FreeFem++ Tutorials

Байкин А.Н.

21 декабря 2020 г.

1. Задачи теории упругости

1.1. Простейший расчет раскрытия трещины в упругой среде

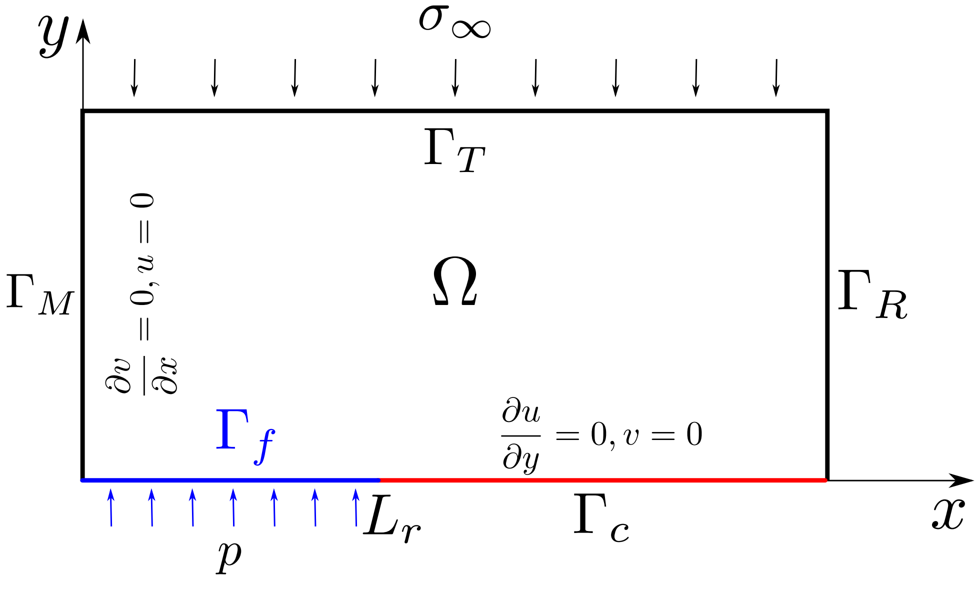

Рис. 1: Трещина

Рассмотрим задачу об определении раскрытия гидравлической трещины фиксированной длины под действием заданного давления (Рис. 1) в условиях плоской деформации.

Определяющие уравнения упругости в области Ω записываются в виде

$$\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} = -f_v, \quad \boldsymbol{\sigma} = \lambda \operatorname{div} \mathbf{u}\, \mathrm{I} + 2\mu\, \mathcal{E}(\mathbf{u}), \tag{1}$$

где тензор малых деформаций задается выражением

$$\mathcal{E}(\mathbf{u})_{ij} = \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\Big), \quad i, j = 1, 2, 3, \tag{2}$$

$\mathbf{u}$ — вектор перемещений, λ, μ — коэффициенты Ламе.

Предполагается, что трещина раскрывается под действием сил давления

$$\Gamma_f : \quad \boldsymbol{\sigma}\langle\mathbf{n}\rangle = -p\mathbf{n}. \tag{3}$$

В то же время на границе Γ_T этому противостоит сжимающее напряжение

$$\Gamma_T : \quad \boldsymbol{\sigma}\langle\mathbf{n}\rangle = -\sigma_\infty\mathbf{n}, \quad (\boldsymbol{\sigma}_{\langle}\mathbf{n}\rangle)_i = \sigma_{ij}n_j, \quad i = 1, 2, \tag{4}$$

на Γ_R напряжения отсутствуют:

$$\Gamma_R : \quad \boldsymbol{\sigma}\langle\mathbf{n}\rangle = 0. \tag{5}$$

На Γ_M и Γ_C заданы условия симметрии

$$\Gamma_C : \quad v = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \tag{6}$$

$$\Gamma_M : \quad u = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = 0. \tag{7}$$

В качестве тестовой функции выберем $\boldsymbol{\psi}$ такую, что $\psi_1 = 0$ на Γ_M, а $\psi_2 = 0$ на Γ_C. Тогда использую формулу

$$\int\limits_\Omega -\operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}))\cdot\boldsymbol{\psi}\,dxdy = \int\limits_\Omega \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) : \mathcal{E}(\boldsymbol{\psi})\,dxdy - \int\limits_{\partial\Omega} \boldsymbol{\psi}\cdot\boldsymbol{\sigma}\langle\mathbf{n}\rangle\,ds \tag{8}$$

получим с учетом граничных условий

$$\int\limits_\Omega \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) : \mathcal{E}(\boldsymbol{\psi})\,dxdy + \int\limits_{\Gamma_T} \sigma_\infty\psi_2\,ds - \int\limits_{\Gamma_f} p\psi_2\,ds = 0. \tag{9}$$

1.2. Точное решение

Точное решение для полураскрытия трещины в рассмотренной задаче задается формулой

$$v = 2\frac{p-\sigma_0}{E'}\sqrt{L_r^2 - x^2}, \quad E' = \frac{E}{1-\nu^2}. \tag{10}$$

1.3. Задания

Задача 1. На паре мы рассмотрели решение, когда трещина имеет фиксированную длину L_r. В механике разрушения длина трещины определяется из условия равенства высвободившейся упругой энергии и энергии, которую нужно потратить на разрушение породы. В конечных элементах это легче всего реализуется с помощью задания так называемых напряжений сцепления σ_{coh} (Рис. 2), работа которых равна энергии разрушения. Эти напряжения действуют вблизи кончика трещины и пытаются по сути склеить вместе противоположные берега трещины. Подробности будут в следующем семестре на курсе по ГРП.

