Московский государственный технический университет
имени Н.Э. Баумана

Факультет «Фундаментальные науки»
Кафедра «Математическая физика и вычислительная математика»

В.А. Кутыркин, Ю.В. Юрин

Методы решения интегрального уравнения Фредгольма 2-го рода с аналитически заданным непрерывным и симметричным ядром

Электронное учебное издание

Методические указания к выполнению курсовой работы
по дисциплине «Функциональный анализ и интегральные уравнения»

Москва

УДК 517.9

Рецензент: проф., д.т.н. Сидняев Н.И.

Кутыркин В.А., Юрин Ю.В.

Методы решения интегрального уравнения Фредгольма 2-го рода с аналитически заданным непрерывным и симметричным ядром. Электронное учебное издание. - М.: МГТУ имени Н.Э. Баумана, 2013. 32 с.

Издание содержит методические указания для выполнения курсовой работы по дисциплине «Функциональный анализ и интегральные уравнения». Материал построен на примере выполнения задания по курсовой работе на основе исследования и решения интегрального уравнения Фредгольма 2-го рода, зависящим от числового параметра, с аналитически заданным непрерывным и симметричным ядром. Изложение сопровождается необходимыми для усвоения используемых практических методов теоретическими сведениями из курса функционального анализа. Приведены варианты курсовых работ.

Издание рассчитано на студентов, прослушавших курс по дисциплинам «Обыкновенные дифференциальные уравнения» и «Функциональный анализ и интегральные уравнения». Для студентов МГТУ имени Н.Э. Баумана по направлению подготовки «Математика и компьютерные науки» и специальности "Прикладная математика".

Рекомендовано учебно-методической комиссией факультета «Фундаментальные науки» МГТУ им. Н.Э. Баумана

Электронное учебное издание

Кутыркин Владимир Андреевич

Юрин Юрий Викторович

Методы решения интегрального уравнения Фредгольма 2-го рода с аналитически заданным непрерывным и симметричным ядром

Оглавление

Введение, цели и задачи методических указаний

Настоящее издание содержит методические указания для выполнения курсовой работы по дисциплине «Функциональный анализ и интегральные уравнения». Материал построен на основе изложения и исследования методов решения интегрального уравнения Фредгольма 2-го рода, зависящего от произвольного действительного параметра, с аналитически заданным непрерывным и симметричным ядром. Благодаря используемому параметру обеспечивается общность исследования, охватывающая все случаи конкретных интегральных уравнений, предлагаемых студентам в курсовых работах. Изложение сопровождается необходимыми для понимания используемых методов теоретическими сведениями из курса функционального анализа.

Для более углубленного усвоения теоретического материала можно обратиться к учебникам [1], [2] и [3], для развития практических навыков – к учебному пособию [4].

В четвёртом разделе методических указаний на примере конкретного интегрального уравнения Фредгольма 2-го рода, с заданным числовым параметром, проиллюстрированы следующие три различных метода его решения, два из которых – приближённые.

1) Для получения аналитического решения интегрального уравнения необходимо свести его к равносильной краевой задаче для обыкновенного линейного уравнения 2-го порядка с постоянными коэффициентами и специальной правой частью. Затем, применяя стандартные аналитические методы, найти решение этой краевой задачи, проиллюстрировав его графически.

2) Для получения приближённого решения заданного интегрального уравнения найти аналитический вид собственных функций и отвечающих им характеристических значений интегрального оператора уравнения. Используя теорему Гильберта-Шмидта, представить решение исходного интегрального уравнения в виде соответствующего ряда Фурье с базисом из собственных функций этого интегрального оператора. Ограничившись частичной суммой этого ряда найти приближённое решение исходного интегрального уравнения, проиллюстрировав его графически.

3) Методом конечных сумм, используя квадратурные формулы заданного типа, найти приближённое решение исходного интегрального уравнения, проиллюстрировав его графически.

В заключение приведено сравнение приближённых решений исходного интегрального уравнения с аналитическим решением интегрального уравнения.

Целью настоящих методических указаний является ознакомление студентов с аналитическими и численными методами решения интегральных уравнений Фредгольма с аналитически заданным непрерывным и симметричным ядром.

Задача настоящих методических указаний – формирование у студентов *умения*: применять аналитические и приближённые методы решения интегральных уравнений Фредгольма 2-го рода; *владения*: навыками вычисления собственных значений и отвечающих им собственных функций для ядра интегральных уравнений Фредгольма 2-го рода; навыками использования компьютерных программ для численного решения интегральных уравнений.

Методические указания разработаны для выполнения курсовых работ по дисциплине "Функциональный анализ и интегральные уравнения» для студентов по направлению подготовки "Математика и компьютерные науки", а также могут быть использованы для изучения студентами специальности «Прикладная математика».

1. Постановка задачи и теоретические основы для выполнения курсовой работы

В общем случае **уравнением Фредгольма второго рода** называется уравнение вида:

$$\left(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A}\right)\varphi = f\ ,$$

где $\boldsymbol{A}$ - вполне непрерывный оператор, $\boldsymbol{I}$ - единичный оператор. Согласно курсу «Функциональный анализ и интегральные уравнения», **вполне непрерывным** (или **компактным**) оператором называется линейный оператор $\boldsymbol{A}: B_1 \to B_2$ из банахова пространства B_1 и в банахово пространство B_2, переводящий всякое ограниченное множество в предкомпактное.

В настоящей работе будут рассматриваться аналитические методы решения интегральных уравнений Фредгольма 2-го рода на примере интегрального уравнения с аналитически заданным непрерывным и симметричным ядром:

$$\varphi(\tau)-\lambda\int_0^{\pi}|\,\tau-\eta\,|\,\varphi(\eta)d\eta = 1\,, \qquad (1)$$

где

$\tau \in [0, \pi]$. (2)

Сначала исследуются аналитические методы решения уравнения (1) в зависимости от числового параметра $\lambda \in \mathbb{R}$ – некоторый ненулевой параметр, благодаря которому решение интегрального уравнения может иметь разный характер или отсутствовать вовсе. Затем, для решения уравнения (1) с фиксированным параметром λ необходимо применить три различных метода: 1) сведение интегрального уравнения к равносильной краевой задаче для линейного обыкновенного дифференциального уравнения (ОДУ) 2-го порядка с постоянными коэффициентами (аналитический метод), 2) решение в виде частичной суммы ряда Фурье, полученным использованием методов теории Гильберта-Шмидта (приближённое аналитическое решение), и 3) решение уравнения с помощью численного метода конечных сумм, т.е. сведение уравнения к системе линейных алгебраических уравнений (СЛАУ). В заключении необходимо продемонстрировать эффективность двух последних приближённых методов решения, сделав соответствующие выводы.

2. Сведение к краевой задаче

Интегральное уравнение Фредгольма 2-го рода допускает сведение к краевой задаче, если возможно подобрать функцию Грина, индуцирующую ядро заданного интегрального уравнения. Продемонстрируем этот прием на примере уравнения (1). Для этого сделаем дополнительное предположение, что решение уравнения дважды непрерывно дифференцируемо. Уравнение (1) можно переписать в виде:

$$\varphi(\tau) - \lambda \left[\int_0^{\tau} (\tau - \eta)\varphi(\eta)d\eta + \int_{\tau}^{\pi} (\tau - \eta)\varphi(\eta)d\eta \right] = 1. \tag{3}$$

Вычислим вторые производные от интегралов, стоящих в квадратных скобках:

$$\frac{d^2}{d\tau^2}\int_0^{\tau} (\tau - \eta)\varphi(\eta)d\eta = \frac{d}{d\tau}\left(\int_0^{\tau} \varphi(\eta)d\eta \right) = \varphi(\tau),$$

$$\frac{d^2}{d\tau^2}\int_{\tau}^{\pi} (\tau - \eta)\varphi(\eta)d\eta = \frac{d}{d\tau}\left(\int_{\tau}^{\pi} \varphi(\eta)d\eta \right) = -\varphi(\tau).$$

Дифференцируя дважды обе части равенства (3) и используя эти найденные формулы для производных от соответствующих интегралов, получим, что интегральное уравнение (1) эквивалентно следующему дифференциальному уравнению:

$$\frac{d^2\varphi}{d\tau^2} - 2\lambda\varphi = 0\,. \tag{4}$$

Краевые условия для этого дифференциального уравнения получаются из исходного интегрального уравнения (1), если в нём последовательно положить $\tau = 0, \pi$:

$$\varphi(0) - \lambda\int_0^{\pi} \eta\varphi(\eta)d\eta = 1, \tag{5}$$

$$\varphi(\pi) - \lambda\int_0^{\pi} (\pi - \eta)\varphi(\eta)d\eta = 1\,. \tag{6}$$

Для дальнейшего изложения введем обозначение: $\mu = \sqrt{2\lambda}$.

Таким образом, интегральное уравнение (1) было сведено к неоднородной краевой задаче с условиями (5) и (6) для дифференциального уравнения (4). Как известно, общее решение этого уравнения имеет вид:

$$\varphi(\tau) = C_1 e^{\mu\tau} + C_2 e^{-\mu\tau}, \tag{7}$$

где использовано обозначение:

$$\mu = \sqrt{2\lambda}\,. \tag{7'}$$

Отсюда следует, что в зависимости от знака параметра λ решение имеет разный вид. В том случае когда $\lambda > 0$, решение ведет себя экспоненциально, а в случае $\lambda < 0$ – будет периодическим. В следующем разделе детально рассматривается первый случай, а второй, фактически, выводится из первого.

