

# Дипломна работа

За придобиване на образователно-квалификационна степен  
бакалавър

---

## Адиабатен квантов контрол на свръхпроводников кюбит

---

*Представена от:*

Ивайло Иванов Иванов

Квантова и Космическа Теоретична Физика

Факултетен № 13131

Научен ръководител: акад. Николай Витанов



# Съдържание

<b>1</b>	<b>Въведение</b>	<b>2</b>
1.1	Принцип на действие на свръхпроводников квантов компютър .	2
1.2	Охладителна система . . . . .	3
1.3	Чипове и квантово превъзходство . . . . .	6
<b>2</b>	<b>Резонансни решения</b>	<b>9</b>
2.1	Системи с две нива . . . . .	9
2.2	Системи с три нива . . . . .	12
<b>3</b>	<b>Адиабатни решения за системи с две нива</b>	<b>15</b>
3.1	Без пресичане на нивата . . . . .	17
3.2	Пресичане на нивата . . . . .	18
3.2.1	Пълно пресичане на нивата (X Gate) . . . . .	18
3.2.2	Полупресичане на нивата (Hadamard Gate) . . . . .	19
3.3	Заключение . . . . .	20
<b>4</b>	<b>Алтернативни методи за квантов контрол</b>	<b>22</b>
4.1	Метод на композитните импулси . . . . .	22
4.2	DRAG (Derivative Removal by Adiabatic Gate) и GRAPE (Gradient Ascent Pulse Engineering) . . . . .	23
<b>5</b>	<b>Адиабатни решения за системи с три нива</b>	<b>26</b>
5.1	Известни методи за контрол с пресичане на нивата . . . . .	26
5.2	Елиминиране на нежелани квантови състояния в адиабатни квантови гейтове на свръхпроводников кюбит . . . . .	28
5.3	Свойства на адиабатните квантови гейтове . . . . .	31
<b>6</b>	<b>Заключение</b>	<b>34</b>

# Резюме

*Настоящата работа разглежда някои приложения на адиабатните методи за контрол над преходите на свръхпроводников кюбит и по-нататъшното им реализиране в квантови системи като тези на IBM и Гугъл. Първоначално е предоставено кратко изложение на принципа на действие на свръхпроводниковия кюбит, неговата реализация като част от цяла система при конструирането на квантови чипове и необходимата апаратура за конструирането на работещо квантово устройство. В края на тази глава са представени едни от най-добре развитите квантови устройства, принципът им на работа, както и някои интересни планове за развитието на технологията на квантовите компютри в обозримо бъдеще. Изведени са вече познатите модели на система с две нива – резонансни и адиабатни решения без и с пресичане на нивата, като поотделно е обърнато внимание на отделните видове пресичания при последните, реализиращи познатите в литературата квантови гейтове чрез различни крайни конфигурации на заселеност. Описани са и системите с три нива, като отново е разгледано резонансното решение. Тук то се разделя на два подвида – едно- и двуфотонен резонанс. Отделено е специално внимание на системите с два детюннга, като спецификата тук се състои в обосноваването на предположението, че най-високото по енергия ниво може да бъде изолирано от останалите две, като по този начин последните формират система с две нива, която ефективно да може да се използва за изчислителна единица (кюбит). Разгледани са и някои алтернативни методи за квантов контрол като бързи композитни гейтове с висока прецизност и DRAG и GRAPE алгоритмите, регулиращи външното поле за постигане на по-добра защита от изтичане на заселеност към по-високи състояния (leakage errors).*

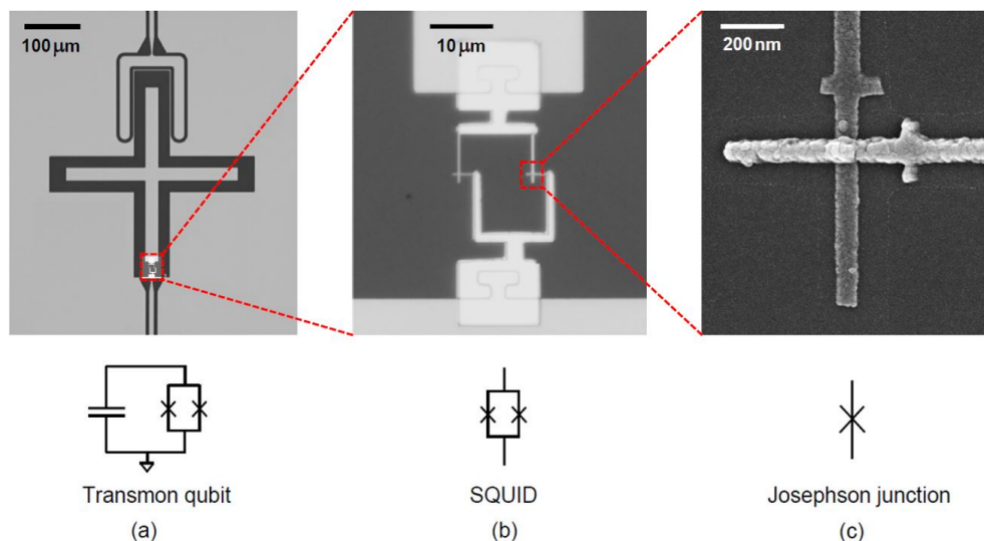
# Глава 1

## Въведение

Квантовите компютри представляват интерес от страна на научната общност и индустрията от десетилетия, не само заради възможността да бъдат използвани законите на квантовата механика за практическа реализация на съвсем нов тип изчислителен апарат, но и, както се оказва в някои случаи, устройство с много по-голяма изчислителна мощ от познатите класически компютри днес. За разлика от класическия бит, който може да заема две основни стойности (0 и 1) изчислителната единица на квантовия компютър – кубитът може да се намира в състояние на суперпозиция между двете, като след точно определена последователност от операции (прилагане на външно поле и използване на правилни алгоритми за контрол) се достига до желаното състояние. Това позволява използването на нови методи за решаване на сложни задачи, които биха отнели години изчисления дори и на най-мощния класически компютър. Такива задачи са например моделирането на сложни молекули за създаването на нови материали с определени свойства, точни симулации представлящи взаимодействията между заредени частици (електрони и йони) в големи системи като органични молекули, симулиране на йонния транспорт в различни видове батерии и други. Решенията, разгледани тук намират приложение в т.нар. свръхпроводникови квантови компютри. Тяхното устройство и принцип на действие ще бъдат обяснени накратко по-долу.

### 1.1 Принцип на действие на свръхпроводников квантов компютър

Свръхпроводниковия квантов компютър използва свръхпроводникови електрически елементи (като материали се използват например ниобий и алуминий) за реализиране на своята изчислителна дейност, наречени трансмони. Те се изграждат с помощта на кондензатори и връзки на Джозевсън. Последните представляват два свръхпроводника, разделени от слой с по-ниска проводимост или изолатор. При подаване на напрежение между свръхпроводниците, протича т.нар. свръхток, който продължава да тече дори след спиране на напрежението, поради липса на съпротивление. Тази комбинация кондензатор + връзки на Джозевсън са предпочитани при конструирането на свръхпроводникови квантови устройства, тъй като са пример за проява на квантови ефекти на макро ниво (връзките на Джозевсън се държат като нелинейни индукционни елементи, които в комбинация с кондензатор проявяват свойства на ахармоничен осцилатор), което позволява по-лесен контрол над състоянията в системата.



Фигура 1: Електронно-микроскопска снимка на трансмон. На електрическата схема отдолу се вижда системата кондензатор-SQUID елемент (Superconducting QUantum Interference Device).  
Източник: arXiv:2106.11352, 2021 [1]

Токоносителите във връзките на Джозевсън не са единични електрони, а представляват т.нар. Купърови двойки (двойки на Bardeen-Cooper-Schrieffer). Купъровите двойки са пример за композитни бозони, съставени от два взаимодействащи си електрона. Квантово-механично връзката помежду им грубо се обяснява чрез електрон-фоонното взаимодействие, където фооните представляват колективното движение на положително заредената кристална решетка в свръхпроводника. От друга страна бозонната структура на Купъровите двойки позволява те да заемат едно и също квантово състояние (кондензат на Бозе-Айнщайн), което води до свръхпроводимост.

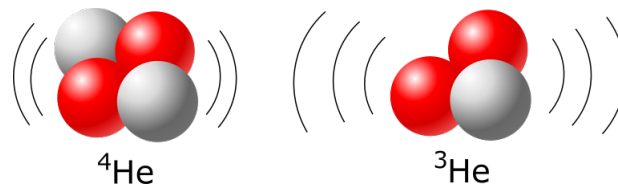
Контролирането и прочитането на информацията в кюбитите обикновено става чрез използването на електромагнитно лъчение в микровълновия спектър. Чрез подходящ подбор на интензивността на лъчението както и познаването на резонансната честота на трептене на Джозевсъновите връзки, същите могат да бъдат използвани като осцилатори, които да преминават от основно във възбудено състояние и обратно. Важно условие за правилното функциониране на квантовия бит обаче е наличието на температури близки до  $0K$ , което налага използването на специален тип системи за охлаждане.

## 1.2 Охладителна система

Достигането на криогенни температури при този тип квантови системи се осъществява чрез т.нар. охлаждащи системи с разреден хладилен агент (dilution refrigerators), които осигуряват необходимата за правилната работа на кюбитите температура. Работното вещество се състои от два изотопа на хелия –  $^3He$  и  $^4He$ , като след смесване и по-нататъшно изпомпване на  $^3He$  системата достига до температурни стойности по-ниски от петнадесет миликелвина ( $\leq 15 \times 10^{-3}K$ ). Устройството на системата е такова, че температурата намалява поетапно с преминаването все по-надолу по конструкцията на охлаждащата система. Квантовия процесор се закрепя в най-ниската точка, където е и най-ниската температура. Това задържа кюбитите по-дълго време в стабилно състояние и позволява реализирането на контролирани квантови преходи.

За да разберем защо двата изотопа на хелия се смесват спонтанно един с друг, нека си представим ситуацията на охладени  $^3He$  и  $^4He$  до температура  $0K$ . Заради принципа за неопределеност на Хайзенберг ( $\Delta x \Delta p = \frac{\hbar}{2}$ ), дори при изключително ниски температури

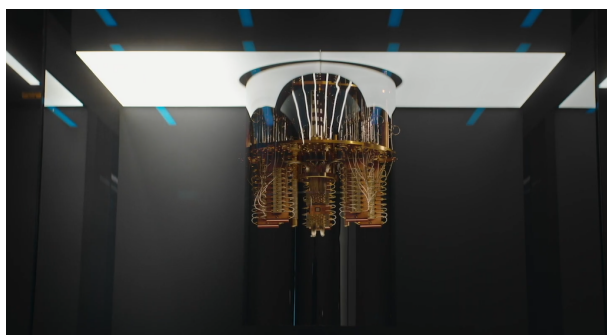
атомите на хелия се движат в рамките на определена област от пространството, пряко зависеща от масата на частиците. Хелият е инертен газ, което означава, че единственото възможно взаимодействие между двата изотопа, съставлящи хладилният агент на охлаждателната система е вследствие на наличието на слаби Ван дер Ваалсови сили. Тъй като  ${}^3\text{He}$  е с около 25% по-лек от  ${}^4\text{He}$  част от атомите на по-лекия изотоп ще се разтворят в по-тежкия поради по-късото разстояние във връзката  ${}^3\text{He} \leftrightarrow {}^4\text{He}$ , отколкото тази на  ${}^3\text{He} \leftrightarrow {}^3\text{He}$ . Този процес е свързан с топлообмен от околната среда към сместа. В охлаждаелните системи с разреден хладилен агент именно на границата между двете течни фази се поставя обекта, чиято температура трябва да бъде понижена.



Фигура 2: Различните амплитуди на трептене на  ${}^3\text{He}$  и  ${}^4\text{He}$  благоприятстват връзката между двата различни изотопа.

Най-простото обобщение на една такава охлаждаелна система може да се даде чрез U-образна тръба от едната страна на която са наляти двете течни фази на  ${}^3\text{He}$  и  ${}^4\text{He}$ . Тъй като  ${}^3\text{He}$  е по-лек, то той ще изплува на повърхността като в началото ще се образува ясна граница между двата изотопа. Заради ефектите, обяснени по-рано част от по-лекия изотоп ще започне да се разтваря в по-тежкия до достигане на равновесна концентрация (около 6,4%). Ако от другата страна на тръбата поставим нагревател с помпа ще създадем условия за отделяне на  ${}^3\text{He}$  от разтвора, тъй като той има по-ниска температура на кипене, а помпата ще послужи за физическото отделяне на атомите от сместа. Така разтворът ще започне да обеднява от страна на по-лекия изотоп, което на своя страна ще доведе до ново разтваряне на границата между двете течни фази. Процесът може да продължи вечно като при всяко ново разтваряне на границата се поглъща топлина от околната среда и всеки образец поставен в близост ще започне да се охлажда.

Разбира се устройството на същинските охлаждаелни апарати е по-сложно. То се състои основно от пет части: циркуляционна система, топлообменник, дестилатор, смесителна камера и фононен изолатор. [3]



Фигура 3: Охладителната система Quantum System One на IBM.  
Източник: Commanding the power of nature with IBM Quantum systems

### Циркуляционна система

Циркулационната система служи за преноса на отделните изотопи на хелия и тяхната смес до останалите части на апарата. В конструкцията ѝ са включени също помпи, спомагащи преноса на изотопите и хелиевата смес до различни части на охладителната система както и импеданси, водещи към дестилатора и смесителната камера. Импедансите представляват капилярки с високо съпротивление при протичане на хладилния агент. По време на протичането си през отделните части на охладителната машина, хладилния агент се охлажда поетапно чрез серия от топлообменници до достигане на смесителната камера. [4]

#### Топлообменник

Топлообменниците са устройства, способстващи преноса на топлина между отделни части на охладителната система. По пътя на чистата фаза на хелия към смесителната камера например, се намира топлообменник, който позволява охлаждането на чистия хелий от изпомпваната към дестилатора хелиева смес, като с това топлината на отделните изотопи намалява още повече, което води до по-добър охлаждащ ефект при смесването на изотопите в смесителната камера.

