

Совместный учет роста трещины авто-ГРП в длину и в высоту

Иващенко Д. В., Цветкова Д. А.

В данной работе рассматривается модель трещины PKN. Необходимо, имея заданный постоянный расход закачиваемой в пласт жидкости, оценить возможность прорыва трещиной тонкой глиняной перемычки, с учетом возможности распространения трещины в длину. Задача разделяется на несколько подзадач, решаемых в разных расчетных областях:

- 1) Задача однофазной фильтрации жидкости в пласт. Давление на границе трещины определяется из уравнения теории смазки с заданным расходом жидкости.
- 2) Задача о нахождении обратных напряжений, вызванных неоднородным распределением давления в пласте.
- 3) Задача о раскрытии трещины. Посчитанные в предыдущих двух задачах давление на стенку трещины и обратные напряжения используются при решении задачи теории упругости о прогибе границы области.

Схематично расчетные области для вышеприведенных задач изображены на рисунке:

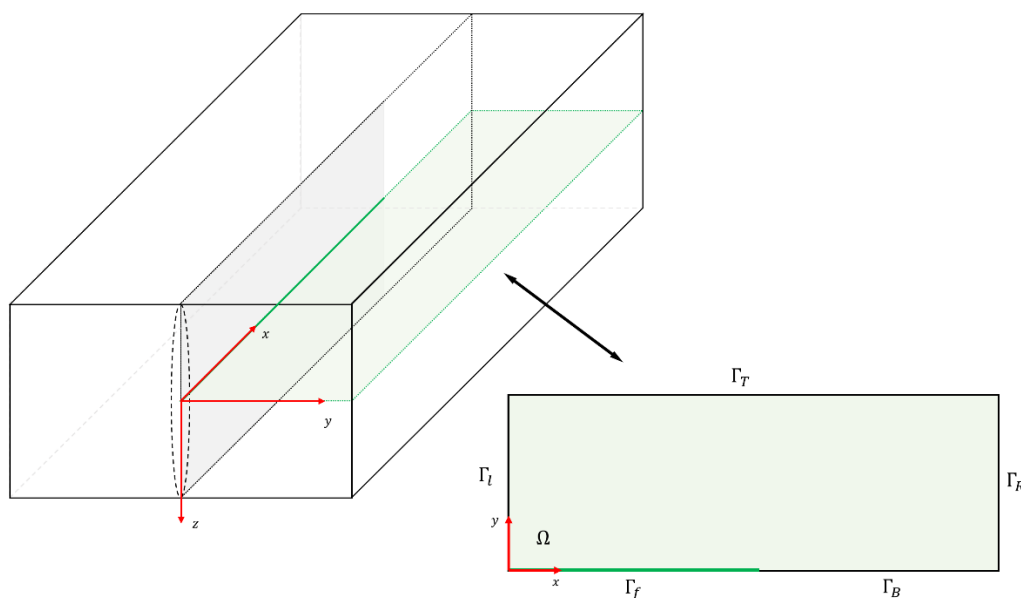


Рис.1 Трещина PKN и расчетная область для задач 1 и 2.

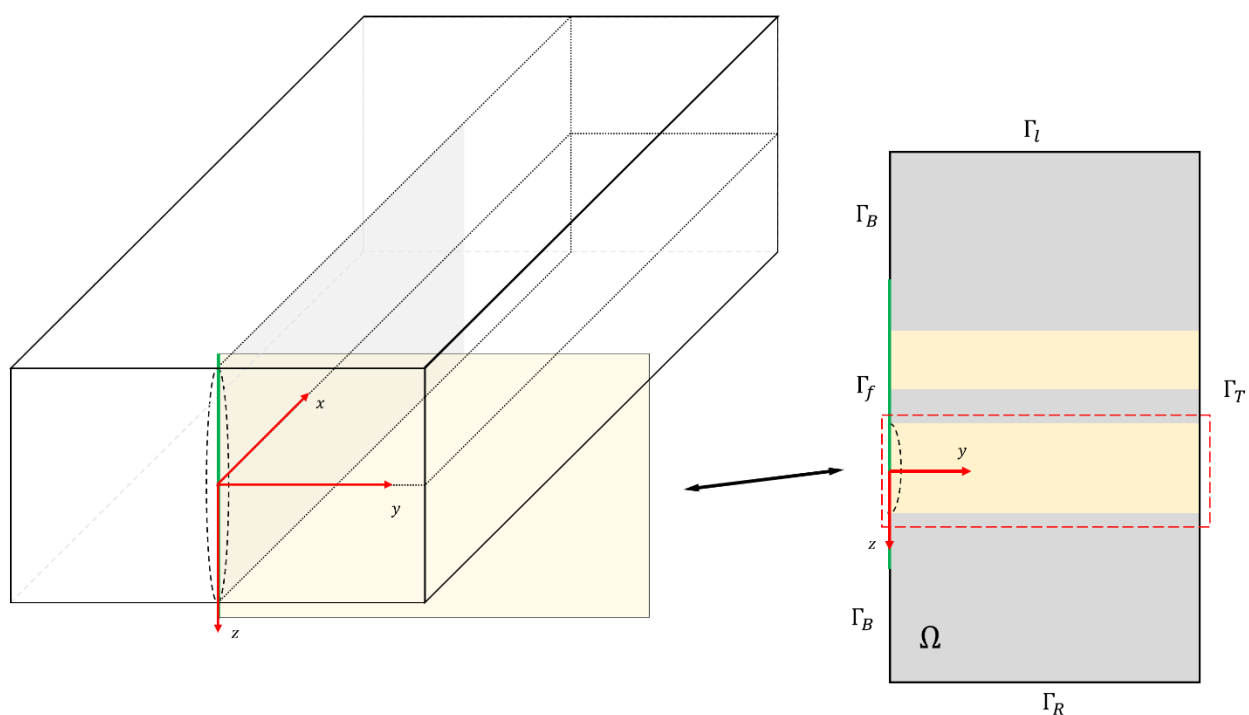


Рис.2 Трещина PKN и расчетная область для задачи 3.

Для задач 1 и 2 используется расчетная область с рисунка 1. Для задачи 3 с рисунка 2.

