1. Приближённое описание чисел, абсолютная и относительная погрешности. Арифметика вычислений с заданными погрешностями. Метод Жордана-Гаусса с выбором ведущего элемента.
2. Чебышёвская и евклидова норма матрицы, погрешность матричного преобразования приближённого вектора.
3. Число обусловленности квадратной матрицы, овражность симметричной положительно определённой матрицы. Оценка относительной погрешности решения системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) с квадратной матрицей при заданной относительной погрешности правой части СЛАУ.
4. Метод прогонки для СЛАУ с трёх-диагональной матрицей.
5. Степенные матричные ряды и аналитические матричные функции.
6. Метод наименьших квадратов (МНК) для решения СЛАУ и лемма о её МНК-решении.
7. Понятие стабилизирующего функционала и стабилизированный МНК для решения СЛАУ.
8. Модель парной линейной регрессии.
9. Многомерная модель линейной регрессии.
10. Модель полиномиальной регрессии.
11. Явные итерационные методы, понятие устойчивости сходящегося метода простой итерации.
12. Метод простой итерации и принцип сжимающих отображений.
13. Метод простой итерации для решения СЛАУ специального вида.
14. Устойчивость метода простой итерации для решения СЛАУ.
15. Метод Зейделя как модификация метода простой итерации для решения СЛАУ.
16. Метод касательных (Ньютона) для решения алгебраических уравнений.
17. Методы секущих как модификации метода касательных для решения алгебраических уравнений.
18. Общие принципы вычисления собственных значений и собственных векторов квадратной матрицы, пример метода Крылова.
19. Метод приближённого вычисления максимального по модулю собственного значения и отвечающего ему собственного вектора для квадратной матрицы, имеющий действительный спектр.
20. Полное решение спектральной матричной задачи итерационным методом Якоби.
21. Понятия сетки, схемы сеток, сеточной функции и схемы сеточных функций. Сеточные отображения для функции определённой на заданном отрезке. Общая постановка задачи интерполяции сеточной функции.
22. Аналитический вид интерполяционного полинома Лагранжа и матричный способ вычисления его коэффициентов.
23. Схема интерполирования Лагранжа гладкой на отрезке функции, понятия её сходимости, аналитической корректности, устойчивости и корректности. Формулировка теоремы Чебышёва об аналитической корректности задачи интерполирования Лагранжа со схемой чебышёвских сеток.
24. Понятие схемы функций Чебышёва, примеры таких традиционных схем. Задача интерполяции сеточной функции по системе функций Чебышёва.
25. Задача аппроксимирования гладкой на отрезке функции с использованием схемы функций Чебышёва.
26. Остаток в форме Коши для задачи интерполяции Лагранжа.
27. Составная квадратурная формула прямоугольников.
28. Составная квадратурная формула трапеций.
29. Составная квадратурная формула Симпсона (парабол).
30. Пространство сплайнов нулевой степени единичного дефекта, его стандартный базис.
31. Пространство сплайнов первой степени единичного дефекта, его стандартный базис.
32. Пространство сплайнов второй степени единичного дефекта, его стандартный базис.
33. Описание пространства сплайнов третьей степени единичного дефекта, его стандартный базис.
34. Формулировка теоремы о корректности интерполирования дефектными сплайнами нулевой, первой, второй и третьей степеней непрерывной на отрезке функции. Задача приближённого вычисления производной гладкой на отрезке функции с помощью дефектных сплайнов третьей степени.
35. Локальные *B*-сплайны второй степени, задача аппроксимации гладкой на отрезке функции с помощью таких сплайнов.
36. Локальные B-сплайны третьей степени, задача аппроксимации гладкой на отрезке функции с помощью таких сплайнов.
37. Понятия (нормированного) поли-пространства и прямой поли-степени пространства, понятие поли-табличного пространства. Константное подпространство поли-пространства.
38. Поли-пространство поли-гомоморфизмов поли-пространства и его подпространство устойчивых (ограниченных) поли-гомоморфизмов.
39. Понятия сеточной табуляции и аппроксимации линейного многообразия в функциональном банаховом пространстве; пример с полиномиальной аппроксимацией.
40. Понятия сеточного табулирования, координирования и аппроксимирования сепарабельного линейного многообразия в функциональном банаховом пространстве ограниченных и непрерывных слева на отрезке функций, понятие устойчивости и корректности аппроксимирования; пример корректного аппроксимирования непрерывных на отрезке функций с помощью сплайнов нулевой степени (дефекта 1).
41. Понятия табуляции линейного оператора в функциональном чебышёвском пространстве непрерывных функций и табулирования этого оператора, аналитическая корректность и корректность табулирования; пример табулирования линейного интегрального оператора с заданным гладким ядром.
42. Схема метода конечных сумм для численного решения линейных уравнений в функциональных банаховых пространствах, критерий корректности этой схемы; пример численного решения методом конечных сумм интегрального уравнения Фредгольма 2-го рода с симметричным гладким аналитически заданным ядром.
43. Схема табличных аналогов для решения задачи вычисления линейного интегрального оператора с гладким ядром в чебышёвском функциональном пространстве непрерывных на отрезке функций, свойства аналитическая корректности (аппроксимирования) и корректности этой схемы.
44. Понятие аппроксимирования линейного оператора в функциональном банаховом пространстве ограниченных и непрерывных слева на отрезке функций, понятия аналитической корректности и корректности аппроксимирования; пример корректного сплайнового аппроксимирования линейного интегрального оператора с аналитически заданным непрерывным ядром.
45. Схема метода коллокаций для численного решения линейных уравнений в банаховом пространстве непрерывных на отрезке функций на примере схемы метода коллокаций для численного решения линейного интегрального уравнения Фредгольма II-рода с аналитически заданным непрерывным ядром интегрального оператора этого уравнения.

I. Арифметика действительных чисел в вычислительной математике

В вычисл. матем. действ. число $a_* \in \mathbb{R}$ задается с помощью приближенного числа $a \in \mathbb{Q}$ и погрешности приближения $\Delta a \in \mathbb{Q}_{(+)}$. Таким образом, пара $(a, \Delta a)$ приближенно задает число a_*

1.1 Арифметические операции

Пусть ~~a и b~~ $(a, \Delta a)$ и $(b, \Delta b)$ – приближ. задания действ. чисел

а) Сложение (разность) $\quad | \ \mathbb{Q}_+ = \{ q \in \mathbb{Q} : q \geq 0 \}$, $\quad \mathbb{Q}_{(+)} = \mathbb{Q}_+ \setminus \{0\}$

$$(a, \Delta a) \pm (b, \Delta b) = (a \pm b, \Delta a + \Delta b)$$

б) Умножение

$$(a, \Delta a) \cdot (b, \Delta b) = (a \pm \Delta a)(b \pm \Delta b) = \{(a, b) \pm a \Delta b \pm b \Delta a \pm \Delta a \Delta b\} =$$

$$\Rightarrow (a, \Delta a) \cdot (b, \Delta b) \equiv (a \cdot b, |a| \Delta b + |b| \cdot \Delta a)$$

в) $(a, \Delta a) \neq 0$ (отделено от нуля), если $0 \notin (a - \Delta a, a + \Delta a)$

$$\frac{1}{(a, \Delta a)} = \frac{1}{a \pm \Delta a} = \left\{ 0 < \frac{\Delta a}{a} < 1 \right\} = \left\{ \begin{matrix} \text{сумма} \\ \text{геом.} \\ \text{прогр.} \end{matrix} \right\} =$$

$$= \frac{1}{a\left(1 \pm \frac{\Delta a}{a}\right)} = \left\{ \left| \frac{\Delta a}{a} \right| < 1 \right\} = \frac{1}{a}\left(1 \mp \frac{\Delta a}{a} + \left(\frac{\Delta a}{a}\right)^2 \mp \ldots\right) \approx \frac{1}{a} \mp \frac{\Delta a}{a^2} \ldots$$

$$\frac{1}{(a, \Delta a)} = \left(\frac{1}{a}, \frac{\Delta a}{a^2}\right).$$

это опасная операция, если $|a| \ll 1$

Пример $(a, \Delta a) = (10^{-6}, 10^{-7}) \neq 0$, $\quad \frac{1}{(a, \Delta a)} = (10^{6}, 10^{5})$

г) Деление

$(b, \Delta b) \neq 0$

$$\frac{(a, \Delta a)}{(b, \Delta b)} = (a, \Delta a) \cdot \frac{1}{(b, \Delta b)} =$$

$$= (a, \Delta a) \cdot \left(\frac{1}{b}, \frac{\Delta b}{b^2}\right) = \left(\frac{a}{b}, |a| \cdot \frac{\Delta b}{b^2} + \frac{1}{|b|} \Delta a\right)$$

1.2. Метод Жордано-Гаусса (Ж-Г) ~~для реш.~~ с выбором ведущего элемента по столбцу для решения СЛАУ с квадр. невырожд. матрицей.

$$A = (a^i_j)^m_n \equiv \begin{pmatrix} a^1_1 & a^1_2 & \ldots & a^1_n \\ \vdots & & & \\ a^m_1 & \ldots & & a^m_n \end{pmatrix}$$

$$L(\mathbb{R}, n, m) = \{(a^i_j)^m_n : (\forall i \in \mathbb{N}_m = \langle 1, \ldots m \rangle, \forall j \in \mathbb{N}_n) \Rightarrow a^i_j \in \mathbb{R}\}$$

квадр.

$$L(\mathbb{R}, n) = L(\mathbb{R}, n, n)$$

невыр.

$$GL(\mathbb{R}, n) \equiv \{A \in L(\mathbb{R}, n) : \det(A) \neq 0\}$$

ортог.

$$OL(\mathbb{R}, n) = \{A \in GL(\mathbb{R}, n) : {}^T\!A = A^{-1}\}$$

$${}^{>}\mathbb{R}^n = \left\{ {}^{>}a = \begin{pmatrix} a^1 \\ a^2 \\ \vdots \\ a^n \end{pmatrix} = [a^1, a^2, \ldots, a^n\rangle : \forall j \in \mathbb{N}_n \Rightarrow a^j \in \mathbb{R} \right\} = L(\mathbb{R}, 1, n)$$

$${}^{<}\mathbb{R}^n = \{ {}^{<}a = \langle a_1, a_2, \ldots a_n] : \forall i \in \mathbb{N}_n \Rightarrow a_i \in \mathbb{R}\} = L(\mathbb{R}, n, 1)$$

$$A = (a^i_j)^m_n = \langle {}^{>}a_1, {}^{>}a_2, \ldots, {}^{>}a_n] = [{}^{<}a^1, {}^{<}a^2, \ldots, {}^{<}a^m\rangle$$

Выбор ведущего эл-та в столбце

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 & -1 \\ -2 & 2 & -2 & 2 \\ \boxed{-6} & 1 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

$\boxed{-6}$ — ведущий эл-т в том столбце на первом шаге методом Жордано-Гаусса 7

1.3 Метод прогонки

Пусть $A \in GL(\mathbb{R};n)$ и $\vec{b} \in \mathbb{R}^n$

Опр. (диагонального преобладания)

Говорят, что матрица $A = (a^i_j)^n_n$ имеет диагональное преобладание $d_{gn}(A)$, если

$$\min\{|a^i_i| - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a^i_j| : i = \overline{1,n}\} = d_{gn}(A) > 0$$

Опр.

Матрицу A называют трехдиагональной, если все ее компоненты, расположенные вне главной диагонали и прилегающих к ней диагоналей — нулевые.

Пример 1.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$ — трехдиаг. матрица

и $d_{gn}(A) = 1$

Теорема 1 (о матрице с диаг. преобл.)

Квадратная матрица, имеющая диагональное преобладание, — невырожденная.

Пример 2 (метод прогонки)

$$\begin{cases} 3x^1 - x^2 = 2 \\ -x^1 + 3x^2 + x^3 = 3 \\ x^2 - 3x^3 + x^4 = -1 \\ -x^3 + 2x^4 = 1 \end{cases}$$

Прямой ход

1) $x^1 = \frac{2}{3} + \frac{1}{3}x^2 \quad \{(\frac{2}{3}, \frac{1}{3})\}$ — в память

2) $\{-\frac{2}{3} - \frac{1}{3}x^2 + 3x^2 + x^3 = 3\}$

$\frac{8}{3}x^2 + x^3 = \frac{11}{3}$

$x^2 = \frac{11}{8} - \frac{3x^3}{8} \quad \{(\frac{11}{8}, -\frac{3}{8})\}$

3) $\frac{11}{8} - \frac{3}{8}x^3 - 3x^3 + x^4 = -1$

$-\frac{27}{8}x^3 + x^4 = -\frac{19}{8}$

$x^3 = \frac{19}{27} + \frac{8}{27}x^4 \quad \{(\frac{19}{27}, +\frac{8}{27})\}$

4) $-\frac{19}{27} - \frac{8}{27}x^4 + 2x^4 = 1$

$x^4 = 1$

Обратный ход

$x^3 = \frac{19}{27} + \frac{8}{27}x^4 = 1$

$x^2 = \frac{11}{8} - \frac{3}{8} = 1$

$x^1 = \frac{2}{3} + \frac{1}{3} = 1$

$\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = [1, 1, 1, 1\rangle$ — ответ.

1.4. Относительная

2. Погрешности при решении СЛАУ с квадратной невыр. матрицей

Здесь рассм-ся СЛАУ: $A \cdot \vec{x} = \vec{b}$ (1)

где $A \in GL(\mathbb{R}, n)$, $\vec{b} \in \vec{\mathbb{R}}^n$ - задана, $\vec{x} \in \vec{\mathbb{R}}$ - неизв.

2.1 Погрешности в нормированном пр-ве

Пусть $Y = (Y, \|\cdot\|)$ - норм-ое пр-во (над полем $\mathbb{R}$)

Приближение к эл-ту $y_* \in Y$ задается парой $(y, \|\Delta y\|)$, где $y \in Y$ - приближ. знач. для y_* и $\|\Delta y\|$ - норма погрешности приближ.

Далее, $\|\Delta y\|$ - абсолютная погрешность, если $O_Y \notin \overline{\|\Delta y\|}(y) = \{z \in Y : \|z-y\| < \|\Delta y\|\}$, т.е. $(y, \|\Delta y\|) \neq O_Y$ (y отделен от O_Y), то $\frac{\|\Delta y\|}{\|y\|}$ - относит. погрешн. приближ. $y \in Y$

Если $\varepsilon > 0$ ($\varepsilon \in \mathbb{R}_{+1}$), то $\overset{\circ}{\varepsilon}(y) = \{z \in Y : \|z-y\| < \varepsilon\}$ -

- ε-окр-ть эл-та $y \in Y$ в пр-ве Y

2.2. Чебышевская норма

Пусть $\|\cdot\|_Ч$ - чебышевская норма в пр-ве $\vec{\mathbb{R}}^n = (\vec{\mathbb{R}}^n, \|\cdot\|_Ч)$, т.е. $\|a\|_Ч = \max\{|a^1|, |a^2| \dots, |a^n|\}$, если $\vec{a} = [a^1, a^2 \dots a^n] \in \vec{\mathbb{R}}^n$.

Для ~~нормированной~~ банаховой алгебры $L(\mathbb{R}; n) = (L(\mathbb{R}; n; \|\cdot\|)$, где $\|\cdot\|$ - подчиненная норма матриц относит. чебышевской нормы в $\vec{\mathbb{R}}^n$, получаем

$\|A\| = \max\{\sum_{j=1}^{n} |a^i_j| : i = \overline{1,n}\}$ для $A = (a^i_j)^n_n \in L(\mathbb{R}, n)$

Пример 1.

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 5 & -2 \\ 2 & 6 & -5 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \vec{x} = [x^1, x^2, x^3] \in \vec{\mathbb{R}}^3$$

$$\|A \cdot \vec{x}\|_Ч = \max\{|-3x^1 + 5x^2 - 2x^3|, |2x^1 + 6x^2 - 5x^3|, |x^1 - x^3|\} =$$

$$= \{\|A\| = \max\{\|A \cdot \vec{x}\|\} \ \& \ \|\vec{x}\|_Ч = \max\{|x^1|, |x^2|, |x^3|\} = 1\}$$

подчин. норма

$$= \max\{10, 13, 2\} = 13$$

Замечание

Если $B = (b^i_j)^n_m \in L(\mathbb{R}, n, m)$, то $\|B\| = \max\{\sum_{j=1}^{n} |b^i_j| : i = \overline{1,m}\}$

2.3. Евклидова норма

Далее $\vec{E}^n = (\vec{\mathbb{R}}^n, \|\cdot\|_e)$ - стандартное арифмет. евклидово пр-во, где $\|\vec{x}\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ для $\vec{x} = [x^1, x^2 \dots x^n] \in \vec{\mathbb{R}}^n$ $\{\langle x = \langle x^1, x^2, \dots x^n] \in \mathbb{R}^n\}$

$\{\|\vec{x}\|$ - длина $\vec{x} \in E^n\}$

Опр. (спектрального радиуса кв. матрицы)

Пусть $B \in L(\mathbb{R}, n)$. Тогда $Spr(B) = \{\lambda_1, \lambda_2 \dots \lambda_n\}$ -

- спектр матрицы B, т.е. набор собств. значений (с учетом кратности) матрицы B, и $\rho Spr(B) = \max\{|\lambda_1|, |\lambda_2| \dots |\lambda_n|\}$ - спектральный радиус матрицы B

Лемма 1 (основное нер-во для подчиненной нормы)

Пусть $Y = (Y, \|\cdot\|)$ - банахово пр-во и $\hat{F} \in Hom(Y, Z)$ - ограниченный гомоморфизм (лин. отобр) из пр-ва Y в банахово пр-во $Z = (Z, \|\cdot\|_Z)$

Тогда для подчиненной нормы $\|\hat{F}\| = \sup\{\|\hat{F}(y)\|_Z : \|y\|_Y = 1\}$

спр-во нер-во: $\|\hat{F}(y)\|_Z \le \|\hat{F}\| \cdot \|y\|_Y$

◀ Если $y = 0_Y$, то нер-во очевидно.
Пусть $y \ne 0_Y$, т.е. $\|y\|_Y \ne 0$.
Рассм. эл-т $b = \frac{1}{\|y\|_Y} y$, для кот. $\|b\|_Y =$
$= \|\frac{1}{\|y\|_Y} y\| = \frac{1}{\|y\|_Y} \|y\|_Y = 1$. Поэтому, согласно

опр-ю подчиненной нормы, $\|\hat{F}(\frac{1}{\|y\|_Y} y)\| =$
$= \|\frac{1}{\|y\|_Y} \hat{F}(y)\|_Z = \frac{1}{\|y\|_Y} \|\hat{F}(y)\|_Z \le \|\hat{F}\| \Rightarrow$
$\Rightarrow \|\hat{F}(y)\|_Z \le \|\hat{F}\| \cdot \|y\|_Y$ ▶

Замечание (линейное и нор-е пр-во гомоморфизмов)

Далее $Hom(Y, Z)$ - лин. пр-во гомоморф-в и

$Hom_c(Y, Z)$ - нор-е пр-во ограничен (непр-х) гомоморф-в с подчиненной нормой, т.к. для $\hat{F}, \hat{G} \in Hom_c(Y, Z)$, $y \in Y$ и $\alpha \in \mathbb{R}$:
$\|(\hat{F} + \hat{G})(y)\|_Z = \|\hat{F}(y) + \hat{G}(y)\|_Z \le \|\hat{F}(y)\|_Z + \|\hat{G}(y)\|_Z \le$
$\le \|\hat{F}\| \cdot \|y\|_Y + \|\hat{G}\| \cdot \|y\|_Y \le (\|\hat{F}\| + \|\hat{G}\|) \cdot \|y\|_Y$, т.е.
$\|\hat{F} + \hat{G}\| \le \|\hat{F}\| + \|\hat{G}\|$, т.е. $\|\alpha \hat{F}(y)\| \le |\alpha| \, \|\hat{F}(y)\|_Z \le$
$\le |\alpha| \cdot \|\hat{F}\| \cdot \|y\|_Y$, т.е. $\|\alpha \hat{F}\| \le \alpha \|\hat{F}\|$

Теорема 2 (о банаховом пр-ве огранич. гомоморф-в)

Если Z - банахово, то $Hom_c(Y, Z)$ - банахово пр-во, даже если Y не является банаховым.

Лемма 3 (о норме суперпозиции огран-х гомоморф-в)

Пусть $Y = (Y, \|\cdot\|_Y)$, $Z = (Z, \|\cdot\|_Z)$ и $V = (V, \|\cdot\|_V)$ - норм-е пр-ва, $\hat{F} \in Hom_c(Y, Z)$ и $\hat{G} \in Hom_c(Z, V)$

Тогда $\hat{G} \circ \hat{F} \in Hom_c(Y, V)$ и $\|\hat{G} \circ \hat{F}\| \le \|\hat{G}\| \cdot \|\hat{F}\|$

◀ Пусть $y \in Y$. Тогда $\|\hat{G} \circ \hat{F}(y)\|_V = \|\hat{G}(\hat{F}(y))\|_V \le$
$\le \|\hat{G}\| \cdot \|\hat{F}(y)\|_Z \le \|\hat{G}\| \cdot \|\hat{F}\| \cdot \|y\|_Y$, т.е.
$\|\hat{G} \circ \hat{F}\| \le \|\hat{G}\| \cdot \|\hat{F}\|$

Следствие 1 (о банаховой алгебре эндоморфизмов)

$End(Y) = Hom(Y, Y)$ - лин. пр-во эндоморфизмов
$End_c(Y)$ - норм-е пр-во огранич. эндоморф. с подчин. нормой.

$End_c(Y)$ - банахова алгебра $\{\|\hat{F} \circ \hat{F}\| \le \|\hat{G}\| \cdot \|\hat{F}\|$

для $\hat{F}, \hat{G} \in End_c(Y)$,

$\|id_Y\| = 1$, $(\alpha\hat{G}) \circ (\beta\hat{F}) = \alpha\alpha(\hat{G} \circ \hat{F})$ для $\alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$, если Y - банахово пр-во.

Пример 2

$L(\mathbb{R}, n)$ - банахова алгебра с чебышёвской нормой

Замечание.

Пусть $A \in L(\mathbb{R}, n, m)$. Тогда $\hat{A} \in Hom_{\mathbb{R}}(\vec{\mathbb{R}}^n, \vec{\mathbb{R}}^m)$ — A-табличный гомоморфизм, для кот. $\hat{A}(\vec{x}) = A\vec{x}$, если $\vec{x} \in \vec{\mathbb{R}}^n$. Тогда $\|\hat{A}\| = \|A\|$

Колмогоров — Фомин
Док-во записать, что норма — непр. отобр. норм. пр-во в действ.

метрика — непр. отобр.
метрика в прямом произвед. метрич. пр-в

2.4. Евклидова норма.

$A \in L(\mathbb{R}, n, m) \Rightarrow \|A\|_e = \sqrt{\rho_{spr}({}^T\!A \cdot A)}$ для табличных гомоморфизмов из пр-ва $\vec{E}^n$ в пр-во $\vec{E}^m$

Если $(X_1, \rho_1), (X_2, \rho_2)$ — два метрич. пр-ва, то пр-во $(X_1 \times X_2, \rho)$, где ρ — введенная метрика одним из способов (в $X_1 \times X_2$)

$(x_1, x_2) \in X_1 \times X_2$, $(x_1^*, x_2^*) \in X_1 \times X_2$

$$\rho((x_1,x_2),(x_1^*,x_2^*)) = \sqrt{\rho_1^2(x_1,x_1^*) + \rho_2^2(x_2,x_2^*)}$$
$$\parallel \quad \rho_1(x_1,x_1^*) + \rho_2(x_2,x_2^*)$$
$$\parallel \quad \max\{\rho_1(x_1,x_1^*), \rho_2(x_2,x_2^*)\}$$

Будем наз-ть **прямым произведением** мн. метрич. пр-в

Пусть $A = (a_i^j)_n^m \in L(\mathbb{R}, n, m)$. Тогда A табличный оператор $\hat{A} \in Hom_{\mathbb{R}}(\vec{E}^n, \vec{E}^m)$ имеет вид: $\hat{A}(\vec{x}) = A\vec{x}$. Поэтому

$\|\hat{A}\|^2 = \|A\|^2 = \max\{\|A\vec{x}\|^2 : \|\vec{x}\|_e = \sqrt{\vec{x}\vec{x}} = 1\} =$

$= \max\{\langle A\vec{x}; A\vec{x}\rangle_e : \|\vec{x}\|_e = 1\} = \{(AB)^T = B^T A^T\} =$

$= \max\{\langle x\, {}^T\!A \cdot A \cdot \vec{x} : \|\vec{x}\|_e = 1\} = \left\{ \begin{array}{l} {}^T\!AA \text{ — симметрич. неотриц. опред.} \\ {}^T\!A \cdot A \geq 0 \end{array} \right\} =$

$$\left\{ \begin{array}{ll} {}^T\!A \cdot A \in L(\mathbb{R}, n) & \lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n \geq 0, \quad Q \in OL(\mathbb{R}, n) \\ {}^T\!A \cdot A = Q \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} {}^T Q & spr({}^T\!A A) = \{\lambda_1, \ldots \lambda_2\} \\ OL(\mathbb{R}, n): \ {}^T Q Q = E_n = Q\,{}^T Q & \|Q\vec{x}\|_e = \|\vec{x}\|_e \\ Q = \langle \vec{q}_1, \vec{q}_2, \ldots \vec{q}_n] & A \cdot \vec{q}_i = \lambda_i \vec{q}_i \quad i = \overline{1,n} \\ & \langle \vec{q}_i \vec{q}_j \rangle = \delta_{ij} \end{array} \right\}$$

$= \max\{\langle x \cdot Q \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \cdot {}^T Q \cdot \vec{x} : \|\vec{x}\|_e = \|{}^T Q \vec{x}\| = 1\} =$

$\left[\begin{array}{l} {}^T Q \vec{x} = \vec{y} \\ \langle x \cdot Q = \langle ({}^T Q \vec{x}) = \langle y \end{array} \right] = \max\{\langle y \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \vec{y} : \|\vec{y}\|_e = 1\} = \max\{\lambda_1 (y^1)^2 + \lambda_2 (y^2)^2 + \ldots + \lambda_n (y^n)^2 : (y^1)^2 + \ldots + (y^n)^2 = 1\}$

$= \max\{\lambda_1, \lambda_2 \ldots \lambda_n\} = \lambda_{max} = \rho_{spr}({}^T\!A \cdot A)$

Таким образом $\|A\| = \sqrt{\rho_{spr}({}^T\!A \cdot A)}$, $\|\hat{A}\|$

Пример

а) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad {}^T\!A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

${}^T\!A A = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$ $\quad spr({}^T\!A A) = \{5, 6\} = \{\underset{5}{\lambda_1}, \underset{6}{\lambda_2}\}$

$(A - \lambda E_2)\vec{v} = \vec{0}_2$

1) $\lambda = 5$

$(A - \lambda_1 E_2)\begin{pmatrix} v^1 \\ v^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v^1 \\ v^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow v^2 = 0$

$\vec{q}^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\|\vec{q}_1\|_e = 1$

г) $\lambda_2 = 6$ $\quad (A - \lambda_2 E_2)\begin{pmatrix} v^1 \\ v^2 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \quad v^1 = 0, \quad v^2 = 1$

$\vec{q}_2 = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \qquad \|\vec{q}_2\|_e = 1$

$\|A\| = \sqrt{6}$

б) $A = \begin{pmatrix}2&1\\1&2\end{pmatrix} \qquad A^T\cdot A = \begin{pmatrix}5&4\\4&5\end{pmatrix}$

$\det(A^T A) = 9$

$\det(A^T\cdot A - \lambda E) = \begin{vmatrix}5-\lambda & 4\\ 4 & 5-\lambda\end{vmatrix} = \lambda^2 - 10\lambda + 9 = 0$

писать так! $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\lambda_1 = 1 = \lambda_1\\ \lambda_2 = 9 = \lambda_2\end{array}\right. \Rightarrow \rho_{spr}(A^T\cdot A) = 9 \Rightarrow$

$\left[\begin{array}{l}\lambda = \ldots = \lambda_1\\ \lambda = \ldots = \lambda_2\end{array}\right.$

$\Rightarrow \|A\| = \sqrt{9} = 3$ #

2.5. Оценка абсолютной погрешности результата домножения на матрицу

$A \in L(\mathbb{R}, n, m)$, $\vec{x} \in X = (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_X)$ и $A\vec{x} \in Y = (\mathbb{R}^m, \|\cdot\|_Y)$

и $\|\vec{x}\|_X \le \varepsilon$. Тогда $\|A\cdot\vec{x}\|_Y \le \|A\|\cdot\|\vec{x}\|_X \le \|A\|\cdot\varepsilon$

2.6. Число обусловленности квадратной невырожд. матрицы

Пусть $A \in GL(\mathbb{R}, n)$

Опр. Число $\operatorname{cond}(A) = \|A^{-1}\|\cdot\|A\|$ называют **числом обусловленности** матрицы A

($\operatorname{cond}(A) \le 10 \Rightarrow A$ — „хорошо обусловлена", если $\operatorname{cond}(A) > 10^2$ — „плохо" обусловлена)

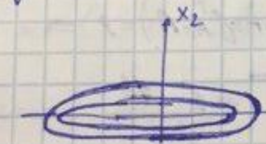
Замечание (об обратных симм. полож.-опр. матр.)

Пусть $A > 0$ — симм. матрица и $\|A\| = \sqrt{\rho_{spr}(A^T A)} = \sqrt{\rho_{spr}(A^2)} = \max\{\lambda : \lambda \in Spr(A)\} = \rho_{spr}(A) = \lambda_{max}$

Тогда $A^{-1} > 0$ — симм. и $\|A^{-1}\| = \max\limits_{\lambda \in Spr(A)}\left\{\frac{1}{\lambda}\right\} = \frac{1}{\lambda_{min}}$, где $\lambda_{min} = \min\{\lambda : \lambda \in Spr(A)\}$

Следовательно $\operatorname{cond}_2(A) = \|A^{-1}\|\cdot\|A\| = \frac{1}{\lambda_{min}}\lambda_{max} = \frac{\lambda_{max}}{\lambda_{min}}$ — **овражность** матрицы A

$y = \lambda_1(x^1)^2 + \lambda_2(x^2)^2 = \left(\frac{x^1}{\frac{1}{\sqrt{\lambda_1}}}\right)^2 + \left(\frac{x^2}{\frac{1}{\sqrt{\lambda_2}}}\right)^2$



$\frac{\lambda_{max}}{\lambda_{min}} \gg 1$

2.7. Оценка относительной погрешности при решении СЛАУ с невырожд. квадр. матрицей

Рассм. СЛАУ

$$A\vec{x} = \vec{b} \qquad (*)$$

$A \in GL(\mathbb{R}, n)$, $\vec{b} \in \mathbb{R}^n$ — задана и $\vec{x}_* = A^{-1}\vec{b}$ — точн. решен.