#### Смесителна камера

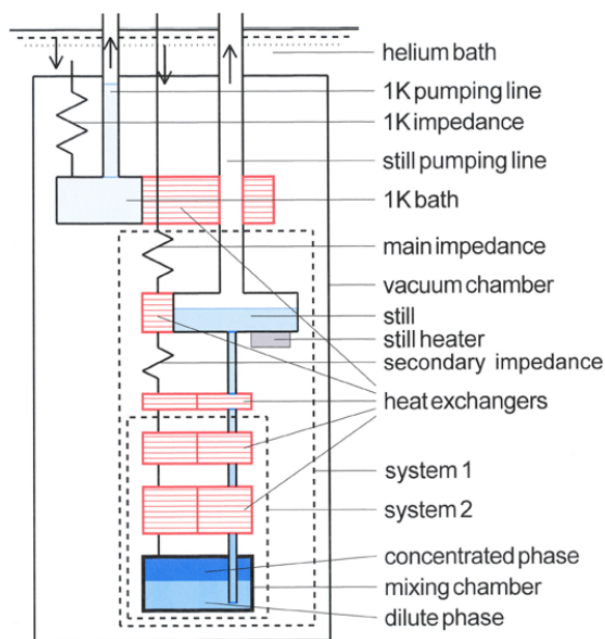
След преминаване през останалите етапи на предварително охлаждане, двата изотопа навлизат в смесителната камера ( $^3\text{He}$  "изплува" над  $^4\text{He}$  поради по-малката си маса) където се случва спонтанно разтваряне на  $^3\text{He}$  в  $^4\text{He}$ . Тъй като хелия е инертен газ, свързване между отделните атоми се осъществява от слаби Ван-дер-Ваалсови сили на привличане, които са по-здрави при  $^3\text{He} \leftrightarrow ^4\text{He}$ , отколкото между два  $^3\text{He}$  атома. Поради тази причина на границата между двете фази в смесителната камера преференциално се случва разтваряне на по-лекия изотоп в по-тежкия. Това води до увеличаване на ентропията на системата съпроводено с поглъщане на топлина, което води до охлаждане на всичко поставено в термичен контакт с мястото на образуваната граница между двата изотопа. Образуват се т.нар. обогатена и разрежена фаза, като след това разредената фаза се насочва към дестилатора.

#### Дестилатор

При навлизане на разредената фаза в дестилатора тя се нагрива, при което  $^3\text{He}$  се изпарява (поради по-ниската си температура на кипене) и бива изпомпан извън дестилатора, в циркулационната система. В останалата част от сместа, сега почти изцяло  $^4\text{He}$  от едната страна, се образува осмотично налягане, което придвижва разтворения  $^3\text{He}$  към дестилатора. Съществува и метод, чрез който тази смес се пренасочва през свръхфлуидна капилярка (позволяваща преминаването единствено на свръхфлуидния  $^4\text{He}$ ) обратно към смесителната камера, където да послужи за ново разтваряне на  $^3\text{He}$  и ново понижаване на температурата. [5]

#### Фононен изолатор

За по-добра топлинна изолация се използват т. нар. фононни изолатори, които служат като буфери на молекулни трептения. С други думи, вследствие работата на охладителната система могат да се появят вибрации в частите, отговарящи за охлаждането на образеца, което води до нежелано повишаване на температурата. Това може да бъде избегнато с помощта на устройства, компенсирани излишните вибрации, с което се постига съответната изолация.



Фигура 4: Схематично представяне на охладителна система, работеща с изотопите  $^3\text{He}/^4\text{He}$ .

Източник: *Journal of Low Temperature Physics*, 164(5):179-236, 2011 [6]

От казаното дотук става ясно, че за правилната работа на свръхпроводниковия квантов компютър от особена важност е наличието на добра изолация и изключително ниски температури. С увеличаването на изчислителната мощ и броя кубити в квантовите процесори тази задача става все по-трудна, което налага създаването на все по-нови и мощни охлаждащи системи.

### 1.3 Чипове и квантово превъзходство

Теоретично, квантов чип с над 50-70 взаимодействащи си кубита е способен да решава задачи, невъзможни за решаване дори от най-мощния класически суперкомпютър (или поне невъзможни за решаване в обозримо бъдеще). Това предполагаемо свойство на квантовите компютри, познато като "квантово превъзходство" е една от основните мотивации за създаване на изчислителни устройства, разчитащи на квантовите ефекти за извършване на своята дейност. На практика обаче откриването на такава задача е трудно, тъй като съществуват редица пречки, които трябва да бъдат превъзможнати. Например не винаги е ясно, че дадената задача наистина е решима единствено от квантов компютър, тъй като е възможно да бъде създаден ефективен алгоритъм за класически компютър в бъдеще. Съществуват и проблеми за отделянето на правилното решение (error correction), породени от некохерентности и шум, създаване на ефективни алгоритми, съвместими със законите на квантовата механика за решаване на определена задача и др.

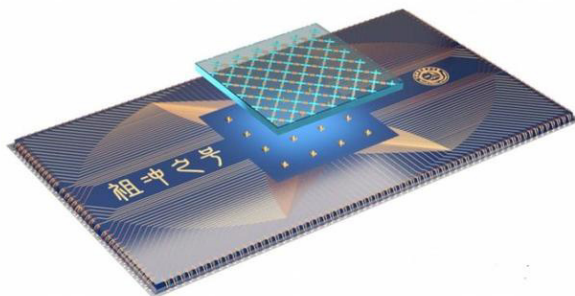
Въпреки това вече са създадени редица технологии за конструиране на квантови процесори както и алгоритми за по-дълги времена на кохерентност и елиминирание на грешките при изчисленията, както и евентуални техни подобрения. Например предишни поколения квантови процесори използват трансмони, организирани в двумерна правоъгълна решетка като по този начин всеки кубит (с изключение на крайните) е свързан с четири свои съседа с цел по-голяма прецизност при измерванията на зададеното състояние. Такава структура обаче води и до така наречения "crosstalk" между най-близките съседи, който на своя страна повишава грешката при измерване. Сред квантовите системи вече все повече започва да се налага хексагоналното организиране, което намалява броя най-близки



съседни на три, а с това и съответния "crosstalk".

През 2019 г. Гугъл обявява че техният Sycamore процесор (53 кубита) е завършил изчисление за 200 секунди, което на класически суперкомпютър (Summit) би отнело около 10 000 години. Въпреки че това твърдение не бе напълно потвърдено (по-късното становище на IBM е че техният суперкомпютър може да реши предложената задача за 2.5 дни), процесорът на Гугъл е бил използван за решаване на редица сложни задачи като химическа симулация, използваща методът на Хартри-Фок, решаване на квантовата задача за локализиране на конфигурация от частици със спин-нагоре и спин-надолу за дискретен времеви кристал и др.

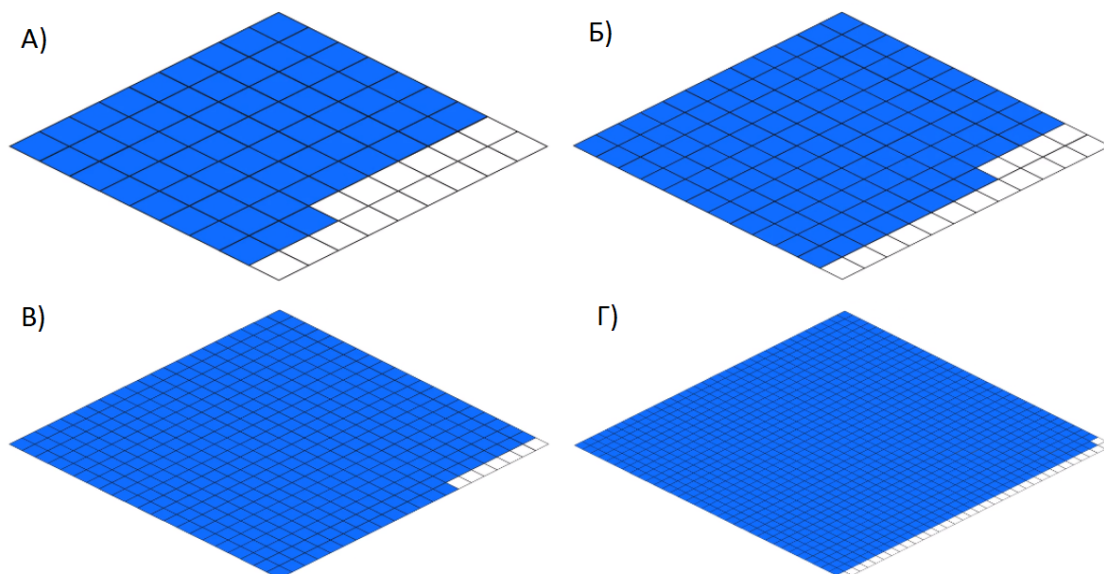
По-късно китайският свръхпроводников квантов компютър Zuchongzhi също демонстрира квантово превъзходство, използвайки сапфирен чип с 66 кубита и 110 връзки. Проведените симулации в статия от юни 2021 г. [7] показват значително повишаване на изчислителната мощ (2-3 порядъка) в сравнение с демонстрираната от Sycamore през 2019 г., разграничавайки още повече възможностите на квантовите компютри в сравнение с класическите машини.



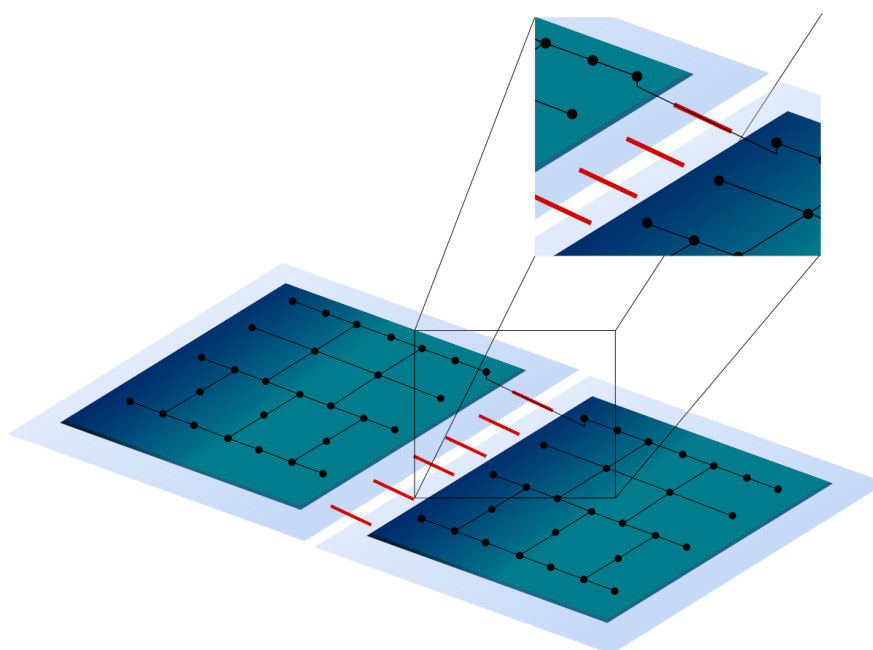
Фигура 5: Компютърен модел на квантовия процесор Zuchongzhi. Показани са двата чипа, единият от които съдържа свързаните в правоъгълна решетка кубити. Другият съдържа контролната шина както и отчитащите елементи.

Източник: *Physical review letters*, 127(18):180501, 2021 [7]

Друг лидер в конструирането на квантови чипове е IBM, които за няколко години успяват да демонстрират изключителен напредък в развитието на своите системи (охлаждане и брой кубити в чип). Настоящият 127 кубитов чип Eagle е най-мощният в света. Структурата му дава възможност за по-нататъшно увеличаване на броя кубити, което е планирано да се случи през следващите няколко години. В допълнение, разширяването на системите след границата от 1000 кубита се очаква да се осъществи с помощта на допълнителни структури като връзки тип чип-чип (chip-to-chip couplers), позволяващи директна комуникация между два кубита намиращи се в два отделни чипа. Връзки, осъществяващи класическа комуникация между отделни чипове или цели чипсетове, отделните елементи на които са свързани чрез чип-чип връзки, също се планират до края на 2025 г. Въпреки че подобно паралелно свързване е свързано със значително забавяне по време на изчисленията, то ще доведе до по-голяма и бърза мащабируемост на системите, което ще даде възможност на потребителите да използват много по-голям брой кубити за осъществяване на своята дейност.



Фигура 6: Графично представяне на развитието на чиповете на IBM от гледна точка на броя кубити в един чип (сините квадрати). **А)** Hummingbird с 65 кубита, създаден през 2020 г., **Б)** настоящия Eagle с 127 кубита (2021 г.) **В)** Osprey: 433 кубита (2022 г.) и **Г)** Condor: 1121 кубита (2023 г.)



Фигура 7: Структура тип чип-чип, използвана от IBM за паралелизиране и допълнително увеличаване на общия брой кубити, участващи в един изчислителен процес.

До сега обърнахме внимание най-вече на хардуерната част от изграждането на един квантов компютър и методите за реализация на ефективна система, проявяваща квантови свойства на макрониво. Фокусът в следващите глави ще бъде върху контрола над преходите между състоянията в единичен кубит, притежаващ поведение на хармоничен осцилатор.

# Глава 2

## Резонансни решения

Съществуват редица методи за контрол на квантови системи с две и повече нива, които често намират приложение в различни практически области като например атомната оптика, лазерния контрол на химични реакции, т.нар. оптични центрифуги, квантовата информатика и др. В следващите няколко глави (2, 3 и 5) ще се спрем на метод, познат в литературата като адиабатен квантов контрол на системи с две и три нива. Тук ще започнем с най-простият случай на резонансни системи като постепенно ще налагаме допълнителни условия до достигане на решения, в които вече липсва резонанс поради наличието на т.нар. честотни отмествания.