I. Нахождение давлений в трещине, с использованием уравнения фильтрации и уравнения теории смазки.

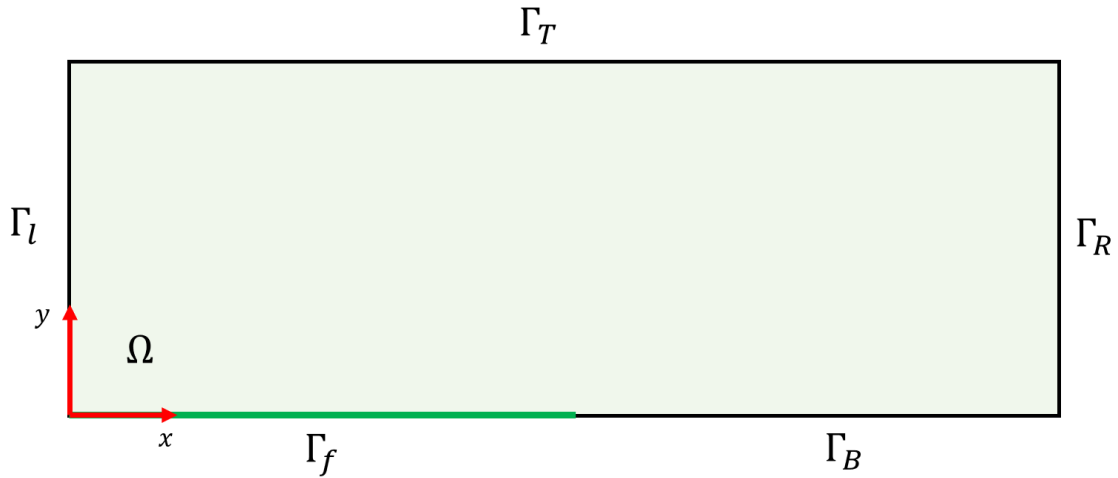


Рис.3 Расчетная область

Уравнение фильтрации:

$$S_\varepsilon \frac{\partial p}{\partial t} = \frac{k_r}{\eta_r} \Delta p, \quad S_\varepsilon = \frac{(\alpha - \varphi_0)(1 - \alpha)}{\lambda + \frac{2G}{3}} \quad (1.1)$$

где k_r – проницаемость порового пространства, η_r – вязкость пластовой жидкости, S_ε – упругоємкость вмещающей породы, λ и G – параметры Ламе, φ_0 – пористость, α – коэффициент Био.

Уравнение теории смазки:

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{w^3}{3\eta_f} \frac{\partial p_f}{\partial x} \right) + \frac{k_r}{\eta_r} \frac{\partial p}{\partial y} \Big|_{y=0} \quad (1.2)$$

w – полураскрытие, η_f – вязкость закачиваемой жидкости, p_f – давление в трещине.

Граничные условия:

$$\Gamma_f: \begin{cases} \frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{w^3}{3\eta_f} \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \frac{k_r}{\eta_r} \frac{\partial p}{\partial y} \Big|_{y=0} \\ - \frac{w^3}{3\eta_f} \frac{\partial p}{\partial x} \Big|_{x=0^+, y=0} = Q(t) \end{cases}$$

$$\Gamma_{R \cup T}: \quad p|_{\Gamma_{R \cup T}} = 0 \quad (1.3)$$

$$\begin{aligned}\Gamma_L: \quad \frac{\partial p}{\partial x} \Big|_{\Gamma_L} &= 0 \\ \Gamma_B: \quad \frac{\partial p}{\partial y} \Big|_{\Gamma_B} &= 0\end{aligned}$$

Вывод слабой формулировки. В качестве тестовой функции возьмем $\varphi(x, y)$ такую, что:

$$\varphi|_{\Gamma_{RUT}} = 0 \quad (1.4)$$

Умножим уравнение (1.1) на тестовую функцию и проинтегрируем по всей области:

$$\iint_{\Omega} S_{\varepsilon} \frac{\partial p}{\partial t} \varphi \, d\Omega = \iint_{\Omega} \frac{k_r}{\eta_r} \varphi \Delta p \, d\Omega \quad (1.5)$$

Запишем иначе правую часть уравнения (1.5). С учетом формулы Остроградского-Гаусса и приведенного ниже соотношения:

$$\varphi \Delta p = \nabla \cdot (\varphi \nabla p) - \nabla p \cdot \nabla \varphi \quad (1.6)$$

Получим:

$$\begin{aligned}\iint_{\Omega} \frac{k_r}{\eta_r} \varphi \Delta p \, d\Omega &= \iint_{\Omega} \frac{k_r}{\eta_r} \nabla \cdot (\varphi \nabla p) \, d\Omega - \iint_{\Omega} \frac{k_r}{\eta_r} \nabla p \cdot \nabla \varphi \, d\Omega = \\ &= \oint_{\Gamma} \frac{k_r}{\eta_r} n \cdot (\varphi \nabla p) \, dS - \iint_{\Omega} \frac{k_r}{\eta_r} \nabla p \cdot \nabla \varphi \, d\Omega\end{aligned} \quad (1.7)$$

Рассмотрим отдельно контурный интеграл. В силу аддитивности интеграла:

$$\begin{aligned}\oint_{\Gamma} \frac{k_r}{\eta_r} n \cdot (\varphi \nabla p) \, dS &= \\ &= \oint_{\Gamma_{RUT}} \frac{k_r}{\eta_r} \frac{\partial p}{\partial n} \varphi \, dS + \oint_{\Gamma_S} \frac{k_r}{\eta_r} \frac{\partial p}{\partial n} \varphi \, dS + \oint_{\Gamma_f} \frac{k_r}{\eta_r} \frac{\partial p}{\partial n} \varphi \, dS \\ &+ \int_{\Gamma_L} \frac{k_r}{\eta_r} \frac{\partial p}{\partial n} \varphi \, dS = - \oint_{\Gamma_f} \frac{k_r}{\eta_r} \frac{\partial p}{\partial y} \varphi \, dS\end{aligned} \quad (1.8)$$

Интеграл по Γ_{RUT} равен нулю в силу выбора тестовой функции. Интегралы по Γ_L и Γ_S равны нулю в силу граничных условий.

Подынтегральное выражение заменим с учетом Г.У. (1.3):

$$\left. \frac{k_r}{\eta_r} \frac{\partial p}{\partial y} \right|_{\Gamma_f} = \frac{\partial w}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{w^3}{3\eta_f} \frac{\partial p}{\partial x} \right) \quad (1.9)$$

Получаем:

$$\oint_{\Gamma} \frac{k_r}{\eta_r} n \cdot (\varphi \nabla p) dS = - \oint_{\Gamma_f} \frac{\partial w}{\partial t} \varphi dS + \oint_{\Gamma_f} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{w^3}{3\eta_f} \frac{\partial p}{\partial x} \right) \varphi dS \quad (1.10)$$

Рассмотрим интеграл по границе трещины:

$$\begin{aligned} \oint_{\Gamma_f} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{w^3}{3\eta_f} \frac{\partial p}{\partial x} \right) \varphi dS &= \int_0^l \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{w^3}{3\eta_f} \frac{\partial p}{\partial x} \right) \varphi dx = \int_{0^+}^l \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{w^3}{3\eta_f} \frac{\partial p}{\partial x} \right) \varphi dx \\ &= \underbrace{\varphi \frac{w^3}{3\eta_f} \frac{\partial p}{\partial x} \Big|_{x=l, y=0}}_0 - \underbrace{\varphi \frac{w^3}{3\eta_f} \frac{\partial p}{\partial x} \Big|_{x=0^+, y=0}}_{Q(t)\varphi(0,0)} - \oint_{\Gamma_f} \frac{w^3}{3\eta_f} \frac{\partial p}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial x} dS \end{aligned} \quad (1.11)$$

Получаем:

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega} S_\varepsilon \frac{\partial p}{\partial t} \varphi d\Omega + \iint_{\Omega} \frac{k_r}{\eta_r} \nabla p \cdot \nabla \varphi d\Omega + \oint_{\Gamma_f} \frac{\partial w}{\partial t} \varphi dS + \oint_{\Gamma_f} \frac{w^3}{3\eta_f} \frac{\partial p}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial x} dS \\ - Q(t)\varphi(0,0) = 0 \end{aligned} \quad (1.12)$$

