Аналитична геометрия

Вектори

Нека $\overrightarrow{a}(x_a, y_a, z_a)$ и $\overrightarrow{b}(x_b, y_b, z_b)$ са два вектора. Тогава

$$\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} = (x_a + x_b, y_a + y_b, z_a + z_b), \ \overrightarrow{a} - \overrightarrow{b} = (x_a - x_b, y_a - y_b, z_a - z_b).$$

$$\lambda\overrightarrow{a} = (\lambda x_a, \lambda y_a, \lambda z_a).$$

Нека са дадени точките $A(x_A, y_A, z_A)$ и $B(x_B, y_B, z_B)$. Тогава точката

$$M\left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2}, \frac{z_A + z_B}{2}\right)$$

е среда на AB. Освен това,

$$\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A, y_B - y_A, z_B - z_A).$$

Например, ако са дадени точките $A(3, -1, 2)$ и $B(-1, 2, 1)$, то координатите на $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{BA}$ са съответно $\overrightarrow{AB}(-4, 3, -1)$ и $\overrightarrow{BA}(4, -3, 1)$.

Обратно, ако са дадени координатите на т. $B(-3, -2, 4)$ и $\overrightarrow{AB}(-8, -9, 11)$ се получава, че $A(5, 7, -7)$.

Скаларно произведение на два вектора се дефинира като числото

$$\overrightarrow{a}.\overrightarrow{b} = x_a.x_b + y_a.y_b + z_a.z_b$$

Два вектора са перпендикулярни тогава и само тогава, когато $\overrightarrow{a}.\overrightarrow{b} = 0$ и са успоредни, когато имат пропорционални координати.

Например, векторите $\overrightarrow{a}(-1, -1, 6)$ и $\overrightarrow{b}(1, -1, 0)$ са перпендикулярни, защото $\overrightarrow{a}.\overrightarrow{b} = -1.1 + (-1).(-1) + 6.0 = 0$, а векторите $\overrightarrow{a}(-1, 0, 3)$ и $\overrightarrow{b}(-2, 0, 6)$ са успоредни, защото $2\overrightarrow{a} = \overrightarrow{b}$.

Дължина на вектор се дефинира като

$$|\overrightarrow{a}| = \sqrt{x_a^2 + y_a^2 + z_a^2}.$$

Тогава за ъгъла между два вектора имаме

$$\cos\varphi = \frac{\overrightarrow{a}\overrightarrow{b}}{|\overrightarrow{a}|\left|\overrightarrow{b}\right|}.$$

Задача 1. Да се намери вектор $\overrightarrow{m}(x, y, z)$, който да удовлетворява условията $\overrightarrow{m}.\overrightarrow{a} = 3$, $\overrightarrow{m}.\overrightarrow{b} = 6$, $\overrightarrow{m}.\overrightarrow{c} = 8$, където $\overrightarrow{a}(-1, 4, 3)$, $\overrightarrow{b}(-5, -7, 3)$, $\overrightarrow{c}(-2, 0, 4)$.

Решение. От условията $\overrightarrow{m}.\overrightarrow{a} = 3$, $\overrightarrow{m}.\overrightarrow{b} = 6$ и $\overrightarrow{m}.\overrightarrow{c} = 8$, получаваме системата

$$\left| \begin{array}{c} -x+4y+3z=3 \\ -5x-7y+3z=6 \\ -2x+4z=8 \end{array} \right.$$

Решаваме я и получаваме $\overrightarrow{m}\left(2,-1,3\right)$.

Задача 2. Да се намери вектор $\overrightarrow{m}\left(x,y,z\right)$, който е перпендикулярен на $\overrightarrow{a}$ и $\overrightarrow{c}$, а $\overrightarrow{m}.\overrightarrow{b} = 1$, където $\overrightarrow{a}\left(1,-1,0\right)$, $\overrightarrow{b}\left(-1,1,1\right)$, $\overrightarrow{c}\left(1,0,4\right)$.

