Неопределени интеграли

Основни свойства на интегралите:

$$\begin{aligned}\int Const f(x)dx &= Const\int f(x)dx;\\ \int\left(f(x)\pm g\left(x\right)\right)dx &= \int f(x)dx \pm \int g(x)dx.\end{aligned}$$

Таблица с основните интеграли:

$$\begin{aligned}\int dx &= x + C; & \int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C;\\ \int \frac{1}{x}dx &= \ln|x| + C; & \int e^x dx = e^x + C;\\ \int \sin x dx &= -\cos x + C; & \int \cos x dx = \sin x + C;\\ \int \frac{1}{\cos^2 x}dx &= tgx + C; & \int \frac{1}{\sin^2 x}dx = -cotgx + C;\\ \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx &= \arcsin x + C; & \int \frac{1}{1+x^2}dx = arctgx + C.\end{aligned}$$

Непосредствено интегриране

Например, като се замести във формулата $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$ с $n = 1$ получаваме, че

$$\int xdx = \int x^1 dx = \frac{x^2}{2} + C$$

С горната формула се пресмятат и следните интеграли

$$\begin{aligned}\int x^2 dx &= \frac{x^3}{3} + C;\\ \int x^3 dx &= \frac{x^4}{4} + C;\\ \int x^{10} dx &= \frac{x^{11}}{11} + C.\end{aligned}$$

По същия начин, като се използва, че $\frac{1}{x^n} = x^{-n}$ се пресмятат и

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{x^2}dx &= \int x^{-2}dx = \frac{x^{-1}}{-1} + C;\\ \int \frac{1}{x^3}dx &= \int x^{-3}dx = \frac{x^{-2}}{-2} + C;\\ \int \frac{1}{x^5}dx &= \int x^{-5}dx = \frac{x^{-4}}{-4} + C.\end{aligned}$$

Аналогично, като се използва, че $\sqrt[q]{x^p} = x^{\frac{p}{q}}$ се пресмятат и

$$\begin{aligned}
\int \sqrt{x}dx &= \int x^{\frac{1}{2}}dx = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C;\\
\int \sqrt{x^3}dx &= \int x^{\frac{3}{2}}dx = \frac{x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} + C;\\
\int \sqrt[3]{x^2}dx &= \int x^{\frac{2}{3}}dx = \frac{x^{\frac{5}{3}}}{\frac{5}{3}} + C.
\end{aligned}$$

Като използваме първото основно свойство на интегралите имаме, че

$$\int 2xdx = 2\int xdx = 2\frac{x^2}{2} + C = x^2 + C;$$
$$\int 5x^3dx = 5\int x^3dx = 5\frac{x^4}{4} + C;$$
$$\int 7x^{12}dx = 7\int x^{12}dx = 7\frac{x^{13}}{13} + C.$$

Като комбинираме и двете основни свойства на интегралите получаваме

$$\begin{aligned}
\int \left(x^2 - 3x + 2\right)dx &= \int x^2dx - \int 3xdx + \int 2dx = \int x^2dx - 3\int xdx + 2\int dx\\
&= \frac{x^3}{3} - 3\frac{x^2}{2} + 2x + C.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int \left(2x^3 - 4x^2 - 5\right)dx &= \int 2x^3dx - \int 4x^2dx - \int 5dx = 2\int x^3dx - 4\int x^2dx - 5\int dx\\
&= 2\frac{x^4}{4} - 4\frac{x^3}{3} - 5x + C.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int \left(6x^2 + x - 1\right)dx &= \int 6x^2dx + \int xdx - \int 1dx = 6\int x^2dx + \int xdx - \int dx\\
&= 6\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - x + C = 2x^3 + \frac{x^2}{2} - x + C.
\end{aligned}$$

$$\int \left(7x^5 + \frac{4}{x^2}\right)dx = \int 7x^5dx + \int \frac{4}{x^2}dx = 7\int x^5dx + 4\int x^{-2}dx = 7\frac{x^6}{6} + 4\frac{x^{-1}}{-1} + C.$$

$$\int \frac{1 + \cos^3 x}{\cos^2 x}dx = \int \frac{1}{\cos^2 x}dx + \int \frac{\cos^3 x}{\cos^2 x}dx = \int \frac{1}{\cos^2 x}dx + \int \cos x dx = tgx + \sin x + C.$$

