

多人博弈“十点半”游戏的若干问题分析

易凯*

1. 游戏简介

“十点半”游戏是多人博弈游戏，其由 1 个庄家和 N 个闲家构成。基本的游戏规则以及流程如下：

Algorithm 1 “十点半”游戏规则

步骤一：庄家和 N 个闲家依次发一张牌（默认每次游戏结束重新洗牌）。所有数字牌记为实际点数，花牌记为半点（包括大小王）。

步骤二：庄家决定轮。庄家可以自由选择补牌（持牌数上限为五张），庄家若总点数为十点半，则庄家赢。若总牌数为五张，若总点数小于等于十点半，则庄家赢（若等于十点半则闲家输双倍底金）；若总点数大于十点半，则闲家赢，获得资本与底金同等数额。上述所有情况游戏结束。

步骤三：闲家 $i \in [1, N]$ 补牌，若闲家 i 点数超过十点半，则闲家 i 输；若闲家 i 点数等于十点半或者持牌数等于五且总点数小于等于十点半，则闲家 i 赢，且庄家需付给 i 底金的两倍（若持牌数等于五且总点数等于十点半，则庄家需付给 i 底金的四倍）。

步骤四：重复步骤三，直到所有闲家完成补牌。庄家与所有剩余闲家比点数，若庄家点数小于闲家 i ，则闲家 i 胜，否则，庄家胜。胜负额度均与闲家 i 底金相同。游戏结束。

2. 双人博弈基本分析

双人博弈指的是一庄一闲的基本情况，主要分析两点，庄家和闲家获得五张牌十点半的概率以及庄闲的数学期望。

*The author received his B.Eng with honor from Department of Software Engineering, Xi'an Jiaotong University in June 2019. His current research interests include cognition-based artificial intelligence, machine learning, computer vision and computational psychology. His homepage is kaiyi.me. Now, he is planning to pursue PhD studies and internships.

表 1: 多人博弈庄闲获胜期望分析（仅保留四位小数, N 表示闲家数）

N	Dealer	Player 1	Player 2	Player 3	Player 4	Player 5
1	0.2074	-0.2074	-	-	-	-
2	0.5028	-0.2510	-0.2517	-	-	-
3	0.8374	-0.2803	-0.2765	-0.2806	-	-
4	1.1851	-0.2842	-0.3016	-0.2997	-0.2996	-
5	1.5206	-0.2959	-0.3031	-0.3024	-0.3047	-0.3146

2.1. 双人博弈庄闲五张牌十点半的概率分析

由于相关问题的概率分析较为复杂，因此通过数学模拟的手段进行分析。

经过 50,000 次迭代，庄家五张牌十点半的概率为 0.012308，闲家五张牌十点半的概率为 0.010168。

2.2. 双人博弈庄闲获胜期望分析

此处做出两个假设：

- 庄家补牌或停牌决策点为 7，任一闲家决策点为 7.5；
- 每次结束一局均重新洗牌

通过演算，庄家的胜率为 0.6451，远大于 0.5。此外，庄家的数学期望为 0.2074，闲家的数学期望为 -0.2074。

3. 多人博弈庄闲获胜期望分析

多人博弈庄闲获胜期望分析如表 1，其中每组数据均经过了 50,000 次数学模拟，使用 Python3 实现。

4. 结论

- 通过表 1 不同闲家数时各个闲家的数学期望基本相同来看，闲家获胜的数学期望与发牌顺序无关；
- 通过表 1 庄闲数学期望的对比来看，庄家的数学期望始终为正，闲家的数学期望始终为负，且闲家数量越多，庄家的数学期望越高。