Локални екстремуми на функция на една променлива

Припомняме, че необходимо условие за съществуване на естремум на функция $f(x)$ е първата ѝ производна да е равна на нула, т.е. $f'(x) = 0$. Достатъчно условие за съществуване на екстремум на функция $f(x)$ е първата ѝ производна $f'(x)$ да си сменя знака в околност на критичната точка. Ако го сменя от "+" на "-", то функцията $f(x)$ има локален максимум в тази точка, а ако го сменя от "-" на "+", то $f(x)$ има локален минимум.

Също така припомняме, че корените на квадратно уравнение $ax^2 + bx + c = 0, a \neq 0$ се дават с формулата $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$, където $D = b^2 - 4ac$.

Задача 1. Намерете интервалите на растене и намаляване на функцията $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x + 3$ и локалните ѝ екстремуми.

Решение. Пъво намираме $f'(x) = x^2 - 1$. Търсим критичните точки, т.е., в кои точки $f'(x) = 0$. Приравняваме двете страни и решаваме полученото квадратно уравнение.

$$f'(x) = x^2 - 1 = 0.$$

Последователно намираме, че $D = 0^2 - 4.1.(-1) = 4$ и $x_{1,2} = \frac{0 \pm 2}{2}$. Така $x_1 = \frac{0-2}{2} = -1$ и $x_2 = \frac{0+2}{2} = 1$. Остава да определим знаците в трите интервала $(-\infty, -1), (-1, 1)$ и $(1, +\infty)$.

Най-лесно това става като изберем точка от този интервал и пресметнем знака на първата производна в тази точка.

Например, от първия интервал $x \in (-\infty, -1)$ избираме $x = -2$ и заместваме

$$f'(-2) = (-2)^2 - 1 = 3 > 0.$$

Щом получаваме стойност по-голяма от нула, то знакът на първата производна $f'(x)$ в този интервал е "+". С други думи функцията е растяща в този интервал.

За интервала $x \in (-1, 1)$ избираме $x = 0$ и заместваме

$$f'(0) = 0^2 - 1 = -1 < 0.$$

Следователно знакът на първата производна $f'(x)$ в този интервал е "-", т.е. функцията е намаляваща в този интервал.

Накрая, за интервала $x \in (1, +\infty)$ избираме $x = 2$ и заместваме

$$f'(2) = 2^2 - 1 = 3 > 0.$$

Тогава знакът на първата производна $f'(x)$ в този интервал е "+" и функцията е растяща в него.

Това значи, че в точката $x_1 = -1$ имаме максимум (понеже знаците се сменят от "+" на "-"), а в точката $x_2 = 1$ имаме минимум.

Окончателно получаваме, че функцията е растяща за $x \in (-\infty, -1)$ и $x \in (1, +\infty)$ и е намаляваща за $x \in (-1, 1)$. Пресмятаме стойностите на екстремумите като заместваме в условието. Получаваме

$$f_{\max}(-1) = \frac{1}{3}(-1)^3 - (-1) + 3 = \frac{11}{3}.$$

$$f_{\min}(1) = \frac{1}{3}.1^3 - 1 + 3 = \frac{7}{3}.$$

Забележка: Друг значин за определяне на знаците в различните интервали е да се намери знакът само в един от тях и след това алтернативно да се сменят знаците, ако кратността на съответния корен е нечетно число и да не се променят знаците около критичка точка с четна кратност.

Задача 2. Намерете интервалите на растене и намаляване на функцията $f(x) = 3x^4 + 4x^3 + 2$ и нейните екстремуми.

Решение. Първо намираме $f'(x) = 12x^3 + 12x^2$. Търсим кога $f'(x) = 0$. Приравняваме двете страни и решаваме полученото квадратно уравнение.

$$f'(x) = 12x^3 + 12x^2 = 12(x^3 + x^2) = 12x^2(x+1) = 0.$$

Оттук следва, че $x_{1,2} = 0$ и $x_3 = -1$. Остава да определим знаците в трите интервала $(-\infty, -1)$, $(-1, 0)$ и $(0, +\infty)$.

От първия интервал $x \in (-\infty, -1)$ избираме $x = -2$ и заместваме

$$f'(-2) = 12(-2)^2(-2+1) = -48 < 0.$$

Следователно знакът на първата производна $f'(x)$ в този интервал е "-" и функцията е намаляваща.