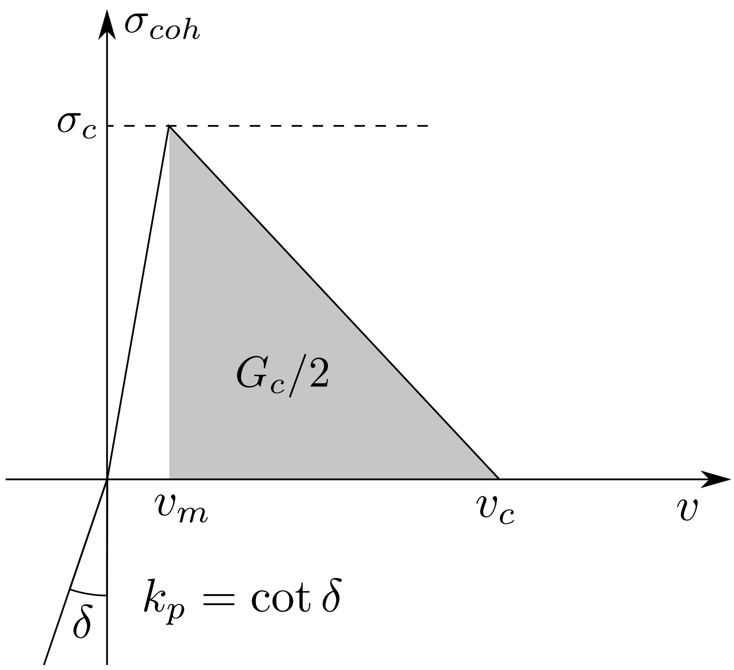

Рис. 2: Распределение напряжений сцепления

Задача остается в принципе почти такой же, что в делали на паре (см. Рис. 3), но усложнится и станет нелинейным условие на Γ_f:

$$\Gamma_f: \quad \boldsymbol{\sigma}\langle\mathbf{n}\rangle = -p\,\chi_{x<L_p}(\mathbf{x})\mathbf{n} + \sigma_{coh}(v)\mathbf{n}. \tag{11}$$

Здесь $\chi_{x<L_p}(\mathbf{x})$ — функция индикатор множества $\{\mathbf{x} : x < L_p\}$, $L_p = 10$ м — размер зоны действия давления, $L_r = 30$ м, $p = 2$ МПа.

На внешних границах Γ_T и Γ_R напряжения отсутствуют. На Γ_C и Γ_M условия симметрии.