Нека разгледаме система с две нива, при която степента на заселеност за всяко ниво се променя с помощта на външно поле. Хамилтонианът система-поле ще се задава с уравнението:

### 2.1 Системи с две нива

$$\hat{H} = \hat{H}_0 - \hat{\mathbf{d}} \cdot \mathbf{E}(t), \quad (2.1)$$

където  $\hat{H}_0$  е Хамилтониана на изолираната система, а  $\hat{\mathbf{d}} \cdot \mathbf{E}(t)$  е частта, описваща взаимодействието на системата с външното поле. Интензитетът на полето удовлетворява уравнението:

$$\mathbf{E}(t) = \epsilon E_0 \cos(\omega t). \quad (2.2)$$

Тук  $\epsilon$  е векторът на поляризация,  $E_0$  амплитудата, а  $\omega$  честотата на приложеното поле. Използвайки теорията на нестационарните пертурбации получаваме системата диференциални уравнения:

$$i \frac{d}{dt} c_1(t) = \frac{d_{12} E_0}{\hbar} e^{-i\omega_{21}t} \cos(\omega t) c_2(t), \quad (2.3a)$$

$$i \frac{d}{dt} c_2(t) = \frac{d_{12} E_0}{\hbar} e^{i\omega_{21}t} \cos(\omega t) c_1(t), \quad (2.3b)$$

където  $d_{12}$  е матричният елемент  $\langle 1 | \hat{\mathbf{d}} \cdot \epsilon | 2 \rangle$  или математическото очакване на диполния момент  $\langle 1 | \hat{\mathbf{d}} | 2 \rangle$ , проектирано върху вектора на поляризация  $\epsilon$ , а  $\Omega = \frac{d_{12} E_0}{\hbar}$  има размерност на честота и се нарича честота на Раби. Използвайки тригонометричното съотношение  $\cos(\omega t) = \frac{1}{2} (e^{i\omega t} + e^{-i\omega t})$  преобразуваме диференциалните уравнения във вида:

$$i\frac{d}{dt}c_1(t) = \frac{\Omega}{2}e^{-i\omega_{21}t} (e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}) c_2(t), \quad (2.4a)$$

$$i\frac{d}{dt}c_2(t) = \frac{\Omega}{2}e^{i\omega_{21}t} (e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}) c_1(t), \quad (2.4b)$$

или след умножаване на експонентите:

$$i\frac{d}{dt}c_1(t) = \frac{\Omega}{2} (e^{i(\omega-\omega_{21})t} + e^{-i(\omega+\omega_{21})t}) c_2(t), \quad (2.5a)$$

$$i\frac{d}{dt}c_2(t) = \frac{\Omega}{2} (e^{-i(\omega-\omega_{21})t} + e^{i(\omega+\omega_{21})t}) c_1(t). \quad (2.5b)$$

Членът в експонентата  $\Delta = \omega - \omega_{21}$  задава честотното отместване на полето спрямо Боровата честота на системата (детюнинг). Другият член в експонентата  $\omega + \omega_{21}$  предизвиква много бързи осцилации и при сравнително бавно-изменящи се вектори на състоянието можем да приложим т.нар. приближение на въртящата се вълна (Rotating Wave Approximation) и да пренебрегнем високочестотните членове:

$$i\frac{d}{dt}c_1(t) = \frac{\Omega}{2}e^{i(\omega-\omega_{21})t}c_2(t), \quad (2.6a)$$

$$i\frac{d}{dt}c_2(t) = \frac{\Omega}{2}e^{-i(\omega-\omega_{21})t}c_1(t). \quad (2.6b)$$

Това приближение е валидно само в случаите на нулев или близък до нула детюнинг ( $\Delta \approx 0$ ).

В настоящата задача поради наличието на резонанс честотата на полето и Боровата честота са равни, което означава  $\Delta = 0$  и системата придобива най-простия възможен вид:

$$i\frac{d}{dt}c_1(t) = \frac{\Omega}{2}c_2(t), \quad (2.7a)$$

$$i\frac{d}{dt}c_2(t) = \frac{\Omega}{2}c_1(t). \quad (2.7b)$$

Тази система се решава чрез диференциране на първото уравнение по времето:

$$i\frac{d^2}{dt^2}c_1(t) = \frac{\Omega}{2}\frac{d}{dt}c_2(t) \quad (2.8)$$

и заместване на производната  $\frac{d}{dt}c_2(t)$  с нейното равно от второто уравнение. Това води до следното диференциално уравнение от втори ред:

$$\frac{d^2}{dt^2}c_1(t) = -\frac{\Omega^2}{4}c_1(t). \quad (2.9)$$

Решението на последното диференциално уравнение е:

$$c_1(t) = \cos\left(\frac{\Omega t}{2}\right), \quad (2.10)$$

удовлетворяващо началните условия:  $c_1(0) = 1$  и  $c_2(0) = 0$ . По аналогичен начин получаваме решението за втората компонента  $c_2(t)$ :

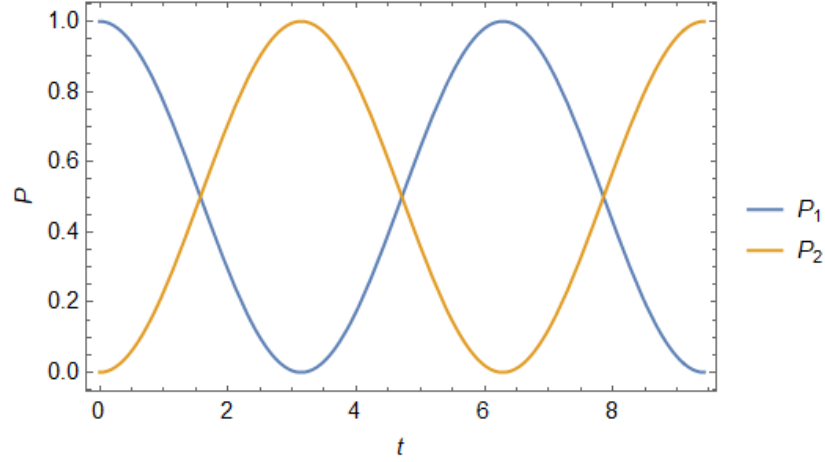
$$c_2(t) = -i\sin\left(\frac{\Omega t}{2}\right). \quad (2.11)$$

За да получим стойностите на заселеностите просто взимаме абсолютната стойност на всяка компонента на  $\mathbf{c}(t)$  и повдигаме на квадрат:

$$P_1 = |c_1(t)|^2 = \cos^2\left(\frac{\Omega t}{2}\right), \quad (2.12a)$$

$$P_2 = |c_2(t)|^2 = \sin^2\left(\frac{\Omega t}{2}\right), \quad (2.12b)$$

т.е. заселеностите и за двете нива осцилират във времето по синусоидален закон. Това поведение се нарича осцилации на Раби:



Фигура 8: Графика на заселеността на система с две нива за време  $t$ . Решението на горната задача води до осцилации, познати като осцилации на Раби. За определеност честотата на Раби  $\Omega = 2$ .

Уравнения (2.12) могат да бъдат допълнително преобразувани във вида:

$$P_1 = \frac{1}{2}(1 + \cos \Omega t), \quad (2.13a)$$

$$P_2 = \frac{1}{2}(1 - \cos \Omega t). \quad (2.13b)$$

Тези решения са в сила за постоянно поле. Когато амплитудата на полето варира, аргумента на косинуса се заменя с така наречената площ на импулса (pulse area):

$$\Omega t \rightarrow \int_{-\infty}^t \Omega(t') dt' = \mathcal{A}(t) \quad (2.14)$$

От (2.13) става ясно че заселеността при резонанс осцилира между състоянията 0 и 1, като какво ще бъде крайното състояние зависи от стойността на  $\mathcal{A}(t)$ . Ако площта на импулса е равна на четни стойности на  $\pi$ , системата остава в началното състояние (състоянието в което се е намирал осцилатора преди прилагане на външно поле) и обратно, ако  $\mathcal{A}(t)$  е равна на нечетни стойности на  $\pi$ , системата претърпява пълен популационен преход от едното в другото състояние.

Интересни са случаите когато  $\mathcal{A}(t) = \pi$  или  $\mathcal{A}(t) = \frac{\pi}{2}$ . В първия случай заселеността на първоначално незаселеното ниво достига  $P = 1$ , което съответства на пълна размяна на заселените състояния или т.нар. X-Gate. Във втория случай, когато площта на импулса е равна на  $\frac{\pi}{2}$ , максималната стойност на заселеността е  $P = \frac{1}{2}$ , което съответства на суперпозиция от състояния в края на еволюцията. Това е познато в литературата като гейт на Адамард (Hadamard Gate).

## 2.2 Системи с три нива

Сега ще разгледаме поведението на малко по-сложните системи с три нива, при които вече Хамилтонианът представлява матрица  $3 \times 3$  от вида:

$$\hat{H}(t) = \hbar \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2}\Omega_1(t) & 0 \\ \frac{1}{2}\Omega_1(t) & \Delta(t) & \frac{1}{2}\Omega_2(t) \\ 0 & \frac{1}{2}\Omega_2(t) & \delta(t) \end{bmatrix}, \quad (2.15)$$

където  $\Omega_1(t)$  и  $\Omega_2(t)$  представляват честотите на Раби при преход между първо и второ състояние и второ и трето състояние, а  $\Delta(t)$  и  $\delta(t)$  са съответните честотни разлики. Ако  $\delta = 0$ , настъпва двуфотонен резонанс и системата преминава директно от първо в трето състояние. Хамилтонианът на системата добива вида:

$$\hat{H}(t) = \hbar \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2}\Omega_1(t) & 0 \\ \frac{1}{2}\Omega_1(t) & \Delta(t) - i\Gamma & \frac{1}{2}\Omega_2(t) \\ 0 & \frac{1}{2}\Omega_2(t) & 0 \end{bmatrix}. \quad (2.16)$$

Тогава уравнението на Шрьодингер за амплитудите на вероятност е:

$$i \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2}\Omega_1(t) & 0 \\ \frac{1}{2}\Omega_1(t) & \Delta(t) - i\Gamma & \frac{1}{2}\Omega_2(t) \\ 0 & \frac{1}{2}\Omega_2(t) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix}. \quad (2.17)$$

Нека  $\Omega_1(t)$  и  $\Omega_2(t)$  са положителни, тъй като както стана ясно в Глава 3 заселеностите не зависят от знаците им. Също така често е по-удобно  $\Omega_1(t)$  и  $\Omega_2(t)$  да споделят една и съща функционална зависимост (обаче с различни амплитуди):

$$\Omega_1(t) = A_1 g(t) \quad , \quad \Omega_2(t) = A_2 g(t). \quad (2.18)$$

Нека предположим и че началната стойност  $\mathbf{c}(-\infty) = [c_1(-\infty), c_2(-\infty), c_3(-\infty)]^T$  е известна. Тогава задачата се свежда до намирането на заселеностите  $P_i = |c_i(+\infty)|^2$  за нивата  $i = 1, 2, 3$ .

При решаването на подобен тип задачи е удобно да се въведат т.нар. тъмно и светло състояния. Тъмното представлява суперпозиция от състоянията  $|1\rangle$  и  $|3\rangle$ . Липсата на  $|2\rangle$  го прави нечувствително към разпадане на метастабилното средно състояние към други пониски нива, а понякога може дори да се отдели от полетата и изобщо да не взаимодейства с тях. Нека дефинираме светлото  $|b\rangle$  и тъмното  $|d\rangle$  състояния по следния начин:

$$|b\rangle = \sin \theta |1\rangle + \cos \theta |3\rangle, \quad (2.19a)$$

$$|d\rangle = \cos \theta |1\rangle - \sin \theta |3\rangle. \quad (2.19b)$$

Тук ъгълът  $\theta$  се задава чрез тригонометричното равенство:

$$\tan \theta = \frac{\Omega_1(t)}{\Omega_2(t)} = \frac{A_1}{A_2}. \quad (2.20)$$

Понеже функционалната зависимост от времето за импулсите е една и съща (уравнение (2.18)),  $\theta$  е константна, а следователно и  $|b\rangle$  и  $|d\rangle$ . Прилагайки трансформацията:

$$\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin \theta & 0 & \cos \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \cos \theta & 0 & -\sin \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_b \\ c_2 \\ c_d \end{bmatrix}, \quad (2.21)$$

уравнението (2.17) се преобразува до:

$$i \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} c_b \\ c_2 \\ c_d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2}\Omega_0(t) & -i\dot{\theta} \\ \frac{1}{2}\Omega_0(t) & \Delta(t) - i\Gamma & 0 \\ i\dot{\theta} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_b \\ c_2 \\ c_d \end{bmatrix}, \quad (2.22)$$

където сме положили  $\Omega_0(t) = \sqrt{\Omega_1^2(t) + \Omega_2^2(t)} = \sqrt{A_1^2 + A_2^2}g(t)$ . Производната  $\dot{\theta} = 0$ , тъй като  $\theta = \text{const}$ , което отделя състояние  $|d\rangle$  от другите две и равенство (2.22) се трансформира в задача за двете нива  $|b\rangle$  и  $|2\rangle$ :

$$i \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} c_b \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2}\Omega_0(t) \\ \frac{1}{2}\Omega_0(t) & \Delta(t) - i\Gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_b \\ c_2 \end{bmatrix}. \quad (2.23)$$

От последното равенство веднага се вижда връзката на състояние  $|2\rangle$  с  $|b\rangle$  чрез  $\Omega_0$ . Отделянето на тъмното състояние води до запазване на неговата заселеност:

$$P_d(t) = P_d(-\infty) = |c_1(-\infty) \cos \theta - c_3(-\infty) \sin \theta|^2, \quad (2.24)$$

а тъй като тази заселеност не може нито да бъде прехвърлена на състояние  $|2\rangle$ , нито да излезе от системата чрез някакъв вид разпад, неравенството

$$1 - P_1(t) - P_3(t) \leq 1 - P_d(-\infty) \quad (2.25)$$

остава в сила за всеки момент от прехода. При по-подробно разглеждане на последното съотношение се вижда, че съществува горна граница на заселеността на второто ниво при  $\Gamma = 0$  ( $P_2 = 1 - P_1 - P_3$ ), както и за популационните загуби при  $\Gamma > 0$  ( $P_{loss} = 1 - P_1 - P_3$ ). Нека пропагаторът, дефиниран чрез уравнението

$$[c_b(+\infty), c_2(+\infty)]^T = \mathbf{U}^{(2)} [c_b(-\infty), c_2(-\infty)]^T \quad (2.26)$$

е зададен по следния начин:

$$\mathbf{U}^{(2)} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}. \quad (2.27)$$

Тогава за пропагатора на система с три нива в базиса  $|b\rangle |d\rangle$  ще имаме:

$$\mathbf{U}_{bd}^{(3)} = \begin{bmatrix} a & b & 0 \\ c & d & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.28)$$

Използвайки уравнения (2.21) и (2.28) за явния вид на матрицата на еволюция получаваме:

$$\mathbf{U}^{(3)} = \begin{bmatrix} a \sin^2 \theta + \cos^2 \theta & b \sin \theta & (a-1) \sin \theta \cos \theta \\ c \sin \theta & d & c \cos \theta \\ (a-1) \sin \theta \cos \theta & b \cos \theta & a \cos^2 \theta + \sin^2 \theta \end{bmatrix} \quad (2.29)$$

Нека видим как изглеждат изразите за заселеностите  $P_1$ ,  $P_2$  и  $P_3$  на системата за някое начално условие (да кажем  $\mathbf{c}(-\infty) = (1, 0, 0)^T$ ). Използвайки началната стойност на вектора на състоянието и формули (2.26) за три нива и (2.29) за заселеностите на всяко от нивата в края на еволюцията получаваме следните равенства:

$$P_1(+\infty) = |a \sin^2 \theta + \cos^2 \theta|^2, \quad (2.30a)$$

$$P_2(+\infty) = |c|^2 \sin^2 \theta, \quad (2.30b)$$

$$P_3(+\infty) = |a-1|^2 \sin^2 \theta \cos^2 \theta. \quad (2.30v)$$

По аналогичен начин можем да получим заселеностите за всяка друга стойност на  $\mathbf{c}(-\infty)$ . При по-задълбочен анализ се вижда, че единственият необходим праметър за определяне на заселеностите на системата е параметърът  $a$ . В изразите за заселеностите не са включени останалите параметри  $b, c$  и  $d$ , а само техните модули, които са свързани с  $a$  по различен начин в зависимост от стойността на константата на разпад  $\Gamma$ . При  $\Gamma = 0$  имаме взаимоотношенията  $|d| = |a|$  и  $|b|^2 = |c|^2 = 1 - |a|^2$ , а за  $\Gamma > 0 \rightarrow b = c = d = 0$ .

