Совместный учет роста трещины авто-ГРП в длину и в высоту

Иващенко Д. В., Цветкова Д. А.

В данной работе рассматривается модель трещины PKN. Необходимо, имея заданный постоянный расход закачиваемой в пласт жидкости, оценить возможность прорыва трещиной тонкой глиняной перемычки и соответствующее критическое давление, с учетом возможности распространения трещины в длину. Задача разделяется на несколько подзадач, решаемых в разных расчетных областях:

1) Задача однофазной фильтрации жидкости в пласт. Давление на границе трещины определяется из уравнения теории смазки с заданным расходом жидкости.

2) Задача о нахождении обратных напряжений, вызванных неоднородным распределением порового давления в пласте.

3) Задача о раскрытии трещины. Посчитанные в предыдущих двух задачах давление на стенку трещины и обратные напряжения используются при решении задачи теории упругости о прогибе границы области.

Схематично расчетные области для вышеприведенных задач изображены на рисунке:

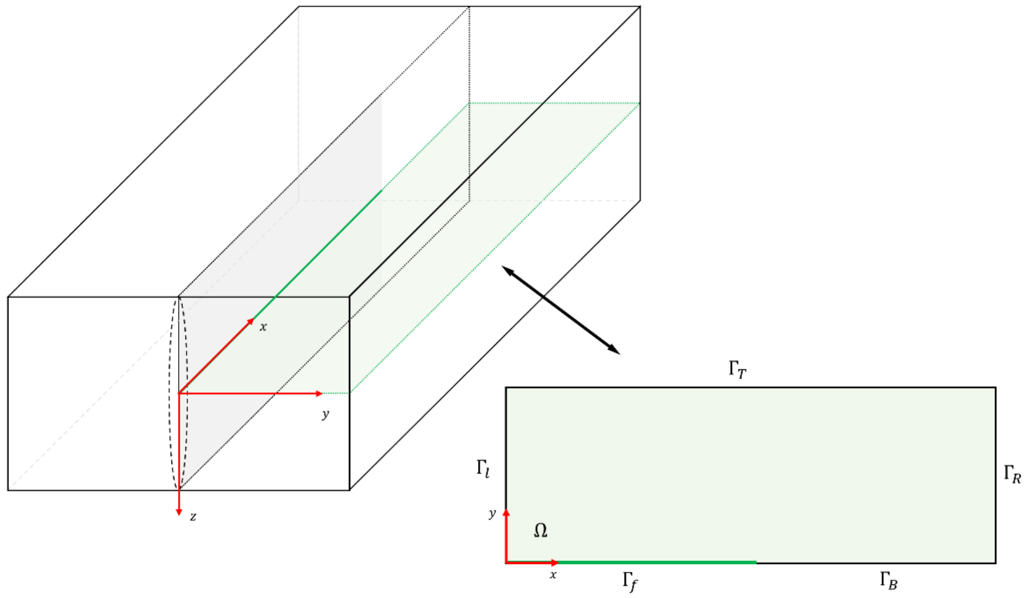

Рис.1 Трещина PKN и расчетная область для задач 1 и 2.