Введем аппроксимацию по времени:

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \frac{p^{n+1} - p^n}{\Delta t} \quad (1.13)$$

Тогда:

$$\begin{aligned}
& \iint_{\Omega} S_{\varepsilon} p^{n+1} \varphi \, d\Omega + \iint_{\Omega} \Delta t \frac{k_r}{\eta_r} \nabla p^{n+1} \cdot \nabla \varphi \, d\Omega + \oint_{\Gamma_f} \Delta t \frac{\partial w}{\partial t} \varphi \, dS \\
& + \oint_{\Gamma_f} \Delta t \frac{w^3}{3\eta_f} \frac{\partial p^{n+1}}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \, dS \\
& = \Delta t \, Q(t) \varphi(0,0) + \iint_{\Omega} S_{\varepsilon} p^n \varphi \, d\Omega
\end{aligned} \tag{1.14}$$

Сделаем некоторые упрощающие предположения:

- 1) Пренебрежем изменением раскрытия со временем $\frac{\partial w}{\partial t} = 0$,
- 2) В оставшемся интеграле по Γ_f заменим $\frac{w^3}{3}$ на $k_f = 10^5 k_r$

Тогда получим:

$$\begin{aligned}
& \iint_{\Omega} S_{\varepsilon} p^{n+1} \varphi \, d\Omega + \iint_{\Omega} \Delta t \frac{k_r}{\eta_r} \nabla p^{n+1} \cdot \nabla \varphi \, d\Omega + \oint_{\Gamma_f} \Delta t \frac{k_f}{\eta_f} \frac{\partial p^{n+1}}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \, dS \\
& = \Delta t \, Q(t) \varphi(0,0) + \iint_{\Omega} S_{\varepsilon} p^n \varphi \, d\Omega
\end{aligned} \tag{1.15}$$

II. Нахождение обратных напряжений, вызванных пороупругим эффектом, методом потенциала.

Необходимо найти напряжения, вызванные изменением порового давления в расчетной области вблизи трещины. Материал породы однородный и изотропный. Исходными уравнениями для данной задачи будут:

$$\Omega: \quad \begin{cases} \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} = 0 \\ \boldsymbol{\sigma} = \lambda \operatorname{div}(\mathbf{u}) \mathbf{I} + 2G \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) - \alpha p \mathbf{I} \\ \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T) \\ \mathbf{u} = (u, v) \end{cases}, \quad (2.1)$$

где λ и G – параметры Ламе, записываемые через κ -т Пуассона и модуль Юнга как

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}, \quad G = \frac{E}{2(1 + \nu)} \quad (2.2)$$

Предположим, что существует функция $\psi(x, y)$, называемая потенциалом, такая, что

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad v = \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad (2.3)$$

После подстановки в систему уравнений (1.1) получим:

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} = 0 = -\alpha \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \Delta \psi + 2G \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(2G \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} \right) \quad (2.4)$$

$$\frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} = 0 = -\alpha \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x} \left(2G \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda \Delta \psi + 2G \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \right)$$

Обозначим $\Phi = \alpha p - (\lambda + 2G)\Delta \psi$

Тогда система (2.4) записывается в следующем виде

$$\begin{cases} \frac{\partial \Phi}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial \Phi}{\partial y} = 0 \end{cases} \Rightarrow \Phi = C, \quad (2.5)$$

где константа C не зависит от x и y .

Получаем уравнение для определения потенциала ψ :

$$\Phi = \alpha p - (\lambda + 2G)\Delta\psi = 0 \Leftrightarrow \Delta\psi = \frac{\alpha p}{P}, \quad P = \lambda + 2G \quad (2.6)$$

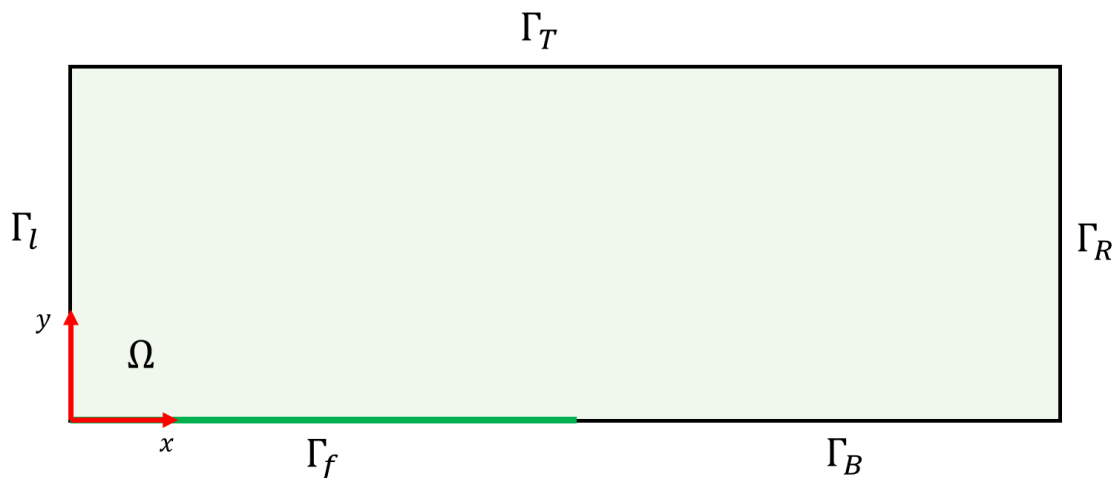


Рис.4 Расчетная область

Граничные условия:

$$\begin{aligned} \Gamma_T: \quad \psi|_{\Gamma_T} &= 0 \\ \Gamma_R: \quad \psi|_{\Gamma_R} &= 0 \\ \Gamma_L: \quad \frac{\partial\psi}{\partial n}\Big|_{\Gamma_L} &= 0 \\ \Gamma_B: \quad \frac{\partial\psi}{\partial n}\Big|_{\Gamma_B} &= 0 \\ \Gamma_f: \quad \frac{\partial\psi}{\partial n}\Big|_{\Gamma_f} &= 0 \end{aligned} \quad (2.7)$$

Вывод слабой постановки задачи. В качестве тестовой функции φ выберем такую, что

$$\varphi|_{\Gamma_R \cup \Gamma_T} = 0 \quad (2.8)$$

Умножим уравнение (2.6) на тестовую функцию и проинтегрируем по всей области:

$$\iint_{\Omega} \varphi \Delta\psi \, d\Omega = \iint_{\Omega} \frac{\alpha p}{P} \varphi \, d\Omega \quad (2.9)$$

Преобразуем левую часть уравнения, используя следующее соотношение:

$$\nabla \cdot (\varphi \nabla \psi) = \nabla \varphi \cdot \nabla \psi + \varphi \Delta \psi \quad (2.10)$$

и формулу Остроградского-Гаусса:

$$\iint_{\Omega} \nabla \cdot \mathbf{a} \, d\Omega = \oint_{\Gamma} \mathbf{n} \cdot \mathbf{a} \, ds \quad (2.11)$$