2.1. Случай положительного параметра

Если $\lambda > 0$, то параметр $\mu = \sqrt{2\lambda}$ из (7’) вещественен и положителен. Для удобства последующих выкладок перейдем в равенстве (7) к гиперболическим функциям:

$$\varphi(\tau) = C_3 ch(\mu\tau) + C_4 sh(\mu\tau)\,. \tag{8}$$

Здесь C_3 и C_4 – новые произвольные постоянные, связанные со старыми постоянными из (7) соотношениями:

$$C_3 = C_1 + C_2,$$

$$C_4 = C_1 - C_2\,.$$

Для определения этих новых произвольных постоянных, подставим решение (8) в краевые условия (6) и (7). Для первого краевого условия соответствующие интегралы от гиперболических функций вычисляем методом интегрирования по частям:

$$\int_0^{\pi} \eta ch(\mu\eta)d\eta = \frac{1}{\mu}\left[\pi sh(\mu\pi) - \frac{1}{\mu}(ch(\mu\pi)-1)\right],$$

$$\int_0^{\pi} \eta sh(\mu\eta)d\eta = \frac{1}{\mu}\left[\pi ch(\mu\pi) - \frac{1}{\mu}sh(\mu\pi)\right].$$

Отсюда первое краевое условие примет вид:

$$C_3 - \frac{\mu^2}{2}\left[\frac{C_3}{\mu}\left[\pi sh(\mu\pi) - \frac{1}{\mu}(ch(\mu\pi)-1)\right] + \frac{C_4}{\mu}\left[\pi ch(\mu\pi) - \frac{1}{\mu}sh(\mu\pi)\right]\right] = 1.$$

Или, упрощая:

$$C_3(1-\mu\pi sh(\mu\pi) + ch(\mu\pi)) + C_4(sh(\mu\pi) - \mu\pi ch(\mu\pi)) = 2.$$

Это первое уравнение системы определяющей новые постоянные C_3 и C_4. Аналогичным способом получаем вид второго краевого условия:

$$C_3(ch(\mu\pi)+1) + C_4(sh(\mu\pi)+\mu\pi) = 2.$$

Таким образом, имеем следующую систему линейных уравнений:

$$\begin{pmatrix} 1-\mu\pi sh(\mu\pi)+ch(\mu\pi) & sh(\mu\pi)-\mu\pi ch(\mu\pi) \\ ch(\mu\pi)+1 & sh(\mu\pi)+\mu\pi \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C_3 \\ C_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}. \quad (9)$$

Обозначая матрицу этой системы (9) символом A, из (9) найдем выражение для определителя матрицы этой системы:

$$\det(A) = (1-\mu\pi sh(\mu\pi)+ch(\mu\pi))(sh(\mu\pi)+\mu\pi) - (ch(\mu\pi)+1)(sh(\mu\pi)-\mu\pi ch(\mu\pi)).$$

Упрощая, получаем:

$$\det(A) = 2\mu\pi(ch(\mu\pi)+1) - \mu^2\pi^2 sh(\mu\pi). \quad (10)$$

Из (10), используя формулы для гиперболических функций:

$$ch(t)+1 = 2ch^2(\frac{t}{2}),$$

$$sh(2t) = 2ch(\frac{t}{2})sh(\frac{t}{2}),$$

получаем:

$$\det(A) = 4\mu\pi ch^2(\frac{\mu\pi}{2}) - 2\mu^2\pi^2 ch(\frac{\mu\pi}{2}) sh(\frac{\mu\pi}{2}) . \qquad (11)$$

Рассмотрим сначала невырожденный случай, т.е. предположим, что параметр $\mu = \sqrt{2\lambda}$ подобран так, что $\det(A) \neq 0$. Тогда единственное решение системы (9) определяется формулами Крамера:

$$C_3 = \frac{1}{\det(A)} \begin{vmatrix} 2 & sh(\mu\pi) - \mu\pi ch(\mu\pi) \\ 2 & sh(\mu\pi) + \mu\pi \end{vmatrix} \text{ и } C_4 = \frac{1}{\det(A)} \begin{vmatrix} 1 - \mu\pi sh(\mu\pi) + ch(\mu\pi) & 2 \\ ch(\mu\pi) + 1 & 2 \end{vmatrix}.$$

Вычисляя в этих формулах соответствующие определители $\det(A_1)$ и $\det(A_2)$, получаем:

$$\det(A_1) = 2(sh(\mu\pi) + \mu\pi) - 2(sh(\mu\pi) - \mu\pi ch(\mu\pi)) = 2\mu\pi(1 + ch(\mu\pi)),$$
$$\det(A_2) = 2(1 - \mu\pi sh(\mu\pi) + ch(\mu\pi)) - 2(ch(\mu\pi) + 1) = -2\mu\pi sh(\mu\pi).$$

(11’)

Подставляя эти формулы в общее решение (8), получим:

$$\varphi(\tau) = \frac{2\mu\pi}{\det(A)}((1 + ch(\mu\pi))ch(\mu\tau) - sh(\mu\pi)sh(\mu\tau)) .$$

Далее, пользуясь формулами для гиперболических функций:

$$ch(t - \tau) = ch(t)ch(\tau) - sh(t)ch(\tau),$$
$$ch(t) + ch(\tau) = 2ch(\frac{t + \tau}{2})ch(\frac{t - \tau}{2}),$$

представляем последнее соотношение в виде:

$$\varphi(\tau) = \frac{4\mu\pi}{\det(A)} ch(\frac{\mu\pi}{2}) ch(\mu(\tau - \frac{\pi}{2})) .$$

Используя для определителя $\det(A)$ формулу (11), получаем в регулярном случае для $\lambda > 0$ решение уравнения (4), с краевыми условиями (5) и (6), а, следовательно, и решение исходного интегрального уравнения (1) в виде:

$$\varphi(\tau) = \frac{ch(\mu(\tau - \frac{\pi}{2}))}{ch(\frac{\mu\pi}{2}) - \frac{\mu\pi}{2} sh(\frac{\mu\pi}{2})}, \qquad (12)$$

где $\mu = \sqrt{2\lambda}$. Следует отметить, что это решение включает в себя и случай $\lambda = 0$.

2.2. Случай отрицательного параметра

В случае отрицательных значений параметра λ, параметр $\mu = \sqrt{2\lambda}$ становится чисто мнимым:

$$\mu = \sqrt{2\lambda} = i\sqrt{2|\lambda|} = i\tilde{\mu}.$$

В этом случае решение краевой получим как следствие решения (12), воспользовавшись формулами связи между тригонометрическими и гиперболическими функциями:

$$ch(i\tau) = \cos(\tau),$$
$$sh(i\tau) = i\sin(\tau).$$

В результате из (12) получаем:

$$\varphi(\tau) = \frac{\cos(\tilde{\mu}(\tau - \frac{\pi}{2}))}{\cos(\frac{\tilde{\mu}\pi}{2}) + \frac{\tilde{\mu}\pi}{2}\sin(\frac{\tilde{\mu}\pi}{2})},$$

где $\mu = \sqrt{2\lambda} = i\sqrt{2|\lambda|} = i\tilde{\mu}$. Это соотношение дает решение исходного интегрального уравнения (1) для отрицательных значений параметра λ.

2.3. Вырожденный случай

Перейдем к рассмотрению вырожденного случая, т.е. к исследованию таких значений параметра λ из (10), при которых $\det(A) = 0$. Как и ранее, рассмотрим этот случай раздельно: при отрицательных и положительных значениях параметра λ. Воспользовавшись при $\lambda > 0$ формулой (11), сокращая на множитель $4\mu\pi ch(\frac{\mu\pi}{2})$ и вводя обозначение $t = \frac{\mu\pi}{2}$, получим:

$$ch(t) = tsh(t). \tag{13}$$

Это уравнение, при указанных ограничениях, имеет единственный корень. Действительно, производная функции $F(t) = tsh(t) - ch(t)$, имеющая при $t > 0$ вид:

$$\frac{dF}{dt} = tch(t),$$

– положительна. Поэтому функция F – монотонна. Кроме того:

$$F(1) = -e^{-1} < 0,$$

$$F(2) = \frac{1}{2e^2}(e^4 - 3) > 0.$$

Таким образом, уравнение (13) на интервале $(1;2)$ имеет единственный корень $t = t_0$, что иллюстрирует рис. 1. Приближенное значение этого корня с 14 правильными знаками, вычисленное с помощью метода касательных Ньютона, имеет значение:

$$t_0 = 1.199678640257734.$$

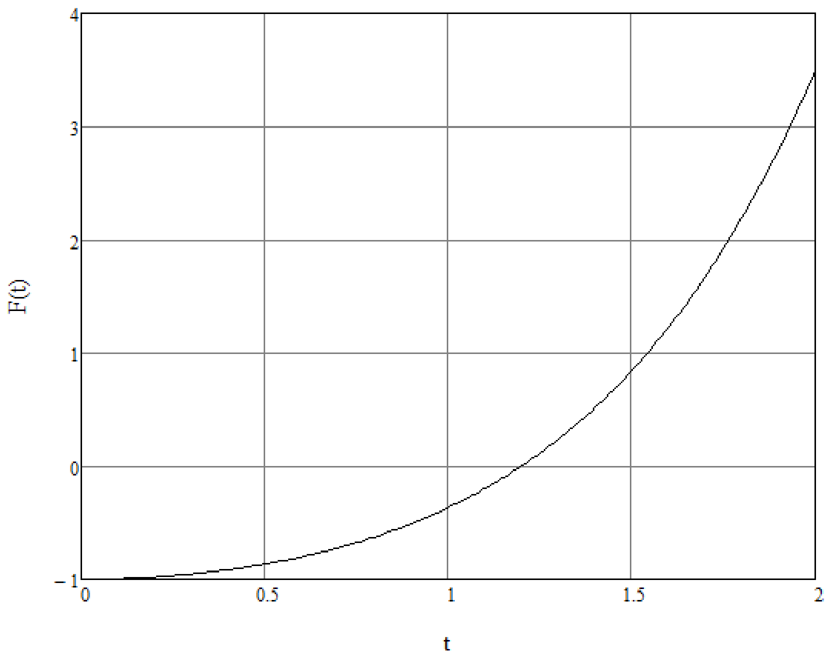

Рис.1. График функции F в области расположения корня

Записывая через параметр t определители матриц Крамера из (11'), получим:

$$\det(A_1) = 4t(1 + ch(2t)),$$

$$\det(A_2) = -4tsh(2t).$$

Отсюда следует, что определители матриц Крамера отличны от нуля при $t = t_0$, следовательно, в этом случае СЛАУ (9) – несовместна. Соответственно, при $\lambda = \frac{2t_0^{\;2}}{\pi^2} \approx 0.291648739179818$, и исходное интегральное уравнение (1) не имеет решения.