Внасяне зад диференциала

За следващите задачи ще използваме формулите:

$$\begin{aligned}\int f(x)\,dx &= \frac{1}{a}\int f(x)\,d(ax)\,,\ \ a = Const.\\ \int f(x)\,dx &= \int f(x)\,d(x+b)\,,\ \ b = Const.\\ \int f(x)\,dx &= \frac{1}{a}\int f(x)\,d(ax+b)\,,\ \ a,b = Const.\end{aligned}$$

Например,

$$\begin{aligned}\int \sin(x+5)\,dx &= \int \sin(x+5)\,d(x+5) = -\cos(x+5) + C;\\ \int \cos 3x dx &= \frac{1}{3}\int \cos 3x d3x = \frac{1}{3}\sin 3x + C;\\ \int e^{2x-5}dx &= \frac{1}{2}\int e^{2x-5}d(2x) = \frac{1}{2}\int e^{2x-5}d(2x-5) = \frac{1}{2}e^{2x-5} + C;\\ \int (4x+7)^{12}\,dx &= \frac{1}{4}\int (4x+7)^{12}\,d(4x) = \frac{1}{4}\int (4x+7)^{12}\,d(4x+7) = \frac{1}{4}\frac{(4x+7)^{13}}{13} + C;\\ \int \frac{1}{6x-1}dx &= \frac{1}{6}\int \frac{1}{6x-1}d(6x) = \frac{1}{6}\int \frac{1}{6x-1}d(6x-1) = \frac{1}{6}\ln|6x-1| + C\end{aligned}$$

За следващия пример използваме формулата за понижаване на степента $\sin^2 x = \frac{1}{2}(1-\cos 2x)\,.$

$$\begin{aligned}\int \sin^2 x dx &= \int \frac{1}{2}(1-\cos 2x)\,dx = \frac{1}{2}\left(\int dx - \int \cos 2x dx\right) = \frac{1}{2}\left(\int dx - \frac{1}{2}\int \cos 2x d2x\right)\\ &= \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{2}\sin 2x\right) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin 2x + C.\end{aligned}$$

Задача 1. Решете интеграла $\int 2x\left(x^2+5\right)^{10}dx$.

Решение. Внасяме $2x$ зад диференциала като намираме, че $\int 2x dx = x^2 + C$. Тогава

$$\int 2x\left(x^2+5\right)^{10}dx = \int \left(x^2+5\right)^{10}dx^2 = \int \left(x^2+5\right)^{10}d\left(x^2+5\right) = \frac{\left(x^2+5\right)^{11}}{11} + C.$$

Задача 2. Решете интеграла $\int \frac{x}{x^2+1}dx$.

Решение. Внасяме x зад диференциала и прибаваме 1. Получаваме

$$\int \frac{x}{x^2+1}dx = \int \frac{1}{x^2+1}d\frac{x^2}{2} = \frac{1}{2}\int \frac{1}{x^2+1}dx^2 = \frac{1}{2}\int \frac{1}{x^2+1}d\left(x^2+1\right) = \frac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right) + C.$$

Задача 3. Решете интеграла $\int \frac{\cos x}{\sin^3 x} dx$.

Решение. Внасяме $\cos x$ зад диференциала.

$$\int \frac{\cos x}{\sin^3 x} dx = \int \frac{1}{\sin^3 x} d\sin x = \int \sin^{-3} x d\sin x = \frac{\sin^{-2} x}{-2} + C.$$

Задача 4. Решете интеграла $\int \sin^3 x dx$.

Решение. Записваме $\sin^3 x$ като $\sin^2 x \sin x$ и внасяме $\sin x$ зад диференциала

$$\begin{aligned}
\int \sin^3 x dx &= \int \sin^2 x \sin x dx = -\int \sin^2 x d\cos x = -\int \left(1 - \cos^2 x\right) d\cos x \\
&= -\int d\cos x + \int \cos^2 x d\cos x = -\cos x + \frac{\cos^3 x}{3} + C.
\end{aligned}$$

Задача 5. Решете интеграла $\int \frac{\sqrt{1+\ln x}}{x} dx$.