Подобно на резултатите в глава 2 за система с три нива също съществува точен резонанс (еднофотонен резонанс). Един пример е система с три нива, при която едно след друго се прилагат две полета – напомнимащо и Стоксово. Това силно наподобява процестът SEP (Stimulated Emission Pumping) за две нива, като системата с три нива може да се разгледа като последователност от два прехода за система с две нива. Въпреки това вероятностите са различни за двата вида системи. За системата с три нива вероятностите  $P_{1\leftrightarrow 2}$  и  $P_{2\leftrightarrow 3}$  са равни на:

$$P_{1\leftrightarrow 2} = \frac{1}{2} (1 - \cos A_P) \quad (2.31a)$$

$$P_{2\leftrightarrow 3} = \frac{1}{2} (1 - \cos A_S), \quad (2.31b)$$

като вероятността за директен преход между състояния  $|1\rangle$  и  $|3\rangle$  се задава с произведението на горните две:

$$P_{1\leftrightarrow 3} = \frac{1}{4} (1 - \cos A_P) (1 - \cos A_S). \quad (2.32)$$

Тук  $A_P$  и  $A_S$  са съответните стойности на площта на импулса за пулсовото и Стоксовото поле.

Ако напомнимащото и Стоксово полета имат една и съща зависимост от времето, динамиката на процеса вече не може да се разглежда като два последователни процеса на система с две нива. Въпреки това могат да се получат решения и в този случай. Например заселеността в състояние  $|3\rangle$  в края на прехода  $|1\rangle \rightarrow |3\rangle$  ще се задава с формулата:

$$P_3 = \frac{A_P A_S}{A} \left( 1 - \cos \frac{1}{2} A \right), \quad (2.33)$$

където  $A = \sqrt{A_P^2 + A_S^2}$ . От равенство (2.33) се вижда, че когато двете стойности на  $A_P$  и  $A_S$  са равни и  $A = 2(2k+1)\pi$  ( $k = 0, 1, 2, \dots$ ) заселеността преминава напълно от състояние  $|1\rangle$  в състояние  $|3\rangle$ . При  $A = 4k\pi$  заселеността се връща обратно в състояние  $|1\rangle$ .



## Глава 3

# Адиабатни решения за системи с две нива

Адиабатната еволюция изисква наличието на следните условия:

- гладка зависимост от времето;
- дълго време за еволюция на системата;
- голяма честота на Раби и/или детюнинг.

Решаваме времезависимото уравнение на Шрьодингер:

$$i\hbar \frac{d}{dt} \mathbf{C}(t) = \hat{H}(t) \mathbf{C}(t) \quad (3.1)$$

където

$$\mathbf{C}(t) = [C_1(t), C_2(t)]^T \quad (3.2)$$

е векторът стълб, чиито елементи задават амплитудите на вероятност съответно за състоянията  $\psi_1$  и  $\psi_2$ , а  $H(t)$  е Хамилтонианът, който за система с две нива има вида:

$$\hat{H}(t) = \hbar \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2}\Omega(t) \\ \frac{1}{2}\Omega(t) & \Delta(t) \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

Това обаче е в непертурбирания базис от състояния на системата. За да решим диференциалното уравнение в адиабатния случай ще бъде по-удобно да използваме така наречения *адиабатен базис*, който се задава с трансформацията:

$$\mathbf{C}(t) = \hat{R}[\theta(t)] \mathbf{a}(t) \quad (3.4)$$

където с  $\mathbf{a}(t) = [a_-(t), a_+(t)]^T$  сме задали векторът стълб в новия базис, а

$$\hat{R}[\theta(t)] = \begin{bmatrix} \cos \theta(t) & \sin \theta(t) \\ -\sin \theta(t) & \cos \theta(t) \end{bmatrix} \quad (3.5)$$

е Ойлеровата матрица на въртене на ъгъл  $\theta(t)$ . В новия базис уравнение (3.1) придобива вида:

$$i\hbar \frac{d}{dt} \mathbf{a}(t) = \hat{H}_a(t) \mathbf{a}(t) \quad (3.6)$$

където

$$\hat{H}_a(t) = \hbar \begin{bmatrix} \lambda_- & -i\dot{\theta}(t) \\ i\dot{\theta}(t) & \lambda_+ \end{bmatrix} \quad (3.7)$$

е новият Хамилтониан, получен чрез унитарната трансформация:

$$\hat{H}_a(t) = \hat{R}[-\theta(t)] \hat{H} \hat{R}[\theta(t)] - i\hbar \hat{R}[-\theta(t)] \frac{d}{dt} \hat{R}[\theta(t)] \quad (3.8)$$

В адиабатната граница:

$$\left| \dot{\theta}(t) \right| \ll \lambda_+ - \lambda_- \quad (3.9)$$

можем да пренебрегнем  $\dot{\theta}(t)$ . Тогава решението в адиабатния базис е:

$$\hat{U}_a(t, -\infty) = \begin{bmatrix} e^{-i\Lambda_-(t)} & 0 \\ 0 & e^{-i\Lambda_+(t)} \end{bmatrix} \quad (3.10)$$

където  $\Lambda_{\pm}(t) = \int_{-\infty}^t \lambda_{\pm}(t') dt'$ .

За амплитудата получаваме еволюционния закон:

$$\mathbf{a}(t) = \hat{U}_a(t, -\infty) \mathbf{a}(-\infty) \quad (3.11)$$

Използвайки трансформационния закон (3.4) можем да се върнем в адиабатния базис:

$$\mathbf{C}(t) = \hat{R}[\theta(t)] \mathbf{a}(t) = \hat{R}[\theta(t)] \hat{U}_a(t, -\infty) \mathbf{a}(-\infty) = \hat{R}[\theta(t)] \hat{U}_a(t, -\infty) \hat{R}[-\theta(-\infty)] \mathbf{C}(-\infty) \quad (3.12)$$

където оператора  $\hat{R}(\theta)$  се задава чрез уравнение (3.5).

Елементите на вектора в адиабатния базис могат да се зададат чрез обратната трансформация на (3.4) по следния начин:

$$a_+(t) = c_1 \sin \theta(t) + c_2 \cos \theta(t) \quad (3.13a)$$

$$a_-(t) = c_1 \cos \theta(t) - c_2 \sin \theta(t) \quad (3.13b)$$

където

$$\theta(t) = \frac{1}{2} \arctan \left( \frac{\Omega(t)}{\Delta(t)} \right) \quad (3.14)$$

е ъгълът на смесване.

Собствените стойности на оператора на Хамилтън се задават с уравненията:

$$\hat{H}_a(t) a_+(t) = \hbar \lambda_+(t) a_+(t) \quad (3.15a)$$

$$\hat{H}_a(t) a_-(t) = \hbar \lambda_-(t) a_-(t) \quad (3.15b)$$

тук

$$\hbar \lambda_{\pm}(t) = \frac{1}{2} \hbar \left( \Delta(t) \pm \sqrt{\Delta^2(t) + \Omega^2(t)} \right) \quad (3.16)$$

откъдето за разцепването по енергии веднага получаваме:

$$\hbar \lambda_+(t) - \hbar \lambda_-(t) = \hbar \sqrt{\Delta^2(t) + \Omega^2(t)} \geq \hbar \Delta(t) \quad (3.17)$$

### 3.1 Без пресичане на нивата

За случая на адиабатен преход без пресичане на нивата правим следните предположения:

$$\Delta(t) > 0 \quad (3.18)$$

$$\Omega(t) > 0 \quad (3.19)$$

$$\Omega(t) \xrightarrow{t \rightarrow \pm\infty} 0 \quad (3.20)$$

Горните предположения означават, че няма пресичане на нивата, вероятността за преход не зависи от знаците и че имаме пулсово поле.

От тях веднага се вижда че:

$$0 \xleftarrow{-\infty \leftarrow t} \frac{\Omega(t)}{\Delta(t)} \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0 \quad (3.21)$$

$\Downarrow$

$$0 \xleftarrow{-\infty \leftarrow t} \theta(t) = \frac{1}{2} \arctan \left( \frac{\Omega(t)}{\Delta(t)} \right) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0 \quad (3.22)$$

т.е в края на еволюцията всяко адиабатно състояние клони към същото адиабатно състояние. Получава се така нареченото пълно връщане на състоянието:

$$c_2 \xleftarrow{-\infty \leftarrow t} a_+(t) = c_1 \sin \theta(t) + c_2 \cos \theta(t) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} c_2 \quad (3.23)$$

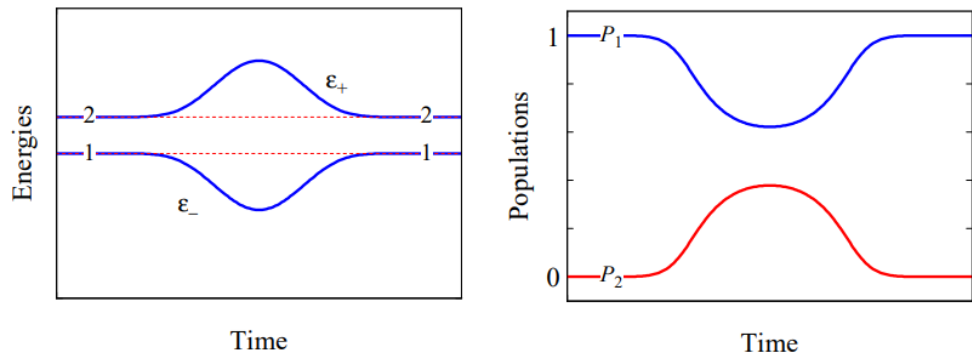
$$c_1 \xleftarrow{-\infty \leftarrow t} a_-(t) = c_1 \cos \theta(t) - c_2 \sin \theta(t) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} c_1 \quad (3.24)$$

Всъщност по средата на процеса състоянието на системата може да бъде суперпозиция от двете състояния  $c_1$  и  $c_2$ . В края на процеса обаче състоянието на системата неминуемо се връща в началната си стойност.

Можем да запишем състоянието  $c_1$  и по следния начин:

$$c_1 \rightarrow a_-(t) = c_1 \cos \theta(t) - c_2 \sin \theta(t) \rightarrow c_1 e^{i\alpha} \quad (3.25)$$

където  $\alpha = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda_-(t) dt$  е адиабатната фаза.



Фигура 9: Графика представяща времевата еволюция на енергиите (ляво) и на заселеностите (дясно) при адиабатна еволюция на система с две нива без пресичане на нивата.

Източник: Nikolay V. Vitanov, *Techniques for Quantum Control of Simple Quantum Systems* [10]

## 3.2 Пресичане на нивата

Когато в системата присъства пресичане на енергетичните нива поне в един момент от прехода ( $t_c$ ) честотната разлика ще бъде нула. За по-голяма простота ще разгледаме само едно пресичане, като след това детюнинга отново започва да нараства. Правим следните предположения:

$$\Delta(t_c) = 0 \quad ; \quad \dot{\Delta}(t_c) > 0 \quad (3.26)$$

$$\Omega(t) > 0 \quad (3.27)$$

$$\Omega(t) \xrightarrow{t \rightarrow \pm\infty} 0 \quad (3.28)$$

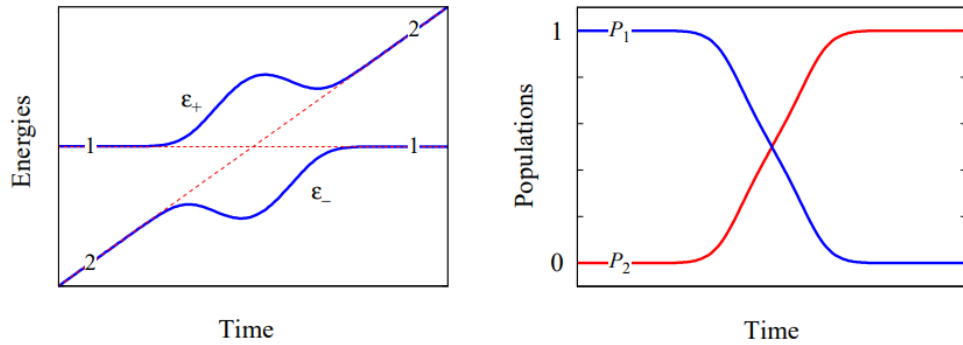
Както преди имаме пулсово поле и заселеностите не зависят от знака на  $\Omega$ . За ъгъла на смесване при  $t \rightarrow \pm\infty$  получаваме:

$$\frac{1}{2}\pi \xleftarrow{-\infty \leftarrow t} \theta(t) = \frac{1}{2} \arctan \left( \frac{\Omega(t)}{\Delta(t)} \right) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0 \quad (3.29)$$

Следователно системата ще преминава асимптотично от едно адиабатно състояние към друго, непертурбирано състояние. Получава се пълнен популационен преход (пълна инверсия на състоянията):

$$c_1 \xleftarrow{-\infty \leftarrow t} a_+(t) = c_1 \sin \theta(t) + c_2 \cos \theta(t) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} c_2 \quad (3.30)$$

$$-c_2 \xleftarrow{-\infty \leftarrow t} a_-(t) = c_1 \cos \theta(t) - c_2 \sin \theta(t) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} c_1 \quad (3.31)$$

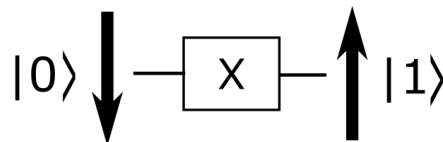


Фигура 10: Графика представяща времевата еволюция на енергиите (ляво) и на заселеностите (дясно) при адиабатна еволюция на система с две нива с пресичане.  
Източник: Nikolay V. Vitanov, *Techniques for Quantum Control of Simple Quantum Systems* [10]

### 3.2.1 Пълно пресичане на нивата (X Gate)

За по-нататъшните ни разглеждания нека изберем стандартния базис  $|0\rangle = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$  и  $|1\rangle = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ .

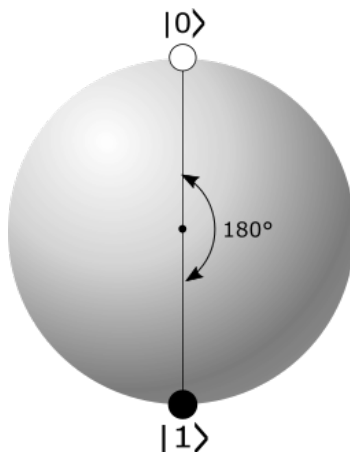
При пълно пресичане на нивата се получава преход, който разменя местата на базисните вектори ( $|0\rangle$  отива в  $|1\rangle$ ) и обратно. Това е еквивалентно на познатия в литературата X Gate, който се задава с матрицата на Паули  $\sigma_x = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ .



Фигура 11: Операцията  $X$  Gate разменя местата на състоянията в изчислителния базис.

Лесно е да се види, че ако вземем единият базисен вектор, например  $|0\rangle$  и приложим  $\sigma_x$  ще получим другия базисен вектор:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (3.32)$$

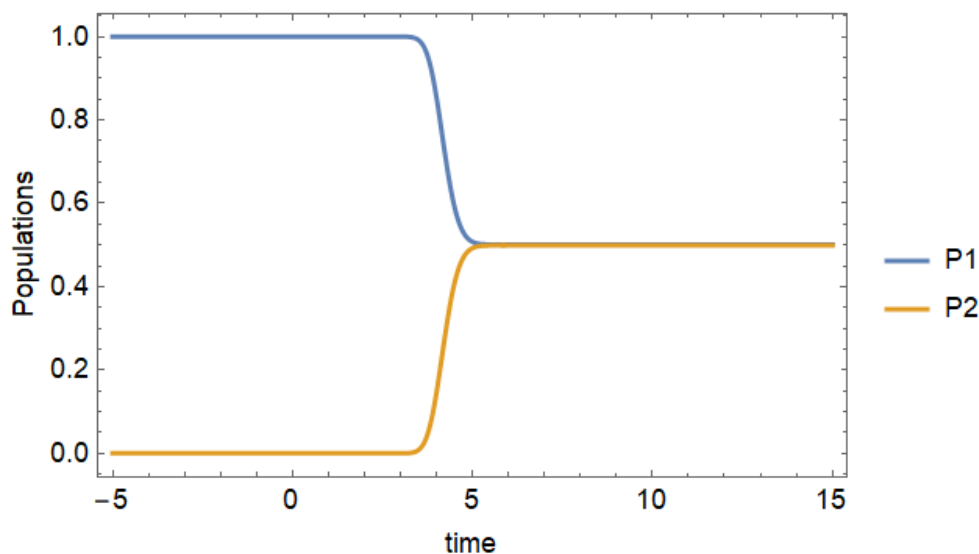


Фигура 12: На сферата на Блох операцията  $X$  Gate се представя като завъртане на  $180^\circ$  по оста  $z$ .

### 3.2.2 Полупресичане на нивата (Hadamard Gate)

Както видяхме в глава 2, при прилагане на определен тип импулс можем да достигнем до състояние на суперпозиция между двете базисни състояния. Това се оказва валидно и в случая, когато детюнинга е различен от нула. Операцията Hadamard Gate за система с две нива в общия случай се представя в матричен вид по следния начин:

$$H = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}. \quad (3.33)$$



Фигура 13: Операцията Hadamard Gate създава суперпозиция от състояния в изчислителния базис.

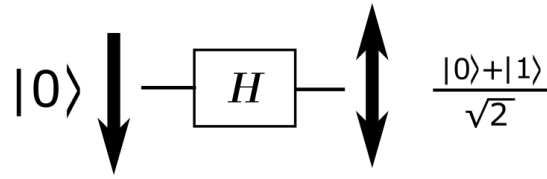
Ако подействаме на някой от базисните вектори  $|0\rangle$  или  $|1\rangle$  с този оператор ще видим, че в края на процеса векторът ще се намира в състояние на суперпозиция между двата базисни вектора:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (3.34)$$

Това може да се представи и така:

$$\frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}}, \quad (3.35)$$

т.е. вероятността да измерим всеки един от базисните вектори е 50%.

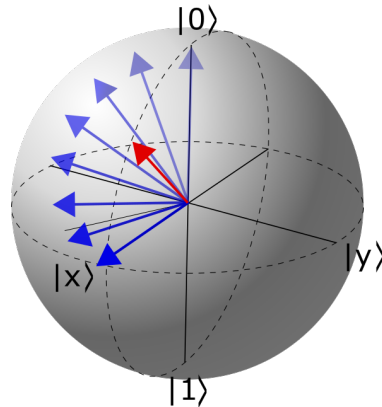


Фигура 14: Схема на операцията Hadamard Gate.

Матрицата  $H$  е унитарна, ермитова и инволютивна ( $H^2 = I$ ). Последното предполага, че при прилагане на оператора два пъти върху даден базисен вектор, то в края трябва да получим същия базисен вектор. Нека проверим:

$$\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (3.36)$$

На сферата на Блох операцията Hadamard Gate се представя като ротация на вектора на състоянието около оста  $x + y$ . След завъртането векторът се намира по оста  $x$ :



Фигура 15: Hadamard Gate като ротация на вектора  $|0\rangle$  до състояние на суперпозиция  $|x\rangle$ .

### 3.3 Заключение

При решаването на задачата за адиабатна еволюция на хармоничен осцилатор забелязваме наличието на следните свойства:

1. В адиабатния базис не съществуват преходи между адиабатните състояния.

2. Адиабатния базис не зависи от знака на честотата на Раби ( $\Omega$ ).
3. Адиабатния базис не зависи от знака на детюинга ( $\dot{\Delta}(t)$ ).
4. Адиабатната еволюция изисква гладка зависимост от времето и голяма честота на Раби и/или детюинг.
5. За модела без пресичане на нивата е налично пълно връщане на заселеността в оригиналния базис
6. За модела с пресичане на нивата получаваме пълен преход между състоянията в оригиналния базис
7. При полупресичане на нивата получаваме, че новият вектор на състоянията е суперпозиция от базисните състояния.
8. Преходът между състоянията е устойчив на промени в параметрите на взаимодействието. Това означава, че промени в  $\Omega$ ,  $\Delta$  или времето на взаимодействие не оказват влияние на прехода.

## Глава 4

# Алтернативни методи за квантов контрол

Съществуват методи, с помощта на които се постига понижаване на вероятността за преход към по-високи състояния и изолиране на първите две нива в свръхпроводниковите кубити. В тази глава са представени накратко някои подходи, различни от адиабатния, чрез които се постигат големи скорости на преход между отделните нива при слабо ахармоничен кубит, както и значително намаляване на грешките, предизвикани от некохерентности, изтичане на заселеност към по-високи нива и др.

### 4.1 Метод на композитните импулси

Един от най-новите подходи за подобряване на точността на свръхпроводниковите кубити се състои в прилагането вместо на един, на множество контролни пулсови сигнали с подходящо избрани честоти на Раби и относителни фази [14]. Накратко методът се състои в следното:

Както е добре известно трансмонът може да се опише приближено като ахармоничен осцилатор (контролиран от външно микровълново поле) с енергитични нива:

$$\omega_n = \left( \omega + \frac{\delta}{2} \right) n - \frac{\delta}{2} n^2, \quad (4.1)$$

където  $\omega$  е собствената честота на кубита, а  $\delta$  е ахармоничността. След преминаване към картина на взаимодействие и прилагане на RWA, Хамилтонианът на системата приема следния вид:

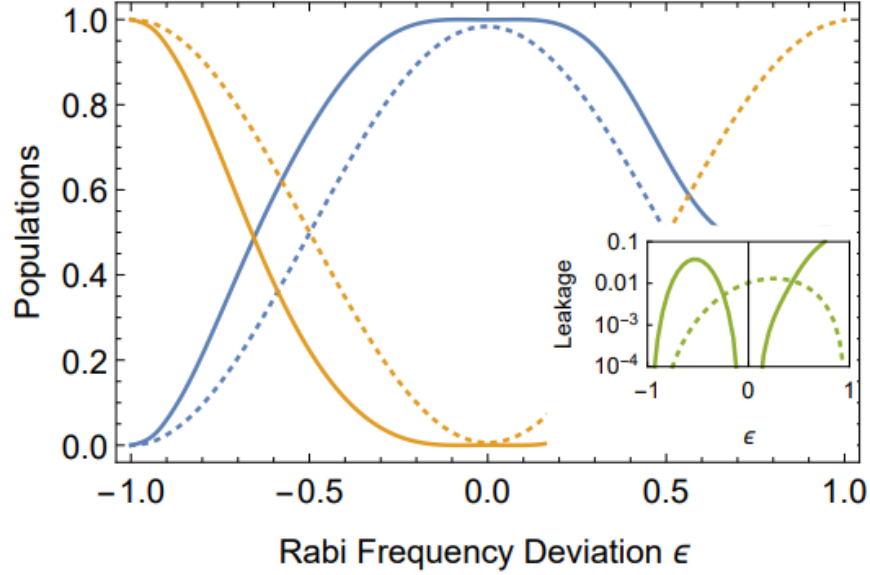
$$\hat{H} = \frac{\hbar}{2} \begin{bmatrix} 0 & \Omega & 0 \\ \Omega^* & 0 & \sqrt{2}\Omega \\ 0 & \sqrt{2}\Omega^* & -2\delta \end{bmatrix} \quad (4.2)$$

Тук  $\Omega$  е честотата на Раби, задаваща силата на свързване между полето и кубита (тъй като в общия случай честотата на Раби е комплексно число с  $\Omega^*$  е обозначена комплексно спрегнатата стойност на  $\Omega$ ). Използвайки така получения Хамилтониан можем да получим пропагатора, задаващ еволюцията на системата  $\hat{U} = e^{-i\hat{H}t}$ . Прилагането на метода на композитните импулси се състои в избирането на поредица от импулси с подходящи честоти на Раби и относителни фази. Това води до появата на нов пропагатор, представляващ произведение от отделните пропагатори за всеки импулс по отделно:

$$\hat{U}^{(N)} = \hat{U}(\Omega_N, \phi_N) \dots \hat{U}(\Omega_2, \phi_2) \hat{U}(\Omega_1, \phi_1) \quad (4.3)$$



където  $\hat{U}(\Omega_k, \phi_k)$  е съответния единичен пропагатор, отговарящ на Хамилтониана (4.2), а честотата на Раби  $\Omega_k e^{i\phi_k}$  е отместена с фаза  $\phi_k$ . Точно  $\Omega_k$  и  $\phi_k$  се използват като контролни параметри за постигането на пропагатор  $\hat{U}^N$ , който минимизира изтичането на заселеност към състояния извън базиса  $|0\rangle$  и  $|1\rangle$ . Освен подобряване на точността, при подходящо избрани контролни параметри може да се постигне и възможност за прилагане на по-кратки контролиращи импулси, което води до значително повишаване на скоростта на гейтовете, приложени върху съответния кубит.



Фигура 16: Графиката показва заселеностите на състоянията  $|0\rangle$  и  $|1\rangle$  след единичен  $\pi$  пулс (пунктир) и след поредица от 6 пулса с подходящо избрани честота на Раби и относителна фаза (непрекъсната линия).

На вмъкнатата графика са показани съответните изтичания към по-високото състояние  $|2\rangle$ .

Източник: *arXiv:2205.04155*, 2022 [14]

## 4.2 DRAG (Derivative Removal by Adiabatic Gate) и GRAPE (Gradient Ascent Pulse Engineering)

Съществуват някои аналитични подходи, чрез които отново се постига добър контрол над преходите между състоянията в свръхпроводниковия кубит. Един от тях е така нареченият DRAG алгоритъм, който се състои в добавянето на втори контролен параметър, пропорционален на производната по времето на първия. По същество DRAG импулса представлява Гаусов импулс с допълнителна компонента, служеща за намаляване на честотния спектър на нормалния Гаусиан за прехода  $|1\rangle \rightarrow |2\rangle$ , по този начин намалявайки вероятността за преход към състояние  $|2\rangle$ .

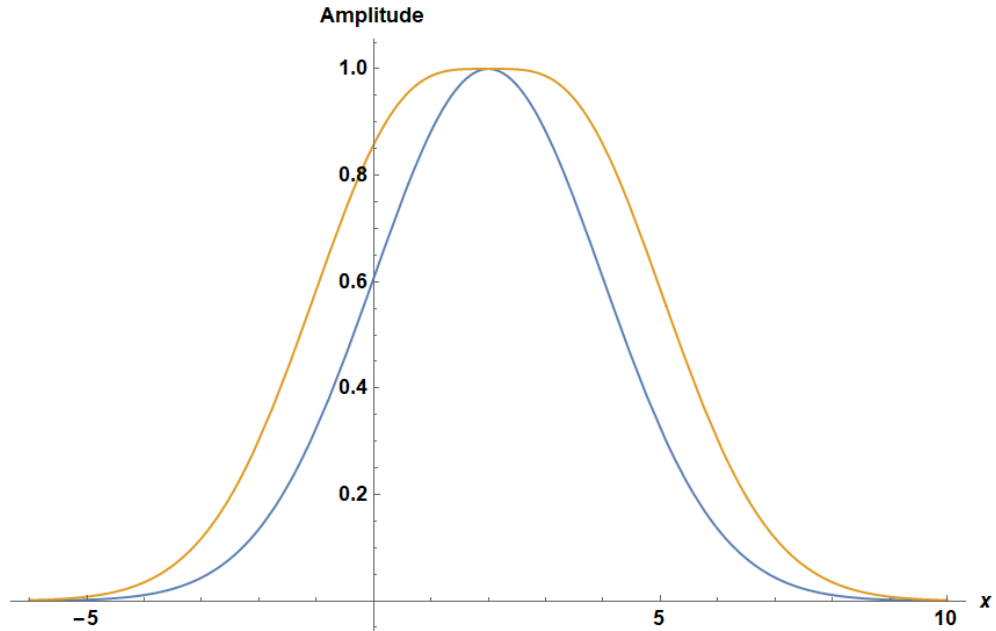
В софтуерния пакет Qiskit (IBM) например DRAG алгоритъма се задава по следния начин [15]:

$$g(x) = e^{-\frac{1}{2} \frac{(x - \frac{\Delta t}{2})^2}{\sigma^2}}$$

$$g'(x) = A \times \frac{g(x) - g(-1)}{1 - g(-1)}$$

$$f(x) = g'(x) \times \left( 1 + 1j \times \beta \times \left( -\frac{x - \frac{\Delta t}{2}}{\sigma^2} \right) \right) \quad , \quad 0 \leq x < \Delta t$$

Тук  $g(x)$  е обикновената Гаусова функция,  $g'(x)$  е корекцията на Гаусиана.  $f(x)$  представлява крайния вид на DRAG функцията. Параметрите  $\Delta t$ ,  $A$ ,  $\beta$ ,  $\sigma$  са съответно времетраенето на импулса по отношение на периода на измерване, амплитудата на обвивката на импулса, амплитудата на корекция и широчината на Гаусовата функция.



