错题本

题目　　　　解析　　　　总结

根本 重中之重　各种讲义　历年真题　李永乐660

模拟试卷　李林880　全书 / 永乐线代　疑问 & TODO

二刷错题本的错题

★避免计算错误：

①边写边默念、！避免走神！

②草稿纸：分区、在结果上划圈、减少试卷与稿纸上的切换！多要纸！

③步骤规范、完整、每做一步、回查一步

④选择填空尽量用特殊值法、为大题节省体力！（考概念的必须用定义一笔一笔算出来！不能直觉！）

⑤读题时用笔指着读、读两遍。

⑥工整草稿。

函数 极限 连续

1 求 0/0 或 ∞/∞ 型极限	13. 0.
2 求 0 ·∞ 或 ∞ - ∞ 型极限	3. 15. 16.
3 求 1^∞ 0^∞ ∞^0 型极限	4. 5. 6. 7. 8.
4 含变限积分的未定式极限	14.
5 由极限值反求参数	
6 放缩求极限	10.
7 和数列极限	9.
8 积数列极限	
9 海涅定理	
10 无穷小比阶	-1.
11 函数连续性 & 间断点	2. 12 18.
12 极限存在吗	1. 11. 19.
13 数列递推求极限	17

- 题型
  - 极限
    - 概念
      - 重点在函数与数列间转化.
      - 特殊函数: $f=0$ $f=0.1.0.1$ $f=0,1,0,3$
    - 函数
      - $\frac{0}{0}$ 洛&无穷小代换
      - 1^∞ 三步: ① $\lim=(1+\alpha)^\beta$ ② $A=\alpha\cdot\beta$ ③ $=e^A$
    - 数列
      - 求和
        - 定元与变元同阶 定积分的定义
        - 定元阶 > 变元阶 放缩夹逼
        - 两者可分别用于分子分母结合
      - 递推求lim
        - 单调有界证明, 再求极限.
        - 先求极限, 再用定义 or 夹逼证明
  - 无穷小比阶
    - 两者取相比
    - 求无穷小阶数
      - Lagrange. 洛. 无穷小替换. Taylor.
      - 同一函数在不同点之差.
    - 变上限积分求阶: 求导后再+1即可.
  - 间断点
    - 初等函数间断点: 无定义点.

-1 设 $f(x)$ 有连续导数，$f'(0)=6$，$\alpha(x)=\int_0^{x^3} f(t)\mathrm{d}t$，$\beta(x)=\left[\int_0^x f(t)\mathrm{d}t\right]^3$，则当 $x\to 0$ 时，$\alpha(x)$ 与 $\beta(x)$ 是（　　）.

A. 同阶无穷小　　　　B. 等价无穷小

C. 高阶无穷小　　　　D. 低阶无穷小.

遇到这种题，首先办法是找到 $f(x)\sim px^k$，然后利用代换来做，实在不行才暴力洛（可能越洛越复杂）

0 设 $F(x)=\int_0^x tf(x^2-t^2)\mathrm{d}t$，$f(x)$ 在 $x=0$ 某邻域内可导，且 $f(0)=0$，$f'(0)=1$，则 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{F(x)}{x^4}=$ ______；

没说邻域连续，不能用洛必达！

这个积分可以直接算出…

1 下列结论正确的是（　　）.

A. 若 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n+1}{a_n}=1$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ 存在

B. 若 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=\dfrac{\lim\limits_{n\to\infty}a_{n+1}}{\lim\limits_{n\to\infty}a_n}=1$

C. 若 $\{a_{2n}\}$ 收敛，且 $\lim\limits_{n\to\infty}(a_{2n}-a_{2n-1})=0$，则 $\{a_n\}$ 收敛

D. 若 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$，$\lim\limits_{n\to\infty}b_n=b$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n)^{b_n}=a^b$

找极限存在与否，举反例怎么举？

① $=0$？

② 系数的 $\pm$ 影响吗？

③ 交错级数？

2 函数 $f(x)=\dfrac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{2}{x}}}+\dfrac{\sin x}{|x|}$ 在 $x=0$ 处为（　　）.

