Lema 1.7: Sean φ, $\psi \in$ PROP y sea $S := \{ p_{i1}, p_{i2}, ..., p_{in} \}$ el conjunto de símbolos proposicionales que aparecen en la fórmula $\varphi \Leftrightarrow \psi$

Sean H_φ y H_ψ las funciones de verdad asociadas a φ y ψ, respectivamente, consideradas como operaciones n-arias

Las afirmaciones siguientes son equivalentes:

i. $\vDash \varphi \Leftrightarrow \psi$

ii. Para toda valuación ν, $\nu(\varphi) = \nu(\psi)$

iii. $H_\varphi = H_\psi$

Prueba: (i) $\Rightarrow$ (ii)

Supongamos que $\vDash \varphi \Leftrightarrow \psi$

Sea ν una valuación. Entonces,

$\nu(\varphi \Leftrightarrow \psi) = V$

Pero $\nu(\varphi \Leftrightarrow \psi) = H_{\Leftrightarrow}(\nu(\varphi), \nu(\psi))$. Luego,

$H_{\Leftrightarrow}(\nu(\varphi), \nu(\psi)) = V$

Por la definición de $H_{\Leftrightarrow}$, tenemos que

$\nu(\varphi) = \nu(\psi)$

(ii) $\Rightarrow$ (iii)

Supongamos que $\nu(\varphi) = \nu(\psi)$, para toda valuación ν

Sea $(a_1, a_2, ..., a_n) \in VAL^n$. Entonces,

$H_\varphi(a_1, a_2, ..., a_n) := \nu(\varphi) = \nu(\psi) := H_\psi(a_1, a_2, ..., a_n)$

$\therefore H_\varphi = H_\psi$

(iii) $\Rightarrow$ (i) Ejercicio

Lema 1.8: Las propiedades siguientes son válidas para todas las proposiciones φ, ψ:

i. $\vDash (\varphi \Leftrightarrow \psi) \Leftrightarrow ((\varphi \Rightarrow \psi) \wedge (\psi \Rightarrow \varphi))$

ii. $\vDash (\varphi \Rightarrow \psi) \Leftrightarrow (\neg\varphi \vee \psi)$

iii. $\vDash (\varphi \vee \psi) \Leftrightarrow (\neg\varphi \Rightarrow \psi)$

iv. $\vDash (\varphi \vee \psi) \Leftrightarrow \neg (\neg\varphi \wedge \neg\psi)$

v. $\vDash (\varphi \wedge \psi) \Leftrightarrow \neg(\neg\varphi \vee \neg\psi)$

vi. $\vDash \neg\varphi \Leftrightarrow (\varphi \Rightarrow \bot)$

vii. $\vDash \bot \Leftrightarrow (\varphi \wedge \neg\varphi)$

Teorema 1.9: Para toda función booleana *n*-aria f existe una proposición φ, que usa sólo los conectivos $\neg$, $\wedge$ y $\vee$, tal que $f = H_\varphi$

Prueba: (por inducción matemática en *n*)

Ejemplo.

a_1	a_2	a_3	$f(a_1, a_2, a_3)$	
F	F	F	V	$\leftarrow \neg p_1 \wedge \neg p_2 \wedge \neg p_3$
F	F	V	F	
F	V	F	V	$\leftarrow \neg p_1 \wedge p_2 \wedge \neg p_3$
F	V	V	V	$\leftarrow \neg p_1 \wedge p_2 \wedge p_3$
V	F	F	F	
V	F	V	F	
V	V	F	F	
V	V	V	V	$\leftarrow p_1 \wedge p_2 \wedge p_3$

$f = H_\varphi$, donde

$$\varphi = (p_1 \wedge p_2 \wedge p_3) \vee (\neg p_1 \wedge p_2 \wedge p_3) \vee (\neg p_1 \wedge p_2 \wedge \neg p_3) \vee (\neg p_1 \wedge \neg p_2 \wedge \neg p_3)$$

