Обикновени диференциални уравнения с разделящи се променливи

Диференциално уравнение, което може да се запише във вида

$$P_1(x)\,Q_1(y)\,dx + P_2(x)\,Q_2(y)\,dy = 0$$

се нарича диференциално уравнение с разделящи се променливи. То има общо решение, което се дава с формулата

$$\int \frac{P_1(x)}{P_2(x)}dx + \int \frac{Q_2(y)}{Q_1(y)}dy = C. \tag{1}$$

Забележка: Обръщаме внимание, че функциите P_1 и P_2 зависят само от x, докато Q_1 и Q_2 зависят само то y!

Задача 1. Да се реши уравнението

$$(2x+1)\,ydx + x\,(1-4y)\,dy = 0.$$

Решение: Първо, определяме $P_1(x) = 2x+1$, $P_2(x) = x$, $Q_1(y) = y$ и $Q_2(y) = 1-4y$. После, заместваме във формула (1) и получаваме

$$\int \frac{2x+1}{x}dx + \int \frac{1-4y}{y}dy = C.$$

Разделяме всеки от интегралите на два и последователно интегрираме

$$\int \left(\frac{2x}{x} + \frac{1}{x}\right) dx + \int \left(\frac{1}{y} - \frac{4y}{y}\right) dy = C$$

$$\int \left(2 + \frac{1}{x}\right) dx + \int \left(\frac{1}{y} - 4\right) dy = C$$

$$\int 2dx + \int \frac{1}{x}dx + \int \frac{1}{y}dy - \int 4dy = C.$$

Така, получаваме, че общото решение на уравнението е:

$$2x + \ln|x| + \ln|y| - 4y = C.$$

Задача 2. Да се реши уравнението

$$x\left(1+y^2\right)dx + y\left(1+x^2\right)dy = 0.$$

Решение: Първо, определяме $P_1(x) = x$, $P_2(x) = 1+x^2$, $Q_1(y) = 1+y^2$ и $Q_2(y) = y$. После, заместваме във формула (1) и получаваме

$$\int \frac{x}{1+x^2}dx + \int \frac{y}{1+y^2}dy = C.$$

Решаваме интегралите с прехвърляне зад диференциала. Имаме,

$$\int \frac{1}{1+x^2} d\left(\frac{x^2}{2}\right) + \int \frac{1}{1+y^2} d\left(\frac{y^2}{2}\right) = C.$$

От $\frac{x^2}{2}$ и $\frac{y^2}{2}$ Изнасяме $\frac{1}{2}$ пред интегралите и получаваме

$$\frac{1}{2} \int \frac{1}{1+x^2} dx^2 + \frac{1}{2} \int \frac{1}{1+y^2} dy^2 = C.$$

Зад диференциалите добавяме 1,

$$\frac{1}{2} \int \frac{1}{1+x^2} d\left(x^2+1\right) + \frac{1}{2} \int \frac{1}{1+y^2} d\left(y^2+1\right) = C,$$

за да получим формулата $\int \frac{1}{x} dx = \ln|x|$. Тогава решението има видът:

$$\frac{1}{2} \ln\left(x^2+1\right) + \frac{1}{2} \ln\left(y^2+1\right) = C.$$

Задача 3. Да се реши уравнението

$$3x^2 dx + (2y+1)\, dy = 0.$$

Решение: Първо, Определяме $P_1(x) = 3x^2$, $P_2(x) = 1$, $Q_1(y) = 1$ и $Q_2(y) = 2y+1$. Обръщаме внимание, че след като имаме $3x^2dx$, то $P_1(x) = 3x^2$ и $Q_1(y) = 1$. Аналогично, от $(2y+1)\, dy$ определяме, че $P_2(x) = 1$ и $Q_2(y) = 2y+1$.

След това заместваме във формула (1) и получаваме

$$\int \frac{3x^2}{1} dx + \int \frac{2y+1}{1} dy = C,$$

т.е.,

$$\int 3x^2 dx + \int (2y+1)\, dy = C.$$

От първия интеграл изнасяме множител пред интеграла, а вторият разделяме на два интеграла. Тогава,

$$3 \int x^2 dx + 2 \int y dy + \int dy = C.$$

След интегриране имаме

$$3\frac{x^3}{3} + 2\frac{y^2}{2} + y = C.$$

Преобразуваме и получаваме, че решението има видът

$$x^3 + y^2 + y = C.$$

Задача 4. Да се реши уравнението

$$3x^2\left(y+1\right)dx-\left(x^3+1\right)dy=0.$$

Решение: Първо, определяме $P_1\left(x\right)=3x^2$, $P_2\left(x\right)=x^3+1$, $Q_1\left(y\right)=y+1$ и $Q_2\left(y\right)=-1$. Обръщаме внимание, че $Q_2\left(y\right)=-1$, тъй като знакът между двата диференциала е $-$.

