**ВВЕДЕНИЕ**

Проблема возникновения трещин автоГРП является одной из актуальных и трудно описываемых проблем на скважинах фонда поддержания пластового давления. Эффект автоГРП характеризуется возникновением и развитием техногенной трещины из-за закачки большого объема жидкости в пласт на нагнетательной скважине. При этом основное отличие автоГРП от классического гидроразрыва пласта (ГРП) в том, что в случае ГРП в качестве жидкости разрыва используется вязкий гель, а при автоГРП эту роль выполняет вода, имеющая гораздо меньшую вязкость.

На развитие трещины автоГРП влияет большое количество различных факторов, таких как механические свойства породы, величина минимальных горизонтальных сжимающих напряжений, действующих в пласте, история работы рассматриваемой скважины, изменение порового давления в исследуемой области за счет работы соседних скважин. Это лишь одни из немногих факторов, определяющих характер развития трещины.

Кроме того, трещина может развиваться в слоистом пласте, где нефтенасыщенные песчаники чередуются с глиняными перемычками. И в этом случае форма трещины может быть разной: трещина может распространяться в одном слое, уходя на большие расстояния, а может прорвать глиняную перемычку и вырасти в высоту. В первом случае есть риск того, что трещина вырастет настолько, что дойдет до соседних добывающих скважин и начнет их обводнять. Кроме того, фронт обводнения будет также распространяться нецелевым образом из-за того, что утечки жидкости в пласт будут происходить по большей площади выросшей трещины. Во втором случае негативный эффект связан с тем, что закачиваемая жидкость будет уходить в нецелевой пласт, что отрицательно повлияет на добычу нефти из-за неэффективного вытеснения нефти водой. Поэтому, для эффективного управления закачкой жидкости на нагнетательной скважине, необходимо понимать есть ли на данной скважине трещина автоГРП, каких она размеров и формы и т. д.

Для корректного описания эффекта автоГРП необходимо разрабатывать полную трёхмерную модель трещины в связанной пороупругой постановке. Однако это приводит к большим вычислительным затратам и невозможности дать быструю оценку возможности прорыва трещины в вышележащие слои. Это приводит к необходимости разработки упрощенного подхода оценки роста трещины автоГРП в высоту с сохранением качественно тех эффектов, которые наблюдаются в связанной трехмерной модели, что и является целью данной работы.

**ГЛАВА 1. ОСНОВНЫЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ТЕОРИИ ПОРОУПРУГОСТИ**

**1.1. Определяющие соотношения**

В теории упругости определяющие соотношения строились на основании гипотезы о сплошности среды, согласно которой среда непрерывно заполняет рассматриваемый объем. Напряжения в среде вводились как отношение силы, действующей на выделенном бесконечно малом сечении внутри области, к площади этого самого сечения. В предположении о сплошности вводился, так называемый, тензор напряжений Коши, который характеризует значения напряжений в каждой точке пространства. Сам тензор представляет из себя непрерывную функцию координат и времени.

Пытаясь аналогичным образом вывести соотношения для теории пороупругости, мы сталкиваемся с рядом проблем. Так как пористый материал (см. рис. 1.1) состоит из твердого скелета (зёрен) и пор, напряжения могут сильно меняться при переходе из одной точки материала в другую на уровне масштаба зерен. Так, в точке A напряжения гораздо выше, чем в B, а в точке D они и вовсе отсутствуют (если поры пустые). Причем сами эти напряжения будут зависеть от формы и свойств конкретных зерен, что лишь усложняет описание. Поэтому, для описания пористой среды вводится так называемый репрезентативный элементарный объем (REV) (см. рис. 1.2). Этот объем содержит в себе твердый скелет породы и поровое пространство.

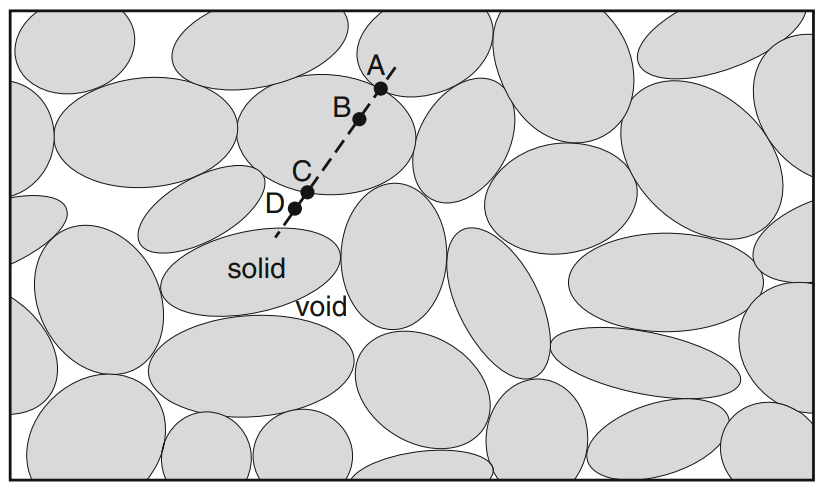


Рис. 1.1 Структура порового материала

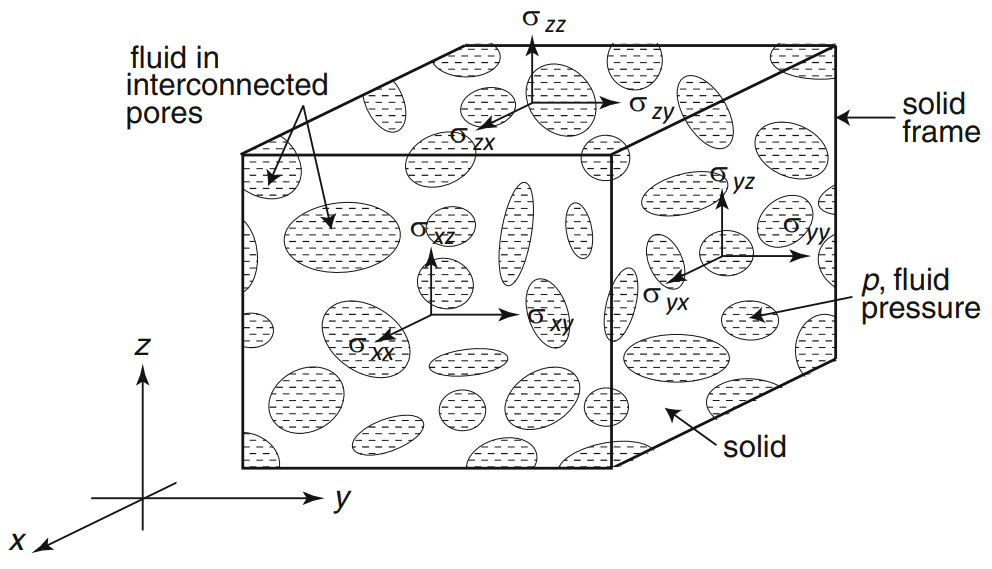


Рис. 1.2. Репрезентативный элементарный объем

Линейные размеры этого объема на 1-2 порядка превышают характерный размер пор. Предполагается существование тензора напряжений Коши как тензора полных напряжений в каждой точке порового пространства, при этом сам тензор также является непрерывным. Полные напряжения подразумевают учет как твердой, так и жидкой части, содержащейся в поровом объеме. Причем напряжения жидкой части сводятся к одной константе, называемой поровым давлением. Деформации пористой среды определяются перемещениями внешних граней репрезентативного объема (см. рис. 1.3).