Вместо СЛАУ (*) на практике, как правило, дана СЛАУ:

$$A\cdot\vec{x} = \vec{b} + \Delta\vec{b} \qquad (**)$$

где $\vec{\Delta b} \in \mathbb{R}^n$ и $\delta = \frac{\|\vec{\Delta b}\|}{\|\vec b\|}$ – относит. погрешность в правой части СЛАУ (*) #

Из (**) и (*) следует, что решение СЛАУ (**) имеет вид:

$$\vec x = \vec x_* + \vec{\Delta x}, \quad (**)$$

где $A\vec{\Delta x} = \vec{\Delta b}$, т.е. $\|A^{-1}\vec{\Delta b}\| \le \|A^{-1}\|\cdot\|\vec{\Delta b}\|$. (***)

Но $\vec b = A\cdot\vec x_*$, т.е. $\|\vec b\| \le \|A\|\cdot\|\vec x_*\| \iff \|\vec x_*\| \ge \frac{\|\vec b\|}{\|A\|}$

Следовательно, $\frac{\|\vec{\Delta x}\|}{\|\vec x_*\|} \overset{(***)}{\le} \frac{\|A^{-1}\|\cdot\|\vec{\Delta b}\|}{\|\vec b\|/\|A\|} = \|A^{-1}\|\cdot\|A\|\cdot\frac{\|\vec{\Delta b}\|}{\|\vec b\|} = cond(A)\frac{\|\vec{\Delta b}\|}{\|\vec b\|}$

Т.о. $\frac{\|\vec{\Delta x}\|}{\|\vec x_*\|} \le cond(A)\cdot\frac{\|\vec{\Delta b}\|}{\|\vec b\|}$.

3. Метод наименьших квадратов (МНК)

Рассм. переопределенную СЛАУ:

$$A\cdot\vec x = \vec b, \quad (1)$$

где $A \in L(\mathbb{R}, k, m)$; $\vec b \in \vec E^m$ и $m > k$ #

Замечание 1 (об обознач. общего решения СЛАУ)

а) $Sol(A; \vec b) = \{\vec x \in \vec E^n : A\cdot\vec x = \vec b\}$ – общее решение СЛАУ (1)

Если $|Sol(A, \vec b)| = 1$, то $sol(A, \vec b) = \vec x$ и $A\vec x = \vec b$

б) СЛАУ (1) может быть несовместной #

В качестве оценки общего решения СЛАУ (1) выбирается решение задачи: $\begin{cases}\|A\vec x - \vec b\|_e^2 \to min \\ \vec x \in \vec E^n\end{cases}$

Замечание 2 (о невязке)

а) Если $\vec x \in \vec E^n$, то $\|A\cdot\vec x - \vec b\|_e$ – невязка относит. СЛАУ (1) для вектора $\vec x$

б) Общее решение (2) называют МНК-решением СЛАУ (1). Очевидно, что решение задачи (2) имеет вид:

$$Argmin\{\|A\cdot\vec x - \vec b\|_e^2 : \vec x \in \vec E^n\} \quad (3)$$

Найдем экстремумы для функции $g: \vec E^n \to \mathbb{R}_+$ вида:

$$g(\vec x) = \|A\cdot\vec x - \vec b\|_e^2 \overset{сп}{=} \langle A\cdot\vec x - \vec b; A\cdot\vec x - \vec b\rangle_e =$$

$$= \langle A\cdot\vec x; A\cdot\vec x\rangle - 2\langle A\vec x; \vec b\rangle + \|\vec b\|_e^2 =$$

$$= \langle x\cdot{}^TA\cdot A\cdot\vec x\rangle - 2\langle x\cdot{}^TA\cdot\vec b\rangle + \|\vec b\|_e^2 \quad (4)$$

Для поиска экстремумов функции $g(\vec x)$ представим СЛАУ:

$\vec e_1 = (1, 0, \dots, 0)$, $\vec e_2 = (0, 1, \dots, 0)$

$$\begin{cases}\frac{\partial g}{\partial x^1} = 0 \\ \frac{\partial g}{\partial x^2} = 0 \\ \vdots \\ \frac{\partial g}{\partial x^n} = 0\end{cases} \iff \begin{cases}2\langle e_1\cdot{}^TA\cdot A\cdot\vec x\rangle - 2\langle e_1\,{}^TA\cdot\vec b\rangle = 0, \\ 2\langle e_2\cdot{}^TA\cdot A\cdot\vec x\rangle - 2\langle e_2\,{}^TA\cdot\vec b\rangle = 0 \\ \vdots \\ 2\langle e_n\,{}^TA\cdot A\cdot\vec x\rangle - 2\langle e_2\,{}^TA\cdot\vec b\rangle = 0\end{cases}$$

$$\iff {}^TA\cdot A\cdot\vec x - {}^TA\cdot\vec b \overset{?}{=} 0_n \iff {}^TA\cdot A\cdot\vec x = {}^TA\cdot\vec b$$

Таким образом, поскольку ${}^TA\,A \ge 0$ – симм., то

$$Argmin\{\|A\cdot\vec x - \vec b\|_e^2 : \vec x \in \vec E^n\} = Sol({}^TA\cdot A, {}^TA\vec b)$$

Опр. 1 СЛАУ:

$$^TA\cdot A\cdot\vec{x} = {}^TA\cdot\vec{b} \quad (5)$$

называют **МНК-нормальной** для СЛАУ (1) #

Общее решение (5) наз-ют **МНК-решением** СЛАУ (1)

Опр. 1 СЛАУ (5) называют **нормальной** для СЛАУ (1) ($Ax=b$)

Если $\vec{x}\in\vec{E}^n$, то число $\|A\cdot\vec{x}-\vec{b}\|$ наз. **невязкой** для вектора x относит. СЛАУ (1)

Замечание 1

Согласно опр. 1 МНК-решение минимизирует невязку относит. СЛАУ (1)

Пример 1 (модель парной линейной регрессии)

Модель парной линейной регрессии описывает зависимость регрессора y от одного фактора (переменной) x в виде:

$$y = x_0 + x_1 z + \varepsilon, \quad (6)$$

где $\vec{x}=\begin{pmatrix}x_0\\x_1\end{pmatrix}$ - вектор неизвестных параметров тренда $\bar{y}=x_0+x_1 z$ модели (6) и $\varepsilon\sim N(0,\sigma)$ - случайная составляющая модели, где среднее квадратичное откл. σ неизвестно

($N(0,\sigma)$ - станд. нормальный закон с дисперсией σ)

Проведя эксперимент со значениями фактора $z_1, z_2, \dots, z_m$, получают СЛАУ (из (6)):

$$\begin{cases} x_0+x_1 z_1 = \bar{y}_1+\varepsilon_1 = y_1\\ x_0+x_1 z_2 = \bar{y}_2+\varepsilon_2 = y_2\\ \dots\\ x_0+x_1 z_m = \bar{y}_m+\varepsilon_m = y_m \end{cases} \quad (7)$$

Рис 1. иллюстрирует СЛАУ (7)

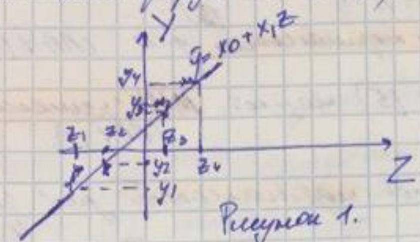


Рисунок 1.

Согласно Рисунку 1, СЛАУ (7) несовместна

Введем обозначения:

$$A=\begin{pmatrix}1 & z_1\\1 & z_2\\ \vdots & \vdots\\ 1 & z_m\end{pmatrix},\quad \vec{y}=\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\ \vdots\\ y_m\end{pmatrix} \quad (8)$$

Согласно обозначениям (8), СЛАУ (7) примет вид: $A\cdot\vec{x}=\vec{y}$, (9)

где $A\in L(\mathbb{R},2,m)$ и $\vec{y}\in\vec{E}^m$

МНК-решением СЛАУ (9) определяется из СЛАУ:

$$^TA\cdot A\cdot\vec{x} = {}^TA\cdot\vec{y} \iff \begin{pmatrix} m & \sum_{i=1}^m z_i\\ \sum_{i=1}^m z_i & \sum_{i=1}^m z_i^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_0\\x_1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\sum_{i=1}^m y_i\\ \sum_{i=1}^m z_i y_i\end{pmatrix}, \quad (10)$$

где $\operatorname{rg}(^TAA)=2$, т.е. $^TA\cdot A\in GL(\mathbb{R},2)$, если $|\{z_1, z_2, \dots, z_m\}|\geq 2$ (т.к. $\operatorname{rg}(A)=2$)

$\{\operatorname{Det}(^TA\cdot A) = z_1^2+z_2^2+\dots+z_m^2 - \dots$

Если $z_i \ne z_j$, то решение СЛАУ (10) единственно. 7

В рез-те находим прямую, наиболее близко всего лежащую к экспериментальным точкам.

$\boxed{\text{экспериментальным}}$

Опр. 2.

Общее решение СЛАУ (1) обознач. выражением $Sol(A, \vec{b})$. Если СЛАУ (1) имеет единств. решение, $\vec{x}_* \in \vec{E}^k$, то $\vec{x}_* = Sol(A, \vec{b})$

МНК-решение, получаемое из СЛАУ (5), можно представить в виде:

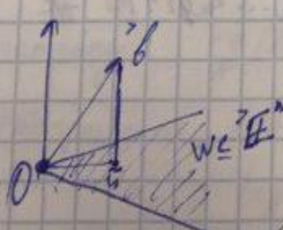
$$\mathrm{Argmin}\{\|A\cdot\vec{x} - \vec{b}\|_e : \vec{x} \in \vec{E}^k\} = Sol({}^tA\cdot A;\ {}^tA\cdot\vec{b})$$

Если решение $\vec{x}_* \in \vec{E}^k$ СЛАУ (5) единственно, то $\vec{x}_* = \mathrm{argmin}\{\|A\cdot\vec{x} - \vec{b}\|_e : \vec{x} \in \vec{E}^k\}$

Лемма 1 (о МНК-решении СЛАУ)

$$Sol({}^tA\cdot A;\ {}^tA\cdot\vec{b}) = \mathrm{Argmin}\{\|A\cdot\vec{x} - \vec{b}\|_e : \vec{x} \in \vec{E}^k\} \ne \varnothing$$

▲ Рассм. подпр-во $W = A\cdot\vec{E}^k = \{A\cdot\vec{x} : \vec{x} \in \vec{E}^k\}$ и ортогональную проекцию $\mathrm{пр}_1(\vec{b}, W)$ вектора $\vec{b}$ на подпр-во W (см. рис. 2), где $\vec{u} = \mathrm{пр}_1(\vec{b}, W)$



Тогда $\|\vec{b} - \vec{u}\|_e = \min\{\|\vec{b} - \vec{w}\|_e\}$

$\{ (\vec{b} - \vec{u}, \vec{u}) = 0 \}\ \vec{w} \in W$

Если $\langle \vec{h}_1, \vec{h}_2, \dots, \vec{h}_p \rangle$ – ортонорм. базис W и $\langle \vec{h}_1, \vec{h}_2, \dots, \vec{h}_p, \vec{h}_{p+1}, \dots, \vec{h}_m \rangle$ – ортонорм. базис $\vec{E}^m$, то выразим $\vec{b} = \alpha_1\vec{h}_1 + \dots + \alpha_p\vec{h}_p + \alpha_{p+1}\vec{h}_{p+1} + \dots + \alpha_m\vec{h}_m$; получаем, что $\vec{u} = \alpha_1\vec{h}_1 + \dots + \alpha_p\vec{h}_p$.

$\vec{w} = \beta_1\vec{h}_1 + \dots + \beta_p\vec{h}_p$

$$\|\vec{b} - \vec{w}\|_e^2 = \|\vec{b}\|_e^2 - 2(\vec{b}, \vec{w}) + \|\vec{w}\|_e^2 =$$
$$= \|\vec{b}\|_e^2 + \left(\sum_{i=1}^{p}\beta_i^2 - 2\sum^p \beta_i\alpha_i + \sum^p \alpha_i^2\right) - \sum \alpha_i^2 =$$
$$= \|\vec{b}\|_e^2 + \sum_{i=1}^{p}(\beta_i - \alpha_i)^2 - \sum \alpha_i^2 \to \min \iff \alpha_i = \beta_i \quad i = \overline{1,p}$$

Поскольку $\vec{u} \in W = A\cdot\vec{E}^k$, то $(\exists \vec{x}_* \in \vec{E}^k : A\cdot\vec{x}_* = \vec{u})$

т.е. $\vec{x}_* \in \mathrm{Argmin}\{\|A\cdot\vec{x} - \vec{b}\|_e : \vec{x} \in \vec{E}^k\} =$
$= Sol({}^tA\cdot A,\ {}^tA\cdot\vec{b}) \ne \varnothing$ ▼

Замечание 2 (об определителе Вандер Монда)

Рассм. матрицу:

$$\begin{pmatrix} 1 & z_1 & z_1^2 & \dots & z_1^{k-1} \\ 1 & z_2 & z_2^2 & \dots & z_2^{k-1} \\ \vdots & & & & \\ 1 & z_k & z_k^2 & \dots & z_k^{k-1} \end{pmatrix} = M.$$

Тогда $\mathrm{Det}\, M = \prod_{j=2}^{k}\prod_{i=1}^{j-1}(z_j - z_i) \ne 0$,

если $|\{z_1, z_2, \dots z_k\}| = k$ #

Пример 2 (модель полиномиальной регрессии) 7

Модель описывает зависимость регрессора y от одного фактора τ в виде:

$$y = x_0 + x_1\tau + x_2\tau^2 + \dots + x_{k-1}\tau^{k-1} + \varepsilon, \qquad (11)$$

где $\vec{x} = [x_0, x_1, \dots, x_{k-1}] \in E^k$ - неизвестные параметры тренда $\bar{y} = x_0 + x_1\tau + \dots + x_{k-1}\tau^{k-1}$ модели и $\varepsilon \sim N(0, \sigma)$ $\{\sigma$ - неизв.$\}$

В эксперименте наблюдают значение регрессора для моментов времени $\tau_1, \dots, \tau_m$, где $|\{\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_m\}| > k$ и $y(\tau_1) = y_1, y(\tau_2) = y_2 \dots y(\tau_m) = y_m$

В рез-те получают приближенную СЛАУ:

$$\begin{cases} x_0 + x_1\tau_1 + \dots + x_{k-1}\tau_1^{k-1} = y_1 \\ \vdots \\ x_0 + x_1\tau_m + \dots + x_{k-1}\tau_m^{k-1} = y_m \end{cases} \iff A\vec{x} = \vec{y} \quad (12)$$

где $A = \begin{pmatrix} 1 & \tau_1 & \dots & \tau_1^{k-1} \\ 1 & \tau_2 & & \tau_2^{k-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \tau_m & & \tau_m^{k-1} \end{pmatrix}$, $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_{k-1} \end{pmatrix}$ и

$\vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}$

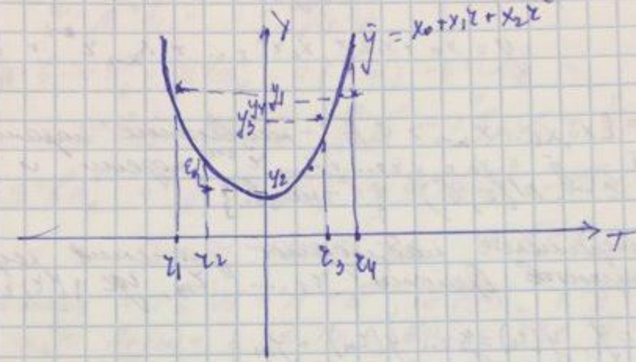
Поскольку $rg(A) = k$ (см. зам-е 2), то

МНК-решение СЛАУ (12) имеет вид:

$$\vec{x}_* = (A^T \cdot A)^{-1} \cdot A^T \vec{y} = \arg\min_{\vec{x} \in E^k} \|A \cdot \vec{x} - \vec{y}\|_E$$

Кроме того, оценка $\hat{\sigma}^2$ для σ^2 имеет вид:

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{\|A \cdot \vec{x}_* - \vec{y}\|^2}{m - (k-1)} \quad \text{(см. рис. 3)}$$



Пример 3 (модель многомерной линейной регрессии)

Модель описывает зависимость регрессора y от $(k-1)$ факторов $z_1, z_2 \dots z_{k-1}$ $(k > 2)$ в виде:

$$y = x_0 + x_1 z_1 + \dots + x_{k-1} z_{k-1} + \varepsilon, \qquad (13)$$

где $\vec{x} = [x_0, x_1 \dots x_{k-1}] \in E^k$ - неизвестные пар-ры тренда $\bar{y} = x_0 + x_1 z_1 + \dots + x_{k-1} z_{k-1}$ модели и $\varepsilon \sim N(0, \sigma)$ $\{\sigma$ - неизв.$\}$

В эксперименте испытывают m векторных значений факторов.

$$\vec{z}^1 = [z_1^1, \dots, z_{k-1}^1], \dots, \vec{z}^m = [z_1^m, \dots, z_{k-1}^m] \quad (m > k)$$

Получаем m значений регрессора:

$$y_1 = \bar{y}(\vec{z}^1) + \varepsilon_1, \dots, y_m = \bar{y}(\vec{z}^m) + \varepsilon_m$$

и оценку неизвестных параметров тренда модели получают в виде МНК-решения для СЛАУ:

$$\begin{cases} x_0 + x_1 z_1^1 + \dots + x_{k-1} z_{k-1}^1 = y_1 \\ \dots \\ x_0 + x_1 z_1^m + \dots + x_{k-1} z_{k-1}^m = y_m \end{cases} \iff$$

$\Leftrightarrow \quad A \cdot \vec{x} = \vec{y} \quad (14)$

где $A = \begin{pmatrix} 1 & z_1^1 & \dots & z_{k-1}^1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & z_1^m & \dots & z_{k-1}^m \end{pmatrix}$, $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_{k-1} \end{pmatrix}$, $\vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}$

Предполагаем, что $rg(A) = k$. Получаем оценку $\vec{x}_*$ в виде МНК-решения для СЛАУ (14), т.е.

$$\vec{x}_* = ({}^{\tau}A \cdot A)^{-1} \cdot {}^{\tau}A \cdot \vec{y} \quad (15)$$

Оценка $\hat{\sigma}^2$ для σ^2 имеет вид:

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{\|\vec{x}_* - \vec{y}\|_e^2}{m-(k-1)} \quad (16)$$

4. Примеры сжимающих отображений и метод простой итерации

Пусть $X = (X, \rho)$ — полное метрическое пр-во, где задано преобразование (отобр-е) $\varphi: X \to X$

Опр. 1 (сжимающего отобр-я)

Отобр-е φ наз-ют сжимающим, если выполн. условие для любых $x, y \in X$:

$$\rho(\varphi(x), \varphi(y)) \le q\rho(x,y), \quad q<1 \quad (1)$$

где $q \in [0;1)$ — пар-р сжатия

Теорема 1 (о принципе сжимающих отобр-й)

Пусть $\varphi: X \to X$ — сжимающее отобр-е, удовл. усл-ю (1).

Тогда: а) $\varphi \in C(X,X)$ — непрерывное отобр-е

и б) существует и единственная неподв. точка $x_* \in X$ для отобр-я φ, т.е. $\varphi(x_*) = x_*$

и, если $y_* \in X$ и $\varphi(y_*) = y_*$, то $x_* = y_*$

▲ Пусть $x_0 \in X$ — произв. точка в пр-ве X (начальная точка процесса итерации), инициирующая последовательность $x_{(\cdot)} = (x_k \in X)_{\mathbb{N}}$ с рабочей формулой

$$x_k = \varphi(x_{k-1}), \quad k \in \mathbb{N} \quad (2)$$

а) Очевидно, что $\varphi \in C(X,X)$ $(\forall \varepsilon > 0 \Rightarrow (\exists \delta = \varepsilon \mid \forall x,y \in X \Rightarrow \rho(\varphi(x), \varphi(y)) < q\rho(x,y) = q\varepsilon < \varepsilon$

б) Покажем, что посл-ть $x_{(\cdot)}$ с рабочей формулой (2) — фундаментальна.

Пусть $n, m \in \mathbb{N}$. Тогда $\rho(x_m, x_{m+n}) = \rho(\varphi(x_{m-1}), \varphi(x_{m-1+n})) \le$

$\le q \cdot \rho(x_{m-1}, x_{m-1+n}) \le q \cdot \rho(\varphi(x_{m-2}), \varphi(x_{m-2+n})) \le$

$\le q^2 \rho(x_{m-2}, x_{m-2+n}) \le \dots \le q^m \rho(x_0, x_n) \le$

нер-во Δ $\le q^m(\rho(x_0,x_1) + \rho(x_1,x_n)) \le q^m(\rho(x_0,x_1) + q\rho(x_0, x_{n-1})) \le$

$\le q^m(\rho(x_0,x_1) + q\rho(x_0,x_1) + \rho(x_1, x_{n-1}))) \le \dots \le$

$\le q^m(\rho(x_0,x_1) + q\rho(x_0,x_1) + \dots + q^{n-1}\rho(x_0,x_1)) = q^m(1+q+\dots+q^{n-1}) \cdot \rho(x_0,x_1) < \frac{q^m}{1-q}\rho(x_0,x_1)$

Таким образом $\rho(x_m, x_{m+k}) \le \frac{q^m}{1-q}\rho(x_0, \varphi(x_0))$ (4)

Отсюда следует, что $x_{(\cdot)}$ фундаментальна. Поскольку X – полное пр-во, посл-ть $x_{(\cdot)}$ сх-ся к некоторой точке $x_* \in X$, т.е. $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = x_*$

Отсюда, поскольку $\varphi \in C(X, X)$ и $\rho \in C(X \times X, R_+)$, следует, что
$$\lim_{k\to+\infty} x_{k+1} = \lim_{k\to+\infty} \varphi(x_k) = \varphi(\lim_{k\to\infty} x_k) = \varphi(x_*) = x_*$$

Следов-но, x_* – неподвижная точка отображ. φ. Если же $y_* \in X$ и $\varphi(y_*) = y_*$, то $\rho(\varphi(x_*), \varphi(y_*)) = \rho(x_*, y_*) \le q \cdot \rho(x_*, y_*)$, где $q < 1$, т.е. $\rho(x_*, y_*) = 0$ ЧТД ▼

Следствие 1

а) $\rho(x_m, x_*) \le \frac{q^m}{1-q}\rho(x_0, \varphi(x_0))$ – оценка погрешности на m-м шаге итерации. (5)

(см. (4) при $k \to +\infty$)

б) $\rho(x_m, x_{m+1}) \le q\rho(x_{m-1}, x_m)$ для $m \in N$

Замечание 1.

а) В пр-ве X для численного решения ур-я:

$x = \varphi(x)$, (6)

где $\varphi: X \to X$ – сжимающее отобр-е с пар-ром $q<1$ используют метод простой итерации $itr(\varphi, x_0)$ с начальной точкой $x_0 \in X$ и рабочей формулой

$$x_k = \varphi(x_{k-1}), \quad k \in N, \quad (7)$$

где $x_{(\cdot)} = (x_k)_N$ – итерационн. посл-ть метода простой итерац

Для заранее выбранной погрешности $\varepsilon > 0$ правило останова метода $itr(\varphi, x_0)$ определяется таким номером $m \in N$, для которого выполн. нер-во (5). Следовательно, x_m – приближ. решение ур-я (6) и $\frac{q^m}{1-q}\rho(x_0, \varphi(x_0))$ – погрешность (абс.) этого приближ. решения.

б) Пусть $X = (X; \rho)$ – полное метрическое подпр-во банахова пр-ва $\vec{R}^n$ и $\varphi: X \to X$ – гладкое отображение ($\varphi \in C^1(X, X)$), удовлетворяющее на пр-ве X условию: $\|\varphi'(x)\| = \left\|\frac{\partial \varphi^i(x)}{\partial x_j}\right\| \le q < 1$, где $\varphi = (\varphi^1, \varphi^2, \dots \varphi^n)$ и $x = (x_1 \dots x_n) \in X$

- Если X – выпуклое мн-во, то, согласно теореме Лагранжа: для $\vec{x}, \vec{y} \in X$ получаем:

$$\|\varphi(\vec{x}) - \varphi(\vec{y})\| \le \|\varphi'(\theta \vec{x} + (1-\theta)\vec{y})\| \cdot \|\vec{y} - \vec{x}\|,$$ где $0 < \theta < 1$ $\Rightarrow$ $\varphi: X \to X$ – сжимающее отобр-е на X.

в) Пусть $B \in L(R_n)$ и $\|B\| \le 1$. Тогда для решения СЛАУ:

$$\vec{x} = B \cdot \vec{x} + \vec{y} \quad (8)$$

$$\{\vec{y} \in \vec{R}^n = X = (X, \|\cdot\|)\} \quad (8)$$

Можно исп. метод простой итерации $itr(\varphi; \vec{0}_n)$, где $\varphi(\vec{x}) = B \cdot \vec{x} + \vec{y}$, т.к. для $\vec{x}, \vec{y} \in \vec{R}^n$ следует, что $\|\varphi(\vec{y}) - \varphi(\vec{x})\| = \|B\vec{y} + \vec{y} - B\vec{x} - \vec{y}\| = \|B(\vec{y} - \vec{x})\| \le \|B\| \, \|\vec{y} - \vec{x}\|$,

где $\|B\| = q < 1$

Согласно следствию (1) на m-ом шаге метода $itr(\varphi, \vec{0}_n)$ получаем погрешность:

$$\|\vec{x}_m - \vec{x}_*\| \leq \frac{\|B\|^m}{1-\|B\|}\|\vec{y}\|,$$

где $\vec{x}_* = (E_m - B)^{-1}\cdot\vec{y}$ — ед-ое решение СЛАУ (8)

7

в) Рассм. интегр. ур-е Фредгольма 2-го рода:

$$x(t) - \lambda\int_a^b k(t,\tau)\, x(\tau)\, d\tau = f(t), \quad t\in[a;b], \quad (9)$$

где $k \in C([a;b]^2, \mathbb{R})$ — ядро интегрального оператора $\hat{A}: C([a;b],\mathbb{R}) \to C([a;b],\mathbb{R})$ вида:

$$\hat{A}(x)\big|_t = \int_a^b k(t,\tau)\,x(\tau)\,d\tau, \quad t\in[a;b]$$

Ур-е (9) принимает вид:

$$x - \lambda\hat{A}(x) = f \iff x = \lambda\hat{A}(x) + f \quad (10)$$

Если $\|\lambda\hat{A}\| < 1$ $(\lambda\in\mathbb{R})$, то решения ур-я (9) можно приближ. находить методом простой итерации (методом послед. приближ.) $itr(\varphi, 0)$, где $\varphi(x) = \lambda\hat{A}(x) + f$

5. Стабилизированный МНК

Рассм. СЛАУ

$$A\cdot\vec{x} = \vec{b}, \quad (1)$$

где $A \in L(\mathbb{R},k,m)$, $\vec{b}\in E^m$ и $rg(A) < k$, т.е. матрица ${}^{T}A\cdot A \in L(\mathbb{R},k)$ — вырожденная и, $\Rightarrow$, для СЛАУ (1) нормальная СЛАУ

$${}^{T}A\cdot A\cdot\vec{x} = {}^{T}A\cdot\vec{b} \quad (2)$$

(2) — имеет бесконеч. мн-во частных решений.

Поскольку $Sol({}^{T}A\cdot A;\ {}^{T}A\cdot\vec{b}) = Argmin(\|A\cdot\vec{x} - \vec{b}\|^2 : \vec{x}\in\vec{E}^k)$, то $\exists$-ет частное решение $\vec{x}_0 \in Sol({}^{T}A\cdot A, {}^{T}A\cdot\vec{b})$ и $Sol({}^{T}A\cdot A, {}^{T}A\cdot\vec{b}) = \vec{x}_0 + Sol({}^{T}A\cdot A;\ \vec{0}_k)$, где $Sol({}^{T}A\cdot A;\ \vec{0}_k)$ — подпространство $\vec{E}^k$ / решение однородного СЛАУ)

Опр. 1 (стабилизированного МНК-решения)

Пусть $H \in GL(\mathbb{R},k)$ — симметрич. и положит. опр. матрица $(H>0)$, т.е. $\|\vec{x}\|^2_H = {}^{T}x\cdot H\cdot\vec{x}$ — квадрат H-длины вектора $\vec{x}\in\vec{E}^k$, определяемого „скалярным произведением":

$$\langle\vec{x},\vec{y}\rangle_H = {}^{T}x\cdot H\cdot\vec{y}$$

для $\vec{x},\vec{y}\in\vec{E}^k$.

Тогда квадратичный функционал $\|\cdot\|^2_H : \vec{E}^k \to \mathbb{R}$, называют стабилизирующим для СЛАУ (2) и вектор $\vec{x}_* = пр_H(\vec{0}_k, Sol({}^{T}AA;\ \vec{0}_k))$ называют H-стабилизируемым МНК-решением СЛАУ (1)

Замечание (об H-стабилиз. МНК-решении)

Вектор $(\vec{x}_*)$ H-стабилиз. МНК-решения $\vec{x}_* = пр_H(\vec{0}_k, Sol(\ldots$ определяется из решения задачи:

$$\begin{cases} \|\vec{x}\|^2_H \to \min & : \vec{x} \\ \vec{x}\in Sol({}^{T}A\cdot A, \vec{0}_k) \end{cases}$$

Пример 1. (стабил. МНК-решение СЛАУ)

Рассм. СЛАУ: $\begin{cases} x^1+x^2 = 2 \\ x^1+x^2 = 4 \end{cases} \iff A\cdot\vec{x} = \vec{b}$ (4)

где $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in L(\mathbb{R},2)$

$\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} \in \vec{E}^2$ и $\vec{x} = [x^1, x^2]$

В качестве стабилизирующего функционала выберем функционал, индуцированный матрицей H, т.е. $\vec{x}\, H\, \vec{x} = (x^1)^2 + (x^2)^2$ для $\vec{x} \in \vec{E}^2$

Для СЛАУ (4) нормальная СЛАУ имеет вид:

$A^T\cdot A\cdot\vec{x} = A^T\cdot\vec{b} \iff \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \end{pmatrix} \iff$

$\iff x^1+x^2 = 3$ (см. рис. 1)

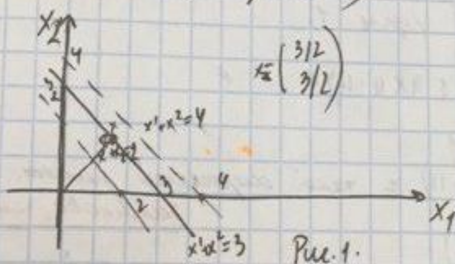


Рис. 1.

E_2 - стабилизирующее МНК-решение СЛАУ (4) определяется из решения задачи (3)

$$\begin{cases} (x^1)^2 + (x^2)^2 \to \min \\ x^1 + x^2 = 3 \end{cases} \iff \begin{cases} (x^1)^2 + (3-x^1)^2 \to \min \\ x^2 = 3 - x^1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 2x^1 - 2(3-x^1) = 0 \\ \iff x^1 = \frac{3}{2} \end{cases} \iff \begin{cases} x^1 = 3/2 \\ x^2 = 3/2 \end{cases} \iff \vec{x}_* = \begin{pmatrix} 3/2 \\ 3/2 \end{pmatrix}$$

6. Банаховы алгебры и ряды в них

Пусть $X = (X, \|\cdot\|)$ - банахово пр-во

Опр. 1 (банаховой алгебры)

В пр-ве X задана операция умножения (знак $*$), удовлетв. условиям:

линейная алгебра с единицей:

1) $x*(y*z) = (x*y)*z$, для $x,y,z \in X$

2) $\begin{cases} x*(y+z) = x*y + x*z \\ (y+z)*x = y*x + z*x \end{cases}$ $*$ - дистрибутивная

3) $(\alpha x)*(\beta y) = \alpha\beta(x*y)$ для $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$

4) $\exists 1_* \in X: \forall x \in X \Rightarrow 1_* * x = x * 1_* = x$ (един. 1)

5) $\|x*y\| \le \|x\|\cdot\|y\|$

6) $\|1_*\| = 1$

Тогда $X = (X; \|\cdot\|)$ с такой операцией умнож. - это банахова алгебра

Пример-1 (алгебра $\mathbb{C}$)

$$\mathbb{C} = \left\{ \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \in L(\mathbb{R},2) : \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1,\ i = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix};\ \left\|\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}\right\| = \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{\operatorname{Det}\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}} \right\}$$

Опр. 2 (сходимости ряда)

Пусть $x_{(\cdot)} = (x_{n-1} \in X)_N$ - посл-ть в банаховой алгебре $X = (X, \|\cdot\|)$.