A. 可去间断点　　　　B. 跳跃间断点

C. 无穷间断点　　　　D. 振荡间断点

$f(x)=f_1(x)+f_2(x)$ 在 x_0 处 $f_1 f_2$ 均为跳跃间断点 f 也不一定！

3 设 $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2-x+1}-ax-b)=0$，则 $a=$ ______，$b=$ ______.

遇到 $x\to+\infty$，几乎 100% 都要 $t=\frac{1}{x}$，$t\to 0$.

求 b：代入 a 后分子有理化.

4 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x^2}-e^{2-2\cos x}}{e^{x^4}-1}=$ ________.

(7) $\frac{1}{12}$.

解　当 $x\to 0$ 时，$e^{x^4}-1\sim x^4$. 故

$$\text{原式}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2}-e^{2-2\cos x}}{x^4}=\lim_{x\to 0}e^{2-2\cos x}\cdot\frac{e^{x^2-2+2\cos x}-1}{x^4}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{x^2-2+2\cos x}{x^4}=\lim_{x\to 0}\frac{2x-2\sin x}{4x^3}$$
$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{3x^2}=\frac{1}{6}\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}x^2}{x^2}=\frac{1}{12}.$$

遇到 $e^{f(x)}-e^{g(x)}$，
必提取公因式，
然后出 $e^p-1\sim p$

5 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{a^{\frac{1}{x}}+b^{\frac{1}{x}}+c^{\frac{1}{x}}}{3}\right)^x$（$a,b,c$ 为正数）；

6 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(\sin^2 x+e^x)-x}{\ln(e^{2x}-x^2)-2x}$；

7 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^{\frac{3}{x}}-e^3}{x}$；

（Ⅱ）$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{a^{\frac{1}{x}}+b^{\frac{1}{x}}+c^{\frac{1}{x}}}{3}\right)^x$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{3+a^{\frac{1}{x}}+b^{\frac{1}{x}}+c^{\frac{1}{x}}-3}{3}\right)^{\frac{3}{a^{\frac{1}{x}}+b^{\frac{1}{x}}+c^{\frac{1}{x}}-3}\cdot\frac{a^{\frac{1}{x}}+b^{\frac{1}{x}}+c^{\frac{1}{x}}-3}{3\cdot\frac{1}{x}}}.$$
而
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{a^{\frac{1}{x}}+b^{\frac{1}{x}}+c^{\frac{1}{x}}-3}{3\cdot\frac{1}{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{(a^{\frac{1}{x}}-1)+(b^{\frac{1}{x}}-1)+(c^{\frac{1}{x}}-1)}{3\cdot\frac{1}{x}}$$
$$=\frac{1}{3}(\ln a+\ln b+\ln c)=\ln(abc)^{\frac{1}{3}},$$
故原式 $=e^{\ln(abc)^{\frac{1}{3}}}=(abc)^{\frac{1}{3}}$.

（Ⅲ）$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(\sin^2 x+e^x)-x}{\ln(e^{2x}-x^2)-2x}=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(\sin^2 x+e^x)-\ln e^x}{\ln(e^{2x}-x^2)-\ln e^{2x}}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(1+\frac{\sin^2 x}{e^x}\right)}{\ln\left(1-\frac{x^2}{e^{2x}}\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin^2 x}{e^x}}{-\frac{x^2}{e^{2x}}}$$
$$=\lim_{x\to 0}(-e^x)\frac{\sin^2 x}{x^2}=-1.$$