Фигура 17: Графика, представяща зависимостта на амплитудата от параметъра  $x$ . От сравняването на двете графики се вижда, че DRAG модулирания сигнал (в жълто) притежава по-голяма устойчивост на максимума от обикновения Гаусов импулс (синьо).

Методът GRAPE [16] използва градиента на еволюционния оператор на приложения импулс с цел внасяне на поправка и подобряване на ефективността на прехода. За да разберем как точно се стига до този алгоритъм нека разгледаме най-простия метод на трансфер между ермитови оператори в отсъствие на релаксационни процеси. Нека състоянието на системата се характеризира от операторът на плътността  $\rho(t)$ , а уравнението на движение е:

$$\dot{\rho}(t) = -i \left[ \left( H_0 + \sum_{j=1}^s u_j(t) H_j \right), \rho(t) \right], \quad (4.4)$$

тук  $H_0$  е свободният еволюционен Хамилтониан,  $H_j$  са Хамилтонианите на контролните полета, а  $u(t) = (u_1(t), u_2(t), \dots, u_s(t))$  е контролният вектор (отговорен за промяната в амплитудите при прилагане на алгоритъма). Сега задачата ни се свежда до намиране на подходящите стойности на  $u_j(t)$ , водещи оператора на плътността  $\rho(0) = \rho_0$  до някаква желана стойност  $\rho(T)$  за определен момент  $T$ . Тази желана стойност всъщност се води от факта, че операторът на плътността трябва да съвпада максимално с целеви оператор, който тук ще обозначим с  $C$ . За ермитови оператори това може да се измери с произведението  $\langle C | \rho(T) \rangle = \text{Tr} \{ C^\dagger \rho(t) \}$ . Следователно показателят на действие се задава с формулата:

$$\Phi_0 = \langle C | \rho(T) \rangle. \quad (4.5)$$

За опростяване на по-нататъшните разглеждания ще разделим времето  $T$  на  $N$  равни интервала  $\Delta t = \frac{T}{N}$ , такива че амплитудата  $u_j(k)$ , съответстваща на всеки интервал ще

бъде константна. Така времевата еволюция на системата за един интервал ще се задава чрез пропагатора:

$$U_k = e^{-i\Delta t(H_0 + \sum_{j=1}^s u_j(k)H_j)}, \quad (4.6)$$

а оператора на плътността за време  $t = T$  ще бъде:

$$\rho(T) = U_N \dots U_1 \rho_0 U_1^\dagger \dots U_N^\dagger \quad (4.7)$$

$$\Rightarrow \Phi_0 = \left\langle C \left| U_N \dots U_1 \rho_0 U_1^\dagger \dots U_N^\dagger \right. \right\rangle. \quad (4.8)$$

Използвайки свойствата на вътрешното произведение, можем да пренапишем последното равенство така:

$$\Phi_0 = \underbrace{\langle U_{k+1}^\dagger \dots U_N^\dagger C U_N \dots U_{k+1} |}_{\lambda_k} \underbrace{U_k \dots U_1 \rho_0 U_1^\dagger \dots U_k^\dagger \rangle}_{\rho_k}, \quad (4.9)$$

където с  $\rho_k$  сме отбелязали оператора на плътността  $\rho(t)$  за време  $t = k\Delta t$ , а с  $\lambda_k$  – обратно-пропагиращия оператор  $C$  за същото време.

Нека сега разгледаме как ще се промени  $\Phi_0$  след въвеждане на пертурбация в амплитудата  $u_j(k) + \delta u_j(k)$ . От уравнение (4.6) се вижда, че промяната на  $U_k$  до първа степен на пертурбацията  $\delta u_j(k)$  е:

$$\delta U_k = -i\Delta t \delta u_j(k) \bar{H}_j U_k, \quad (4.10)$$

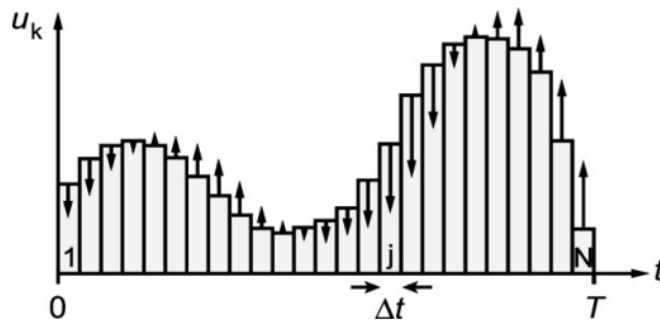
където  $\bar{H}_j \Delta t = \int_0^{\Delta t} U_k(\tau) \mathcal{H}_j U_k(-\tau) d\tau$ , а  $U_k(\tau) = e^{-i\tau(H_0 + \sum_{j=1}^s u_j(k)H_j)}$ .

За малки стойности на  $\Delta t$  ( $\Delta t \ll \|H_0 + \sum_{k=1}^s u_j(k)H_j\|^{-1}$ ) и използвайки уравнения (4.9) и (4.10) достигаем до:

$$\frac{\delta \Phi_0}{\delta u_j(k)} = -\langle \lambda_k | i\Delta t [H_j, \rho_k] \rangle \quad (4.11)$$

И така, за обикновения GRAPE алгоритъм дефинираме следните стъпки:

1. правим предположение за стойността на началните контролни параметри  $u_j(k)$ ;
2. започвайки от  $\rho_0$  изчисляваме всички  $\rho_k = U_k \dots U_1 \rho_0 U_1^\dagger \dots U_k^\dagger$ , където  $k \leq N$ ;
3. започвайки от  $\lambda_N = C$  пресмятаме всички  $\lambda_k = U_{k+1}^\dagger \dots U_N^\dagger C U_N \dots U_{k+1}$ , за  $k \leq N$ ;
4. намираме  $\frac{\delta \Phi_0}{\delta u_j(k)}$  и обновяваме  $s \times N$  контролните амплитуди  $u_j(k)$  според уравнението  $u_j(k) \rightarrow u_j(k) + \varepsilon \frac{\delta \Phi_0}{\delta u_{kj}(k)}$ ;
5. с така получените данни се връщаме обратно на стъпка 2.



Фигура 18: Графично представяне на амплитудата  $u_j(t)$  за времеви период  $T$ , разделен на  $N$  равни интервала. Вертикалните стрелки представляват градиентите  $\frac{\delta \Phi_0}{\delta u_j(k)}$ , показващи колко трябва да бъде модифицирана амплитудата за да се подобри функцията  $\Phi_0$ .

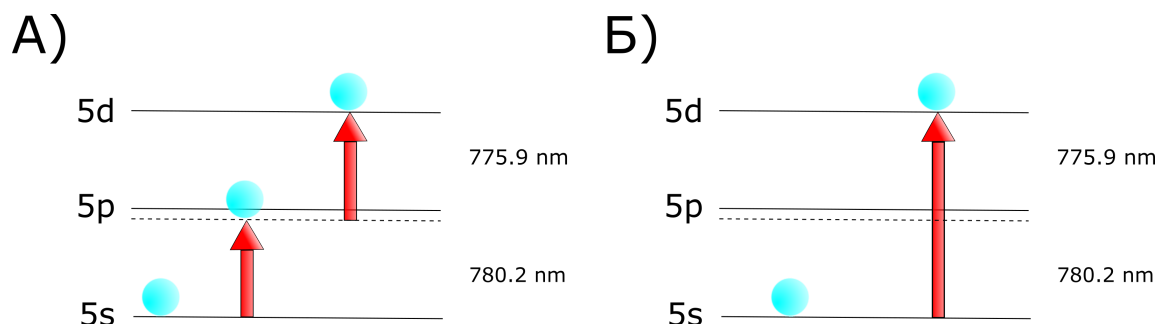
Източник: *Journal of magnetic resonance*, 172(2):296-305, 2005 [17]

## Глава 5

# Адиабатни решения за системи с три нива

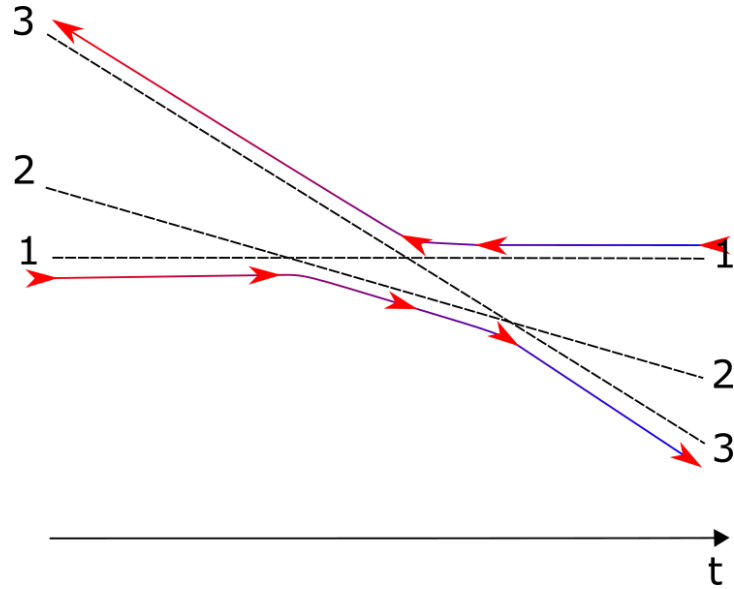
### 5.1 Известни методи за контрол с пресичане на нивата

Съществуват експерименти, в които са се осъществявали контролирани преходи в системи с три нива като тези, описани в статии [18] и [19]. В първата за система с три нива се използват рубидиеви атоми, като се преминава последователно през  $5s \rightarrow 5p \rightarrow 5d$  атомни орбитали, след прилагане на последователност от два бавно променящи се по отношение на честотата (frequency sweep) лазерни импулса. Това води до пълен пренос на заселеността от  $5s$  към  $5p$ , а накрая  $5d$  атомна орбитала.



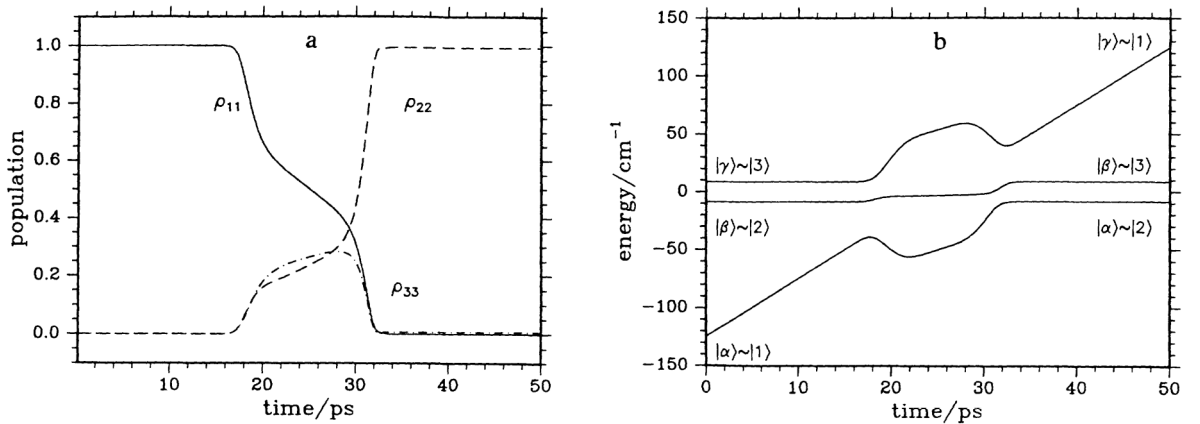
Фигура 19: Енергитична стълбица за рубидиев атом. Петият слой на електронната му обвивка може да се използва като система с три нива, при която електронът прескача от една орбитала в друга след прилагане на външно поле с подходяща честота. **А)** при нормална последователност на приложените полета заселеността преминава изцяло от най-ниско към най-високо, като в средата на процеса заселеността е на второто ниво. **Б)** при противоположна последователност на полетата заселеността прескача директно на най-високото ниво, пропускайки средното.

Интересно е да се отбележи, че при прилагане на обратната последователност от импулси (т.нар. противоположна последователност) системата не само осъществява преход от  $5s$  към  $5d$ , но това се случва директно, без преминаване през състоянието  $5p$ . Такъв метод разбира се е интересен в случаите когато средното ниво е нежелано заради фактори като нестабилност на заселването на средното състояние или сравнително бързо отдаване на заселеност от него към други нива в системата.



Фигура 20: Схематично представяне на прехода на заселеността между трите състояния в системата. Със стрелки и цветен градиент са означени посоката и вида на приложеното поле. Правата посока (червено към синьо) води до преход  $5s \rightarrow 5p \rightarrow 5d$ . Противоположителната посока на приложеното поле (синьо към червено) води до директен преход  $5s \rightarrow 5d$ .