Решение. От условията $\overrightarrow{m}.\overrightarrow{a} = 0$, $\overrightarrow{m}.\overrightarrow{b} = 1$ и $\overrightarrow{m}.\overrightarrow{c} = 0$, получаваме системата

$$\left| \begin{array}{c} x-y=0 \\ -x+y+z=1 \\ x+4z=0 \end{array} \right.$$

Решаваме я и получаваме $\overrightarrow{m}\left(-4,-4,1\right)$.

Задача 3. Дадени са точките $A\left(2,4,4\right)$, $B\left(1,6,2\right)$, $C\left(0,5,6\right)$. Да се намерят ъглите на ΔABC.

Решение. Намираме $\overrightarrow{AB}\left(-1,2,-2\right)$, $\overrightarrow{AC}\left(-2,1,2\right)$. Тогава за ъгъла при върха A имаме

$$\cos\alpha = \frac{\overrightarrow{AB}\overrightarrow{AC}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|\left|\overrightarrow{AC}\right|} = \frac{\left(-1\right).\left(-2\right)+2.1+\left(-2\right).2}{\sqrt{\left(-1\right)^2+2^2+\left(-2\right)^2}.\sqrt{\left(-2\right)^2+1^2+2^2}} = 0,$$

откъдето $\alpha = \frac{\pi}{2}$. Аналогично намираме, че $\overrightarrow{BA}\left(1,-2,2\right)$, $\overrightarrow{BC}\left(-1,-1,4\right)$ и

$$\cos\beta = \frac{\overrightarrow{BA}\overrightarrow{BC}}{\left|\overrightarrow{BA}\right|\left|\overrightarrow{BC}\right|} = \frac{1.\left(-1\right)+\left(-2\right).\left(-1\right)+2.4}{\sqrt{1^2+\left(-2\right)^2+2^2}.\sqrt{\left(-1\right)^2+\left(-1\right)^2+4^2}} = \frac{9}{\sqrt{9}.\sqrt{18}} = \frac{9}{3.3.\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

т.е. $\beta = \frac{\pi}{4} = \gamma$.

Векторно произведение на два вектора е вектор с координати

$$\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}\left(\left|\begin{array}{cc} y_a & z_a \\ y_b & z_b \end{array}\right|, \left|\begin{array}{cc} z_a & x_a \\ z_b & x_b \end{array}\right|, \left|\begin{array}{cc} x_a & y_a \\ x_b & y_b \end{array}\right|\right).$$

За неуспоредните вектори $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, лицето на успоредника, образуван от тях се дава с формулата $\left|\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}\right|$, докато лицето на триъгълника е половината т.е. $\left|\frac{\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}}{2}\right|$.

Например, ако са дадени векторите $\overrightarrow{a}\left(3,2,4\right)$, $\overrightarrow{b}\left(1,-2,3\right)$ и търсим лицата съответно на успоредника, построен върху двата вектора и на триъгълника, построен върху двата вектора, то

$$\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}\left(\left|\begin{array}{cc} 2 & 4 \\ -2 & 3 \end{array}\right|, \left|\begin{array}{cc} 4 & 3 \\ 3 & 1 \end{array}\right|, \left|\begin{array}{cc} 3 & 2 \\ 1 & -2 \end{array}\right|\right) = \left(14,-5,-8\right).$$

Тогава лицето на успоредника е колкото дължината на векторното произведение, т.е. $\sqrt{14^2+(-5)^2+(-8)^2}=\sqrt{285}$ квадратни единици, а лицето на триъгълника е два пъти по-малко, или $\frac{\sqrt{285}}{2}$.

Смесено произведение на три вектора е число като

$$\left(\overrightarrow{a}\overrightarrow{b}\overrightarrow{c}\right)=\begin{vmatrix} x_a & y_a & z_a \\ x_b & y_b & z_b \\ x_c & y_c & z_c \end{vmatrix}.$$

Три вектора лежат в една равнина тогава и само тогава, когато $\left(\overrightarrow{a}\overrightarrow{b}\overrightarrow{c}\right)=0$.