（Ⅳ）$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^{\frac{3}{x}}-e^3}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{\frac{3\ln(1+x)}{x}}-e^3}{x}=e^3\lim_{x\to 0}\frac{e^{\frac{3\ln(1+x)}{x}-3}-1}{x}$$
$$=e^3\lim_{x\to 0}\frac{\frac{3\ln(1+x)}{x}-3}{x}=3e^3\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)-x}{x^2}$$
$$=3e^3\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{1+x}-1}{2x}=-\frac{3}{2}e^3.$$

遇到幂指极限怎么办？

① 想都不用想，$a^b\to e^{b\ln a}$
甚至有时(Ⅱ) $a\to e^{\ln a}$

② $f(x)^{h(x)}$
$=(1+f(x)-1)^{[f(x)-1]\cdot\frac{h(x)}{[f(x)-1]}}$
转而求 $\lim\frac{h(x)}{f(x)-1}$

第三问可用Lagrange中值定理.

8 $\lim\limits_{x\to 0^+}x^{\sin x}$.

（Ⅷ）$\lim\limits_{x\to 0^+}x^{\sin x}=\lim\limits_{x\to 0^+}e^{\sin x\ln x}=e^{\lim\limits_{x\to 0^+}\sin x\cdot\ln x}=e^{\lim\limits_{x\to 0^+}x\cdot\ln x}=e^{\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}}=e^{\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}}=e^0=1.$

0·∞是100%要化为 $\frac{\square}{\square}$ 的.
化不了怎么办？只得找个简单部分搞复杂放下面去.

9 $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{1}{2!}+\dfrac{2}{3!}+\cdots+\dfrac{n}{(n+1)!}\right]$；

（Ⅲ）由 $\frac{n}{(n+1)!}=\frac{1}{n!}-\frac{1}{(n+1)!}$，知
$$\frac{1}{2!}+\frac{2}{3!}+\cdots+\frac{n}{(n+1)!}=\left(\frac{1}{1!}-\frac{1}{2!}\right)+\left(\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}\right)+\cdots+\left[\frac{1}{n!}-\frac{1}{(n+1)!}\right]$$

9

李林 2020 考研数学系列
精讲精练 880 题(数学一)

$$=1-\frac{1}{(n+1)!},$$
故原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}\left[1-\frac{1}{(n+1)!}\right]=1.$

$\dfrac{n}{(n+1)!}=\dfrac{1}{n!}-\dfrac{1}{(n+1)!}$

10 设 $x_1=a\geqslant 0,y_1=b\geqslant 0,x_{n+1}=\sqrt{x_ny_n},y_{n+1}=\dfrac{x_n+y_n}{2}(n=1,2,\cdots)$，证明：$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\lim\limits_{n\to\infty}y_n$.

(12) 证　由已知，有 $x_{n+1}\geqslant 0,y_{n-1}\geqslant 0,x_n\leqslant y_n(n=1,2,\cdots)$.
由此可推得
$$x_{n+1}=\sqrt{x_ny_n}\geqslant\sqrt{x_n^2}=x_n,$$
$$y_{n+1}=\frac{x_n+y_n}{2}\leqslant\frac{y_n+y_n}{2}=y_n,$$
故 $\{x_n\}$ 单调增加，$\{y_n\}$ 单调减少. 又
$$x_1\leqslant x_n\leqslant y_{n+1}\leqslant y_1(n=1,2,\cdots),$$
所以 $\{x_n\}$ 与 $\{y_n\}$ 都有界.
由单调有界准则，知 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 与 $\lim\limits_{n\to\infty}y_n$ 都存在，设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A,\lim\limits_{n\to\infty}y_n=B$.
又由 $x_n\leqslant y_n$，可推得 $A\leqslant B$，当 $n\to\infty$ 时，将 $x_{n+1}=\sqrt{x_ny_n}$ 和 $y_{n-1}=\frac{x_n+y_n}{2}$ 两端分别取极限，得 $A=\sqrt{AB},B=\frac{A+B}{2}$，由此可得 $A=B$，即 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\lim\limits_{n\to\infty}y_n$.

证明极限存在只得单调有界!