За интервала $x \in (-1, 0)$ избираме $x = -\frac{1}{2}$ и заместваме

$$f'\left(-\frac{1}{2}\right) = 12\left(-\frac{1}{2}\right)^2\left(-\frac{1}{2} + 1\right) = \frac{12}{8} > 0.$$

Отново знакът на първата производна $f'(x)$ в този интервал е "+" и функцията е растяща. Накрая, за интервала $x \in (0, +\infty)$ избираме $x = 1$ и заместваме

$$f'(2) = 12.1^2(1+1) = 24 > 0.$$

Тогава знакът на първата производна $f'(x)$ в този интервал е "+" и функцията е растяща.

Следователно, в точката $x = 0$ нямаме екстремум (понеже и от двете й страни знаците са "+"), а в точката $x = -1$ имаме минимум.

Окончателно получаваме, че функцията е растяща за $x \in (-1, 0)$ и $x \in (0, +\infty)$ и намаляваща за $x \in (-\infty, -1)$ като

$$f_{\min}(-1) = 3.(-1)^4 + 4.(-1)^3 + 2 = 1.$$

Задача 3. Намерете интервалите на растене и намаляване на функцията $f(x) = x^3 - x^2 - 8x + 2$ и нейните екстремуми.

Решение. Първо намираме $f'(x) = 3x^2 - 2x - 8$. Искаме $f'(x) = 0$. Приравняваме двете страни и решаваме полученото квадратно уравнение.

$$f'(x) = 3x^2 - 2x - 8 = 0.$$

Последователно намираме, че $D = (-2)^2 - 4.3.(-8) = 4 + 96 = 100$ и $x_{1,2} = \frac{2\pm10}{6}$. Така $x_1 = \frac{2-10}{6} = -\frac{4}{3}$ и $x_2 = \frac{2+10}{6} = 2$. Остава да определим знаците в трите интервала $\left(-\infty, -\frac{4}{3}\right), \left(-\frac{4}{3}, 2\right)$ и $(2, +\infty)$.

От първия интервал $x \in \left(-\infty, -\frac{4}{3}\right)$ избираме $x = -2$ и заместваме

$$f'(-2) = 3.(-2)^2 - 2.(-2) - 8 = 3.4 + 4 - 8 = 8 > 0.$$

Следователно знакът на първата производна $f'(x)$ в този интервал е "+".

По аналогичен начин намираме, че за $x \in \left(-\frac{4}{3}, 2\right)$, то $f'(x) < 0$ и знакът е "-", докато за $x \in (2, +\infty)$, то $f'(x) > 0$ и знакът е "+". Тогава в точката $x_1 = -\frac{4}{3}$ имаме максимум (понеже знаците се сменят от "+" на "-"), а в точката $x_2 = 2$ имаме минимум.

Окончателно получаваме, че функцията е растяща за $x \in \left(-\infty, -\frac{4}{3}\right)$ и $x \in (2, +\infty)$ и е намаляваща за $x \in \left(-\frac{4}{3}, 2\right)$. Пресмятаме стойностите на екстремумите като заместваме в условието и намираме

$$f_{\max}\left(-\frac{4}{3}\right) = \left(-\frac{4}{3}\right)^3 - \left(-\frac{4}{3}\right)^2 - 8\left(-\frac{4}{3}\right) + 2 = \frac{230}{27}.$$

$$f_{\min}(2) = 2^3 - 2^2 - 8.2 + 2 = -10.$$

Задача 4. Намерете интервалите на растене и намаляване на функцията $f(x) = x^3 - 3x^2 + 6x - 2$ и нейните екстремуми.

Решение. Първо намираме $f'(x) = 3x^2 - 6x + 6$ и търсим кога $f'(x) = 0$. Приравняваме двете страни и решаваме полученото квадратно уравнение като делим на 3.

$$x^2 - 2x + 2 = 0.$$

Последователно намираме, че $D = (-2)^2 - 4.1.2 = 4 - 8 < 0$. В такъв случай имаме, че $f'(x) > 0$, т.е. функцията е винаги растяща и няма локални екстремуми.

Задача 5. Намерете интервалите на растене и намаляване на функцията $f(x) = x^3 - 3x + 3$ и нейните екстремуми.

