

算法设计与分析

第13周算法题讨论

数组变换

- 有一个长度为 n 的数组，进行 m 次操作，每次操作将下标 l 和 r 之间的所有数字对 x 进行异或。
- 请输出 m 次操作之后的数组。
- 第一行两个整数 $n, m \leq 200000$
- 第二行 n 个整数，表示初始数组。
- 接下来 m 行,每行三个整数 l, r, x ，表示操作的参数。

数组变换-示例

- 输入： 4 2

- 0 0 0 0

- 1 2 2

- 2 3 5

- 输出： 2 7 5 0

算法设计与分析

算法题讨论

第一周研讨题目

铺瓷砖

●问题描述

- 用红色的 1×1 和黑色的 2×2 两种规格的瓷砖不重叠地铺满 $n \times 3$ 的路面，求出所有不同的铺设方案

搜索旋转排序数组

- 给定一个被旋转过的升序数组 `nums`，你需要在数组中搜索给定的目标值 `target`，并返回它的索引。如果目标值不存在于数组中，返回 `-1`。
- 例如，输入 `nums = [4,5,6,7,0,1,2]`，`target = 0`，输出应为 `4`，因为 `0` 在数组中的索引为 `4`。
- 假设数组中没有重复的元素。

区间取数

- 小欧拿到一个数组，他准备选择一个连续子数组，长度为 n 。
- 满足该数组的所有元素乘积的2进制末尾有至少 k 个0。
- 求这个连续子数组的最小长度。

- 第一行输入两个整数 n , k 。
- 第二行输入数组 $a[i]$
- $1 \leq n, k \leq 1e5$
- $1 \leq a[i] \leq 1e9$

- 输出一个整数，表示最短长度，若不存在输出-1。

算法设计与分析

第二周算法题讨论

合并区间

- 给定一个区间的集合，将重叠的区间合并。区间用一对整数表示，例如 $[1, 3]$ 表示区间 1 到 3，包含了整数 1、2 和 3。
- 例如，给定区间集合 $\text{intervals} = [[1, 3], [2, 6], [8, 10], [15, 18]]$ ，合并后的结果应为 $[[1, 6], [8, 10], [15, 18]]$ ，因为区间 $[1, 3]$ 和 $[2, 6]$ 重叠，可以合并成 $[1, 6]$ 。
- 要求：合并后的结果区间按照区间起始端点升序排列。

最小覆盖子串

- 给定一个字符串s和一个字符串t，找出s中最短的子串，包含t中所有字符。

主元素问题

- 给一个有 N 个元素的数列，保证有一个数 a 出现的次数超过 $\frac{N}{2}$ ，求这个数。
- 要求时间复杂度和空间复杂度都为 $O(N)$ 。

两数之和

- 给定一个已按照升序排列的整数数组 $a[]$ ，请你从数组中找出两个数满足相加之和等于目标数 t 。

字符串权值

- 定义一个字符串的权值为极长连续段的数量。
- 极长连续段，指的是尽可能长的一段字符串全都是相同的字符。
 - 例如：1100111，有三个连续段11 00 111。所以权值为3。
- 现在小红有一个01串，希望可以计算出所有子串的权值和。
- 输入
 - 第一行一个整数 n ，表示字符串的长度。
 - 第二行一个长度为 n 的字符串。 $1 \leq n \leq 2e5$ 。
- 输出一个整数表示字符串所有子串的权值和。
- 输入：4
- 1101
- 输出：17
- 输入：4
- 1101
- 输出：17

字符串权值-示例

- 输入：4

- 1101

- 输出：17

- 权值为1的子串有 1 1 0 1 11

- 权值为2的子串有 110 10 01

- 权值为3的子串有 1101 101

- 权值和为 $1*5 + 2*3 + 3*2 = 17$

算法设计与分析

第四周算法题讨论

众数问题

- 在一个包含 n 个元素的多重集合 S 中，每个元素在 S 中出现的次数称为该元素的重数，多重集合 S 中重数最大的元素称为众数
- 举例来说，多重集合 $S=\{1,2,3,3,3,4,4,5\}$ ，则多重集合 S 的众数是3，元素3的重数为3
- 现要求对随机生成的由 n 个自然数组成的多重集合 S ，计算 S 的众数及其重数