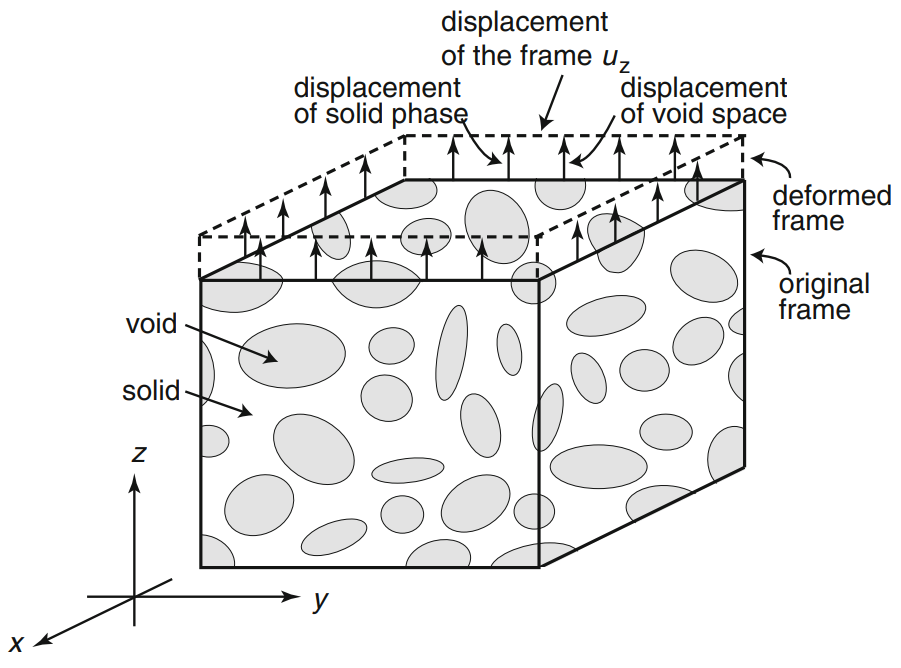


Рис. 1.3. Деформации порового объема

|  |  |
| --- | --- |
|  | (1.1) |

Полные объемные деформации определяются следующим образом:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (1.2) |

Объемная деформация жидкой фазы есть скалярная величина, характеризующая величину объема жидкости, поступающей в элементарный поровый объем, отнесенную к единице этого объема.

Связь между напряжениями и деформациями для изотропной пороупругой среды задается следующими соотношениями:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (1.3) |
|  | (1.4) |

где «недренированный» модуль объемного сжатия, модуль сдвига, коэффициент эффективных напряжений Био, модуль Био. Используя (1.3) и (1.4), можем получить схожее соотношение:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (1.5) |

где «дренированный» модуль объемного сжатия и . «Недренированный» модуль объемного сжатия характеризует свойства как твердой составляющей порового пространства, так и жидкой фазы в порах. «Дренированный» модуль объемного сжатия, в свою очередь, характеризует только твердый скелет породы.

Введем еще понятие эффективных напряжений. Как известно из геомеханики, грунт упруго деформируется в ответ на эффективные напряжения, которые являются разницей между полным напряжением и поровым давлением. Терцаги ввел понятие эффективных напряжений следующим образом:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (1.6) |

Био, в свою очередь, определил эффективные напряжения как:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (1.7) |

где коэффициент эффективных напряжений Био, как и упоминалось ранее. Эффективные напряжения Терцаги есть предельный случай эффективных напряжений Био при . Коэффициент зависит исключительно от свойств порового пространства и скелета породы и не зависит от свойств жидкости.

**1.2. Формула Итона**

Важным в геомеханике является определение местных (*in situ*) напряжений в горных породах. Под этими напряжениями подразумеваются главные напряжения, действующие в трёх взаимно перпендикулярных направлениях. Будем считать, что в породе отсутствуют различные неоднородности: включения, трещины, разломы и пр. Одним из главных напряжений в этом случае, на большом расстоянии от поверхности Земли, принято считать вертикальное напряжение, определяемое весом вышележащих пород. Оставшиеся два напряжения будут горизонтальными, причем их значение в силу способности горной породы сопротивляться сдвиговым напряжениям будет отличаться от вертикальных напряжений. Минимальные горизонтальные напряжения соотносятся с вертикальными следующим образом:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (1.8) |

где и эффективные горизонтальные и вертикальные напряжения, коэффициент Пуассона. Эта формула, известная также как формула Итона, получена в предположении, что в процессе формирования породы отсутствовали горизонтальные деформации, и что порода ведет себя в соответствии с линейной теорией упругости.

Знание минимальных горизонтальных напряжений играет важную роль при описании трещин ГРП и автоГРП.

**ГЛАВА 2. СВЕДЕНИЯ ИЗ МЕХАНИКИ ГИДРОРАЗРЫВА ПЛАСТА**

**2.1. PKN модель трещины**

Существует большое количество различных моделей трещин, из которых наиболее простыми и известными являются модели KGD (Khristianovich, Zheltov, Geertsma, de Klerk) и PKN (Perkins, Kern, Nordgren).