Рассмотрим теперь случай, когда $\lambda < 0$. Переходя, как и выше, к параметру $\tilde{\mu} = -i\mu$, в соотношении (11) получим:

$$\det(A) = 4i\tilde{\mu}\pi\cos^2(\frac{\tilde{\mu}\pi}{2}) + 2i\tilde{\mu}^2\pi^2\cos(\frac{\tilde{\mu}\pi}{2})\sin(\frac{\tilde{\mu}\pi}{2}) = 0 .$$

Тогда сокращая на ненулевой множитель $4i\tilde{\mu}\pi$ и вводя параметр $\tilde{t} = \frac{\tilde{\mu}\pi}{2}$, получим следующее уравнение:

$$\cos^2(\tilde{t}) + \tilde{t}\cos(\tilde{t})\sin(\tilde{t}) = 0 . \tag{14}$$

Для рассматриваемого случая определители матриц Крамера из (11') можно записать в следующем виде:

$$\begin{aligned} &\det(A_1) = 4i\tilde{t}(1+\cos(2\tilde{t})), \\ &\det(A_2) = 4\tilde{t}\sin(2\tilde{t}). \end{aligned}, \tag{15}$$

Уравнение (14) подразделяется на два случая:

$$\left[\begin{aligned} &1)\ \cos(\tilde{t}) = 0; \\ &2)\ \cos(\tilde{t}) + \tilde{t}\sin(\tilde{t}) = 0. \end{aligned}\right. \tag{16}$$

Учитывая только положительные корни, в первом случае корнями будут значения:

$$\tilde{t}_k^1 = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}_+ = \{m \in \mathbb{Z} : m \geq 0\} . \tag{17}$$

При этом для определителей матриц Крамера из (15) получим:

$$\begin{aligned} &\det(A_1) = 4i\tilde{t}_k^1(1+\cos(2\tilde{t}_k^1)) = 0; \\ &\det(A_2) = 4\tilde{t}_k^1\sin(2\tilde{t}_k^1) = 0. \end{aligned}$$

Таким образом, в рассматриваемом случае СЛАУ (9) совместна и имеет бесконечно много решений. Соответствующие значения параметра λ имеют вид:

$$\lambda_k = -\frac{(1+2k)^2}{2} . \tag{18}$$

Найдем соответствующие набору величин $\tilde{t}_k^1$ из (17) нетривиальные решения СЛАУ (9). Для этого выпишем явный вид матрицы A для случая, когда $\lambda < 0$:

$$A = \begin{pmatrix} 1+2\tilde{t}\sin(2\tilde{t})+\cos(2\tilde{t}) & \sin(2\tilde{t})-2i\tilde{t}\cos(2\tilde{t}) \\ \cos(2\tilde{t})+1 & i\sin(2\tilde{t})+2i\tilde{t} \end{pmatrix}, \tag{19}$$

Отсюда, при $\tilde{t} = \tilde{t}_k^1$ получаем СЛАУ:

$$\begin{pmatrix} 0 & 2i\tilde{t}_k^1 \\ 0 & 2i\tilde{t}_k^1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C_3 \\ C_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}. \tag{20}$$

Из (20) следует, что $C_4 = -\dfrac{i}{\tilde{t}_k^1}$. Тогда, полагая $C_3 = C$, из (8) получаем вид однопараметрического семейства решений исходного интегрального уравнения, отвечающего данному в (18) набору λ_k:

$$\varphi_k(\tau) = C\cos(\frac{2\tilde{t}_k^1}{\pi}\tau) + \frac{1}{\tilde{t}_k^1}\sin(\frac{2\tilde{t}_k^1}{\pi}\tau). \qquad (21)$$

Перейдем теперь для уравнения (14) к рассмотрению второго случая из (16). В этом случае уравнение (14) имеет счетное число корней. Действительно, производная $F(t) = t\sin(t) + \cos(t)$, имеющая вид:

$$\frac{dF}{dt} = t\cos(t),$$

знакопостоянна на интервалах $I_k = \left(\dfrac{\pi}{2} + \pi k; \pi(k+1)\right), \quad k \in \mathbb{Z}_+$. Кроме того:

$$F\left(\frac{\pi}{2} + \pi k\right) = (-1)^k\left(\frac{\pi}{2} + \pi k\right);$$
$$F\left(\pi(k+1)\right) = (-1)^{k+1}.$$

Таким образом, функция F на границах указанных интервалов I_k имеет разные знаки и монотонна на этих интервалах. Следовательно, она имеет единственный корень в каждом из этих интервалов I_k, который обозначим $\tilde{t}_k^2$ для $k \in \mathbb{Z}_+$. График функции F на интервале I_0 приведен на рис. 2.

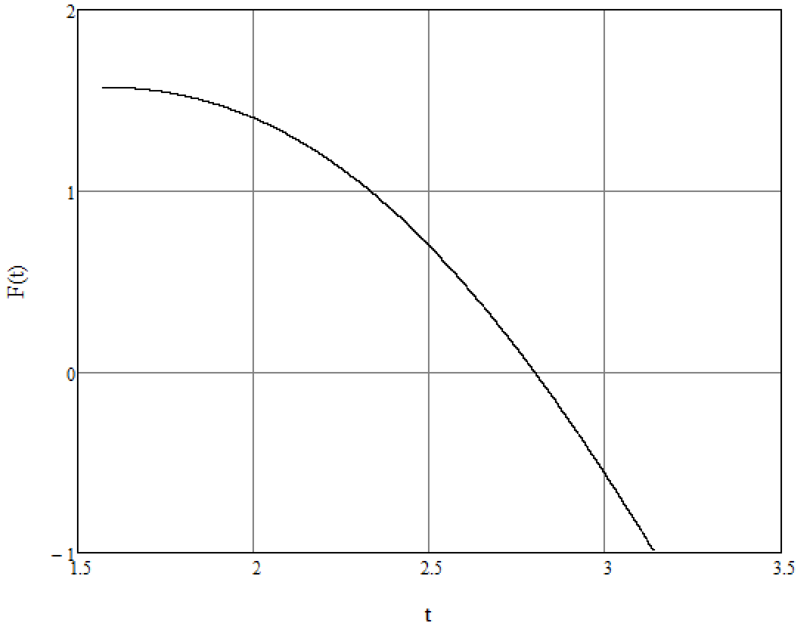

Рис.2. График функции F в области расположения корня $\tilde{t}_0^2$

Для случая $\tilde{t} = \tilde{t}_k^2$ ($k \in \mathbb{Z}_+$) определители матриц Крамера из (15) очевидно отличны от нуля. Поэтому для этого случая СЛАУ (8) – несовместна, и исходное интегральное уравнение (1) для $\lambda = -\dfrac{2\left(\tilde{t}_k^2\right)^2}{\pi^2}$ не имеет решений.

3. Теория Гильберта-Шмидта

Перейдем к рассмотрению теории Гильберта-Шмидта, отметив, что всякий конечномерный линейный оператор является вполне непрерывным. Действительно, всякий конечномерный оператор ограничен, а всякое ограниченное множество в конечномерном пространстве предкомпактно. Примечательным свойством вполне непрерывных операторов является то, что они могут быть аппроксимированы с любой точностью последовательностью конечномерных операторов. В этом смысле, вполне непрерывные операторы можно рассматривать как обобщение конечномерных операторов на бесконечномерный случай. Для самосопряженных вполне непрерывных операторов в гильбертовом пространстве справедлива фундаментальная **теорема Гильберта-Шмидта**, обобщающая известный из линейной алгебры факт: всякий самосопряженный оператор в конечномерном евклидовом пространстве в базисе из собственных векторов имеет диагональную матрицу.

Теорема 3.1. Для всякого вполне непрерывного самосопряженного линейного оператора $\boldsymbol{A}$ в гильбертовом пространстве H существует ортонормированная система собственных векторов $w_{(\cdot)} = (w_n \in H \mid n \in G \subseteq \mathbb{Z})$, отвечающих не более чем счетному набору ненулевых собственных значений (часть из которых может совпадать) $\lambda_{(\cdot)} = (\lambda_n \in \mathbb{R} \mid n \in G \subseteq \mathbb{Z})$, такая, что каждый элемент $\varphi \in H$ записывается единственным образом в виде:

$$\varphi = \sum_{n \in G} c_n w_n + \xi$$

где $\xi \in Ker(\boldsymbol{A}) = \{x \in H : \boldsymbol{A}x = 0_H\}$ – элемент ядра $Ker(\boldsymbol{A})$ оператора $\boldsymbol{A}$. При этом:

$$\boldsymbol{A}\varphi = \sum_{n \in G} \lambda_n c_n w_n$$

Кроме того, если система собственных значений бесконечна, то: $\lim\limits_{n \to \infty} \lambda_n = 0$.►

Воспользуемся этой *теоремой* для построения решения абстрактного уравнения Фредгольма 2-го рода в форме:

$$\left(\boldsymbol{I}-\lambda\boldsymbol{A}\right)\varphi = f\,, \tag{22}$$

где $\boldsymbol{A}$ – вполне непрерывный симметричный оператор, $f \in H$ – некоторый заданный элемент.