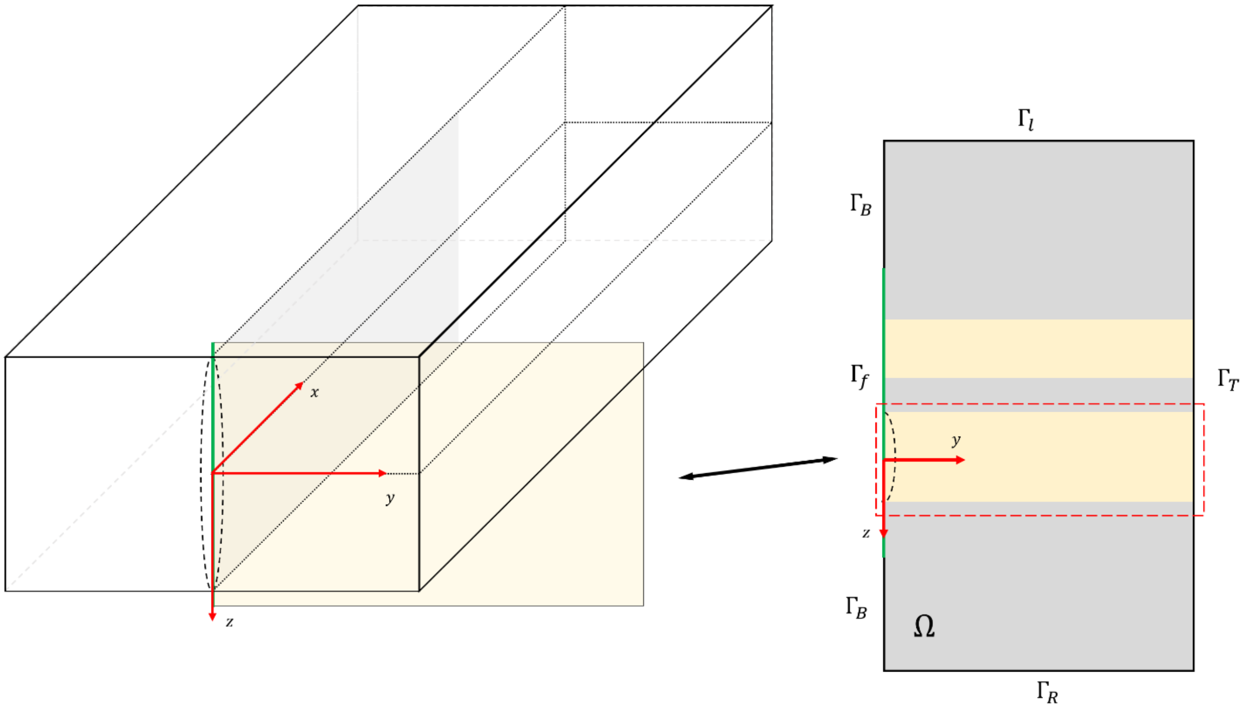

Рис.2 Трещина PKN и расчетная область для задачи 3.

Для задач 1 и 2 используется расчетная область с рисунка 1. Для задачи 3 с рисунка 2.

I. Нахождение давлений в трещине, с использованием уравнения фильтрации и уравнения теории смазки.

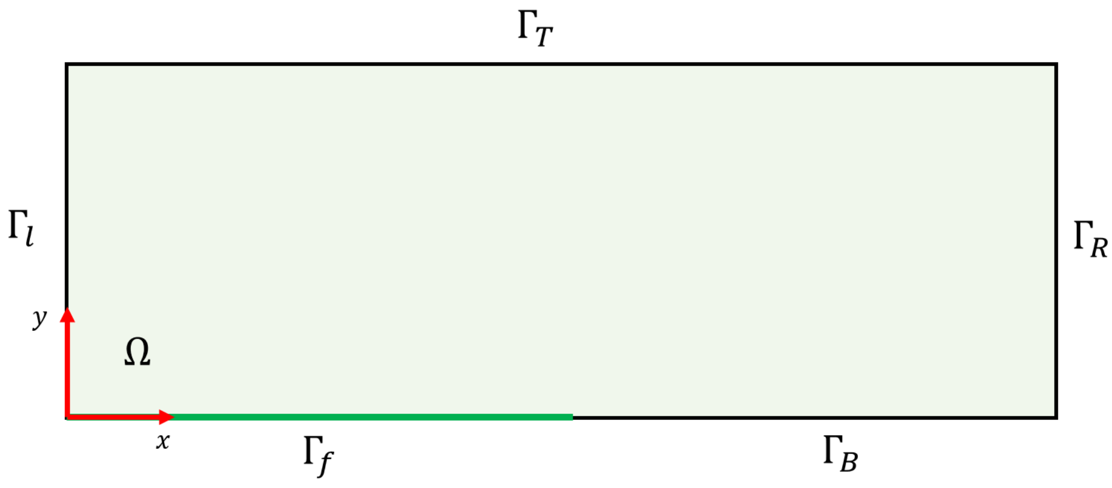

Рис.3 Расчетная область

Уравнение фильтрации:

$$S_\varepsilon \frac{\partial p}{\partial t} = \frac{k_r}{\eta_r}\Delta p, \qquad S_\varepsilon = \frac{(\varphi_0 - \alpha)(1-\alpha)}{\lambda + \frac{2G}{3}} \tag{1.1}$$

где k_r − проницаемость порового пространства, η_r − вязкость пластовой жидкости, S_ε − упругоемкость вмещающей породы, λ и G − параметры Ламе, φ_0 − пористость.