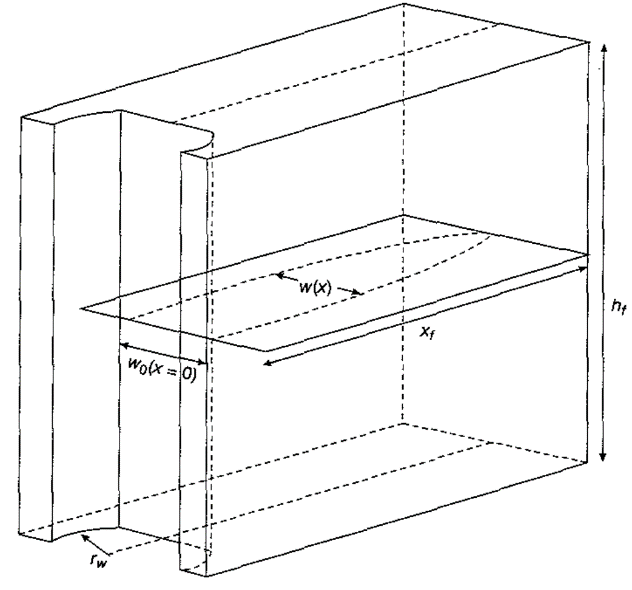


Рис. 2.1. KGD геометрия трещины

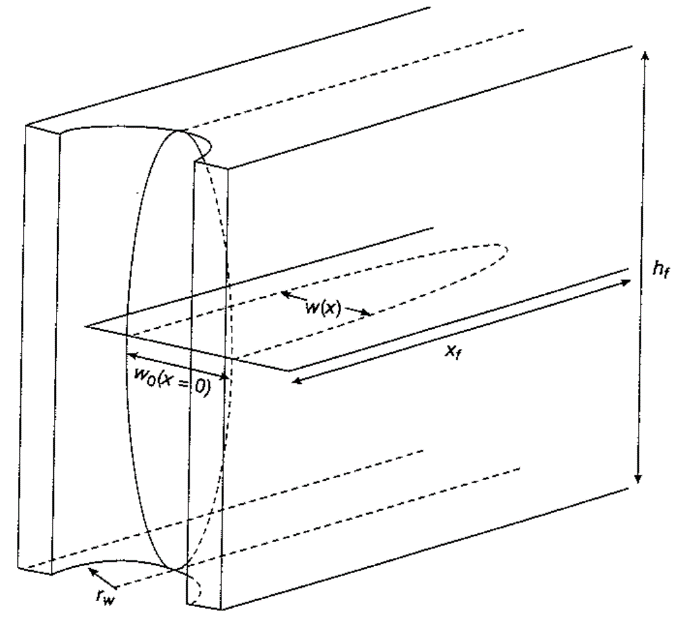


Рис. 2.2. PKN геометрия трещины

В модели KGD предполагается, выполнение условия плоских деформаций в горизонтальной плоскости трещины, что справедливо для случая, когда высота трещины больше, чем ее полудлина. В PKN модели трещины, наоборот, условие плоских деформаций выполняется в каждом вертикальном сечении, что соответствует случаю, когда горизонтальный размер трещины больше, чем ее высота.

Рассмотрим PKN модель трещины чуть более подробно. В основе этой модели лежат следующие допущения (см. рис. 2.3):

1. Высота трещины постоянна по всей ее длине,
2. Длина трещины гораздо больше, чем ее высота,
3. Любое вертикальное сечение трещины представляет собой эллипс,
4. Поток жидкости по трещине преимущественно горизонтальный,
5. Давление постоянно в любом вертикальном сечении трещины,
6. Фронт трещины вертикальный,
7. В каждом вертикальном сечении, вдали от кончика трещины, выполняется условие плоских деформаций.

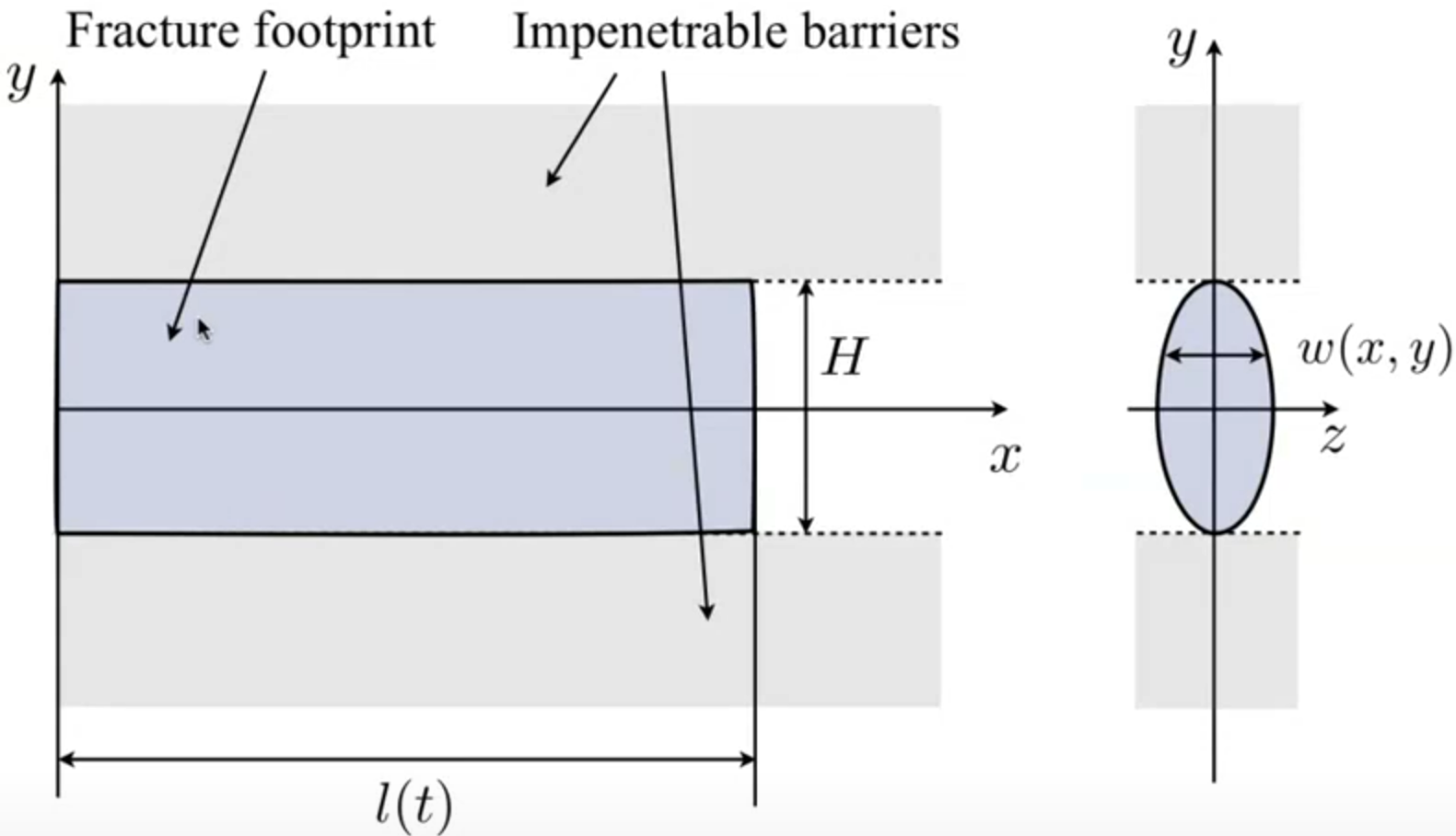


Рис. 2.3. PKN геометрия трещины

**2.2. Основные уравнения модели PKN**

Так как каждое сечение трещины в модели PKN представляет собой эллипс, мы можем ввести следующее выражение для раскрытия трещины:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (2.1) |

где это осредненное по вертикали истинное раскрытие трещины. Снэддон и Эллиот (1946) вывели формулу, связывающую чистое давление в каждом вертикальном сечении трещины с ее средним раскрытием:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (2.2) |

где чистое давление, определяемое как разница между давлением в трещине и минимальными горизонтальными напряжениями, модуль Юнга для случая плоско деформированного состояния. Течение жидкости по трещине определяется уравнением теории смазки, которое выглядит следующим образом:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (2.3) |

Усредняя это уравнение по высоте, получим

|  |  |
| --- | --- |
|  | (2.4) |

где выражение для получено с использованием выражений (2.1) и (2.3).

В результате имеем:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (2.5) |

В качестве критерия распространения трещины используется следующее условие:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (2.6) |

где трещиностойкость породы по первой моде разрушения.

На основании приведенных выше уравнений для растущей PKN трещины получены 4 асимптотических решения:

1. Storage viscosity
2. Leak-off viscosity
3. Storage toughness
4. Leak-off toughness

Закачиваемая жидкость может либо накапливаться в трещине (Storage), либо утекать в пласт (Leak-off). На рост трещины может большее влияние оказывать вязкость закачиваемой жидкости (Viscosity) либо трещиностойкость породы (Toughness). В зависимости от того какие параметры превалируют в том или ином случае будет использоваться конкретное решение для этого случая.