Получаем:

$$\iint_{\Omega} \varphi \Delta \psi \, d\Omega = \oint_{\Gamma} (\mathbf{n} \cdot \nabla \psi) \varphi \, ds - \iint_{\Omega} \nabla \varphi \cdot \nabla \psi \, d\Omega \quad (2.12)$$

Рассмотрим отдельно контурный интеграл. В силу аддитивности интеграла:

$$\begin{aligned} & \oint_{\Gamma} (\mathbf{n} \cdot \nabla \psi) \varphi \, ds \\ &= \oint_{\Gamma_f} (\mathbf{n} \cdot \nabla \psi) \varphi \, ds + \oint_{\Gamma_B} (\mathbf{n} \cdot \nabla \psi) \varphi \, ds + \oint_{\Gamma_R} (\mathbf{n} \cdot \nabla \psi) \varphi \, ds \\ &+ \oint_{\Gamma_L} (\mathbf{n} \cdot \nabla \psi) \varphi \, ds + \oint_{\Gamma_T} (\mathbf{n} \cdot \nabla \psi) \varphi \, ds \end{aligned} \quad (2.13)$$

Интегралы по Γ_R и Γ_T равны 0 в силу выбора тестовой функции. Остальные равны нулю в силу граничных условий.

$$\oint_{\Gamma} (\mathbf{n} \cdot \nabla \psi) \varphi \, ds = \oint_{\Gamma_f} -\frac{\partial \psi}{\partial y} \varphi \, ds + \oint_{\Gamma_B} -\frac{\partial \psi}{\partial y} \varphi \, ds + \oint_{\Gamma_L} -\frac{\partial \psi}{\partial x} \varphi \, ds = 0 \quad (2.14)$$

В результате имеем слабую постановку:

$$\iint_{\Omega} \nabla \varphi \cdot \nabla \psi \, d\Omega + \iint_{\Omega} \frac{\alpha p}{P} \varphi \, d\Omega = 0 \quad (2.15)$$

III. Решение задачи о раскрытии трещины в пласте с тонкой глиняной перемычкой.

Раскрытие инициируется давлением на границу Γ_f , где потенциально может находиться трещина. В задаче также учитываются обратные напряжения, вызванные пороупругим эффектом. Их действие моделируется нагрузкой, приложенной к Γ_f .

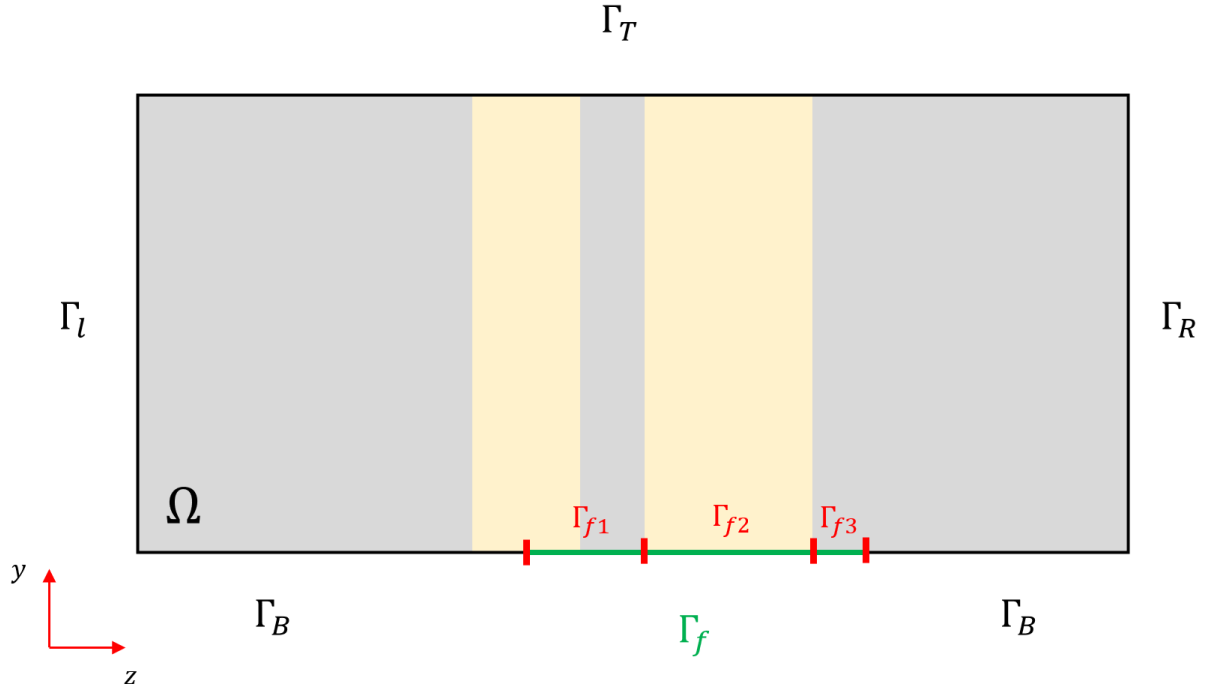


Рис.5 Расчетная область

Уравнения в области:

$$\Omega: \begin{cases} \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \rho \mathbf{g} = 0 \\ \boldsymbol{\sigma} = \lambda \operatorname{div}(\mathbf{u}) \mathbf{I} + 2G \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) \\ \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T) \\ \mathbf{u} = (u, v) \end{cases} \quad (3.1)$$

Граничные условия:

$$\begin{aligned} \Gamma_T \cup \Gamma_B: \quad & v|_{\Gamma_T \cup \Gamma_B} = 0, \quad \tau_{yx}|_{\Gamma_T \cup \Gamma_B} = 0 \\ \Gamma_R: \quad & u|_{\Gamma_R} = 0, \quad \tau_{xy}|_{\Gamma_R} = 0 \\ \Gamma_L: \quad & \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}|_{\Gamma_L} = -\sigma_v \mathbf{n}, \quad \sigma_v = \rho_0 g h - \alpha p_0 \\ \Gamma_{f2}: \quad & \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}|_{\Gamma_{f2}} = -(p_f - \alpha p_0 - \sigma_B) \mathbf{n} + \frac{1}{\delta} \chi_{[v < 0]} v \mathbf{n} \\ \Gamma_{f1} \cup \Gamma_{f3}: \quad & \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}|_{\Gamma_{f1} \cup \Gamma_{f3}} = -(p_f - \alpha p_0) \chi_{[v > 0]} \mathbf{n} + \frac{1}{\delta} \chi_{[v < 0]} v \mathbf{n} \end{aligned} \quad (3.2)$$

Тестовая функция:

$$\boldsymbol{\psi} = (\psi_1, \psi_2), \quad \psi_1|_{\Gamma_R} = 0, \quad \psi_2|_{\Gamma_T \cup \Gamma_B} = 0 \quad (3.3)$$

Умножим первое уравнение из системы (2.1) скалярно на $\boldsymbol{\psi}$ и проинтегрируем по всей области:

$$\iint_{\Omega} (\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}) \cdot \boldsymbol{\psi} \, d\Omega = - \iint_{\Omega} \rho \mathbf{g} \cdot \boldsymbol{\psi} \, d\Omega = - \iint_{\Omega} \rho g \psi_1 \, d\Omega \quad (3.4)$$