Уравнение теории смазки:

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{w^3}{3\eta_f}\frac{\partial p_f}{\partial x}\right) + \frac{k_r}{\eta_r}\frac{\partial p}{\partial y}\bigg|_{y=0} \tag{1.2}$$

w –полураскрытие, η_f -вязкость закачиваемой жидкости, p_f -давление в трещине.

Граничные условия:

$$\Gamma_f: \quad \begin{cases} \dfrac{\partial w}{\partial t} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{w^3}{3\eta_f}\dfrac{\partial p}{\partial x}\right) + \dfrac{k_r}{\eta_r}\dfrac{\partial p}{\partial y}\bigg|_{y=0} \\ -\dfrac{w^3}{3\eta_f}\dfrac{\partial p}{\partial x}\bigg|_{\substack{x=0^+\\ y=0}} = Q(t) \end{cases}$$

$$\Gamma_{R\cup T}: \qquad p|_{\Gamma_{R\cup T}} = 0 \tag{1.3}$$

$$\Gamma_L: \qquad \left.\frac{\partial p}{\partial x}\right|_{\Gamma_L} = 0$$

$$\Gamma_B: \qquad \left.\frac{\partial p}{\partial y}\right|_{\Gamma_B} = 0$$

Вывод слабой формулировки. В качестве тестовой функции возьмем $\varphi(x, y)$ такую, что:

$$\varphi|_{\Gamma_{R\cup T}} = 0 \tag{1.4}$$

Умножим уравнение (1.1) на тестовую функцию и проинтегрируем по всей области:

$$\iint\limits_{\Omega} S_\varepsilon \frac{\partial p}{\partial t} \varphi \, d\Omega = \iint\limits_{\Omega} \frac{k_r}{\eta_r} \varphi \Delta p \, d\Omega \tag{1.5}$$

Запишем иначе правую часть уравнения (1.5). С учетом формулы Остроградского-Гаусса и приведенного ниже соотношения:

$$\varphi \Delta p = \nabla \cdot (\varphi \nabla p) - \nabla p \cdot \nabla \varphi \tag{1.6}$$

Получим:

$$\begin{aligned} \iint\limits_{\Omega} \frac{k_r}{\eta_r} \varphi \Delta p \, d\Omega &= \iint\limits_{\Omega} \frac{k_r}{\eta_r} \nabla \cdot (\varphi \nabla p) \, d\Omega - \iint\limits_{\Omega} \frac{k_r}{\eta_r} \nabla p \cdot \nabla \varphi \, d\Omega = \\ &= \oint\limits_{\Gamma} \frac{k_r}{\eta_r} n \cdot (\varphi \nabla p) dS - \iint\limits_{\Omega} \frac{k_r}{\eta_r} \nabla p \cdot \nabla \varphi \, d\Omega \end{aligned} \tag{1.7}$$

Рассмотрим отдельно контурный интеграл. В силу аддитивности интеграла:

$$\begin{aligned} &\oint\limits_{\Gamma} \frac{k_r}{\eta_r} n \cdot (\varphi \nabla p) dS = \\ &= \oint\limits_{\Gamma_{R\cup T}} \frac{k_r}{\eta_r} \frac{\partial p}{\partial n} \varphi \, dS + \oint\limits_{\Gamma_S} \frac{k_r}{\eta_r} \frac{\partial p}{\partial n} \varphi \, dS + \oint\limits_{\Gamma_f} \frac{k_r}{\eta_r} \frac{\partial p}{\partial n} \varphi \, dS \\ &+ \int_{\Gamma_L} \frac{k_r}{\eta_r} \frac{\partial p}{\partial n} \varphi \, dS = - \oint\limits_{\Gamma_f} \frac{k_r}{\eta_r} \frac{\partial p}{\partial y} \varphi \, dS \end{aligned} \tag{1.8}$$

Интеграл по $\Gamma_{R\cup T}$ равен нулю в силу выбора тестовой функции. Интегралы по Γ_L и Γ_s равны нулю в силу граничных условий.