След това, заместваме във формула (1) и получаваме

$$\int\frac{3x^2}{x^3+1}dx+\int\frac{-1}{y+1}dy=C.$$

Вадим множителите пред интегралите. Тогава,

$$3\int\frac{x^2}{x^3+1}dx-\int\frac{1}{y+1}dy=C.$$

Отново използваме формулата $\int\frac{1}{x}dx=\ln\left|x\right|.$ За целта прехвърляме x^2 зад диференциала в първия интеграл, а при втория добавяме 1. Получаваме

$$3\int\frac{1}{x^3+1}d\left(\frac{x^3}{3}\right)-\int\frac{1}{y+1}d\left(y+1\right)=C.$$

След съкращаване при първия интеграл и добавяне на 1, имаме

$$\int\frac{1}{x^3+1}d\left(x^3+1\right)-\int\frac{1}{y+1}d\left(y+1\right)=C.$$

Окончателно, получаваме решението във вида

$$\ln\left|x^3+1\right|-\ln\left|y+1\right|=C.$$

Задача 5. Да се реши уравнението

$$\left(x+1\right)ydx+\left(1-y\right)xdy=0.$$

Решение: Първо, определяме $P_1\left(x\right)=x+1$, $P_2\left(x\right)=x$, $Q_1\left(y\right)=y$ и $Q_2\left(y\right)=1-y$.

След това, заместваме във формула (1) и получаваме

$$\int\frac{x+1}{x}dx+\int\frac{1-y}{y}dy=C.$$

Разделяме всеки от интегралите на два. Тогава,

$$\int\left(\frac{x}{x}+\frac{1}{x}\right)dx+\int\left(\frac{1}{y}-\frac{y}{y}\right)dy=C.$$

$$\int\left(1+\frac{1}{x}\right)dx+\int\left(\frac{1}{y}-1\right)dy=C.$$

$$\int 1dx + \int \frac{1}{x}dx + \int \frac{1}{y}dy - \int 1dy = C.$$

Интегрираме и получаваме решението

$$x + \ln|x| + \ln|y| - y = C.$$

Линейни диференциални уравнения от първи ред

Диференциално уравнение от вида

$$y' + P(x)\,y = Q(x)$$

се нарича линейно диференциално уравнение от първи ред. Общото му решение се дава с формулата

$$y = e^{-\int P(x)dx}\left(C + \int Q(x)\,e^{\int P(x)dx}dx\right). \tag{2}$$

За опростяване на резултата се използват и следните две свойства на степените

$$e^{\ln x} = x \text{ и } e^{k\ln x} = x^k. \tag{3}$$

Задача 1. Да се реши уравнението

$$y' - \frac{4}{x}y = x.$$

Решение: Първо, имаме, че $P(x) = -\frac{4}{x}$ и $Q(x) = x$. Заместваме във формулата за общото решение (2) и получаваме

$$y = e^{-\int -\frac{4}{x}dx}\left(C + \int xe^{\int -\frac{4}{x}dx}dx\right).$$

Изнасяме -4 пред интегралите. Тогава

$$y = e^{4\int \frac{1}{x}dx}\left(C + \int xe^{-4\int \frac{1}{x}dx}dx\right).$$

Използваме, че $\int \frac{1}{x}dx = \ln x$. Следователно

$$y = e^{4\ln x}\left(C + \int xe^{-4\ln x}dx\right).$$

Сега, за $e^{4\ln x}$ и $e^{-4\ln x}$ прилагаме горната формула (3) за степени, съответно с $k = 4$ и $k = -4$. Имаме

$$e^{4\ln x} = x^4 \text{ и } e^{-4\ln x} = x^{-4}.$$

Тогава, като използваме основната формула за степени $x^n.x^m = x^{n+m}$, получаваме решението

$$\begin{aligned} y &= x^4 \left(C + \int x.x^{-4} dx \right) \\ &= x^4 \left(C + \int x^{-3} dx \right) \\ &= x^4 \left(C + \frac{x^{-2}}{-2} \right). \end{aligned}$$

Задача 2. Да се реши уравнението

$$y' + \frac{3}{x} y = x^2.$$

Решение: Първо, имаме $P(x) = \frac{3}{x}$ и $Q(x) = x^2$. Заместваме във формулата за общото решение (2)

$$y = e^{-\int \frac{3}{x} dx} \left(C + \int x^2 e^{\int \frac{3}{x} dx} dx \right).$$