Преобразуем левую часть, используя приведенные ниже соотношения:

$$(\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}) \cdot \boldsymbol{\psi} = \nabla \cdot (\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\psi}) - \underbrace{\boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla \boldsymbol{\psi}}_{\boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla \boldsymbol{\psi}^S = \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) \cdot \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{\psi})} \quad (3.5)$$

$$\iint \nabla \cdot \mathbf{a} \, d\Omega = \oint \mathbf{n} \cdot \mathbf{a} \, ds \quad (3.6)$$

Получаем:

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega} (\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}) \cdot \boldsymbol{\psi} \, d\Omega &= \iint_{\Omega} \nabla \cdot (\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\psi}) \, d\Omega - \iint_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) \cdot \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{\psi}) \, d\Omega \\ &= \oint_{\Gamma} \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\psi} \, ds - \iint_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) \cdot \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{\psi}) \, d\Omega \end{aligned} \quad (3.7)$$

Распишем подробнее контурный интеграл:

$$\begin{aligned} \oint_{\Gamma} \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\psi} \, ds \\ = \oint_{\Gamma_f} \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\psi} \, ds + \oint_{\Gamma_B} \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\psi} \, ds + \oint_{\Gamma_R} \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\psi} \, ds \\ + \oint_{\Gamma_L} \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\psi} \, ds + \oint_{\Gamma_T} \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\psi} \, ds \end{aligned} \quad (3.8)$$

Распишем в отдельности каждый интеграл:

$$\begin{aligned}
& \oint_{\Gamma_f} \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\psi} \, ds \\
&= \oint_{\Gamma_{f2}} (p_f - \alpha p_0 - \sigma_B) \psi_2 \, ds
\end{aligned} \tag{3.9}$$

$$+ \oint_{\Gamma_{f1} \cup \Gamma_{f3}} (p_f - \alpha p_0) \chi_{[v>0]} \psi_2 \, ds - \oint_{\Gamma_f} \frac{1}{\delta} \chi_{[v<0]} v \psi_2 \, ds$$

$$\oint_{\Gamma_B} \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\psi} \, ds = - \oint_{\Gamma_B} (\sigma_{yy} \psi_2 + \tau_{yx} \psi_1) \, ds = 0 \tag{3.10}$$

$$\oint_{\Gamma_R} \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\psi} \, ds = \oint_{\Gamma_R} (\sigma_{xx} \psi_1 + \tau_{xy} \psi_2) \, ds = 0 \tag{3.11}$$

$$\oint_{\Gamma_L} \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\psi} \, ds = \oint_{\Gamma_L} \sigma_v \psi_1 \, ds \tag{3.12}$$

$$\oint_{\Gamma_T} \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\psi} \, ds = \oint_{\Gamma_T} (\sigma_{yy} \psi_2 + \tau_{yx} \psi_1) \, ds = 0 \tag{3.13}$$

В результате слабая постановка принимает вид:

$$\begin{aligned}
& \iint_{\Omega} (\lambda \operatorname{div}(\mathbf{u}) \operatorname{div}(\boldsymbol{\psi}) + 2G \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) \cdot \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{\psi})) \, d\Omega + \oint_{\Gamma_f} \frac{1}{\delta} \chi_{[v<0]} v \psi_2 \, ds \\
&= \iint_{\Omega} \rho g \psi_1 \, d\Omega + \oint_{\Gamma_{f2}} (p_f - \alpha p_0 - \sigma_B) \psi_2 \, ds \\
&+ \oint_{\Gamma_{f1} \cup \Gamma_{f3}} (p_f - \alpha p_0) \chi_{[v>0]} \psi_2 \, ds + \oint_{\Gamma_L} \sigma_v \psi_1 \, ds
\end{aligned} \tag{3.14}$$

IV. Критерий распространения трещины.

Найденные в результате решения задач значения полураскрытия, давления на трещине и бэкстресса усредняются. Далее смотрим выполнение следующих условий:

$$\bar{w} = \frac{\sqrt{\pi H} K_{Ic}}{E'}, \quad E' = \frac{E}{1 - \nu^2} \quad (4.1)$$

$$\bar{p} = \frac{2 K_{Ic}}{\sqrt{\pi H}} = \bar{p}_f - \bar{\sigma}_{h0} - \bar{\sigma}_B \quad (4.2)$$

Если критерии удовлетворены, длина трещины увеличивается, иначе не меняется.

V. Результаты

1) Задача фильтрации

Характерные размеры области:

Название	Единицы измерения	Значение
Горизонтальный р-р, L	м	1500
Вертикальный р-р, H	м	1000
Длина трещины, L_{frac}	м	200

Исходные данные:

Название	Единицы измерения	Значение
Вязкость, μ	Па · с	10^{-3}
Коэффициент Пуассона, ϑ	-	0,21
Коэффициент Ламе, λ	Па	$5,27 \cdot 10^9$
Коэффициент Био, α	-	0,7
Пористость, φ	-	0,2
Упругость, S_ε	Па^{-1}	$2,84 \cdot 10^{-11}$
Проницаемость пласта, k_r	м^2	10^{-14}
Проницаемость трещины, k_r	м^2	10^{-9}
Поровое давление, p_0	Па	$26,4 \cdot 10^6$
Модуль Юнга, E	ГПа	24
Объем закачки на единицу высоты в четверть области	$\frac{\text{м}^2}{\text{с}}$	$14 \cdot 10^{-5}$
Шаг по времени, dt	с	1000
Время расчета, t_{max}	с	20000