Решение. Внасяме $\frac{1}{x}$ зад диференциала и прибавяме 1.

$$\int \frac{\sqrt{1+\ln x}}{x} dx = \int \sqrt{1+\ln x}.\frac{1}{x} dx = \int \sqrt{1+\ln x} d\ln x = \int (1+\ln x)^{\frac{1}{2}} d(\ln x + 1) = \frac{(1+\ln x)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C.$$

Задача 6. Решете интеграла $\int \frac{\arctan^3 x}{x^2+1} dx$.

Решение. Внасяме $\frac{1}{x^2+1}$ зад диференциала

$$\int \frac{\operatorname{arctg}^3 x}{x^2+1} dx = \int \operatorname{arctg}^3 x.\frac{1}{x^2+1} dx = \int \operatorname{arctg}^3 x d\operatorname{arctg} x = \frac{\operatorname{arctg}^4 x}{4} + C.$$

Задача 7. Решете интеграла $\int \frac{1}{\arcsin x\sqrt{1-x^2}} dx$

Решение. Внасяме $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ зад диференциала

$$\int \frac{1}{\arcsin x\sqrt{1-x^2}} dx = \int \frac{1}{\arcsin x}.\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \int \frac{1}{\arcsin x} d\arcsin x = \ln|\arcsin x| + C.$$

Интегриране на дробно-рационални функции

Задача 8. Решете интеграла $\int \frac{5x-13}{(x-3)(x-2)} dx$.

Решение. Първо ще разложим подинтегралната функция на сума от елементрани дроби. Тъй като знаменателят е произведение на два множителя от първа степен, то в разлагането ще участват две събираеми с неопределени коефициенти

$$\frac{5x-13}{(x-3)(x-2)} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x-2}.$$

Намираме общия знаменател и го премахваме от двете страни на равенството. Получаваме

$$5x - 13 = A(x-2) + B(x-3).$$

Разкриваме скобите. Тогава

$$5x - 13 = Ax - 2A + Bx - 3B.$$

Сега сравняваме коефициентите пред степените на x от двете страни на равенството. Получаваме следната система

$$\left| \begin{array}{c} A + B = 5 \\ -2A - 3B = -13 \end{array} \right. \rightarrow \left| \begin{array}{c} A = 5 - B \\ 2A + 3B = 13 \end{array} \right. \rightarrow \left| \begin{array}{c} A = 5 - B \\ 2\left(5 - B\right) + 3B = 13 \end{array} \right. \rightarrow \left| \begin{array}{c} A = 5 - B \\ 10 - 2B + 3B = 13 \end{array} \right. \rightarrow \left| \begin{array}{c} A = 2 \\ B = 3 \end{array} \right.$$

Тогава

$$\frac{5x - 13}{\left(x - 3\right)\left(x - 2\right)} = \frac{A}{x - 3} + \frac{B}{x - 2} = \frac{2}{x - 3} + \frac{3}{x - 2}.$$

Следователно

$$\begin{aligned} \int \frac{5x - 13}{\left(x - 3\right)\left(x - 2\right)} dx &= \int \left(\frac{2}{x - 3} + \frac{3}{x - 2}\right) dx = \int \frac{2}{x - 3} dx + \int \frac{3}{x - 2} dx \\ &= 2 \int \frac{1}{x - 3} d\left(x - 3\right) + 3 \int \frac{1}{x - 2} d\left(x - 2\right) = 2 \ln\left|x - 3\right| + 3 \ln\left|x - 2\right| + C. \end{aligned}$$

Задача 9. Решете интеграла $\int \frac{x - 13}{(x+2)(x-3)} dx$.