**ГЛАВА 3. МЕТОД КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ**

Метод конечных элементов является одним из наиболее популярных методов решения задач математической физики. Основное применение метода заключается в решении начально-краевых задач в двух- и трехмерных областях. Поясним суть метода на простом примере одномерной первой краевой задачи:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (3.1) |
|  | (3.2) |

Здесь функции известные функции, причем непрерывны, непрерывно-дифференцируема. Решение исходной задачи является дважды непрерывно-дифференцируемой функцией.

Сперва необходимо переформулировать исходную задачу с целью снижения требований, предъявляемым к функциям и . Для этого рассмотрим некоторую функцию , умножим на нее уравнение (3.1) и проинтегрируем по всему отрезку . После применения формулы интегрирования по частям, получим следующее выражение:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (3.3) |

Потребовав от функции удовлетворения граничным условиям (3.2), получим слабую (вариационную) формулировку исходной задачи:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (3.4) |

Теперь требования, предъявляемые ранее к входящим в формулировку задачи функциям, можно снизить и требовать, например, от искомой функции лишь непрерывной дифференцируемости. Отметим, что равенство (3.4) должно выполняться для любых .

Следующим шагом является построение приближенного решения, представляемого в виде линейной комбинации некоторых наперед заданных, линейно-независимых базисных функций, причем считаем, что эти функции удовлетворяют граничным условиям исходной задачи:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (3.5) |

После подстановки (3.5) в (3.4) получим

|  |  |
| --- | --- |
|  | (3.6) |

Так как выражение (1.4) должно выполняться для любых функций , в качестве этих функций возьмем базисные функции . После подстановки каждой базисной функции в выражение (3.6) получим систему линейных алгебраических уравнений для определения констант :

|  |  |
| --- | --- |
|  | (3.7) |

где элементы матрицы и вектора определяются следующим образом:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (3.8) |

Введем следующее обозначение:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (3.9) |

называемое соответственно билинейной формой. Тогда коэффициенты матрицы СЛАУ могут быть записаны через введенное обозначение следующим образом:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (3.10) |

Можем заметить, что матрица является симметричной.

По итогу, решение исходной краевой задачи свелось к решению системы линейных алгебраических уравнений. При этом, матрица системы может иметь большую размерность в случае выбора большого набора базисных функций. Вдобавок, матрица системы является сильно заполненной, что также способствует повышению вычислительных затрат. Избавиться от такого недостатка метода позволяет выбор базисных функций некоторого специального вида, а именно финитных базисных функций. В этом случае большинство элементов матрицы станут равными нулю, и матрица станет более разреженной. Напомним, что финитными называются такие функции, которые не равны нулю в пределах некоторой замкнутой области, а вне этой области обращаются в нуль. Разбив исходный отрезок на частей (рис. 3.1), можем определить набор базисных функций следующим образом:

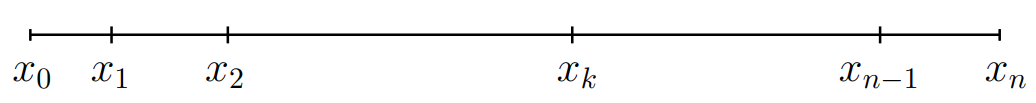
**

Рис. 3.1. Разбиение отрезка

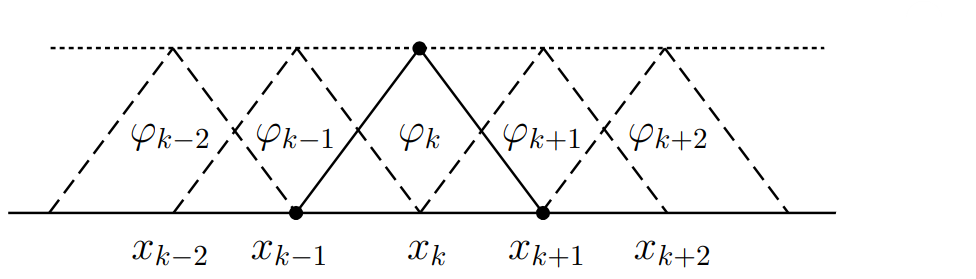


Рис. 3.2. Базисные функции

Перейдем теперь к более близкому нам случаю двумерной задачи. В качестве примера рассмотрим первую краевую задачу для уравнения Пуассона в области :

|  |  |
| --- | --- |
|  | (3.11) |

Также, как и в одномерном случае задача записывается в слабой формулировке. Для этого берется некоторая функция , исходное уравнение умножается на эту функцию и интегрируется по всей области:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (3.12) |

Преобразуем подынтегральное выражение в левой части равенства:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (3.13) |

Потребовав от функции удовлетворения граничным условиям и воспользовавшись формулой Остроградского-Гаусса, получим слабую формулировку исходной задачи:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (3.14) |

Далее, рассматриваемая область дискретизируется. Все вычисления в данной работе проводятся с помощью пакета с открытым исходным кодом FreeFem++, в котором есть встроенный генератор стеки. FreeFem++ проводит триангуляцию области, то есть разбивает исходную область на элементы, являющиеся треугольниками (см. рис.3.3). Вид приближенного решения аналогичен приведенному ранее. Приближенное решение задачи ищется в виде линейной комбинации финитных базисных функций:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (3.15) |

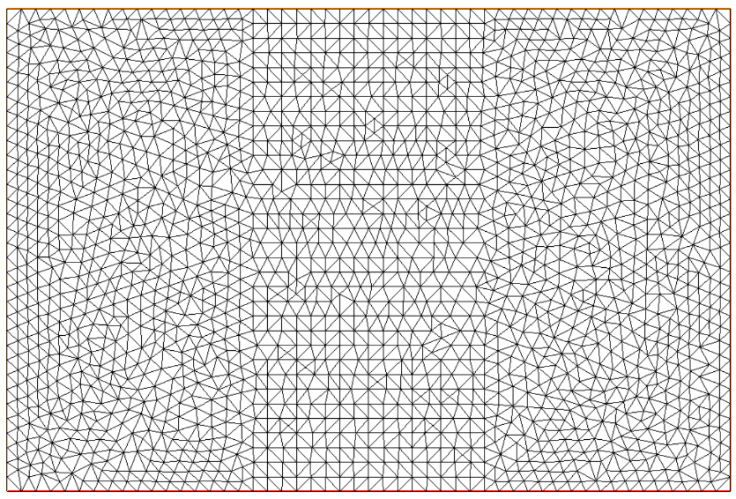


Рис. 3.3. Пример сетки FreeFem++

В FreeFem++ большой выбор типов базисных функций, наиболее распространенными являются кусочно-постоянные функции (P0-элементы), кусочно-линейные функции (P1-элементы) и кусочно-квадратичные функции (P2-элементы).

Обозначим -й элемент триангуляции как , вершины этого элемента обозначим соответственно , , . Кусочно-постоянные базисные функции (см. рис. 3.4) задаются следующим образом:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (3.16) |

Кусочно-линейные базисные функции имеют вид (рис. 3.5):

|  |  |
| --- | --- |
|  | (3.17) |

при этом

|  |  |
| --- | --- |
|  | (3.18) |

Кусочно-квадратичные функции задаются в следующем виде:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (3.19) |

при этом задаются они не только в узловых точках, но и в точках, являющихся серединами сторон треугольника (см. рис. 3.6 и 3.7).