Применяя для оператора $\boldsymbol{A}$ *теорему 3.1*, разложим по собственным векторам $w_{(\cdot)} = (w_n \in H : n \in G \subseteq \mathbb{Z})$ этого оператора элементы φ и f :

$$\varphi = \sum_{n\in G}\alpha_n w_n + \xi^1,$$

$$f = \sum_{n\in G}\beta_n w_n + \xi^2,$$

где ξ^1, ξ^2 – некоторые элементы ядра оператора $\boldsymbol{A}$ и $\alpha_n = (\varphi, w_n)$, $\beta_n = (f, w_n)$ - коэффициенты Фурье векторов φ, f по ортонормированной системе $w_{(\cdot)}$. Подставляя эти разложения в уравнение (22), получим:

$$\sum_{n\in G}\left(\alpha_n - \lambda\alpha_n\lambda_n - \beta_n\right)w_n = \xi^2 - \xi^1.$$

Таким образом, элемент, стоящий в левой части этого равенства, принадлежит ядру оператора $\boldsymbol{A}$. Это возможно только в том случае, если все коэффициенты при собственных векторах $w_{(\cdot)}$ равны нулю, поскольку все собственные векторы отвечают ненулевым собственным значениям. Отсюда получаем:

$$\alpha_n(1-\lambda\lambda_n) = \beta_n. \tag{23}$$

Предположим, что при любом $n \in G$ параметр λ удовлетворяет условию: $\lambda \neq \left(\lambda_n\right)^{-1}$. Тогда для коэффициентов α_n разложения по собственным векторам оператора $\boldsymbol{A}$ решения φ уравнения (22) получаем выражение:

$$\alpha_n = \frac{\beta_n}{1-\lambda\lambda_n}.$$

Таким образом, разложение элемента $\boldsymbol{A}\varphi$ имеет вид:

$$A\varphi = \sum_{n\in G}\frac{\beta_n\lambda_n}{1-\lambda\lambda_n}w_n\,.$$

Подставляя это разложение в уравнение (22), получаем **формулу Шмидта**:

$$\varphi = f + \lambda\sum_{n\in G}\frac{\beta_n\lambda_n}{1-\lambda\lambda_n}w_n\,. \tag{24}$$

Эта формула даёт единственное решение уравнения Фредгольма 2-го рода в регулярном случае , т.е. когда число λ^{-1} не совпадает ни с одним из собственных значений оператора $\boldsymbol{A}$.

Рассмотрим теперь вырожденный случай, т.е. предположим, что для некоторого $p \in G$ выполняется условие: $\lambda = \left(\lambda_p\right)^{-1}$. Также будем предполагать, что собственное значение λ_p имеет кратность M_p, т.е. $\lambda_p = \lambda_{p+1} = \ldots = \lambda_{p+M_p-1}$. Но тогда формула (23) примет вид:

$$\beta_k = 0, k = p, p+1, \ldots, p+M_p - 1.$$

Отсюда заключаем, что в вырожденном случае для разрешимости уравнения (22) необходимо и достаточно, чтобы правая часть f уравнения (22) была ортогональна для $k = p, p+1, \ldots, p+M_p-1$ собственным векторам w_k, отвечающих собственному значению λ_p. Кроме того, для $k = p, p+1, \ldots, p+M_p-1$ коэффициенты α_k могут быть выбраны произвольными. Следовательно, в этом случае решений исходного уравнения (22) будет бесконечно много. Таким образом, обозначая произвольные константы $\alpha_k = C_k$, для вырожденного случая получаем формулу Шмидта:

$$\varphi = f + \sum_{n \in G \setminus \{p, p+1, \ldots, p+M_p-1\}} \frac{\lambda \beta_n \lambda_n}{1 - \lambda \lambda_n} w_n + \sum_{n=p}^{p+M_p-1} C_n w_n . \tag{25}$$

Перейдем теперь к рассмотрению одного специального класса вполне непрерывных операторов. Линейный ограниченный и определённый всюду оператор $\boldsymbol{A}$, преобразующий гильбертово пространство H, будем называть оператором из **класса Шмидта**, если для любых двух произвольных ортонормированных базисов $\psi^1_{(\cdot)} = (\psi^1_n \in H \mid n \in \mathbb{Z}_+)$ и $\psi^2_{(\cdot)} = (\psi^2_n \in H \mid n \in \mathbb{Z}_+)$ в пространстве H выполнено соотношение:

$$\sum_{i,j=0}^{\infty} (\boldsymbol{A}\psi^1_i, \psi^2_j)^2 < \infty , \tag{26}$$

Квадратный корень из этого ряда называется **нормой Шмидта** $\|\boldsymbol{A}\|_2$ оператора $\boldsymbol{A}$ или его абсолютной нормой.

Покажем, что норма Шмидта не зависит от выбора базисов $\psi^1_{(\cdot)}$ и $\psi^2_{(\cdot)}$. Действительно, в силу ограниченности сумм (26), из равенства Парсеваля следует, что:

$$\sum_{i,j=0}^{\infty}(\boldsymbol{A}\psi_i^1,\psi_j^2)^2=\sum_{i=0}^{\infty}\left\|\boldsymbol{A}\psi_i^1\right\|^2 .$$

Кроме того, у ограниченного линейного оператора в гильбертовом пространстве существует ограниченный сопряженный оператор, действующий в том же пространстве. Тогда снова из равенства Парсеваля, записанного уже для сопряженного оператора, получим:

$$\sum_{i,j=0}^{\infty}(\boldsymbol{A}\psi_i^1,\psi_j^2)^2=\sum_{i,j=0}^{\infty}(\psi_i^1,\boldsymbol{A}^*\psi_j^2)^2=\sum_{i=0}^{\infty}\left\|\boldsymbol{A}^*\psi_i^2\right\|^2 . \tag{27}$$

Таким образом, от выбора базисов норма Шмидта не зависит. Несложно показать, что норма Шмидта действительно является нормой в классе Шмидта.

Докажем теперь, что любой оператор из класса Шмидта – вполне непрерывный. Для этого разложим значение $\boldsymbol{A}\varphi$ произвольного вектора $\varphi\in H$ по некоторому ортонормированному базису в пространстве H, например, по $\psi_{(\cdot)}^1$, и получим:

$$\boldsymbol{A}\varphi=\sum_{i=0}^{\infty}(\boldsymbol{A}\varphi,\psi_i^1)\psi_i^1 .$$

Для произвольного элемента $\varphi\in H$ и фиксированного значения $n\in\mathbb{N}$, выбирая n-ую частичную сумму этого ряда, получаем значение конечномерного оператора $\boldsymbol{A}_n$:

$$\boldsymbol{A}_n\varphi=\sum_{i=0}^{n}(\boldsymbol{A}\varphi,\psi_i^1)\psi_i^1 .$$

Поскольку оператор $\boldsymbol{A}_n$ конечномерный, то, как было показано выше, он вполне непрерывный. Для квадрата нормы разности $\boldsymbol{A}\varphi$ и $\boldsymbol{A}_n\varphi$ получаем:

$$\left\|\boldsymbol{A}\varphi-\boldsymbol{A}_n\varphi\right\|^2=\left\|\sum_{i=n+1}^{\infty}(\boldsymbol{A}\varphi,\psi_i^1)\psi_i^1\right\|^2=\sum_{i=n+1}^{\infty}(\boldsymbol{A}\varphi,\psi_i^1)^2=\sum_{i=n+1}^{\infty}(\varphi,\boldsymbol{A}^*\psi_i^1)^2 . \tag{28}$$

Из неравенства Коши-Буняковского следует:

$$(\varphi,\boldsymbol{A}^*\psi_i^1)^2\le\left\|\varphi\right\|^2\left\|\boldsymbol{A}^*\psi_i^1\right\|^2 .$$

Используя это неравенство, в формуле (28) получаем:

$$\left\|\boldsymbol{A}\varphi-\boldsymbol{A}_n\varphi\right\|^2\le\left\|\varphi\right\|^2\sum_{i=n+1}^{\infty}\left\|\boldsymbol{A}^*\psi_i^1\right\|^2 .$$

В силу сходимости к нулю остатка сходящегося ряда (27), выбрав n достаточно большим, получим, что сумма ряда $\sum_{i=n+1}^{\infty}\left\|\boldsymbol{A}^*\psi_i^1\right\|^2$ может быть сделана сколь угодно малой. Таким образом, оператор $\boldsymbol{A}$ является поточечным пределом последовательности вполне непрерывных операторов $\boldsymbol{A}_{(\cdot)}=(\boldsymbol{A}_n\colon n\in\mathbb{Z}_+)$ и, следовательно, пределом по норме ограниченных операторов. Но предел последовательности вполне непрерывных операторов является вполне непрерывным оператором. Таким образом, любой оператор из класса Шмидта является вполне непрерывным.

Перейдем теперь к рассмотрению интегральных операторов. Интегральный оператор $\boldsymbol{A}$, определяемый на функциях $\varphi\in L^2[a,b]$ по правилу:

$$\boldsymbol{A}\varphi=\int_a^b K(\tau,\eta)\varphi(\eta)d\eta\,,$$

где функция $K\in L^2\left([a,b]\times[a,b]\right)$ и интеграл является интегралом Лебега, будем называть **оператором Гильберта-Шмидта**. Покажем, что этот оператор принадлежит классу Шмидта и имеет норму Шмидта:

$$\|\boldsymbol{A}\|_2=\sqrt{\int_a^b\int_a^b K^2(\tau,\eta)d\tau d\eta}\,.$$

Из условия $K\in L^2\left([a,b]\times[a,b]\right)$ и теоремы Фубини получаем, что для почти всех $\tau\in[a,b]$ существует интеграл $\int_a^b K^2(\tau,\eta)d\eta$, или иначе, для почти всех $\tau\in[a,b]$ функция $K(\tau,\cdot)\in L^2[a,b]$. Но, поскольку $\varphi\in L^2[a,b]$, то и $K(\tau,\cdot)\varphi\in L^1[a,b]$. Следовательно, функция $\boldsymbol{A}\varphi$ существует для почти всех $\tau\in[a,b]$. Кроме того, используя для $\tau\in[a,b]$ неравенства Коши-Буняковского:

$$\left|\boldsymbol{A}\varphi(\tau)\right|^2=\left|\int_a^b K(\tau,\eta)\varphi(\eta)d\eta\right|^2\le\int_a^b K^2(\tau,\eta)d\eta\int_a^b\varphi^2(\eta)d\eta\,,$$

заменяя на основе теоремы Фубини повторный интеграл двойным, получаем:

$$\|\boldsymbol{A}\varphi\|^2=\int_a^b\left|\boldsymbol{A}\varphi\right|^2d\tau\le\|\varphi\|^2\int_a^b\int_a^b K^2(\tau,\eta)d\tau d\eta\,.$$

Таким образом, оператор $\boldsymbol{A}$ определен на всем пространстве $L^2[a,b]$, отображает его на себя и ограничен.