Например, векторите $\overrightarrow{a}\,(4,1,5)$, $\overrightarrow{b}\,(3,0,1)$ и $\overrightarrow{c}\,(-2,1,3)$ лежат в една равнина, защото $\begin{vmatrix} 4 & 1 & 5 \\ 3 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \end{vmatrix}=0$.

Обемът на паралелепипеда съставен от тях е $V_{par}=\left|\left(\overrightarrow{a}\overrightarrow{b}\overrightarrow{c}\right)\right|$, а на пирамидата - $V_{pir}=\frac{1}{6}\left|\left(\overrightarrow{a}\overrightarrow{b}\overrightarrow{c}\right)\right|$.

Например, ако имаме векторите $\overrightarrow{p}\,(-4,2,-3)$, $\overrightarrow{q}\,(12,0,11)$ и $\overrightarrow{r}\,(0,1,8)$, то

$$(\overrightarrow{p}\overrightarrow{q}\overrightarrow{r})=\begin{vmatrix} -4 & 2 & -3 \\ 12 & 0 & 11 \\ 0 & 1 & 8 \end{vmatrix}=-184.$$

Тогава обемът на пирамидата, образувана от трите вектора е $V_{pir}=\frac{1}{6}\left|(\overrightarrow{p}\overrightarrow{q}\overrightarrow{r})\right|=\frac{184}{6}=\frac{92}{3}$ кубични единици.

Задача 4. Дадени са точките $A\,(9,-16,9)$, $B\,(11,-22,10)$, $C\,(8,-3,3)$, $D\,(17,0,-9)$. Лежат ли в една равнина точките?

Намерете лицето на триъгълника ABC.

Решение. За да определим дали точките са в една равнина е достатъчно да вземем 3 вектора и да пресметнем тяхното векторно произведение. Например, $\overrightarrow{AB}\,(2,-6,1)$, $\overrightarrow{AC}\,(-1,13,-6)$, $\overrightarrow{AD}\,(8,16,-18)$. Тогава

$$\left(\overrightarrow{AB}\overrightarrow{AC}\overrightarrow{AD}\right)=\begin{vmatrix} 2 & -6 & 1 \\ -1 & 13 & -6 \\ 8 & 16 & -18 \end{vmatrix}=0,$$

т.е. точките са в една равнина.

За лицето на триъгълника имаме

$$S_{ABC}=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|=\frac{1}{2}\left(\begin{vmatrix} -6 & 1 \\ 13 & -6 \end{vmatrix},\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -6 & -1 \end{vmatrix},\begin{vmatrix} 2 & -6 \\ -1 & 13 \end{vmatrix}\right)=\frac{1}{2}\sqrt{23^2+11^2+20^2}=\frac{5\sqrt{42}}{2}.$$

Задача 5. Дадени са точките $A(-1,6,5)$, $B(-2,2,8)$, $C(1,12,2)$, $D(3,5,5)$. Намерете обема на пирамидата $ABCD$ и лицето на триъгълника ABC.

Решение. Пресмятаме $\overrightarrow{AB}(-1,-4,3)$, $\overrightarrow{AC}(2,6,-3)$, $\overrightarrow{AD}(4,-1,0)$. Тогава

$$V=\frac{1}{6}\left|\left(\overrightarrow{AB}\overrightarrow{AC}\overrightarrow{AD}\right)\right|=\frac{1}{6}\left\|\begin{array}{ccc}-1&-4&3\\2&6&-3\\4&-1&0\end{array}\right\|=\frac{1}{6}\left|-27\right|=\frac{27}{6}=\frac{9}{2}.$$

За лицето на триъгълника имаме

$$S_{ABC}=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|=\frac{1}{2}\left(\left|\begin{array}{cc}-4&3\\6&-3\end{array}\right|,\left|\begin{array}{cc}3&-1\\-3&2\end{array}\right|,\left|\begin{array}{cc}-1&-4\\2&6\end{array}\right|\right)=\frac{1}{2}\sqrt{(-6)^2+3^2+2^2}=\frac{7}{2}.$$

Задача 6. Дадени са точките $A(3,5,3)$, $B(0,3,4)$, $C(2,4,5)$, $D(0,3,2)$. Намерете обема на пирамидата $ABCD$ и дължината на височината спусната от върха D към равнината на основата ABC.