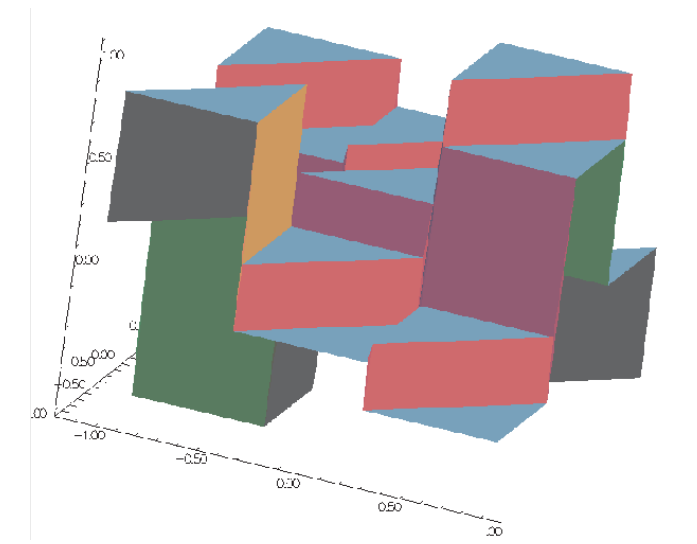


Рис. 3.4. Пример аппроксимации P0-элементами

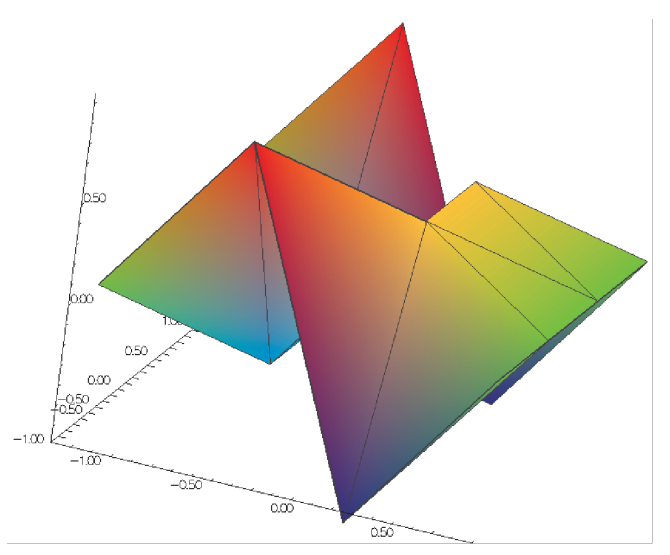


Рис. 3.5. Пример аппроксимации P1-элементами

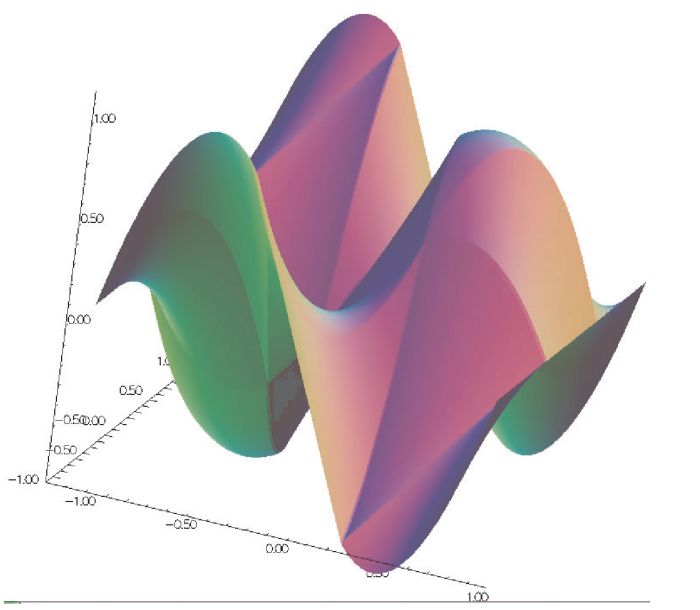


Рис. 3.6. Пример аппроксимации P2-элементами

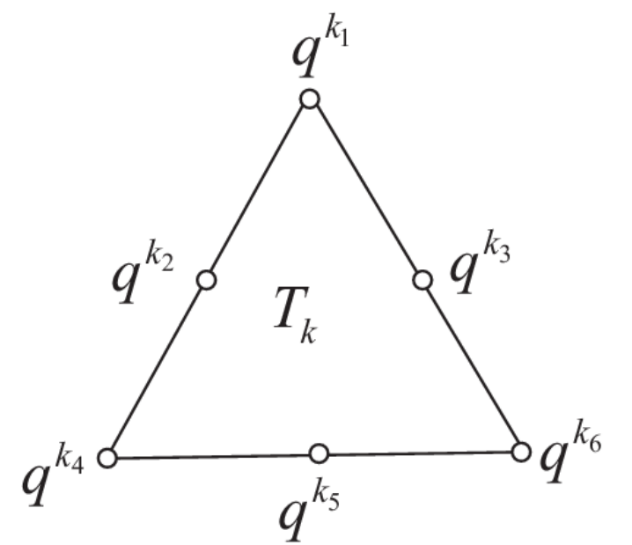


Рис. 3.7. Узлы разбиения для P2-элемента

**ГЛАВА 4. ПОСТРОЕНИЕ МОДЕЛИ**

**4.1. Основные допущения**

Рассмотрим PKN-геометрию трещины (Рис. 4.1). Как уже было сказано для этой модели предполагается, что:

* трещина имеет постоянную высоту по всей длине,
* длина трещины много больше ее высоты,
* каждое вертикальное сечение трещины представляет собой эллипс.