La importancia del Teorema 1.9 radica en que para cualquier función booleana n-aria f no aumentamos la colección de afirmaciones que podemos hacer cuando añadimos un nuevo símbolo a la sintaxis, digamos Δ, e interpretamos Δ como f

De hecho, puesto que f se puede definir en términos de $\wedge$, $\vee$ y $\neg$, toda proposición extendida φ que contenga a Δ se puede convertir en una proposición φ' en la cual Δ no aparece, de manera que para toda valuación ν, $\nu(\varphi) = \nu(\varphi')$

Consecuentemente, no se pierde generalidad cuando restringimos nuestra atención a los conectivos que ya hemos introducido

Usando el Lema 1.8 podemos obtener que también los conjuntos $\{\vee, \neg\}$, $\{\wedge, \neg\}$, $\{\Rightarrow, \neg\}$ y $\{\Rightarrow, \perp\}$ son funcionalmente completos

La elección de un conjunto de conectivos funcionalmente completo en particular esencialmente es una cuestión de conveniencia y gusto

La ventaja que se tiene al usar un conjunto pequeño es que tenemos menos casos que considerar al probar propiedades de proposiciones

La desventaja es que puede no ser tan claro el significado de una proposición cuando está escrita en términos de un conjunto funcionalmente completo muy pequeño, como sí lo es cuando ésta se expresa en términos del conjunto que hemos venido usando: $\{\wedge, \vee, \neg, \Rightarrow, \Leftrightarrow, \perp\}$

Ejemplos.

1. Usando el conjunto $\{\Rightarrow, \perp\}$, la proposición $(p_1 \wedge p_2)$ toma la forma

$$(p_1 \Rightarrow (p_2 \Rightarrow \perp)) \Rightarrow \perp$$

2. Podemos definir conectivos binarios que por sí solos cada uno forma un conjunto funcionalmente completo:

a_1	a_2	$H_\downarrow(a_1, a_2)$	$H_\mid(a_1, a_2)$
V	V	F	F
V	F	F	V
F	V	F	V
F	F	V	V

De hecho, los conjuntos $\{\downarrow\}$ y $\{\mid\}$ poseen los únicos conectivos binarios que por sí solos constituyen conjuntos funcionalmente completos

El Teorema de Reemplazo

El conectivo binario $\Leftrightarrow$ tiene una relación cercana con la igualdad

Estableceremos un resultado análogo a la propiedad familiar de sustitución de la igualdad que dice que uno puede sustituir iguales por iguales

Cuando escribimos $\varphi[p]$ queremos decir que φ es una fórmula proposicional y la presencia de la fórmula atómica p juega en φ un papel especial

Dadas las proposiciones φ, ψ y el símbolo proposicional p, la expresión $\varphi[\psi \mid p]$ denota a la fórmula que se obtiene después de sustituir cada presencia de p en φ por la proposición ψ

<u>Ejemplo.</u> Sean $\varphi := (p \Rightarrow q) \vee \neg p$ y $\psi := p \wedge r$. Entonces,

$$\varphi[\psi \mid p] = ((p \wedge r) \Rightarrow q) \vee \neg(p \wedge r)$$

Como en este ejemplo, suele suceder que la fórmula de sustitución ψ introduzca presencias frescas de p

No requerimos que p esté presente en $\varphi[p]$ y esta es una cuestión importante

$\varphi[\psi \mid p]$ es el resultado de sustituir todas las presencias de p, si es que hay alguna, por presencias de ψ

Formalmente:

Sustitución

Sean $\varphi, \varphi_1, \varphi_2, \psi \in$ PROP y sea p un símbolo proposicional. Entonces

$$\varphi[\psi \mid p] := \begin{cases} \psi & \text{si} \quad \varphi = p \\ \varphi & \text{si} \quad \varphi \in A - \{p\} \end{cases}$$

$$(\neg\varphi)[\psi \mid p] := \neg(\varphi[\psi \mid p])$$

$$(\varphi_1 \circ \varphi_2)[\psi \mid p] := \varphi_1[\psi \mid p] \circ \varphi_2[\psi \mid p], \quad \text{donde } \circ \in \{\wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow\}$$