Решение. Пресмятаме $\overrightarrow{AB}(-3,-2,1)$, $\overrightarrow{AC}(-1,-1,2)$, $\overrightarrow{AD}(-3,-2,-1)$. Тогава

$$V=\frac{1}{6}\left|\left(\overrightarrow{AB}\overrightarrow{AC}\overrightarrow{AD}\right)\right|=\frac{1}{6}\left\|\begin{array}{ccc}-3&-2&1\\-1&-1&2\\-3&-2&-1\end{array}\right\|=\frac{1}{6}\left|-2\right|=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}.$$

За лицето на триъгълника имаме

$$S_{ABC}=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|=\frac{1}{2}\left(\left|\begin{array}{cc}-2&1\\-1&2\end{array}\right|,\left|\begin{array}{cc}1&-3\\2&-1\end{array}\right|,\left|\begin{array}{cc}-3&-2\\-1&-1\end{array}\right|\right)=\frac{1}{2}\sqrt{(-3)^2+5^2+1^2}=\frac{\sqrt{35}}{2}.$$

Да означим с h дължината на височината спусната от върха D към равнината на основата ABC. Тогава като заместим във формулата за обем

$$V=\frac{1}{3}h.S_{ABC},$$

получаваме, че

$$\frac{1}{3}=\frac{1}{3}h.\frac{\sqrt{35}}{2},\ h=\frac{2}{\sqrt{35}}.$$

Права в равнината

Общо уравнение на права $g: ax+by+c=0$.

Декартово уравнение на права $g: y=kx+n$.

Уравнение на права през две точки $A(x_a,y_a)$ и $B(x_b,y_b)$

$$g:\left|\begin{array}{ccc}x&y&1\\x_a&y_a&1\\x_b&y_b&1\end{array}\right|=0.$$

Ъглов коефициент $k = -\frac{a}{b}$ (k - при Декартово уравнение, $-\frac{a}{b}$ - при общо уравнение)

В сила са следните еквивалентности $g_1 || g_2 \Leftrightarrow k_{g_1} = k_{g_2}$ и $g_1 \perp g_2 \Leftrightarrow k_{g_1}.k_{g_2} = -1$.

Задача 7. Да се намери пресечната точка на правите $g_1 : 2x - 5y - 1 = 0$ и $g_2 : x + 4y - 7 = 0$.

Решение. Пресечната точка се намира като се реши системата

$$\left| \begin{array}{c} 2x - 5y - 1 = 0 \\ x + 4y - 7 = 0 \end{array} \right. \rightarrow \left| \begin{array}{c} 2x - 5y - 1 = 0 \\ x = 7 - 4y \end{array} \right. \rightarrow \left| \begin{array}{c} 2(7 - 4y) - 5y - 1 = 0 \\ x = 7 - 4y \end{array} \right. \rightarrow \left| \begin{array}{c} 13 - 13y = 0 \\ x = 7 - 4y \end{array} \right.$$

откъдето $y = 1, x = 7 - 4y = 7 - 4 = 3$. Т.е. пресечната точка на двете прави има координати $(3, 1)$.

Задача 8. Дадени са точките $A(3,1)$, $B(2,3)$, $C(0,3)$. Напишете уравненията на правата AB, височината през върха C и медианата през върха A.

