FreeFem++ Tutorials

Байкин А.Н.

6 февраля 2024 г.

1. Задача Кирша

1.1. Дифференциальная постановка

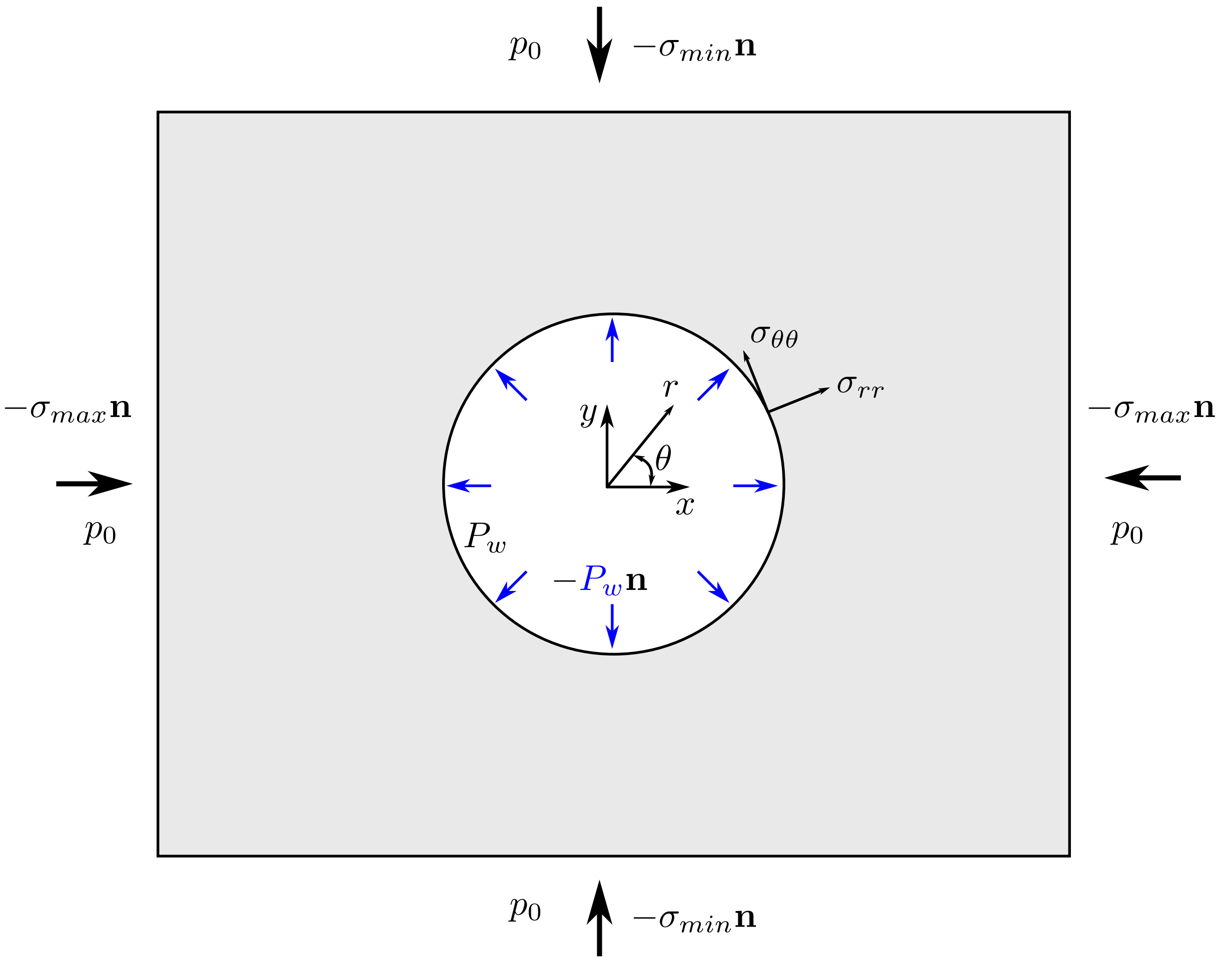

Рис. 1: Задача об инициации трещины из скважины в условиях плоской деформации

Рассмотрим задачу об определении НДС вблизи открытого ствола вертикальной скважины, стенки которой нагружены давлением жидкости (Рис. 1) в условиях плоской деформации.