Решение. Първо намираме $f'(x) = 3x^2 - 3$ и търсим кога $f'(x) = 0$. Приравняваме двете страни и решаваме полученото квадратно уравнение като делим на 3.

$$x^2 - 1 = 0.$$

Като в Задача 1 получаваме, че двата корена са $x_1 = -1$ и $x_2 = 1$ като знаците в интервалите $(-\infty, -1), (-1, 1)$ и $(1, +\infty)$ са съответно "+", "-" и

"+". Тогава в -1 имаме локален максимум, а в 1 имаме локален минимум. Окончателно получаваме, че функцията е растяща за $x \in (-\infty, -1)$ и $x \in (1, +\infty)$ и е намаляваща за $x \in (-1, 1)$ като

$$f_{\max}(-1) = (-1)^3 - 3.(-1) + 3 = 5.$$

$$f_{\min}(1) = 1^3 - 3.1 + 3 = 1.$$

Задача 6. Намерете интервалите на растене и намаляване на функцията $f(x) = \frac{x^2+1}{x}$ и нейните екстремуми.

Решение. Първо намираме

$$f'(x) = \left(\frac{x^2+1}{x}\right)' = \frac{\left(x^2+1\right)'.x - \left(x^2+1\right).(x)'}{x^2} = \frac{2x.x - \left(x^2+1\right).1}{x^2} = \frac{x^2-1}{x^2}.$$

Търсим критичните точки, т.е. $f'(x) = 0$. Приравняваме двете страни и решаваме полученото квадратно уравнение като се освобождаваме от знаменателя. Отново имаме

$$x^2 - 1 = 0.$$

Като в Задача 1 получаваме, че двата корена са $x_1 = -1$ и $x_2 = 1$ като знаците в интервалите $(-\infty, -1), (-1, 1)$ и $(1, +\infty)$ са съответно "+", "-" и "+". Получаваме, че функцията е растяща за $x \in (-\infty, -1)$ и $x \in (1, +\infty)$ и е намаляваща за $x \in (-1, 1)$ като

$$f_{\max}(-1) = \frac{(-1)^2+1}{-1} = -2.$$

$$f_{\min}(1) = \frac{1^2+1}{1} = 2.$$

Задача 7. Намерете интервалите на растене и намаляване на функцията $f(x) = \frac{x^2-2x+5}{x-1}$ и нейните екстремуми.

Решение. Първо намираме

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\frac{x^2-2x+5}{x-1}\right)' = \frac{\left(x^2-2x+5\right)'.(x-1) - \left(x^2-2x+5\right).(x-1)'}{(x-1)^2} \\ &= \frac{(2x-2).(x-1) - \left(x^2-2x+5\right)}{(x-1)^2} = \frac{x^2-2x-3}{(x-1)^2}. \end{aligned}$$

Търсим критичните точки, т.е. $f'(x) = 0$. Приравняваме двете страни и решаваме полученото квадратно уравнение като се освобождаваме от знаменателя. Получаваме

$$x^2 - 2x - 3 = 0.$$

Последователно намираме, че двата корена са $x_1 = -1$ и $x_2 = 3$ като знаците в интервалите са $(-\infty, -1), (-1, 3)$ и $(3, +\infty)$ са съответно "+", "-" и "+".

Тогава в -1 имаме локален максимум, а в 3 имаме локален минимум. Окончателно получаваме, че функцията е растяща за $x \in (-\infty, -1)$ и $x \in (3, +\infty)$ и е намаляваща за $x \in (-1, 3)$ като

$$f_{\max}(-1) = \frac{(-1)^2 - 2(-1) + 5}{(-1) - 1} = -4.$$

$$f_{\min}(3) = \frac{3^2 - 2.3 + 5}{3 - 1} = 4.$$

Задача 8. Намерете локалните екстремуми на функцията $f(x) = \frac{x^2-1}{x}$.

Решение. Намираме $f'(x) = \frac{x^2+1}{x^2}$. Тъй като $f'(x) > 0$ за всяко $x \neq 0$, то функцията е строго растяща и няма локални екстремуми.

Задача 9. Намерете локалните екстремуми на функцията $f(x) = \frac{x^2}{x^2-1}$.

