FreeFem++ Tutorials

Байкин А.Н.

19 февраля 2024 г.

1. Двухфазная фильтрация. Задача Балклея — Леверетта

1.1. Дифференциальная постановка

Уравнения двухфазного течения в породе включают в себя уравнения для переноса воды и нефти

$$\begin{aligned} \frac{\partial(S_w \phi \rho_w)}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho_w \boldsymbol{v}_{rw}) = -\rho_w^{st} q_w, \quad \boldsymbol{v}_{rw} = -\frac{K k_{rw}}{\mu_w} \nabla p_w, \\ \frac{\partial(S_o \phi \rho_o)}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho_o \boldsymbol{v}_{ro}) = -\rho_o^{st} q_o, \quad \boldsymbol{v}_{ro} = -\frac{K k_{ro}}{\mu_o} \nabla p_o. \end{aligned} \tag{1}$$

$$\rho_\alpha(p_\alpha) = \frac{\rho_\alpha^{st}}{B_\alpha}, \quad \alpha = w, o,$$

где ρ_α^{st}, B_α — плотности фильтрующихся жидкостей при некоторых стандартных (референсных) условиях и коэффициенты объемного расширения соответственно. Тогда сжимаемости воды и нефти примут вид

$$c_\alpha = \frac{1}{\rho_\alpha} \frac{\partial \rho_\alpha}{\partial p_\alpha} = B_\alpha \frac{\partial(1/B_\alpha)}{\partial p_\alpha}, \quad \alpha = w, o. \tag{2}$$

Введем масштабированную насыщенность

$$\overline{S}_w = \frac{S_w - S_w^{cr}}{1 - S_w^{cr} - S_o^{cr}}, \tag{3}$$

где S_w^{cr} — критическая водонасыщенность, при которой перестает течь вода, S_o^{cr} — критическая нефтенасыщенность, при которой перестает течь нефть. Тогда относительные фазовые проницаемости можно записать в следующем виде:

$$k_{rw} = \begin{cases} 0, \quad \text{при} \quad \overline{S}_w \leqslant 0, \\ k^0_{rw}(\overline{S}_w)^{n_w}, \text{при}\, 0 < \overline{S}_w < 1, \\ k^0_{rw}, \text{при} \quad \overline{S}_w \geqslant 1. \end{cases} \quad k_{ro} = \begin{cases} k^0_{ro}, \quad \text{при} \quad \overline{S}_w \leqslant 0, \\ k^0_{ro}(1-\overline{S}_w)^{n_o}, \text{при}\, 0 < \overline{S}_w < 1, \\ 0, \quad \text{если} \quad \overline{S}_w \geqslant 1. \end{cases} \tag{4}$$

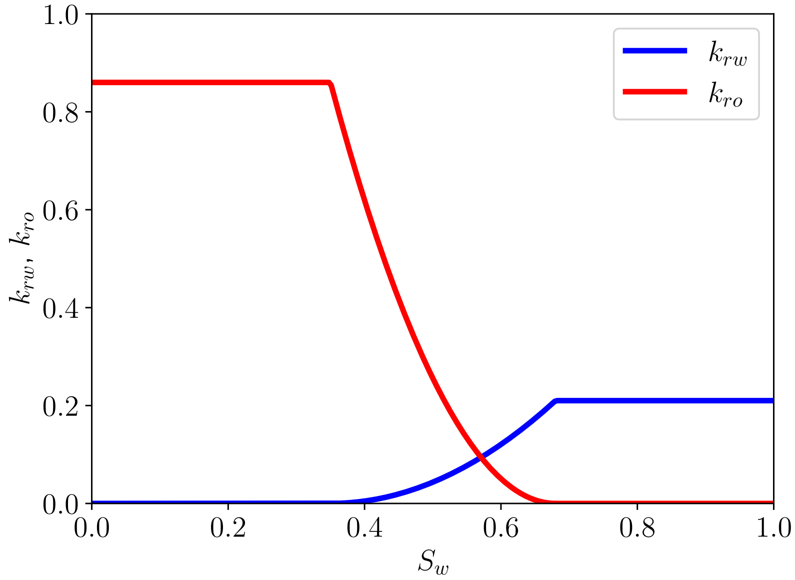

Рис. 1: Кривые ОФП по модели Кори

1.1.1. Упрощающие предположения

Будем считать, что коэффициеты объемного расширения постоянны в рассматриваемом диапазоне давлений и равны $B_\alpha = 1$, $\alpha = w, o$. Также пренебрежем влиянием капилярных сил:

$$p_c(S_w) = p_o - p_w = 0, \tag{5}$$

что влечет равенство давлений в фазах. Для насыщенностей фаз имеется соотношение

$$S_o + S_w = 1. \tag{6}$$

Предположим, что поровое пространство слабосжимаемое. Тогда

$$c_r = \frac{1}{\phi}\frac{\partial \phi}{\partial p}, \quad p = p_w = p_o, \tag{7}$$

при этом сама пористость приближенно считается постоянной $\phi = \phi_0$.