Для вычисления нормы Шмидта оператора Гильберта-Шмидта нам потребуется следующая вспомогательная теорема, приводимая без доказательства.

Теорема 3.2. Пусть $\psi^i_{(\cdot)}=(\psi^i_n\in L^2[a,b]\,|\,n\in\mathbb{Z}_+),i=1,2,$ – полные ортонормированные системы. Тогда система функций

$\psi_{(\cdot)(\cdot)} = (\psi_{n,m}(\tau,\theta) = \psi_n^1(\tau)\psi_m^2(\theta) \in L^2([a,b]\times[a,b]) : n,m \in \mathbb{Z}_+)$ также является полной ортонормированной системой в пространстве $Y = L^2([a,b]\times[a,b])$).►

Согласно *теореме 3.2,* для нормы Шмидта получаем:

$$\|\boldsymbol{A}\varphi\|_2^2 = \sum_{i,j=0}^{\infty}(\boldsymbol{A}\psi_i^1,\psi_j^2)^2 = \sum_{i,j=0}^{\infty}\left[\int_a^b\int_a^b K(\tau,\eta)\psi_i^1(\tau)\psi_j^2(\tau)d\tau d\eta\right]^2 = \sum_{i,j=0}^{\infty}(K,\psi_{i,j})_Y^2 = (K,K)_Y$$

Здесь $(u,v)_Y = \int_a^b\int_a^b u(\tau,\eta)v(\tau,\eta)d\tau d\eta$ – скалярное произведение в пространстве Y из *теоремы 3.2,* и последнее равенство является равенством Парсеваля, записанным для функции K и полной ортонормированной системы $\psi_{(\cdot)(\cdot)}$. Таким образом, оператор Гильберта-Шмидта принадлежит классу Шмидта и, следовательно, является вполне непрерывным оператором.

Пусть ядро $K \in L^2\left(\left[a,b\right]\times\left[a,b\right]\right)$ оператора Гильберта-Шмидта – симметрично, т.е. $K(\tau,\eta) = K(\eta,\tau)$ для всех $\tau,\eta \in \left[a;b\right]$. Тогда для произвольных функций $\varphi,\psi \in L^2[a,b]$ получаем:

$$(\boldsymbol{A}\varphi,\psi) = \int_a^b\int_a^b K(\tau,\eta)\varphi(\eta)d\eta\psi(\tau)d\tau = \int_a^b\int_a^b K(\tau,\eta)\psi(\tau)d\tau\varphi(\eta)d\eta = \int_a^b\int_a^b K(\eta,\tau)\psi(\tau)d\tau\varphi(\eta)d\eta = (\boldsymbol{A}\psi,\varphi),$$

где, поскольку $K \in L^2\left(\left[a,b\right]\times\left[a,b\right]\right)$, то $h(\cdot,\cdot) = (K(\tau,\eta)\varphi(\tau)\psi(\eta) : \tau,\eta \in \left[a,b\right]) \in L^1\left(\left[a,b\right]\times\left[a,b\right]\right)$, и законность перестановки интегрирований обеспечивается теоремой Фубини. Таким образом, оператор Гильберта-Шмидта с симметричным ядром является самосопряженным вполне непрерывным оператором.

4. Методы решения и исследования исходного интегрального уравнения, зависящего от действительного параметра

В настоящем разделе теория Гильберта-Шмидта, изложенная в предыдущем разделе, применяется для решения и исследования уравнения (1). Это возможно, так как ядро этого оператора, является симметричным, непрерывным и ограниченным на прямоугольнике $[0,\pi]\times[0,\pi]$. Таким образом, интегральный оператор $\boldsymbol{A}\varphi=\int\limits_0^\pi|\tau-\eta|\varphi(\eta)d\eta$ является симметричным оператором Гильберта-Шмидта. Для применения теории Гильберта-Шмидта предварительно необходимо решить задачу на собственные векторы и собственные значения оператора $\boldsymbol{A}$. Таким образом, приходим к задаче поиска решений интегрального уравнения:

$$\int\limits_0^\pi|\tau-\eta|\varphi(\eta)d\eta=\tilde{\lambda}\varphi .$$

Это уравнение, как и исходное уравнение (1), допускает сведение к краевой задаче, которая в этом случае будет однородной. Чтобы воспользоваться уже полученными формулами, обозначив $\lambda=\left(\tilde{\lambda}\right)^{-1}$, запишем это уравнение в форме, аналогичной исходному уравнению (1):

$$\varphi-\lambda\int\limits_0^\pi|\tau-\eta|\varphi(\eta)d\eta=0 . \tag{29}$$

Дифференциальное уравнение, соответствующее этому интегральному уравнению, будет, очевидно, таким же, как и дифференциальное уравнение (4) для исходного интегрального уравнения (1). Краевые условия, в отличие от условий (5) и (6), будут однородными:

$$\varphi(0)-\lambda\int\limits_0^\pi\eta\varphi(\eta)d\eta=0 , \tag{30}$$

$$\varphi(\pi)-\lambda\int\limits_0^\pi(\pi-\eta)\varphi(\eta)d\eta=0 . \tag{31}$$

Следовательно, СЛАУ для нахождения произвольных постоянных в общем решении дифференциального уравнения (29) будет однородным вариантом СЛАУ (9):

$$\begin{pmatrix}1-\mu\pi sh(\mu\pi)+ch(\mu\pi) & sh(\mu\pi)-\mu\pi ch(\mu\pi)\\ ch(\mu\pi)+1 & sh(\mu\pi)+\mu\pi\end{pmatrix}\begin{pmatrix}C_3\\ C_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}. \tag{32}$$

Таким образом, нетривиальные решение этой СЛАУ и, как следствие, уравнения (29) будут существовать когда определитель $\det(A)$ матрицы A СЛАУ (32) будет нулевым. Эти случаи уже были разобраны ранее и приводят к уравнениям (13) и (16). Найдем собственные векторы, отвечающие собственным значениям, определяемыми этими уравнениями.

Начнем, как и ранее, со случая положительных собственных значений. В этом случае существует единственное собственное значение $\tilde{\lambda}_0$, выражаемое через корень уравнения (13) в форме:

$$\tilde{\lambda}_0 = \frac{\pi^2}{2t_0^{\ 2}}\,. \tag{33}$$

Поскольку строчки матрицы системы (29) линейно зависимы, при $t = t_0$ получаем:

$$C_3(ch(2t_0)+1) + C_4(sh(2t_0)+2t_0) = 0\,.$$

Или:

$$2C_3ch^2(t_0) + 2C_4(ch(t_0)sh(t_0)+t_0) = 0\,.$$

Используя уравнение (13), получаем:

$$C_3 = -C_4t_0\,.$$

Отсюда и из формулы (8) получаем собственный вектор:

$$\tilde{w}_0(\tau) = -t_0ch(\frac{2t_0}{\pi}\tau) + sh(\frac{2t_0}{\pi}\tau)\,.$$

Поскольку при рассмотрении теории Гильберта-Шмидта предполагалось, что собственные векторы нормированы, то найденный собственный вектор, как и все последующие, необходимо отнормировать. Вычислим норму вектора $\tilde{w}_0$ как элемента пространства $L^2[0,\pi]$:

$$\left\|\tilde{w}_0\right\|^2 = \int_0^{\pi}\left(-t_0ch(\frac{2t_0}{\pi}\tau) + sh(\frac{2t_0}{\pi}\tau)\right)^2 d\tau = \frac{1}{2}\int_0^{\pi}\left(t_0^2\left(ch(\frac{4t_0}{\pi}\tau)+1\right) - 2t_0sh(\frac{4t_0}{\pi}\tau) + ch(\frac{4t_0}{\pi}\tau) - 1\right)d\tau$$

.

Или:

$$\left\|\tilde{w}_0\right\|^2 = \frac{\pi t_0^2}{2} + \frac{\pi}{4}\left(\frac{t_0}{2}sh(4t_0) + \frac{sh(4t_0)}{2t_0} - 1 - ch(4t_0)\right).$$

Отсюда, понижая аргумент гиперболических функций, получим:

$$\left\|\tilde{w}_0\right\|^2 = \frac{\pi t_0^2}{2} + \frac{\pi}{2}ch(2t_0)\left[\left(t_0 + \frac{1}{t_0}\right)ch(t_0)sh(t_0) - \left(ch^2(t_0) + sh^2(t_0)\right)\right]$$

Учитывая уравнение (13), приходим к выводу, что выражение в квадратных скобках есть нуль. Отсюда получаем следующий нормированный собственный вектор:

$$w_0(\tau) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(\frac{1}{t_0}sh(\frac{2t_0}{\pi}\tau) - ch(\frac{2t_0}{\pi}\tau)\right). \tag{34}$$

Перейдем теперь к рассмотрению случая отрицательных собственных значений. В этом случае, согласно формуле (19), имеем СЛАУ:

$$\begin{pmatrix} 1+2\tilde{t}\sin(2\tilde{t})+\cos(2\tilde{t}) & \sin(2\tilde{t})-2i\tilde{t}\cos(2\tilde{t}) \\ \cos(2\tilde{t})+1 & i\sin(2\tilde{t})+2i\tilde{t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C_3 \\ C_4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{35}$$

Для первого случая из (16), используя формулы (18), получаем систему собственных значений:

$$\tilde{\lambda}_{k+1}=-\frac{2}{\left(1+2k\right)^2}, k\in\mathbb{Z}_+. \tag{36}$$