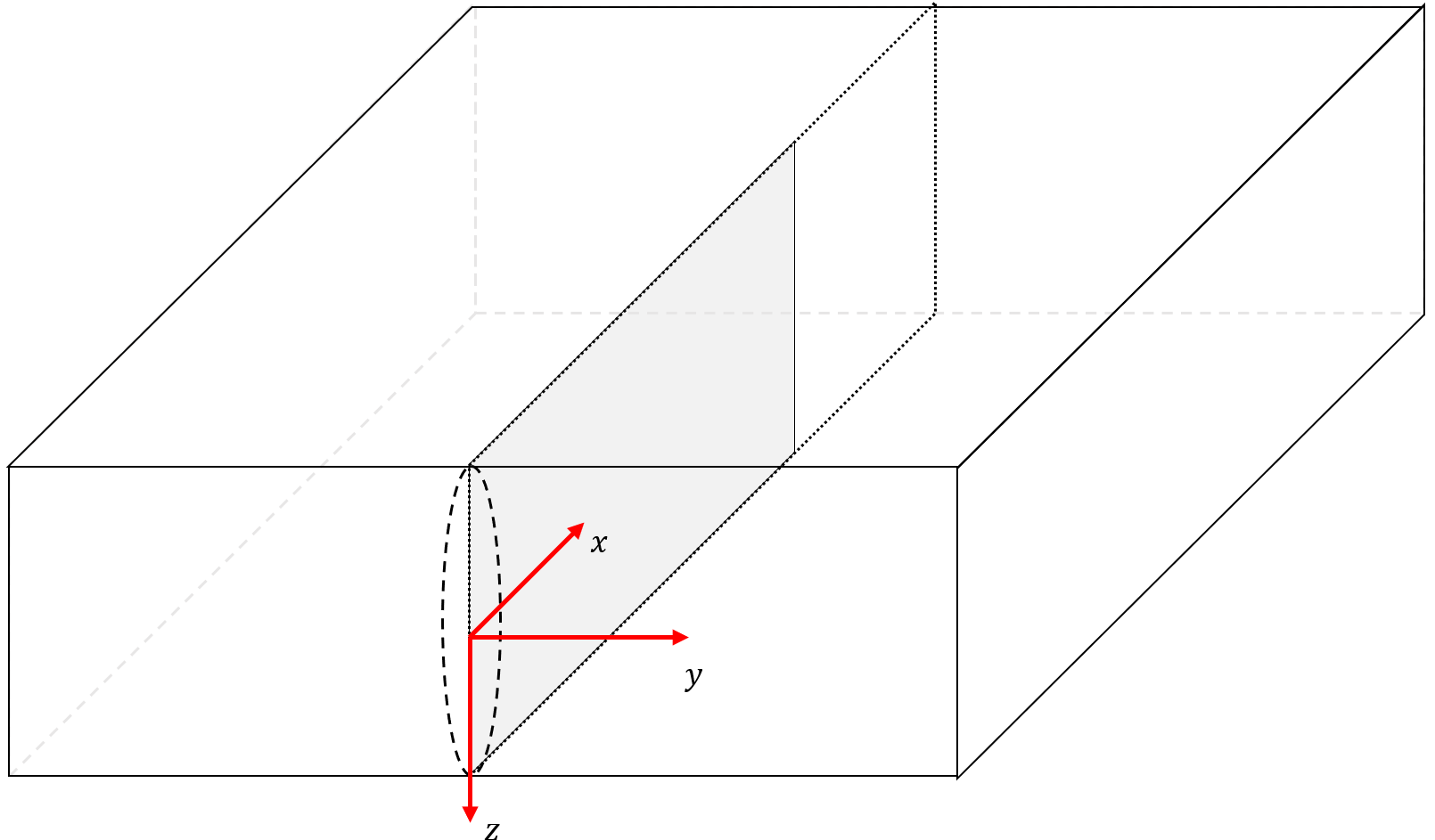
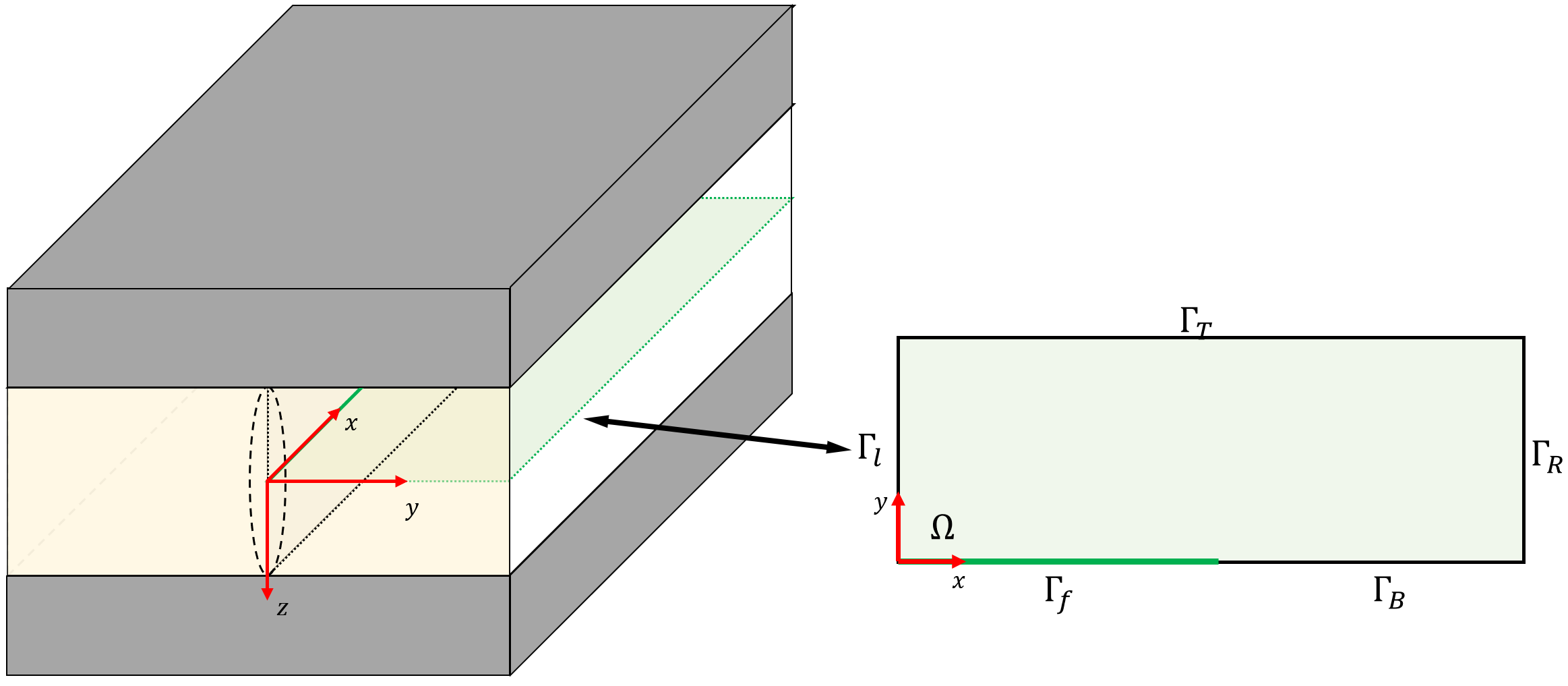


Рис. 4.1. Трещина в модели PKN (Perkins-Kern-Nordgred)

Из за того что вода низковязкая можем взять решение из пкн storage toughness и ликоф тафнес. Однако в случае автогрп утечки жидкости превалируют над накапливанием жидкости внутри трещины, следовательно для построения модели используется случай leakoff-toughness.

Используя полученное в главе 3 решение для случая наличия утечек жидкости в пласт и влияния трещиностойкости на кончике трещины, можем заключить что раскрытие трещины постоянно вдоль всей ее длины, давление, действующее в каждом сечении трещины на ее стенки, также постоянно по всей длине. В этом случае исходная задача упрощается и распадается на несколько подзадач, каждая из которых решается уже не в трехмерной области, а в двухмерной. Давление в области около трещины допустимо определять лишь в одном горизонтальном сечении. Распределенные по всему объему вокруг трещины обратные напряжения таким же образом определяются в этом же сечении. Раскрытие трещины моделируется в вертикальном сечении. Рис. 4.2 наглядно демонстрирует сказанное.