1.1.2. Формулировка в переменных p—S_w

Складывая уравнения с учетом упрощающих предположений, получим

$$c_t\phi\frac{\partial p}{\partial t} + \mathrm{div}\,\left(-\left(\frac{Kk_{rw}}{\mu_w} + \frac{Kk_{ro}}{\mu_o}\right)\nabla p\right) = q_w + q_o, \tag{8}$$

$c_t = c_r + c_w S_w + c_o(1 - S_w)$ — полная сжимаемость системы, включающая сжимаемости пор c_r воды c_w и нефти c_o. Уравнение на насыщенность воды запишется в виде

$$\phi\frac{\partial S_w}{\partial t} + S_w\phi\left(c_r + c_w\right)\frac{\partial p}{\partial t} + \mathrm{div}\,\left(-\frac{Kk_{rw}}{\mu_w}\nabla p\right) = q_w. \tag{9}$$

Заметим, что если ввести обозначения

$$\mathbf{q}_w = -K\frac{k_{rw}(S_w)}{\mu_w}\nabla p = -K\lambda_w(S_w)\nabla p, \tag{10}$$

$$\mathbf{q}_o = -K\frac{k_{ro}(S_w)}{\mu_o}\nabla p = -K\lambda_o(S_w)\nabla p, \tag{11}$$

то полный фильтрационный поток жидкости выражается в виде

$$\mathbf{q}_t = \mathbf{q}_w + \mathbf{q}_o = -K(\lambda_w(S_w) + \lambda_o(S_w))\nabla p = -K(\lambda_t(S_w))\nabla p, \tag{12}$$

а фильтрационный поток воды можно записать как

$$\mathbf{q}_w = f_w\mathbf{q}_t, \quad f_w = \frac{\lambda_w(S_w)}{\lambda_t(S_w)}, \tag{13}$$

где f_w — функция Баклея — Леверетта.

В этих терминах основные уравнения записываются в следующем виде:

$$c_t\phi\frac{\partial p}{\partial t} + \mathrm{div}\,(\mathbf{q}_t) = q_w + q_o, \quad -K\lambda_t\nabla p, \tag{14}$$

$$\phi\frac{\partial S_w}{\partial t} + S_w\phi\left(c_r + c_w\right)\frac{\partial p}{\partial t} + \mathrm{div}\,(f_w\mathbf{q}_t) = q_w. \tag{15}$$

В общем случае также необходимо решить уравнение на эволюцию пористости

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = \frac{\partial \phi}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial t} = c_r\phi\frac{\partial p}{\partial t}. \tag{16}$$

1.1.3. Задача Баклея — Леверетта

Рассмотрим классическую задачу Баклея — Леверетта о вытеснении нефти водой. Предположим, что нам задана прямоугольная область Ω (рисунок 2), внутри которой выполняются уравнения двухфазной фильтрации.