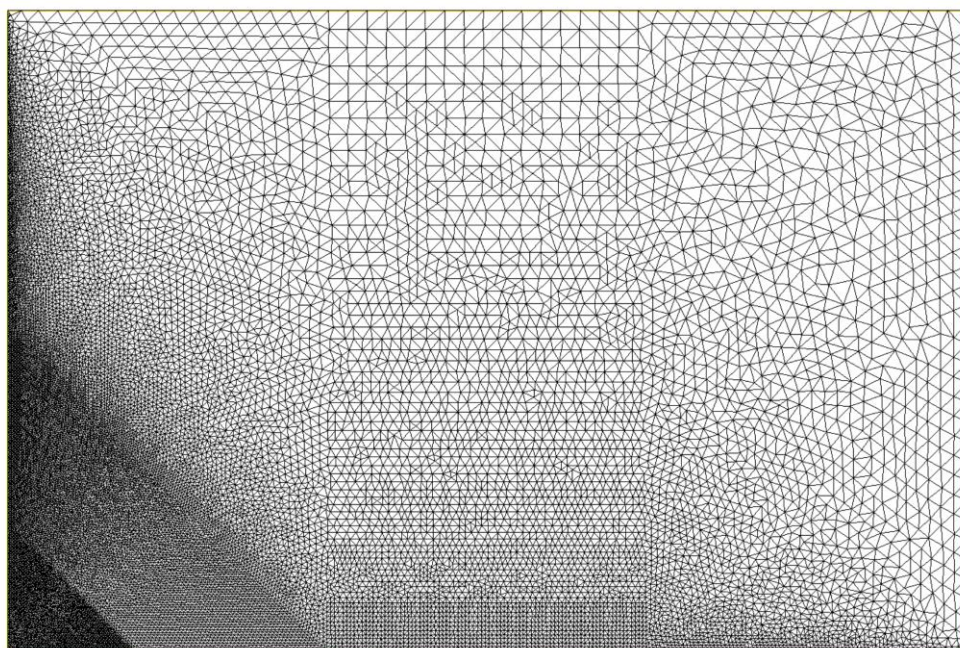


Рис.5 Сетка для задачи фильтрации

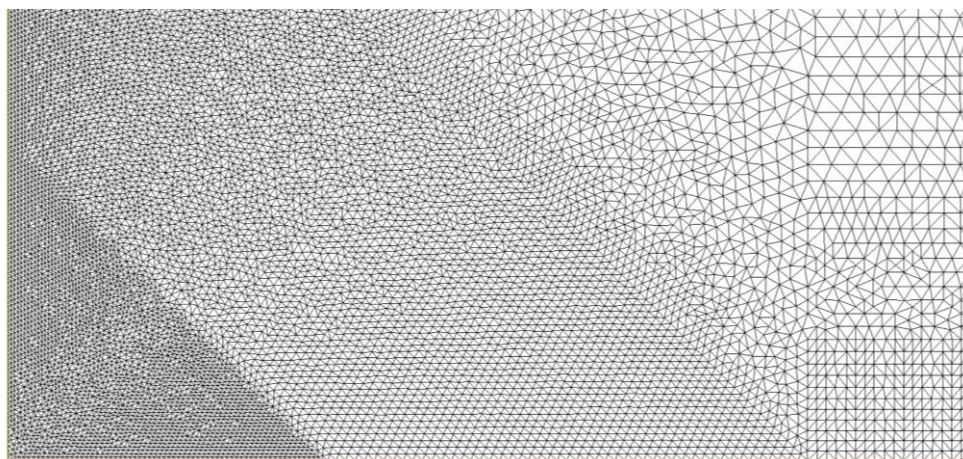


Рис.5.1 Увеличенная сетка для задачи фильтрации

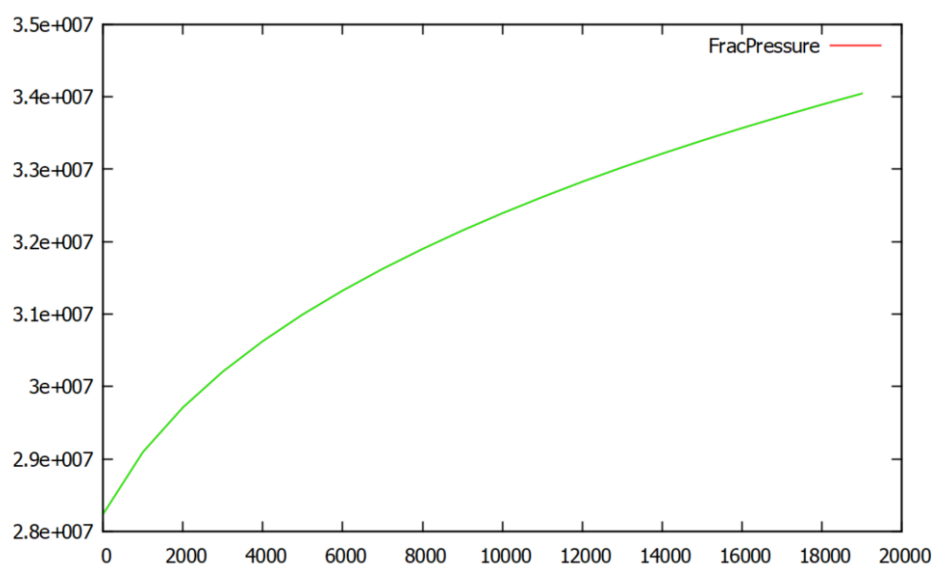


Рис.6 График изменения давления на трещине с течением времени

2) Определение обратных напряжений

Сетка и параметры области такие же, как и в предыдущей задаче.

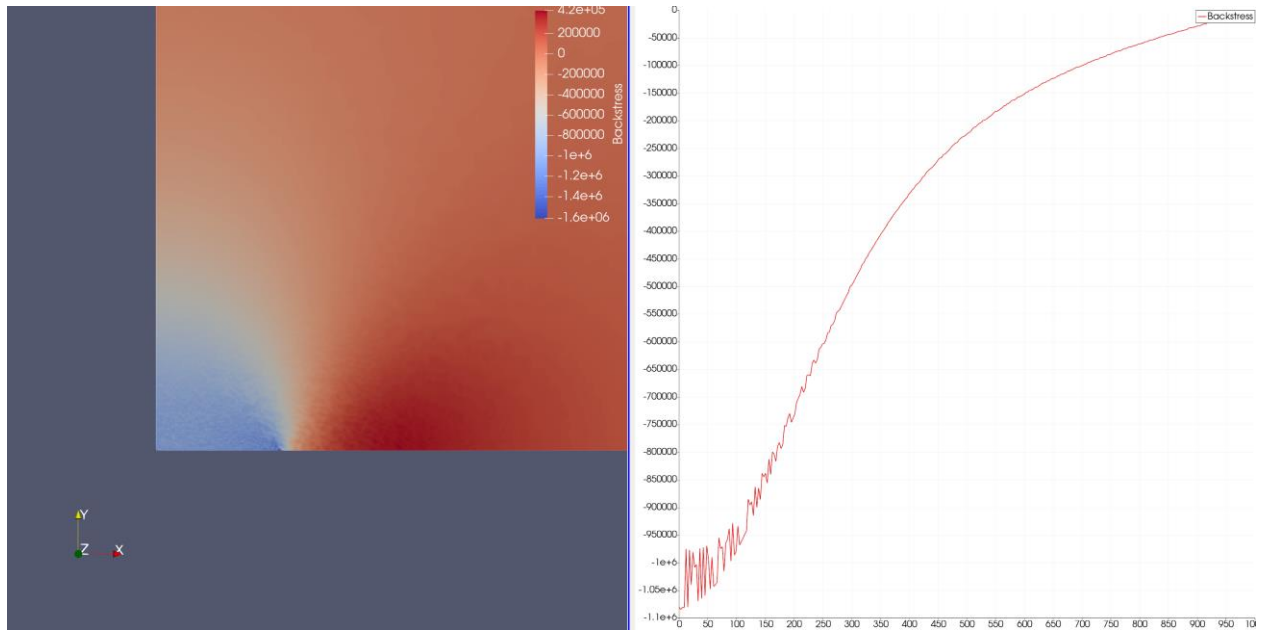


Рис.7 Поле обратных напряжений около трещины и график распределения обратных напряжений в вертикальном сечении области