求逆序对

- 设 $A[1..n]$ 是一个包含 n 个不同数的数组。如果在 $i < j$ 的情况下，有 $A[i] > A[j]$ ，则 (i, j) 就称为 A 中的一个逆序对 (inversion)
 - 1. 请列出 $\langle 2, 3, 8, 6, 1 \rangle$ 的 5 个逆序
 - 2. 如果数组的元素取自集合 $\{1, 2, \dots, n\}$ ，那么，怎样的数组含有最多的逆序对？它包含多少个逆序对？
 - 3. 插入排序的运行时间与输入数组中的逆序对的数量之间有这样的关系？说明你的理由
 - 4. 给出一个算法，它能用 $\Theta(n \lg n)$ 的最坏情况运行时间，确定 n 个元素的任何排列中逆序对的数目，并给出分析

不无聊序列

- 给定一个序列，只要该序列任意的连续子序列都存在有至少一个元素不与其他元素重复，则称该序列为不无聊序列
- 给定一个长度为 N ($N \leq 200000$) 的数列，问该数列是否为不无聊序列

贴纸

- 小红需要 n 张小贴纸，并且每张小贴纸上分别有一个小写字母 S_i 。现在可以定制一批大贴纸。
- 每张大贴纸有 k 个字母，小红想知道，最少需要定制多少张大贴纸，才能组合出 n 张小贴纸。
- 注:大贴纸的字母可以拆开来进行组装。
- 输入描述第一行输入两个整数 n 和 k ,表示小红需要 n 张小贴纸,每张大贴纸有 k 个字母。
- 第二行输入一个字符串 s ,表示 n 张小贴纸上的字母,
 $1 < k < n < 100000$
- 输出描述输出一个整数，表示最少需要定制多少张大贴纸。
- 如果无法组合出要求的 n 张小贴纸，输出-1.

贴纸-示例

- 输入：

- 5 2

- aabb

- 输出： 3

- 注： 大贴纸为ab， 需要三张

算法设计与分析

第五周算法题讨论

篱笆

- 有 n (n 小于等于5000) 个篱笆连续排成一排，其中第 i 个篱笆高为 a_i ，每个篱笆宽为1。现有一把宽为1的刷子，可以竖直的或水平的就行粉刷，每一次粉刷的过程中不能腾空（但可以重复刷同一个位置）
- 请问最少几次能够刷完所有 n 个篱笆

等比数列

- 给定整数 A 和 n ，求 $A + A^2 + A^3 + \dots + A^n$ 的和
- 要求时间复杂度是 $O(\log n)$

镜像字符串

- 对于只由大写字母组成的字符串s，定义一个镜像操作f，该操作会把字符串镜像翻转并延长
- 例如，字符串ABC经过镜像操作之后就会变成ABCCBA，再一次镜像之后变成ABCCBAABCCBA
- 现在有一个经过了多次镜像的字符串，求出它一开始的长度最短是多少

算法设计与分析

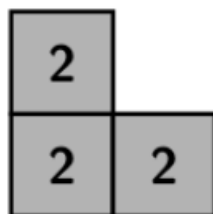
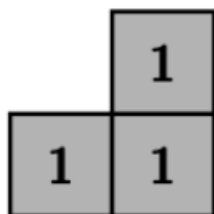
第六周算法题讨论

注意

- 如果题目没有明确输入和输出，可以自行设定，重要的在于解决问题

地毯填补问题

- 用以下4种L型地毯，覆盖 $2^k \times 2^k$ 的地面，使得 (x,y) 未被覆盖，其他格子均被覆盖一次。



最大子段和

- 给定一个整数数组 `nums`，找到一个具有最大和的连续子数组（子数组最少包含一个元素），返回其最大和。
- 例如，数组 `[-2,1,-3,4,-1,2,1,-5,4]` 中，连续子数组 `[4,-1,2,1]` 的和最大，为6。
- 要求使用分治法解决