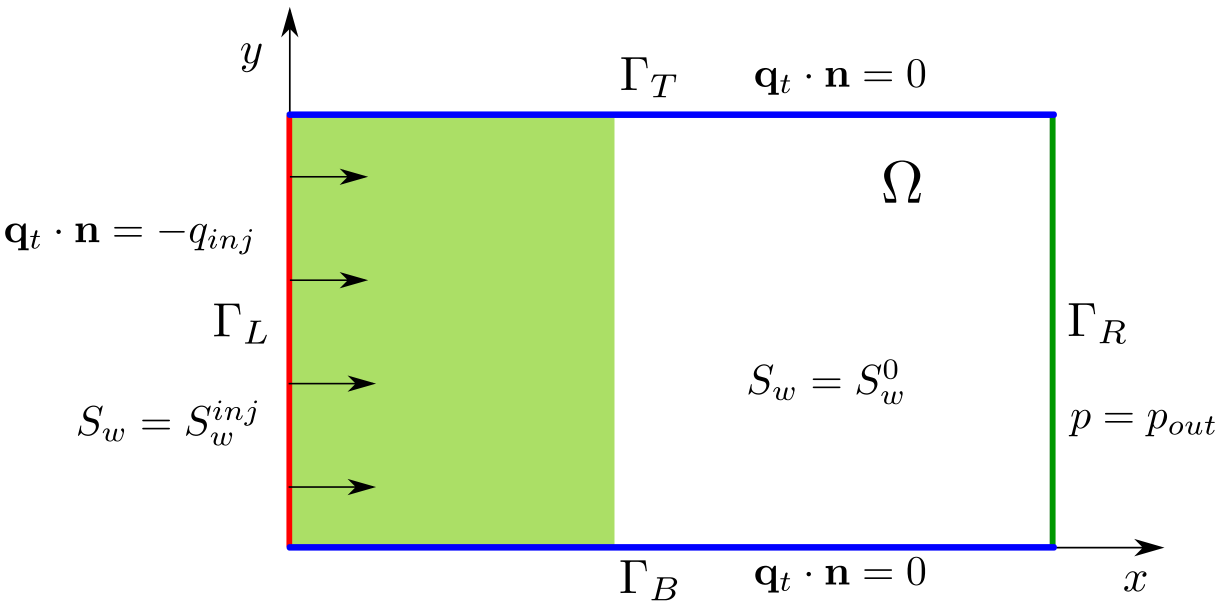

Рис. 2: Постановка задачи Баклея — Леверетта

На левой границе производится закачка воды с заданным расходом и насыщенностью:

$$\Gamma_L : \quad \mathbf{q}_t \cdot \mathbf{n} = -q_{inj}, \quad S_w = S_w^{inj}. \tag{17}$$

На выходе слева ставится условие на давление

$$\Gamma_R : \quad p = p_{out}. \tag{18}$$

На верхней и нижней границах ставится условие непротекания для потока жидкости как

$$\Gamma_T, \Gamma_B : \quad \mathbf{q}_t \cdot \mathbf{n} = 0, \tag{19}$$

что превращает задачу в фактически одномерную.

Замечание. Уравнение на насыщенность гиперболического типа, поэтому граничное условие ставится только на той границе, где характеристики уравнения входят в область.

В качестве начальных данных задаются следующие величины:

$$\Omega : \quad S_w\big|_{t=0} = S_w^0\,, \quad p\,|_{t=0} = p_0 \quad \phi\,|_{t=0} = \phi_0\,. \tag{20}$$

1.2. Слабая постановка

1.2.1. Уравнение фильтрации

В качестве тестовой функции для давления выберем ξ, при этом

$$\xi\,|_{\Gamma_L} = 0. \tag{21}$$

Тогда

$$\begin{aligned} 0 = \int\limits_{\Omega} c_t\phi\frac{\partial p}{\partial t}\,\xi\,dxdy + \int\limits_{\Omega} \operatorname{div}\mathbf{q}_t\,\xi\,dxdy = \\ \int\limits_{\Omega} c_t\phi\frac{\partial p}{\partial t}\,\xi\,dxdy + \int\limits_{\Omega} K\lambda_t\nabla p\cdot\nabla\xi\,dxdy \\ + \int\limits_{\Gamma_L}(\mathbf{q}_t\cdot\mathbf{n})\xi\,ds + \int\limits_{\Gamma_T\cup\Gamma_B}(\mathbf{q}_t\cdot\mathbf{n})\xi\,ds + \int\limits_{\Gamma_R}(\mathbf{q}_t\cdot\mathbf{n})\xi\,ds = \\ \int\limits_{\Omega} c_t\phi\frac{\partial p}{\partial t}\,\xi\,dxdy + \int\limits_{\Omega} K\lambda_t\nabla p\cdot\nabla\xi\,dxdy - \int\limits_{\Gamma_L} q_{inj}\xi\,ds \end{aligned} \tag{22}$$

1.2.2. Уравнение переноса водонасыщенности

Если применить стандартный прием метода конечных элементов к исходному уравнению на водонасыщенность, то известно, что получится неустойчивая разностная схема. Поэтому к исходному уравнению на водонасыщенность добавим член с искусственной диффузией. С физической точки зрения данное слагаемое появляется из-за присуствия капилярных сил. В итоге получим

$$\phi\frac{\partial S_w}{\partial t} + S_w\phi\left(c_r + c_w\right)\frac{\partial p}{\partial t} + \operatorname{div}\left(f_w\mathbf{q}_t - \varepsilon\nabla S_w\right) = q_w. \tag{23}$$

На практике параметр ε может иметь зависимость от размера сетки и/или от величины градиентов решения, зануляться в окрестности границ.