Решение. Уравнението на правата AB има видът

$$AB : \left| \begin{array}{ccc} x & y & 1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{array} \right| = 0 = -2x - y + 7 = 2x + y - 7.$$

Нека M е среда на BC. Тогава $M\left(\frac{2+0}{2} = 1, \frac{3+3}{2} = 3\right)$, т.е., $M(1,3)$. Уравнението на медианата през A е уравнението на AM

$$AM : \left| \begin{array}{ccc} x & y & 1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{array} \right| = 0 = -2x - 2y + 8 = x + y - 4.$$

Нека сега H е петата на височината от C към AB и нека $CH : y = kx + n$. Тъй като т.C принадлежи на тази права, като заместим координатите й в уравнението получаваме $3 = k.0 + n$, следователно $n = 3$, т.е. $CH : y = kx + 3$.

Ъгловият коефициент на правата $AB : 2x + y - 7 = 0$ е равен на -2. Тъй като $AB \perp CH$, следователно $-2k = -1$, $k = \frac{1}{2}$. Тогава $CH : y = \frac{1}{2}x + 3$.

Задача 9. Дадени са точките $A(2,5), B(1,7), C(-1,7)$. Да се намери уравнението на права, която минава през B и

a) е успоредна на AC.

b) е перпендикулярна на AC.

Решение. Първо намираме уравнението на AC.

$$AC : \left| \begin{array}{ccc} x & y & 1 \\ 2 & 5 & 1 \\ -1 & 7 & 1 \end{array} \right| = 0 = -2x - 3y + 19 = 2x + 3y - 19.$$

Нека правата през B, която търсим да има уравнение $y = kx + n$.

а) щом е успоредна на е AC, тогава ъгловите коефициенти на двете прави са равни, т.е. $k = -\frac{2}{3}$.

Така $y = -\frac{2}{3}x + n$. За да намерим n, заместваме с координатите на B. Получаваме $7 = -\frac{2}{3}.1 + n$, откъдето $n = \frac{23}{3}$.

Окончателно уравнението на правата е $y = -\frac{2}{3}x + \frac{23}{3}$.

b) щом е перпендикулярна на AC, тогава произведението на ъгловите коефициенти на двете прави е равно на -1, т.е. $k.\left(-\frac{2}{3}\right) = -1, k = \frac{3}{2}$.

Така $y = \frac{3}{2}x + n$. За да намерим n, заместваме с координатите на B. Получаваме $7 = \frac{3}{2}.1 + n$, откъдето $n = \frac{11}{2}$.

Окончателно уравнението на правата е $y = \frac{3}{2}x + \frac{11}{2}$.

Задача 10. Да се напишат уравненията на страните на ΔABC, ако са дадени точката $B(2,-7)$, височината $h : 3x + y + 11 = 0$ и медианата $m : x + 2y + 7 = 0$, построени през различни върхове на триъгълника.

Решение. Нека h е височината към AB и $AB : y = kx + n$. От $h \perp AB$ следва, че $-3k = -1$, откъдето $k = \frac{1}{3}$. Тогава $AB : y = \frac{1}{3}x + n$. Заместваме с координатите на B и получаваме $-7 = \frac{1}{3}.2 + n$. От последното $n = -\frac{23}{3}$. Така $AB : y = \frac{1}{3}x - \frac{23}{3}$ или $AB : x - 3y - 23 = 0$.

Точката A е пресечна на AB и m. Тогава координатите ѝ трябва да са решение на системата

$$\left| \begin{array}{c} x - 3y - 23 = 0 \\ x + 2y + 7 = 0 \end{array} \right. \to \left| \begin{array}{c} x - 3y - 23 = 0 \\ x = -2y - 7 \end{array} \right. \to \left| \begin{array}{c} -2y - 7 - 3y - 23 = 0 \\ x = -2y - 7 \end{array} \right. \to \left| \begin{array}{c} y = -6 \\ x = 5 \end{array} \right. \to A(5,-6).$$

Така $A(5,-6)$. Нека $C(x,y)$. Тогава, ако M е среда на BC, то $M\left(\frac{x+2}{2}, \frac{y-7}{2}\right)$.