Решение. Първо ще разложим подинтегралната функция на сума от елементрани дроби. Тъй като знаменателят е произведение на два множителя от първа степен, то в разлагането ще участват две събираеми с неопределени коефициенти

$$\frac{x - 13}{\left(x + 2\right)\left(x - 3\right)} = \frac{A}{x + 2} + \frac{B}{x - 3}.$$

Намираме общия знаменател и го премахваме от двете страни на равенството. Получаваме

$$x - 13 = A\left(x - 3\right) + B\left(x + 2\right).$$

Разкриваме скобите. Тогава

$$x - 13 = Ax - 3A + Bx + 2B.$$

Сравняваме коефициентите пред степените на x от двете страни на равенството. Получаваме следната система

$$\left| \begin{array}{c} A + B = 1 \\ -3A + 2B = -13 \end{array} \right. \rightarrow \left| \begin{array}{c} A = 1 - B \\ -3\left(1 - B\right) + 2B = -13 \end{array} \right. \rightarrow \left| \begin{array}{c} A = 1 - B \\ 5B = -10 \end{array} \right. \rightarrow \left| \begin{array}{c} A = 3 \\ B = -2 \end{array} \right.$$

Тогава

$$\frac{x - 13}{\left(x + 2\right)\left(x - 3\right)} = \frac{A}{x + 2} + \frac{B}{x - 3} = \frac{3}{x + 2} - \frac{2}{x - 3}.$$

Следователно

$$\int \frac{x-13}{(x+2)(x-3)}dx = \int \left(\frac{3}{x+2} - \frac{2}{x-3} \right) dx = \int \frac{3}{x+2}dx - \int \frac{2}{x-3}dx$$
$$= 3\int \frac{1}{x+2}d(x+2) - 2\int \frac{1}{x-3}d(x-3) = 3\ln|x+2| - 2\ln|x-3| + C.$$

Задача 10. Решете интеграла $\int \frac{9x-7}{(x-1)(x+5)}dx$.

Решение. Първо ще разложим подинтегралната функция на сума от елементрани дроби. Тъй като знаменателят е произведение на два множителя от първа степен, то в разлагането ще участват две събираеми с неопределени коефициенти

$$\frac{9x-7}{(x-1)(x+5)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+5}.$$

Намираме общия знаменател и го премахваме от двете страни на равенството. Получаваме

$$9x-7 = A(x+5) + B(x-1).$$

Разкриваме скобите. Тогава

$$9x-7 = Ax + 5A + Bx - B.$$

Сравняваме коефициентите пред степените на x от двете страни на равенството. Получаваме следната система

$$\left| \begin{array}{c} A+B=9 \\ 5A-B=-7 \end{array} \right. \to \left| \begin{array}{c} B=9-A \\ 5A-(9-A)=-7 \end{array} \right. \to \left| \begin{array}{c} B=9-A \\ 5A-9+A=-7 \end{array} \right. \to \left| \begin{array}{c} B=9-A \\ 6A=2 \end{array} \right. \to \left| \begin{array}{c} A=\frac{1}{3} \\ B=\frac{26}{3} \end{array} \right.$$

Тогава

$$\frac{9x-7}{(x-1)(x+5)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+5} = \frac{\frac{1}{3}}{x-1} + \frac{\frac{26}{3}}{x+5}.$$

Следователно

$$\int \frac{9x-7}{(x-1)(x+5)}dx = \int \left(\frac{\frac{1}{3}}{x-1} + \frac{\frac{26}{3}}{x+5} \right) dx = \frac{1}{3}\int \frac{1}{x-1}dx + \frac{26}{3}\int \frac{1}{x+5}dx$$
$$= \frac{1}{3}\int \frac{1}{x-1}d(x-1) + \frac{26}{3}\int \frac{1}{x+5}d(x+5)$$
$$= \frac{1}{3}\ln|x-1| + \frac{26}{3}\ln|x+5| + C.$$

Задача 11. Решете интеграла $\int \frac{4x-5}{(x+2)(x-3)}dx$.