树的距离

- 给一棵 N 点带边权无根树，问两点之间的距离小于等于 K 的点対有多少个。

最接近原点的k个点

- 我们有一个由平面上的点组成的列表 points。需要从中找出 K 个距离原点 (0, 0) 直线距离最近的点。
- 要求复杂度是 $O(n)$

算法设计与分析

第七周算法题讨论

注意

- 如果题目没有明确输入和输出，可以自行设定，重要的在于解决问题

路径总和

- 给定一个二叉树，它的每个结点都存放着一个整数值 $a[i]$ 。
- 找出路径和等于给定数值 k 的路径总数。
- 路径不需要从根节点开始，也不需要叶子节点结束，但是路径方向必须是向下的（只能从父节点到子节点）

合并中位数

- 给定M个单调递增的整数序列，每个序列的长为N，求这些序列合并之后的中位数。
- 方便起见，保证 $N*M$ 是奇数

行走问题

- 给定一个整数 n 表示距离，一个人每次能走1、2、3步，问走到 n 步，有多少种走法。
- 例如 $n = 3$ ，有4种走法： $\{1, 1, 1\}$ 、 $\{1, 2\}$ 、 $\{2, 1\}$ 、 $\{3\}$ 。

柱子

- 给出 n 个柱子，每个高度为 $a[i]$ ，拔高1高度花费为 $b[i]$
- 现在你可以对每根柱子拔高任意高度，使得任意相邻的柱子高度不同
- 求最小花费

算法设计与分析

第八周算法题讨论

注意

- 如果题目没有明确输入和输出，可以自行设定，重要的在于解决问题

极值点

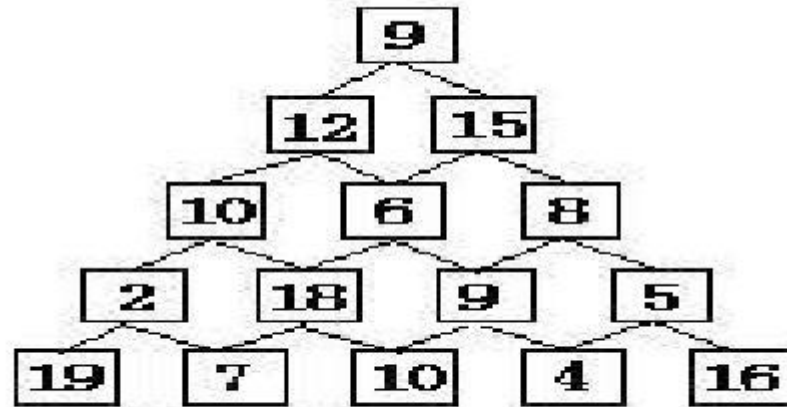
- 给定一个单峰函数 $f(x)$ 和它的定义域，求它的极值点
- 该单峰函数 $f(x)$ 保证定义域内有且只有一个极值点，且为极大值点

硬币问题

- 今有面值为 1、5、11 元的硬币各无限枚。
- 想要凑出 n 元，问需要的最少硬币数量。

数塔问题

- 有如图所示的数塔，要求从顶层走到底层，若每一步只能走到相邻的结点，则经过的结点的数字之和最大是多少？



小美的数组构造

- 小美拿到了一个数组 a ，她准备构造一个数组 b 满足：
 - 1. b 的每一位都和 a 对应位置不同，即 $b_i \neq a_i$
 - 2. b 的所有元素之和都和 a 相同
 - 3. b 的数组均为正整数
- 请你告诉小美有多少种构造方式。由于答案过大，请对 10^9+7 取模
- 输入描述
 - 第一行输入一个正整数 n ，代表数组的大小。
 - 第二行输入 n 个正整数 a_i ，代表小美拿到的数组。
 - $1 \leq n \leq 100$
 - $1 \leq a_i \leq 300$
 - $1 \leq \sum a_i \leq 500$
- 输出描述
 - 一个整数，代表构造方式对 10^9+7 取模的值。
- 示例
 - 输入：
 - 3
 - 1 1 3
 - 输出：
 - 1
 - 注：只有 $[2,2,1]$ 这一种数组合法。

算法设计与分析

第9周算法题讨论

注意

- 如果题目没有明确输入和输出，可以自行设定，重要的在于解决问题

分巧克力

- K个小朋友分N块巧克力，其中第i块是大小为 $H_i \times W_i$ 的方格组成的长方形。
- 从这N块巧克力中切出K块分给小朋友，其中每一块都是大小相同，且边长为整数的正方形
- 例如一块6x5的巧克力，可以切出6块2x2或者2块3x3的巧克力
- 求出切巧克力的最大边长
- 举例：当前有两块巧克力，大小分别是6x5和4x5，要分给10个小朋友，那么可以从6x5的巧克力里面切出6块2x2，从4x5的巧克力里面切出4块2x2，最终切巧克力的最大边长是2