Тогда формальная сумма $\sum_{n=0}^{+\infty} x_n = x_0 + x_1 + \ldots + x_n + \ldots$ наз-ся рядом в алгебре X, для которого

$S_n = \sum_{i=0}^{n} x_i$ – n-я частичная сумма для $n-1 \in \mathbb{N}$

Если пос-ть $S_{(\cdot)} = (S_{n-1})_{\mathbb{N}}$ сходится к эл-ту $x \in X$, то ряд $\sum_{i=0}^{+\infty} x_i = x$ (1) наз-ют сходящимся к сумме x. абсолютно, если сходится числовой ряд $\sum_{i=0}^{\infty} \|x_i\|$ (2)

условно, если ряд (2) расходится.

Теорема 1 (арифм. св-ва абс. сход. рядов)

Пусть ряды $\sum_{i=0}^{+\infty} x_i$ и $\sum_{i=0}^{+\infty} y_i$ - сходятся абсолютно в алгебре X к суммам x и y соответственно. Тогда

а) $\sum_{i=0}^{+\infty} (x_i + y_i) = x + y$ (сход. абс.)

б) $\sum_{i=0}^{+\infty} \alpha x_i = \alpha x$, $\alpha \in \mathbb{R}$ (сходим. абс.)

в) $\sum_{i=0}^{+\infty} x_i * \sum_{j=0}^{+\infty} y_j = \sum_{k=0}^{+\infty} (x_0 * y_k + x_1 * y_{k-1} + \dots + x_k * y_0) = x * y$ (сх-ть абсол.) (теор. Коши) #

Пр. 3 (аналитические функции)

Пусть $c_{(\cdot)} = (c_{n-1} \in \mathbb{R})_{\mathbb{N}}$ - пос-ть действительных чисел и t - переменная с пробегом в поле $\mathbb{R}$. Тогда радиус сходимости степенного ряда

$$\sum_{i=0}^{+\infty} c_i t^i, \quad (3)$$

опр-ся формулой:

$$R = \lim_{k \to +\infty} \frac{1}{\sqrt[k]{|c_k|}} \quad \left(R = \lim_{k \to +\infty} \frac{1}{\frac{|c_{k+1}|}{|c_k|}} \right) \quad (4)$$

Пусть $x \in X$ ($X = (X; \|\cdot\|)$ - банахова алгебра), x — переменная с пробегом в алгебре X

Тогда ряд $\sum_{i=0}^{+\infty} c_i x^i$, (5)

называют степенным рядом в алгебре X

Для элемента $a \in X$ число $\lim_{k \to +\infty} \sqrt[k]{\|a^k\|} = \rho_{spr}(a)$ - наз-ют спектральным радиусом ряда (5)

$\{ \sqrt[k]{\|a^k\|} \le \sqrt[k]{\|a\|^k} = \|a\| \}$

Если $\rho_{spr}(a) < R$ $(\|a\| < R)$, то при $x = a$ ряд (5) сходится абсолютно, т.к. $\sum \|c_i a^i\| \le \sum_{i=0} |c_i| \cdot \|a\|^i$ #

(при $x \in \{ y = X : \|y\| < R \}$ ф-ция $f(x) = \sum_{i=0} c_i x^i$ - аналит. функция)

Пример 2 (алгебра квадратных матриц)

$A \in L_e(\mathbb{R}, k)$, где $\|A\| = \sqrt{\rho_{spr}({}^{T}A \cdot A)}$ и A - симм. $A > 0$ матрица, т.е ${}^{T}A = A$ и $\|A\| = \lambda_{max} = \{\lambda : \lambda \in Spr(A)\}$

Тогда $A = Q \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_k \end{pmatrix} {}^{T}Q$, где $Spr(A) = \{\lambda_1, \dots \lambda_k\} \in \mathbb{R}_{(+)}$

$Q \in OL(\mathbb{R}, k)$, т.е ${}^{T}Q \cdot Q = Q^{T}Q = E_k$

Пример. Кроме того $A^2 = Q \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_k \end{pmatrix} \cdot {}^{T}Q \cdot Q \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_2 \end{pmatrix} \cdot {}^{T}Q = Q \begin{pmatrix} \lambda_1^2 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_k^2 \end{pmatrix} {}^{T}Q$

$\vdots$

$$A^i = Q \begin{pmatrix} \lambda_1^i & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_k^i \end{pmatrix} {}^{T}Q,$$

т.е. $$\sum_{i=0}^{+\infty} c_i A^i = Q \begin{pmatrix} \sum_{k=0}^{+\infty} c_k \lambda_1^i & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \sum_{k=0}^{+\infty} c_k \lambda_k^i \end{pmatrix} {}^{T}Q$$

Если $\|A\| < R$, то определено значение

$$f(A) = \sum_{i=0}^{+\infty} c_i A^i \quad \#$$

$$f(A) = Q\begin{pmatrix} \sum_{i=0}^{\infty} c_i\lambda_1^i & 0 \\ 0 & \sum_{i=0}^{\infty} c_i \lambda_n^i \end{pmatrix} Q^T = Q\begin{pmatrix} f(\lambda_1) & 0\\ 0 & f(\lambda_n)\end{pmatrix} Q^T \quad \#$$

Задача 1

Пусть $A = \begin{pmatrix}3&2\\2&3\end{pmatrix}$. Найти

а) $\exp(A)$, б) $\exp(tA)$, в) $\sin(A)$, г) $\cos(A)$,

д) $\ln(E_2 + \frac{1}{10}A)$, е) $(E_2 - \frac{1}{10}A)^{-1}$ #

7. Метод простой итерации и метод Зейделя специальной СЛАУ:

Рассм. СЛАУ

$$\vec x = G\cdot \vec x + \vec f \qquad (1)$$

где $G = (g^i_j)^n_n \in L(\mathbb{R}, n)$, $\vec f \in \vec{\mathbb{R}}^n$ и $\|G\|<1$ (2)

Для решения СЛАУ (1) используем метод простой итерации $itr(\varphi, \vec x_0)$ с началом $\vec x_0 \in \vec{\mathbb R}^n$, где $\varphi(x) = Gx + \vec f$, для $\vec x \in \vec{\mathbb R}^n$

Отобр-е $\varphi: \vec{\mathbb R} \to \vec{\mathbb R}$ сжимающее, т.к. $\|\varphi(\vec y) - \varphi(\vec x)\| = \|G\vec y + f - G\vec x - f\| = \|G\vec y - G\vec x\| \le \|G\|\cdot\|\vec y - \vec x\|$, где $\|G\|<1$ согласно (2).

Пусть $\vec x_* \in \vec{\mathbb R}$ — решение СЛАУ (1). Тогда, используя итерационную посл-ть $(x_k)^\infty$ метода $itr(\varphi, \vec x_0)$ с рабочей ф-лой:

$$\vec x_k = G\cdot\vec x_{k-1} + \vec f, \quad k\in\mathbb N \qquad (3)$$

получаем на k-ом шаге итерации оценку (см. раздел 4) ф-лу (4))

$$\|\vec x_k - \vec x_*\| \le \frac{\|G\|^k}{1-\|G\|}\|G\vec x_0 + \vec f - \vec x_0\| \le \frac{\|G\|^k}{1-\|G\|}(\|G\|+1)\|\vec x_0\| + \frac{\|G\|^k}{1-\|G\|}\|\vec f\|$$

Уточним эту оценку

Согласно рабочей ф-ле (3):

$$\begin{cases} \vec x_1 = G\cdot\vec x_0 + \vec f; \\ \vec x_2 = G\cdot \vec x_1 + \vec f = G(G\vec x_0 + \vec f) + \vec f = G^2 x_0 + (E_n + G)\vec f; \\ \vec x_3 = G\cdot\vec x_2 + \vec f = G^3 \vec x_0 + (E_n + G + G^2)\cdot\vec f \\ \dots \\ \vec x_k = G^k x_0 + (E + G + G^2 + G^3 + \dots + G^{k-1})\vec f; \end{cases} \qquad (4)$$

Замечание 1

Согласно произведению Коши абсолютно сходящихся рядов в банаховой алгебре $L(\mathbb R, n)$ получаем:

$$(E_n - G)(E_n + G + G^2 + \dots + G^n + \dots) = E_n$$

т.е. $(E_n - G)^{-1} = E_n + G + G^2 + \dots + G^{k-1} + G^k + \dots$ (5)

где $\|G\|<1$ ($1 + t + t^2 + \dots$, $R = \frac{1}{\sqrt[n]{1}} = 1$) #

Из СЛАУ (1) следует: $(E_n - G)\vec x_* = \vec f$ (6)

т.е. решение $\vec x_*$ СЛАУ (1) имеет вид:

$$\vec x_* = (E_n - G)^{-1}\cdot\vec f = (E_n + G + G^2 + \dots + G^{k-1})\cdot\vec f + (G^k + G^{k+1} + \dots)\cdot\vec f \qquad (7)$$

След-но, из (5) и (7) получаем:

$$\|\vec x_k - \vec x_*\| = \|G^k \vec x_0 + G^k(E_n + G + G^2 + \dots)\vec f\| \le \|G^k\|\cdot\|\vec x_0\| + \frac{\|G\|^k}{1-\|G\|}\|\vec f\|$$

Таким образом: $\|\vec x_* - \vec x_k\| \le \|G\|^k\|\vec x_0\| + \frac{\|G\|^k}{1-\|G\|}\|\vec f\|$ (8)

11

Замечание 2 (о СЛАУ, имеющей матрицу с диаг-м преобр)

Расм. СЛАУ:

$$\begin{cases} a_1^1 x^1 + a_2^1 x^2 + a_3^1 x^3 = b^1 \\ a_1^2 x^1 + a_2^2 x^2 + a_3^2 x^3 = b^2 \\ a_1^3 x^1 + a_2^3 x^2 + a_3^3 x^3 = b^3 \end{cases} \Leftrightarrow A\cdot\vec{x} = \vec{b}, \quad (9)$$

где м-ца $A = (a_j^i)_3^3$ имеет диаг. преобладание

$$|a_i^i| - \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{3} |a_j^i| > 0 \text{ для } i=\overline{1,3} \quad (10)$$

Поделив i-ое ур-е СЛАУ (9) на a_i^i ($i=\overline{1,3}$), получаем равносильную СЛАУ:

$$\begin{cases} x^1 = -\frac{a_2^1}{a_1^1}x^2 - \frac{a_3^1}{a_1^1}x^3 + \frac{b^1}{a_1^1}; \\ x^2 = -\frac{a_1^2}{a_2^2}x^2 - \frac{a_3^2}{a_2^2}x^3 + \frac{b^2}{a_2^2}; \\ x^3 = -\frac{a_1^3}{a_3^3}x^1 + \frac{a_2^3}{a_3^3}x^2 + \frac{b^3}{a_3^3} \end{cases} \Leftrightarrow \vec{x} = G\cdot\vec{x} + \vec{f} \quad (11)$$

где $\vec{f} = [\frac{b^1}{a_1^1}, \frac{b^2}{a_2^2}, \frac{b^3}{a_3^3}]$, $G = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{a_2^1}{a_1^1} & -\frac{a_3^1}{a_1^1} \\ -\frac{a_1^2}{a_2^2} & 0 & -\frac{a_3^2}{a_2^2} \\ -\frac{a_1^3}{a_3^3} & -\frac{a_2^3}{a_3^3} & 0 \end{pmatrix}$

и $\|G\| < 1$, т.к. $\dfrac{\sum_{j=1, j\neq i}^{3} |a_j^i|}{|a_i^i|} < 1$ для $i=\overline{1,3}$ в силу (10)

СЛАУ (11) решаем методом простой итерации

7.1. Метод Зейделя

Для СЛАУ (1) можно использовать итерационный метод Зейделя с началом в $\vec{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ и рабочей ф-лой:

$$\vec{x}_k = P\vec{x}_{k-1} + Q\vec{x}_k + \vec{f}, \quad (12)$$

где $P = \begin{pmatrix} g_1^1 & g_2^1 & \dots & g_n^1 \\ 0 & g_2^2 & \dots & g_n^2 \\ & 0 & \ddots & \vdots \\ & 0 & & g_n^{n-1} \\ & & 0 & g_n^n \end{pmatrix}$, $Q = \begin{pmatrix} 0 & & & \\ g_1^2 & 0 & & 0 \\ g_1^3 & g_2^3 & 0 & \\ \vdots & & \ddots & \\ g_1^n & \dots & g_{n-1}^n & 0 \end{pmatrix}$

Пример 1.

Рассмотрим рабочую ф-лу (12) метода Зейделя для $n=3$:

$$\begin{cases} x_k^1 = g_1^1 x_{k-1}^1 + g_2^1 x_{k-1}^2 + g_3^1 x_{k-1}^3 + f^1; \\ x_k^2 = g_1^2 x_k^1 + g_2^2 x_{k-1}^2 + g_3^2 x_{k-1}^3 + f^2; \quad k\in\mathbb{N} \\ x_k^3 = g_1^3 x_k^1 + g_2^3 x_k^2 + g_3^3 x_{k-1}^3 + f^3; \end{cases} \quad (13)$$

Теорема 1 (о сходимости метода Зейделя)

Если $\|G\| < 1$, то метод Зейделя с рабочей формулой (12) сходится к решению $\vec{x}_*$ СЛАУ (1), т.е.

$$\lim_{k\to+\infty} \vec{x}_k = \vec{x}_* \quad \#$$

Замечание 3 (о ск-ти метода Зейделя)

а) В условиях теоремы 1 метод Зейделя как правило сходится "быстрее" метода простой итерации.

б) Из рабочей ф-лы (13) следует, что $(E_n - Q)\cdot\vec{x}_k = P\cdot\vec{x}_{k-1} + \vec{f}$, $\Leftrightarrow$ $\vec{x}_k = (E_n - Q)^{-1}\cdot P\cdot\vec{x}_k + (E_n - Q^{-1})\vec{f}$ $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ $\vec{x}_k = \tilde{G}\vec{x}_{k-1} + \tilde{\vec{f}}$, где $\tilde{G} = (E_n - Q)^{-1}\cdot P$ и

$$\tilde{\vec{f}} = (E_n - Q)^{-1}\vec{f}.$$

Следовательно, метод Зейделя - модифицированный метод простой итерации. #

7.2. Устойчивость метода простой итерации

Пусть на каждом шаге использования рабочей ф-лы (3) метода простой итерации возникает вычислит. погрешность по норме не превосходящая $\varepsilon > 0$. Тогда итерационная посл-ть принимает вид

$$\{\vec{x}_1 = G\cdot\vec{x}_0 + \vec{\varepsilon}_1 + \vec{f}$$

$$\begin{cases} \vec{x}_2 = G\cdot\vec{x}_1 + \vec{\varepsilon}_2 + \vec{f} = G^2\vec{x}_0 + (E_n + G)\vec{f} + \vec{\varepsilon}_2 + G\vec{\varepsilon}_1 \\ \dots \\ \vec{x}_k = G^k x_0 + (E_n + G + G^2 + \dots + G^{k-1})\vec{f} + \sum_{i=1}^{k} G^{k-i}\vec{\varepsilon}_i \end{cases} \quad (14)$$

где $\|\vec{\varepsilon}_i\| < \varepsilon$ для $i = \overline{1,k}$

Следовательно, отличие "настоящего" k-го эл-та $\vec{x}_k$ от приближенного $\tilde{\vec{x}}_k$ имеет вид:

$$\|\tilde{x}_k - \vec{x}_k\| = \left\|\sum_{i=1}^{k} G^{k-i}\vec{\varepsilon}_i\right\| \le \left(\sum_{j=0}^{k-1}\|G\|^j\right)\varepsilon < \frac{1}{1-\|G\|}\varepsilon \quad (15)$$

Отсюда получаем след. результат:

Теорема 2 (об устойч. метода простой итерации)

Метод простой итерации для численного решения СЛАУ (1) устойчив, т.е. при наличии в вычислениях погрешности по норме не более $\varepsilon > 0$ ~~[illegible]~~, ~~[illegible]~~ на каждом шаге итерации, ~~[illegible]~~ погрешность на любом шаге итерации имеет вид $C\cdot\varepsilon$, где $C \in \mathbb{R}_{(+)}$ #

~~8. Явные итерационные~~

Замечание 4. (о нелинейных ур-ях)

В пр-ве $\vec{\mathbb{R}}^n$ можно использовать метод простой итерации и метод Зейделя для решения системы ур-й

$$x = \varphi(\vec{x}), \quad (16)$$

где $\varphi : \vec{\mathbb{R}}^n \to \vec{\mathbb{R}}^n$ - сжимающее отобр-е

$$\begin{cases} x^1 = \varphi_1(\vec{x}) \\ \dots \\ x^n = \varphi_n(\vec{x}) \end{cases} \#$$

8. Явные итерационные методы

Пусть $X = (X, \rho)$ - полное метрич. пр-во и задана посл-ть непрерывных отобр-й $\Psi_{(\cdot)} = (\Psi_k : X^p \to X)$. Тогда для выбранных точек $x_{-p+1}, x_{-p+2}, \dots x_0 \in X$ определен явный p-шаговый итерационный метод $Itr(\Psi_{(\cdot)}, (x_{-p+1}, x_{-p+2}, \dots x_0) = y_0)$ …

с рабочей формулой:

$$x_k = \Psi_k(x_{k-p}, x_{k-p+1}, \dots, x_{k-1}), \quad k \in \mathbb{N} \quad (1)$$

Ф-ла (1) индуцирует итерац. посл-ть метода $Itr(\Psi_i, y_0)$ в виде: $x_{(\cdot)} = (x_k)_{\mathbb{N}}$. Если $\exists \lim_{k\to\infty} x_k = x_* \in X$, то метод $Itr(\Psi_i, y_0)$ наз-ют **сходящимся**. (к точке x_*)

Пусть метод $Itr(\Psi_k, y_0)$ сход-ся к точке $x_* \in Y$ и $\rho(x_{k+1}, x_*) \le C\rho^{\alpha}(x_k, x_*)$, где $C \in \mathbb{R}_{(+)}$ и $\alpha > 0$

Тогда говорят, что ~~[illegible]~~ α - порядок сход-ти этого метода. ($\alpha = 1$ -) линейная, $\alpha = 2$ - квадратичная, и $1 < \alpha < 2$ - сверхлинейная сходимость).

Если $p = 1$ и $\Psi_k = \varphi : X \to X$ для $\forall k \in \mathbb{N}$, то метод $Itr(\Psi_i, y_0) = itr(\varphi, x_0)$ наз-ют **методом простой итерации**

Пример 1 (о линейном порядке сх-ти метода простой итерации для решения СЛАУ)

Расм. СЛАУ:

$$\vec{x} = G\cdot\vec{x} + \vec{f} \quad (2)$$

где $G \in L(\mathbb{R}, n)$, $\vec{f} \in \vec{\mathbb{R}}^n$, $\|G\| < 1$

Тогда метод простой итерации $itr(\varphi, \vec{x}_0)$, где $\varphi(\vec{x}) = G\vec{x} + \vec{f}$ для $\vec{x} \in \vec{\mathbb{R}}$ на $(k+1)$-ом и k-ом шаге определяет компоненты $\vec{x}_{k+1}$ и $\vec{x}_k$ итерац. посл-ти $\vec{x}_{(\cdot)} = (\vec{x}_j)_{\mathbb{N}}$ в виде:

$$\vec{x}_{k+1} = G^{k+1}x_0 + (E_n + G + \dots + G^{k-1} + G^k)\vec{f};$$

$$\vec{x}_k = G^k x_0 + (E_n + G + \dots + G^{k-1})\vec{f}$$

$$\dots$$

$$\vec{x}_* = (E_n + G + \dots + G^{k-1} + G^k + G^{k+1} + \dots)\vec{f}$$ - решение СЛАУ (1)

$$f(A) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i A^i \quad \#$$

Для наглядности полагаем, что $\vec{x}_0 = \vec{0}_n$. Тогда

$$\begin{cases} \|\vec{x}_{k+1} - \vec{x}_*\| = \|B^{k+1}(E_n + B + \ldots)\vec{f}\| \\ \|\vec{x}_k - \vec{x}_*\| = \|B^k(E_n + B + \ldots)\vec{f}\| \end{cases}$$

т.е.

$$\|\vec{x}_{k+1} - \vec{x}_k\| = \|B(\vec{x}_k - \vec{x}_*)\| \sim \|B\| \cdot \|\vec{x}_k - \vec{x}_*\|$$

След-но, метод простой итерации имеет линейный порядок сходимости *

Пример 2 (решения ур-я методом деления отрезка пополам)

Пусть $f \in C([a;b], \mathbb{R})$, $f(a) < 0$ и $f(b) > 0$

Предположим, что ур-е:

$$\begin{cases} f(x) = 0 \\ x \in [a;b] \end{cases} \qquad (4)$$

имеет единств. решение (см. рис. 1)

Рис. 1

Пусть $X = ([a;b]; |\cdot|)$ и отобр-е $\Psi: X^2 \to X$ имеет вид:

$$\Psi(x_{k-2}, x_{k-1}) = \begin{cases} \left(\frac{x_{k-2} + x_{k-1}}{2}, x_{k-1}\right), \text{ если } f(x_{k-1}) > 0, \ f\left(\frac{x_{k-2} + x_{k-1}}{2}\right) < 0 \\ \left(x_{k-2}, \frac{x_{k-2} + x_{k-1}}{2}\right), \text{ если } f(x_{k-2}) < 0, \ f\left(\frac{x_{k-2} + x_{k-1}}{2}\right) \geq 0 \end{cases}$$

Тогда метод $itr(\Psi, (a;b))$ сойдется к эл-ту (x_*, x_*), где x_* – решение ур-я (4)

Останов, если $|x_k - x_{k-1}| < \varepsilon$ $(\varepsilon > 0)$ #

Замечание (о неявном методе простой итерации)

Неявный метод простой итерации имеет рабочую ф-лу вида:

$$\varphi(\vec{x}_k, \vec{x}_{k-1}) = \vec{0}_n,$$

где $\varphi: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ #

9.

9. Методы касательных (Ньютона) и секущих для решения алгебраических ур-й

Расм. ф-ию $f \in C^2([a;b],\mathbb{R})$, удовл-ую условиям:

1) $f(a)<0$ и $f(b)>0$ ($f(a)>0$ и $f(b)<0$)
2) $f'>0$ на $[a;b]$ ($f'<0$ на $[a;b]$)
3) $f''\geq 0$ на $[a;b]$

Рис 1. иллюстр. поведение этой ф-ии

На отрезке $[a;b]$ расм. ур-е:

$$\begin{cases} f(x)=0 \\ x\in[a;b] \end{cases} \quad (1)$$

где $x_* \in (a;b)$ — решение ур-я (1) (единств.)

Для численного решения ур-я (1) используем метод простой итерации $itr(\varphi, x_0)$, где $\varphi(x) = x - ((f'(x))^{-1}\cdot f(x))$ для $x\in[a;b]$ и $x_0 \in (x_*, b)$ ($x_0 \in [a; x_*)$)

Рабочая ф-ла этого метода имеет вид:

$$x_k = x_{k-1} - (f'(x_{k-1}))^{-1} f(x_{k-1}), \quad k\in\mathbb{N} \quad (2)$$

Из рабочей формулы (2) следует:

$$f(x_{k-1}) + f'(x_{k-1})(x_k - x_{k-1}) = 0,$$

т.е. т. $x_k \in (a;b)$ является абсциссой точки пересеч. касательной к кривой $y=f(x)$, проходящей через т. $(x_{k-1}, f(x_{k-1}))$ с осью OX (см. рис. 1)

Такой метод простой итерации наз-ют **методом касательных** или **методом Ньютона**.

Поскольку $\varphi(x) = x - ((f'(x))^{-1}\cdot f(x))$ для $x\in(x_*, b]$, то

$$\varphi'(x) = 1 - \frac{(f'(x))^2 - f''(x) f(x)}{(f'(x))^2} = \frac{f''(x)\, f(x)}{(f'(x))^2} \xrightarrow[x\to x_*]{} 0$$

Поэтому скорость сходимости метода Ньютона квадратичная, если $x_0 \in (x_*, b]$ достаточно близко к x_*

Замечание 1 (о многомерном методе Ньютона)

Метод Ньютона применяют и для решения систем ур-й с той же рабочей формулой (2), где $f'(x)$ — матрица Якоби #

9.1 Метод секущих

Для решения ур-я (1) рабочую ф-лу (2) метода Ньютона модифицируют до формулы:

$$x_k = x_{k-1} - \frac{(x_{k-1} - x_{k-2})\, f(x_{k-1})}{f(x_{k-1}) - f(x_{k-2})}, \quad k\in\mathbb{N} \quad (3)$$

где $f'(x_{k-1}) \approx \frac{f(x_{k-1}) - f(x_{k-2})}{x_{k-1} - x_{k-2}}$ (см. рис. 2)

Такой модифицированный метод Ньютона наз-ют **методом секущих**. Метод секущих — 2х шаговый

Рис 2

9.2. Особые методы секущих

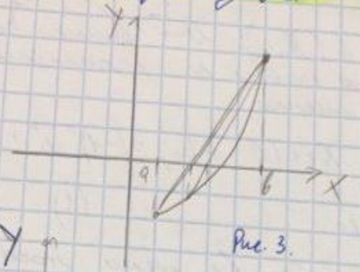


Рис. 3.

$$x_k = x_{k-1} - \frac{f(x_{k-1})(b - x_{k-1})}{f(b) - f(x_{k-1})}, \ k \in \mathbb{N} \quad (4)$$

(см. рис. 3)

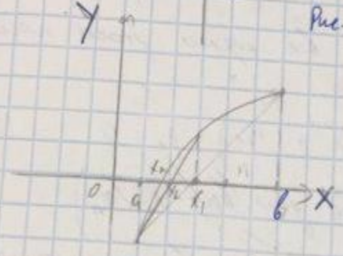


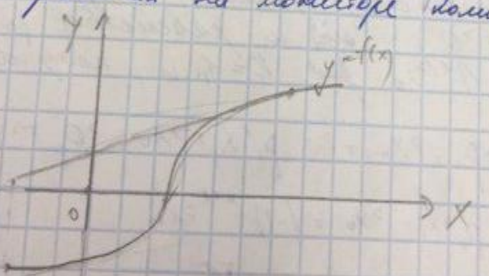
Рис 4.

$$x_k = x_{k-1} - \frac{f(x_{k-1})(x_{k-1} - a)}{f(x_{k-1}) - f(a)}, \ k \in \mathbb{N}$$

Замечание 2. (об отделении корней ур-я)

а) Общее ур-е $f(x) = 0$ для $x \in \mathbb{R}$ может иметь несколько корней. Предварительно их отделяют соответствующими отрезками, используя график ф-ции $y = f(x)$, построенный на мониторе компьютера

б)



10. Собств. значения и собств. векторы квадр. матр.

Пусть $A = (a^i_j)^n_n \in L(\mathbb{R}, n)$. Для вычисл. ее собств. значений необходимо найти ее характеристич. полином χ_{t_A}, а именно:

$$\chi_{t_A}(\lambda) = Det(A - \lambda E_n) = (-1)^n \lambda^n + p_{n-1}\lambda^{n-1} + p_{n-2}\lambda^{n-2} + \dots + p_1\lambda + p_0 \quad (1)$$

Далее необходимо найти все корни этого полинома, т.е. решить ур-я:

$$(-1)^n \lambda^n + p_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + p_1\lambda + p_0 = 0 \quad (2)$$

Пример 1. (метод Крылова для выч-я χ_{t_A})

Согласно теореме Гамильтона – Кэли характерф. полином аннулирует матрицу A, т.е.

$$(-1)^n A^n + p_{n-1}A^{n-1} + \dots + p_1 A + p_0 E_n = 0 \quad (3)$$

Далее предполагаем, что характ. полином матр. A совпадает с ее минимальным полиномом. Кроме того, предполагаем "удачный выбор" век-ра $\vec{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ ($\vec{x}_0 \neq \vec{0}_n$). Тогда из равенства (2), обозначая $\vec{x}_k = A^k \vec{x}_0$ для $k = 1, .., n$, получаем:

$$(-1)^n \vec{x}_n + p_{n-1}\vec{x}_{n-1} + \dots + p_1\vec{x}_1 + \vec{x}_0 = \vec{0}_n \Rightarrow$$

$$\Rightarrow p_{n-1}\vec{x}_{n-1} + \dots + p_1\vec{x}_1 + \vec{x}_0 = (-1)^{n+1}\vec{x}_n$$

Отсюда вводя обозначения $\mathbf{X} = [\vec{x}_{n-1}, \dots, \vec{x}_1, \vec{x}_0]$ и $\vec{b} = (-1)^{n+1}\vec{x}_n$ для вычисления век-ра $\vec{p} = [p_{n-1}, \dots, p_0]$ получаем СЛАУ:

$$\mathbf{X} \cdot \vec{p} = \vec{b} \quad (4)$$

Из СЛАУ (4) определяем вектор $\vec{p}$, т.е. коэфф-ты $p_{n-1}, \dots p_1, p_0$ характ. полинома (1) матр. A.

Пусть $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ и $\vec{x}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \langle 1, 0, 0 \rangle$

Тогда $\vec{x}_1 = A \cdot \vec{x}_0 = \langle 3, 1, 2 \rangle$

$\vec{x}_2 = A \cdot \vec{x}_1 = \langle 14, 2, 11 \rangle$

$\vec{x}_3 = A \cdot \vec{x}_2 = \langle 66, 12, 45 \rangle$

$$X = \begin{pmatrix} 14 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 11 & 2 & 0 \end{pmatrix} \text{ и } \vec{b} = \begin{pmatrix} 66 \\ 12 \\ 45 \end{pmatrix}$$

Для решения СЛАУ $X \cdot \langle p_2, p_1, p_0 \rangle = \vec{b}$ использ. метод Жордано - Гаусса

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 & 2 \\ 1 & -1-\lambda & 0 \\ 2 & 3 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1-\lambda \\ 11 & 2 \end{vmatrix} - \lambda \begin{vmatrix} 14-\lambda & 3 \\ 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = -7 + 11\lambda - \lambda(\lambda^2 - 15\lambda + 8) = -\lambda^3 + 15\lambda^2 + 3\lambda - 7$$

$$-\lambda^3 + 3\lambda^2 + 6\lambda + 6$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 14 & 3 & 1 & 66 \\ 2 & 1 & 0 & 12 \\ 11 & 2 & 0 & 45 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 3 = p_2 \\ 0 & 1 & 0 & 6 = p_1 \\ 0 & 0 & 1 & 6 = p_0 \end{array}\right)$$

Замечание 1.