Решение. Първо ще разложим подинтегралната функция на сума от елементрани дроби. Тъй като знаменателят е произведение на два множителя от първа степен, то в разлагането ще участват две събираеми с неопределени коефициенти

$$\frac{4x-5}{(x+2)(x-3)}=\frac{A}{x+2}+\frac{B}{x-3}.$$

Намираме общия знаменател и го премахваме от двете страни на равенството. Получаваме

$$4x-5=A(x-3)+B(x+2).$$

Разкриваме скобите. Тогава

$$4x-5=Ax-3A+Bx+2B.$$

Сравняваме коефициентите пред степените на x от двете страни на равенството. Получаваме следната система

$$\left|\begin{array}{c}A+B=4\\ -3A+2B=-5\end{array}\right. \rightarrow \left|\begin{array}{c}A=4-B\\ -3(4-B)+2B=-5\end{array}\right. \rightarrow \left|\begin{array}{c}A=4-B\\ 5B=7\end{array}\right. \rightarrow \left|\begin{array}{c}A=\frac{13}{5}\\ B=\frac{7}{5}\end{array}\right.$$

Тогава

$$\frac{4x-5}{(x+2)(x-3)}=\frac{A}{x+2}+\frac{B}{x-3}=\frac{\frac{13}{5}}{x+2}+\frac{\frac{7}{5}}{x-3}.$$

Следователно

$$\begin{aligned}\int\frac{4x-5}{(x+2)(x-3)}dx &= \int\left(\frac{\frac{13}{5}}{x+2}+\frac{\frac{7}{5}}{x-3}\right)dx=\frac{13}{5}\int\frac{1}{x+2}dx+\frac{7}{5}\int\frac{1}{x-3}dx\\ &= \frac{13}{5}\int\frac{1}{x+2}d(x+2)+\frac{7}{5}\int\frac{1}{x-3}d(x-3)\\ &= \frac{13}{5}\ln|x+2|+\frac{7}{5}\ln|x-3|+C.\end{aligned}$$

Задача 12. Решете интеграла $\int\frac{3x^2+4x+1}{(x^2+1)(x+2)}dx$.

Решение. Тъй като знаменателят е произведение на полиноми от първа и от втора степен, то търсим подинтегралната функция във вида

$$\frac{3x^2+4x+1}{(x^2+1)(x+2)}=\frac{Ax+B}{x^2+1}+\frac{C}{x+2}.$$

Привеждаме под общ знаменател и получаваме

$$3x^2+4x+1=(Ax+B)(x+2)+C\left(x^2+1\right)=Ax^2+Cx^2+2Ax+Bx+2B+C.$$

Сравняваме коефициеnите пред степените на x и получаваме системата

$$\left|\begin{array}{c}3=A+C\\ 4=2A+B\\ 1=2B+C\end{array}\right.$$

чието решение е $A=2, B=0, C=1$.

Тогава

$$\begin{aligned}\int \frac{3x^2+4x+1}{(x^2+1)(x+2)}dx &= \int \frac{Ax+B}{x^2+1}dx + \int \frac{C}{x+2}dx = \int \frac{2x}{x^2+1}dx + \int \frac{1}{x+2}dx \\ &= \int \frac{1}{x^2+1} d\left(x^2+1\right) + \int \frac{1}{x+2} d(x+2) = \ln\left(x^2+1\right) + \ln|x+2| + C.\end{aligned}$$

Задача 13. Решете интеграла $\int \frac{x+1}{(x-1)^2(x+3)}dx$.

Решение. Търсим подинтегралната функция във вида

$$\frac{x+1}{(x-1)^2(x+3)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{x+3}.$$

Привеждаме към общ знаменател и получаваме

$$x+1 = A(x-1)(x+3) + B(x+3) + C(x-1)^2 = Ax^2 + Cx^2 + 2Ax + Bx - 2Cx - 3A + 3B + C.$$

Сравняваме коефициентите пред степените на x и получаваме системата

$$\left|\begin{array}{r} 0 = A+C \\ 1 = 2A+B-2C \\ 1 = -3A+3B+C \end{array}\right.$$

чието решение е $A=\frac{1}{8}, B=\frac{1}{2}, C=-\frac{1}{8}$.