Решение. Намираме $f'(x) = \frac{-2x}{(x^2-1)^2}$. Тъй като $f'(x) = 0$ е еквивалентно на $-2x = 0$, намираме, че критичната точка е $x = 0$. Имаме $f'(x) > 0$ за $x < 0, x \neq -1$ и $f'(x) < 0$ за $x > 0, x \neq 1$. Следователно в $x = 0$ имаме локален максимум като

$$f_{\max}(0) = 0.$$

Задача 10. Намерете локалните екстремуми на функцията $f(x) = x^2 e^{-x}$.

Решение. Намираме $f'(x) = 2xe^{-x} - x^2 e^{-x} = xe^{-x}(2-x)$. Тъй като $f'(x) = 0$ е еквивалентно на $x(2-x) = 0$, намираме, че критичните точки са $x_1 = 0$ и $x_2 = 2$. Имаме $f'(x) < 0$ за $x < 0$, $f'(x) > 0$ за $x \in (0, 2)$ и $f'(x) < 0$ за $x > 2$. Следователно в $x_1 = 0$ имаме локален минимум, а в $x_2 = 2$ имаме локален максимум, като

$$f_{\min}(0) = 0$$

и

$$f_{\max}(2) = \frac{4}{e^2}.$$

Задача 11. Намерете локалните екстремуми на функцията $f(x) = \left(x^2 - 8\right) e^{-x}$.

Решение. Намираме $f'(x) = 2xe^{-x} - x^2 e^{-x} + 8e^{-x} = -e^{-x}\left(x^2 - 2x - 8\right)$. Тъй като $f'(x) = 0$ е еквивалентно на $x^2 - 2x - 8 = 0$, намираме, че критичните точки са $x_1 = -2$ и $x_2 = 4$. Имаме $f'(x) < 0$ за $x < -2$, $f'(x) > 0$ за $x \in (-2, 4)$ и $f'(x) < 0$ за $x > 4$. Следователно в $x_1 = -2$ имаме локален минимум, а в $x_2 = 4$ имаме локален максимум, като

$$f_{\min}(-2) = -4e^2$$

и

$$f_{\max}(4) = \frac{8}{e^4}.$$

Задачи за самостоятелна работа:

Задача 1. Намерете локалните екстремуми на функцията $f = 2x^3 - 6x + 5$.
Отг. $f_{\max}(-1) = 9, f_{\min}(1) = 1$.

Задача 2. Намерете локалните екстремуми на функцията $f = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$.
Отг.. $f_{\max}(1) = 5, f_{\min}(3) = 1$.

Най-голяма и най-малка стойност на функция в затворен интервал

Теорема 1 (Вайерщрас) *Ако една функция е дефинирана и непрекъсната в краен и затворен интервал, то тя е ограничена и има най-голяма и най-малка стойност.*

Задача 1. Да се намерят най-голямата и най-малката стойност на функцията $f(x) = x^3 - 3x^2 + 6x - 2$ за $x \in [-1, 1]$.

Решение. Намираме, че $f'(x) = 3x^2 - 6x + 6 = 3\left(x^2 - 2x + 2\right) > 0$. Следователно функцията е строго растяща в интервала $[-1, 1]$ и най-голямата стойност е $f(1) = 2$, а най-малката стойност е $f(-1) = -12$.

Задача 2. Да се намерят най-голямата и най-малката стойност на функцията $f(x) = x^3 - 3x + 3$ за $x \in [0, 3]$.

Решение. Намираме, че $f'(x) = 3x^2 - 3 = 3\left(x^2 - 1\right)$. Критичните точки са $x_1 = -1$ и $x_2 = 1$ като $f'(x) < 0$ за $x \in [0, 1)$ и $f'(x) > 0$ за $x \in (1, 3]$. Следователно най-малката стойност е $f(1) = 1$, а най-голямата е $\max\{f(0), f(3)\}$. Пресмятаме, че $f(0) = 3$ и $f(3) = 21$, откъдето намираме, най-голямата стойност на функцията е $f(3) = 21$.

Задача 3. Да се намерят най-голямата и най-малката стойност на функцията $f(x) = \frac{x-1}{x+1}$ за $x \in [0, 3]$.

Решение. Намираме, че $f'(x) = \frac{2}{(x+1)^2} > 0$. Следователно функцията е строго растяща в интервала $[0, 3]$ и най-голямата стойност е $f(3) = \frac{1}{2}$, а най-малката стойност е $f(0) = -1$.