Определяющие уравнения пороупругости в области Ω записываются в виде

$$\operatorname{div}\boldsymbol{\sigma} = 0, \quad \boldsymbol{\sigma} = \lambda \operatorname{div}\mathbf{u}\,\mathrm{I} + 2G\,\mathcal{E}(\mathbf{u}) - \alpha p\,\mathrm{I}, \tag{1}$$

$$S_\varepsilon \frac{\partial p}{\partial t} = \operatorname{div}\Big(\frac{k}{\mu}\nabla p - \alpha\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}\Big), \tag{2}$$

где тензор малых деформаций задается выражением

$$\mathcal{E}(\mathbf{u})_{ij} = \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\Big), \quad i,j = 1,2,3, \tag{3}$$

$\mathbf{u}$ — вектор перемещений, λ, G — коэффициенты Ламе, α — коэффициент Био, S_ε — упругоемкость, k — проницаемость, μ — вязкость.

На стенку скажины Γ_w механически действует давление жидкости в стволе скважины и задается соотвествующее гидравлическое условие для фильтрации в виде

$$\Gamma_w: \quad \boldsymbol{\sigma}\langle\mathbf{n}\rangle = -P_w\mathbf{n}, \quad p = P_w. \tag{4}$$

$$P_w = \begin{cases} p_0, & t \leqslant 0, \\ p_w, & t > 0. \end{cases} \tag{5}$$

На верхней и нижней границах задается полное минимальное сжимающее напряжение и поровое давление вдали от скважины как

$$\Gamma_T, \Gamma_B: \quad \boldsymbol{\sigma}\langle\mathbf{n}\rangle = -\sigma_{min}\mathbf{n}, \quad p = p_0, \quad (\boldsymbol{\sigma}\langle\mathbf{n}\rangle)_i = \sigma_{ij}n_j, \quad i = 1,2. \tag{6}$$

Аналогично на правой и левой границах задаются максимальные сжимающие напряжения и поровое давление в виде

$$\Gamma_R, \Gamma_L: \quad \boldsymbol{\sigma}\langle\mathbf{n}\rangle = -\sigma_{max}\mathbf{n}, \quad p = p_0. \tag{7}$$

В начальный момент времени при $t = 0$ считаем, что во всей области $p = p_0$. В скважине после бурения находится жидкость с давлением равным пластовому $p_w = p_0$. Таким образом, начальные данные удовлетворяют стационарной версии уравнений (1) с граничными условиями (4), (6), (7).

1.2. Слабая постановка

1.2.1. Уравнение равновесия

В качестве тестовой функции выберем $\boldsymbol{\psi} = (\psi_1, \psi_2)^T$ для перемещений. Тогда использую формулу

$$\int\limits_{\Omega} -\operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u})) \cdot \boldsymbol{\psi}\, dxdy = \int\limits_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) : \mathcal{E}(\boldsymbol{\psi})\, dxdy - \int\limits_{\partial\Omega} \boldsymbol{\psi} \cdot \boldsymbol{\sigma}\langle \mathbf{n} \rangle\, ds, \tag{8}$$

получим с учетом граничных условий

$$\begin{gathered}\int\limits_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) : \mathcal{E}(\boldsymbol{\psi})\, dxdy - \int\limits_{\Gamma_T} -\sigma_{min} \times 1 \times \psi_2\, ds - \int\limits_{\Gamma_B} -\sigma_{min} \times (-1) \times \psi_2\, ds \\ - \int\limits_{\Gamma_R} -\sigma_{max} \times 1 \times \psi_1\, ds - \int\limits_{\Gamma_L} -\sigma_{max} \times (-1) \times \psi_1\, ds - \int\limits_{\Gamma_f} -P_w \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\psi}\, ds = 0.\end{gathered} \tag{9}$$

Используя формулу

$$\mathrm{I} : \mathcal{E}(\boldsymbol{\psi}) = \operatorname{div} \boldsymbol{\psi}, \quad \text{где I — единичный тензор}, \tag{10}$$