Для поиска собств. чисел матр. A сначала надо вычислить её характ. полином χ_{τ_A} и затем найти корни ур-я $\chi_{\tau_A}(\lambda) = \det(A - \lambda E_n) = 0_n$

Для вычисления коэфф.-тов $p_{n-1}, \dots p_1, p_0$ полинома χ_{τ_A} можно найти значения $\chi_{\tau_A}(\tau_0), \chi_{\tau_A}(\tau_1), \dots, \chi_{\tau_A}(\tau_{n-1})$, где $\tau_0, \dots \tau_{n-1} \in \mathbb{R}$ - попарно различные числа

После этого для поиска коэффиц.-в $p_0, p_1 \dots p_{n-1}$ решается СЛАУ

$$\begin{cases} p_0 + p_1\tau_0 + \dots + p_{n-1}\tau_0^{n-1} = (-1)^{n+1}\tau_0^n + \chi_{\tau_A}(\tau_0) \\ p_0 + p_1\tau_1 + \dots + p_{n-1}\tau_1^{n-1} = (-1)^{n+1}\tau_1^n + \chi_{\tau_A}(\tau_1) \\ \dots \dots \\ p_0 + p_1\tau_{n-1} + \dots + p_{n-1}\tau_{n-1}^{n-1} = (-1)^{n+1}\tau_{n-1}^n + \chi_{\tau_A}(\tau_{n-1}) \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & \tau_0 & \dots & \tau_0^{n-1} \\ 1 & \tau_1 & & \tau_1^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \tau_n & \dots & \tau_n^{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_0 \\ p_1 \\ \vdots \\ p_{n-1} \end{pmatrix} = (-1)^{n-1} \begin{pmatrix} \tau_0^n + \chi_{\tau_A}(\tau_0) \\ \tau_1^n + \chi_{\tau_A}(\tau_1) \\ \vdots \\ \tau_{n-1}^n + \chi_{\tau_A}(\tau_{n-1}) \end{pmatrix}$$

где $\det \begin{pmatrix} 1 & \tau_0 & \dots & \tau_0^{n-1} \\ \vdots & & & \\ 1 & \tau_{n-1} & & \tau_{n-1}^{n-1} \end{pmatrix} = \prod_{j=1}^{n-1} \prod_{i=0}^{j-1} (\tau_j - \tau_i) \neq 0$

(опред. Ван-дер-Монд)

Замечание 2.

Найдя характ. полином матр. A. характ. ур-е для этой матрицы решается с помощью мет. методов Ньютона, секущих или метода деления отрезка пополам.

Если $\lambda_0 \in Spr(A)$, то собств. век-р, отвеч. собств. знач. λ_0 опред. из СЛАУ: $(A - \lambda_0 E_n) \cdot \vec{v} = \vec{0}_n$ *

10.1. Вычисление максим. по модулю собственного значения матрицы

Пусть для спектра $Spr(A) = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_n\}$ м-цы $A \in L(\mathbb{R}^n)$ выполн. след. условия:

$$\begin{cases} Spr(A) \subset \mathbb{R} \\ |\lambda_1| > |\lambda_2| \geq |\lambda_3| \geq \dots \geq |\lambda_n|, \end{cases} \quad (5)$$

Пусть $\vec{h}_1, \vec{h}_2, \dots \vec{h}_n \in \mathbb{R}^n$ - собств. век-ры матрицы A, отвеч. собств. значениям $\lambda_1, \lambda_2 \dots \lambda_n$ соотв., т.е.

$A \cdot \vec{h}_i = \lambda_i \cdot \vec{h}_i$ для $i = \overline{1, n}$. Кроме того предполагаем, что век-р $\vec{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ таков, что $\vec{x}_0 = \alpha_1\vec{h}_1 + \alpha_2\vec{h}_2 + \dots + \alpha_n\vec{h}_n$ где $\alpha_1 \neq 0$

(6)

Рассм. итерационный метод $itr(\vec A, \vec x_0)$ с рабочей формулой:

$$\vec x_k = A\cdot \vec x_{k-1}, \quad k\in\mathbb N \qquad (7)$$

где для $k\in\mathbb N$:

$$\vec x_k = A\cdot\vec x_{k-1} = A^2\cdot\vec x_{k-2} = \dots = A^k\cdot\vec x_0 =$$

$$= \left\{\begin{array}{l}\text{см. (6),}\\ \text{где } A\vec h_i = \lambda_i \vec h_i,\ i=\overline{1,n}\end{array}\right\} = \lambda_1^k\alpha_1 \vec h_1 + \lambda_2^k\alpha_2 \vec h_2 + \dots + \lambda_n^k\alpha_n \vec h_n =$$

$$= \lambda_1^k\left(\alpha_1 \vec h_1 + \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^k \alpha_2\vec h_2 + \dots + \left(\frac{\lambda_n}{\lambda_1}\right)^k\alpha_n \vec h_n\right) =$$

Из (5) $\{|\lambda_1|>|\lambda_2|\ge\dots\ge|\lambda_n|\}$ следует, что $k\to+\infty$

$\Rightarrow \left(\frac{\lambda_j}{\lambda_1}\right)^k \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0$ для $j=\overline{2,n}$, где $\alpha_1\ne0$

Поэтому рабочую формулу (7) заменим на формулу:

$$\vec w_k = \frac{1}{\|A\vec w_{k-1}\|}\,\vec w_{k-1}, \quad k\in\mathbb N \qquad (8)$$

Тогда $\|\vec w_k\| \xrightarrow[k\to+\infty]{} 1$ $\quad \vec w_k \xrightarrow[k\to+\infty]{} \beta \vec h_1$

При достаточно большом $k\in\mathbb N$ выполняется усл-е

$$\begin{cases} A\cdot\vec w_k \approx \lambda_1 \vec w_k & (A\cdot\beta\vec h_1 = \lambda_1\beta\vec h_1)\\ \dfrac{\|\vec w_k A\|}{\|\vec w_k\|}\approx|\lambda_1| \end{cases} \qquad (9)$$

10.2. Полное решение спектральной задачи для квадратной, симм. матрицы

Далее $A = (a^i_j)^n_n \in L(\mathbb R, n)$ – симметр. матрица

Если $B = (b^i_j)^n_n = A\cdot Q$ и $C = (c^i_j)^n_n = QA$, где $Q\in OL(\mathbb R, n)$, то

$$\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n (a^i_j)^2 = \sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n (b^i_j)^2 = \sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n (c^i_j)^2.$$

Действительно, если $A = [\langle a^1, \langle a^2, \dots \langle a^n\rangle = \langle \vec a_1, \vec a_2, \dots \vec a_n]$ и $Q = [\langle q^1, \langle q^2, \dots \langle q^n\rangle = \langle\vec q_1, \vec q_2,\dots \vec q_n]$, то

$A\cdot Q = \langle A\cdot\vec q_1, A\cdot\vec q_2, \dots A\cdot\vec q_n]$, где

$\|\vec a_j\|^2 = \sum_{i=1}^n |a^i_j|^2 = \|A\cdot\vec q_j\|^2$ для $j=\overline{1,n}$, т.к. Q – ортогон. матрица

и $QA = [\langle q^1 A, \langle q^2 A, \dots \langle q^n A\rangle$, где $\|a^i\|^2 = \|q^i A\|^2$ для $i=\overline{1,n}$, т.к. Q – ортогон. матрица.

Алгоритм Якоби (итерационного метода вращений) для приближенного решения спектральной задачи

Пример 3 (метода вращений для $n = 2$)

Пусть $A = \begin{pmatrix} a^1_1 & a^1_2\\ a^2_1 & a^2_2\end{pmatrix}$ – симм. матрица, где $a^1_2 = a^2_1 \ne 0$

Найдем такую ортогональную мат-цу $Q = \begin{pmatrix}\cos\varphi & -\sin\varphi\\ \sin\varphi & \cos\varphi\end{pmatrix}$

где $\varphi\in(0,2\pi)$ – угол поворота, что $A[1] = {}^{\tau}Q\cdot A\cdot Q =$

$$= \begin{pmatrix} a^1_1[1] & 0\\ 0 & a^2_2[1]\end{pmatrix}, \text{ т.е. } (a_1^1[1])^2 + (a_2^2[1])^2 = \sum_{i=1}^2\sum_{j=1}^2 (a^i_j)^2 \text{ и}$$

$Spr(A) = Spr(A[1]) = \{a^1_1[1], a^2_2[1]\} = \{\lambda_1,\lambda_2\}$,

$Q = \langle\vec q_1, \vec q_2]$ и $A\vec q_i = \lambda_i\vec q_i$ для $i=\overline{1,2}$

$({}^\tau\vec q_i \cdot \vec q_j = \delta_{ij}$ для $i,j=\overline{1,2}$, ${}^\tau Q = Q^{-1})$

Тогда
$${}^\tau Q\cdot A\cdot Q = \begin{pmatrix}\cos\varphi & \sin\varphi\\ -\sin\varphi & \cos\varphi\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a^1_1 & a^1_2\\ a^1_2 & a^2_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\varphi & -\sin\varphi\\ \sin\varphi&\cos\varphi\end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix}\cos\varphi & \sin\varphi\\ -\sin\varphi & \cos\varphi\end{pmatrix}\begin{pmatrix} a^1_1\cos\varphi + a^1_2\sin\varphi & -a^1_1\sin\varphi + a^1_2\cos\varphi\\ a^1_2\cos\varphi + a^2_2\sin\varphi & -a^1_2\sin\varphi + a^2_2\cos\varphi\end{pmatrix} =$$

где ошибка

$$= \begin{pmatrix} a^1_1 + a^2_2 + 2a^1_2\sin\varphi\cos\varphi & -a^1_1\sin\varphi\cos\varphi + a^1_2\cos^2\varphi - a^2_2\sin^2\varphi + a^2_2\cos\varphi\sin\varphi\\ -a^1_1\cos\varphi\sin\varphi + a^1_2\cos^2\varphi + a^2_2\cos\varphi\sin\varphi & a^1_1 + a^2_2 - 2a^1_2\sin\varphi\cos\varphi\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a^1_1+a^2_2+2a^1_2\sin\varphi\cos\varphi & (-a^1_1+a^2_2)\sin\varphi\cos\varphi + a^1_2\cos2\varphi\\ (-a^1_1+a^2_2)\cos\varphi\sin\varphi + a^1_2\cos2\varphi & a^1_1+a^2_2-2a^1_2\sin\varphi\cos\varphi\end{pmatrix}$$

т.е. $(a_2^2 - a_1^1)\sin\varphi\cdot\cos\varphi + a_2^1(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{a_2^2 - a_1^1}{2}\sin 2\varphi + a_2^1\cos 2\varphi = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \boxed{a_2^1 \neq 0} \quad \frac{a_1^1 - a_2^2}{2a_2^1} = \operatorname{ctg}2\varphi \Rightarrow \varphi = \frac{1}{2}\operatorname{arcctg}\left(\frac{a_1^1 - a_2^2}{2a_2^1}\right)$

Кроме того $(a_1^1[1])^2 + (a_2^2[1])^2 = (a_1^1)^2 + (a_2^2)^2 + 2(a_2^1)^2$ #

Для общего случая в симм. матр. $A = (a_j^i)_1^n$ выбираем наибольшую по модулю компоненту a_t^s, где $s < t$ (A не явл. диагон. матр.).

После этого рассматривается ортогональная матрица Q_1, такого поворота на угол φ_1 вокруг осей Ox_s и Ox_t, что матрицы для $A[1] = Q_1^T\cdot A\cdot Q_1$ выполняется условие $a_t^s[1] = 0$

В этом случае $\varphi_1 = \frac{1}{2}\operatorname{arcctg}\left(\frac{a_s^s - a_t^t}{2a_t^s}\right)$ и Q_1 имеет вид:

$$
\begin{array}{c} \\ \\ t \\ \\ s \\ \\ \end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccc} & & t & & s & \end{array} \\
\begin{pmatrix}
1 & 0 \dots & 0 & \dots & 0 & \dots 0 \\
0 & 1 & & & & 0 \\
0 & \dots & \cos\varphi_1 & \dots & +\sin\varphi_1 & 0 \\
\vdots & & & \ddots & & \vdots \\
0 & \dots & \pm\sin\varphi_1 & \dots & \cos\varphi_1 & 0 \\
0 & & 0 & & 0 & 1
\end{pmatrix}
\end{array}
$$

$\frac{a_3^2}{a_4^1}$

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & & \\ 0 & & \cos\varphi & \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Кроме того, $\sum_{i=1}^n (a_i^i)^2 = \sum_{i=1}^n (a_i^i)^2 + 2(a_s^t)^2$ и

$\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n (a_j^i[1])^2 = \sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n (a_j^i)^2$

Аналогично продолжая, для $k\in\mathbb{N}$ получаем:

$A[k] = {}^T(Q_1 Q_2 \dots Q_k)\cdot A\cdot Q_1\cdot Q_2\cdots Q_k = {}^TQ\cdot A\cdot Q \xrightarrow[k\to+\infty]{}$

$\xrightarrow[k\to+\infty]{} \begin{pmatrix}\lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n\end{pmatrix}$, где $Q = \langle \vec{q}_1, \vec{q}_2, \dots \vec{q}_n] \in \mathcal{O}(\mathbb{R}, n)$

$Sp(A) = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_n\}$

и $A\cdot\vec{q}_j = \lambda_j\cdot\vec{q}_j$ для $j = \overline{1,n}$

($Q_1, \dots Q_k \in \mathcal{O}(\mathbb{R}, n)$ — м-цы соответств. поворотов)

Правило останова для итерац. метода вращений (Якоби) можно задать с помощью погрешности $\varepsilon > 0$, для которой все вспомогат. эл-ты м-цы $A[k]$ по модулю не превышают ε (т.е. max по модулю компонента $\leq \varepsilon$)

Замечания (о методе псевдо-вращений)

а) Вместо матрицы поворота $\begin{pmatrix}\cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi\end{pmatrix}$ можно исп. матрицу псевдо-поворота $\begin{pmatrix}-\sin\varphi & \cos\varphi \\ \cos\varphi & \sin\varphi\end{pmatrix}$

б) Есть другие алгоритмы для решения спектральной задачи с несимметр. матрицей, спектр кот. состоит только из действит. собств. значений.

(например, алгоритм LQ) #

11. Задача одномерной интерполяции

Пусть на отр. $[a;b]$ заданы точки $x_0, x_1, \dots x_k \in [a;b]$

Опр. 1 (сеток на отрезке)

Пусть $x_0 < x_1 < \dots < x_k$. Тогда используем обозначение:

$A = \langle x_0, x_1, \dots x_k\rangle \subset [a;b]$ и называем список A сеткой на отр. $[a;b]$ с шагом $stp(A) = \max\{x_1 - x_0, x_2 - x_1, \dots x_k - x_{k-1}, b - x_k\}$

Если $x_0 = a$, $x_k = b$ и $x_i - x_{i-1} = h = \frac{b-a}{k}$ для $i = \overline{1,k}$, то сетку A наз-ют равномерной сеткой $[a;b]$.

Если $A = \langle x_0, x_1, \dots x_k\rangle$ — равномерная сетка, то сетка $B = \langle \frac{x_0+x_1}{2} = \theta_1, \frac{x_1+x_2}{2} = \theta_2, \dots, \frac{x_{k-1}+x_k}{2} = \theta_k$

наз-ют центрально равномерной (см. рис. 1) #

В общем случае точки $\tau_0, \tau_1, \dots, \tau_n$ сетки $A = \langle \tau_0, \tau_1, \dots, \tau_n \rangle$ наз-ют узлами сетки

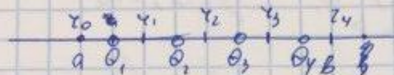


Рис. 1. $B = \langle \theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4 \rangle$ — центр. равном. сетка, если $A = \langle \tau_0, \tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4 \rangle$ — равном. сетка

Опр. 2 (сеточной ф-ции)

Пусть $A = \langle \tau_0, \dots, \tau_n \rangle$ — сетка $[a;b]$ и задана ф-я $\tilde{f}: A \to \mathbb{R}$. Тогда ф-цию $\tilde{f}$ наз-ют сеточной и для её обознач-я исп. век-р $\vec{f} = [\tilde{f}(\tau_0), \tilde{f}(\tau_1), \dots, \tilde{f}(\tau_n)] \in \vec{\mathbb{R}}^{|A|}(A)$ (если это позволяет контекст)

Матрицы поворотов на угол φ размера 3×3

$$\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$ — поворот вокруг первой и второй оси (OX_1 и OX_2), (для a^1_2)

$$\begin{pmatrix} \cos\varphi & 0 & -\sin\varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\varphi & 0 & \cos\varphi \end{pmatrix}$$ — поворот вокруг осей OX_1 и OX_2 (для a^1_3)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi \\ 0 & \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$$ — поворот вокруг осей OX_2 и OX_3 (для a^2_3)

11.1. Задача интерполяции

Пусть $A = \langle \tau_0, \tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n \rangle$ — сетка $[a;b]$ и $\vec{f} \in \vec{\mathbb{R}}^{|A|}(A)$ — A - сеточная ф-ция

Требуется построить такую конструктивную кусочно-непрерывную (непрер., гладкую) ф-цию $g \in KC([a;b], \mathbb{R})$ ($C([a;b], \mathbb{R})$, $C^q([a;b], \mathbb{R})$), совпадающую в узлах сетки A с сеточной ф-цией $\vec{f}$, т.е. должны выполняться условия:

$$g(\tau_0) = f_0, \; g(\tau_1) = f_1, \dots, g(\tau_n) = f_n,$$

если $\vec{f} = [f_0, f_1, \dots, f_n]$

Пример 1 (решение задачи интерполяции)

а) Пусть $B = \langle \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n \rangle$ — центрально-равном. сетка $[a;b]$ и $\vec{f} \in \vec{\mathbb{R}}^{|B|}(B)$, где $stp(B) = \frac{b-a}{n}$, и θ_i - середина отрезка $[\theta_i - \frac{h}{2} = \tau_{i-1}; \theta_i + \frac{h}{2} = \tau_i]$ для $i = \overline{1,n}$.

Расм. ф-цию $g \in KC([a;b], \mathbb{R})$ вида:

$$g(\tau) = \begin{cases} f_1, & \tau \in [\tau_0, \tau_1] \\ f_i, & \tau \in (\tau_{i-1}, \tau_i] \quad \text{для } i = \overline{2, n-1} \\ f_n, & \tau \in (\tau_{n-1}, \tau_n] \end{cases}$$

Следовательно g - кусочно-постоянная на $[a;b]$ ф-ция (см. рис. 1)

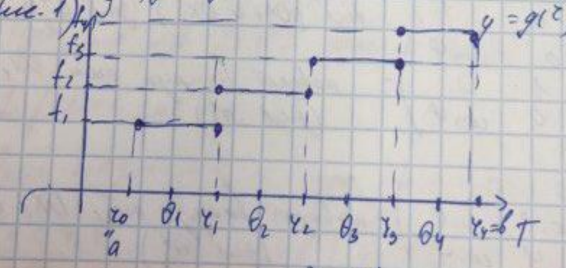


Рис. 1.

Таким образом, g - одно из решений задачи интерполяции для B - сеточной ф-ции $\vec{f} = [f_1, f_2, \dots, f_n] \in \vec{\mathbb{R}}^{|B|}(B)$

б) Интерполяция в виде ломаной

Пусть $\vec f = [f_0, f_1, \dots f_k] \in \vec R^{|A|}(A)$ — сеточн. ф-ция для сетки $A = \langle \tau_0 = a, \tau_1, \dots \tau_k = b \rangle$ отрезка $[a;b]$ и $g = \mathcal{I}_{mn}(A, \vec f)$ — ломаная с узлами $(\tau_0, f_0), (\tau_1, f_1), (\tau_2, f_2) \dots (\tau_k, f_k)$ на $[a;b]$ (см. рис. 2.)

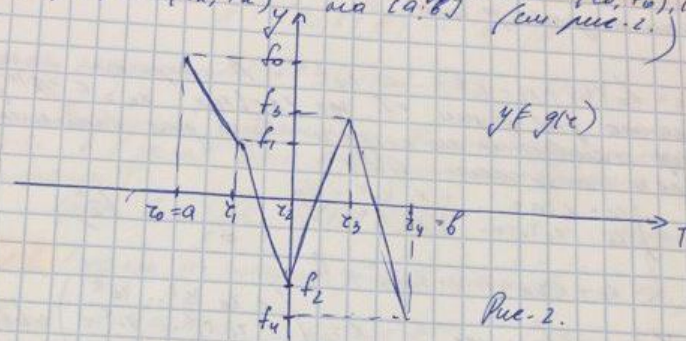


Рис. 2.

Тогда такая ф-ция $g = \mathcal{I}_{mn}(A, \vec f)$ явл-ся одним из решений задачи интерполяции для A-сеточн. ф-ции $\vec f$.

в) Задача интерполяции Лагранжа

Пусть $A = \langle \tau_0, \tau_1, \dots \tau_k \rangle$ — сетка $[a;b]$ и $\vec f = [f_0, f_1, \dots f_k] \in \vec R^{|A|}$

Тогда решением задачи интерполяции Лагранжа явл-ся A-интерполяционный для ф-ции $\vec f$ полином Лагранжа $\mathcal{L}_k(A, \vec f) = \mathcal{L}_k$ степени $\deg \mathcal{L}_k \le k$ вида: $(\tau \in [a;b])$

$$\mathcal{L}_k(\tau) = \sum_{i=0}^{k} \frac{(\tau-\tau_0)(\tau-\tau_1)\cdot\ldots\cdot(\tau-\tau_{i-1})(\tau-\tau_{i+1})\ldots(\tau-\tau_k)}{(\tau_i-\tau_0)(\tau_i-\tau_1)\cdot\ldots\cdot(\tau_i-\tau_{i-1})(\tau_i-\tau_{i+1})\ldots(\tau_i-\tau_k)} f_i \quad (1)$$

Например, если $k = 2$, то для $\tau \in [a;b]$:

$$\mathcal{L}_2(\tau) = \frac{(\tau-\tau_1)(\tau-\tau_2)}{(\tau_0-\tau_1)(\tau_0-\tau_2)} f_0 + \frac{(\tau-\tau_0)(\tau-\tau_2)}{(\tau_1-\tau_0)(\tau_1-\tau_2)} f_1 + \frac{(\tau-\tau_0)(\tau-\tau_1)}{(\tau_2-\tau_0)(\tau_2-\tau_1)} f_2,$$

где $\mathcal{L}_2(\tau_0) = f_0$
$\mathcal{L}_2(\tau_1) = f_1$
$\mathcal{L}_2(\tau_2) = f_2$

Таким образом, полином $\mathcal{L}_k$ явл-ся решением задачи интерполяции Лагранжа для ф-ции $\vec f$.

Вид (1) интерполяц-ого полинома $\mathcal{L}_k$ наз-ют аналитическим видом A-интерпол. полинома Лагранжа для ф-ции $\vec f$.

Пусть $\mathcal{L}_k(\tau) = x_0 + x_1\tau + \dots + x_k\tau^k$ — A-интерпол. полином Лагранжа для ф-ции $\vec f$, где $\vec x = [x_0, x_1, \dots x_k] \in \vec R^{|A|}(A)$ — вектор неизвестных его коэффиц. Тогда для вычисления век-ра $\vec x$ получаем СЛАУ:

$$\begin{cases} x_0 + x_1\tau_0 + \dots + x_k\tau_0^k = f_0 \\ x_0 + x_1\tau_1 + \dots + x_k\tau_1^k = f_1 \\ \dots \\ x_0 + x_1\tau_k + \dots + x_k\tau_k^k = f_k \end{cases} \quad (2) \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow X \cdot \vec x = \vec f$, где $X = \begin{pmatrix} 1 & \tau_0 & \tau_0^2 & \dots & \tau_0^k \\ 1 & \tau_1 & \tau_1^2 & \dots & \tau_1^k \\ \vdots & & & & \\ 1 & \tau_k & \tau_k^2 & \dots & \tau_k^k \end{pmatrix} \in L(\mathbb{R}, |A|)$

— матрица СЛАУ (2) с определителем Ван-дер-Монда:

$$\det(X) = \prod_{j=1}^{k} \prod_{i=0}^{j-1} (\tau_j - \tau_i) \ne 0$$

На практике для вычисления $\mathcal{L}_k$ используют СЛАУ (2), но не аналитич. вид (1), если $k > 4$ #

Замечание 1 (о задаче аппроксимации сеточной ф-ции)

Пусть $A = \langle \tau_0, \tau_1, \dots \tau_k \rangle$ — сетка $[a;b]$ и $\vec f \doteq \vec R^{|A|}(A)$, заданная с некоторой погрешностью. В этом случае для аппроксимационной интерполяции (аппроксимация — приближение), можно исп. интерполяц. полином Лагранжа $\mathcal{L}_k(B, \vec g)$, где

$B = \langle \tau_0, \tau_2, \tau_4, \dots \tau_{2n} \rangle$
$\vec g = [f_0, f_2, f_4, \dots f_{2n}]$
компонент

11.2. Система ф-ций Чебышёва на отрезке

Пусть $\vec{f} \in C([a;b], \mathbb{R})$ и $A = \langle \tau_0, \tau_1, \ldots \tau_k \rangle$ - сетка $[a;b]$.
Тогда определено A-сеточное отображение

$$\hat{A} : C([a;b], \mathbb{R}) \to \vec{\mathbb{R}}^{|A|}(A),$$

для которого $A(\vec{f}) = \langle f(\tau_0), f(\tau_1), \ldots f(\tau_k) \rangle \in \vec{\mathbb{R}}^{|A|}(A)$

Таким образом отображение $\hat{A}$ имитирует измерение ф-ции f в узлах сетки A (на практике возможны погрешности измерений).

Пусть $h_{(\cdot)} = (h_{k-1} \in C([a;b], \mathbb{R}))_{\mathbb{N}}$ - посл-ть непрер. ф-ий

Опр 1. (схемы и системы ф-ций Чебышёва на отр.)

а) Если $\vec{a} = \langle a_0, a_1, a_2, \ldots a_m \rangle \in \vec{\mathbb{R}}^{m+1}$ - заданный век-р, то ф-ция $f = a_0 h_0 + a_1 h_1 + \ldots + a_m h_m \in C([a;b], \mathbb{R})$ наз-ют $h_{(\cdot)}$ - обобщённым полиномом степени m, если $a_m \neq 0$ $(\deg(f)_{h(\cdot)} = m)$

б) Послед-ть $h_{(\cdot)}$ наз-ют ~~системой~~ схемой ф-ций Чебышёва на $[a;b]$, если любой $h_{(\cdot)}$ - обобщ. полином степени m имеет на $[a;b]$ не более m корней

в) Для $\forall (k-1)$, где $k \in \mathbb{N}$, систему $(h_0, h_1, \ldots h_{k-1})$ наз-ют системой ф-ций Чебышёва на $[a;b]$ если $h_{(\cdot)}$ - схема ф-ций Чебышёва на $[a;b]$

Пусть $(h_0, h_1, h_2 \ldots h_k)$ - система ф-ций Чебышёва на $[a;b]$ $A = \langle \tau_0, \tau_1, \ldots \tau_k \rangle$ - сетка отрезка $[a;b]$ и $\vec{f} \in \vec{\mathbb{R}}^{|A|}(A)$.

Лемма 1 (о задаче интерполяции по сист. ф-й Чебышёва)

Для ф-ций $\vec{f} \in \vec{\mathbb{R}}^{|A|}(A)$ $\exists$ единственный обобщённый полином $g = x_0 h_0 + x_1 h_1 + \ldots + x_k h_k$, где $\vec{x} = \langle x_0, x_1, \ldots x_k \rangle \in \vec{\mathbb{R}}^{|A|}$, решающий задачу интерпол. ф-ции $\vec{f}$. #

Рассм. задачу интерполяции по системе $(h_0, h_1, \ldots h_k)$ для нулевой A-сеточной ф-ции $\vec{0}_{|A|} = \langle 0, 0, \ldots 0 \rangle \in \vec{\mathbb{R}}^{|A|}(A)$ с помощью $h_{(\cdot)}$ - обобщ. полинома

$G = y_0 h_0 + \ldots + y_k h_k$, где век-р $\vec{y} = \langle y_0, y_1, \ldots y_k \rangle \in \vec{\mathbb{R}}^{|A|}(A)$ опред-ся из СЛАУ:

$$\begin{cases} y_0 h_0(\tau_0) + y_1 h_1(\tau_0) + \ldots + y_k h_k(\tau_0) = 0; \\ y_0 h_0(\tau_1) + y_1 h_1(\tau_1) + \ldots + y_k h_k(\tau_1) = 0; \\ \vdots \\ y_0 h_0(\tau_k) + y_1 h_1(\tau_k) + \ldots + y_k h_k(\tau_k) = 0 \end{cases} \iff \quad (3)$$

$\iff H \cdot \vec{y} = \vec{0}_{|A|}$,
где $H = (h^i_j)^{|A|}_{|A|}$ - матрица СЛАУ (3) и

$h^i_j = h_i(\tau_i)$ для $i, j \in \mathbb{Z}_{k+1}$

Тогда полином G, согласно СЛАУ (3), яв-ся полиномом степени не выше k и имеет на $[a;b]$ не менее $(k+1)$ нулей. Но $(h_0, h_1, \ldots h_k)$ - система ф-ций $\Rightarrow$ $G \equiv 0$ на $[a;b]$, т.е. $\det(H) \neq 0$

Поэтому СЛАУ $H \cdot \vec{x} = \vec{f}$ (4) $\left\{ \begin{array}{l} \vec{x} = \langle x_0, \ldots x_k \rangle = \\ = H^{-1} \cdot \vec{f} \end{array} \right\}$

имеет единств. решение и задача интерполяции $\vec{f}$ по сист-ме ф-й Чебышёва $(h_0, h_1, \ldots h_{k-1})$ имеет единственное решение #

Пример 2 (систем ф-й Чебышёва)

а) Параболическая схема: $h_{k-1} = t^{k-1}$ (t-перем. с пробегом в $\mathbb{R}$)
$\{1, t, t^2, \ldots, t^k, \ldots\}$

б) Алгебраическая схема: h_{k-1} - полином степени k, где $k \in \mathbb{N}$

в) Экспоненциальная схема: $\alpha_{(\cdot)} = \langle \alpha_{k-1} \in \mathbb{R} \rangle_{\mathbb{N}} \Rightarrow$
$\Rightarrow h_{k-1}(\tau) = e^{\alpha_{k-1} \cdot \tau}$

г) Тригонометрические схемы:

На $[0;\pi]$: $(1, \cos t, \cos 2t, \cos 3t, \ldots \cos(k-1)t)$

#

Замечание 2 (об аппроксимации)

Как и для интерполяционных полиномов Лагранжа (см. замечание 1), система ф-ций Чебышева может быть использована для аппроксимационной интерполяции сеточной ф-ции #

12. Интерполирование ф-ций

Рассм. Чебышевское Банахово пр-во $X = (X, \|\cdot\|) = C([a;b], \mathbb{R})$, в кот. задана ф-ция $f \in X$.

На отрезке $[a;b]$ задана пос-ть сеток $A_{(\cdot)} = (A_k)_{\mathbb{N}}$

Опр. 1 (схемы сеток и сеточных ф-ций)

а) Послед-ть $A_{(\cdot)}$ наз-тся схемой сеток, если

$$\lim_{k \to +\infty} \operatorname{stp}(A_k) = 0$$

б) Пусть $A_{(\cdot)} = (A_k)_{\mathbb{N}}$ — это схема сеток $[a;b]$ для $k \in \mathbb{N}$ определена A_k — сеточная ф-ция $\vec{f}_{(k)} \in \vec{\mathbb{R}}^{|A_k|}(A_k)$. Тогда пос-ть $\vec{f}_{(\cdot)} = (\vec{f}_{(k)})_{\mathbb{N}}$ наз-тся $A_{(\cdot)}$-схемой сеточных ф-ций на $[a;b]$ #

Пример 1 Пусть $A_{(\cdot)} = (A_k)_{\mathbb{N}}$ — схема сеток $[a;b]$ и $\vec{f}_{(k)} = \hat{A}_k(f) \in \vec{\mathbb{R}}^{|A_k|}(A_k)$ для $k \in \mathbb{N}$

Тогда $(\hat{A}_k(f))_{\mathbb{N}}$ — $A_{(\cdot)}$-схема сеточных ф-ций на $[a;b]$

12.1. Задача интерполирования непрерывной ф-ции, индуцир. схемой сеток

Пусть $f \in C([a;b], \mathbb{R}) = X = (X, \|\cdot\|)$ и $A_{(\cdot)} = (A_k)_{\mathbb{N}}$ — схемы сеток $[a;b]$, индуцирующие $A_{(\cdot)}$-схему сеточных ф-ций $\vec{f}_{(\cdot)} = (\vec{f}_{(k)} = \hat{A}_k(f))_{\mathbb{N}}$

Тогда задачей $A_{(\cdot)}$-сеточного интерполирования ф-ции $f \in X$ наз-тся задачу конструктивного нахождения пос-ти $g_{(\cdot)} = (g_k)_{\mathbb{N}}$ — ф-ций, опред. на $[a;b]$, : для $\forall k \in \mathbb{N}$ ф-ция g_k задается решением задачи интерполяции ф-ции $\vec{f}_{(k)} = \vec{A}_k(f)$ для сетки A_k на $[a;b]$.