Подынтегральное выражение заменим с учетом Г.У. (1.3):

$$\left.\frac{k_r}{\eta_r}\frac{\partial p}{\partial y}\right|_{\Gamma_f} = \frac{\partial w}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{w^3}{3\eta_f}\frac{\partial p}{\partial x}\right) \tag{1.9}$$

Получаем:

$$\oint_{\Gamma} \frac{k_r}{\eta_r} n \cdot (\varphi \nabla p) dS = -\oint_{\Gamma_f} \frac{\partial w}{\partial t}\varphi dS + \oint_{\Gamma_f} \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{w^3}{3\eta_f}\frac{\partial p}{\partial x}\right)\varphi dS \tag{1.10}$$

Рассмотрим интеграл по границе трещины:

$$\begin{aligned} \oint_{\Gamma_f} \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{w^3}{3\eta_f}\frac{\partial p}{\partial x}\right)\varphi dS &= \int_0^l \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{w^3}{3\eta_f}\frac{\partial p}{\partial x}\right)\varphi dx = \int_{0^+}^l \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{w^3}{3\eta_f}\frac{\partial p}{\partial x}\right)\varphi dx \\ &= \underbrace{\left.\varphi\frac{w^3}{3\eta_f}\frac{\partial p}{\partial x}\right|_{\substack{x=l\\ y=0}}}_{0} \underbrace{-\left.\varphi\frac{w^3}{3\eta_f}\frac{\partial p}{\partial x}\right|_{\substack{x=0^+\\ y=0}}}_{Q(t)\varphi(0,0)} - \oint_{\Gamma_f} \frac{w^3}{3\eta_f}\frac{\partial p}{\partial x}\frac{\partial \varphi}{\partial x} dS \end{aligned} \tag{1.11}$$

Получаем:

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega} S_\varepsilon \frac{\partial p}{\partial t}\varphi\, d\Omega + \iint_{\Omega} \frac{k_r}{\eta_r}\nabla p \cdot \nabla\varphi\, d\Omega + \oint_{\Gamma_f} \frac{\partial w}{\partial t}\varphi dS + \oint_{\Gamma_f} \frac{w^3}{3\eta_f}\frac{\partial p}{\partial x}\frac{\partial \varphi}{\partial x} dS \\ - Q(t)\varphi(0,0) = 0 \end{aligned} \tag{1.12}$$

II. Нахождение обратных напряжений, вызванных пороупругим эффектом, методом потенциала.

Необходимо найти напряжения, вызванные изменением порового давления в расчетной области вблизи трещины. Материал породы однородный и изотропный. Исходными уравнениями для данной задачи будут:

$$\Omega: \quad \begin{cases} \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} = 0 \\ \boldsymbol{\sigma} = \lambda\, div(\boldsymbol{u})\, \boldsymbol{I} + 2G\, \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}) - \alpha p \boldsymbol{I} \\ \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}) = \dfrac{1}{2}(\nabla \boldsymbol{u} + \nabla \boldsymbol{u}^T) \\ \boldsymbol{u} = (u, v) \end{cases}, \tag{2.1}$$

где λ и G — параметры Ламе, записываемые через к-т Пуассона и модуль Юнга как

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \qquad G = \frac{E}{2(1+\nu)} \tag{2.2}$$

Предположим, что существует функция $\psi(x, y)$, называемая потенциалом, такая, что

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial x}, \qquad v = \frac{\partial \psi}{\partial y} \tag{2.3}$$

После подстановки в систему уравнений (1.1) получим:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} = 0 = -\alpha \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda\, \Delta\psi + 2G\, \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(2G \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y}\right) \\ \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} = 0 = -\alpha \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x}\left(2G \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\lambda\, \Delta\psi + 2G\, \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}\right) \end{aligned} \tag{2.4}$$

Обозначим $\Phi = \alpha p - (\lambda + 2G)\Delta\psi$

Тогда система (2.4) записывается в следующем виде

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \Phi}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial \Phi}{\partial y} = 0 \end{cases} \Rightarrow \Phi = C, \tag{2.5}$$

где константа C не зависит от x и y.

