Екстремум на функция на две променливи $z\left(x,y\right)$

Частни производни

С $z_x^{'}$ означаваме производната на z по x, а с $z_y^{'}$ - по y. Когато търсим производната по x, приемаме y за константа и обратното.

С $z_{xx}^{''}$ означаваме втората производна на z по x, а с $z_{yy}^{''}$ - по y. Имаме, че $z_{xx}^{''}=\left(z_x^{'}\right)_x^{'}$ и $z_{yy}^{''}=\left(z_y^{'}\right)_y^{'}$.

С $z_{xy}^{''}$ означаваме смесената производна, т.е. по x и по y. Няма значение дали първо е намерена производната по x и след това на полученото е намерена производната по y или обратното. С други думи,

$$z_{xy}^{''}=\left(z_x^{'}\right)_y^{'}=\left(z_y^{'}\right)_x^{'}.$$

Задача 1. Намерете частните производни от първи и втори ред на функцията $z=x^2+2x+y^3-3y+4$.

Решение.

$$z_x^{'}=\left(x^2\right)_x^{'}+2.\left(x\right)_x^{'}+0-0+0=2x+2.1=2x+2.$$

$$z_y^{'}=0+0+\left(y^3\right)_y^{'}-3.\left(y\right)_y^{'}+0=3y^2-3.1=3y^2-3.$$

$$z_{xx}^{''}=\left(z_x^{'}\right)_x^{'}=\left(2x+2\right)_x^{'}=2.\left(x\right)_x^{'}+0=2.1=2.$$

$$z_{yy}^{''}=\left(3y^2-3\right)_y^{'}=3.\left(y^2\right)_y^{'}-0=3.2y=6y.$$

$$z_{xy}^{''}=\left(z_x^{'}\right)_y^{'}=\left(2x+2\right)_y^{'}=0+0=0.$$

Също така

$$z_{xy}^{''}=\left(3y^2-3\right)_x^{'}=0-0=0.$$

Задача 2. Намерете частните производни от първи и втори ред на функцията $z=x^4y+3x^2-5y+2xy^2-8$.

Решение.

$$z_x^{'}=y.\left(x^4\right)_x^{'}+3.\left(x^2\right)_x^{'}-0+2y^2.\left(x\right)_x^{'}-0=y.4x^3+3.2x+2y^2.1=4x^3y+6x+2y^2.$$

$$z_y^{'}=x^4.\left(y\right)_y^{'}+0-5.\left(y\right)_y^{'}+2x.\left(y^2\right)_y^{'}-0=x^4.1-5.1+2x.2y=x^4-5+4xy.$$

$$z_{xx}^{''}=\left(z_x^{'}\right)_x^{'}=\left(4x^3y+6x+2y^2\right)_x^{'}=4y.\left(x^3\right)_x^{'}+6.\left(x\right)_x^{'}+0=4y.3x^2+6.1=12x^2y+6.$$

$$z_{yy}^{''}=\left(x^4-5+4xy\right)_y^{'}=0-0+4x.\left(y\right)_y^{'}=4x.1=4x.$$

$z''_{xy} = \left(z'_x\right)'_y = \left(4x^3y + 6x + 2y^2\right)'_y = 4x^3.\left(y\right)'_y + 0 + 2.\left(y^2\right)'_y = 4x^3.1 + 2.2y = 4x^3 + 4y.$

Също така

$$z''_{xy} = \left(x^4 - 5 + 4xy\right)'_x = \left(x^4\right)'_x - 0 + 4y.\left(x\right)'_x = 4x^3 + 4y.1 = 4x^3 + 4y.$$

Локални екстремуми на функция на две променливи

Търсим локалните екстремуми на $z\left(x,y\right)$. За целта:

1) Намираме z'_x и z'_y, след което решаваме системата $\left| \begin{array}{l} z'_x = 0 \\ z'_y = 0 \end{array} \right.$.

Получаваме точки $z\left(x_i, y_i\right)$ - критични. Само в някоя от тях функцията z може да има екстремум (минимум или максимум).

2) Пресмятаме z''_{xx}, z''_{yy} и z''_{xy}, след което за всяка критична точка заместваме с координатите ѝ във формулата $\Delta = z''_{xx}.z''_{yy} - \left(z''_{xy}\right)^2$.

Ако $\Delta > 0$, то имаме екстремум в съответната критична точка, а ако $\Delta < 0$ - нямаме.

3) За да определим вида на екстремума (дали е минимум или максимум) проверяваме дали $z''_{xx} > 0$ или $z''_{yy} > 0$. Теорията гласи, че и двете имат еднакъв знак, т.е., не е възможно едното да е положително, а другото отрицателно. Следователно е достатъчно да проверим само по-лесното от двете неравенства. Ако $z''_{xx} > 0$ (или $z''_{yy} > 0$), то видът на екстремума в критичната точка е минимум, а ако $z''_{xx} < 0$ (или $z''_{yy} < 0$) - максимум.