Пример 1. (интерпол. Лагранжа)

Пусть $A_{(\cdot)} = (A_k)_{\mathbb{N}}$ — схема равномерных сеток на $[a;b]$ и $|A_k| = k+1$ для $k \in \mathbb{N}$ и $f \in X$. Пусть $\mathcal{L}_k = \mathcal{L}_k(A; \hat{A}_k(f) = \vec{f}_{(k)})$ — A_k-интерполяц. полином Лагранжа для $k \in \mathbb{N}$

Тогда $(\mathcal{L}_k)_{\mathbb{N}}$ — решение задачи A-интерполирования ф-ции f на $[a;b]$.

Опр. 1. (корректности решения задачи интерполирования)

Пусть $g_{(\cdot)} = (g_k)_{\mathbb{N}}$ — решение задачи $A_{(\cdot)}$-интерполирования ф-ции $f \in X$.

Решение $g_{(\cdot)}$ наз-тся сходящимся (в норме $\|\cdot\|$), если $\exists \lim_{k \to +\infty} g_k = g$ в пр-ве кусочно-непр. ф-ций на $[a;b]$

Решение $g_{(\cdot)}$ наз-тся аналитич. корректным, если оно явл-ся сходящимся и $\lim_{k \to +\infty} g_k = f$

Решение $g_{(\cdot)}$ наз-тся корректным, если оно аналитически корректно и для $\forall \varepsilon > 0$ и $\forall k \in \mathbb{N}$ вып. условие:

$$\|\tilde{g}_k - f\| < C\varepsilon, \text{ где } C > 0 \text{ не зависит от } k \in \mathbb{N}$$

$\vec{\tilde{f}}_{(k)} = \hat{A}_k(f) + \vec{\varepsilon}_k$, $\|\vec{\varepsilon}_k\| \le \varepsilon$ для $\forall k \in \mathbb{N}$ и $\tilde{g}_{(\cdot)} = (\tilde{g}_k)_{\mathbb{N}}$ — решение той же задачи $A_{(k)}$-интерполяции для ф-ции $\vec{\tilde{f}}_{(k)}$ (как и для $\vec{f}(k)$) для $k \in \mathbb{N}$.

Замечание 1

Пусть $\forall k \in \mathbb{N}$ решение g_k и $\tilde{g}_k$ задачи интерполяции ф-ций $\vec{f}_{(k)}$, $\vec{\tilde{f}}_{(k)} \in \vec{\mathbb{R}}^{|A_k|}(A_k)$ для сетки A_k из схемы сеток $A_{(\cdot)} = (A_n)_N$, где $\| {}^{>}f_{(n)} - {}^{>}\tilde{f}_{(n)} \| < \varepsilon$ и $\varepsilon > 0$ — произв. число удовлетворяют условию: $\| g_n - \tilde{g}_n \| \le C\varepsilon$, где число $C \ge 0$ не зависит от k. Тогда ранее задача $A_{(\cdot)}$ — интерполирование схемы сеточных ф-ций $({}^{>}f_{(n)})_N$ наз-ют устойчивой

Опр. 2 (корректность схемы интерполирования ф-ции)

Пусть решение задачи $A_{(\cdot)}$ — интерполирования ф-ции f — аналитич. корректно и устойчиво. Тогда это решение корректно.

Замечание 2 (об интерпол. Лагранжа)

Пусть $A_{(\cdot)} = (A_n)_N$ — схема (центрально-) равновесных сеток $[a;b]$, $f \in C^1([a;b], \mathbb{R})$ и $g_{(\cdot)} = (g_n)_N$ — решение задачи $A_{(\cdot)}$ — интерполирования Лагранжа для ф-ции f. Тогда, "в общем случае", такое решение может быть сходящимся и, тем более, аналит. корректным #

Опр 3 (сетки Чебышева на отр)

Сетку $A = \langle \tau_0, \tau_1, \dots \tau_k \rangle$ отрезка $[a, b]$ наз-ют чебышевской, если

$$\tau_j = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2} \cos \frac{(2j+1)\pi}{2k+1} \quad \text{для } j \in \mathbb{Z}_{k+1}$$

($\tau_i > \tau_{i+1}$, для $i = \overline{0, k-1}$)

Теорема 1 (Чебышева)

Пусть $A_{(\cdot)} = (A_k)_N$ — схема чебышевских сеток $[a;b]$, где $|A_k| = k+1$ и $L_{(\cdot)} = (L_k)_N$ — решение задачи $A_{(\cdot)}$ — интерпол. ф-ции $f \in C^1([a;b], \mathbb{R})$. Тогда это решение — аналитич. корректно #

Теорема 2 (Вейерштрасса)

Пусть $P([a;b], \mathbb{R})$ — подпр-во полиномов с действит. коэфф. в пр-ве $X = (X, \|\cdot\|) = C([a;b], \mathbb{R})$

Тогда мн-во $P([a;b], \mathbb{R})$ — всюду плотно в пр-ве X #

В Остаток в форме Коши интерполяции Лагранжа

Пусть $A = \langle \tau_0, \tau_1, \dots \tau_k \rangle$ — сетка на $[a;b]$, $f \in C^{k+1}([a;b], \mathbb{R})$ и ${}^{>}y = A(f) = \langle y_0, y_1, \dots y_k \rangle \in {}^{>}\mathbb{R}^{(A)}$ и $L = L(A; {}^{>}y)$ — A-интерполяционный полином Лагранжа для A-сеточной ф-ции ${}^{>}y$

Опр. 1 (сеточного полинома)

Полином $\Lambda_A(\tau) = (\tau - \tau_0)(\tau - \tau_1) \dots (\tau - \tau_k)$, где τ — переменная с пробегом в $[a;b]$, наз-ют A-сеточным полиномом на $[a;b]$

Замечание (об остатке интерполяции Лагранжа)

Ф-цию $R = f - L \in C^{k+1}([a;b], \mathbb{R})$ наз-ют остатком A-интерполяции Лагранжа ф-ции f на $[a;b]$.

Теорема 1 (~~о форме~~ об остатке в форме Коши интерполяции Лагранжа)

Для $\forall \tau \in [a;b]$ остаток $R = f - L$ A-интерпол. Лагранжа ф-ции f на $[a;b]$ имеет вид:

$$R(\tau) = \frac{f^{(k+1)}(\xi(\tau))}{(k+1)!} \Lambda_A(\tau) \qquad (1)$$

где $\xi(\tau) \in (a;b)$ — точка инт. $(a;b)$

Пусть $\tau_* \in [a;b]$ и $\tau_* \notin A$. Обозначим

$p = \dfrac{R(\tau_*)}{\Lambda_A(\tau_*)}$ и расм. ф-цию $F = f - L - p\Lambda_A$

Тогда ф-ция $F \in C^{k+1}([a;b], \mathbb{R})$ имеет на отр $[a;b]$ $(k+2)$ нуля (см. рис. 1) в точках $\tau_*, \tau_0, \tau_1 \dots \tau_k \in [a;b]$

где $\tau_k \ne \tau_i$ для $i \in \overline{I}_{k+1}$

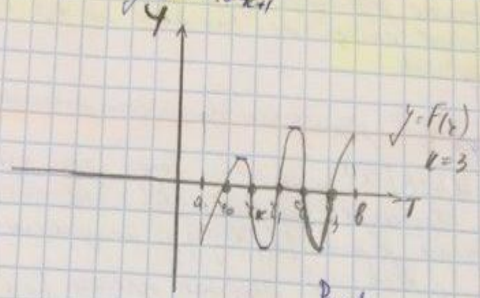


Рис. 1

Следовательно, согласно теореме Ролля, ф-ция F' имеет на $(a;b)$ $(k+1)$ нуль, ф-ция F'' - k нулей, $F^{(k+1)} = f^{(k+1)} - p(k+1)!$ - нуль на $(a;b)$ в т. $\xi(\tau) \in (a,b)$

$\{\Lambda_A^{(k+1)} = (k+1)!, \ \gamma^{k+1} = 0\}$

Таким образом $f^{(k+1)}(\xi(\tau)) - \frac{R(\tau_*)}{\Lambda_A(\tau_*)}(k+1)! = 0$

т.е. $$R(\tau_*) = \frac{f^{(k+1)}(\xi(\tau))}{(k+1)!}\Lambda_A(\tau_*)$$

▼

Замечание 2

Пусть $h \in C([a,b],\mathbb{R})$. Тогда Чебышевскую норму $\|h\|$ наз-ют **уклонением от нуля** ф-ции h

Следствие (об уклонении от нуля остатка интерполяции Лагранжа)

$$\|R\| \le \frac{\|f^{(k+1)}\|}{(k+1)!}\|\Lambda_A\| \quad (2)$$

#

14 Квадратурные формулы для приближенного вычисления интеграла Римана на отр. от гладкой ф-ции

А) Квадратурная формула прямоугольников

Пусть $f_0 \in C^1([c,c+h],\mathbb{R})$, где $h>0$. Тогда для сетки $\langle \frac{2c+h}{2} \rangle$, используя интерполяц. полином Лагранжа для сеточной ф-ции $[f_0(\frac{2c+h}{2})\rangle$ получаем:

$f(\tau) = \{\frac{2c+h}{2} = \theta$ - середина отрезка $[c,c+h]\} = f_0(\theta) + \frac{f_0'(\xi(\tau))}{1!}(\tau-\theta)$ для $\tau \in [c;c+h]$. Поэтому (см. рис. 1)

$$\int_c^{c+h} f_0(\tau)d\tau = \int_c^{c+h} f_0(\theta)d\tau + \int_c^{c+h}\frac{f_0'(\xi(\tau))}{1!}(\tau-\theta)d\tau = f_0(\theta)h + r_0, \quad (1)$$

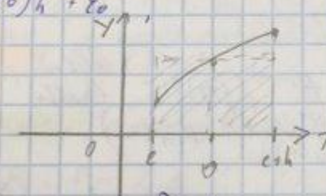
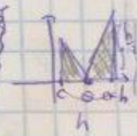


Рис. 1.

где $|r_0| \le \|f_0'\|_\theta \int_c^{c+h}|\tau-\theta|d\tau = \{ \} = \|f_0'\|_\theta \frac{h^2}{4}$



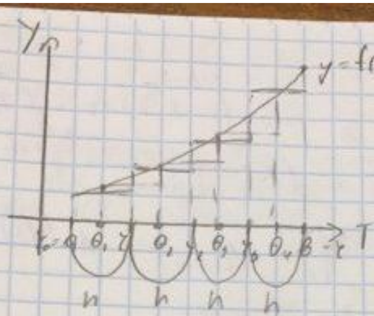
Из формул (1) и (2) получаем

$$\int_c^{c+h} f_0(\tau)d\tau \approx f_0(\theta)\cdot h \quad (3)$$

Ф-лу (3) наз-ют **формулой Котеса** для прямоугольника

Пусть $f \in C^1([a;b],\mathbb{R})$, $B = \langle \theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_k\rangle$ - центрально-равномерная сетка отр. $[a;b]$ с шагом $stp(B) = \frac{b-a}{k} = h$, индуцированная равномерной сеткой $A = \langle \tau_0, \tau_1, \ldots, \tau_k\rangle$ отр. $[a;b]$, т.е. θ_i - середина отрезка $[\tau_{i-1}, \tau_i]$ для $i = \overline{1,k}$

Тогда, применяя на каждом отрезке $[\tau_{i-1}, \tau_i]$ (для $i=\overline{1,k}$) формулу (1), получаем (см. рис. 2)



$$\int_a^b f(\tau)d\tau = \sum_{i=1}^k \left(f(\theta_i)h + r_{\theta_i}\right) =$$

$$= h\left(f(\theta_1)+\dots+f(\theta_k)\right) + r \qquad (4)$$

где $r=\sum_{i=1}^k r_{\theta_i}$ и

$$|r| \le \frac{\|f'\|}{4}\sum_{i=1}^k h^2 = \left\{ h=\frac{b-a}{k},\ k=\frac{b-a}{h}\right\} = \frac{\|f'\|(b-a)}{4}\, h \qquad (5)$$

Таким образом, согласно (4) и (5)

$$\int_a^b f(\tau)d\tau = h\left(f(\theta_1)+f(\theta_2)+\dots+f(\theta_k)\right) + O(h)$$ при $h\to 0$

Приближенное равенство

$$\int_a^b f(\tau)d\tau \approx h\left(f(\theta_1)+f(\theta_2)+\dots+f(\theta_k)\right) \qquad (6)$$

наз-тся квадратурной формулой прямоугольников

Б) Квадратурная формула трапеций

Пусть $f_0 \in C^2([c,c+h],\mathbb{R})$. Тогда, согласно интерполяции Лагранжа и её остатка в форме Коши ф-ции f на сетке $\langle c, c+h\rangle$. Получаем

$$f(\tau) = \underbrace{\frac{\tau-(c+h)}{-h} f_0(c) + \frac{\tau-c}{h} f_0(c+h)}_{\text{полином Лагранжа}} + \frac{f''(\xi(\tau))}{2!}(\tau-c)(\tau-(c+h)) =$$

$$= \frac{(c+h-\tau)f_0(c) + (\tau-c)f_0(c+h)}{h} + \frac{f''(\xi(\tau))}{2}(\tau-c)(\tau-c-h), \qquad (\#)$$

где $\xi(\tau)\in(c,c+h)$

Следовательно,

$$\int_c^{c+h} f(\tau)d\tau = \frac1h f_0(c)\int_c^{c+h}(c+h-\tau)d\tau + \frac1h f_0(c+h)\cdot\int_c^{c+h}(\tau-c)d\tau + r_{[c,c+h]} = \frac1h f_0(c)\left(-\frac{(c+h-\tau)^2}{2}\right)\Bigg|_c^{c+h} +$$

$$+\frac1h f_0(c+h)\frac{(\tau-c)^2}{2}\Bigg|_c^{c+h} + r_{[c,c+h]} = h\,\frac{f_0(c)+f_0(c+h)}{2} + r_{[c,c+h]}, \qquad (7)$$

где $$|r_{[c,c+h]}| \le \frac{\|f''\|_{[c,c+h]}}{2!}\int_c^{c+h}(\tau-c)(c+h-\tau) = \frac{\|f''\|_{[c,c+h]}}{2}\int_0^h t(h-t)dt \qquad (8)$$

Поэтому ф-лу

$$\int_c^{c+h} f(\tau)d\tau \approx h\,\frac{f_0(c)+f_0(c+h)}{2}$$

наз-тся (см. рис. 3) ф-лой конеч. трапеций

Рис. 3

Поскольку $\int_0^h t(h-t)dt = \frac{t^2h}{2} - \frac{t^3}{3}\Big|_0^h = \frac{h^3}{6}$,

то из (7) и (8) следует, что

$$\int_c^{c+h} f(\tau)d\tau = h\,\frac{f(c)+f(c+h)}{2} + r_{[c,c+h]} \qquad (9)$$

где $|r_{[c,c+h]}| \le \frac{\|f''\|_{[c,c+h]}}{12}h^3$

Введем на $[a;b]$ равномерн. сетку $A = \langle a = x_0, x_1, \dots, x_k = b \rangle$ шага $h = stp(A)$ и рассм. ф-цию $f \in C^2([a;b], \mathbb{R})$.

Используя для каждого отрезка $[x_{i-1}, x_i]$ для $i = \overline{1,k}$ квадратурную ф-лу Котеса для трапеции (9) (см. рис. 4) получаем:

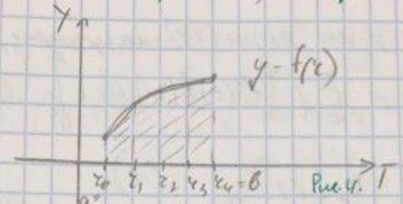


Рис. 4.

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=1}^k \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx = \sum_{i=1}^k \left(\frac{f(x_{i-1}) + f(x_i)}{2} h + r_{[x_{i-1}, x_i]} \right) =$$

$$= h\left(\frac{f(x_0)}{2} + f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_{k-1}) + \frac{f(x_k)}{2} \right) + r_{[a;b]}, \quad (10)$$

где $|r_{[a;b]}| \le \frac{\|f''\|}{12} \sum_{i=1}^k h^3 = \left\{ \begin{array}{l} h = \frac{b-a}{k} \\ k = \frac{b-a}{h} \end{array} \right\} = \frac{\|f''\|(b-a)}{12} h^2 \quad (11)$

Таким образом, получаем ф-лу трапеций при $h \to 0$

$$\int_a^b f(x)dx = h\left(\frac{f(x_0)}{2} + f(x_1) + \dots + f(x_{k-1}) + \frac{f(x_k)}{2} \right) + O(h^2) \quad (12)$$

III Квадратурная формула парабол (Симпсона)

Рассм. на отр. $[c, c+h]$ сетку $\langle c, c+\frac{h}{2}, c+h \rangle$ и ф-цию $f_0 \in C^3([c, c+h], \mathbb{R})$. ~~Если для этой сетки и ф-ции~~

Замечание 1.

Пусть на $[a;b]$ задана равном-я сетка $A = \langle a = x_0, x_1, \dots, x_k = b \rangle$ и ф-ция $f \in C^{k+1}([a;b], \mathbb{R})$. Тогда, используя A-интерпол. полином Лагранжа $L_k = L_k(A; A(f))$, получаем

$$f(x) = L_k(x) + \frac{f^{(k+1)}(\xi(x))}{(k+1)!} \Lambda_A(x), \quad x \in [a;b] \quad (13)$$

где $\xi(x) \in (a;b)$

$$L_k(x) = \sum_{i=0}^k \frac{(x-x_0)(x-x_1)\cdot\ldots\cdot(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\cdot\ldots\cdot(x-x_k)}{(x_i-x_0)(x_i-x_1)\cdot\ldots\cdot(x_i-x_{i-1})\cdot\ldots\cdot(x_i-x_k)} f(x_i)$$

$$= \sum_{i=0}^k l_i(x) f(x_i) \quad (14)$$

Используя ф-лы (13) и (14) получаем:

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=0}^k \left(\int_a^b l_i(x) f(x_i)\, dx + \int_a^b \frac{f^{(k+1)}(\xi(x))}{(k+1)!} \Lambda_A(x) dx \right) =$$

$$= \sum_{i=0}^k c_i f(x_i) + r_{[a;b]} \quad (15)$$

где $c_i = \int_a^b l_i(x)dx$ для $i = \overline{0,k}$ (16)

$$|r_{[a;b]}| \le \frac{\|f^{(k+1)}\|}{(k+1)!} \int_a^b |\Lambda_A(x)| dx \quad (17)$$

Если f — полином и $\deg f \le k$, то $r_{[a;b]} \equiv 0$ в (15) и (17). Поэтому для такого полинома справедливо рав-во:

$$\int_a^b f(x)dx = c_0 f(x_0) + c_1 f(x_1) + \dots + c_k f(x_k), \quad (18)$$

где константы $c_i \in \mathbb{R}$ определены в (16) (см. также (14))

Согласно замеч. 1, для полиномов $1, x$ и x^2 на $[c, c+h]$ получаем, используя сетку $\langle c, c+\frac{h}{2}, c+h \rangle$

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_c^{c+h} 1\, dx = c_0 + c_1 + c_2 = h. \\ \int_c^{c+h} (x-c)dx = \frac{h}{2} c_1 + h c_2 = \frac{h^2}{2} \\ \int_c^{c+h} (x-c)^2 dx = \frac{h^2}{4} c_1 + h^2 c_2 = \frac{h^3}{3} \end{array} \right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} c_0 + c_1 + c_2 = h \\ c_1 + 2c_2 = h \\ 3c_1 + 12c_2 = 4h \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} c_0 = \frac{1}{6}h \quad c_1 = \frac{2}{3}h \\ c_2 = \frac{1}{6}h \end{array} \right.$$

Поэтому для произв. ф-ции $f_0 \in C^{3m}([c, c+h], \mathbb{R})$, согласно ф-лам (15)-(18), получаем:

$$\int_c^{c+h} f_0(\tau)d\tau = \frac{h}{6}\left(f_0(c) + 4f_0\left(c+\frac{h}{2}\right) + f_0(c+h)\right) + r_{[c,c+h]}$$

где $$|r_{[c,c+h]}| \le \frac{\|f^{(3)}\|_{[c,c+h]}}{6} \int_c^{c+h} (\tau - c)\left|\left(\tau - c - \frac{h}{2}\right)\right| \cdot \quad (19)$$

$$\cdot (c+h-\tau)\,d\tau = \left\{\begin{matrix} \tau - c \to t \\ d\tau = dt \end{matrix}\right\} =$$

$$= \int_0^h t \cdot \left|t - \frac{h}{2}\right|(h-t)\,dt \cdot \frac{\|f^{(3)}\|_{[c,c+h]}}{6} = \frac{\|f^{(3)}\|_{[c,c+h]}}{6}\, O(h^4)$$
при $h \to 0$ (20)

Ф-ла (19) (см. также (20)) наз-ют квадратурной формулой Котеса для парабол.

Введем на $[a;b]$ равномерную сетку $A = \langle a = \tau_0, \tau_1, \ldots \tau_{2k} = b \rangle$ и для ф-ции $f \in C^3([a;b], \mathbb{R})$, используя ф-лы (19) и (20), получаем (см. рис. 5):

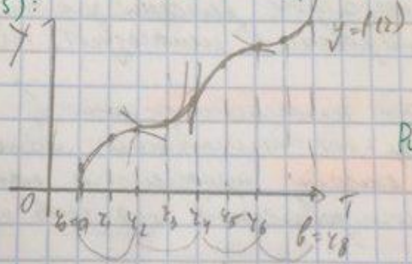


Рис. 5.

$$\int_a^b f(\tau)d\tau = \frac{h}{6}\sum_{j=1}^{k}\left(f(\tau_0) + 4f(\tau_1) + 2f(\tau_2) + 4f(\tau_3) + 2f(\tau_4) + \ldots + 2f(\tau_{2k-2}) + 4f(\tau_{2k-1}) + f(\tau_{2k})\right) + r_{[a;b]} \quad (21)$$

$$|r_{[a;b]}| \le \frac{\|f^{(3)}\|}{6}\, O(h^3) \quad \text{при } h \to 0 \quad (22)$$

Формулу (21) с учетом ф-лы (22) наз-ют квадратурной ф-лой парабол (Симпсона).

Замечание 2

Говорят, что квадратурная формула прямоугольников (трапеций) [парабол] имеет порядок 1-й (2-й) [3-й] порядок аппроксим.-я.

В общем случае для достаточно гладкой на отр. $[a;b]$ ф-ции и сетки $A = \langle \tau_0, \tau_1, \ldots \tau_k \rangle \subset [a;b]$ получают квадратурную ф-лу:

$$\int_a^b f(\tau)d\tau = c_0 f(\tau_0) + c_1 f(\tau_1) + \ldots + c_k f(\tau_k) + O(h^{\alpha})$$
при $h \to 0$ (23)

где $c_0, c_1, \ldots c_k$ зависят только от шага h сетки A, но не от ф-ции f. И число $\alpha \in \mathbb{R}_{(+)}$ наз-ют порядком аппроксимирования квадратурной ф-лы (23).

15 Сплайны дефекта 1

Для корректного решения задачи интерполирования и аппроксимирования используют технологию сплайнов.

Согласно этой технологии ф-цию в "маленьком" "кр-ве" апр-ют полиномом малой степени.

В рез-те сплайн определяется набором полиномов, заданных последовательно на соотв. подотрезках рассм. отрезка.

15.1. Сплайн нулевой степени дефекта 1

Рассм. на отр. $[a;b]$ сетку $A = \langle a = \tau_0, \tau_1, \ldots \tau_k = b \rangle$ и ф-цию $f \in C([a;b], \mathbb{R})$, индуцирующие сетку

$$B = \left\langle \theta_1 = \frac{\tau_0 + \tau_1}{2}, \theta_2 = \frac{\tau_1 + \tau_2}{2}, \ldots \theta_k = \frac{\tau_{k-1} + \tau_k}{2} \right\rangle \text{ и}$$

B-сеточную ф-цию $\hat{B}(f) = [f(\theta_1), f(\theta_2), \ldots f(\theta_k)] \in \mathbb{R}^{(B)}$

Для построения сплайна $spl_0(B, \hat{B}(f))$ нулевой степени и дефекта 1 используют базис сплайнов

$h(\cdot) = (h_1 = spl_0(B, \vec e_1), h_2 = spl_0(B, \vec e_2), \dots h_k = spl_0(B, \vec e_k))$,

где $(\vec e_1, \vec e_2, \dots \vec e_k)$ — стандартный базис пр-ва $\vec R^{|B|}(B)$

т.е. $\vec e_1 = [1,0,\dots 0>$, $\vec e_2 = [0,1,0,\dots 0>$, … $\vec e_k = [0,0,\dots 0,1>$,

и ф-ции $h_1, h_2, \dots h_k$ имеют вид:

$$\begin{cases} h_1(\tau) = \begin{cases} 1, \text{ если } \tau \in [\tau_0, \tau_1) \\ 0, \text{ если } \tau \notin [\tau_0, \tau_1) \end{cases} \\ h_2(\tau) = \begin{cases} 1, \text{ если } \tau \in [\tau_1, \tau_2) \\ 0, \text{ если } \tau \notin [\tau_1, \tau_2) \end{cases} \\ \vdots \\ h_k(\tau) = \begin{cases} 1, \text{ если } \tau \in [\tau_{k-1}, \tau_k] \\ 0, \text{ если } \tau \notin [\tau_{k-1}, \tau_k] \end{cases} \end{cases} \qquad (1)$$

[см. рис. 1]

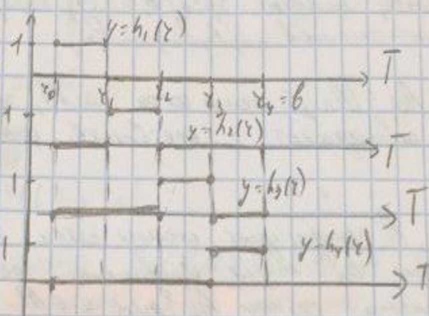


Рис. 1 (k=4)

В результате получаем линейное пр-во $Spl_0(B)$, B-сплайны в нулевой степени с базисом h, т.е.

$$Spl_0(B) = \underbrace{[h(\cdot)]}$$

— линейная оболочка системы векторов $h(\cdot)$

Очевидно, что $Spl_0(B) \underset{a}{\cong} \vec R^{|B|}(B)$ (изоморфно изометричные пр-ва),

где $\hat B(f) = \sum_{j=1}^{k} f(\theta_j)\vec e_j$ и

Ф-ция $Spl_0(B, \hat B(f)) = \sum_{j=1}^{k} f(\theta_j) h_j$ (см. рис. 2) решает задачу B-интерполяции ф-ции $\hat B(f)$.

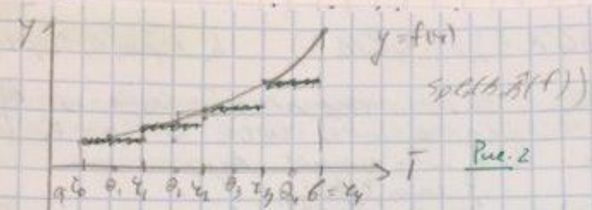


Рис. 2

На отрезке $[\tau_{j-1}, \tau_j]$ сплайн $spl_0(B, \hat B(f))$ задается полиномом 0-ой степени, т.е. константой $f(\theta_j)$, где $j = \overline{1,k}$

$f(\theta_j) = P_j$

Следовательно, сплайн $spl_0(B, \hat B(f))$ определяется списком полиномов $(P_1, P_2, \dots P_k)$

Пусть $A_{(\cdot)} = (A_n)_N$ — схема сеток $[a;b]$, где граничные узлы сеток совпадают с соответств. границами a и b отрезка $[a;b]$.

Схема A индуцирует схему сеток $B_{(\cdot)} = (B_n)_N$, где узлы сетки B_n яв-ся серединами соотв.-х подотрезков, индуцированных сеткой A_n для $n \in N$

Лемма 1

$$f = \lim_{n \to \infty} spl_0(B_n, \hat B_n(f)), \text{ где } f \in C([a;b], R)$$

Задача $B_{(\cdot)}$-интерполирования ф-ции f указанными сплайнами корректна.

15.2. Сплайны 1-ой степени и дефекта 1

Пусть $A = <\tau_0, \tau_1, \dots \tau_n>$ — сетка $[a;b]$, называемая далее сеткой с правильными граничными узлами, т.е. $\tau_0 = a$ и $\tau_n = b$. Кроме того, $f \in C([a;b], R)$ и $\hat A(f) = [f(\tau_0), \dots f(\tau_n)> \in \vec R^{|A|}(A)$

Банахово пр-во $Spl_1(A)$ A-сплайнов 1-ой степени и дефекта 1 индуцируется своим базисом $H = (h_0, h_1, \dots h_n)$, где $h_j = spl_1(A, \vec{e}_{j+1})$ для $j = \overline{0,k}$, и ~~функция~~ $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots \vec{e}_{k+1})$ — стандартной базис банахова пр-во $\vec{R}^{|A|}(A)$. Ф-ции $h_0, h_1, \ldots h_k$ имеют вид (см. рис. 3)

$$h_0(\tau) = \begin{cases} 1 - \frac{\tau - \tau_0}{\tau_1 - \tau_0}, & \tau \in [\tau_0, \tau_1] \\ 0, & \tau \notin [\tau_0, \tau_1] \end{cases}$$

$$h_1(\tau) = \begin{cases} \frac{\tau - \tau_0}{\tau_1 - \tau_0}, & \tau \in [\tau_0, \tau_1] \\ 0, & \tau \notin [\tau_0, \tau_2], \\ 1 - \frac{\tau - \tau_1}{\tau_2 - \tau_1}, & \tau \in [\tau_1, \tau_2] \end{cases}$$

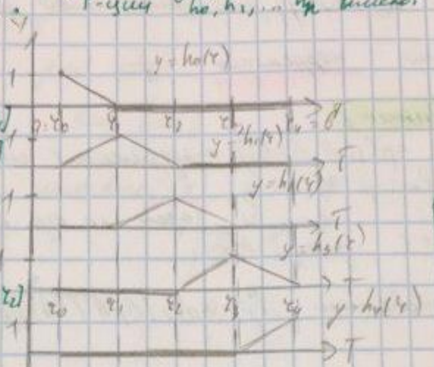


Рис. 3

$\vdots$

$$h_k = \begin{cases} \frac{\tau - \tau_{k-1}}{\tau_k - \tau_{k-1}}, & \tau \in [\tau_{k-1}, \tau_k] \\ 0, & \tau \notin [\tau_{k-1}, \tau_k] \end{cases}$$

Следовательно, $Spl_1(A) \overset{\text{и}}{\underset{\text{а}}{\cong}} \vec{R}^{|A|}(A)$, $Spl_1(A) = [H]$ и $Spl_1(A)$ — линейное пр-во ломаных, т.е. $Spl_1(A) \subset C([a;b])$

Очевидно, что $Spl_1(A, \hat{A}(f)) = \sum_{j=0}^{k} f(\tau_j) h_j = \sum_{j=0}^{k} f(\tau_j) spl_1(A, \vec{e}_{j+1})$ — явл-ся решением задачи интерполяции ф-ии $\hat{A}(f)$ (см. рис. 4)

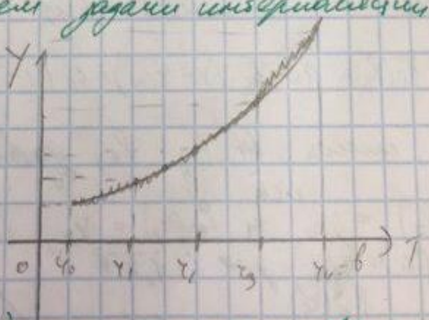


Рис. 4.