Получаем уравнение для определения потенциала ψ:

$$\Phi = \alpha p - (\lambda + 2G)\Delta\psi = 0 \Leftrightarrow \Delta\psi = \frac{\alpha p}{P}, \qquad P = \lambda + 2G \tag{2.6}$$

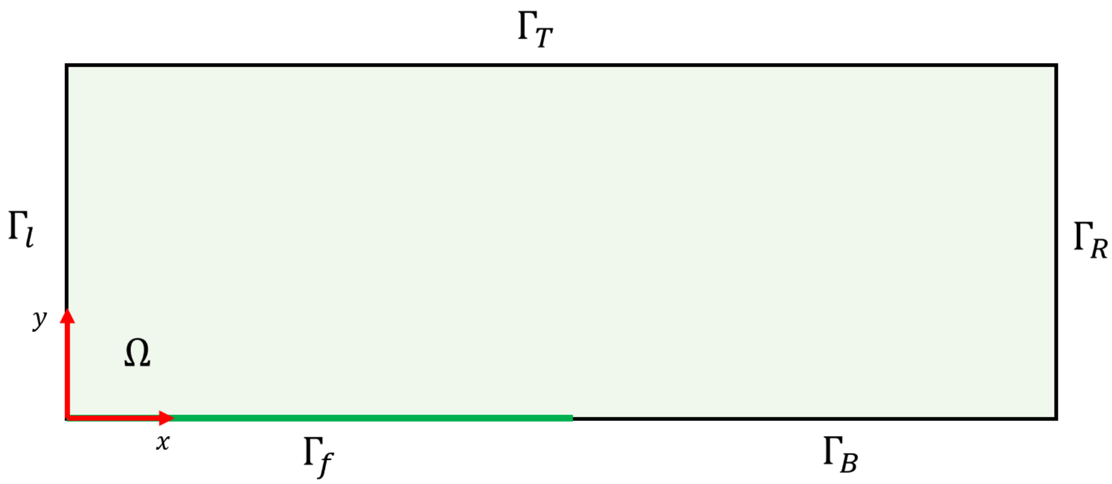

Рис.4 Расчетная область

Граничные условия:

$$\begin{aligned}
&\Gamma_T: \quad && \psi|_{\Gamma_T} = 0 \\
&\Gamma_R: \quad && \psi|_{\Gamma_R} = 0 \\
&\Gamma_L: \quad && \left.\frac{\partial\psi}{\partial n}\right|_{\Gamma_L} = 0 \\
&\Gamma_B: \quad && \left.\frac{\partial\psi}{\partial n}\right|_{\Gamma_B} = 0 \\
&\Gamma_f: \quad && \left.\frac{\partial\psi}{\partial n}\right|_{\Gamma_f} = 0
\end{aligned} \tag{2.7}$$

Вывод слабой постановки задачи. В качестве тестовой функции φ выберем такую, что

$$\varphi|_{\Gamma_R \cup \Gamma_T} = 0 \tag{2.8}$$

Умножим уравнение (2.6) на тестовую функцию и проинтегрируем по всей области:

$$\iint_{\Omega} \varphi\Delta\psi \, d\Omega = \iint_{\Omega} \frac{\alpha p}{P}\varphi \, d\Omega \tag{2.9}$$

Преобразуем левую часть уравнения, используя следующее соотношение:

$$\nabla \cdot (\varphi \nabla \psi) = \nabla \varphi \cdot \nabla \psi + \varphi \Delta \psi \tag{2.10}$$

и формулу Остроградского-Гаусса:

$$\iint \nabla \cdot \boldsymbol{a} \, d\Omega = \oint n \cdot \boldsymbol{a} \, ds \tag{2.11}$$

Получаем:

$$\iint\limits_{\Omega} \varphi \Delta \psi \, d\Omega = \oint\limits_{\Gamma} (n \cdot \nabla \psi) \varphi \, ds - \iint\limits_{\Omega} \nabla \varphi \cdot \nabla \psi \, d\Omega \tag{2.12}$$