В другият експеримент натриеви пари се облъчват за много кратко време (пикосекунди) със същият бавно-изменящ се лазерен импулс, предизвикващ инверсия и селективно заселване на нивата. За основно състояние се използва  $3s$  нивото на натриевия атом, а като възбудени се вземат натриевия дублет - Фраунхоферовите линии за нивото  $3p$  на натрия ( $^2P_{1/2}$  ;  $^2P_{3/2}$ ). Измерването се осъществява чрез прехода на едно от възбудените нива към ниво  $5s$ . В зависимост от посоката на промяна на честотата на лазерното поле е установено, че се извършва преход или от основно към  $^2P_{1/2}$  (червено  $\rightarrow$  синьо), или от основно към  $^2P_{3/2}$  (синьо  $\rightarrow$  червено). Преходът се осъществява чрез процес, известен като бърз адиабатен преход (ARP), подпомагащ селективността и устойчивостта на процеса. ARP е много слабо чувствителен към честотата или формата на амплитудата на приложения лазерен импулс, стига промяната на последния да е достатъчно бавна, за да удовлетвори условието за адиабатен преход:  $|\frac{d\theta}{dt}| \ll \sqrt{\Omega^2 + \Delta^2}$  ;  $\theta = \arctan(\frac{\Delta}{\Omega})$ .



(а) Фигура 21: Заселеност на нивата  $^2S_{1/2}(|1\rangle)$ ,  $^2P_{1/2}(|2\rangle)$  и  $^2P_{3/2}(|3\rangle)$  за натриев атом. Честотата на Раби на използвания лазерен импулс значително надвишава разстоянието между двете Фраунхоферови линии ( $\approx 17 \text{ cm}^{-1}$ ). (б) Енергиите на състоянията по време на

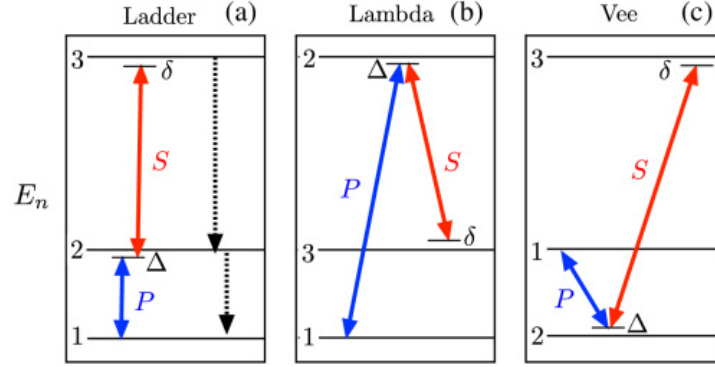
прехода. В зависимост от посоката на промяна на честотата на лазерното поле може да бъде избрано определено крайно състояние ( $|2\rangle$  или  $|3\rangle$ ).

Източник: *Phys. Rev. Lett.* 68, 2000 [19]

Представените по-горе доказани експериментални методи могат да послужат като основа при формирането на нови подходи за квантов контрол. На база на тези идеи сега ще разгледаме елиминирането на нежелани квантови състояния в системи с три нива.

## 5.2 Елиминиране на нежелани квантови състояния в адиабатни квантови гейтове на свръхпроводников кюбит

Дотук разгледахме случаите на едно- и двуфотонен резонанс в системи с три нива при които детюнинга е равен на нула. Нека сега разгледаме адиабатните решения, при които  $\Delta, \delta \neq 0$ , и системата вече се състои не от две (както в глава 3), а от три енергетични нива. В зависимост от разположението на последните системите с три нива се делят на три основни класа: стълбица, ламбда ( $\Lambda$ ) и ве ( $V$ ).



Фигура 22: Схематично представяне на трите възможни вида преходи в система с три нива, в зависимост от разположението на енергетичните нива.

Това, което ще разгледаме по-точно е евентуалната възможност за реализиране на кюбит в система с три нива. Въпросът, който трябва да си зададем е могат ли да се подберат такива контролни параметри, които да изолират първите две нива от третото, като в същото време системата не е в някой от резонансните случаи, разгледани по-горе. Можем да си отговорим като проведем някои числени симулации. Нека нашата система се описва с Хамилтониана:

$$\hat{H} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2}\Omega(t) & 0 \\ \frac{1}{2}\Omega(t) & \Delta(t) & \frac{1}{\sqrt{2}}\Omega(t) \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}}\Omega(t) & \delta + 2\Delta(t) \end{bmatrix}, \quad (5.1)$$

който води до следната система обикновени диференциални уравнения:

$$i\frac{d}{dt}c_1(t) = \frac{\Omega}{2}c_2(t), \quad (5.2a)$$

$$i\frac{d}{dt}c_2(t) = \frac{\Omega}{2}c_1(t) + \Delta c_2(t) + \frac{\Omega}{\sqrt{2}}c_3(t), \quad (5.2b)$$

$$i\frac{d}{dt}c_3(t) = \frac{\Omega}{\sqrt{2}}c_2(t) + (\delta + 2\Delta)c_3(t). \quad (5.2b)$$

Ще разгледаме отново еволюцията на системата при прилагане на X и Hadamard Gate, описани за системи с две нива в глава 3. Ще започнем с X Gate. За него честотата на Раби  $\Omega$  и детюнигата  $\Delta$  се задават чрез функциите:

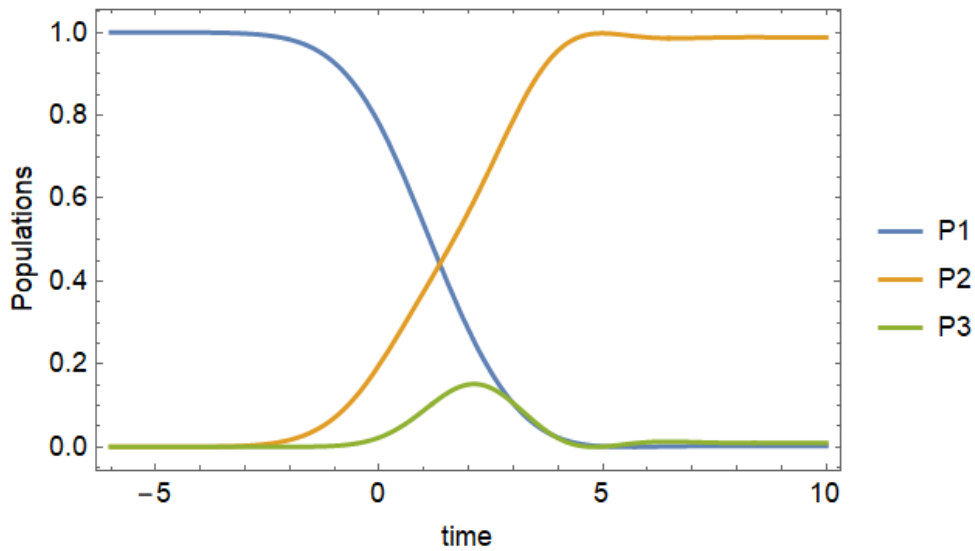
$$\Omega(t) = \Omega_0 e^{-\frac{(t-\tau)^2}{T^2}}, \quad \Delta(t) = \alpha t \quad (5.3)$$

където  $\Omega_0$  е коефициента на Раби импулса (директно свързан с адиабатността на прехода),  $\tau$  е тайминга на Раби импулса (в кой момент от прехода прилагаме външното поле),  $T^2$  е ширината на Раби импулса, а  $\alpha$  е коефициентът на линейност на функцията  $\Delta$ . Разликата между приложените честоти на полето при преход между всяка двойка нива е специфична за всяка отделна система. За удобство нека положим  $\delta \rightarrow 1$ .

При подбиране на параметрите:

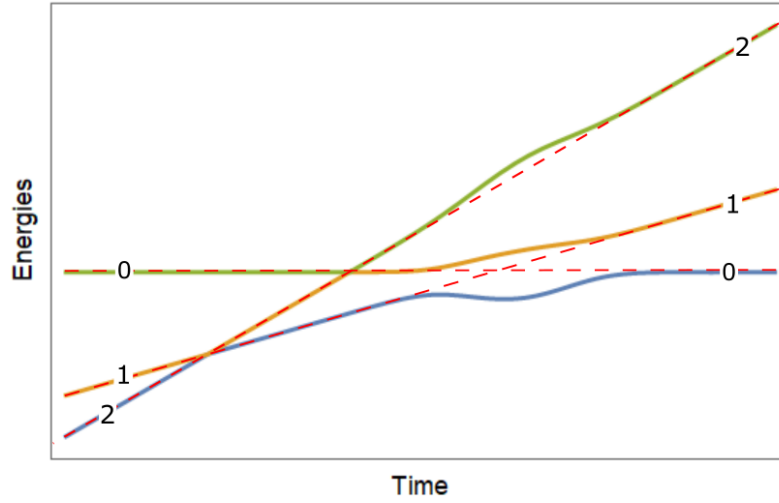
$$\Omega_0 = 0,62 ; \quad T = 3,28 ; \quad \tau = 1,3 ; \quad \alpha = 0,1 \quad (5.4)$$

и числено решаване на системата диференциални уравнения (5.2), се осъществява изисквания преход, а именно пълно обръщане на заселеността между състоянията  $|0\rangle$  и  $|1\rangle$  с минимално влияние, оказвано от страна на състояние  $|2\rangle$ . Решението, заедно с наложените параметри води до  $P_1(+\infty) \rightarrow 0$ ;  $P_2(+\infty) \rightarrow 0,99$ ;  $P_3(+\infty) \rightarrow 0,01$ .



Фигура 23: Графика, показваща разпределението по заселености между нивата за X Gate.

Нека сега разгледаме еволюцията на системата от гледна точка на собствените енергии на Хамилтониана (5.1). От графиката по-долу се вижда, че системата преминава първоначално през два диабатни прехода, които не водят до промяна на местата на някои от енергетичните нива. Последният преход обаче е адиабатен и води до обръщане на местата на основното състояние с първото възбудено (точно каквото се очаква при реализиране на X Gate).



Фигура 24: Енергитична диаграма, показваща еволюцията на системата с три нива за определените по-горе параметри. Виждат се диабатните/адиабатните преходи за всяко пресичане на енергетичните нива (червения пунктир)

Задачата за получаването на Hadamard Gate е подобна на описаната преди малко, като честотното отместване се задава по следния начин:

$$\Delta(t) = \beta (\tanh(\alpha t) - 1), \quad (5.5)$$

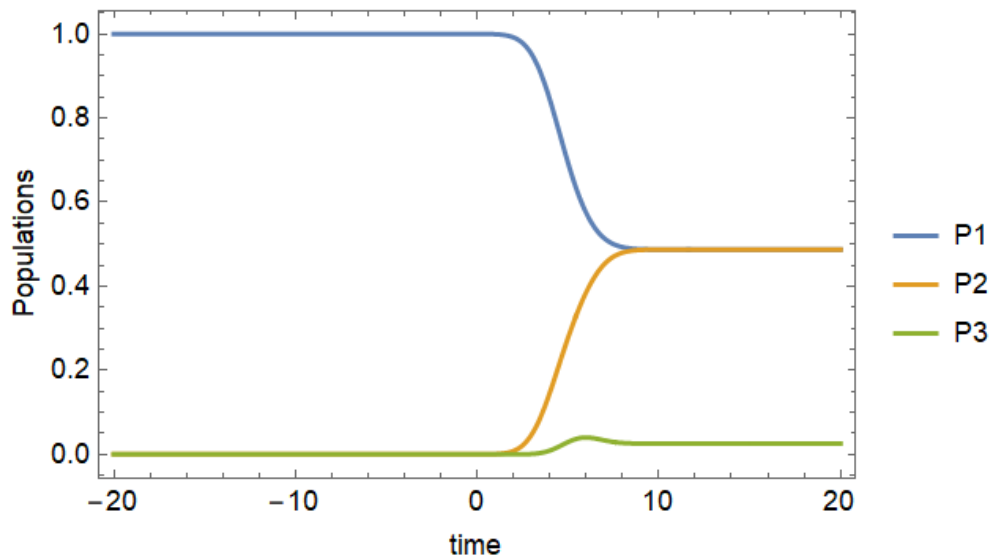
а честотата на Раби има същата функционална зависимост като за X Gate (5.3). След решаване на системата диференциални уравнения (5.2) за параметрите:

$$\Omega_0 = 0.4; T = 2.325; \tau = 4; \alpha = 0.5; \beta = 2 \quad (5.6)$$

за заселеностите в края на прехода на всяко ниво получаваме:

$$P_1(+\infty) \rightarrow 0,49; P_2(+\infty) \rightarrow 0,49; P_3(+\infty) \rightarrow 0,2, \quad (5.7)$$

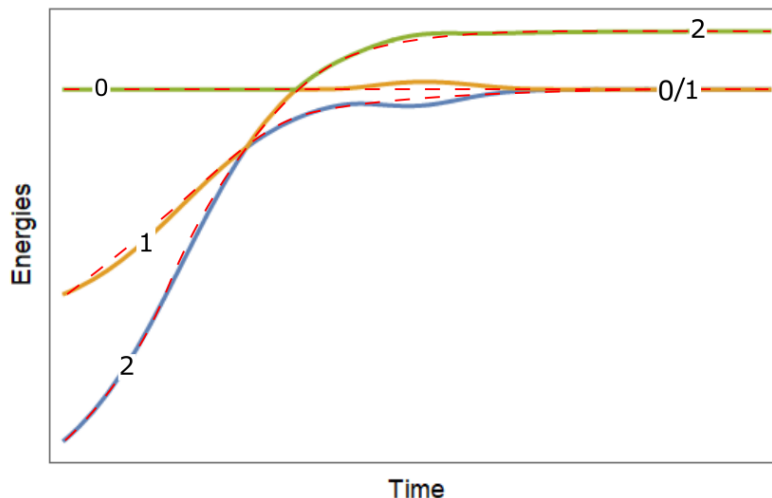
т.е. в края на процеса основното и първото възбудено ниво се намират в състояние на суперпозиция, като всяко притежава около половината от първоначалната заселеност.



Фигура 25: Графика, представяща популационния пренос при Hadamard Gate.



Отново, ако разгледаме еволюцията на системата от гледна точка на собствените енергии на Хамилтониана (5.1), ще видим, че системата претърпява два диабатни прехода, които в края успешно отделят второто възбудено ниво от другите две.