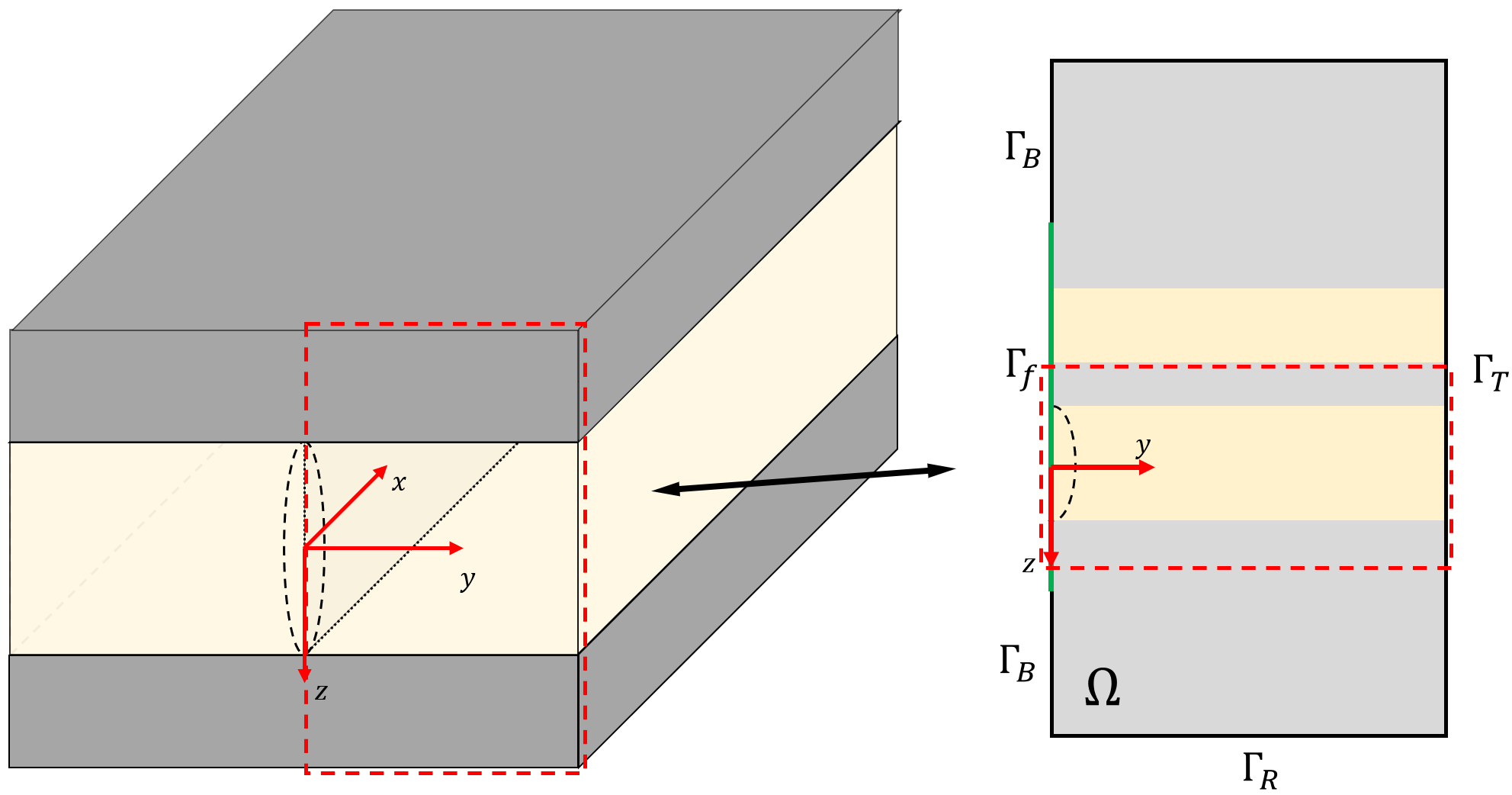


Рис. 4.2. Определение областей для подзадач

Таким образом, вместо решения одной трехмерной связанной задачи, мы будем решать несколько более простых задач в разных областях:

1. Задача фильтрации жидкости в пласт при заданном удельном объеме закачки,
2. Определение обратных напряжений с использованием полученного при решении предыдущей задачи поля давлений,
3. Определение раскрытия трещины с использованием найденных в предыдущих двух задачах давления на стенку трещины и обратных напряжений.

Здесь следует отметить, что исходная задача являлась связанной. В результате принятых упрощений и разделения задачи мы от связанности задачи уходим.

Рассмотрим теперь в отдельности каждую задачу более подробно. В рамках этой работы решались задачи определения обратных напряжений и раскрытия трещины. Поле давлений предполагалось уже известным, полученным при решении первой задачи.

**4.2. Постановка задачи об определении обратных напряжений и вывод слабой формулировки**

Необходимо найти напряжения, вызванные изменением порового давления в расчетной области вблизи трещины. Материал породы однородный и изотропный. Исходными уравнениями для данной задачи будут:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (5.1) |

где и параметры Ламе, записываемые через к-т Пуассона и модуль Юнга как

|  |  |
| --- | --- |
|  | (5.2) |

Предположим, что существует функция , называемая потенциалом, такая, что

|  |  |
| --- | --- |
|  | (5.3) |

После подстановки в систему уравнений (1.1) получим:

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |
|  | (5.4) |
|  |  |

Обозначим

Тогда система (5.4) записывается в следующем виде

|  |  |
| --- | --- |
|  | (5.5) |

где константа не зависит от и .

Получаем уравнение для определения потенциала :