На границах без условия Дирихле нам потребуется задать граничное условие отсустствия диффизионного потока в виде

$$\Gamma_T, \Gamma_B, \Gamma_R : \quad \nabla S_w\cdot\mathbf{n} = 0. \tag{24}$$

Для перехода к слабой постановке в качестве тестовой функции выберем ψ для водонасыщенности, при этом

$$\psi\,|_{\Gamma_L} = 0. \tag{25}$$

Тогда

$$
\begin{aligned}
0 = \int\limits_{\Omega} \left(\phi \frac{\partial S_w}{\partial t} + S_w \phi \left(c_r + c_w\right) \frac{\partial p}{\partial t}\right) \psi + \operatorname{div}\,\left(f_w \mathbf{q}_t - \varepsilon \nabla S_w\right)\,\psi\, dxdy = \\
\left(\phi \frac{\partial S_w}{\partial t} + S_w \phi \left(c_r + c_w\right) \frac{\partial p}{\partial t}\right) \psi\, dxdy - \int\limits_{\Omega} f_w \mathbf{q}_t \cdot \nabla \psi + \int\limits_{\Omega} \varepsilon \nabla S_w \cdot \nabla \psi\, dxdy \\
+ \int\limits_{\Gamma_L} \left(f_w \mathbf{q}_t - \varepsilon \nabla S_w\right) \cdot \mathbf{n}\,\psi\, ds + \int\limits_{\Gamma_T \cup \Gamma_B} \left(f_w \mathbf{q}_t - \varepsilon \nabla S_w\right) \cdot \mathbf{n}\,\psi\, ds \\
+ \int\limits_{\Gamma_R} f_w \mathbf{q}_t \cdot \mathbf{n}\,\psi\, ds - \int\limits_{\Gamma_R} \varepsilon \nabla S_w \cdot \mathbf{n}\,\psi\, ds = \\
\int\limits_{\Omega} \left(\phi \frac{\partial S_w}{\partial t} + S_w \phi \left(c_r + c_w\right) \frac{\partial p}{\partial t}\right) \psi - f_w \mathbf{q}_t \cdot \nabla \psi + \varepsilon \nabla S_w \cdot \nabla \psi\, dxdy \\
+ \int\limits_{\Gamma_R} f_w \mathbf{q}_t \cdot \mathbf{n}\,\psi\, ds
\end{aligned} \tag{26}
$$

1.2.3. Дискретизация по времени и нелинейности

Пусть f^n — значение функции на шаге по времени n. $f^{n+1,k}$ — значения функции на $(n+1)$ шаге по времени на k-й итерации. Тогда можно ввести следующую дискретизацию по времени и нелинейности:

$$\frac{\partial p}{\partial t} \approx \frac{p^{n+1,k+1} - p^n}{\Delta t}, \quad \frac{\partial S_w}{\partial t} \approx \frac{S_w^{n+1,k+1} - S_w^n}{\Delta t}, \quad \frac{\partial \phi}{\partial t} \approx \frac{\phi^{n+1,k+1} - \phi^n}{\Delta t}, \tag{27}$$

$$f_w(S_w^{n+1,k+1}) = f_w(S_w^{n+1,k}) + \left.\frac{\partial f_w}{\partial S_w}\right|_{S_w^{n+1,k}} \left(S_w^{n+1,k+1} - S_w^{n+1,k}\right). \tag{28}$$

В данных обозначениях можно линеаризовать уравнения на давление в виде

$$\int\limits_{\Omega} c_t(S_w^{n+1,k})\phi^{n+1,k}p^{n+1,k+1}\,\xi\,dxdy + \Delta t\int\limits_{\Omega} K\lambda_t(S_w^{n+1,k})\nabla p^{n+1,k+1}\cdot\nabla\xi\,dxdy$$
$$-\int\limits_{\Omega} c_t(S_w^{n+1,k})\phi^{n+1,k}p^n\,\xi\,dxdy - \Delta t\int\limits_{\Gamma_L} q_{inj}\xi\,ds = 0 \quad (29)$$

После этого расчитывается

$$\mathbf{q}_t^{n+1,k+1} = -K\lambda_t(S_w^{n+1,k})\nabla p^{n+1,k+1}. \quad (30)$$

После этого решается уравнения на водонасыщенность

$$\int\limits_{\Omega}\left(\phi^{n+1,k}S_w^{n+1,k+1} + S_w^{n+1,k+1}\phi^{n+1,k}\,(c_r + c_w)\,(p^{n+1,k+1} - p^n)\right)\,\psi\,dxdy$$
$$+\,\Delta t\int\limits_{\Omega} -f_w(S_w^{n+1,k+1})\mathbf{q}_t^{n+1,k+1}\cdot\nabla\psi + \varepsilon\nabla S_w^{n+1,k+1}\cdot\nabla\psi\,dxdy$$
$$-\int\limits_{\Omega}\phi^{n+1,k}S_w^n\,\psi\,dxdy + \Delta t\int\limits_{\Gamma_R} f_w(S_w^{n+1,k+1})\mathbf{q}_t^{n+1,k+1}\cdot\mathbf{n}\,\psi\,ds = 0. \quad (31)$$