Но тогда при $\tilde{t}=\tilde{t}_k^1=\frac{\pi}{2}+\pi k$ СЛАУ (35), по аналогии с формулой (20), записывается в виде:

$$\begin{pmatrix} 0 & 2i\tilde{t}_k^1 \\ 0 & 2i\tilde{t}_k^1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C_3 \\ C_4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Отсюда $C_4=0$. Тогда из формулы (8) получаем следующий набор собственных векторов:

$$\tilde{w}_{k+1}(\tau)=\cos(\frac{2\tilde{t}_k^1}{\pi}\tau)=\cos\left[(2k+1)\tau\right], k\in\mathbb{Z}_+.$$

Нормируя эти векторы, получаем:

$$w_{k+1}(\tau)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cos\left[(2k+1)\tau\right]. \tag{37}$$

Для второго случая из (16) получаем систему собственных значений:

$$\tilde{\lambda}_{-k-1}=-\frac{\pi^2}{2\left(\tilde{t}_k^2\right)^2}, k\in\mathbb{Z}_+. \tag{38}$$

Найдем собственные векторы, отвечающие этим собственным значениям. Из СЛАУ (35) получаем:

$$C_3\left(\cos(2\tilde{t}_k^2)+1\right)+iC_4\left(\sin(2\tilde{t}_k^2)+2\tilde{t}_k^2\right)=0.$$

Или:

$$2C_3\cos^2(\tilde{t}_k^2)+2iC_4\left(2\sin(\tilde{t}_k^2)\cos(\tilde{t}_k^2)+\tilde{t}_k^2\right)=0.$$

Используя второе уравнение из (16), получаем:

$$C_4=\frac{i}{\tilde{t}_k^2}C_3.$$

Тогда из формулы (8) получаем следующий набор собственных векторов:

$$\tilde{w}_{-k-1}(\tau)=\cos(\frac{2\tilde{t}_k^2}{\pi}\tau)-\frac{1}{\tilde{t}_k^2}\sin(\frac{2\tilde{t}_k^2}{\pi}\tau), k\in\mathbb{Z}_+$$

Вычисляя норму этих собственных векторов, получим:

$$\left\|\tilde{w}_{-k-1}\right\|^2=\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\left[\left(\cos(\frac{4\tilde{t}_k^2}{\pi}\tau)+1\right)-\frac{2}{\tilde{t}_k^2}\sin(\frac{4\tilde{t}_k^2}{\pi}\tau)+\frac{1}{\left(\tilde{t}_k^2\right)^2}\left(1-\cos(\frac{4\tilde{t}_k^2}{\pi}\tau)\right)\right]d\tau .$$

Или:

$$\left\|\tilde{w}_{-k-1}\right\|^2=\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4\tilde{t}_k^2}\left[\frac{\sin(4\tilde{t}_k^2)}{2}\left(1-\frac{1}{\left(\tilde{t}_k^2\right)^2}\right)+\frac{\cos(4\tilde{t}_k^2)}{\tilde{t}_k^2}+\frac{1}{\tilde{t}_k^2}\right].$$

Отсюда, понижая аргумент тригонометрических функций, получим:

$$\left\|\tilde{w}_{-k-1}\right\|^2=\frac{\pi}{2}+\frac{\pi\cos(2\tilde{t}_k^2)}{2\tilde{t}_k^2}\left[\sin(\tilde{t}_k^2)\cos(\tilde{t}_k^2)\left(1-\frac{1}{\left(\tilde{t}_k^2\right)^2}\right)+\frac{2\cos^2(\tilde{t}_k^2)-1}{\tilde{t}_k^2}\right].$$

Воспользовавшись вторым уравнением из (16), заключаем, что выражение в квадратных скобках равно нулю. Следовательно, система нормированных собственных векторов имеет вид:

$$w_{-k-1}(\tau)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(\cos(\frac{2\tilde{t}_k^2}{\pi}\tau)-\frac{1}{\tilde{t}_k^2}\sin(\frac{2\tilde{t}_k^2}{\pi}\tau)\right), k\in\mathbb{Z}_+ . \tag{39}$$

Таким образом, найдены все собственные векторы $w_{(\cdot)}=(w_n\in L^2[0,\pi]:n\in\mathbb{Z})$ и собственные значения $\lambda_{(\cdot)}=(\lambda_n\in\mathbb{R}:n\in\mathbb{Z})$ рассматриваемого интегрального оператора $\boldsymbol{A}$. Решение в регулярном случае, согласно формуле Шмидта, может быть записано в форме:

$$\varphi=1+\lambda\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{\beta_n\lambda_n}{1-\lambda\lambda_n}w_n . \tag{40}$$

Вычислим коэффициенты Фурье $\beta_{(\cdot)}=(\beta_n=(f,w_n):n\in\mathbb{Z})$ для функции $f\equiv 1$ по системе собственных функций $w_{(\cdot)}$. Для коэффициента β_0 получаем:

$$\beta_0=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\pi}\left(\frac{1}{t_0}sh(\frac{2t_0}{\pi}\tau)-ch(\frac{2t_0}{\pi}\tau)\right)d\tau=\sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{t_0}\left[\frac{1}{t_0}\left(ch(2t_0)-1\right)-sh(2t_0)\right].$$

Понижая здесь аргумент, получим:

$$\beta_0=\sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{2sh(t_0)}{t_0}\left[\frac{sh(t_0)}{t_0}-ch(t_0)\right].$$

Используя уравнение (13), эта формула преобразуется к виду:

$$\beta_0=-\sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{2}{\left(t_0\right)^2}. \tag{41}$$

Вычислим теперь коэффициент β_{k+1} для $k\in\mathbb{Z}_+$:

$$\beta_{k+1}=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\pi}\cos\left[(2k+1)\tau\right]d\tau=0. \tag{42}$$

Вычислим теперь коэффициент β_{-k-1} для $k\in\mathbb{Z}_+$:

$$\beta_{-k-1}=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\pi}\left(\cos(\frac{2\tilde{t}_k^2}{\pi}\tau)-\frac{1}{\tilde{t}_k^2}\sin(\frac{2\tilde{t}_k^2}{\pi}\tau)\right)d\tau=\sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\tilde{t}_k^2}\left(\sin(2\tilde{t}_k^2)+\frac{\cos(2\tilde{t}_k^2)-1}{\tilde{t}_k^2}\right).$$

Понижая здесь аргумент у тригонометрических функций, получим:

$$\beta_{-k-1}=\sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{2\sin(\tilde{t}_k^2)}{\tilde{t}_k^2}\left(\cos(\tilde{t}_k^2)-\frac{\sin(2\tilde{t}_k^2)}{\tilde{t}_k^2}\right).$$

Отсюда, воспользовавшись вторым уравнением из (16), получим:

$$\beta_{-k-1}=-\sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{2}{\left(\tilde{t}_k^2\right)^2}. \tag{43}$$

Таким образом, все коэффициенты $\beta_{(\cdot)}$ найдены. Подставляя их в формулу (40), получим выражение для решения интегрального уравнения (1) в регулярном случае:

$$\varphi=1-2\lambda\pi^2\left(\frac{1}{\left(t_0\right)^2}\frac{\frac{1}{t_0}sh(\frac{2t_0}{\pi}\tau)-ch(\frac{2t_0}{\pi}\tau)}{2\left(t_0\right)^2-\lambda\pi^2}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\left(\tilde{t}_n^2\right)^2}\frac{\frac{1}{\tilde{t}_n^2}\sin(\frac{2\tilde{t}_n^2}{\pi}\tau)-\cos(\frac{2\tilde{t}_n^2}{\pi}\tau)}{2\left(\tilde{t}_n^2\right)^2+\lambda\pi^2}\right). \tag{44}$$

Обозначив здесь n-ый член ряда через c_n, оценим порядок убывания членов этого ряда. Из (44) получаем:

$$\left|c_n(\tau)\right|\le\frac{\frac{1}{\tilde{t}_n^2}+1}{\left(\tilde{t}_n^2\right)^4\left|2+\lambda\left(\frac{\pi}{\tilde{t}_n^2}\right)^2\right|}.$$

Но, поскольку $\frac{\pi}{2}+\pi n<\tilde{t}_n^2<\pi(n+1),\, n\in\mathbb{Z}_+$, то из этого неравенства следует:

$$c_n(\tau) = O(\frac{1}{n^4}) \text{ при } n \to \infty .$$

Перейдем рассмотрению вырожденного случая. В этом случае, как было показано ранее, решение будет существовать тогда и только тогда, когда коэффициенты Фурье для соответствующих собственных векторов обращаются в нуль. Для рассматриваемого уравнения, согласно формуле (42), это имеет место для коэффициентов β_{k+1}, где $k \in \mathbb{Z}_+$. Отсюда заключаем, что решение будет существовать тогда и только тогда, когда для некоторого $k_0 \in \mathbb{Z}_+$ выполняется равенство:

$$\lambda = \left(\tilde{\lambda}_{k_0+1}\right)^{-1} = -\frac{\left(1+2k_0\right)^2}{2} .$$

Тогда для вырожденного случая из формулы Шмидта (25) и формулы (44) получим, что решение в этом случае будет иметь вид:

$$\varphi = 1 - 2\lambda\pi^2 \left(\frac{1}{\left(t_0\right)^2} \frac{\frac{1}{t_0} sh(\frac{2t_0}{\pi}\tau) - ch(\frac{2t_0}{\pi}\tau)}{2\left(t_0\right)^2 - \lambda\pi^2} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\left(\tilde{t}_n^2\right)^2} \frac{\frac{1}{\tilde{t}_n^2}\sin(\frac{2\tilde{t}_n^2}{\pi}\tau) - \cos(\frac{2\tilde{t}_n^2}{\pi}\tau)}{2\left(\tilde{t}_n^2\right)^2 + \lambda\pi^2} \right) + C\cos\left[(2k_0+1)\tau\right],$$

где C – произвольная постоянная.