Teorema 1.10: (Teorema de Reemplazo. Versión 1)

Sean $\psi, \tau \in$ PROP

Sean p un símbolo proposicional y ν una valuación

Si $\nu(\psi) = \nu(\tau)$, entonces $\nu(\varphi[\psi \mid p]) = \nu(\varphi[\tau \mid p])$, para toda $\varphi \in$ PROP

Prueba: (Por inducción estructural en φ)

Teorema 1.11: (Teorema de Reemplazo. Versión 2)

Si $\models \psi \Leftrightarrow \tau$, entonces $\models \varphi[\psi \mid p] \Leftrightarrow \varphi[\tau \mid p]$, para todas las $\varphi, \psi, \tau \in$ PROP

Ejemplo. Sea $\varphi := (\neg p \vee q) \wedge (t \Rightarrow \neg r)$

Como $\models (\neg p \vee q) \Leftrightarrow (p \Rightarrow q)$, tenemos que

$$\models ((\neg p \vee q) \wedge (t \Rightarrow \neg(\neg p \vee q))) \Leftrightarrow ((\neg p \vee q) \wedge (t \Rightarrow \neg(p \Rightarrow q)))$$

Hay una manera informal pero útil de describir esto:

hemos reemplazado una presencia de $\neg p \vee q$ por su equivalente $p \Rightarrow q$ en la fórmula

$$(\neg p \vee q) \wedge (t \Rightarrow \neg(\neg p \vee q)),$$

para convertirla en su equivalente

$$(\neg p \vee q) \wedge (t \Rightarrow \neg(p \Rightarrow q))$$

En términos llanos, los teoremas de reemplazo nos dicen que se pueden reemplazar partes de una fórmula por partes equivalentes

Equivalencia Lógica y Algebras Booleanas

Sabemos que para toda valuación ν y cualquier par de proposiciones φ y ψ,

$$\nu(\varphi \Leftrightarrow \psi) = V \text{ si y sólo si } \nu(\varphi) = \nu(\psi)$$

De este modo pensamos que $\Leftrightarrow$ está cercano a la igualdad

La relación binaria $\simeq$ en PROP está dada por la regla

$$\varphi \simeq \psi \text{ si y sólo si } \models \varphi \Leftrightarrow \psi, \text{ para cualesquiera } \varphi, \psi \in \text{PROP}$$

Cuando $\varphi \simeq \psi$, decimos que "φ es equivalente a ψ"

1. Por el Lema 1.7, sabemos que

   $$\varphi \simeq \psi \text{ si y sólo si } \nu(\varphi) = \nu(\psi),$$

   para toda valuación ν

   Esto implica que $\simeq$ es una relación de equivalencia en PROP

   Más aún, como lo afirma el Lema siguiente, $\simeq$ también es una congruencia

2. Usando la definición de equivalencia lógica, podemos reformular el Teorema de reemplazo como sigue:

   Si $\psi \simeq \tau$, entonces $\varphi[\psi \mid p] \simeq \varphi[\tau \mid p]$,
   para todas las $\varphi, \psi, \tau \in \text{PROP}$

   Para realizar sustituciones, esta manera de escribirlo es la que nos resulta más conveniente

Lema 1.12: Sean $\varphi, \varphi', \psi, \psi' \in \text{PROP}$

Si $\varphi \simeq \varphi'$ y $\psi \simeq \psi'$, entonces

i. $\neg\varphi \simeq \neg\varphi'$

ii. $\varphi \square \psi \simeq \varphi' \square \psi'$, donde $\square \in \{\wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow\}$