Пусть $A_{(\cdot)} = (A_k)_k$ — схема сеток $[a; b]$ с правильными граничными узлами и $(spl_1(A, \hat{A}_k(f))$ — метод $A_{(\cdot)}$-интерполирования ф-ции $f \in C([a, b], \mathbb{R})$

Лемма 2

$f = \lim_{k \to +\infty} spl_1(A_k, \hat{A}_k(f))$ для указанной задачи $A_{(\cdot)}$-интерполирования корректна #

Замечание 3

Сплайн $spl_1(A, \hat{A}(f))$ определяется списком полиномов $(P_1, P_2, \ldots P_k)$, где P_j задан на отр $[\tau_{j-1}, \tau_j]$ и степень $\deg P_j \le 1$ для $j = \overline{0,k}$

По определению, $P_j = spl_1(A, \hat{A}(f))\big|_{[\tau_{j-1}, \tau_j]}$ для $j = \overline{1,k}$ #

15.3. Сплайны 2-й степени и дефекта 1.

Пусть $A = \langle \tau_0, \tau_1, \ldots \tau_k \rangle$ — гранично правильная сетка отр. $[a; b]$ и $f \in C([a; b], \mathbb{R})$ и $\hat{A}(f) = [f(\tau_0), f(\tau_1), \ldots f(\tau_k)\rangle = \vec{y} = [y_0, y_1 \ldots y_k\rangle \in \vec{R}^{|A|}(A)$.

Сплайн $\varphi = spl_2(A, \vec{y})$ — 2-й степени и дефекта 1 опред-ся списком полиномов $(P_1, P_2, \ldots P_k)$ ~~и~~ степени не выше 2, где полином P_i определен на $[\tau_{i-1}, \tau_i]$ для $i = \overline{1,k}$ ~~[illegible]~~ и имеет вид

$$P_i(\tau) = a_i + b_i(\tau - \tau_{i-1}) + c_i(\tau - \tau_i)^2 \text{ для } i = \overline{1,k} \quad (2)$$

Кроме того, список $(P_1, P_2, \ldots P_k)_{i=\overline{1,k}}$ удовлетв. условиям:

$$\begin{cases} 1)\ P_i(\tau_{i-1}) = y_{i-1} \text{ и } P_k(\tau_k) = y_k; \\ 2)\ P_i(\tau_i) = P_{i+1}(\tau_i) \text{ для } i = \overline{1, k-1} \\ 3)\ P_i'(\tau_i) = P_{i+1}'(\tau_i) \\ 4)\ c_1 = 0 \text{ (условие однозначности списка полиномов)} \end{cases} \quad (3)$$

(сшейка значений) (сшейка 1-х произв.)

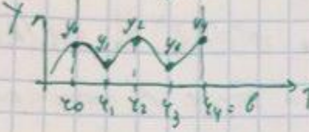
Из вида (2) и условий (3) получаем:

$a_i = P_i(\tau_{i-1}) = y_{i-1}$ для $i=\overline{1,k}$;

$b_i = P_i'(\tau_{i-1}) =$ для $i=\overline{1,k}$

$c_i = \frac{1}{2}P_i''(\tau_{i-1})$ для $i=\overline{1,k}$

Поэтому, согласно (3,4), $c_1 = 0$ и $a_1 = y_0$, то



$$\begin{cases} b_1 = \dfrac{y_1 - y_0}{\tau_1 - \tau_0} \\ a_1 = y_0 \\ c_1 = 0 \end{cases} \qquad (5)$$

Для полинома P_2 на $[\tau_2 - \tau_1]$ из (3-4) получаем:

$$\begin{cases} a_2 = y_1 = P_2(\tau_1) \\ b_2 = b_1 = P_2'(\tau_1) = P_1'(\tau_1); \\ \{y_2 = P_2(\tau_2) = a_2 + b_2(\tau_2 - \tau_1) + c_2(\tau_2 - \tau_1)^2\} \Rightarrow \\ c_2 = \dfrac{y_2 - a_2 - b_2(\tau_2 - \tau_1)}{(\tau_2 - \tau_1)^2} \end{cases} \qquad (6)$$

Для полинома P_3 на $[\tau_3; \tau_2]$ из (3-4) получаем:

$$\begin{cases} a_3 = y_2 = P_3(\tau_2) \qquad \{a_3 + b_3(\tau_3 - \tau_2) + c_3(\tau_3 - \tau_2)^2 \\ b_3 = P_3'(\tau_2) = b_2 + 2c_2(\tau_2 - \tau_1) \\ \{P_3(\tau_3) = a_3 + b_3(\tau_3 - \tau_2) + c_3(\tau_3 - \tau_2)^2 = y_3\} \\ \Rightarrow \cancel{b_3}\ c_3 = \dfrac{y_3 - a_3 - b_3(\tau_3 - \tau_2)}{(\tau_3 - \tau_2)^2} = \dfrac{y_3 - y_2 - (b_2 + 2c_2(\tau_2 - \tau_1))(\tau_3}{(\tau_3 - \tau_2)^2} \end{cases} \qquad (7)$$

⋮

Для полинома P_j на отр $[\tau_j - \tau_{j-1}]$ из (3-4) получаем:

$$\begin{cases} a_j = y_{j-1} = P_j(\tau_{j-1}) \\ b_j = b_{j-1} + 2c_{j-1}(\tau_{j-1} - \tau_{j-2}) = P_{j-1}'(\tau_{j-1}) \\ c_j = \dfrac{y_j - y_{j-1} - [b_{j-1} + 2c_{j-1}(\tau_{j-1} - \tau_{j-2})] \cdot (\tau_j - \tau_{j-1})}{(\tau_j - \tau_{j-1})^2} \end{cases} \qquad (4+j)$$

$$\begin{cases} a_k = y_{k-1} = P_k(\tau_{k-1}) \\ b_k = b_{k-1} + 2c_{k-1}(\tau_{k-1} - \tau_{k-2}) = P_{k-1}'(\tau_{k-1}) \\ c_k = \dfrac{y_k - y_{k-1} - [b_{k-1} + 2c_{k-1}(\tau_{k-1} - \tau_{k-2})](\tau_k - \tau_{k-1})}{(\tau_k - \tau_{k-1})^2} \end{cases} \qquad (4+k)$$

В пр-ве $Spl_2(A)$ A-сплайнов 2-й степени и дефекта 1 стандартный базис имеет вид:

(*) $\quad H = \{spl_2(A, \bar{e}_1) = h_0,\ spl_2(A, \bar{e}_2) = h_1, \ldots, spl_2(A, \bar{e}_{k+1}) = h_k\}$

где $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \ldots, \bar{e}_{k+1}$ — стандартный базис A-сеточного пр-ва $R^{(A)}(A)$ (см. рис.5)

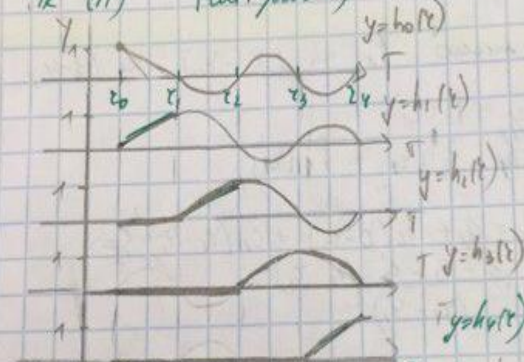


Рис.5.

Сл-но, $spl_2(A; \vec{y}) = \sum_{i=0}^{k} y_i \cdot spl_2(A, \bar{e}_{i+1}) = \sum_{i=0}^{k} y_i h_i \qquad (**)$

Пример 1

$A = \langle -1, 0, 1, 2 \rangle$, $\hat{A}(f) = [2, 1, 3, 4\rangle$

Найти $spl_2(A, \hat{A}(f))$ —

Решение: $\qquad P_i(\tau) = a_i + b_i(\tau - \tau_i) + c_i(\tau - \tau_i)^2$

$b_1 = \dfrac{y_1 - y_0}{\tau_1 - \tau_0} = \dfrac{-1}{1} = -1$

$a_1 = y_0 = 2$

$c_1 = 0$

$P_1(\tau) = 2 - (\tau + 1) =$

$a_2 = y_2 = 1$

$b_2 = b_1 = -1$

$$c_2 = \frac{y_2 - a_2 - b_2(x_2 - x_1)}{(x_2 - x_1)^2} = \frac{3 - 1 + 1(1)}{1} = 3$$

$$P_2 = 1 - (x-1) + 3(x-1)^2 = \cancel{2 - x + (x-1)^2}$$

$$1 - x + 3x^2$$

$a_3 = y_2 = 3$

$$b_3 = b_2 + 2c_2(x_2 - x_1) = -1 + 2 \cdot 3(1) = 5$$

$$c_3 = \frac{y_3 - a_3 - b_3(x_3 - x_2)}{(x_3 - x_2)^2} = \frac{4 - 3 - 5(2-1)}{1} =$$

$$= -4$$

$$\cancel{P_3 = 1 + (x-2) + (x-2)^2 = (-1+x) - (x-2)^2 =}$$

$$\cancel{= (x-1) + (x-2)^2}$$

$$P_3 = 3 + 5(x-1) - 4(x-1)^2$$

Проверка: $P(-1) = 2$, $P(0) = 1$, $P(1) = 3$, $P(2) = 4$

#

Лемма 3 (о корректности интерполирования непр. ф-ции)

Пусть $A = (A_n)_N$ - схема граничного правильных сеток $[a;b]$; $f \in C([a;b], \mathbb{R})$ и $\vec{f}^{(\cdot)} = (\hat{A}_n(f) = \vec{f}^{(n)})_N$ - $A_{(\cdot)}$-схема сеточных ф-ций. Тогда задача $A_{(\cdot)}$-интерполирования ф-ции f сплайнами 2-й степени и дефекта 1 - корректна, т.к. $\lim\limits_{k \to +\infty} spl_2(A_k, \hat{A}_k(f)) = f$ (аналит. коррект.) и задача устойчива. #

Замечание 4. (о вычислении произв. от гладкой ф-ции)

Пусть $A_{(\cdot)} = (A_k)_N$ - схема гран. прав. сеток $[a;b]$, ф-ция f - гладкая, $f \in C^1([a;b], \mathbb{R})$ и $\vec{f}^{(\cdot)} = (\hat{A}_k(f) = \vec{f}^{(k)})$ $A_{(\cdot)}$-схема сеточных ф-ций. Тогда для $k \in \mathbb{N}$ для производных f' предлагаем оценку

4 вида:

$$\varphi_k = spl_2(A_k, \hat{A}_k(spl_2(A_k; \vec{f}^{(k)}))).$$

Тогда $\lim\limits_{k \to +\infty} \varphi_k = f'$ (аналит-я корректность), но нет устойчивости для такого вычисл. f' в общем случае. #

15.4. Сплайны 3-й степени и дефекта 1

Пусть $A = \langle a = x_0, x_1, \dots, x_k = b \rangle$ - сетка $[a;b]$, $\vec{y} = [y_0, y_1, \dots, y_k] \in \vec{\mathbb{R}}^{|A|}(A)$. A-интерполяционный сплайн $\varphi = spl_3(A, \vec{y})$ степени 3 и дефекта 1 опред. списком полиномов $(P_1, P_2, \dots, P_k)$, степени не выше 3-ей, где P_i полином, определенный на отр. $[x_{i-1}, x_i]$ для $i = \overline{1,k}$ и имеющие вид:

$$P_i = a_i + b_i(x - x_{i-1}) + c_i(x - x_{i-1})^2 + d_i(x - x_{i-1})^3 \quad (***)$$

для $x \in [x_{i-1}, x_i]$

Кроме того, полиномы $P_1, P_2, \dots P_k$ удовл. условиям:

$$\begin{cases} 1)\ P_i(x_{i-1}) = y_{i-1}; \text{ для } i = \overline{1,k} \\ \quad P_k(x_k) = y_k; \\ 2)\ P_i'(x_i) = P_{i+1}'(x_i), \text{ для } i = \overline{1,k-1} \\ 3)\ P_i''(x_i) = P_{i+1}''(x_i), \text{ для } i = \overline{1,k-1} \\ 4)\ c_1 = c_k = 0 \end{cases} \quad (****)$$

(Условие однозначности сплайна) можно и другие

В этом банаховом пр-ве $Spl_3(A)$ A-интерп-х сплайнов 3-й степени и дефекта 1 можно выбрать стандартный базис $H = (h_0 = spl_3(A, \vec{e}_1), h_1 = spl_3(A, \vec{e}_2), \dots, h_k = spl_3(A, \vec{e}_{k+1}))$, где $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_k)$ - стандартный базис пр-ва сеточных ф-ций $\vec{\mathbb{R}}^{|A|}(A)$.

Очевидно, что $spl_3(A, \vec{y}) = \sum\limits_{i=0}^{k} y_i \, spl_3(A, \vec{e}_{i+1}) = \sum\limits_{i=0}^{k} y_i h_i$ (см. рисунок 6), т.е. $spl_3(A) \cong \vec{\mathbb{R}}^{|A|}(A)$

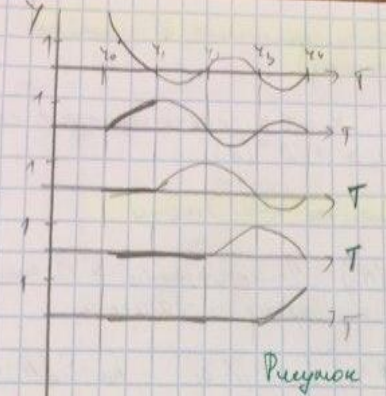


Рисунок 6.

Лемма 4. (о корректности сплайновой интерп.)

Пусть $A_{(\cdot)} = (A_k)_N$ – схема усиленно правильных стабильных сеток $[a;b]$, $f \in C([a;b], R)$ и $\vec{f}^{(\cdot)} = (\vec{f}^{(k)} = spl_3(A_k, \hat{A}_k(f)))_N$ – схема A-сеточных ф-й для f.

Тогда $\lim\limits_{k \to +\infty} spl_3(A_k, \hat{A}_k(f)) = f$, т.е. рассм-я задача A-интерполирования ф-ции f аналитически корректна. И, кроме того, устойчива, т.е. – корректна. #

Замечание 5 (о вычисл. произв.)

Пусть $f \in C^1([a;b], R)$. Тогда для вычисления произв. f' на $[a;b]$ с использованием сетки $A = \langle a = \tau_0, \tau_1, \ldots \tau_k = b \rangle$, можно использовать формулу: $f' \approx \varphi_A = spl_3(A, \hat{A}(spl_3'(A, \hat{A}_k(f))))$

Для задачи $A_{(\cdot)}$-интерполир. гладкой ф-ии f такая формула приведет к аналитич. корректному методу, который, к сожалению, неустойчив. #

16. Гладкие интерполяционные B-сплайны (Bell-колокол)

Пусть $A = \langle a = \tau_0, \tau_1, \ldots \tau_k = b \rangle$ – равномерная сетка $[a;b]$ и $\vec{y} = \langle y_0, y_1, \ldots y_k \rangle \in \vec{R}^{|A|}(A)$

16.1. Гладкие B-сплайны 2-ой степени

Банахово пр-во $Spl_2(A)$ A-интерполяц-х B-сплайнов 2-ой степени обладает стандартным базисом:

$$H = (h_0 = S_2(A, \vec{e}_1), h_2 = S_2(A, \vec{e}_2), \ldots, h_k = S_2(A, \vec{e}_{k+1})), \quad (1)$$

где $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots \vec{e}_k)$ – стандартный базис пр-ва $\vec{R}^{|A|}(A)$ и для $i = \overline{2, k-2}$ сплайн $h_i = S_2(A, \vec{e}_{i+1})$ имеет вид:

$$h_i(\tau) = \begin{cases} x^2, & x = \frac{\tau - \tau_{i-2}}{\tau_{i-1} - \tau_{i-2}}; \ \tau \in [\tau_{i-2}, \tau_{i-1}] \\ 1 + 2x - x^2, & x = \frac{\tau - \tau_{i-1}}{\tau_i - \tau_{i-1}}, \ \tau \in [\tau_{i-1}, \tau_i] \\ 2 - x^2, & x = \frac{\tau - \tau_i}{\tau_{i+1} - \tau_i}, \ \tau \in [\tau_i, \tau_{i+1}] \\ 1 - x^2, & x = \frac{\tau - \tau_{i+1}}{\tau_{i+2} - \tau_{i+1}}, \ \tau \in [\tau_{i+1}, \tau_{i+2}] \\ 0, & \tau \notin [\tau_{i-2}, \tau_{i+2}] \end{cases} \quad (2)$$

График сплайна $h_i(\tau)$ из формулы (2) показан на рис. 1.

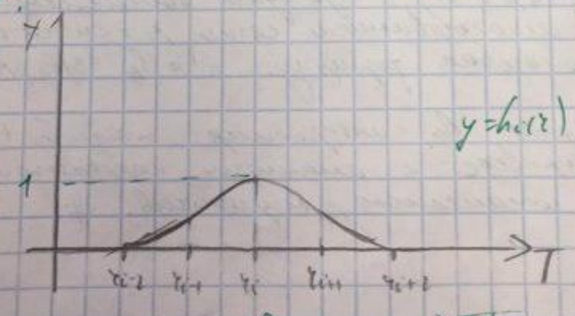
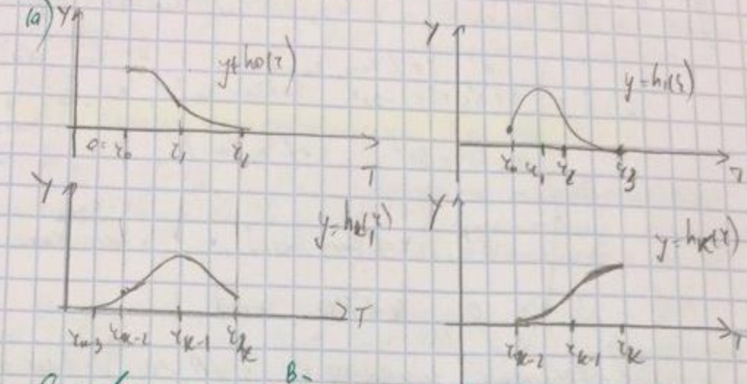


Рис. 1 $\quad i = \overline{2, k-2}$

Сплайны $h_0 = S_2(A, \vec{e}_1)$, $h_1 = S_2(A, \vec{e}_2)$, $h_{k-1} = S_2(A, \vec{e}_k)$ и $h_k = S_2(A, \vec{e}_{k+1})$ являются некоторой частью сплайнов рис. 1 и показаны на рис. 2.



Для вычисления B-сплайна $S_2(A, \vec{y})$ в виде $S_2(A, \vec{y}) = \sum_{i=0}^{k} x_i h_i = \sum_{i=0}^{k} x_i S_2(A, \vec{e}_{i+1})$,

где $\vec{x} = \langle x_0, x_1, \dots x_k \rangle \in \mathbb{R}^{|A|}(A)$ — неизвестные коэфф., необходимо решить СЛАУ с трехдиагон. матрицей

$$
\begin{cases}
x_0 h_0(\tau_0) + x_1 h_1(\tau_0) = y_0 \\
x_0 h_0(\tau_1) + x_1 h_1(\tau_1) + x_2 h_2(\tau_1) = y_1 \\
x_1 h_1(\tau_2) + x_2 h_2(\tau_2) + x_3 h_3(\tau_2) = y_2 \\
\dots \\
x_{k-2} h_{k-2}(\tau_{k-1}) + x_{k-1} h_{k-1}(\tau_{k-1}) + x_k h_k(\tau_{k-1}) = y_{k-1} \\
x_{k-1} h_{k-1}(\tau_k) + x_k h_k = y_k
\end{cases} \qquad (3)
$$

Найдем из СЛАУ (3) вектор $\vec{x} = \langle x_0, x_1, \dots x_k \rangle$, получаем B-сплайн $S_2(A, \vec{y}) = \sum_{i=0}^{k} x_i S_2(A, \vec{e}_{i+1})$

16.2. Гладкие B-сплайны 3-й степени

Аналогично пр-ву $Sp\ell_2^B(A)$ гладких B-сплайнов 2-ой степени строится пр-во $Sp\ell_3^B(A)$ дважды гладких B-сплайнов 3-ей степени с базисом:

$H = \{h_0 = S_3(A, \vec{e}_1), h_1 = S_3(A, \vec{e}_2), \dots h_k = S_3(A, \vec{e}_{k+1})\}$,

где $A = \langle a = \tau_0, \tau_1, \dots \tau_k = b \rangle$ — равномерная сетка $[a; b]$. Для $i = \overline{2, k-2}$ сплайн $h_i = S_3(A, \vec{e}_{i+1})$ имеет вид

$$
h_i(\tau) = \begin{cases}
x^3, & \tau \in [\tau_{k-2}, \tau_{k-1}], \quad x = \dfrac{\tau - \tau_{k-2}}{\tau_{k-2} - \tau_{k-1}} \\
1 + 3x + 3x^2 - 3x^3, & \tau \in [\tau_{k-1}, \tau_k], \quad x = -\dfrac{\tau - \tau_{k-1}}{\tau_{k-1} - \tau_k} \\
4 - 6x^2 + 3x^3, & \tau \in [\tau_k, \tau_{k+1}], \quad x = -\dfrac{\tau - \tau_{k+1}}{\tau_k - \tau_{k+1}} \\
x^3, & \tau \in [\tau_{k+1}, \tau_{k+2}], \quad x = -\dfrac{\tau - \tau_{k+2}}{\tau_{k+1} - \tau_{k+2}} \\
0, & \tau \notin [\tau_{k-2}, \tau_{k+2}]
\end{cases}
$$

Вид базисного сплайна $h_i = S_2(A; \vec{e}_{i+1})$ для $i = \overline{2, k-2}$ аналогичен виду графика на рис. 1, графики $h_0 = S_3(A, \vec{e}_1)$, h_1, h_{k-1}, h_k — аналогичны графикам сплайнов на рис. 2.

Вычисление сплайна $S_3(A, \vec{y})$ для $\vec{y} \in \mathbb{R}^{|A|}(A)$ осуществляется с помощью СЛАУ аналогичной СЛАУ (3)

Замечание 1

а) Для B-сплайнов можно использовать и неравномерные граничные правильные сетки, что позволяет формула (4)

б) Задача интерполирования с помощью B-сплайнов гладкой на $[a; b]$ ф-ции — корректна.

в) Для вычисления 1-ой и 2-ой произв. ф-ции $f \in C^2([a; b], \mathbb{R})$ как и ранее можно использовать B-сплайны 3-й степени.

17. Задача аппроксимации и аппроксимирования в банаховых (функциональных) пр-вах

Пусть $Y_0 = (Y_0; \|\cdot\|)$ – банахово пр-во и $X \overset{a}{\leq} Y_0$ – его линейное подпр-во, т.е. $X = (X, \|\cdot\|)$ – линейное многообразие в Y_0.

17.1. Задача аппроксимации в пр-ве X

Пусть $H = (h_1, \dots h_n)$ – линейно независимая система в пр-ве Y_0 и $[H] = Y_n$ – линейная оболочка системы H, т.е. $[H]$ – подпр-во в банаховом пр-ве Y_0.

Кроме того, задано табличное пр-во $V_0 = \vec{\mathbb{R}}^m$, где $m \geq k$ и отображ-е $\Pi_0 \in Hom_c(Y_0, V_0)$, являющееся ограниченным гомоморфизмом ($Hom(Y_0, V_0)$ – линейное пр-во гомоморфизмов из банахова пр-ва Y_0 в банахово пр-во V_0, $Hom_c(Y_0, V_0)$ – банахово пр-во ограниченных, т.е. непрерывных, гомоморфизмов из Y_0 в V_0 с подчинённой нормой (если $f \in Hom_c(Y_0, V_0)$, то $\|f\| = \sup\{\|f(y_0)\| ; y_0 \in Y_0, \|y_0\| = 1\}$
$\Rightarrow \|f(y)\| \leq \|f\| \cdot \|y\|$ для $\forall y \in Y_0$))

Отображение $\Pi_0 \in Hom_c(Y_0, V_0)$ эпиморфизм наз-ют **табулящей** пр-ва Y_0.

Пример 1

Пусть $Y_0 = B([a;b], \mathbb{R})$ – банахово пр-во ограниченных на отр. $[a;b]$ ф-ций, $A = \langle \theta_1, \theta_2, \dots \theta_n \rangle$ – центрально равном. сетка $[a;b]$ и $V_0 = \vec{\mathbb{R}}^{|A|}(A)$.

Тогда сеточное отображение $\hat{A} \in Hom_c(Y_0, V_0)$ – табулящей пр-ва Y_0 и $\|\hat{A}\| = 1$

Такую табуляцию будем называть **A-сеточной табуляцией** пр-ва Y_0. #

Пусть $\Pi_0 \in Hom_c(Y_0, U_0 = \vec{\mathbb{R}}^m)$ – табуляция пр-ва Y_0 и $X_0 = (X_0, \|\cdot\|_0) = (\vec{\mathbb{R}}^k, \|\cdot\|_0)$ – арифметическое пр-во координат в базисе H элементов пр-ва $[H] \overset{a}{\leq} Y_0$, где для $y = \sum_{i=1}^{k} x_i h_i$ следует, что $\vec{x} \in \langle x_0, x_1, \dots x_k \rangle \in X_0$, и $\|\vec{x}\|_0 = \|y\|$ ($\|y\|$ – норма в Y_0)

Задан эпиморфизм $C_0 \in Hom(V_0, X_0)$. Поэтому для $\vec{x}_0 \in X_0$ определен базисный изоморфизм $\hat{H} \in Hom(X_0, [H])$, для которого $\hat{H}(\vec{x}_0) = \sum_{i=1}^{k} x_i h_i$, где $\vec{x}_0 = \langle x_1, x_2, \dots x_k \rangle \in X_0$.

Св-то, $\hat{H}^{-1} : [H] \to X_0$ – **изометричный изоморфизм**, для которого $\|\hat{H}^{-1}(\sum_{i=1}^{k} x_i h_i)\| = \|\vec{x}_0\|_0$

Благодаря гомомορф. $\Pi_0 \in Hom_c(Y_0, V_0 = \vec{\mathbb{R}}^n)$, $C_0 \in Hom(V_0, X_0)$ и $\hat{H} \in Hom(X_0, [H])$ ($[H] \overset{a}{\underset{m}{\leq}} Y_0$)

Получаем гомоморфизм $\hat{p}_0 = \hat{H} \circ C_0 \circ \Pi_0 \in Hom_c(Y_0, [H])$, кот. иллюстрирует ~~диаграм~~ коммутативная диаграмма, показанная на рис. 1.

$$
\begin{tikzcd}
(Y_0, \|\cdot\|) = Y_0 \arrow[d, "\Pi_0"] \arrow[ddr, "\hat{p}_0"] & \\
\vec{\mathbb{R}}^n = V_0 \arrow[d, "C_0"] & \\
(\mathbb{R}^k, \|\cdot\|) = X_0 \arrow[r, shift left, "\hat{H}"] & {[H]} \overset{a}{\underset{m}{\leq}} Y_0 \arrow[l, shift left, "\hat{H}^{-1}"]
\end{tikzcd}
$$

$\hat{p}_0$ отображ.

$\underline{\{k \leq n\}!!!}$

Для $y_0 \in Y_0$
$\hat{p}(y_0) = \hat{H} \circ C_0 \circ \Pi_0(y_0) =$
$= \hat{H}(C_0(\Pi_0(y)))$

Рис. 1.

Пример 2

$(X = C([a;b], \mathbb{R}))$

а) $Y_0 = B([a;b], \mathbb{R})$ – чебышевское банахово пр-во огранич. на $[a;b]$ $\mathbb{R}$-ф-ций.

$H = \langle \theta_1, \theta_2, \dots \theta_n \rangle$ – центрально рав-я сетка $[a;b]$, $V_0 = \vec{\mathbb{R}}^n$ и $\Pi_0 = \hat{A}$ – A – сеточное отобр-е Y_0 в V_0, т.е. $\Pi_0(y) = \hat{A}(y) = \langle y_1, y_2, \dots y_n \rangle \in \vec{\mathbb{R}}^{|A|}(A)$ $\{U_0 = \vec{\mathbb{R}}^{|A|}(A)\}$

Пусть $H = \langle spl_0(A, \vec{e}_1) = h_1, spl_0(A, \vec{e}_2) = h_2, \dots spl_0(A, \vec{e}_n) = h_n \rangle$ – стандартной базис чебышевского пространства сплайнов нулевой степени. и $\hat{H}^{-1}(y_0 = \sum_{i=1}^{k} x_i h_i)_n = \vec{x}_0 = \langle x_1, x_2, \dots x_n \rangle \in X_0 = (\vec{\mathbb{R}}^n, \|\cdot\|_0)$ для $y_0 = \sum_{i=1}^{k} x_i h_i \in [H]$ и $\|y_0\| = \|\vec{x}_0\|_0$

Кроме того, для $y \in Y_0$ и $\hat{A}(y) = \Pi_0(y) = \langle y_1, y_2, \dots y_n \rangle = \vec{u}_0 \in V_0 = \vec{\mathbb{R}}^n$ полагаем, что $C_0(\vec{u}_0) = \vec{u}_0 = \langle y_1, y_2, \dots y_n \rangle \in X_0$ (см. рис. 2)

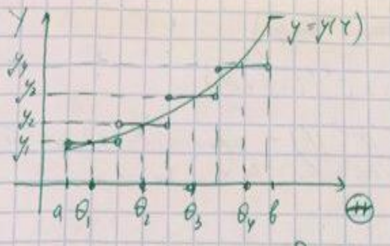


Рис. 2.

C_0 - "тождеств. отобр."