Рассмотрим отдельно контурный интеграл. В силу аддитивности интеграла:

$$\begin{aligned} &\oint\limits_{\Gamma} (n \cdot \nabla \psi) \varphi \, ds \\ &\quad = \oint\limits_{\Gamma_f} (n \cdot \nabla \psi) \varphi \, ds + \oint\limits_{\Gamma_B} (n \cdot \nabla \psi) \varphi \, ds + \oint\limits_{\Gamma_R} (n \cdot \nabla \psi) \varphi \, ds \\ &\quad + \oint\limits_{\Gamma_L} (n \cdot \nabla \psi) \varphi \, ds + \oint\limits_{\Gamma_T} (n \cdot \nabla \psi) \varphi \, ds \end{aligned} \tag{2.13}$$

Интегралы по Γ_R и Γ_T равны 0 в силу выбора тестовой функции. Остальные равны нулю в силу граничных условий.

$$
\begin{aligned}
\oint_{\Gamma} (n \cdot \nabla\psi)\varphi\, ds \\
&= \oint_{\Gamma_f} \left((0,-1) \cdot \left(\frac{\partial\psi}{\partial x}, \frac{\partial\psi}{\partial y} \right)^T \right) \varphi\, ds \\
&+ \oint_{\Gamma_B} \left((0,-1) \cdot \left(\frac{\partial\psi}{\partial x}, \frac{\partial\psi}{\partial y} \right)^T \right) \varphi\, ds \\
&+ \oint_{\Gamma_L} \left((-1,0) \cdot \left(\frac{\partial\psi}{\partial x}, \frac{\partial\psi}{\partial y} \right)^T \right) \varphi\, ds \\
&= \oint_{\Gamma_f} -\frac{\partial\psi}{\partial y}\varphi\, ds + \oint_{\Gamma_B} -\frac{\partial\psi}{\partial y}\varphi\, ds + \oint_{\Gamma_L} -\frac{\partial\psi}{\partial x}\varphi\, ds = 0
\end{aligned} \tag{2.14}
$$

В результате имеем слабую постановку:

$$
\iint_{\Omega} \nabla\varphi \cdot \nabla\psi \;\, d\Omega + \iint_{\Omega} \frac{\alpha p}{P}\varphi\, d\Omega = 0 \tag{2.15}
$$

III. Решение задачи о раскрытии трещины в пласте с тонкой глиняной перемычкой.

Раскрытие инициируется давлением на границу Γ_f, где потенциально может находиться трещина. В задаче также учитываются обратные напряжения, вызванные пороупругим эффектом. Их действие моделируется нагрузкой, приложенной к Γ_f.