Изнасяме 3 пред интегралите и получаваме,

$$y = e^{-3\int \frac{1}{x} dx} \left(C + \int x^2 e^{3\int \frac{1}{x} dx} dx \right).$$

Използваме, че $\int \frac{1}{x} dx = \ln x$. Тогава

$$y = e^{-3\ln x} \left(C + \int x^2 e^{3\ln x} dx \right).$$

От горната формула (3) за степени, приложена с $k = -3$ и $k = 3$

$$e^{-3\ln x} = x^{-3} \text{ и } e^{3\ln x} = x^3.$$

След заместване

$$\begin{aligned} y &= x^{-3} \left(C + \int x^2.x^3 dx \right) \\ &= x^{-3} \left(C + \int x^5 dx \right) \\ &= x^{-3} \left(C + \frac{x^6}{6} \right). \end{aligned}$$

Задача 3. Да се реши уравнението

$$y' - \frac{3}{x} y = x^2.$$

Решение: Първо, имаме $P(x) = -\frac{3}{x}$ и $Q(x) = x^2$. Заместваме във формулата за общото решение (2)

$$y = e^{-\int -\frac{3}{x}dx}\left(C + \int x^2 e^{\int -\frac{3}{x}dx}dx\right).$$

Изнасяме -3 пред интегралите и получаваме,

$$y = e^{3\int \frac{1}{x}dx}\left(C + \int x^2 e^{-3\int \frac{1}{x}dx}dx\right).$$

Използваме, че $\int \frac{1}{x}dx = \ln x$. Тогава

$$y = e^{3\ln x}\left(C + \int x^2 e^{-3\ln x}dx\right).$$

от горната формула (3) за степени, приложена с $k = 3$ и $k = -3$

$$e^{3\ln x} = x^3 \text{ и } e^{-3\ln x} = x^{-3}.$$

След заместване и използване на равенството $\int x^{-1}dx = \int \frac{1}{x}dx = \ln x$, имаме решението

$$\begin{aligned} y &= x^3\left(C + \int x^2.x^{-3}dx\right) \\ &= x^3\left(C + \int x^{-1}dx\right) \\ &= x^3(C + \ln x). \end{aligned}$$

Задача 4. Да се реши уравнението

$$y' + \frac{y}{x} = x^2.$$

Решение: Първо, имаме $P(x) = \frac{1}{x}$ и $Q(x) = x^2$. Заместваме във формулата за общото решение (2)

$$y = e^{-\int \frac{1}{x}dx}\left(C + \int x^2 e^{\int \frac{1}{x}dx}dx\right).$$

Използваме, че $\int \frac{1}{x}dx = \ln x$. Тогава

$$y = e^{-\ln x}\left(C + \int x^2 e^{\ln x}dx\right).$$

От $e^{\ln x} = x$ имаме

$$\begin{aligned} y &= x^{-1}\left(C + \int x^2.xdx\right) \\ &= x^{-1}\left(C + \int x^3dx\right) \\ &= x^{-1}\left(C + \frac{x^4}{4}\right). \end{aligned}$$

Задача 5. Да се реши уравнението

$$y' + y = e^{-x}.$$

Решение: Първо, имаме $P(x) = 1$ и $Q(x) = e^{-x}$. Заместваме във формулата за общото решение (2)

$$y = e^{-\int 1dx}\left(C + \int e^{-x}.e^{\int 1dx}dx\right).$$

Използваме, че $\int dx = x$. Тогава

$$y = e^{-x}\left(C + \int e^{-x}.e^{x}dx\right).$$

От $e^{-x}.e^{x} = e^{0} = 1$, имаме

$$\begin{aligned} y &= e^{-x}\left(C + \int 1dx\right) \\ &= e^{-x}\left(C + x\right). \end{aligned}$$

Задачи за самостоятелна работа:

Задача 1. Решете следното уравнение с разделящи се променливи:

$$(y^2 + 3)dx + y(7 - x)dy = 0.$$

Отг. $\frac{1}{2}\ln\left(y^2 + 3\right) - \ln\left(-7 + x\right) = C$

Задача 2. Решете линейното уравнение:

$$y' + 2xy = 2e^{-x^2}.$$

Отг. $y = e^{-x^2}\left(C + \frac{2x^3}{3}\right)$.

Задача 3. Решете линейното уравнение:

$$y' - 2xy = \left(x^3 - x\right)e^{x^2}.$$

Отг. $y = e^{x^2}\left(C + \frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2}\right)$.

Задача 4. Решете линейното уравнение:

$$y' - y\cot gx = \sin x.$$

Отг. $y = \sin x\left(C + x\right)$.