4) Накрая, заместваме в условието с координатите (x и y) на точките, в които имаме есктремуми, за да определим тяхната стойност.

Задача 3. Да се намерят локалните екстремуми на функцията $z\left(x,y\right) = x^2 + y^2 - 4x - 2y + 1$.

Решение. Решаваме системата

$$\left| \begin{array}{l} z'_x = 2x + 0 - 4 - 0 + 0 = 2x - 4 = 0 \\ z'_y = 0 + 2y - 0 - 2 + 0 = 2y - 2 = 0 \end{array} \right. \rightarrow \left| \begin{array}{l} x = 2 \\ y = 1 \end{array} \right.$$

и получаваме, че има само една критична точка с координати $\left(2,1\right)$, в която може да има екстремум.

Намираме

$$z''_{xx} = 2 - 0 = 2,\ z''_{yy} = 2 - 0 = 2,\ z''_{xy} = 0 - 0 = 0.$$

Тогава

$$\Delta\left(2,1\right) = z''_{xx}.z''_{yy} - \left(z''_{xy}\right)^2 = 2.2 - 0^2 = 4 > 0,$$

следователно имаме екстремум в точката $\left(2,1\right)$.

Тъй като $z''_{xx} = z''_{yy} = 2 > 0$, то имаме минимум. Накрая пресмятаме

$$z_{\min}\left(2,1\right) = 2^2 + 1^2 - 4.2 - 2.1 + 1 = -4.$$

Задача 4. Да се намерят локалните екстремуми на функцията $z(x,y) = 6x - 6y - x^2 - y^2$.

Решение. Решаваме системата

$$\left| \begin{array}{l} z_x^{'} = 6 - 0 - 2x - 0 = 6 - 2x = 0 \\ z_y^{'} = 0 - 6 - 0 - 2y = -6 - 2y = 0 \end{array} \right. \rightarrow \left| \begin{array}{l} x = 3 \\ y = -3 \end{array} \right.$$

и получаваме, че има само една критична точка с координати $(3, -3)$, в която може да има екстремум.

Намираме

$$z_{xx}^{''} = 0 - 2 = -2,\ z_{yy}^{''} = 0 - 2 = -2,\ z_{xy}^{''} = 0 - 0 = 0.$$

Тогава

$$\Delta(2,1) = z_{xx}^{''}.z_{yy}^{''} - \left(z_{xy}^{''}\right)^2 = (-2).(-2) - 0^2 = 4 > 0,$$

следователно имаме екстремум в точката $(3, -3)$.

Тъй като $z_{xx}^{''} = z_{yy}^{''} = -2 < 0$, следователно имаме максимум. Накрая пресмятаме

$$z_{\max}(3,-3) = 6.3 - 6.(-3) - 3^2 - (-3)^2 = 18.$$

Задача 5. Да се намерят локалните екстремуми на функцията $z(x,y) = x + y - xy - x^2 - y^2$.

Решение. Решаваме системата

$$\left| \begin{array}{l} z_x^{'} = 1 + 0 - y - 2x - 0 = 1 - y - 2x = 0 \\ z_y^{'} = 0 + 1 - x - 0 - 2y = 1 - x - 2y = 0 \end{array} \right. \rightarrow \left| \begin{array}{c} y = 1 - 2x \\ 1 - x - 2(1 - 2x) = 0 \end{array} \right. \rightarrow \left| \begin{array}{l} y = 1 - 2x \\ 3x - 1 = 0 \end{array} \right.$$

и получаваме, че има само една критична точка с координати $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$, в която може да има екстремум.

Намираме

$$z_{xx}^{''} = 0 - 0 - 2 = -2,\ z_{yy}^{''} = 0 - 0 - 2 = -2,\ z_{xy}^{''} = 0 - 1 - 0 = -1.$$

Тогава

$$\Delta(2,1) = z_{xx}^{''}.z_{yy}^{''} - \left(z_{xy}^{''}\right)^2 = (-2).(-2) - (-1)^2 = 3 > 0,$$

следователно имаме екстремум в точката $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$.

Тъй като $z_{xx}^{''} = z_{yy}^{''} = -2 < 0$, следователно имаме максимум. Накрая пресмятаме

$$z_{\max}\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{3}.\frac{1}{3} - \left(\frac{1}{3}\right)^2 - \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{2}{3} - \frac{1}{9} - \frac{1}{9} - \frac{1}{9} = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}.$$

Задача 6. Да се намерят локалните екстремуми на функцията $z(x,y) = x^3 + \frac{3}{2}y^2 - 6x + 3xy + 11$.

