-2=\lim\limits_{x\to 0}1-\cos x=0$ и отново прилагаме правилото на Лопитал като получаваме, че

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}-2}{1-\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(e^x+e^{-x}-2\right)'}{\left(1-\cos x\right)'}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}}{\sin x}.$$

Имаме, че $\lim\limits_{x\to 0}e^x-e^{-x}=\lim\limits_{x\to 0}\sin x=0$ и отново прилагаме правилото на Лопитал.

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}}{\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(e^x-e^{-x}\right)'}{\left(\sin x\right)'}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}}{\cos x}=\frac{1+1}{1}=2.$$

Задача 9. Пресметнете границата $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+9}-3}{\sin 2x}$.

Решение. Първо, проверяваме към колко клонят числителят и знаменателят. Имаме, че $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{x+9}-3=\sin 2x=0$. Тъй като е изпълнено условието в правилото на Лопитал, то можем да го приложим и като използваме, че $\lim\limits_{x\to 0}\cos 2x=1$, получаваме

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+9}-3}{\sin 2x}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\left(x+9\right)^{\frac{1}{2}}-3\right)'}{\left(\sin 2x\right)'}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}\left(x+9\right)^{-\frac{1}{2}}.1}{2\cos 2x}=\frac{9^{-\frac{1}{2}}}{4.1}=\frac{\frac{1}{3}}{4}=\frac{1}{12}.$$

Задача 10. Пресметнете границата $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt{1-8x}-1}{\sin 2x}$.

Решение. Първо, проверяваме към колко клонят числителят и знаменателят. Имаме, че $\lim\limits_{x\to 0} \sqrt{1-8x}-1 = \sin 2x = 0$. Тъй като е изпълнено условието в правилото на Лопитал, то можем да го приложим и като използваме, че $\lim\limits_{x\to 0} \cos 2x = 1$, получаваме

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1-8x}-1}{\sin 2x} = \lim_{x\to 0} \frac{\left((1-8x)^{\frac{1}{2}}-1\right)'}{(\sin 2x)'} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{2}(1-8x)^{-\frac{1}{2}}.(-8)}{2\cos 2x} = \frac{-\frac{1}{2}.1^{-\frac{1}{2}}.8}{2.1} = \frac{-4}{2} = -2.$$

Задача 11. Пресметнете границата $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin 3x.\cos 2x}{4x}$.

Решение. Тъй като $\lim\limits_{x\to 0} \cos 2x = 1$, то

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin 3x.\cos 2x}{4x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin 3x}{4x}.$$

Прилагаме правилото на Лопитал и получаваме

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin 3x}{4x} = \lim_{x\to 0} \frac{3\cos 3x}{4} = \frac{3}{4}.$$

Задача 12. Пресметнете границата $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin^2 \frac{x}{3}}{x^2}$.

Решение. Използваме, че

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin^2 \frac{x}{3}}{x^2} = \lim_{x\to 0} \left(\frac{\sin \frac{x}{3}}{x}\right)^2.$$

Прилагаме правилото на Лопитал и получаваме

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin \frac{x}{3}}{x} = \frac{\frac{1}{3}\cos \frac{x}{3}}{1} = \frac{1}{3}.$$

Тогава

$$\lim_{x\to 0} \left(\frac{\sin \frac{x}{3}}{x}\right)^2 = \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}.$$

Задача 13. Пресметнете границата $\lim\limits_{x\to 1} \frac{\sin(x-1)}{x^2+x-2}$.

Решение. Прилагаме правилото на Лопитал и получаваме

$$\lim_{x\to 1} \frac{\sin(x-1)}{x^2+x-2} = \lim_{x\to 1} \frac{\cos(x-1)}{2x+1} = \frac{1}{3}.$$

Задача 14. Пресметнете границата $\lim\limits_{x\to 3} \frac{x.\sin(x-3)}{x^2-5x+6}$.

Решение. Имаме

$$\lim_{x\to 3}\frac{x.\sin(x-3)}{x^2-5x+6}=\lim_{x\to 3}\frac{3.\sin(x-3)}{x^2-5x+6}=3\lim_{x\to 3}\frac{\sin(x-3)}{x^2-5x+6}.$$

Прилагаме правилото на Лопитал и получаваме

$$3\lim_{x\to 3}\frac{\sin(x-3)}{x^2-5x+6}=3\lim_{x\to 3}\frac{\cos(x-3)}{2x-5}=3.\frac{1}{6-5}=3.$$

Задача 15. Пресметнете границата $\lim_{x\to 0}\frac{\left(x-4-\sqrt{x+2}\right)\sin x}{\sqrt{2x+1}-1}$.

Решение. Имаме

$$\lim_{x\to 0}\frac{\left(x-4-\sqrt{x+2}\right)\sin x}{\sqrt{2x+1}-1}=\left(-4-\sqrt{2}\right)\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{\sqrt{2x+1}-1}.$$

Прилагаме правилото на Лопитал и получаваме

$$\left(-4-\sqrt{2}\right)\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{\sqrt{2x+1}-1}=\left(-4-\sqrt{2}\right)\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{\frac{1}{2}\left(2x+1\right)^{-\frac{1}{2}}.2}=\left(-4-\sqrt{2}\right)\frac{1}{1^{-\frac{1}{2}}}=-4-\sqrt{2}.$$

Задачи за самостоятелна работа:

Задача 1. Пресметнете границата $\lim_{x\to 0}\frac{e^{5x}-\cos 7x}{x^2+\sin 2x}$.

Отг. $\frac{5}{2}$.

Задача 2. Пресметнете границата $\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}-e^{-5x}}{\sin 4x}$.

Отг. $\frac{7}{4}$.

Задача 3. Пресметнете границата $\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{3x-2}}{\sqrt{4x+1}-\sqrt{5x-1}}$.

Отг. 3.