получим

$$\begin{gathered}\int\limits_{\Omega} \lambda \operatorname{div} \mathbf{u} \operatorname{div} \boldsymbol{\psi} + 2G\mathcal{E}(\mathbf{u}) : \mathcal{E}(\boldsymbol{\psi}) - \alpha p \operatorname{div} \boldsymbol{\psi}\, dxdy \\ + \int\limits_{\Gamma_T} \sigma_{min}\psi_2\, ds - \int\limits_{\Gamma_B} \sigma_{min}\psi_2\, ds + \int\limits_{\Gamma_R} \sigma_{max}\psi_1\, ds - \int\limits_{\Gamma_L} \sigma_{max}\psi_1\, ds \\ + \int\limits_{\Gamma_f} P_w\, \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\psi}\, ds = 0.\end{gathered} \tag{11}$$

1.2.2. Уравнение фильтрации

В качестве тестовой функции для давления выберем φ, при этом

$$\varphi\,|_{\partial\Omega} = 0. \tag{12}$$

Тогда

$$0 = \int\limits_{\Omega} \Big(S_\varepsilon \frac{\partial p}{\partial t} + \alpha \frac{\partial(\operatorname{div}\mathbf{u})}{\partial t} \Big) \varphi \, dxdy - \int\limits_{\Omega} \operatorname{div}\Big(\frac{k}{\mu} \nabla p \Big) \varphi \, dxdy =$$
$$\int\limits_{\Omega} \Big(S_\varepsilon \frac{\partial p}{\partial t} + \alpha \frac{\partial(\operatorname{div}\mathbf{u})}{\partial t} \Big) \varphi \, dxdy - \int\limits_{\partial\Omega} \frac{k}{\mu} \frac{\partial p}{\partial \mathbf{n}} \varphi \, ds + \int\limits_{\Omega} \frac{k}{\mu} \nabla p \cdot \nabla \varphi \, dxdy =$$
$$\int\limits_{\Omega} \Big(S_\varepsilon \frac{\partial p}{\partial t} + \alpha \frac{\partial(\operatorname{div}\mathbf{u})}{\partial t} \Big) \varphi \, dxdy + \int\limits_{\Omega} \frac{k}{\mu} \nabla p \cdot \nabla \varphi \, dxdy. \quad (13)$$

Введем аппроксимацию по времени

$$\frac{\partial p}{\partial t} \approx \frac{p^{n+1} - p^n}{\Delta t}, \quad \frac{\partial(\operatorname{div}\mathbf{u})}{\partial t} \approx \frac{\operatorname{div}\mathbf{u}^{n+1} - \operatorname{div}\mathbf{u}^n}{\Delta t}. \quad (14)$$

Тогда

$$\int\limits_{\Omega} S_\varepsilon p^{n+1} \varphi + \alpha \operatorname{div}\mathbf{u}^{n+1} \varphi + \Delta t \, \frac{k}{\mu} \nabla p^{n+1} \cdot \nabla \varphi \, dxdy$$
$$- \int\limits_{\Omega} S_\varepsilon p^n \varphi + \alpha \operatorname{div}\mathbf{u}^n \varphi \, dxdy = 0. \quad (15)$$

1.2.3. Начальное состояние

Чтобы получить слабую постановку для нахождения начального решения, необходимо взять слабую постановку для уравнения равновесия (11) с $P_w = p_0$ и слабую постановку для уравнения фильтрации (15) без слагаемых при p и $\operatorname{div}\mathbf{u}$ с заданным начальным пластовым давлением $p = p_0$ на всей границе $\partial\Omega$.

1.3. Задача инициации трещины гидроразрыва пласта

Используя полученное численное решение, можно оценить давление инициации трещины ГРП в открытов стволе вертикальной скважины. Для этого необходимо посчитать компоненту $\sigma_{\theta\theta}$ тензора полных напряжений и найти точку на скважине, где она принимает в минимальное значение. Для конкретно данной конфигурации эта точка имеет координаты $(r_w, 0)$, где r_w — радиус скважины. Таким образом, в этой точке

$$\sigma_{\theta\theta}\Big|_{(r_w,0)} = \sigma_{yy}\Big|_{(r_w,0)} \tag{16}$$

Известно, что разрушение породы происходит, если эффективные растягивающие напряжения

$$\sigma'_{\theta\theta} = \sigma_{\theta\theta} + P_w > \sigma_T, \tag{17}$$

где σ_T — предел прочности на разрыв.

1.4. Точное решение

Точное решение для данной задачи можно найти в книге [1] в Главе 7.

Список литературы

[1] A. H.-D. Cheng. *Poroelasticity.* Springer, Switzerland, 2016.