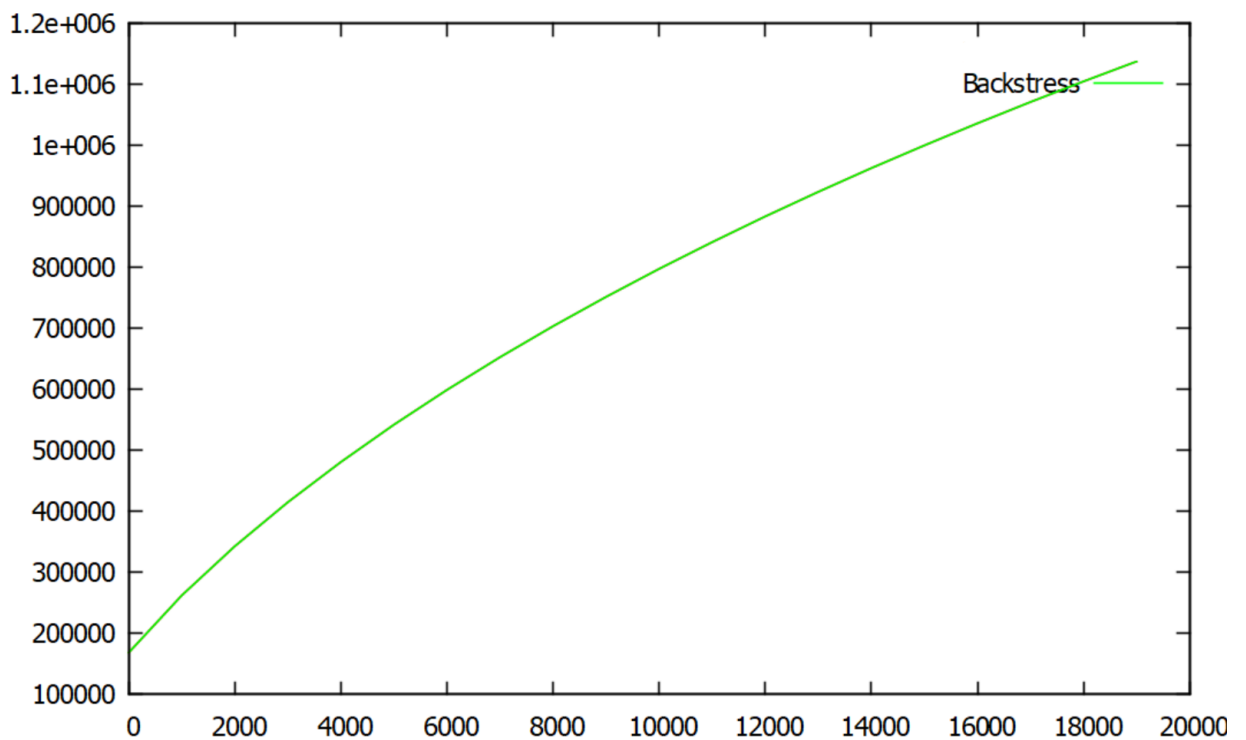


Рис.8 График изменения обратных напряжений на стенке трещины

3) Задача о раскрытии трещины

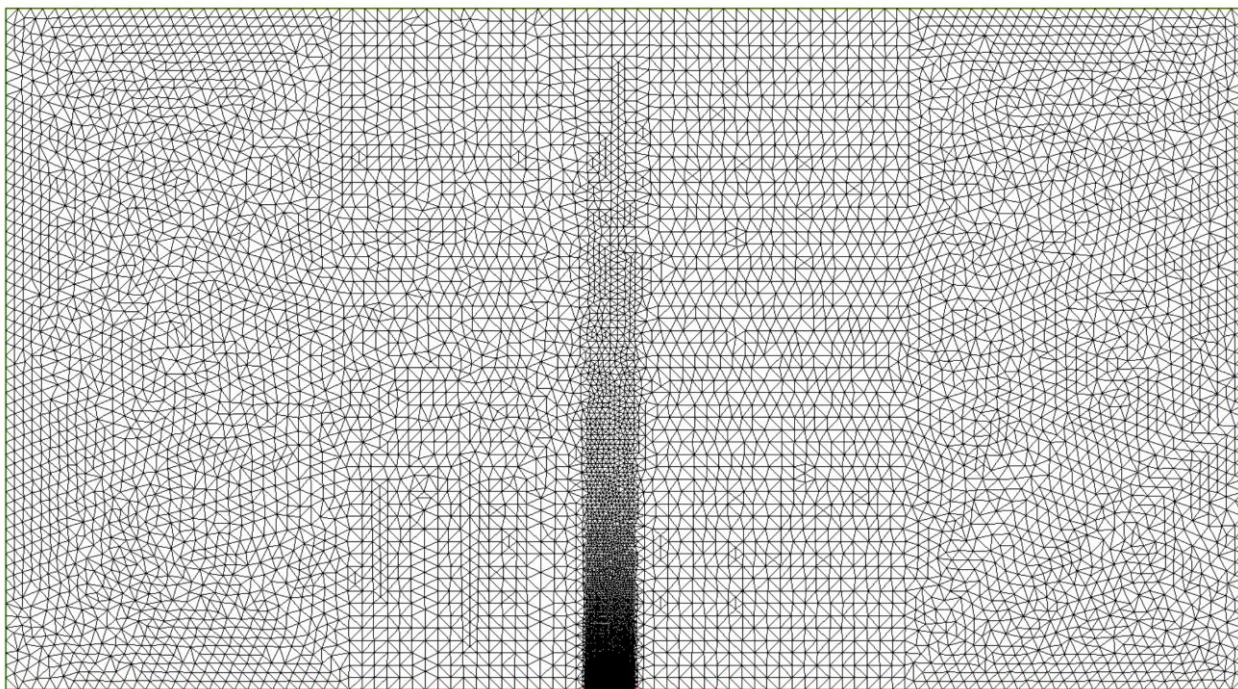


Рис.9 Сетка для задачи о раскрытии

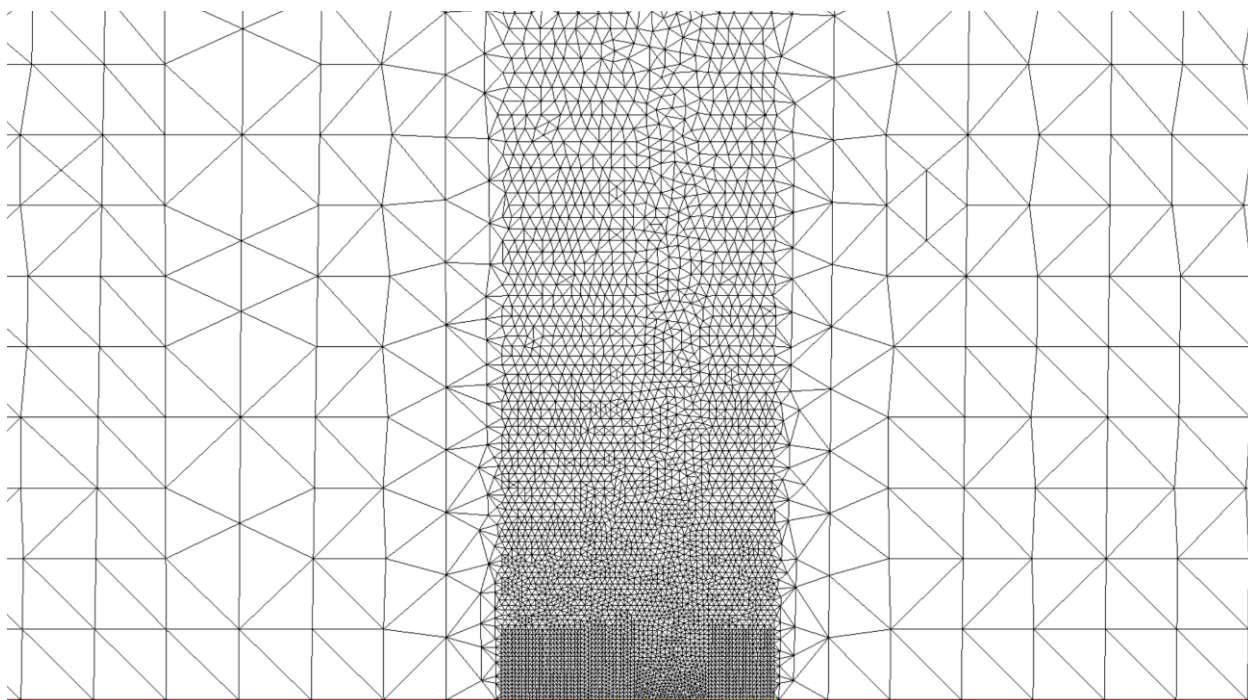