Тогава

$$\begin{aligned}\int \frac{x+1}{(x-1)^2(x+3)}dx &= \int \frac{A}{x-1}dx + \int \frac{B}{(x-1)^2}dx + \int \frac{C}{x+3}dx \\ &= \int \frac{\frac{1}{8}}{x-1}dx + \int \frac{\frac{1}{2}}{(x-1)^2}dx - \int \frac{\frac{1}{8}}{x+3}dx \\ &= \frac{1}{8}\int \frac{1}{x-1}d(x-1) + \frac{1}{2}\int (x-1)^{-2} d(x-1) - \frac{1}{8}\int \frac{1}{x+3}d(x+3) \\ &= \frac{1}{8}\ln|x-1| - \frac{1}{2(x-1)} - \frac{1}{8}\ln|x+3| + C.\end{aligned}$$

Интегриране по части

Нека $u(x)$ и $v(x)$ са диференцируеми. Тогава в сила е формулата за интегриране по части

$$\int u dv = uv - \int v du$$

Забележка. При интеграли от вида $\int x^n \left\{\begin{array}{c} e^x \\ \sin x \\ \cos x \end{array}\right\} dx$ внасяме зад диференциала $e^x, \sin x$ или $\cos x$, докато при $\int x^n \left\{\begin{array}{c} \ln x \\ \arcsin x \\ arctgx \end{array}\right\} dx$ внасяме x^n.

Интеграли от вида $\int e^x \left\{ \begin{array}{c} \sin x \\ \cos x \end{array} \right\} dx$ решаваме чрез двукратно интегриране по части.

Задача 14. Решете интеграла $\int \ln x dx$.
Решение. Прилагаме формулата за интегриране по части и получаваме

$$\int \ln x dx = x \ln x - \int x d \ln x = x \ln x - \int x . \frac{1}{x} dx = x \ln x - x + C.$$

Задача 15. Решете интеграла $\int x \sin x dx$.
Решение. За да приложим формулата за интегриране по части е необходимо пред и зад диференциала да имаме само по една функция. За целта трябва да внесем някоя от двете подинтегрални функции зад диференциала. С оглед на горната забележка, внасяме тригонометричната. Получаваме

$$\int x \sin x dx = -\int x d \cos x = -\left(x \cos x - \int \cos x dx \right) = -\left(x \cos x - \sin x \right) + C = -x \cos x + \sin x + C.$$

Задача 16. Решете интеграла $\int x \sin 5x dx$.
Решение.

$$\begin{aligned} \int x \sin 5x dx &= -\frac{1}{5} \int x d \cos 5x = -\frac{1}{5} \left(x \cos 5x - \int \cos 5x dx \right) = -\frac{1}{5} \left(x \cos 5x - \frac{1}{5} \int \cos 5x d5x \right) \\ &= -\frac{1}{5} x \cos 5x + \frac{1}{25} \sin 5x + C. \end{aligned}$$

Задача 17. Решете интеграла $\int x \cos 3x dx$.
Решение.

$$\begin{aligned} \int x \cos 3x dx &= \frac{1}{3} \int x d \sin 3x = \frac{1}{3} \left(x \sin 3x - \int \sin 3x dx \right) = \frac{1}{3} \left(x \sin 3x - \frac{1}{3} \int \sin 3x d3x \right) \\ &= \frac{1}{3} x \sin 3x + \frac{1}{9} \cos 3x + C. \end{aligned}$$

Задача 18. Решете интеграла $\int x e^{2x} dx$.
Решение.

$$\int x e^{2x} dx = \frac{1}{2} \int x d e^{2x} = \frac{1}{2} \left(x e^{2x} - \int e^{2x} dx \right) = \frac{1}{2} \left(x e^{2x} - \frac{1}{2} \int e^{2x} d2x \right) = \frac{1}{2} x e^{2x} - \frac{1}{4} e^{2x} + C.$$

Смяна на променливите при неопределени интеграли

Понякога, когато е трудно да се реши с досега споменатите методи даден интеграл $\int f(x) dx$ е удобно да се направи полагане $x = \varphi(t)$. Тогава

$$\int f(x) dx = \int f(\varphi(t)) d\varphi(t) = \int f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt.$$

Обикновено този подход се прилага когато в подинтегралната функция има корен.

Задача 19. Решете интеграла $\int \frac{x+\sqrt{x+3}}{\sqrt{x+3}}dx$.