文字工作

- 机器猫要在电脑前打字。一共需要打 n 个字，但现在文档里只有一个字。
- 机器猫有两种操作可以做。假设现在已经有 x 个字，机器猫可以选择：
 - 往文档最后加一个字。字数变成 $x+1$ 。
 - 把文档复制粘贴一遍。字数变成 $2x$ 。
- 问机器猫至少需要多少次操作，才能得到恰好 n 个字。

编辑距离

- 给定两个字符串word1和word2，请计算将word1转换为word2所需的最小编辑操作数。
- 允许的编辑操作包括插入一个字符、删除一个字符和替换一个字符。
- 输入：
 - word1 和 word2 长度分别为m和n ($1 \leq m, n \leq 500$)。
- 输出
 - 返回将 word1 转换为 word2 所需的最小编辑操作数。
- 例说明
 - Input: word1 = "intention", word2 = "execution"
 - Output: 5
 - 说明: "intention" -> "inention" -> "enention" -> "exention" -> "exection" -> "execution"

小美的树上染色

- 小美拿到了一棵树，每个节点有一个权值。初始每个节点都是白色。
- 小美有若干次操作，每次操作可以选择两个相邻的节点，如果它们都是白色且权值的乘积是完全平方数，小美就可以把这两个节点同时染红。
- 小美想知道，自己最多可以染红多少个节点？

算法设计与分析

第10周算法题讨论

注意

- 如果题目没有明确输入和输出，可以自行设定，重要的在于解决问题

加分二叉树

- 设一个 n 个节点的二叉树 $tree$ 的中序遍历为 $(1, 2, 3, \dots, n)$ ，其中数字 $1, 2, 3, \dots, n$ 为节点编号。每个节点都有一个分数（均为正整数），记第 i 个节点的分数为 d_i ， $tree$ 及它的每个子树都有一个加分，任一棵子树 $subtree$ （也包含 $tree$ 本身）的加分计算方法如下：
- $subtree$ 的左子树的加分 $\times subtree$ 的右子树的加分 $+ subtree$ 的根的分数的。
- 若某个子树为空，规定其加分为 1，叶子的加分就是叶节点本身的分数。不考虑它的空子树。
- 试求一棵符合中序遍历为 $(1, 2, 3, \dots, n)$ 且加分最高的二叉树 $tree$ 。要求输出 $tree$ 的最高加分

合并果子

- 有N堆大小不同的果子，每次合并消耗的体力为两堆大小之和，求所有果子合为一堆消耗的最小体力。

数列分段

- 对于给定的一个长度为 N 的正整数数列 A_i ，现要将其分成连续的若干段，并且每段和不超过 M （可以等于 M ）
- 问最少能将其分成多少段使得满足要求。

纪念品分组

- 一共有 N 个物品，每个物品有价值 $a[i]$ 。要求把这些物品分组，每组最多两个物品，且每组的价值之和不超过 S 。
- 问最少能分多少组。

铺设道路

- 给定一个正整数数组，每次操作可以选中一个区间 $[L, R]$ ，使得区间中的每个数字-1
- 问最少需要几次操作才能使数组全变成0
- 例如数组 $[1, 2, 1]$ 最少需要2次操作

算法设计与分析

第11周算法题讨论

注意

- 如果题目没有明确输入和输出，可以自行设定，重要的在于解决问题

奇数数列

- 输入正整数 n 和长度为 n ($n \leq 10^5$)的数列 $\{a_n\}$ ($1 \leq a_i \leq 10^9$)。在一次操作中你可以选择一个偶数 c ，并且把所有等于 c 的数除以2。例如 $a = [6, 8, 12, 6, 3, 12]$ ，选择 $c = 6$ 进行一次操作后 $a = [3, 8, 12, 3, 3, 12]$ 。请问最少进行多少次操作后， $\{a_n\}$ 的所有数都变成奇数。

● 样例输入

样例输出

● 6

4

● 40 6 40 3 20 1

最小圆覆盖

- 给定平面点集，在平面上找出一个最小圆，使得该圆能覆盖所有点。

Ghd

- 给定一个长度为 n ($1 < n < 1e6$) 的序列 A
 A_1, \dots, A_n ($1 < A_i < 1e12$)
- 求一个最大的整数 g , 保证 A 中至少有 $n/2$ 个元素可被 g 整除

矩阵相等

- 给三个 $N * N$ 的矩阵 A, B, C , 问 $A * B$ 是否等于 C ?