От това, че $M \in m$ следва, че

$$\frac{x+2}{2} + 2\frac{y-7}{2} + 7 = 0,\ \frac{x}{2} + 1 + y = 0,\ x + 2y + 2 = 0.$$

Точката $C \in h$, следователно

$$\left| \begin{array}{c} x + 2y + 2 = 0 \\ 3x + y + 11 = 0 \end{array} \right. \to \left| \begin{array}{c} x = -2 - 2y \\ 3x + y + 11 = 0 \end{array} \right. \to \left| \begin{array}{c} x = -2 - 2y \\ -6 - 6y + y + 11 = 0 \end{array} \right. \to \left| \begin{array}{c} x = -2 - 2y \\ y = 1 \end{array} \right. \to C(-4,1).$$

Накрая, за уравнението на BC получаваме

$$BC : \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 2 & -7 & 1 \\ -4 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 = -8x - 6y - 26 = 4x + 3y + 13,$$

а за уравнението на AC намираме

$$AC : \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 5 & -6 & 1 \\ -4 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 = -7x - 9y - 19 = 7x + 9y + 19.$$

Задача 11. Точките $A(1,-3), B(0,1), C(-2,-1)$ и D са върхове на успоредник. Напишете уравненията на страните му.

Решение. Имаме

$$AB: \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 1 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 = -4x - y + 1 = 4x + y - 1.$$

$$BC: \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0 = 2x - 2y + 2 = x - y + 1.$$

Нека $CD: y = kx+n$. От $CD \parallel AB$ следва, че $k = -4$, т.е. $CD: y = -4x+n$. От $C \in CD$ получаваме $-1 = -4(-2)+n$, т.е. $n = -9$, откъдето $CD: y = -4x - 9$ или $CD: 4x + y + 9 = 0$.

Нека $AD: y = k_1 x + n_1$. От $AD \parallel BC$ следва, че $k_1 = 1$, т.е. $CD: y = x + n_1$. От $A \in AD$ получаваме $-3 = 1 + n_1$, т.е. $n_1 = -4$, откъдето $AD: y = x - 4$ или $AD: x - y - 4 = 0$.

Задача 12. Дадена е правата $p: 2x + 4y + 5 = 0$ и точката $A(2,1)$. Да се намери точка A' симетрична на т. A спрямо p.

Решение. Нека $AA' \cap p = O$ и нека $AA': y = kx + n$. Тъй като $AA' \perp p$, следователно $k.k_p = -1$. От уравнението $p: 2x + 4y + 5 = 0$ намираме, че $k_p = -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2}$. Тогава $-\frac{1}{2}k = -1$, откъдето получаваме $k = 2$. Така $AA': y = 2x + n$. Понеже $A \in AA'$, заместваме с координатите на A в уравнението на AA'. Имаме $1 = 2.2 + n$ или $n = -3$.

Окончателно получаваме, че $AA': y = 2x - 3$.

Тогава за координатите на пресечната точка O на правите p и AA' намираме

$$\left| \begin{array}{c} 2x + 4y + 5 = 0 \\ y = 2x - 3 \end{array} \right. \to \left| \begin{array}{c} 2x + 4(2x-3) + 5 = 0 \\ y = 2x - 3 \end{array} \right. \to \left| \begin{array}{c} 10x = 7 \\ y = 2x - 3 \end{array} \right. \to \left| \begin{array}{c} x = \frac{7}{10} \\ y = \frac{14}{10} - 3 = -\frac{8}{5} \end{array} \right.$$

Т.е. $O\left(\frac{7}{10}, -\frac{8}{5}\right)$. Нека $A'(x,y)$. Тъй като O е среда на AA' получаваме

$$\frac{7}{10} = \frac{2+x}{2}; \quad -\frac{8}{5} = \frac{1+y}{2}.$$

Решаваме поотделно двете уравнения и намираме

$$14 = 10(2+x) = 20 + 10x; \quad 10x = -6; \quad x = -\frac{3}{5}$$

$$-16 = 5(1+y) = 5 + 5y; \quad 5y = -21; \quad y = -\frac{21}{5}$$

Така окончателно получаваме, че $A'\left(-\frac{3}{5}, -\frac{21}{5}\right)$.