$\left\{ \|u_0\| = \|C_0(u_0)\| \right\}$

Π_0 - табуляция,
C_0 - координация
$\hat{H}$ - изометричный гомоморфизм, $\hat{p} = \hat{H} \circ C_0 \circ \Pi_0$ - аппроксимация $X = C([a,b],\mathbb{R})$ }

$$\hat{p}_0(y) = \sum_{i=1}^{k} y_i \, sp\, \ell_0(A, \vec{e}_i), \text{ где } (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots \vec{e}_n) \text{ - стандартный базис } \mathbb{R}^n \overset{\mathcal{A}}{=} \mathbb{R}^{|A|}(A)$$

Опр. 1 (аппроксимации ~~банахова~~ сепарабельного ~~подпр~~-ва)

Эпиморфизм $\Pi_0 \in Hom_c(Y_0, U_0 = \mathbb{R}^n)$ - табуляция ~~банахова пр-ва~~ линейного пространства $Y_0 = (Y_0, H)$, $X \overset{\mathcal{A}}{\underset{m}{\subseteq}} Y_0$ - банахово подпр-во в Y_0, $H = \langle h_1, h_2, \ldots h_k \rangle$ - линейно независ. система эл-тов в Y_0 и $k \le n$, $X_0 = (\mathbb{R}^k, \|\cdot\|)$ - координатное пр-во для координат векторов в базисе H, где для $\vec{x}_0 = \langle x_1, x_2, \ldots x_k \rangle \in X_0$ следует: $\|\sum_{i=1}^{k} x_i h_i\| = \|\vec{x}_0\|_0$, и $\hat{A}(\vec{x}_0) = \sum_{i=1}^{k} x_i h_i$ ($\hat{A} \in Hom(X_0, [H])$ - изометричный изоморфизм)

Пусть $\vec{u}_0 = \langle u_1, u_2, \ldots u_n \rangle = \Pi_0(y) \in U_0 = \mathbb{R}^n$ для $y \in Y_0$.
~~Для~~ и $C_0 \in Hom(U_0, X_0)$ - гомоморфизм, определяющийся следующим образом. Для вычисления координатного вектора $\vec{x}_0 = \langle x_1, x_2 \ldots x_k \rangle = C_0(\vec{u}_0)$

Необходимо найти МНК-решение СЛАУ.

$$\vec{u}_0 = \Pi_0\left(\sum_{i=1}^{k} x_i h_i\right) = \Pi_0(y) = \sum_{i=1}^{k} x_i \Pi_0(h_i), \quad (1)$$

где предполагается, что известны значения эпиморфизма Π_0 на эл-тах $h_1, h_2, \ldots h_k$ из базиса $H = (h_1, h_2, \ldots h_k)$

Таким образом, определен эпиморфизм $C_0 \in Hom(U_0, X_0)$.
Тогда гомоморфизм $\hat{p}_0 = \hat{H} \circ C_0 \circ \Pi_0 \in Hom_c(Y_0, [H])$ называют (C_0, Π_0) - аппроксимацией пр-ва X.
Оч-но если $x \in X$, то $\hat{p}_0(x) \in [H] \overset{\mathcal{A}}{\underset{m}{\subseteq}} Y_0$ - аппроксимация эл-та $x \in X$ в пр-ве Y_0.

Пример 3. (полиномиальн. аппр.)

Y_0 - банахово пр-во, $X = C^1([a;b],\mathbb{R})$, $= C([a,b],\mathbb{R})$

$H = (1, t, t^2, \ldots t^k)$, $\vec{U}_0 = \mathbb{R}^{|A|}(A)$ - чебышевское пр-во A-сеточных ф-ций с сеткой $A = \langle t_0, t_1, \ldots t_{k-1} \rangle$,
$\Pi_0 = \hat{A}$

Пусть $y \in Y_0$ и $\Pi_0(y) = \vec{u}_0 = \langle u_1, u_2, \ldots u_n \rangle = \hat{A}(y)$.
В пр-ве $[H]$ - полиномов на $[a;b]$ степени не выше $(n-1)$ найдем полином $q = x_1 + x_2 t + \ldots + x_k t^{k-1} \in [H]$, где вектор $\vec{x}_0 = \langle x_1, x_2 \ldots x_n \rangle \in X_0$ - ~~вектор~~ таков, что ($\|x_0\|_0 = \|q\|$) вектор $\vec{x}_0$ явл-ся МНК-решением СЛАУ:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 t_0 + x_3 t_0^2 + \ldots x_k t_0^{k-1} = u_1 \\ x_1 + x_2 t_1 + x_3 t_1^2 + \ldots + x_k t_1^{k-1} = u_2 \\ \ldots \\ x_1 + x_2 t_{k-1} + x_3 t_{k-1}^2 + \ldots + x_k t_{k-1}^{k-1} = u_n \end{cases} \Leftrightarrow \quad (2) \quad (\text{см. (1)})$$

$\Leftrightarrow B \cdot \vec{x}_0 = u_0 \Rightarrow C_0(\vec{u}_0) = \vec{x}_0$,

$$\text{где } B = \begin{pmatrix} 1 & t_0 & \ldots & t_0^{k-1} \\ \vdots & & & \\ 1 & t_{n-1} & \ldots & t_{n-1}^{k-1} \end{pmatrix} \in L(\mathbb{R}, k, n) \} \; k \le n \}$$

$\vec{u}_0 = \langle u_1, u_2 \ldots u_n \rangle$

Поскольку $rg(B) = k$ из (2) следует, что $x_0 = {}^{+}B \cdot B \cdot \vec{u}_0$ - МНК-решение СЛАУ (2)

Таким образом, найдем полином $q = x_1 + x_2 t + \ldots + x_k t^{k-1} = \hat{H}(\vec{x}_0) = \hat{H} \circ C_0(\vec{u}_0) = \hat{H} \circ C_0 \circ \Pi_0(y)$ явл-ся аппроксимацией ф-ции $y \in Y_0$

Аналогично, $\hat{p}_0(x) = \hat{H} \circ C_0 \circ \Pi_0(x)$ - аппр-я ф-ции $x \in X = C^1([a;b],\mathbb{R})$

Если $k = n$, то $\hat{p}_0(x)$ - A-интерполяц. полином Лагранжа для ф-ции $\Pi_0(x) = \hat{A}(x) \in \mathbb{R}^{|A|}(A)$. (см. (2))

П.2. Полипространства, политабличные пр-ва и полигомоморфизмы

Опр-е 2 (табличного гомоморф.)

Пусть $\underline{B} \in L(\mathbb{R}, m, n)$. Тогда $\vec{B} \in Hom(\vec{\mathbb{R}}^n, \vec{\mathbb{R}}^m)$ – табличный гомоморфизм, для кот. $\vec{B}(\vec{x}) = \underline{B} \cdot \vec{x}$, если $\vec{x} \in \vec{\mathbb{R}}^n$ #

Рассм. посл-ть $V_{(\cdot)} = (V_k = (V_k, \|\cdot\|_k))_{\mathbb{N}}$ – нормированных простр-в

Опр. 3 (полипрост-ва)

В линейном пр-ве $\prod_{k \in \mathbb{N}} V_k = \{ v_{(\cdot)} = (v_k)_{\mathbb{N}} : \forall k \in \mathbb{N} \Rightarrow v_k \in V_k \}$ – последовательностей типа $V_{(\cdot)}$ введем псевдонорму $\|\cdot\|_x$ в виде:

$$\|v_{(\cdot)}\|_x = \overline{\lim_{k \to +\infty}} \|v_k\|_k, \text{ если } v_{(\cdot)} \in \prod_{k \in \mathbb{N}} V_k$$

Линейное пр-во $\prod_{k \in \mathbb{N}} v_k$, где введена такая псевдонорма наз-ся полипространством и для него исп. обозначение: $\times\prod_{k \in \mathbb{N}} V_k$

Если V_k ~~...~~ – конечномерное банахово арифметическое пр-во $\forall k \in \mathbb{N}$, то полипр-во $\times\prod_{k \in \mathbb{N}} V_k$ наз-ют поли-табличным пр-вом типа $n_{(\cdot)} = (n_k)_{\mathbb{N}}$, если размерность $\dim V_k = n_k \in \mathbb{N}$, т.е. $V_k = (\vec{\mathbb{R}}^{n_k}, \|\cdot\|_{(k)})$ для $k \in \mathbb{N}$

Пусть $V_k = Y_{\circ} := (Y, \|\cdot\|)$ – нормиров. пр-во. для $\forall k \in \mathbb{N}$

Тогда полипр-во $\times\prod_{k \in \mathbb{N}} V_k = Y^{\times\mathbb{N}}$ наз-ют поли-степенью пр-ва Y

Кроме того, если $y \in Y$, то послед-ть $const_{\mathbb{N}}(y) = (y_k = y)_{\mathbb{N}} \in Y^{\mathbb{N}}$, то пр-во наз-ют y-константным и нормиров. пр-во $Const_{\mathbb{N}}(Y) = \{ const_{\mathbb{N}}(y) : y \in Y \} \underset{M}{\subset} Y^{\times\mathbb{N}}$ наз-ся пр-вом Y-константных последовательностей

Очевидно, что $Const_{\mathbb{N}}(Y) \overset{g}{\underset{M}{\cong}} Y$, т.к. $\|const_{\mathbb{N}}(y)\| = \|y\|$ для $\forall y \in Y$. #

Пример 4.

Пусть $V_k = \underline{\mathbb{R}}$ для $\forall k \in \mathbb{N}$, т.е. $\times\prod_{k \in \mathbb{N}} V_k = \underline{\mathbb{R}}^{\times\mathbb{N}}$ – политабличная полистепень чебышевского пр-ва $\mathbb{R}$.

Пусть $a_{(\cdot)}, b_{(\cdot)} \in \underline{\mathbb{R}}^{\times\mathbb{N}}$ – такие пос-ти, что $\exists \lim_{k \to +\infty} a_k = a$, $\exists \lim_{k \to +\infty} b_k = b$ и $a = b$.

Тогда для псевдо-нормы $\|\cdot\|_x$ в поли-степени $\mathbb{R}^{\times\mathbb{N}}$ получаем: $\|a_{(\cdot)}\| = \|b_{(\cdot)}\|$ и $\|a_{(\cdot)} - b_{(\cdot)}\| = 0$ даже в том случае, когда $a_{(\cdot)} \neq b_{(\cdot)}$

Опр-е 4 (полигомоморфизм и политабл. гомом.)

Пусть $\times\prod_{k \in \mathbb{N}} V_k$ и $\times\prod_{k \in \mathbb{N}} W_k$ – два полипр-ва и для $\forall k \in \mathbb{N}$ задан гомоморфизм $F_k \in Hom_c(V_k, W_k)$ с подчиненной нормой $\|F_k\|$

Тогда определен полигомоморфизм $\times\prod_{k \in \mathbb{N}} F_k \in Hom(V, W)$, для кот. $F(v_{(\cdot)}) = (F_k(v_k))_{\mathbb{N}}$, если $v_{(\cdot)} \in V \leftrightharpoons \times\prod_{k \in \mathbb{N}} V_k$ и $\|F\| = \overline{\lim_{k \to +\infty}} \|F_k\|$

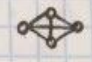
Поэтому далее в линейном пр-ве $Hom(V, W)$ введена псевдо-норма, что „превращает" это пр-во в полипр-во для кот. исп. обозначение: $\times Hom(V, W) = \times Hom(\prod_{k \in \mathbb{N}} V_k, \prod_{k \in \mathbb{N}} W_k)$

Пусть $V = \times\prod_{k \in \mathbb{N}} V_k$ и $\times\prod_{k \in \mathbb{N}} = W_k$ – политабличные пр-ва типов $n_{(\cdot)} = (n_k)_{\mathbb{N}}$ и $m_{(\cdot)} = (m_k)_{\mathbb{N}}$ и $\forall k \in \mathbb{N}$ задана матрица $\underline{B}_k \in L(\mathbb{R}, n_k, m_k)$, индуцируемая табличный линейный гомоморфизм $\vec{B}_k \in Hom(V_k, W_k)$

Тогда полигомоморфизм $\hat{\underline{B}_k} = \times\prod_{k \in \mathbb{N}} \vec{B}_k \in \times Hom(V, W)$ наз-ют политабличным гомоморф. с полиматрицей $\underline{B} = \prod_{k \in \mathbb{N}} \underline{B}_k \in L(\mathbb{R}, n_{(\cdot)}, m_{(\cdot)})$ вида

$$\begin{pmatrix} \boxed{B_1} & 0 & & 0 \\ 0 & \boxed{B_2} & \ddots & \vdots \\ & & \boxed{B_3} & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & \ddots \end{pmatrix}$$ В-матрица типа $(n_{(\cdot)}, m_{(\cdot)})$

#



Пример 5.

а) Пусть $A_{(\cdot)}=(A_k)_N$ — схема центрально-равномерных сеток $[a;b]$ и $Y_0 = C([a;b],\mathbb{R})$ и $\hat F\in Hom(Y_0,\mathbb{R})$ — гомоморфизм, для кот. $\hat F(y)=\int_a^b y(\tau)d\tau$, т.е. $\hat F\in Y_0^*$ — линейный непр-ый функционал (Y_0^* — сопрят. к Y_0 пр-во) и $\|\hat F\| = b-a$.

Для $\forall k\in\mathbb{N}$ расм. чебышевское пр-во $Spl_0(A_k)$ с базисом $H_k = (h_1 = spl_0(A_k, e_1), \dots h_{|A_k|} = spl_0(A_k, e_{|A_k|}))$

~~Нахождение~~ Используя сетку A_k создадим апроксимацию ф-ции $y_0\in Y_0$ в виде: $p_k(y_0) = spl_0(A_k, \hat A_k(y_0))$, где $p_k = \hat H_k\circ \hat A_k \in Hom_c(Y_0, spl_0(A_k))$ — апр-цией пр-ва Y_0 для $\forall k\in N$

Значение $\hat F(y_0) = \int_a^b y_0(\tau)d\tau$ вычислим приближенно для $\forall k\in N$ в виде: $\hat F(p_k(y_0)) = \sum_{j=1}^{|A_k|} y_0(\tau_j)\cdot stp(A_k) =$

$= stp(A_k)\cdot \hat A(y_0)\cdot\langle 1,1,\dots 1]$, где $F_{(k)} = stp(A_k)\langle 1,1,\dots,1]\in L(\mathbb{R}, |A_k|, 1)$

и $\|F_{(k)}\| = b-a$ $\{stp(A_k) = \frac{b-a}{k}\}$

Приближ. выч-е зн-я $\hat F(y_0)=\int_a^b y_0(\tau)d\tau$ можно представить диаграммой гомоморфизмов, показ. на рис. 1.

$$\begin{tikzcd}
Y_0 \arrow[r, "\hat F"] \arrow[d, "\hat\pi_k = \hat A_k"'] & \mathbb{R} & & \mathbb{R} \arrow[lll, "id_{\mathbb{R}}"'] \\
U_k = {}^{?}\mathbb{R}^{|A_k|}(A_k) \arrow[rrru, "\hat F_{(k)}"] \arrow[r, "\hat H_k"] & Spl_0(A_k) \arrow[rr, "\hat F|_{Y_k} = F_k"] & & \mathbb{R} \arrow[u, "id_{\mathbb{R}}"'] \\
 & Y_k = [H_k] \arrow[u, phantom, "\parallel"] & &
\end{tikzcd}$$

Рис. 1

Очевидно, что $\lim_{k\to+\infty} p_k(y_0) = y_0$, и, след-но,

$\lim_{k\to+\infty}\hat F_k(p_k(y_0)) = \hat F(y_0)$ $\forall y_0\in Y_0$, как и

$\lim_{k\to+\infty} F_{(k)}\cdot\hat A_k(y_0) = \hat F(y_0)$

Таким образом определен компактоморфизм $\times\prod_{k\in N}\hat F|_{Y_k} \in \times Hom_c(\times\prod_{k\in N} Y_k, \mathbb{R}^{\times N})$ $\{Y_k = [H_k]$ для $k\in N\}$

и компактабличный гомоморфизм $\prod_{k\in N} F_{(k)} \in\times Hom_c(\times\prod_{k\in N}{}^{?}\mathbb{R}^{|A_k|}(A_k), \mathbb{R}^{\times N})$

Кроме того, определены компактоморфизмы

$\hat A_{(\cdot)} = \times\prod_{k\in N}\hat A_k \in Hom_c(Y_0^{\times N}, \prod_{k\in N}{}^{?}\mathbb{R}^{|A_k|}(A_k))$ и

$\hat p = \times\prod_{k\in N}\hat p_k\in\times Hom_c(Y_0^{\times N}, \times\prod_{k\in N} Y_k)$ и

$\hat H_{(\cdot)} = \times\prod_{k\in N}\hat H_k\in Hom_c(\times\prod_{k\in N}{}^{?}\mathbb{R}^{|A_k|}(A_k), \prod_{k\in Y_k} Y_k)$.

Очевидно, что $\hat p = \hat H_{(\cdot)}\circ\hat A_{(\cdot)}$. Также $\|\hat A_{(\cdot)}\|=1$

$\|A_{(\cdot)}\|=1$, $\|\times\prod_{k\in N}\hat F|_{Y_k}\| = b-a$ и $\|\times\prod_{k\in N} F_{(k)}\| = b-a$

Расм. Y_0 — константное пр-во $Const_N(Y_0) = \{const_N(y_0): y_0\in Y_0\}$

Пусть $Y_{00} = \hat p(Const_N(Y_0)) = \{\hat p(const_N(y_0)): y_0\in Y_0\} =$

$= \{(\hat p_1(y_0), \hat p_2(y_0), \dots): y_0\in Y_0\}$

Тогда отображ-е ~~$\hat p|Const_N(Y_0)\in$~~ $\varphi\in Hom_c(Y_0, Y_{00})$, для кот. $\varphi(y_0) = \hat p(const_N(y_0))$ — изометричный изоморфизм.

Т.к. $\lim_{k\to+\infty}\hat p_k(y_0)=y_0$, т.е. $\|y_0\| = \|\hat p(y_0)\|$

Аналогично, отображ. $\psi\in Hom_c(Y_0, \times\prod_{k\in N}{}^{?}\mathbb{R}^{|A_k|}(A_k))$,

для кот. $\psi(y_0) = \hat A(y_0) = (\hat A_k(y_0))_N$ для $y_0\in Y_0$ — изометричный изоморфизм, т.к. $\|y_0\| = \|\hat A(y_0)\|$

#

17.3. Аппроксимирование линейного многообразия в банаховом пр-ве.

Замечание 1.

Не ограничивая общности, далее в кач-ве банахова пр-ва будем рассм-ть различные банаховы подпр-ва в пр-ве $B([a;b], \mathbb{R})$ - ограниченных на $[a;b]$ ф-ций. Кроме того, в кач-ве табуляций будем рассм. только сеточные табуляции. #

Пусть $Y_0 = (Y_0, \|\cdot\|)$ - банахово подпр-во в пр-ве огранич. ф-ций в пр-ве $B([a;b], \mathbb{R})$ и $X_0 \subseteq Y_0$ - линейное сепарабельное многообразие в пр-ве Y_0.

Кроме того, задана посл-ть $H_{(\cdot)} = (H_k)_N$ - ЛНЕЗ конечномерных систем (базисов) в пр-ве Y_0, где $Y_k = [H_k]$ - линейная оболочка (конечномерное подпр-во в Y_0 для $\forall k \in \mathbb{N}$) $Y_k \overset{\circ}{\underset{m}{\subseteq}} Y_0$

Опр-е 5 (базы аппроксимирования линейного многообр.)

Посл-ть $H_{(\cdot)}$ наз-ся базой аппроксим-ния линейного многообразия X_0, если замыкание мн-ва $\bigcup\limits_{k \in \mathbb{N}} [H_k]$ содержит X_0, т.е. $\forall x \in X_0$ есть посл-ть $y_{(\cdot)} = (y_k \in [H_k] = Y_k)_N$, сходящаяся в Y_0 к эл-ту x_0, т.е. $\lim\limits_{k \to +\infty} y_k = x_0$

Пример 6 (базы аппрокс-я)

Пусть $X_0 = C([a;b], \mathbb{R})$, $A_{(\cdot)} = (A_k)_N$ - схема равном. сеток $[a;b]$ и $H_k = (spl_0(A_k, \vec{e}_1), spl_0(A_k, \vec{e}_2), \dots, spl_0(A_k, \vec{e}_{|A_k|}))$ - стандартный базис пр-ва $Spl_0(A_k) \overset{\circ}{\underset{m}{\subseteq}} Y_0 = B([a;b], \mathbb{R})$.

Тогда $H_{(\cdot)} = (H_k)_N$ - база аппроксим. для X_0 #

Пусть $A_{(\cdot)} = (A_k)_N$ - схема гранично правильных сеток отрезка $[a;b]$ и $\hat{A}_k \in Hom_c(Y_0, {}^{>}\mathbb{R}^{|A_k|}(A_k) \doteq U_k)$ - A_k-сеточная табуляция пр-ва Y_0 для $\forall k \in \mathbb{N}$. Тогда $A_{(\cdot)} = \times\prod\limits_{k \in \mathbb{N}} \hat{A}_k \in \times Hom_c(Y_0^{\times \mathbb{N}}, \times\prod\limits_{k \in \mathbb{N}} U_k)$ - ($A_{(\cdot)}$-сеточное) табулирование пр-ва Y_0. $(\|\hat{A}_k\| = 1)$

Кроме того, для каждой табуляции $\hat{A}_k \in Hom_c(Y_0, U_k)$ задано H_k-координирование $\hat{C}_k \in Hom(U_k, X_k)$ в виде C_k-табличного гомоморфизма в пр-во $X_k = ({}^{>}\mathbb{R}^{|H_k|}, \|\cdot\|)$ + координат векторов из пр-ва $Y_k = [H_k]$ в базисе H_k. (если ${}^{>}x_k \in X_k$, то $\|{}^{>}x_k\| = \|\hat{H}({}^{>}x_k)\|$)

Предполагается, что $\forall k \in \mathbb{N}$ вып-ся усл-е: $\|A_k\| \geq |H_k|$

Опр-е 6 (аппроксим-е сепарабельного лин. многообраз.)

Пусть для каждого $k \in \mathbb{N}$ введем гомоморфизм $\hat{p}_k = \hat{H}_k \circ \hat{C}_k \circ \hat{A}_k \in Hom(Y_0, Y_k = [H_k])$.

Тогда нап-гомоморфизм $\hat{p} = \times\prod\limits_{k \in \mathbb{N}} \hat{p}_k \in \times Hom(Y_0^{\times \mathbb{N}}, \times\prod\limits_{k \in \mathbb{N}} Y_k = Y)$ наз-ся аппроксимацией линейного многообр. X_0.

Аппр-е $\hat{p}$ наз-ся сходящимся, если $\forall x_0 \in X_0$ следует, что $\exists \lim\limits_{k \to +\infty} \hat{p}_k(x_0)$

Сходящееся аппр-е $\hat{p}$ наз-ся аналитич. корректным, если $\lim\limits_{k \to +\infty} \hat{p}_k(x_0) = x_0 \quad \forall x_0 \in X_0$

Аналитически корректное аппр-е наз-ся корректным, если оно устойчиво, т.е. $\|\hat{p}\| < +\infty$. #

18. Табулирование линейных операторов в функциональном банаховом пр-ве

Замечание 1 (о банаховом пр-ве непрер. слева огран-х ф-ий на отрезке)

а) В банаховом пр-ве $B([a;b],\mathbb{R})$ – огр-х на $[a;b]$ ф-ий рассмотрим линейное многообразие $\underline{K}([a;b],\mathbb{R})$ – кусочно постоянных и непрерывных слева (в правом конце отр. $[a;b]$ – справа) на $[a;b]$ ф-ций. Метрическое пополнение (непр-х слева) многообразия $K([a;b],\mathbb{R})$ будет подпр-вом $\underline{B}_0([a;b],\mathbb{R}) \underset{m}{\subseteq} B([a;b],\mathbb{R})$ непр-х слева на $[a;b]$ ф-ций, т.е. $\underline{B}_0([a;b],\mathbb{R})$ – $\exists$ банахово пр-во, для которого далее используется обозначение $\underline{B}_0([a;b],\mathbb{R}) = Y_0 = (Y_0, \|\cdot\|)$.

Пусть $A_{(\cdot)} = (A_k)_{\mathbb{N}}$ – схема сеток $[a;b]$ и $\hat{A} = {}^{\times}\prod_{k\in\mathbb{N}} \hat{A}_k \in {}^{\times}Hom_c(Y_0^{\times\mathbb{N}}, \underline{V})$ – табулирование пр-ва Y_0, где $\underline{V} = {}^{\times}\prod_{k\in\mathbb{N}} \underline{V}(k)$ – поли-табличное пр-во и $V_{(k)} \overset{?}{=} \mathbb{R}^{|A_k|}(A_k)$ – пр-во A_k-сеточных ф-ций. Тогда гомоморфизм

$\hat{A}|_{const_{\mathbb{N}}}(Y_0) \in {}^{\times}Hom_c(Const_{\mathbb{N}}(Y_0), \underline{V})$ – явл-ся изометричным мономорфизмом, т.к. $\|\hat{\Pi}(const_{\mathbb{N}}(y_0))\| = \|y_0\|$ для $\forall y_0 \in Y_0$

т.е. пр-ва Y_0 и $\hat{\Pi}(Const_{\mathbb{N}}(y_0))$ – изометрично изоморфны

$\left\{ \text{Если } {}^{?}\underline{u}_{(\cdot)} = ({}^{?}u_{(k)} \in {}^{?}\mathbb{R}^{|A_k|}(A_k) = U_{(k)}) \in \underline{V}, \text{ то } \|{}^{?}\underline{u}_{(\cdot)}\| = \overline{\lim_{k\to+\infty}} \|{}^{?}u_{(k)}\|. \right\}$

б) Далее рассматриваются линейные многообразия только в банаховом пр-ве $Y_0 = \underline{B}_0([a;b],\mathbb{R})$.

Пусть $\hat{F}$ – линейный оператор в пр-ве Y_0, т.е. $D(\hat{F}) \overset{a}{\underset{m}{\subseteq}} Y_0$ – линейное многообразие в Y_0 и {$D(\hat{F})$ – мн-во определения $\hat{F}$} и $E(\hat{F}) \overset{m}{\underset{a}{\subseteq}} Y_0$ –

$E(\hat{F}) = \{\hat{F}(x_0) : x_0 \in X_0 \in D(\hat{F})\}$ – мн-во значений линейного оператора $\hat{F}$, т.е. $\hat{F}|_{X_0} \in End(Y_0)$ эндоморфизм.

Далее $Z_0 = E(\hat{F}) \overset{a}{\underset{m}{\subseteq}} Y_0$.

На $[a;b]$ рассмотрим две схемы сеток $A_{(\cdot)} = (A_k)_{\mathbb{N}}$ и $B_{(\cdot)} = (B_k)_{\mathbb{N}}$, которые индуцируют табулирование $\hat{A} = {}^{\times}\prod_{k\in\mathbb{N}} \hat{A}_k \in {}^{\times}Hom(Y_0^{\times\mathbb{N}}, \overset{?}{V})$ и $\hat{B} = {}^{\times}\prod_{k\in\mathbb{N}} \hat{B}_k \in {}^{\times}Hom(Y_0^{\times\mathbb{N}}, \underline{V})$ пр-ва Y_0 соотв-но, где

${}^{?}\underline{V} = {}^{\times}\prod_{k\in\mathbb{N}} {}^{?}V_{(k)}$ и $\underline{V} = {}^{\times}\prod_{k\in\mathbb{N}} V_{(k)}$ – два поли-табличных пр-ва, где $V_{(k)} = {}^{?}\mathbb{R}^{|A_k|}(A_k)$ и $\underline{V}_{(k)} = {}^{?}\mathbb{R}^{|B_k|}(B_k)$ для $\forall k \in \mathbb{N}$

Для $\forall k \in \mathbb{N}$ определён табличный оператор $\hat{\underline{F}}_{(k)} \in Hom({}^{?}V_{(k)}, V_{(k)})$, где $\underline{F}_{(k)} \in L(\mathbb{R}, |A_k|, |B_k|)$ – матрица размера $|B_k| \times |A_k|$

Следовательно, задан поли-табличный линейный оператор. $\hat{\underline{F}}_{(\cdot)} \in Hom(\overset{?}{\underline{V}}, \underline{V})$, где $\hat{\underline{F}}_{(\cdot)} = {}^{\times}\prod_{k\in\mathbb{N}} \underline{F}_{(k)}$ и $\underline{F}_{(\cdot)} = L(\mathbb{R}, n_{(\cdot)}, m_{(\cdot)}) = {}^{\times}F_{(k)}$ – поли-блочная матрица типа $m_{(\cdot)} \times n_{(\cdot)}$, где $n_{(\cdot)} = (n_k = |A_k|)$ и $m_{(\cdot)} = (m_k = |B_k|)$

$$\left\{ \begin{pmatrix} \boxed{F_{(1)}} & & 0 \\ & \boxed{F_{(2)}} & \\ 0 & & \ddots \end{pmatrix} = F_{(\cdot)} \right\}$$

Утв. 1 Введенные линейные операторы иллюстрируют схему диаграмм операторов, показанную на $\boxed{\text{рис. 1.}}$

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{D}(\hat F) = X_0 \overset{\circ}{\subseteq}_m Y_0 & \xrightarrow{\hat F} & Z_0 = \mathcal{E}(\hat F) \overset{a}{\subseteq}_m Y_0 \\ \downarrow \hat A_k & & \downarrow \hat B_k \\ \vec{\mathbb{R}}^{|A_k|}(A_k) = V_{(k)} & \xrightarrow{\hat F_{(k)}} & V_{(k)} = \vec{\mathbb{R}}^{|B_k|}(B_k) \\ k \in \mathbb{N} & & \end{array} \iff \begin{array}{ccc} X_0^{\times \mathbb{N}} & \xrightarrow{\hat F^{\times \mathbb{N}}} & Z_0^{\times \mathbb{N}} \\ \hat A \downarrow & & \downarrow \hat B \\ \underline{V} & \xrightarrow{\hat F_{(\cdot)}} & \underline{V} \end{array}$$

$\boxed{\text{Рис. 1}}$

$\hat F_{(k)}(\vec u_{(k)}) = \underline{F}_{(k)} \cdot \vec u_{(k)} = \vec v_{(k)} \in V_{(k)} = \vec{\underline{\mathbb{R}}}^{|B_k|}(B_k)$

если $\vec u_{(k)} \in V_{(k)} = \vec{\mathbb{R}}^{|A_k|}(A_k)$

Опр. 1 (табулирование лин. опер-ра $\hat F$)

Говорим, что поли-табличный оператор $\hat{\underline{F}}_{(\cdot)} = {}^{\times}\prod_{k\in\mathbb{N}} \hat{\underline{F}}_{(k)} \in {}^{\times}\mathrm{Hom}(\underline{V}, \underline{V})$ табулирует линейный опер-р $\hat F$ (точнее, $(\hat A, \hat B)$-табулирует $\hat F$), если $\forall x_0 \in X_0 = \mathcal{D}(\hat F)$ выполняется условие:

$$\| (\hat B_k \circ \hat F - \hat A_k \circ \hat{\underline{F}}_{(k)})(x_0) \| \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \qquad (1)$$

В этом случае будем говорить, что схема диаграмм опер-в, показанная на рис. 1, — метр-коммутативна.

Пример 1 (вычисление значений инт. опер-ра)

Пусть $X_0 = C^1([a;b], \mathbb{R})$ линейный $\int$-ый оператор $\hat F$ в пр-ве Y_0 индуцирован его гладким ядром $K \in C^1([a;b] \times [a;b], \mathbb{R})$, т.е. $\hat F(x_0)\big|_{\xi} = \int_a^b K(\xi, \tau) x_0(\tau) d\tau$ для $\xi \in [a;b]$. Кроме того, $A_{(\cdot)} = (A_k)_{\mathbb{N}} = B_{(\cdot)} = (B_k)_{\mathbb{N}}$ — схема центрально равном. сеток $[a;b]$.