Задача 4. Да се намерят най-голямата и най-малката стойност на функцията $f(x) = \sqrt{100 - x^2}$ за $x \in [-6, 8]$.

Решение. Намираме, че $f'(x) = -\frac{x}{\sqrt{(100 - x^2)}}$. Критичната точка е е $x = 0$ като $f'(x) > 0$ за $x \in [-6, 0)$ и $f'(x) < 0$ за $x \in (0, 8]$. Следователно най-голямата стойност е $f(0) = 10$, а най-малката стойност е $\min\{f(-6), f(8)\}$. Пресмятаме, че $f(-6) = 8$ и $f(8) = 6$, откъдето намираме, че най-малката стойност е $f(8) = 6$.

Задача 5. Да се намерят най-голямата и най-малката стойност на функцията $f(x) = \frac{1}{x(1-x)}$ за $x \in [2, 3]$.

Решение. Намираме, че $f'(x) = \frac{2x-1}{x^2(1-x)^2}$. Очевидно $f'(x) = 0$ е еквивалентно на $x = \frac{1}{2}$. Тъй като $x \in [2,3]$, то в този интервал функцията е строго растяща и следователно най-малката стойност е $f(2) = -\frac{1}{2}$, а най-голямата стойност е $f(3) = -\frac{1}{6}$.

Задача 6. Да се намерят най-голямата и най-малката стойност на функцията $f(x) = x^2 + \frac{16}{x}$ за $x \in [1,3]$.

Решение. Намираме, че $f'(x) = 2x - \frac{16}{x^2} = \frac{2x^3-16}{x^2}$. Очевидно $f'(x) = 0$ е еквивалентно на $x = 2$. Тъй като $x \in [1,3]$, то функцията е намаляваща за $x \in [1,2)$ и е растяща за $x \in (2,3]$. Следователно най-малката стойност е $f(2) = 12$, най-голямата стойност е $\max\{f(1), f(3)\}$. Пресмятаме, че $f(1) = 17$ и $f(3) = \frac{43}{3}$ и намираме, че най-голямата стойност е $f(1) = 17$.

Задача 7. Да се намерят най-голямата и най-малката стойност на функцията $f(x) = \sqrt{x} - \sqrt{x^3}$ за $x \in [0,4]$.

Решение. Намираме, че

$$f'(x) = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} - \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{3\sqrt{x}}{2} = \frac{1-3x}{2\sqrt{x}}.$$

Очевидно $f'(x) = 0$ е еквивалентно на $x = \frac{1}{3}$. Тъй като $x \in [0,4]$, то функцията е растяща за $x \in \left[0, \frac{1}{3}\right)$ и е намаляваща за $x \in \left(\frac{1}{3}, 4\right]$. Следователно най-голямата стойност е $f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{2}{3\sqrt{3}}$, а най-малката стойност е $\min\{f(0), f(4)\}$. Пресмятаме, че $f(0) = 0$ и $f(4) = -6$ и намираме, най-малката стойност е $f(4) = -6$.

Задачи за самостоятелна работа:

Задача 1. Да се намерят най-голямата и най-малката стойност на функцията $f(x) = \sqrt{4-x^2}$ за $x \in [-2,2]$.

Отг. $f(0) = 2, f(-2) = f(2) = 0$.

Задача 2. Да се намерят най-голямата и най-малката стойност на функцията $f(x) = \sqrt{x-1} + \sqrt{5-x}$ за $x \in [1,5]$.

Отг.. $f(3) = 2\sqrt{2}, f(1) = f(5) = 2$.

Изпъкналост и вдлъбнатост на функция

Припомняме, че една функция $f(x)$ е изпъкнала тогава и само тогава, когато $f''(x) > 0$ и $f(x)$ е вдлъбната тогава и само тогава, когато $f''(x) < 0$. Точката x_0, в която се сменя изпъкналост с вдлъбнатост се нарича инфлексна точка.

Задача 1. Намерете интервалите на изпъкналост и вдлъбнатост, както и инфлексните точки на функцията $f(x) = x^3 - 3x$.

Решение. Пресмятаме, че $f''(x) = 6x$. Очевидно $f''(x) = 0$ е еквивалентно на $x = 0$ като $f''(x) > 0$ за $x > 0$ и $f''(x) < 0$ за $x < 0$. Така получаваме, че функцията $f(x) = x^3 - 3x$ е изпъкнала за $x > 0$ и е вдлъбната за $x < 0$, като $x = 0$ е инфлексна точка.