Таким образом, решение исходного уравнения (1) было исследовано с помощью теории Гильберта-Шмидта как в регулярном, так и в вырожденном случае. Для сравнения аналитического решения, полученного путём сведения к краевой задаче, с приближённым решением, найденным с помощью теории Гильберта-Шмидта, рассмотрим уравнение (1), где положим $\lambda = 2$. Для такого сравнения в ряде (44) ограничимся тремя первыми членами. Результат такого сравнения представлен на рис. 3 и демонстрирует хорошую степень согласия аналитического решения с приближённым.

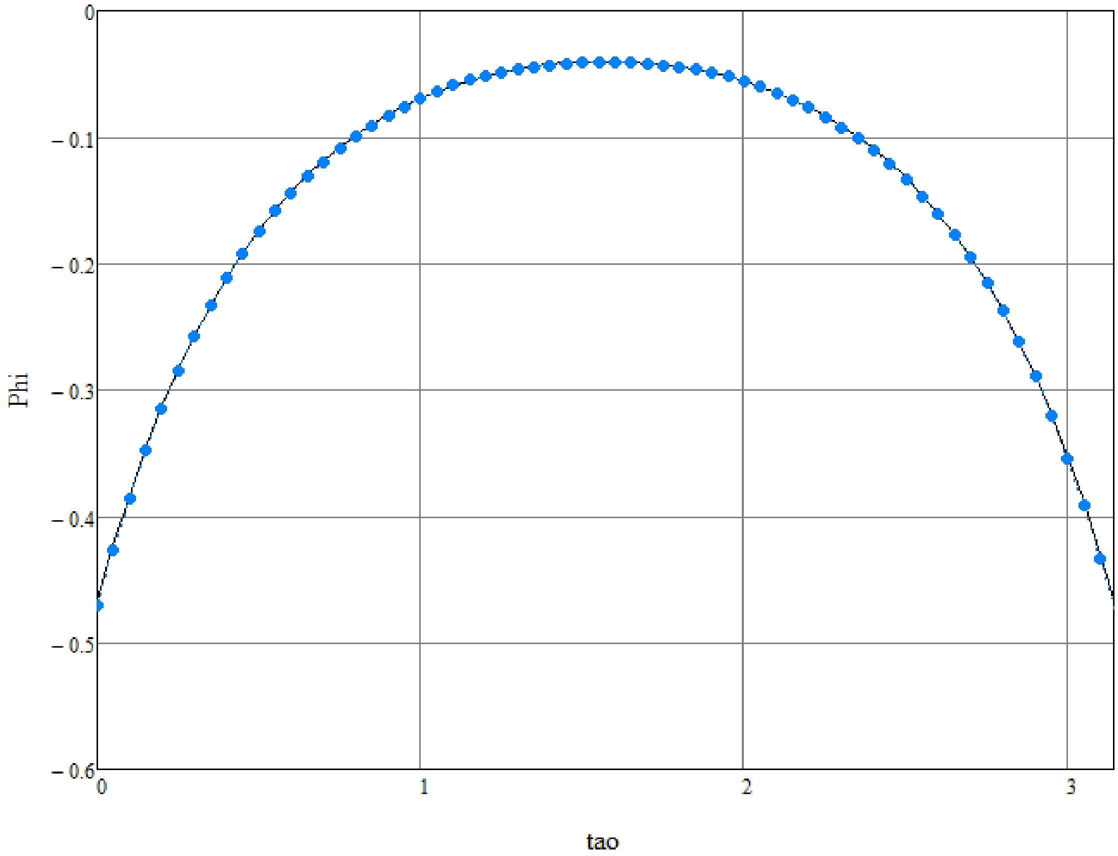

Рис.3. Сравнение графиков аналитического и приближённого решений

4.1. Численный метод конечных сумм для решения интегрального уравнения

Еще одним и наиболее практически значимым приближённым методом решения уравнений Фредгольма второго рода является численный метод конечных сумм. В этом методе, используя квадратурные формулы, решение интегрального уравнения, фактически, заменяется на решение соответствующей СЛАУ. В настоящей работе такая замена будет демонстрироваться на основе квадратурной формулы трапеций.

Пусть $C_n = (0 = \tau_0, \tau_1, \dots, \tau_n = \pi)$ – равномерная сетка отрезка $[0;\pi]$ с шагом $Stp(A_n) = h = \dfrac{\pi}{n}$. Тогда для узлов этой сетки получаем:

$$\tau_i = ih = \frac{i\pi}{n}, \quad i = 0, \dots, n.$$

Подставляя в исходное интегральное уравнение (1) эти узлы, получаем систему уравнений:

$$\varphi(\tau_i)-\lambda\int_0^{\pi}|\,\tau_i-\eta\,|\,\varphi(\eta)d\eta=1,\quad i=0,\ldots,n\,.$$

Отсюда, используя сетку C_n и приближённые квадратурные формулы трапеций, получим СЛАУ:

$$\varphi(\tau_i)-\lambda h\left(\frac{|\,\tau_i-\tau_0\,|\,\varphi(\tau_0)}{2}+\sum_{j=1}^{n-1}|\,\tau_i-\tau_j\,|\,\varphi(\tau_j)+\frac{|\,\tau_i-\tau_n\,|\,\varphi(\tau_n)}{2}\right)=1,\quad i=0,\ldots,n.$$

Вводя векторы-столбцы $\boldsymbol{u}=\left(u^0=\varphi(\tau_0),u^1=\varphi(\tau_1),...,u^n=\varphi(\tau_n)\right)^T$, $\boldsymbol{f}=\left(f^i=1,f^i=1,...,f^i=1\right)^T\in\mathbb{R}^{n+1}$ и матрицу $\boldsymbol{B}=\left(b^i_j=\delta_{ij}-\frac{\lambda h\,|\,\tau_i-\tau_j\,|}{\left(1+\delta_{j0}\right)\left(1+\delta_{jn}\right)}\right)_{n+1}^{n+1}$, получаем стандартную векторную запись этой СЛАУ:

$$\boldsymbol{Bu}=\boldsymbol{f}\,.$$

Решая эту систему, например методом Жордана-Гаусса, получим приближённые значения решения уравнения (1) в узлах введённой сетки.

Для сравнения результатов решения методом конечных сумм ($n=11$ и $n=26$) и аналитическим решением (12) уравнения (1) с $\lambda=2$ на рис. 4 ($n=11$) и рис. 5 ($n=26$) приведены графики аналитического и численного решений. Из графиков видно, что численное решение близко к аналитическому решению.

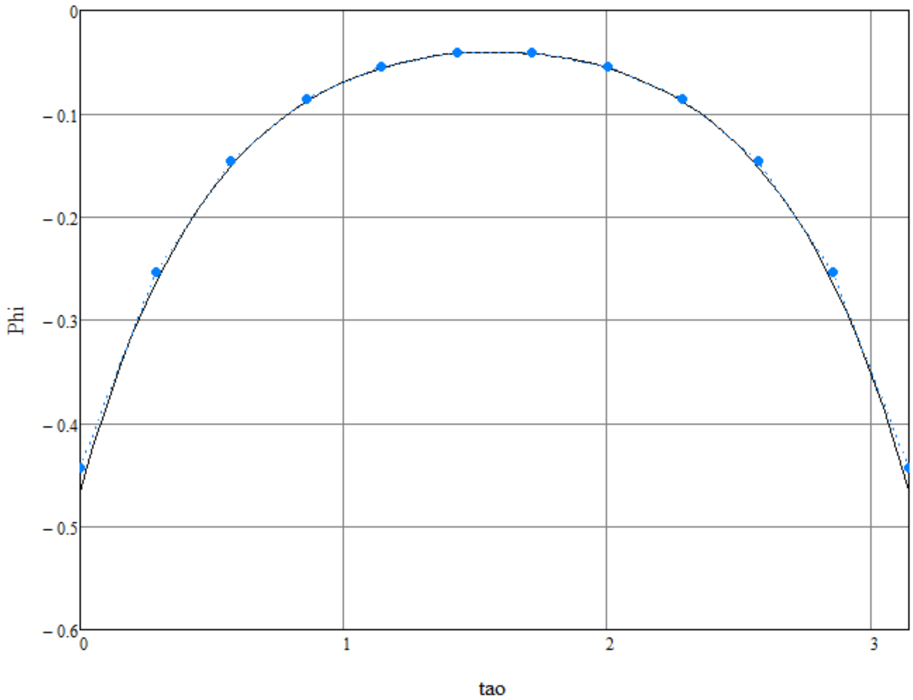

Рис.4. Сравнение численного (при $n=11$) и аналитического решений

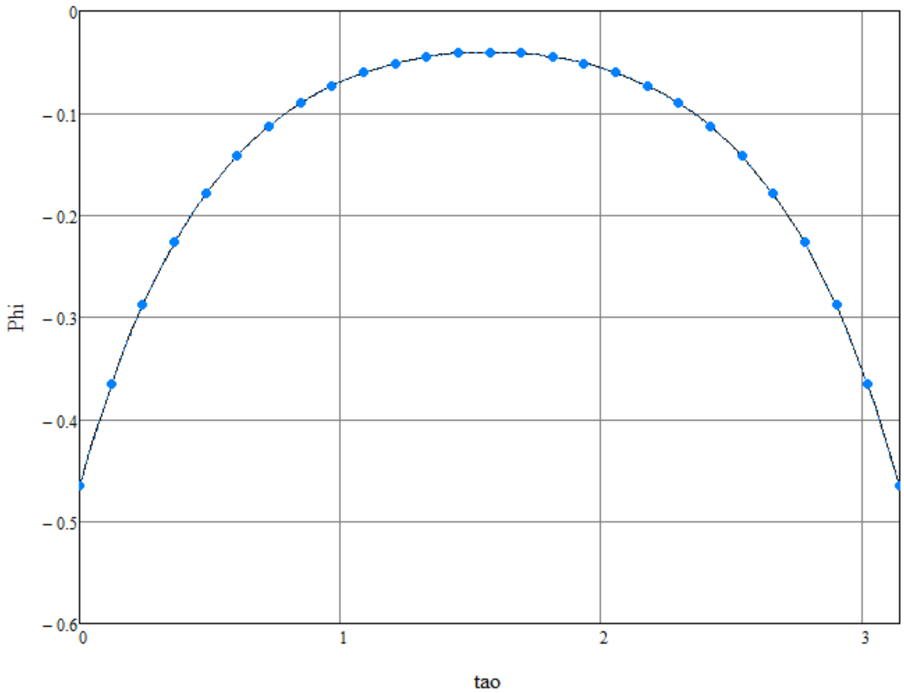

Рис.5. Сравнение численного (при $n = 26$) и аналитического решений

5. Выводы

В настоящей работе исследовались аналитические методы решения интегрального уравнения Фредгольма, зависящего от числового параметра, с аналитически заданным непрерывным и симметричным ядром.