Otra formulación del Lema 1.8

Lema 1.8: Las equivalencias siguientes son válidas para todas las proposiciones φ, ψ:

i. $(\varphi \Leftrightarrow \psi) \simeq ((\varphi \Rightarrow \psi) \wedge (\psi \Rightarrow \varphi))$

ii. $(\varphi \Rightarrow \psi) \simeq (\neg\varphi \vee \psi)$

iii. $(\varphi \vee \psi) \simeq (\neg\varphi \Rightarrow \psi)$

iv. $(\varphi \vee \psi) \simeq \neg (\neg\varphi \wedge \neg\psi)$

v. $(\varphi \wedge \psi) \simeq \neg(\neg\varphi \vee \neg\psi)$

vi. $\neg\varphi \simeq (\varphi \Rightarrow \bot)$

vii. $\bot \simeq (\varphi \wedge \neg\varphi)$

Añadamos ahora el símbolo $\top$ al alfabeto de la lógica proposicional para tener el nuevo conjunto de proposiciones PROP´, e interpretemos $\top$ como V

(esto es, exijamos que para cualquier valuación ν, $\nu(\top)$:= V)

Leyes de Equivalencia

Las equivalencias más útiles son

Leyes Asociativas:

$((\varphi \vee \psi) \vee \sigma) \simeq (\varphi \vee (\psi \vee \sigma))$ $\quad$ $((\varphi \wedge \psi) \wedge \sigma) \simeq (\varphi \wedge (\psi \wedge \sigma))$

Leyes Conmutativas:

$(\varphi \vee \psi) \simeq (\psi \vee \varphi)$ $\quad$ $(\varphi \wedge \psi) \simeq (\psi \wedge \varphi)$

Leyes Distributivas:

$$(\varphi \vee (\psi \wedge \sigma)) \simeq ((\varphi \vee \psi) \wedge (\varphi \vee \sigma))$$

$$(\varphi \wedge (\psi \vee \sigma)) \simeq ((\varphi \wedge \psi) \vee (\varphi \wedge \sigma))$$

Leyes de De Morgan:

$\neg(\varphi \vee \psi) \simeq (\neg\varphi \wedge \neg\psi)$ $\quad$ $\neg(\varphi \wedge \psi) \simeq (\neg\varphi \vee \neg\psi)$

Leyes de Equivalencia

Leyes de Idempotencia:

$(\varphi \vee \varphi) \simeq \varphi$ $\quad$ $(\varphi \wedge \varphi) \simeq \varphi$

Ley de Doble Negación:

$$\neg\neg\varphi \simeq \varphi$$

Leyes de Absorción:

$\varphi \vee (\varphi \wedge \psi) \simeq \varphi$ $\quad$ $\varphi \wedge (\varphi \vee \psi) \simeq \varphi$

Leyes del Cero y el Uno:

$(\varphi \vee \bot) \simeq \varphi$ $\quad$ $(\varphi \wedge \bot) \simeq \bot$

$(\varphi \vee \top) \simeq \top$ $\quad$ $(\varphi \wedge \top) \simeq \varphi$

Ejemplo.

Usando leyes de equivalencia podemos simplificar la fórmula

$$\varphi = (p_1 \wedge p_2 \wedge p_3) \vee (\neg p_1 \wedge p_2 \wedge p_3) \vee (\neg p_1 \wedge p_2 \wedge \neg p_3) \vee (\neg p_1 \wedge \neg p_2 \wedge \neg p_3)$$

a la fórmula equivalente

$$\psi = (\neg p_1 \wedge \neg p_3) \vee (p_2 \wedge p_3)$$

Notación Uniforme de Smullyan (1968)

Las proposiciones no atómicas se pueden agrupar en dos categorías:

α-fórmulas

(o fórmulas de tipo conjuntivo) y

β-fórmulas

(o fórmulas de tipo disyuntivo)

Cada α-fórmula posee dos componentes, α_1 y α_2

Igualmente, β_1 y β_2 denotan las componentes de una β-fórmula

Conjuntivas			Disyuntivas		
α	α_1	α_2	β	β_1	β_2
$\varphi \wedge \psi$	φ	ψ	$\neg(\varphi \wedge \psi)$	$\neg\varphi$	$\neg\psi$
$\neg(\varphi \vee \psi)$	$\neg\varphi$	$\neg\psi$	$\varphi \vee \psi$	φ	ψ
$\neg(\varphi \Rightarrow \psi)$	φ	$\neg\psi$	$\varphi \Rightarrow \psi$	$\neg\varphi$	ψ
$\neg\neg\varphi$	φ	φ			