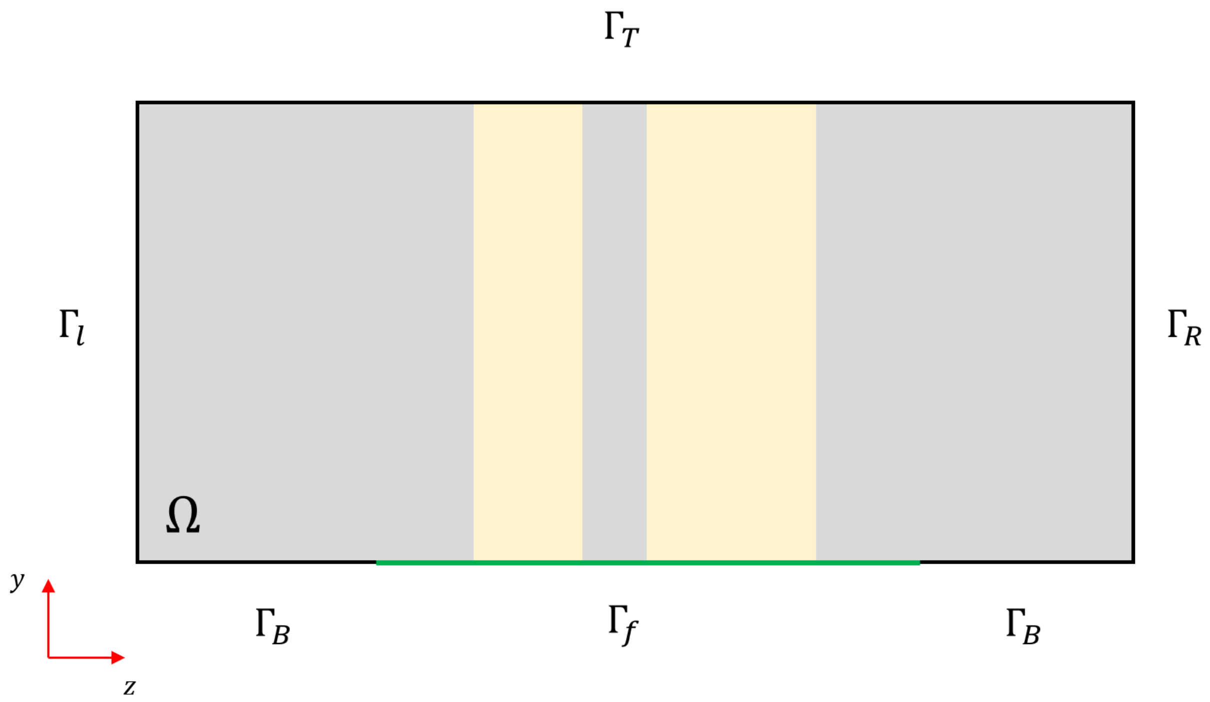

Рис.5 Расчетная область

Уравнения в области:

$$\Omega: \quad \begin{cases} \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \rho \boldsymbol{g} = 0 \\ \boldsymbol{\sigma} = \lambda \, div(\boldsymbol{u}) \, \boldsymbol{I} + 2G \, \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}) \\ \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}) = \frac{1}{2}(\nabla \boldsymbol{u} + \nabla \boldsymbol{u}^T) \\ \boldsymbol{u} = (u, v) \end{cases} \tag{3.1}$$

Граничные условия:

$$\begin{gathered} \Gamma_T: \quad \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}|_{\Gamma_T} = -\sigma_h \boldsymbol{n} \\ \Gamma_R: \quad u|_{\Gamma_R} = 0, \quad \left.\frac{\partial v}{\partial n}\right|_{\Gamma_R} = 0 \\ \Gamma_L: \quad \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}|_{\Gamma_L} = -\sigma_v \boldsymbol{n} \\ \Gamma_B: \quad v|_{\Gamma_B} = 0, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\Gamma_B} = 0 \end{gathered} \tag{3.2}$$

$$\Gamma_f: \qquad \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\sigma}|_{\Gamma_f} = -(p_f - \sigma_B)\boldsymbol{n} + \frac{1}{\delta}\chi_{[v<0]} v\boldsymbol{n}$$

Значения сжимающих напряжений, прикладываемых к границе области, вычисляются следующим образом:

$$\sigma_h = \frac{\nu}{1-\nu}(\sigma_v - \alpha p) + \alpha p \qquad \sigma_v = \rho_0 g h \tag{3.3}$$

Тестовая функция:

$$\boldsymbol{\psi} = (\psi_1,\, \psi_2), \qquad \psi_1|_{\Gamma_R} = 0, \qquad \psi_2|_{\Gamma_B} = 0 \tag{3.4}$$

Умножим первое уравнение из системы (2.1) скалярно на $\boldsymbol{\psi}$ и проинтегрируем по всей области:

$$\iint\limits_\Omega (\nabla\cdot\boldsymbol{\sigma})\cdot\boldsymbol{\psi}\, d\Omega = -\iint\limits_\Omega \rho\boldsymbol{g}\cdot\boldsymbol{\psi}\, d\Omega = -\iint\limits_\Omega \rho g\psi_1\, d\Omega \tag{3.5}$$

Преобразуем левую часть, используя приведенные ниже соотношения:

$$(\nabla\cdot\boldsymbol{\sigma})\cdot\boldsymbol{\psi} = \nabla\cdot(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{\psi}) - \underbrace{\boldsymbol{\sigma}\cdot\cdot\nabla\boldsymbol{\psi}}_{\boldsymbol{\sigma}\cdot\cdot\nabla\boldsymbol{\psi}^S = \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{u})\cdot\cdot\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{\psi})} \tag{3.6}$$

$$\iint \nabla\cdot\boldsymbol{a}\ d\Omega = \oint n\cdot\boldsymbol{a}\ ds \tag{3.7}$$