Для решения конкретного уравнения с заданным числовым параметром использовались три различных метода.

1) Для получения аналитического решения интегральное уравнение сводилось к равносильной краевой задаче для обыкновенного линейного уравнения 2-го порядка с постоянными коэффициентами и специальной правой частью. Затем, применяя стандартные аналитические методы, определялось решение этой краевой задачи, являющееся и решением исходного интегрального уравнения.

2) Для получения приближённого решения интегрального уравнения определялся аналитический вид собственных функций и отвечающие им собственные значения интегрального оператора уравнения. Используя теорему Гильберта-Шмидта, решение исходного интегрального уравнения представлялось в виде соответствую-

щего ряда Фурье с ортонормированным базисом из собственных функций этого интегрального оператора. Приближённое решение интегрального уравнения получалось в виде частичной суммы из трёх слагаемых этого ряда Фурье.

3) Третий численный метод, использовавшийся для поиска приближённого решения интегрального уравнения, являлся методом конечных сумм, в котором применялись квадратурные формулы трапеций. В результате задача численного решения интегрального уравнения сводилась к решению соответствующей СЛАУ.

Проведённое затем сравнение аналитического решения интегрального уравнения с приближёнными решениями продемонстрировало эффективность используемых приближённых методов.

6. Порядок выполнения и темы курсовых работ

Общая формулировка тематики Курсовой работы и порядка её выполнения

Для произвольного параметра $\lambda \in \mathbb{R}$, используя два аналитических метода, найти решения интегрального уравнения Фредгольма 2-го рода:

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^b K(x,t)\varphi(t)dt = f(x),\ \ x \in [a;b].$$

Первый аналитический метод состоит в сведении интегрального уравнения к краевой задаче для линейного ОДУ 2-го порядка с постоянными коэффициентами, *второй* – в разложении решения уравнения в ряд Фурье по ортонормированному собственному базису интегрального оператора уравнения.

Для $\lambda = c$ найти решение интегрального уравнения, используя следующие три метода.

1) Для получения аналитического решения интегральное уравнение свести к равносильной краевой задаче для обыкновенного линейного уравнения 2-го порядка с постоянными коэффициентами и специальной правой частью. Затем, применяя аналитические методы курса «Обыкновенные дифференциальные уравнения», определить решение этой краевой задачи, которое является и решением исходного интегрального уравнения.

2) Для получения приближённого решения интегрального уравнения определить аналитический вид собственных функций и отвечающие им собственные значения интегрального оператора уравнения. Используя теорему Гильберта-Шмидта, решение исходного интегрального уравнения представлялось в виде соответствующего ряда Фурье с ортонормированным базисом из собственных функций этого интегрального оператора. Приближённое решение интегрального уравнения получалось в виде частичной суммы из трёх слагаемых этого ряда Фурье.

3) Для поиска численного решения интегрального уравнения применить метод конечных сумм, в котором используются квадратурные формулы прямоугольников.

В заключении провести сравнение аналитического решения интегрального уравнения с приближёнными решениями, продемонстрировав эффективность используемых приближённых методов.

Вариант 1

$$[a;b]=[0;1],\ c=0.4,\ f(x)=x^2\cos x,\quad K(x,t)=\begin{cases}\dfrac{x(2-t)}{2},\ 0\le x\le t;\\ \dfrac{t(2-x)}{2},\ t\le x\le 1.\end{cases}$$

Вариант 2

$$[a;b]=[0;1],\ c=-0.3,\ f(x)=x^2\sin x,\quad K(x,t)=\begin{cases}\dfrac{sh x\, sh(t-1)}{sh 1},\ 0\le x\le t;\\ \dfrac{sh t\, sh(x-1)}{sh 1},\ t\le x\le 1.\end{cases}$$

Вариант 3

$$[a;b]=[0;1],\ c=0.25,\ f(x)=2xe^x,\quad K(x,t)=\begin{cases}x-t,\ 0\le x\le t;\\ t-x,\ t\le x\le 1.\end{cases}$$

Вариант 4

$$[a;b]=[0;\frac{\pi}{2}],\ c=-0.3,\ f(x)=x^2+\sin x,\quad K(x,t)=\begin{cases}\sin x\cos t,\ 0\le x\le t;\\ \sin t\cos x,\ t\le x\le \dfrac{\pi}{2}.\end{cases}$$

Вариант 5

$$[a;b]=[0;1],\ c=0.4,\ f(x)=x\cos x,\quad K(x,t)=\begin{cases}(x+1)(t-3),\ 0\le x\le t;\\(t+1)(x-3),\ t\le x\le 1.\end{cases}$$

Вариант 6

$$[a;b]=[0;\pi],\ c=0.3,\ f(x)=x^2+\sin x,\quad K(x,t)=\begin{cases}\sin(x+\frac{\pi}{4})\cos(t-\frac{\pi}{4}),\ 0\le x\le t;\\\sin(t+\frac{\pi}{4})\cos(x-\frac{\pi}{4}),\ t\le x\le \pi.\end{cases}$$

Вариант 7

$$[a;b]=[0;\pi],\ c=0.5,\ f(x)=2x^2-3,\quad K(x,t)=\begin{cases}\sin x\cos t,\ 0\le x\le t;\\\sin t\cos x,\ t\le x\le \pi.\end{cases}$$

Вариант 8

$$[a;b]=[0;1],\ c=0.4,\ f(x)=x^2\cos x,\quad K(x,t)=\begin{cases}\dfrac{ch\,x\,ch(t-1)}{sh1},\ 0\le x\le t;\\\dfrac{ch\,t\,ch(x-1)}{sh1},\ t\le x\le 1.\end{cases}$$

Вариант 9

$$[a;b]=[0;1],\ c=-0.4,\ f(x)=2x-\cos x,\quad K(x,t)=\begin{cases}-e^{-t}sh\,x,\ 0\le x\le t;\\-e^{-x}sh\,t,\ t\le x\le 1.\end{cases}$$

Вариант 10

$$[a;b]=[0;2],\ c=-0.2,\ f(x)=x^2+2x,\quad K(x,t)=\begin{cases}(x+1)(3-t),\ 0\le x\le t;\\(t+1)(3-x),\ t\le x\le 2.\end{cases}$$

Вариант 11

$$[a;b]=[0;2],\ c=-0.5,\ f(x)=x\cos x,\quad K(x,t)=\begin{cases}x-t,\ 0\le x\le t;\\t-x,\ t\le x\le 2.\end{cases}$$

Вариант 12

$$[a;b]=[0;3],\ c=-0.3,\ f(x)=2x^2 sin\,x,\quad K(x,t)=\begin{cases}(x+2)(t-2),\ 0\le x\le t;\\(t+2)(x-2),\ t\le x\le 3.\end{cases}$$

Вариант 13

$$[a;b]=[0;\pi],\ c=-0.5,\ f(x)=x^2e^x+2,\quad K(x,t)=\begin{cases}\sin(x+\dfrac{\pi}{4})\cos(t-\dfrac{\pi}{4}),\ 0\le x\le t;\\\sin(t+\dfrac{\pi}{4})\cos(x-\dfrac{\pi}{4}),\ t\le x\le \pi.\end{cases}$$

Вариант 14

$$[a;b]=[0;1],\ c=0.4,\ f(x)=2x^3-x+1,\quad K(x,t)=\begin{cases}\dfrac{ch\,x\,ch(t-1)}{sh1},\ 0\le x\le t;\\\dfrac{ch\,t\,ch(x-1)}{sh1},\ t\le x\le 1.\end{cases}$$

Вариант 15

$$[a;b]=[0;1],\ c=0.6,\ f(x)=3xsinx,\quad K(x,t)=\begin{cases}-e^{-t}sh\,x,\ 0\le x\le t;\\-e^{-x}sh\,t,\ t\le x\le 1.\end{cases}$$

7. Вопросы для самоконтроля

1) Что такое гильбертово пространство?

2) Что такое ортонормированный базис гильбертова пространства?

3) Как определяется в гильбертовом пространстве ряды Фурье.

4) Что такое вполне непрерывный линейный оператор?

5) Является ли конечномерный линейный оператор вполне непрерывным?

6) Как определяется сопряжённый оператор для линейного оператора в гильбертовом пространстве?

7) В каком случае линейный оператор является самосопряжённым?

8) Как определяется интегральное уравнение Фредгольма 2-го рода?

9) Как определяется ядро Гильберта-Шмидта для интегрального оператора?

10) Как формулируется теорема Гильберта-Шмидта для интегральных операторов?

Литература

1. Колмогоров А. Н., Фомин С. В. Элементы теории функций и функционального анализа. М. «Наука»; 2008. – 547 стр.

2. Треногин В. А. Функциональный анализ. М. «Наука»; 2009. – 495 стр.

3. Власова Е. А., Зарубин В. С., Кувыркин Г. Н. Приближенные методы математической физики. М. Изд-во МГТУ; 2006. – 700с.

4. Краснов М.Л., А.И. Киселёв, Г.И. Макаренко. Интегральные уравнения (задачи и примеры с подробными решениями). Учебное пособие. М.: Едиториал УРСС, 2005. – 192 с.