De ahora en adelante, $\Leftrightarrow$ se tratará como definido en términos de los conectivos $\Rightarrow$ y $\wedge$

Por supuesto, aunque $\Leftrightarrow$ sea un conectivo definido, seguimos teniendo a nuestra disposición resultados como los Teoremas de Reemplazo

Lema 1.13: Para cada valuación ν y para todas las α-fórmulas y β-fórmulas se tiene que

$$\nu(\alpha) = H_{\wedge}(\nu(\alpha_1), \nu(\alpha_2))$$

$$\nu(\beta) = H_{\vee}(\nu(\beta_1), \nu(\beta_2))$$

Corolario 1.14: Para cada α y β se tiene que

$$\alpha \simeq (\alpha_1 \wedge \alpha_2) \quad \text{y} \quad \beta \simeq (\beta_1 \vee \beta_2)$$

Formas Normales Conjuntivas y Disyuntivas

Si se estandarizan las fórmulas proposicionales, algunas veces es más fácil establecer si son o no son tautologías o si son o no son satisfacibles

De hecho, la mayoría de las técnicas de demostración automática de teoremas convierten fórmulas en alguna clase de forma normal como primer paso

Puesto que el comportamiento de los conectivos se puede describir en términos conjuntivos/disyuntivos, eliminaremos todos los demás conectivos binarios a favor de sólo conjunciones y disyunciones

Conjunción y Disyunción Generalizadas

Sea $\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n$ una lista de fórmulas proposicionales (quizá vacía)

Definamos dos tipos nuevos de fórmulas proposicionales de la manera siguiente:

$[\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n]$ es la **disyunción generalizada** de $\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n$

Si ν es una valuación, entonces requerimos que

$\nu([\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n]) := V$ si y sólo si ν asocia a algún miembro de la lista $\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n$ el valor V;

$\nu([\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n]) := F$, de otro modo

Conjunción y Disyunción Generalizadas

$\langle\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n\rangle$ es la **conjunción generalizada** de $\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n$

Si ν es una valuación, entonces requerimos que

$\nu(\langle\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n\rangle) := V$ si y sólo si ν asocia a cada miembro de la lista $\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n$ el valor V;

$\nu(\langle\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n\rangle) := F$, de otro modo

1. El caso de la lista vacía. Para cada valuación ν, $\nu([\,]) := F$, porque para que ν asocie V a $[\,]$, ν debe asignar V a algún miembro de $[\,]$; pero no hay miembros en la lista. Consecuentemente, $[\,] \simeq \bot$

   De modo semejante, $\langle\,\rangle \simeq \top$

2. Con las listas de uno y dos miembros la situación es más directa:

   $[\varphi] \simeq \varphi$ y $\langle\varphi\rangle \simeq \varphi$, como también

   $[\varphi, \psi] \simeq (\varphi \vee \psi)$ y $\langle\varphi, \psi\rangle \simeq (\varphi \wedge \psi)$

3. Los Teoremas de Reemplazo se extienden para incluir conjunciones y disyunciones generalizadas. Haremos uso de este hecho, pero omitiremos la demostración

Literales y Cláusulas

Una **literal** es una fórmula atómica o la negación de una fórmula atómica

Una **cláusula** es una disyunción $[\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n]$ en la cual cada miembro es una literal

Una **cláusula dual** es una conjunción $\langle\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n\rangle$ en la cual cada miembro es una literal

Formas Normales Conjuntiva y Disyuntiva

Una fórmula proposicional está en **forma normal conjuntiva** o está en **forma de cláusula** o es un **conjunto cláusula** si es una conjunción $\langle C_1, C_2, ..., C_n\rangle$ en la cual cada miembro es una cláusula

Una fórmula está en **forma normal disyuntiva** o está en **forma de cláusula dual** o es un **conjunto cláusula dual** si es una disyunción $[D_1, D_2, ..., D_n]$ en la cual cada miembro es una cláusula dual