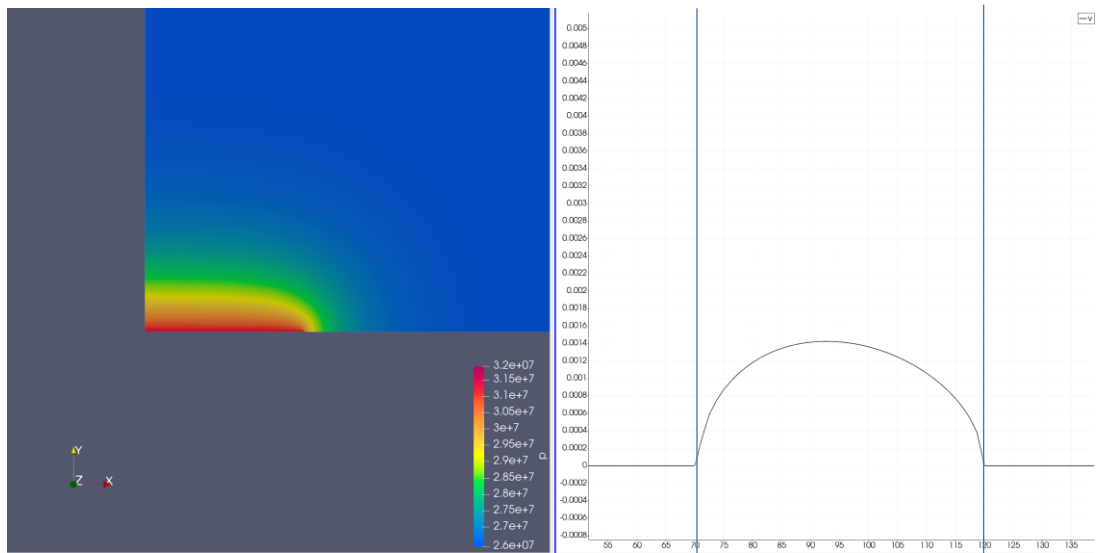
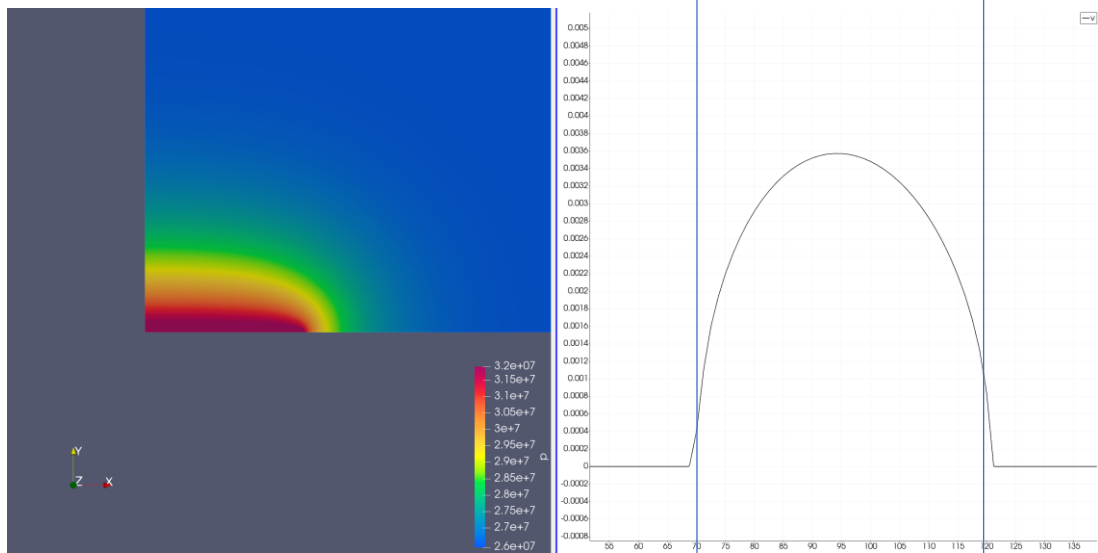


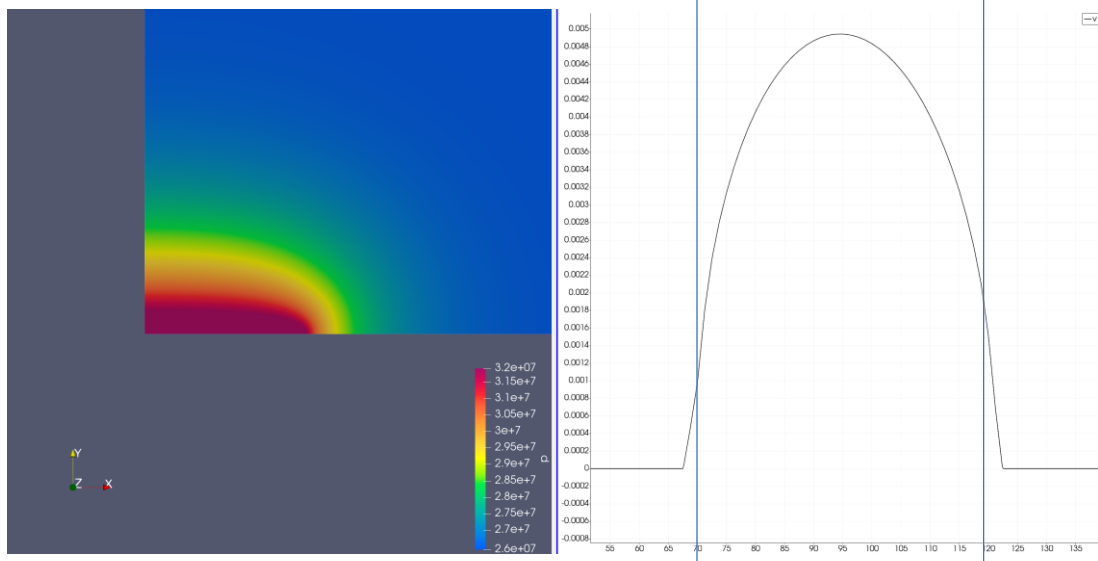
Рис.9.1 Увеличенная сетка для задачи фильтрации



timestep = 6



timestep = 11



timestep = 15

Рис.10 Раскрытие в различные моменты времени