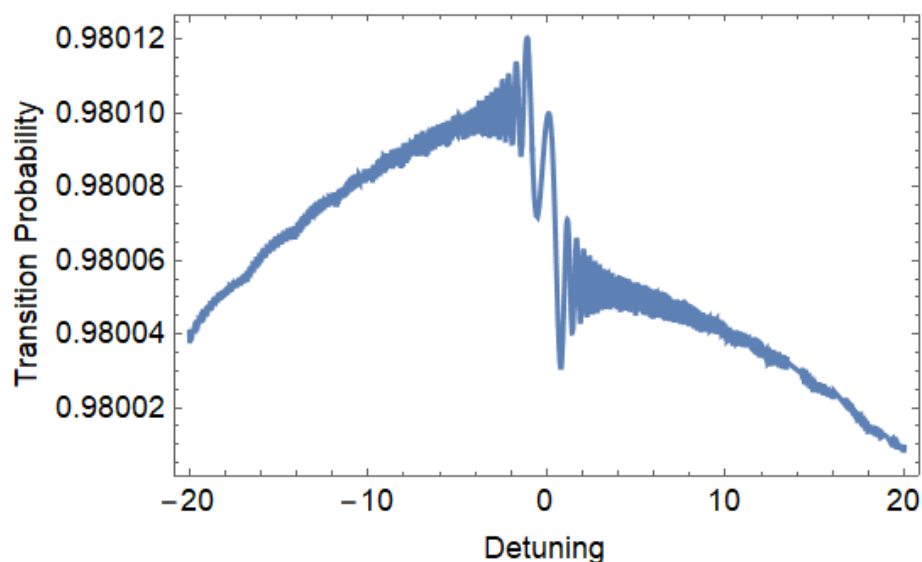


Фигура 26: Фигура, представяща еволюцията на гореописаната система с три нива за Hadamard Gate.

### 5.3 Свойства на адиабатните квантови гейтове

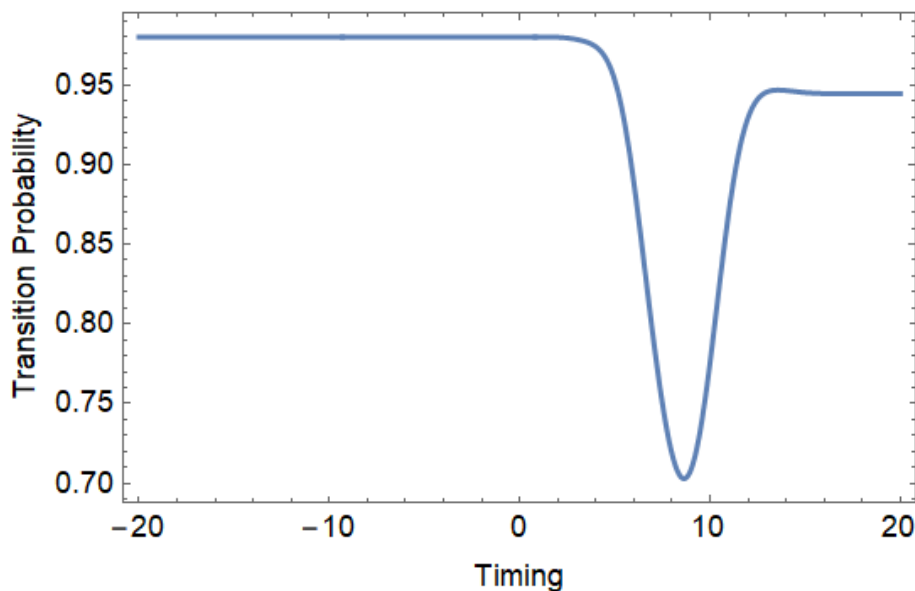
Разгледаните тук адиабатни преходи за системи с три нива притежават някои предимства пред други методи за квантов контрол като различни устойчивости на външни влияния и известни промени в параметрите на системата. Както е показано на графиките по-долу, отнасящи се за операцията X Gate, при сравнително големи вариации на параметрите на външното поле системата запазва крайните стойности на заселеност на отделните нива, а именно почти сто процентова заселеност на първото възбудено ниво и почти нулева за останалите две.

На фигурите по-долу могат да се видят и някои интересни резултати като например наличието на асиметрия на графиката, показваща заселеността на първото възбудено ниво като функция на детюнинга. Такъв тип асиметрия е характерен именно за  $n > 2$ , където  $n = 1, 2, 3, \dots$  е броя на нивата в системата.



Фигура 27: Графика на заселеността като функция на детюningа (параметър  $\alpha$ ) с характерна за системи с повече от две нива асиметрия спрямо нулата.

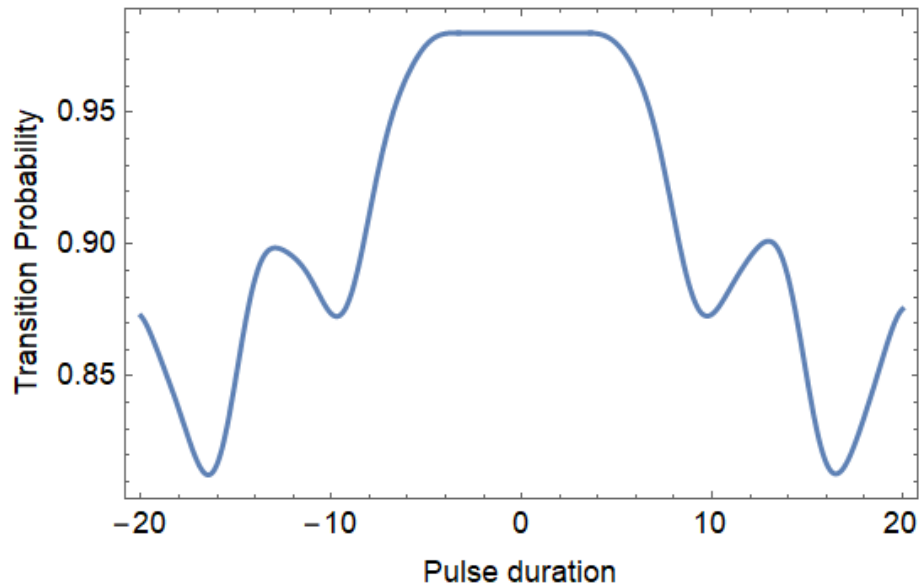
На графиката за заселеността като функция на тайминга се вижда рязко понижаване на крайната заселеност, което започва при  $\tau \approx 6$ . Това може да се дължи на отварянето на нежелан кросинг, през който да изтича част от заселеността на системата. Тук също има наличие на известна асиметрия, която може да се обясни с промяната в топологията на системата (Фигура 24). За различен момент от време  $t$ , в системата съществуват различни по вид пресичания на нивата.



Фигура 28: Заселеността спрямо тайминга ( $\tau$ ).

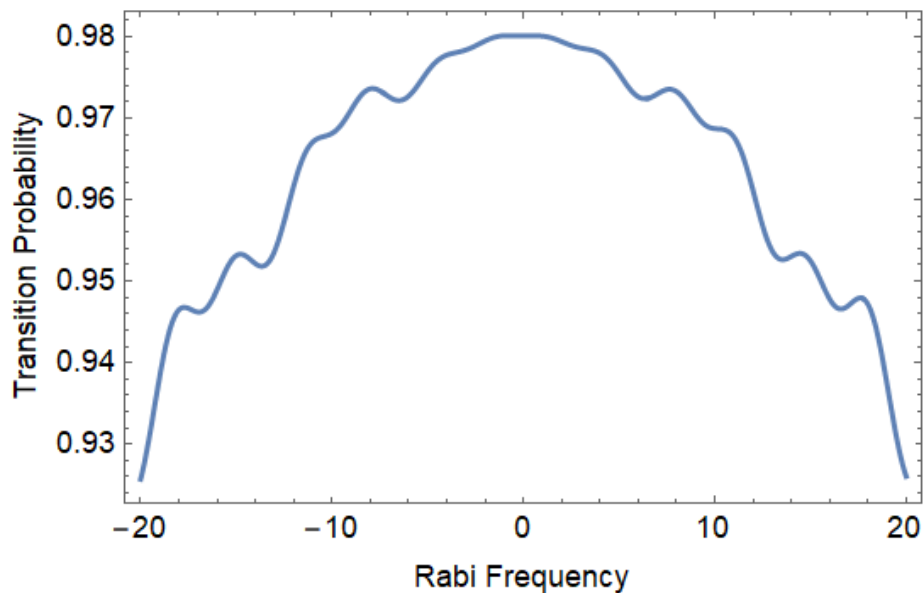
За заселеността спрямо продължителността на Раби импулса също се наблюдава спад на крайната заселеност на желаното ниво, но тук този процес е по-бавен от разглеждания за тайминга. Това поведение може отново да се обясни с наличието на нежелани кросинги по време на действието на импулса, като при голяма продължителност вероятността да се попадне на такова пресичане става все по-голяма. За разлика от предишните две разглеждания тук се наблюдава пълна симетрия по отношение на нулата, тъй като при

решаването на задачата за заселеностите на нивата използваме т.нар. ширина на Раби импулса ( $T^2$ ).



Фигура 29: заселеността като функция на продължителността ( $T$ ) на Раби импулса.

За последната графика, показваща зависимостта на заселеността на крайното състояние спрямо честотата на Раби, могат да се направят аналогични на горните разсъждения. Тук също се наблюдава понижаване на крайната заселеност при симетрична промяна на стойността на  $\Omega_0$  спрямо нулата.



Фигура 30: Заселеността спрямо честотата на Раби.

Този тип методи притежават и някои недостатъци като например ниска скорост на протичане на процесите (породена от условието за адиабатност) и изключително трудно постигане на висока точност за контролиране на системата. Въпреки това за процеси, за които времетраенето или прецизността на контрол не са от съществено значение, такъв тип адиабатни преходи са изключително подходящи като средство за квантов контрол.

## Глава 6

### Заклучение

В тази дипломна работа бяха представени накратко основите на адиабатните преходи като средство за контрол на кубитите в квантови системи, основно тези на IBM. Описани са основите на конструирането на т.нар. свръхпроводникови квантови компютри, както и теорията зад адиабатните преходи за системи с две нива и за системи с три нива при наличие на резонанс. Тези методи представляват интерес най-вече заради своята устойчивост на външни влияния и малки промени в контролните параметри, което ги прави особено подходящи за системи, в които изчислителните единици не са много добре изолирани. Беше разгледан и нов, алтернативен метод за създаване на кубит, контролиран чрез адиабатен преход. Новото в този подход е, че се разглежда не вече добре познатата система с две нива, а система с три нива, при която третото, най-високо енергитично ниво е изолирано от останалите две и по време на еволюцията на системата не получава почти никаква заселеност от основното състояние. Като потвърждение на това твърдение бяха показани две числени симулации на X и Hadamard гейтове, при които се вижда поведение, силно наподобяващо това на система, в която третото ниво изобщо не присъства. Тези резултати водят до предположението, че подобна система може да бъде използвана като алтернатива на добре изучените системи с две нива, както и евентуално наличие на системи с повече от три нива, които да могат да се свеждат успешно до системи с две нива при правилен подбор на контролните параметри в техния Хамилтониан.

# Библиография

- [1] Thomas E Roth, Ruichao Ma, and Weng C Chew. An introduction to the transmon qubit for electromagnetic engineers. *arXiv preprint arXiv:2106.11352*, 2021.
- [2] George Rajna. Superconducting quantum refrigerator. *Citations to Articles Posted to Academia.edu*, 2019.
- [3] HE Hall, PJ Ford, and K Thompson. A helium-3 dilution refrigerator. *Cryogenics*, 6(2):80–88, 1966.
- [4] Nathaniel Craig and Ted Lester. Hitchhiker’s guide to the dilution refrigerator. *Cited on*, page 21, 2004.
- [5] Florian Martin, Gerard Vermeulen, Philippe Camus, and Alain Benoit. A closed cycle  $^3\text{He}$ – $^4\text{He}$  dilution refrigerator insensitive to gravity. *Cryogenics*, 50(9):623–627, 2010.
- [6] ATAM De Waele. Basic operation of cryocoolers and related thermal machines. *Journal of Low Temperature Physics*, 164(5):179–236, 2011.
- [7] Yulin Wu, Wan-Su Bao, Sirui Cao, Fusheng Chen, Ming-Cheng Chen, Xiawei Chen, Tung-Hsun Chung, Hui Deng, Yajie Du, Daojin Fan, et al. Strong quantum computational advantage using a superconducting quantum processor. *Physical review letters*, 127(18):180501, 2021.
- [8] Nikolay V Vitanov. Quantum transitions. *Introduction to Time-Dependent Quantum Dynamics of Atoms and Molecules (St. Kliment Ohridski Univ. Press, Sofia, 2010)*.
- [9] Nikolay V Vitanov, Thomas Halfmann, Bruce W Shore, and Klaas Bergmann. Laser-induced population transfer by adiabatic passage techniques. *Annual review of physical chemistry*, 52(1):763–809, 2001.
- [10] Nikolay V. Vitanov. Techniques for quantum control of simple quantum systems. *Quantum Optics and Quantum Information Group Department of Physics, Sofia University, Bulgaria*, LIMQUET school in Brighton, February 26, 2019.
- [11] Michael A Nielsen and Isaac L Chuang. Quantum computation and quantum information. *Phys. Today*, 54(2):60, 2001.
- [12] Jonathan A Jones and Dieter Jaksch. *Quantum information, computation and communication*. Cambridge University Press, 2012.
- [13] Jay M Gambetta, F Motzoi, ST Merkel, and Frank K Wilhelm. Analytic control methods for high-fidelity unitary operations in a weakly nonlinear oscillator. *Physical Review A*, 83(1):012308, 2011.

- [14] Boyan T Torosov and Nikolay V Vitanov. Fast high-fidelity composite gates in superconducting qubits: Beating the fourier leakage limit. *arXiv preprint arXiv:2205.04155*, 2022.
- [15] Drag. <https://qiskit.org/documentation/stubs/qiskit.pulse.library.Drag.html>.
- [16] Felix Motzoi, Jay M Gambetta, Patrick Rebentrost, and Frank K Wilhelm. Simple pulses for elimination of leakage in weakly nonlinear qubits. *Physical review letters*, 103(11):110501, 2009.
- [17] Navin Khaneja, Timo Reiss, Cindie Kehlet, Thomas Schulte-Herbrüggen, and Steffen J Glaser. Optimal control of coupled spin dynamics: design of nmr pulse sequences by gradient ascent algorithms. *Journal of magnetic resonance*, 172(2):296–305, 2005.
- [18] B Broers, HB van Linden van den Heuvell, and LD Noordam. Efficient population transfer in a three-level ladder system by frequency-swept ultrashort laser pulses. *Physical review letters*, 69(14):2062, 1992.
- [19] JS Melinger, Suketu R Gandhi, A Hariharan, JX Tull, and WS Warren. Generation of narrowband inversion with broadband laser pulses. *Physical review letters*, 68(13):2000, 1992.