<u>Ejemplo:</u>

$\langle[p, \neg q], [\bot, r, \neg s], [\ ]\rangle$ está en forma de cláusula

Bajo una valuación, se tratará como una conjunción, cada uno de cuyos términos es una disyunción de literales, y de modo semejante para la forma de cláusula dual

Obsérvese, por cierto, que todas las fórmulas en formas normales conjuntivas y disyuntivas están también en **forma normal negación**(esto es, la negación sólo "se está aplicando" a fórmulas atómicas)

Teorema 1.17: Forma Normal

Existen algoritmos para convertir una fórmula proposicional ordinaria a forma de cláusula (fnc) y a forma de cláusula dual (fnd)

Algoritmo para Convertir una Fórmula a Forma Normal Conjuntiva

[Sea φ una fórmula. Describiremos una sucesión de pasos en los que cada uno produce una conjunción, cuyos miembros son disyunciones. El último paso de la sucesión es una forma normal conjuntiva]

Paso 1. Empiece con $\langle[\varphi]\rangle$

Habiendo completado el paso n, produciendo

$$\langle D_1, D_2, \ldots, D_k\rangle,$$

donde los miembros D_i son disyunciones, si aún no tenemos una forma normal conjuntiva, continúe como sigue:

Paso n + 1. Seleccione un miembro, D_i, que contenga alguna fórmula que no sea una literal;

seleccione un miembro que no sea una literal, digamos N y aplique una de las reglas de reducción a la forma de cláusula siguientes, hasta que esto ya no sea posible:

Reglas de Reducción a la Forma de Cláusula

Si N es $\neg\top$, sustituya N por $\bot$

Si N es $\neg\bot$, sustituya N por $\top$

Si N es $\neg\neg\psi$, sustituya N por ψ

Si N es una β-fórmula, sustituya N por la sucesión de dos fórmulas β_1, β_2

Si N es una α-fórmula, sustituya la disyunción D_i por dos disyunciones, una como D_i pero con α sustituida por α_1 y otra como D_i pero con α sustituida por α_2

Ejemplo: La siguiente es una conversión de

$$(p \Rightarrow (q \Rightarrow r)) \Rightarrow ((p \Rightarrow q) \Rightarrow (p \Rightarrow r))$$

a forma de cláusula usando el Algoritmo de Forma de Cláusula

1. $\langle[(p \Rightarrow (q \Rightarrow r)) \Rightarrow ((p \Rightarrow q) \Rightarrow (p \Rightarrow r))]\rangle$
2. $\langle[\neg(p \Rightarrow (q \Rightarrow r)), ((p \Rightarrow q) \Rightarrow (p \Rightarrow r))]\rangle$
3. $\langle[\neg(p \Rightarrow (q \Rightarrow r)), \neg(p \Rightarrow q), (p \Rightarrow r)]\rangle$
4. $\langle[\neg(p \Rightarrow (q \Rightarrow r)), \neg(p \Rightarrow q), \neg p, r]\rangle$
5. $\langle[p, \neg(p \Rightarrow q), \neg p, r], [\neg(q \Rightarrow r), \neg(p \Rightarrow q), \neg p, r]\rangle$
6. $\langle[p, p, \neg p, r], [p, \neg q, \neg p, r], [\neg(q \Rightarrow r), \neg(p \Rightarrow q), \neg p, r]\rangle$

6. $\langle [p, p, \neg p, r], [p, \neg q, \neg p, r], [\neg(q \Rightarrow r), \neg(p \Rightarrow q), \neg p, r] \rangle$
7. $\langle [p, p, \neg p, r], [p, \neg q, \neg p, r], [q, \neg(p \Rightarrow q), \neg p, r],$
$[\neg r, \neg(p \Rightarrow q), \neg p, r] \rangle$
8. $\langle [p, p, \neg p, r], [p, \neg q, \neg p, r], [q, p, \neg p, r],$
$[q, \neg q, \neg p, r], [\neg r, \neg(p \Rightarrow q), \neg p, r] \rangle$
9. $\langle [p, p, \neg p, r], [p, \neg q, \neg p, r], [q, p, \neg p, r], [q, \neg q, \neg p, r],$
$[\neg r, p, \neg p, r], [\neg r, \neg q, \neg p, r] \rangle$