Пористость обновляется из следующего соотношения:

$$\phi^{n+1,k+1} = \phi^n + c_r\phi^{n+1,k}(p^{n+1,k+1} - p^n). \quad (32)$$

1.3. Точное решение

Точное решение задачи Баклея — Леверетта в несжимаемом случае может быть найдено методом характеристик как (см. [1] стр. 128, и [2] стр. 189)

$$\begin{aligned} &f'_w(S_w) = \frac{x}{t}\frac{\phi}{q_{inj}}, \quad \text{если } S_w > S_f \text{ или } x < x_f,\\ &S_w = S_w^0, \quad \text{иначе} \end{aligned} \quad (33)$$

где x_f — положение фронта в момент t , S_f — водонасыщенность на фронте. Решение представляет из себя волну разрежения, которая примыкает к ударной волне.

Водонасыщенность на фронте S_f разрыва находится из условия равенства скорости характеристики и скорости ударной волны (Рис. 3, волна разрежения «догоняет» ударную волну) как

$$u_{ch} = \frac{q_{inj}}{\phi}\frac{\partial f_w}{\partial S_w}(S_f) = \frac{q_{inj}}{\phi}\frac{(f_w(S_f) - f(S_w^0))}{(S_f - S_w^0)} = u_{shock} \tag{34}$$

или

$$(S_f - S_w^0) \cdot \frac{\partial f_w}{\partial S_w}(S_f) = f_w(S_f) - f(S_w^0). \tag{35}$$

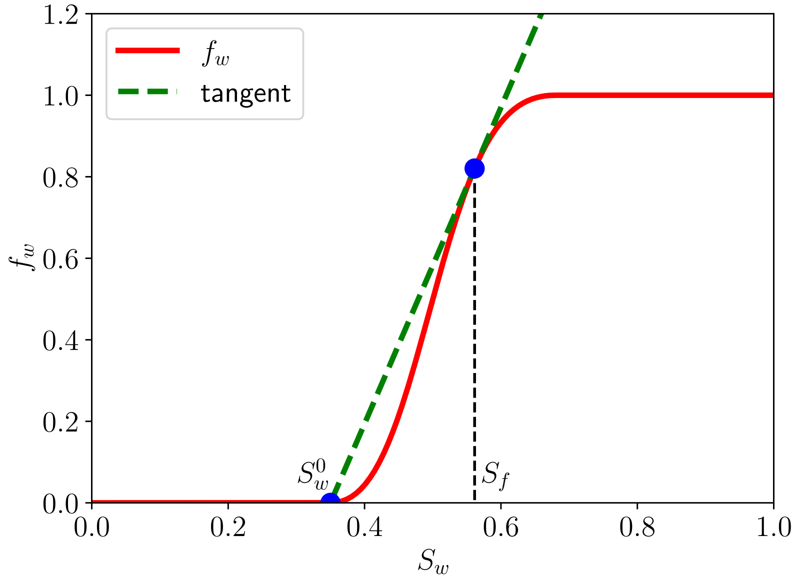

Рис. 3: Точка соприкосновения кривой $f_w(S_w)$ и касательной проведенной из значения водоносыщенности перед фронтом (S_w^0) определяет водонасыщенность на фронте S_f

Положение фронта в момент времени t задается соотношением $x_f = q_{inj} \cdot f'(S_f)t/\phi$. Момент времени прорыва фронта в правую точку (когда фронт дойдет до точки $x = L$) определяется соотношением $t_{bf} = \phi L/(q_{inj} f'(S_f))$.

В частном случае, когда $S_w^0 = S_w^{cr}$ и $n_w = n_o = 2$, тогда $\overline{S}_w^0 = 0$, $f(\overline{S}_w^0) = 0$ и значение насыщенности на фронте находится аналитически в виде

$$\overline{S}_f = \sqrt{\frac{k_{ro}^0/\mu_o}{k_{rw}^0/\mu_w + k_{ro}^0/\mu_o}} = \frac{1}{\sqrt{1 + k_{rw}^0\mu_o/(\mu_w k_{ro}^0)}}. \tag{36}$$

Список литературы

[1] Г. И. Баренблатт, В. М. Ентов, and В. М. Рыжик. *Движение жидкостей и газов в природных пластах.* Недра, Москва, 1984.

[2] Р. Коллинз. *Течения жидкостей через пористые материалы.* Мир, Москва, 1964.