|  |  |
| --- | --- |
|  | (5.6) |

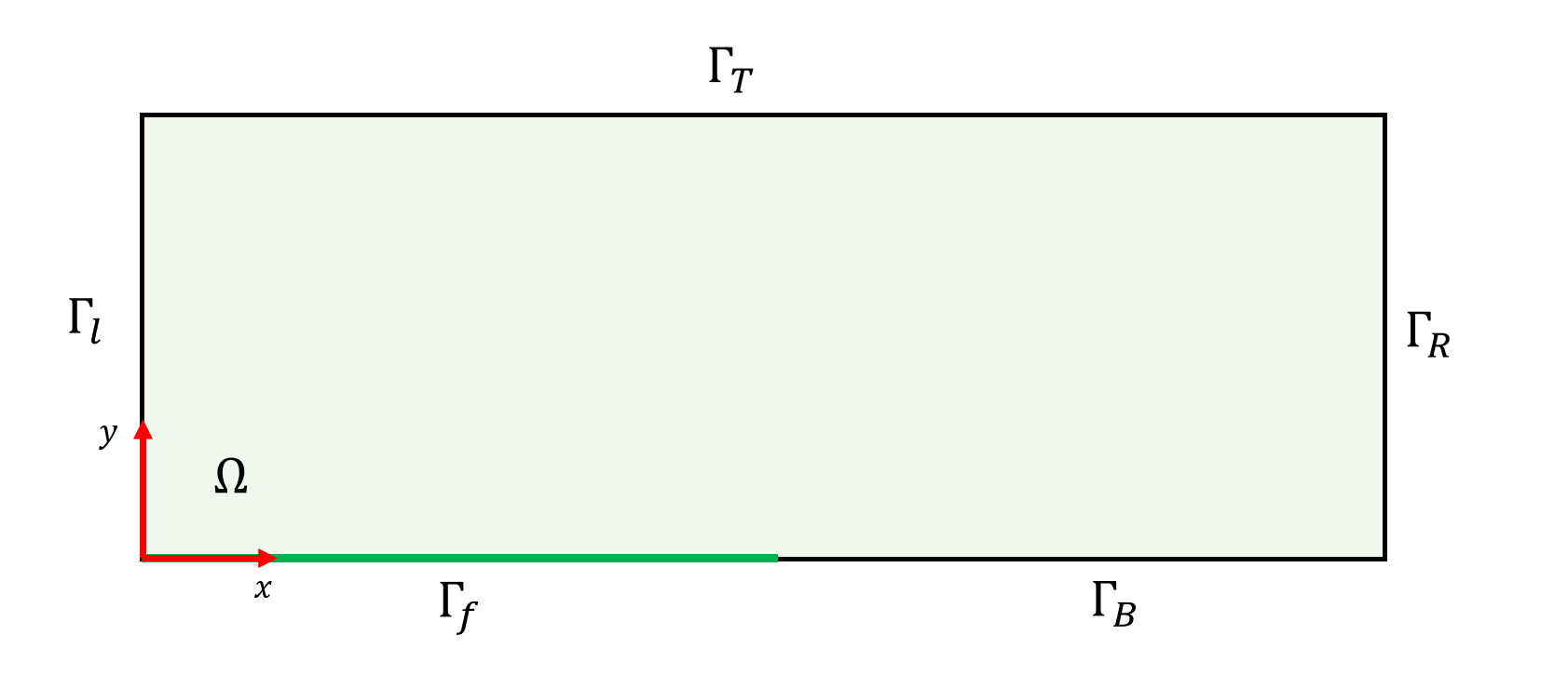


Рис.5.2 Расчетная область

Граничные условия:

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |
|  |  |
|  | (5.7) |
|  |  |
|  |  |

Выведем слабую постановку задачи. В качестве тестовой функции выберем такую, что

|  |  |
| --- | --- |
|  | (5.8) |

Умножим уравнение (5.6) на тестовую функцию и проинтегрируем по всей области:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (5.9) |

Преобразуем левую часть уравнения, используя следующее соотношение:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (5.10) |

и формулу Остроградского-Гаусса:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (5.11) |

Получаем:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (5.12) |

Рассмотрим отдельно контурный интеграл. В силу аддитивности интеграла:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (5.13) |

Интегралы по и равны 0 в силу выбора тестовой функции. Остальные равны нулю в силу граничных условий.

|  |  |
| --- | --- |
|  | (5.14) |

В результате имеем слабую постановку:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (5.15) |

**4.3. Постановка задачи об определении раскрытия трещины и вывод слабой формулировки**

Раскрытие инициируется давлением на границу где потенциально может находиться трещина. В задаче также учитываются обратные напряжения, вызванные пороупругим эффектом. Их действие моделируется нагрузкой, приложенной к .

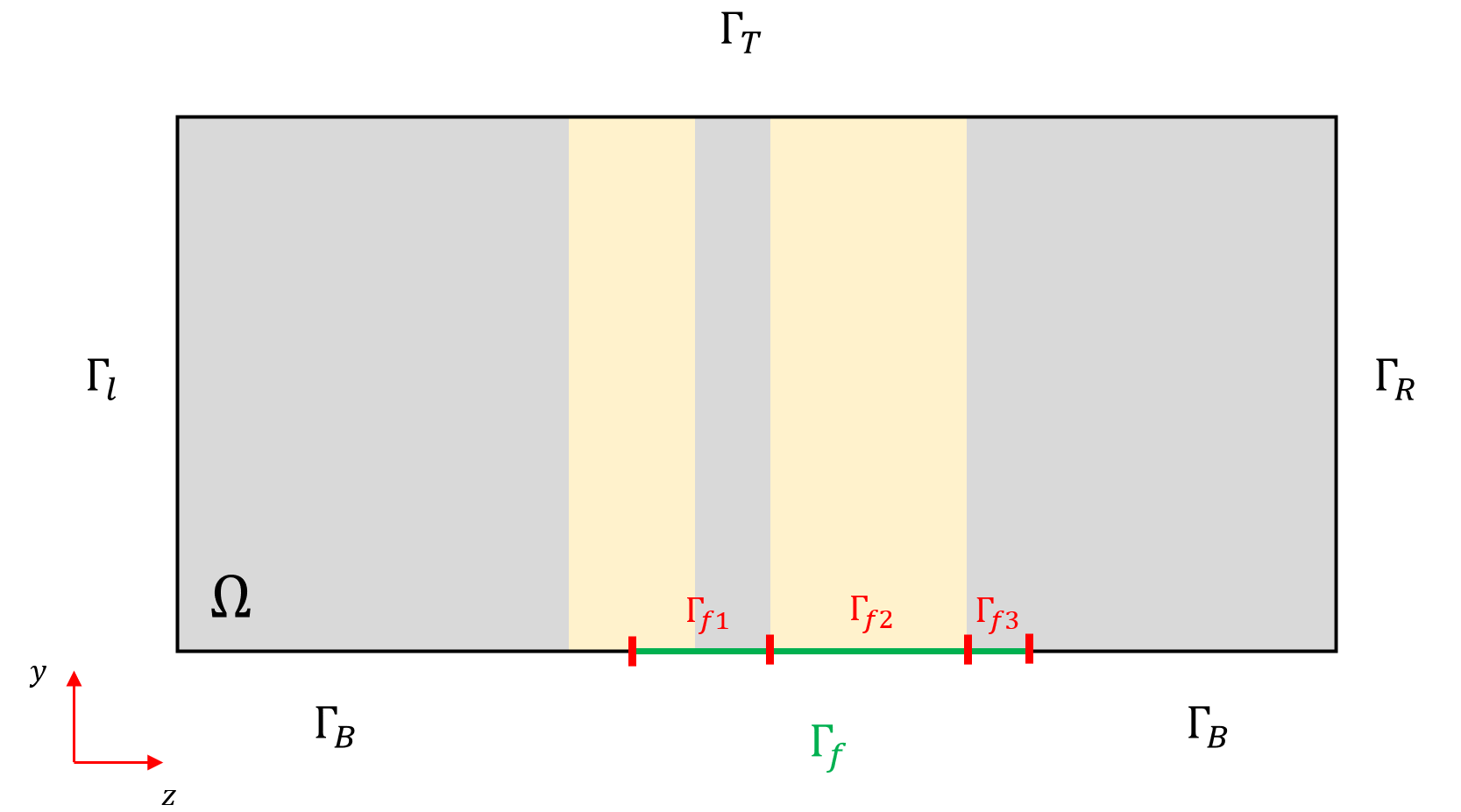


Рис.5.3 Расчетная область

Уравнения в области:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (5.16) |

Граничные условия:

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |
|  |  |
|  | (5.17) |
|  |  |
|  |  |

Граница трещины разделена на три части. Изначально давление прикладывается только к той части границы , которая непосредственно вскрывает пласт, то есть к . По мере раскрытия трещины, как только оно появится на оставшихся частях и , давление начнет прикладываться еще на те участки трещины, где есть раскрытие.

Тестовая функция:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (5.18) |

Умножим первое уравнение из системы (2.1) скалярно на и проинтегрируем по всей области:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (5.19) |

Преобразуем левую часть, используя приведенные ниже соотношения:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (5.20) |

|  |  |
| --- | --- |
|  | (5.21) |

Получаем:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (5.22) |

Распишем подробнее контурный интеграл:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (5.23) |

Распишем в отдельности каждый интеграл:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (5.24) |
|  | (5.25) |
|  | (5.26) |
|  | (5.27) |
|  | (5.28) |

В результате слабая постановка принимает вид:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (5.29) |