Note que hay considerable redundancia en el resultado final

Esta se puede eliminar, pero no lo haremos ahora

Reglas de Reducción a la Forma de Cláusula Dual

Si S es una disyunción, con un miembro C, el cual es una conjunción y si N es un miembro de C, entonces:

si N es $\neg\neg Z$, entonces N puede sustituirse por Z, y
de modo semejante para los casos en que N es $\neg\top$ y $\neg\bot$;

si N es una α, entonces N puede sustituirse por las dos fórmulas α_1 y α_2;

si N es una β, entonces C misma puede sustituirse por las dos conjunciones C_1 y C_2, donde C_1 es como C, excepto que β ha sido sustituida por β_1 y C_2 es como C, pero con β sustituida por β_2

Algoritmo de Forma de Cláusula Dual

[Convierte la fórmula proposicional ordinaria φ a la forma de cláusula dual (fnd)]

Sea $S = [\langle \varphi \rangle]$

Seleccione un miembro C de S que contenga una fórmula que no es una literal

Seleccione un fórmula que no es una literal N de C

Aplique la regla de reducción del conjunto cláusula dual apropiada a N produciendo una nueva S

Fin

<u>Ejemplo:</u> La siguiente es una conversión de

$$(p \Rightarrow (q \Rightarrow r)) \Rightarrow ((p \Rightarrow q) \Rightarrow (p \Rightarrow r))$$

a forma de cláusula dual usando el Algoritmo de Forma de Cláusula Dual:

1. $[\langle (p \Rightarrow (q \Rightarrow r)) \Rightarrow ((p \Rightarrow q) \Rightarrow (p \Rightarrow r)) \rangle]$
2. $[\langle \neg(p \Rightarrow (q \Rightarrow r)) \rangle, \langle (p \Rightarrow q) \Rightarrow (p \Rightarrow r) \rangle]$
3. $[\langle p, \neg(q \Rightarrow r) \rangle, \langle \neg(p \Rightarrow q) \rangle, \langle p \Rightarrow r \rangle]$
4. $[\langle p, q, \neg r \rangle, \langle p, \neg q \rangle \rangle, \langle \neg p \rangle, \langle r \rangle]$

El Problema de Satisfacibilidad y las Formas Normales FNC y FND

El problema de satisfacibilidad (**SAT**) es decidible en tiempo polinomial para fórmulas en fnd, pero el problema de determinar si una fórmula proposicional es o no es una tautología (**TAUT**) es difícil (co-NP completo)

Ocurre al revés con las fórmulas en fnc:

TAUT es fácil, pero SAT es difícil

Esto no nos ayuda, ya que la conversión entre fnc y fnd requiere de tiempo exponencial

<u>Ejemplo:</u> Consideremos la fórmula en fnc siguiente:

$$\varphi = (p_{01} \vee p_{11}) \wedge (p_{02} \vee p_{12}) \wedge \ldots \wedge (p_{0n} \vee p_{1n})$$

La fnd correspondiente es una disyunción que tiene un disyunto por cada uno de los números binarios de n dígitos, desde 000...000 hasta 111...111, donde el i-ésimo dígito representa una elección, de p_{0i} (para F) o de p_{1i} (para V):

$$(p_{01} \wedge p_{02} \wedge \ldots \wedge p_{0n-1} \wedge p_{0n}) \vee (p_{01} \wedge p_{02} \wedge \ldots \wedge p_{0n-1} \wedge p_{1n}) \vee$$

$$\vdots$$

$$(p_{11} \wedge p_{12} \wedge \ldots \wedge p_{1n-1} \wedge p_{0n}) \vee (p_{11} \wedge p_{12} \wedge \ldots \wedge p_{1n-1} \wedge p_{1n})$$

Mientras que la expresión original φ tiene tamaño proporcional a n, su fnd equivalente tiene tamaño proporcional a $n2^n$