算法设计与分析

第12周算法题讨论

注意

- 如果题目没有明确输入和输出，可以自行设定，重要的在于解决问题

二叉搜索树判断

- 二叉搜索树是比较特殊的一种二叉树, 对于树上的每个节点它的权值大于等于它的左子树节点, 小于等于它右子树的节点
- 现在给你若干个二叉树, 请判断它们是否是二叉搜索树

组合求和

- 给定一个正整数数组 `candidates` 和一个目标正整数 `target`，找出所有使得数组中数字和为 `target` 的组合。
- 同一个数字可以被选定多次。
- 例
 - 输入: `candidates = [2,3,6,7]`, `target = 7`
 - 输出: `[[2,2,3], [7]]`
- 当 `candidates` 中的每个数字在每个组合中只能使用一次呢？
 - 怎么求解？

路径和指定值的二叉树路径

- 给定一个二叉树和一个整数 `sum`，设计一个算法，确定是否存在从根节点到叶子节点的路径，其节点值之和等于给定的整数 `sum`。

括号生成

- 数字 n 代表生成括号的对数，请你设计一个函数，用于能够生成所有可能的并且有效的括号组合。
- 示例 1：
 - 输入： $n = 3$
 - 输出： `["((()))", "(()())", "(()())", "()(())", "()()()"]`
- 示例 2：
 - 输入： $n = 1$
 - 输出： `["()"]`
- $1 \leq n \leq 8$

数独

- 编写一个程序，通过填充空格来解决数独问题。
- 数独的解法需 遵循如下规则：
 - 数字 1-9 在每一行只能出现一次。
 - 数字 1-9 在每一列只能出现一次。
 - 数字 1-9 在每一个以粗实线分隔的 3x3 宫内只能出现一次。
- 数独部分空格内已填入了数字，空白格用 '.' 表示。

数独

- board =

```
[["5","3"," "," "," ","7"," "," "," "," "," "],["6"," "," "," "," ","1"," "," "," "," "," "],
["9","5"," "," "," "," "," "," ","9","8"," ","6"," "," ],["8"," "," "," "," ","6"," "," "," ","3"],["4"," "," "," "," ","6"," "," "," ","3"," ","1"],["7"," "," "," "," ","2"," "," "," ","6"],[" ","6"," "," "," "," "," ","2","8"," "," "],[" ","6"," "," "," "," "," ","2","8"," "," "],
["4","1","9"," "," ","5"],[" "," "," "," "," ","8"," "," ","7","9"]]
```

- 输出:

```
[["5","3","4","6","7","8","9","1","2"],["6","7","2","1","9","5","3","4","8"],["1","9","8","3","4","2","5","6","7"],
["8","5","9","7","6","1","4","2","3"],["4","2","6","8","5","3","7","9","1"],["7","1","3","9","2","4","8","5","6"],
["9","6","1","5","3","7","2","8","4"],["2","8","7","4","1","9","6","3","5"],["3","4","5","2","8","6","1","7","9"]]
```

5	3			7				
6			1	9	5			
	9	8					6	
8				6				3
4			8		3			1
7				2				6
	6					2	8	
			4	1	9			5
				8			7	9

5	3	4	6	7	8	9	1	2
6	7	2	1	9	5	3	4	8
1	9	8	3	4	2	5	6	7
8	5	9	7	6	1	4	2	3
4	2	6	8	5	3	7	9	1
7	1	3	9	2	4	8	5	6
9	6	1	5	3	7	2	8	4
2	8	7	4	1	9	6	3	5
3	4	5	2	8	6	1	7	9

锯齿数独

- 相对标准数独而言，宫变成了不规则的。玩家需在对应的锯齿方框内填入不重复的九个数，并保证横纵也不重复。