Получаем:

$$\begin{aligned}\iint\limits_\Omega (\nabla\cdot\boldsymbol{\sigma})\cdot\boldsymbol{\psi}\, d\Omega &= \iint\limits_\Omega \nabla\cdot(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{\psi})\, d\Omega - \iint\limits_\Omega \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{u})\cdot\cdot\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{\psi})\, d\Omega \\ &= \oint\limits_\Gamma \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{\psi}\, ds - \iint\limits_\Omega \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{u})\cdot\cdot\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{\psi})\, d\Omega\end{aligned} \tag{3.8}$$

Распишем подробнее контурный интеграл:

$$\oint_{\Gamma} \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{\psi}\, ds = \oint_{\Gamma_f} \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{\psi}\, ds + \oint_{\Gamma_B} \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{\psi}\, ds + \oint_{\Gamma_R} \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{\psi}\, ds + \oint_{\Gamma_L} \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{\psi}\, ds + \oint_{\Gamma_T} \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{\psi}\, ds \qquad (3.9)$$

Распишем в отдельности каждый интеграл:

$$\oint_{\Gamma_f} \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{\psi}\, ds = \oint_{\Gamma_f} \left(p_f - \sigma_B\right)\psi_2\, ds - \oint_{\Gamma_f} \frac{1}{\delta}\chi_{[v<0]} v\, \psi_2\, ds \qquad (3.10)$$

$$\oint_{\Gamma_B} \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{\psi}\, ds = -\oint_{\Gamma_B} \sigma\, \psi_2 ds = 0 \qquad (3.11)$$

$$\oint_{\Gamma_R} \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{\psi}\, ds = -\oint_{\Gamma_R} \sigma\, \psi_1 ds = 0 \qquad (3.12)$$

$$\oint_{\Gamma_L} \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{\psi}\, ds = \oint_{\Gamma_L} \sigma_v\, \psi_1 ds \qquad (3.13)$$

$$\oint_{\Gamma_T} \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{\psi}\, ds = -\oint_{\Gamma_T} \sigma_h\, \psi_2 ds \qquad (3.14)$$

В результате слабая постановка принимает вид:

$$\iint_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{u}) \cdot\cdot\, \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{\psi})\, d\Omega + \oint_{\Gamma_f} \frac{1}{\delta}\chi_{[v<0]} v\, \psi_2\, ds = \iint_{\Omega} \rho g \psi_1\, d\Omega + \oint_{\Gamma_f} \left(p_f - \sigma_B\right)\psi_2\, ds + \oint_{\Gamma_L} \sigma_v\, \psi_1 ds - \oint_{\Gamma_T} \sigma_h\, \psi_2 ds \qquad (3.15)$$

или

$$\iint_{\Omega} (\lambda\, div(\boldsymbol{u}) div(\boldsymbol{\psi}) + 2G\, \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}) \cdot\cdot\, \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{\psi}))\, d\Omega + \oint_{\Gamma_f} \frac{1}{\delta} \chi_{[v<0]} v\, \psi_2\, ds$$

$$= \iint_{\Omega} \rho g \psi_1\, d\Omega + \oint_{\Gamma_f} \left(p_f - \sigma_B\right) \psi_2\, ds + \oint_{\Gamma_L} \sigma_v\, \psi_1 ds \qquad (3.15.1)$$

$$- \oint_{\Gamma_T} \sigma_h\, \psi_2 ds$$

IV. Критерий распространения трещины.

Найденные в результате решения задач значения полураскрытия, давления на трещине и бэкстресса усредняются. Далее смотрим выполнение следующих условий:

$$\overline{w} = \frac{\sqrt{\pi H}\ K_{Ic}}{E'}, \qquad E' = \frac{E}{1 - \nu^2} \tag{4.1}$$

$$\bar{p} = \frac{2\ K_{Ic}}{\sqrt{\pi H}} = \bar{p}_f - \bar{\sigma}_B \tag{4.2}$$

Если критерии удовлетворены, длина трещины увеличивается, иначе не меняется.