Решение. Полагаме $\sqrt{x+3} = t$. Тогава $x+3 = t^2$, откъдето $x = t^2 - 3$. Получаваме

$$\begin{aligned}\int \frac{x+\sqrt{x+3}}{\sqrt{x+3}}dx &= \int \frac{t^2-3+t}{t}d\left(t^2-3\right) = \int \frac{2t\left(t^2-3+t\right)}{t}dt = 2\int \left(t^2-3+t\right)dt \\ &= 2\left(\frac{t^3}{3}+\frac{t^2}{2}-3t\right)+C = 2\left(\frac{(x+3)\sqrt{x+3}}{3}+\frac{x+3}{2}-3\sqrt{x+3}\right)+C \\ &= \frac{2(x+3)\sqrt{x+3}}{3} - 6\sqrt{x+3}+x+3+C.\end{aligned}$$

Задача 20. Решете интеграла $\int \frac{1}{1+\sqrt[3]{x+1}}dx$.

Решение. Полагаме $\sqrt[3]{x+1} = t$. Тогава $x+1 = t^3$, откъдето $x = t^3 - 1$. Получаваме

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{1+\sqrt[3]{x+1}}dx &= \int \frac{1}{1+t}d\left(t^3-1\right) = \int \frac{3t^2}{t+1}dt = 3\int \frac{t^2-1+1}{t+1}dt \\ &= 3\int (t-1)\,dt + 3\int \frac{1}{t+1}d(t+1) = 3\frac{t^2}{2} - 3t + 3\ln|t+1| + C \\ &= 3\frac{\sqrt[3]{(x+1)^2}}{2} - 3\sqrt[3]{x+1} + 3\ln\left|\sqrt[3]{x+1}+1\right| + C.\end{aligned}$$

Задача 21. Решете интеграла $\int \frac{\sqrt{x+1}+2}{\sqrt{x+1}-1}dx$.

Решение. Полагаме $\sqrt{x+1} = t$. Тогава $x+1 = t^2$, откъдето $x = t^2 - 1$. Получаваме

$$\begin{aligned}\int \frac{\sqrt{x+1}+2}{\sqrt{x+1}-1}dx &= \int \frac{t+2}{t-1}d\left(t^2-1\right) = \int \frac{2t(t+2)}{t-1}dt = 2\int \frac{t^2+2t-3+3}{t-1}dt \\ &= 2\int (t+3)\,dt + 6\int \frac{1}{t-1}d(t-1) = 2\frac{t^2}{2} + 6t + 6\ln|t-1| + C \\ &= x+1+6\sqrt{x+1}+6\ln\left|\sqrt{x+1}-1\right| + C.\end{aligned}$$

Задача 22. Решете интеграла $\int \frac{1}{2x+3\sqrt{x}}dx$.

Решение. Полагаме $\sqrt{x} = t$. Тогава $x = t^2$. Получаваме

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{2x+3\sqrt{x}}dx &= \int \frac{1}{2t^2+3t}dt^2 = \int \frac{2t}{2t^2+3t}dt = 2\int \frac{t}{t(2t+3)}dt \\ &= \int \frac{1}{2t+3}d(2t+3) = \ln|2t+3| + C \\ &= \ln\left|2\sqrt{x}+3\right| + C.\end{aligned}$$

Задача 23. Решете интеграла $\int \frac{x}{\sqrt{x}+1} dx$.

Решение. Полагаме $\sqrt{x} = t$. Тогава $x = t^2$. Получаваме

$$\begin{aligned}
\int \frac{x}{\sqrt{x}+1} dx &= \int \frac{t^2}{t+1} dt^2 = \int \frac{2t^3}{t+1} dt = 2 \int \frac{t^3+1-1}{t+1} dt = 2 \int \frac{(t+1)\left(t^2-t+1\right)-1}{t+1} dt \\
&= 2 \int \left(t^2-t+1\right) dt - 2 \int \frac{1}{t+1} d(t+1) = 2\left(\frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2} + t\right) - 2\ln|t+1| + C \\
&= \frac{2x\sqrt{x}}{3} - x + 2\sqrt{x} - 2\ln\left|\sqrt{x}+1\right| + C.
\end{aligned}$$