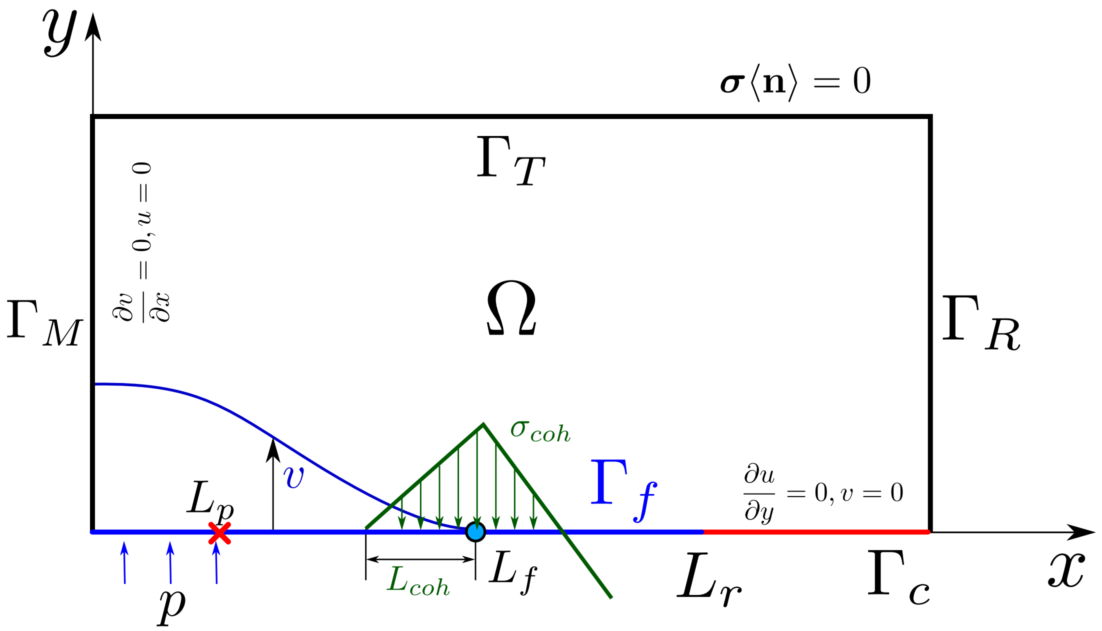

Рис. 3: Трещина с учетом сил сцепления

$$\sigma_{coh}(w) = \begin{cases} k_p\, v, & v < 0, \\ \sigma_c \dfrac{v}{v_m}, & 0 \leqslant v \leqslant v_m, \\ \sigma_c \left(\dfrac{v_c - v}{v_c - v_m} \right), & v_m \leqslant v \leqslant v_c, \\ 0, & v \geqslant v_c, \end{cases} \tag{12}$$

где σ_c максимальное напряжение сцепеления, $k_p = 10^4 E$ — параметр штрафа, E — модуль Юнга, $v_c = G_c/\sigma_c$, $G_c = 1200$ Pa·m энергия разрушения, $v_m = \varkappa v_c$ параметр регуляризации $\varkappa = 5 \times 10^{-4}$. Модули упругости взять $\mu = 10$ ГПа, $\lambda = 20$ ГПа.

Напряжение σ_c — свободный параметр - его нужно подогнать так, чтобы длина зоны действия сил сцепления $L_{coh} = EG_c/\sigma_c^2$ была порядка 1 м, но и густота сетки была достаточной, чтобы уместилось хотя бы 10-20 ребер.

Условия (12) надо линеаризовать. Проверку выполнения условий можно делать использую значения v на предыдущей нелинейной итерации.

Задача:

- построить распараллеленный (минимум 2 mpi-процесса, с помощью PETSc) решатель нелинейной задачи с контролем относительной ошибки.

- При подсчете ошибки после того как вы посчитаете интеграл от квадрата разности nonLinearErrorSquaredPerProc на каждом процессоре вам надо результаты просуммировать (по свойству адитивности интеграла) с помощью команды

  mpiAllReduce(nonLinearErrorSquaredPerProc, nonLinearErrorSquared, mpiCommWorld, mpiSUM);

  которая запишет результат в nonLinearErrorSquared на все процессоры. Аналогично надо посчитать интеграл от квадрата решения и только после этого считать относительную ошибку. Результаты всех нелинейных итераций вывести в Paraview

- В Paraview с помощью фильтра Group Datasets сгруппировать решения с разных процессов. Через PlotOverLine построить полураскрытие трещины, сохранить результаты на нескольких характерных итерациях в отдельный CSV файл (см. `https://youtu.be/O0h0XiS8Bwk`)

- считать раскрытие в Matlab/Python, вывести на нескольких итерациях, чтобы показать, что решение сходится, сравнить с точным решением

- Измерить время выполнения программы с помощью команды mpiWtime() при количестве mpi-процессов 1,2,4. Сделать выводы

Точное решение

В линейной механике разрушения точное решение получается из условия $K_I = K_{I_C} = \sqrt{G_c E'}$, $E' = \dfrac{E}{1-\nu^2}$:

$$K_I \equiv 2\sqrt{\frac{L_f}{\pi}} \int\limits_0^{L_f} \frac{p(\xi)}{\sqrt{L_f^2 - \xi^2}} d\xi = 2\sqrt{\frac{L_f}{\pi}} p \arctan \frac{L_p}{\sqrt{L_f^2 - L_p^2}} = K_{I_C} \qquad (13)$$

Для решения этого уравнения можете использовать `https://www.wolframalpha.com/` или Wolfram Mathematica для нахождения L_f. После этого можно посчитать полураскрытия трещины

$$v(x) = \frac{2}{\pi E'} p\, F(x, L_p, L_f), \qquad (14)$$

$$F(x,\xi,L_f)=\begin{cases} 2\left(\sqrt{L_f^2-x^2}\arcsin(\dfrac{\xi}{L_f})+\xi\,\mathrm{arctanh}\sqrt{\dfrac{L_f^2-\xi^2}{L_f^2-x^2}}\right)- & \\ -2\left(x\,\mathrm{arctanh}\,\dfrac{x}{\xi}\sqrt{\dfrac{L_f^2-\xi^2}{L_f^2-x^2}}\right), & x<\xi, \\ 2\left(\sqrt{L_f^2-x^2}\arcsin(\dfrac{\xi}{L_f})+\xi\,\mathrm{arctanh}\sqrt{\dfrac{L_f^2-x^2}{L_f^2-\xi^2}}\right)- & \\ -2\left(x\,\mathrm{arctanh}\,\dfrac{\xi}{x}\sqrt{\dfrac{L_f^2-x^2}{L_f^2-\xi^2}}\right), & x>\xi, \\ 2\sqrt{L_f^2-x^2}\arcsin(\dfrac{x}{L_f})+2x\log\dfrac{L_f}{x}, & x=\xi, \\ \pi\sqrt{L_f^2-x^2}, & \xi=L_f, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases} \tag{15}$$