Решение. Решаваме системата

$$\left| \begin{array}{c} z_x^{'} = 3x^2 + 0 - 6 + 3y + 0 = 3x^2 - 6 + 3y = 0 \\ z_y^{'} = 0 + 3y - 0 + 3x + 0 = 3y + 3x = 0 \end{array} \right. \rightarrow \left| \begin{array}{c} x^2 - 2 + y = 0 \\ x + y = 0 \end{array} \right. \rightarrow \left| \begin{array}{c} x^2 - 2 - x = 0 \\ y = -x \end{array} \right.$$

и получаваме, че има две критични точки с координати $(-1, 1)$ и $(2, -2)$ в които може да има екстремум.

Намираме

$$z_{xx}^{''} = 6x - 0 + 0 = 6x,\ z_{yy}^{''} = 3 + 0 = 3,\ z_{xy}^{''} = 0 + 3 = 3.$$

Тогава

$$\Delta = z_{xx}^{''}.z_{yy}^{''} - \left(z_{xy}^{''}\right)^2 = 6x.3 - 3^2 = 18x - 9,$$

като

$$\Delta(-1, 1) = 18.(-1) - 9 = -27 < 0 \text{ и } \Delta(2, -2) = 18.2 - 9 = 27 > 0,$$

следователно имаме екстремум само в точката $(2, -2)$.

Тъй като $z_{yy}^{''} = 3 > 0$, следователно имаме минимум. Накрая пресмятаме

$$z_{\min}(2, -2) = 2^3 + \frac{3}{2}(-2)^2 - 6.2 + 3.2.(-2) + 11 = 1.$$

Задача 7. Да се намерят локалните екстремуми на функцията $z(x, y) = x^2 + y^3 - 4x - 12y + 1$.

Решение. Решаваме системата

$$\left| \begin{array}{c} z_x^{'} = 2x - 4 = 0 \\ z_y^{'} = 3y^2 - 12 = 0 \end{array} \right. \rightarrow \left| \begin{array}{c} x = 2 \\ y^2 = 4 \end{array} \right. \rightarrow \left| \begin{array}{c} x = 2 \\ y = \pm 2 \end{array} \right.$$

и получаваме, че има две критични точки с координати $(2, 2)$ и $(2, -2)$ в които може да има екстремум.

Намираме

$$z_{xx}^{''} = 2,\ z_{yy}^{''} = 6y,\ z_{xy}^{''} = 0.$$

Тогава

$$\Delta = z_{xx}^{''}.z_{yy}^{''} - \left(z_{xy}^{''}\right)^2 = 2.6y - 0^2 = 12y,$$

като

$$\Delta(2, 2) = 12.2 = 24 > 0 \text{ и } \Delta(2, -2) = 12.(-2) = -24 < 0,$$

следователно имаме екстремум в само точката $(2, 2)$.

Тъй като $z_{xx}^{''} = 2 > 0$, следователно имаме минимум. Накрая пресмятаме

$$z_{\min}(2, 2) = 2^2 + 2^3 - 4.2 - 12.2 + 1 = -19.$$

Задача 8. Да се намерят локалните екстремуми на функцията $z(x, y) = x^2 + y^3 - 2x - 3y + 1$.

Решение. Решаваме системата

$$\left| \begin{array}{l} z_x^{'} = 2x - 2 = 0 \\ z_y^{'} = 3y^2 - 3 = 0 \end{array} \right. \rightarrow \left| \begin{array}{l} x = 1 \\ y^2 = 1 \end{array} \right. \rightarrow \left| \begin{array}{l} x = 1 \\ y = \pm 1 \end{array} \right.$$

и получаваме, че има две критични точки с координати $(1,1)$ и $(1,-1)$ в които може да има екстремум.

Намираме

$$z_{xx}^{''} = 2,\ z_{yy}^{''} = 6y,\ z_{xy}^{''} = 0.$$

Тогава

$$\Delta = z_{xx}^{''}.z_{yy}^{''} - \left(z_{xy}^{''}\right)^2 = 2.6y - 0^2 = 12y,$$

като

$$\Delta\,(1,1) = 12.1 = 12 > 0 \text{ и } \Delta\,(1,-1) = 12.\,(-1) = -12 < 0,$$

следователно имаме екстремум само в точката $(1,1)$.

Тъй като $z_{xx}^{''} = 2 > 0$, следователно имаме минимум. Накрая пресмятаме

$$z_{\min}\,(1,1) = 1^2 + 1^3 - 2.1 - 3.1 + 1 = -2.$$

Задачи за самостоятелна работа:

Задача 1. Да се намерят локалните екстремуми на функцията $z\,(x,y) = 1 + 6x - x^2 - xy - y^2$.

Отг. $z_{\max}\,(4,-2) = 13$.

Задача 2. Да се намерят локалните екстремуми на функцията $z\,(x,y) = -2x^2 - y^2 + 6y + 2xy + 3$.

Отг. $z_{\max}\,(3,6) = 21$.

Задача 3. Да се намерят локалните екстремуми на функцията $z\,(x,y) = x^3 + y^2 - 6xy - 39x + 18y$.

Отг. $z_{\min}\,(5,6) = -106$.