Для каждого $k \in \mathbb{N}$ рассм. табличный оператор $\hat{\underline{F}}_{(k)} \in \mathrm{Hom}(V_{(k)} = \vec{\mathbb{R}}^{|A_k|}(A_k), V_{(k)} = \vec{\mathbb{R}}^{|A_k|}(A_k))$ с матрицей $\underline{F}_{(k)} = (f^i_j)^{|A_k|}_{|A_k|}$,

где $f^i_j = K(s_i, \tau_j)\, stp(A_k)$ для $i, j = \overline{1, |A_k|}$

Тогда для узла $s_i \in A_k$ ($i = \overline{1, |A_k|}$), согласно квадратурной формуле прямоугольников для центр.-равном. сетки $A_k = (\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_{|A_k|})$ и ф-ции $x_0 \in X_0$ получаем:

$$\Big\{ O(stp(A_k)) + \Big\} \int_a^b K(s_i, \tau) x_0(\tau) d\tau \approx \sum_{j=1}^{|A_k|} K(s_i, \tau_j) x_0(\tau_j)\, stp(A_k) =$$

$$= \sum_{j=1}^{k} f^i_j \cdot x_0(\tau_j) = \underline{F}_{(k)} \cdot \hat A_k(x_0) \qquad (2)$$

След-но, $\forall k \in \mathbb{N}$ согласно квадратурной формуле прямоугольников (апр-ие 1-порядка относит. шага $stp(A_k)$), получаем, что поли-табличный оператор

$\hat{\underline{F}}_{(\cdot)} = {}^{\times}\prod_{k\in\mathbb{N}} \underline{F}_{(k)} \in {}^{\times}\mathrm{Hom}_c(\underline{V}, \underline{V})$ табулирует ($\hat A$-табулир.) лин. $\int$-ый оператор $\hat F$, поскольку $\forall x_0 \in X_0$:

$$\| (\hat A_k \circ \hat F - \hat{\underline{F}}_{(k)} \circ \hat A_k)(x_0) \| = O(stp(A_k)) \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

П.1. Схема табличных аналогов для вычисления значения линейного оператора в банаховом пр-ве

В банаховом пр-ве $Y_0 = B_0([a;b], \mathbb{R})$ рассм-м лин. опер-р $\hat F$, для кот. $X_0 = \mathcal{D}(\hat F) \overset{a}{\subseteq}_m Y_0$ и $Z_0 = \mathcal{E}(\hat F) \overset{a}{\subseteq}_m Y_0$. Для пр-ва Y_0 введены два табулирования

$\hat A = {}^{\times}\prod \hat A_k \in {}^{\times}\mathrm{Hom}_c(Y_0^{\times\mathbb{N}}, \underline{V})$ и

$\hat B = {}^{\times}\prod \hat B_k \in {}^{\times}\mathrm{Hom}_c(Y_0^{\times\mathbb{N}}, \underline{V})$,

индуцированные схемами сеток $A_{(\cdot)} = (A_k)_{\mathbb{N}}$ и $B_{(\cdot)} = (B_k)_{\mathbb{N}}$ отр. $[a;b]$.

Напомним, что $\|\hat A\| = \|\hat B\| = 1$. и $\underline{V} = \prod_{k\in\mathbb{N}} V_{(k)}$, $V = \prod_{k\in\mathbb{N}} V_{(k)}$, где $\mathcal{V}_{(k)} = {}^{>}\mathbb{R}^{|A_k|}(A_k)$, $V_{(k)} = {}^{>}\mathbb{R}^{|B_k|}(B_k)$ $\forall k \in \mathbb{N}$

Кроме того, задан поли-табличный оператор $\hat{F}_{(\cdot)} \in {}^{\times}\mathrm{Hom}(\underline{V}, V)$, где $\hat{F}_{(\cdot)} = {}^{\times}\prod\limits_{k\in\mathbb{N}} \hat{F}_{(k)}$ и $\hat{F}_{(k)} \in L(\mathbb{R}, |A_k|, |B_k|)$ $\forall k \in \mathbb{N}$

Схему табличных аналогов для вычисления значения $F(x_0)$ оператора $\hat F$ на элементе $x_0 \in X = D\hat F$ иллюстрирует схема диаграммы $\boxed{\text{рис. 1}}$, согласно которой получаем:

$$\begin{cases} k \in \mathbb{N} \\ \hat{A}_k(x_0) = {}^{>}\underline{u}_{(k)} \in \mathcal{V}_{(k)} = {}^{>}\mathbb{R}^{|A_k|}(A_k), \\ \hat{F}_{(k)}\, {}^{>}u_{(k)} = {}^{>}v_{(k)} \in V_{(k)} = {}^{>}\mathbb{R}^{|B_k|}(B_k) \end{cases} \qquad (3)$$

Пусть v_k — решение на $[a;b]$ задачи интерполяции B_k-сеточной ф-ции ${}^{>}v_{(k)} \in V_{(k)}$ для $\forall k\in\mathbb{N}$ из схемы (3)

Вводя обозначение $\mathcal{Y}({}^{>}v_k) = v_k$ $\forall k\in\mathbb{N}$ предполагаем, что для $\forall z_0 \in Z_0$ следует, что $\mathcal{Y}_k \circ \hat{B}_k(z_0) \xrightarrow[k\to+\infty]{} z_0$ и

поли-отобр-е ${}^{\times}\prod\limits_{k\in\mathbb{N}} \mathcal{Y}_k\circ \hat{B}_k \in \mathrm{Hom}_c(Y_0^{\times\mathbb{N}}, Y_0^{\times\mathbb{N}})$ — устойчиво,

т.е. ограничено.

Опр-е 2 (аппроксимируемости и устойчивости схемы табл. аналогов (3))

Говорим, что схема (3) аппроксимирует задачу выч-я значения $F(x_0)$ оператора $\hat F$ $\forall x_0 \in X_0$, если поли-табличный оператор $F_{(\cdot)}$ $(A_{(\cdot)}, B_{(\cdot)})$ — табулирует опер-р $\hat F$, т.е. $\forall x_0 \in X_0$:

$$\|(\hat{B}_k\circ\hat{F} - \hat{F}_{(k)}\circ \hat{A}_k)(x_0)\| \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0.$$

Говорим, что схема (3) устойчива, если поли-табл. оператор ограничен, т.е. $\|\hat{F}_{(\cdot)}\| < +\infty$,

Замечание 2 (об аналитич. корректности и корректности схемы табличных аналогов (3))

Если поли-табл-й опер-р $\hat{F}_{(\cdot)}$ аппр-ет оператор $\hat F$, то ~~для~~ схему табл. аналогов (3) наз-ют аналитически корректной для задачи вычисления значений опер-ра $\hat F$.

Действительно, поскольку $\forall x_0\in X_0$ следует, что

$\|(\hat{B}_k\circ\hat{F} - \hat{F}_{(k)}\circ\hat{A}_k)(x_0)\| \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0$, и $\mathcal{Y}_k\circ \hat{B}_k(\hat{F}(x_0)) \xrightarrow[k\to+\infty]{} \hat{F}(x_0)$,

то $\|\mathcal{Y}_k\circ\hat{F}_k\circ\hat{A}_k(x_0) - \mathcal{Y}_k\circ\hat{B}_k\circ\hat{F}(x_0)\| \le \|\mathcal{Y}_k(\hat{F}_k\circ A_k - \hat{B}_k\circ\hat{F})(x_0)\| \le$

$\le \|\mathcal{Y}_k\|\cdot\|(\hat{F}_k\circ A_k - \hat{B}_k\circ\hat{F})(x_0)\| \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0$,

т.к. ${}^{\times}\prod\limits_{k\in\mathbb{N}}\mathcal{Y}_k$ — огранич. гомоморфизм.

$\mathcal{Y}_k\circ\hat{B}_k\circ\hat{F}(z_0) \xrightarrow[k\to+\infty]{} \hat{F}(z_0)$, что иллюстр. $\boxed{\text{рис. 2}}$

$$\begin{tikzcd}
X_0 \arrow[r, "\hat{F}"] \arrow[d, "\hat{A}_k"'] & Z_0 \arrow[d, "\hat{B}_k"] \\
\mathcal{V}_{(k)} \arrow[r, "\hat{F}_{(k)}"] & V_{(k)} \arrow[u, bend right=60, "\mathcal{Y}_k"']
\end{tikzcd}$$

$\boxed{\text{Рис. 2.}}$

Таким образом, согласно схеме (3) $\forall x_0\in X_0$

$$F_{(k)}\cdot\hat{A}_k(x_0) = F_{(k)}\, {}^{>}u_{(k)} = {}^{?}v_{(k)}$$

$$\|F_{(k)}\, {}^{>}u_{(k)} - \hat{B}_k(\hat{F}(x_0))\| \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0,$$

$$\|{}^{>}v_{(k)} - \hat{B}_k\circ\hat{F}(x_0)\| \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0,$$

$\mathcal{Y}_k({}^{>}v_{(k)}) = v_k \xrightarrow[k\to+\infty]{} \hat{F}(x_0)$, т.к. $\hat{B}_k\circ\hat{F}(x_0) \xrightarrow[k\to+\infty]{} \hat{F}(x_0)$

Если оператор $\hat{F}_{(\cdot)}$ - устойчив, т.е. ограничен ($\overline{\lim\limits_{k\to+\infty}} \|\hat{F}_{(k)}\| < +\infty$) и аппр-ет оператор $\hat{F}$, то схему (3) наз-ют **корректной** для вычисл-я задачи значений оператора $\hat{F}$.

#

Пример корректной схемы выч-я значений лин. $\int$-го опер-ра фактически, приведен в примере 1.

Поскольку $\|\hat{F}\| = \|\hat{E}_{(\cdot)}\| < +\infty$ в этом примере.

#

19. Аппроксимирование линейного оператора в функциональном банаховом пр-ве

Здесь, как и ранее, $Y_0 = B_0([a;b], \mathbb{R})$ и $\hat{F}$ — лин. оператор в Y_0, для кот. $X_0 = D(\hat{F}) \overset{a}{\underset{m}{\subseteq}} Y_0$, $W_0 = E(\hat{F}) \overset{a}{\underset{m}{\subseteq}} Y_0$

~~Для $\forall k \in \mathbb{N}$~~ Кроме того, $A_{(\cdot)} = (A_k)_{\mathbb{N}}$ и $B_{(\cdot)} = (B_k)_{\mathbb{N}}$ — схемы сеток $[a;b]$, индуцирующие табуляции $\hat{A} = \times\prod\limits_{k\in\mathbb{N}} \hat{A}_k$, $\hat{B} = \times\prod\limits_{k\in\mathbb{N}} \hat{B}_k$ ~~в Y_0~~, где $\hat{A} \in \times Hom_e(Y_0^{\times\mathbb{N}}, \underline{V})$ и $\hat{B} \in \times Hom_e(Y_0^{\times\mathbb{N}}, \underline{V})$, $\underline{V} = \times\prod\limits_{k\in\mathbb{N}} V_{(k)}$ и $\underline{V} = \times\prod\limits_{k\in\mathbb{N}} \underline{V}_{(k)}$,

где $V_{(k)} = {}^{?}\mathbb{R}^{|A_k|}(A_k)$ и $V_{(k)} = {}^{?}\mathbb{R}^{|B_k|}(B_k)$ $\forall k \in \mathbb{N}$

Для пр-ва $\bar{X}_0$ задана база $H_{(\cdot)} = (H_k)_{\mathbb{N}}$ - аппроксимирования.

Для наглядности изложения будем предполагать, что $|A_k| = |B_k| = |H_k|$ $\forall k \in \mathbb{N}$ и $A_k = B_k$

Для пр-ва X_0 задано аппроксимирование

$\hat{P} = \times\prod\limits_{k\in\mathbb{N}} \hat{P}_k \in \times Hom(Y_0^{\times\mathbb{N}}, Y_0^{\times\mathbb{N}})$, где $\hat{P}_k = \hat{H}_k \circ \hat{C}_k \circ \hat{A}_k \in Hom(Y_0, Y_0)$ $\forall k \in \mathbb{N}$

и $\hat{C}_k = \times\prod\limits_{k\in\mathbb{N}} \hat{C}_k \in Hom(\underline{V}, X_{(\cdot)} = \times\prod\limits_{k\in\mathbb{N}} X_{(k)})$ - координирование для табулирования $\hat{A} = \hat{B}$ и базы аппроксим. $(H_k)_{\mathbb{N}}$. (см. диаграмму операторов на $\boxed{\text{рис. 1}}$)

$$\begin{array}{ccccc} Y_0 \overset{a}{\underset{m}{\supseteq}} D(\hat{F}) = X_0 & & \xrightarrow{\hspace{3em}\hat{P}_k\hspace{3em}} & & \\ \big\downarrow \hat{A}_k & & & & \\ {}^{?}\mathbb{R}^{|A_k|}(A_k) = V_{(k)} & \xrightarrow[\hat{C}_k]{} & X_{(k)} & \xrightarrow[\hat{H}_k]{} & Y_k = [H_k] \end{array}$$

$\boxed{\text{Рис. 1}}$

Для наглядности изложения предп., что $C_k = E_{|A_k|}$ — единичная матр-ца. Поэтому диаграмму, показ. на рис. 1 предст. в виде диаграммы, показ. на $\boxed{\text{рис. 2}}$

$$\begin{array}{c} Y_0 \overset{a}{\underset{m}{\supseteq}} D(\hat{F}) = X_0 \\ \big\downarrow \hat{A}_k \\ V_{(k)} \\ \big\downarrow \hat{H}_k \\ Y_k = [H_k] \end{array} \qquad \hat{P}_k$$

$\boxed{\text{Рис. 2}}$

Предполагаем, что известно значение оператора $\hat{F}$ на любом эл-те из системы H_k для $\forall k \in \mathbb{N}$. Тогда выч-е значения $\hat{F}(x_0)$ оператора $\hat{F}$ на эл-те $x_0 \in X_0$ иллюстрирует диаграмма операторов, показ. на $\boxed{\text{рис. 3}}$

$$\begin{array}{ccc} Y_0 \overset{a}{\underset{m}{\supseteq}} D(\hat{F}) = X_0 & \xrightarrow{\hat{F}} & Y_0 \\ \big\downarrow \hat{A}_k & & \big\uparrow \hat{P}_k \\ {}^{?}\mathbb{R}^{|A_k|}(A_k) = V_{(k)} & \xrightarrow{\hat{F}_{(k)}} & V_{(k)} = V_{(k)} \\ \big\downarrow A_k & & \big\uparrow \hat{A}_k \\ [H_k] = Y_k & \xrightarrow{\hat{F}_k = \hat{F}|_{Y_k}} & Y_0 \end{array} \qquad \underline{k \in \mathbb{N}}$$

$\boxed{\text{Рис. 3}}$ $\qquad \hat{F}_{(k)} = \hat{A}_k \circ \hat{F}_k \circ \hat{H}_k$

Согласно схеме диаграмм на рис. 3. схема табличных аналогов вычисления значения $\hat{F}(x_0)$ для $\forall x_0 \in X_0$ имеет вид:

$$\begin{cases} \hat{A}_k(x_0) = {}^{>}u_{(k)}; \\ \underset{-}{F}_{(k)} \cdot {}^{>}u_{(k)} = {}^{>}v_{(k)}; \\ v_k = p_k({}^{>}v_{(k)}) \\ k \in \mathbb{N} \end{cases} \qquad (1)$$

Пример 2. (метод коллокаций для вычисл. $\int$-го оператора)

$$\hat{F}\left(\sum_{j=1}^{|A_k|} x_j h_j\right)\Big|_{s_i} = \sum_{j=1}^{|A_k|} x_j \underbrace{F(h_j)}_{f_j}\Big|_{s_i} = \sum_{j=1}^{|A_k|} x_j f_j^c \approx$$

$$\approx \hat{F}(x_0)\big|_{s_i}, \text{ где } x_0 \approx \sum_{j=1}^{k} x_j h_j, \quad x_{(k)} \in X_k$$

20. Метод табулирования (конечных сумм) для решения линейного ур-я в ~~функциональном~~ функцион. банаховом пр-ве

Как и ранее, $Y_0 = B_0([a;b], \mathbb{R})$, $\hat{F}$ - линейный оператор в Y_0, $X_0 = D(\hat{F})$ - лин. многообразие и $A_{(\cdot)} = (\hat{A}_k)_{\mathbb{N}}$ - сеть граничной правильных сеток $[a,b]$, индуцирующая корректное табулирование.

$\hat{A} = {\times}\prod_{k \in \mathbb{N}} \hat{A}_k \in Hom_c(Y_0^{\times\mathbb{N}}, \underline{V})$, где $V = {\times}\prod_{k \in \mathbb{N}} U_{(k)}$ - пол.табличное пр-во и $U_{(k)} = {}^{>}\mathbb{R}^{|A_k|}(A_k)$ $\forall k \in \mathbb{N}$ $(\|\hat{A}\| = 1)$

Пусть политабличный оператор $\underset{-}{F}_{(\cdot)} = {\times}\prod_{k \in \mathbb{N}} \hat{F}_{(k)} \in {\times}Hom_c(\underline{V}, \underline{V})$ - $\hat{A}$ - табулирует оператор $\hat{F}$ (см. схему диаграмм отображ-ий на рис. 1), т.е. $\forall x_0 \in X_0$:

$$\|(\hat{A}_k \circ \hat{F} - \hat{A}_k \circ \hat{F}_{(k)})(x_0)\| \xrightarrow[k \to +\infty]{} 0 \qquad (1)$$

$k \in \mathbb{N}$

и, следовательно, схема диаграмм на рис. 1 - непрокоммутативна

$$\begin{tikzcd} Y_0 \overset{a}{\underset{\sim}{\supseteq}} X_0 \arrow[r, "\hat{F}"] \arrow[d, "\hat{A}_k"'] & Y_0 \arrow[d, "\hat{A}_k"] \arrow[d, bend left=60, "Y_k"] \\ {}^{>}\mathbb{R}^{|A_k|}(A_k) = U_{(k)} \arrow[r, "\hat{\underset{-}{F}}_{(k)}"] & U_{(k)} \end{tikzcd}$$

Рис. 1.

$$\|(\hat{A}_k \circ \hat{F} - \underset{-}{F}_{(k)} \circ \hat{A}_k)(x_0)\| \xrightarrow[k \to +\infty]{} 0$$

$$\underset{-}{F}_{(k)} \in L(\mathbb{R}, |A_k|) \text{ для } k \in \mathbb{N}$$

Поскольку оператор $\hat{\underset{-}{F}}_{(\cdot)}$ табулирует оператор $\hat{F}$, то схема диаграмм на рис. 1 индуцирует корректную схему табличных аналогов (прямой) задачи вычисления значения $\hat{F}(x_0)$ оператора $\hat{F}$ на $\forall x_0 \in X_0$:

$$\begin{cases} \hat{A}_k(x_0) = {}^{>}u_k \in V_{(k)} = {}^{>}\mathbb{R}^{|A_k|}(A_k) \\ \underset{-}{F}_{(k)} \cdot {}^{>}u_{(k)} = {}^{>}\underline{v}_{(k)} \in V_{(k)} \\ Y_k({}^{>}\underline{v}_{(k)}) = v_k \in Y_0 \end{cases} \qquad (2)$$

$\left(Y = {\times}\prod_{k \in \mathbb{N}} Y_k \in Hom_c(\underline{V}, Y_0^{\times\mathbb{N}}) \right.$ - корректное аппроксимир. для пот. $\hat{p} = {\times}\prod_{k \in \mathbb{N}} p_k \in Hom(Y_0^{\times\mathbb{N}}, Y_0^{\times\mathbb{N}})$ - корректное аппроксим. линейного многооб. $\left. X_0 \right)$

Таким образом, $\lim\limits_{k \to +\infty} v_k = x_0$ для $\forall x_0 \in X_0$.

Далее предполагаем, что $Det(\underset{-}{F}_{(k)}) \neq 0$ для $\forall k \in \mathbb{N}$.

Потому из схемы (2) получаем схему табличных аналогов для (обратной) задачи решения в пр-ве Y_0 линейного ур-я:

$$\begin{cases} \hat{F}(x_0) = z_0 \\ x_0 \in X_0 \end{cases} \quad \text{где } z_0 \in \mathcal{E}(\hat{F}) \overset{a}{\underset{\sim}{\subseteq}} Y_0 \qquad (2) \Rightarrow \qquad \begin{cases} \hat{A}_k(z_0) = {}^{>}v_{(k)} \in U_{(k)} = {}^{>}\mathbb{R}^{|A_k|}(A_k) \\ \underset{-}{F}_{(k)}^{-1} \cdot {}^{>}v_{(k)} = {}^{>}\underline{u}_{(k)} \in U_{(k)} \\ Y_k({}^{>}v_k) = y_k \in Y_0 \text{ (см. рис. 2)} \end{cases} \quad (k \in \mathbb{N}) \qquad (4)$$

Теорема 1. (о корректности схемы (4)) (см. схему диаграмм отображ-ий на $\boxed{\text{рис. 2}}$)

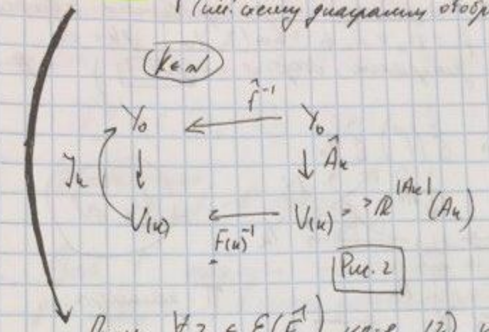


Рис. 2

Пусть $\forall z_0 \in \mathcal{E}(\hat F)$ ур-е (2) имеет единственное решение.

Если нома табличных аналогов (2) для прямой задачи выч-я зн-й $\hat F$ - апр-ет эту задачу ($\hat F_{(\cdot)}$ - апп-е $\hat F$) и схема табличн. аналогов (4) для задачи реш-я ур-я (2) - устойчива, т.е.

$$\|\hat F^{-1}_{(\cdot)}\| = \|\times\prod_{k\in N} \hat F^{-1}_{(k)}\| < +\infty,$$

то схема (4) корректна, т.е. $\lim\limits_{k\to+\infty} y_k = x_0$, где $\hat F(x_0) = z_0$ #

!!! (Пример - 8-я лаба)

21. Метод коллокации для решения лин. ур-й в функциональном банах. пр-ве

Обозначения из раздела 20, только X_0 - сепарабельное лин. многообр. с базой апроксим.

$H_{(\cdot)} : (H_k \in Y_0)_N$, где $|H_k| = |A_k|$ $\forall k \in N$

Опр. 1 (базового апроксим.)

Апроксим. - $\hat p = \prod\limits_{k\in N} \hat p_k^{a} \in \times Hom(Y_0, Y = \times\prod\limits_{k\in N} Y_k)$,

где $Y_k = [H_k] \underset{m}{\in} Y$ для $\forall k \in N$, наз-ют базовым, если $\forall k \in N$ матрица коллокирования явл-ся единичной, т.е. $\hat p_k = H_k \circ \hat A_k \in Hom(Y_0, Y_k)$ $\forall k \in N$ (см. схему диаграмм. отоб-я на $\boxed{\text{рис. 1}}$) #

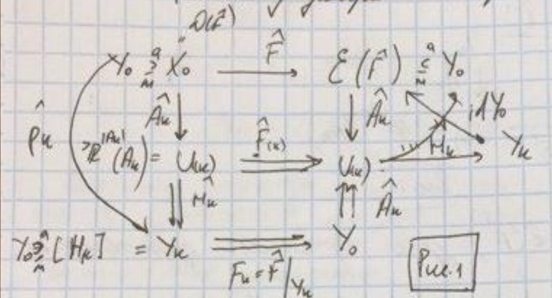


Рис. 1

Пусть, как и в разделе 20, $\hat A = \times\prod\limits_{k\in N} \hat A_k \in \times Hom_c(Y_0^{\times N}, \underline{V})$ - корректное табулирование Y_0.

Для $\forall k \in N$ узлы сетки A_k (см. в схеме правую стр.) наз-ют узлами коллокации.

Предполагаем, что базовое апрок-е $\hat p$ - корректно т.е. $\lim\limits_{k\to+\infty} \hat p_k(x_0) = x_0$ $\forall k \in N, \forall x_0 \in X$ (аналитич. корр.) и $\hat p$ - устойчиво, т.е. $\|\hat p\| < +\infty$.

Как и в разделе 20, предполагаем, что ур-е:

$$\begin{cases} \hat F(y_0) = z_0 \in \mathcal{E}(\hat F) \\ y_0 \in X_0 \end{cases} \qquad (1)$$

$\forall z_0 \in \mathcal{E}(\hat F)$ имеет единственное решение.

Для $\forall k \in N$ оператор $\hat F$ индуцирует гомоморфизм $\hat F_k \in Hom(Y_k = [H_k], Y_0)$, где $\hat F_k = \hat F|_{Y_k}$ и предполагаем, что $\hat F_k$ — изоморфизм $Y_k = [H_k]$ на $\mathcal{E}(\hat F_k)$, т.е. $\exists \hat{F}_k^{-1} \in Hom(E(\hat{F}_k^{-1}), Y_k)$ для $\forall k \in N$.

Согласно схеме диаграммы отображ-я на рис. 1, определен табличный оператор $\hat{F}_{(k)} = \hat{A}_k \circ \hat{F}_k \circ \hat{H}_k$

и $Det(\hat{F}_{(k)}) \neq 0$, т.е. $\exists$-ет табличный оператор

$$\hat{F}_{(k)}^{-1} \in L(\mathbb{R}, |H_k|) \quad (|H_k| = |A_k|) \quad \forall k \in N$$

~~Следовательно,~~
~~Пусть $\hat{F} \in Hom$~~

Пусть $\hat{F}$ - огранич. линейный оператор. Тогда для каждого $\forall k \in N$, в силу предположений, оператор

$$\times\prod_{k \in N} \hat{H}_k \circ \hat{A}_k \circ \hat{F}_k \circ \hat{H}_k \circ \hat{A}_k \in Hom_c(X_0^{\times N}, Y_0^{\times N})$$

Сл-но, согласно разделу 20, для решения ур-я (1) можно исп.-ть след. схему табличных аналогов:

$$\begin{cases} \hat{A}(z_0) = {}^{>}v_{(k)} \\ \hat{F}_{(k)}^{-1} \cdot {}^{>}v_k = {}^{>}u_{(k)} \\ \hat{H}({}^{>}u_k) = y_k \in Y_0 \end{cases} \quad (2) \qquad (\times\prod \hat{F}_k \text{ - аппр-е } \hat{F})$$

Если $\widehat{F_{(k)}^{-1}} = \times\prod_{k \in N} \widehat{F_{(k)}^{-1}}$ - устойчивый оператор, то схема

(2) корректна, т.к. в силу ограниченности $\hat{F}$, схема табличн. аналогов:

$$\begin{cases} \hat{A}(x_0) = {}^{>}y_{(k)} \\ F_{(k)} \, {}^{>}u_{(k)} = {}^{>}v_k \\ \hat{H}_k({}^{>}v_k) = z_k \end{cases} \quad (3)$$

- схема аппроксимир-ет задачу вычисления $\hat{F}(x_0) \; \forall x_0 \in X_0$.

Метод коллокации

$$\hat{A}_k(x) = \begin{pmatrix} y_0 \\ \vdots \\ y_k \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{ccc} X_0 & \longrightarrow & Y_0 \\ \downarrow \hat{A}_k & & \uparrow (\hat{H}_{(k)}) \\ \mathbb{R}^{(k)} = V_{(k)} & \xrightarrow{\hat{F}_{(k)}} & V_k \\ \downarrow & & \Uparrow A_k \\ [H_k] = Y_k & \xrightarrow{\hat{F}_k = \hat{F}|_{Y_k}} & Y_0 \end{array}$$

$\hat{P}_k$, $\hat{P}_k$

$$z(s) = F(x)|_s = \int_0^b e^{st} x(t)\,dt \quad s \in (a, b)$$

узлы коллокации

spl_1

$s_0 = 0$

$s_1 = 1$

$s_2 = 2$

$s_3 = 3.$

$x(t) = t^2$, $a = 0$, $b = 3$

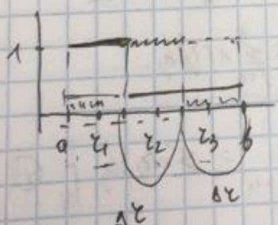
$$\hat{F}_k = \hat{F}(h_0)\Big|_{s_i} = \int_0^1 e^{s_i t} \frac{t - t_1}{t_1 - t_0} dt =$$

$$= \int_0^1 e^{s_0 t}(-t+1)\,dt = -\int_0^1 \cancel{e^{s_0 t}}\, t\,dt =$$

$$= -\frac{t^2}{2} + t\Big|_0^1 = \frac{1}{2} = z(s_0)$$

$$\hat{F}(h_1) = \int$$

$$H_k = \langle spl_0(A_k, e_1), spl_0(A_k, e_2), spl_0(A_k, e_3) \rangle$$



$$\hat{F}(s) = \int_0^b e^{st} x(t)\,dt, \quad s \in (a, b).$$

$\frac{1}{2}$ $\frac{3}{2}$ $\frac{5}{2}$ $\overset{b}{3}$

$x(t) = t^2$

$$\hat{A}_k(x) = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{9}{4} \\ \frac{25}{4} \end{pmatrix} = v_{(k)}$$

$\langle s_1, s_2, s_3 \rangle =$

$= \langle t_1, t_2, t_3 \rangle$

$$\hat{F}(x)|_s = \frac{1}{4} F(h_1) + \frac{9}{4} F(h_2) + \frac{25}{4} F(h_3)$$

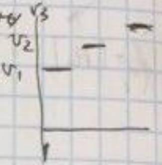
$$F(h_j)|_{s_i} = \int_{t_j - \frac{\Delta t}{2}}^{t_j + \frac{\Delta t}{2}} e^{s_i t} \cdot 1\,dt = \frac{1}{s_i}\left(e^{s_i (t_j + \frac{\Delta t}{2})} - e^{s_i (t_j - \frac{\Delta t}{2})}\right) = f_j^i, \quad i, j = \overline{1,3}$$

$$\hat{F}(x)|_{s_i} = \sum_{j=1}^{3} y_j \hat{F}(h_j)|_{s_i} = \sum_{j=1}^{3} y_j f_j^i \qquad F_{(k)} = (f_j^i)_3^3$$

$$\Rightarrow \hat{A}_k(x) = y_j = v_{(k)} =$$

$$v_{(k)} = F_{(k)}\, u_{(k)}$$ — последний шаг.

$\hat{H}_k$ (вправо) — умножение как компоненты век-ра $v_{(k)}$



$$\hat{F}(x)|_s = \int_a^b k(s,t)\, x(t)\,dt$$

$$\mu(s) = \int_a^b |k(s,t)|\,dt.$$

норма $\hat{F}(x)$ при каком s max $\mu(s)$

Коллокации

$$\begin{array}{ccc} \xleftarrow{F^{-1}} & Z(s) & \\ & \downarrow A_k & \\ V_{(k)} \xleftarrow{\hat{F}_{(k)}^{-1}} & V_{(k)} & \\ & \downarrow \hat{H}_k & \\ \longleftarrow & Y_k & \end{array}$$

$$F(x) = x - \lambda \hat{B}(x)$$

$$\hat{B}(x)|_s = \int_0^b k(s,t)\, x(t)\,dt \quad s \in (a,b)$$

$$F_{(k)} = (\delta_j^i - \lambda b_j^i)$$

$$b_j^i = \int_a^b k(s_i, t)\, h_j(t)\,dt$$

$$x(t) \approx \sum_{j=1}^{k} x(t_j) h_j.$$

$$\hat{F}(x)|_{s_i} = F\Big(\sum_{j=1}^{A_k} x(t_j) h_j\Big)\Big|_{s_i} = \sum x(t_j) h_j \Big|_{s_i} \oplus$$

если $j = i$ — единица

$$\oplus \sum x(t_j) (\hat{B}(h_j))\Big|_{s_i}$$

III

Дифф. оператор

$$\underbrace{\hat{H}_k \circ}_{\hat{P}_k} \hat{A}_k(x)$$

$$spl_3(\hat{A}_k, \hat{A}_k(x))$$

$$\downarrow$$

$$spl_3'(\hat{A}_k, \hat{A}_k(x))$$

$$\downarrow$$

$$\hat{A}_k(spl_3'(\hat{A}_k, \hat{A}_k(x))$$

$$\downarrow$$

$$spl_3(A_k, \hat{A}_k(spl_3'(A_k, \hat{A}_k(x)))$$

25. $H = (h_1 \ldots h_n)$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{k} x_j h_j(s_i) = y_i \\ i=\overline{1,m},\ m>k \end{cases}$$