Задача 2. Намерете интервалите на изпъкналост и вдлъбнатост, както и инфлексните точки на функцията $f(x) = -x^4 - 2x^3 + 36x^2 + x$.

Решение. Пресмятаме, че $f''(x) = -12x^2 - 12x + 72$. Очевидно $f''(x) = 0$ е еквивалентно на $x^2 + x - 6 = 0$, откъдето получаваме, че $x_1 = -3$ и $x_2 = 2$. С метода на интервалите намираме, че $f''(x) > 0$ и функцията е изпъкнала за $x \in (-3, 2)$ и $f''(x) < 0$ за $x \in (-\infty, -3)$ и $x \in (2, +\infty)$ като функцията е вдлъбната в тези два интервала. Също така имаме две инфлексни точки: $x_1 = -3$ и $x_2 = 2$.

Задача 3. Намерете интервалите на изпъкналост и вдлъбнатост, както и инфлексните точки на функцията $f(x) = 3x^5 - 5x^4 - 60x^3 + 47x - 33$.

Решение. Пресмятаме, че $f''(x) = 60x^3 - 60x^2 - 360x$. Очевидно $f''(x) = 0$ е еквивалентно на $x\left(x^2 - x - 6\right) = 0$, откъдето получаваме, че $x_1 = 0, x_2 = -2, x_3 = 3$. С метода на интервалите намираме, че $f''(x) > 0$ за $x \in (-2, 0)$ и $x \in (3, +\infty)$ като функцията е изпъкнала в тези два интервала и $f''(x) < 0$ за $x \in (-\infty, -2)$ и $x \in (0, 3)$ като функцията е вдлъбната в тези два интервала. Също така имаме три инфлексни точки: $-2, 0$ и 3.

Задача 4. Намерете интервалите на изпъкналост и вдлъбнатост, както и инфлексните точки на функцията $f(x) = x^4 - 2x^3 - 12x^2 + 8x + 6$.

Решение. Пресмятаме, че $f''(x) = 12x^2 - 12x - 24$. Очевидно $f''(x) = 0$ е еквивалентно на $x^2 - x - 2 = 0$, откъдето получаваме, че $x_1 = -1$ и $x_2 = 2$. С метода на интервалите намираме, че $f''(x) > 0$ и функцията е изпъкнала за $(-\infty, -1)$ и $x \in (2, +\infty)$ и $f''(x) < 0$ за $x \in (-1, 2)$ като функцията е вдлъбната в този интервал. Също така имаме две инфлексни точки: $x_1 = -1$ и $x_2 = 2$.

Задача 5. Намерете интервалите на изпъкналост и вдлъбнатост, както и инфлексните точки на функцията $f(x) = \ln\left(x^2 + 1\right)$.

Решение. Пресмятаме, че $f''(x) = \frac{2-2x^2}{(x^2+1)^2}$. Очевидно $f''(x) = 0$ е еквивалентно на $x^2 - 1 = 0$, откъдето получаваме, че $x_1 = -1$ и $x_2 = 1$. С метода на интервалите намираме, че $f''(x) > 0$ и функцията е изпъкнала за $x \in (-1, 1)$ и $f''(x) < 0$ за $(-\infty, -1)$ и $x \in (1, +\infty)$ като функцията е вдлъбната в тези два интервала. Също така имаме две инфлексни точки: $x_1 = -1$ и $x_2 = 1$.

Задача 6. Намерете интервалите на изпъкналост и вдлъбнатост, както и инфлексните точки на функцията $f(x) = e^{x^2}$.

Решение. Пресмятаме, че $f''(x) = 2e^{x^2}\left(1 + 2x^2\right) > 0$. Очевидно $f''(x) > 0$ и функцията е винаги изпъкнала като няма инфлексни точки.

Задача 7. Намерете интервалите на изпъкналост и вдлъбнатост, както и инфлексните точки на функцията $f\left(x\right)=\sqrt{x^2+1}$.

Решение. Пресмятаме, че $f''\left(x\right)=\frac{1}{\left(\sqrt{\left(x^2+1\right)}\right)^3}>0$. Очевидно $f''\left(x\right)>0$ и функцията е винаги изпъкнала като няма инфлексни точки.