Опр. 0.1. Выражение $\hat{H}\psi = E\psi$ называется стационарным уравнением Шредингера, где $E = \hbar\omega$ - соотношение Эйнштейна.

Опр. 0.2. Симметричная волновая функция описывает частицы, называемые бозонами.
Бозоны - частицы с целым спином ($s = 0, 1, 2...$)
Антисимметричная волновая функция описывает частицы, называемые фермионами.
Фермионы - частицы с полуцелым спином ($s = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}...$)

Эрмитов оператор
$\hat{A}\,|j\rangle = a_j\,|j\rangle$
Принцип неразичимости частиц одного сорта
В классической механике всегда есть возможность различить (пронумеровать объекты и сохранить нумерацию в течении всего времени их существования) одинаковые объекты, в то время как квантовомеханическое описание делает невозможным различить одинаковые объекты.

$$< x|\hat{A}|x >=< \widetilde{x}|\hat{A}|\widetilde{x} > \tag{0.1}$$

- это математическая формулировка принципа неразличимости частиц. Не существует наблюдаемых отличий между системой в состоянии $|x >$ и состемой в состоянии $|\widetilde{x} >= \hat{P}|x >$, где $\hat{P}$ - ***оператор перестановки***

Опр. 0.3. $\hat{P}$ -оператор перестановки, в основе его определения лежит действие на базисные векторы $|i > |j >$. Это означает, что под действием оператора на 2-хчастичное состояние, в котором 1-я частица находилась в состоянии $|i >$, а 2-я в состоянии $|j >$, получается 2-хчастичное состояние, в котором 1-я частица находится в состоянии $|j >$, а 2-я в состоянии $|i >$.$\hat{P}$ - эрмитов оператор и так же унитарен.

Постулат симметризации Состояния системы, содержащей N тождественных частиц, будут все либо симметричными, либо антисимметричными относительно перестановок этих N частиц.
Принцип запрета Паули
Система из двух одинаковых фермионов не может находится в состоянии Ψ содержащих одинаковые одночастичные состояния ϕ - Принцип запрета Паули.
Обобщенное соотношение неопределённостей Хайзенберга
Квантовая механика позволяет нам определить вероятность того или иного результата экспемента и среднее значение физической величины.
Пусть $\hat{A}\,|j\rangle = a_j\,|j\rangle$.
$\Delta A \Delta B \geq \frac{|\langle[\hat{A}, \hat{B}]\rangle|}{2}$
Факторизованное состояние
Общее состояние составной системы $|Gst\rangle$в некоторых случаях можно представить в форме $|fst\rangle = |st\rangle_1\,|stt\rangle_2$ ***факторизованного состояния*** (в виде тензорного произведения (знак опущен) состояний каждого элемента системы).
Запутанные системы
Не все состояния системы можно представить в виде произведениясостояний системы. Это приводит к наличию ***запутанных состояний***.
Эксперимент Штерна-Герлаха
На атом обладающий магнитным моментом $\vec{\mu}$, в неоднородном магнитном поле $\vec{B}$ должна действовать сила

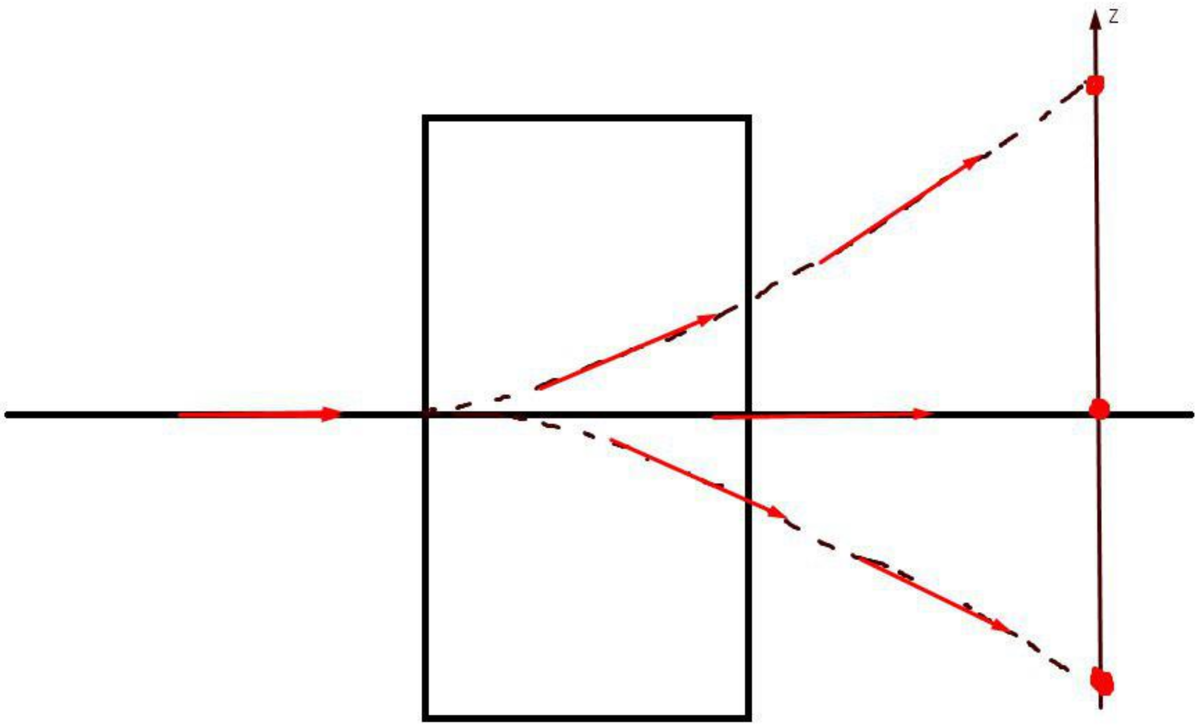
$$\vec{f} = (\vec{\mu} \cdot \nabla)\,\vec{B}$$

Чтоб рассуждать было проще, пусть $B_x, B_y = 0$ и $B_z \neq 0$, тогда

$$\vec{f} = \left(\mu_x \partial_x B_z + \mu_y \partial_y B_z + \mu_z \partial_z B_z\right) \vec{e}_z$$

направлена либо по либо против z. Пусть неоднородность создана лишь вдоль z тогда $\partial_x B_z = 0; \partial_y B_z = 0$

Опыт выглядит довольно просто: направим пучок атомов в область неоднородного магнитного поля и посмотрим что будет на выходе из этой области. В области неоднородного магнитного поля на атомы с $\mu_z \neq 0$ действует сила $f_z \sim \mu_z$; в результате они отклоняются от первоначального направления; величина отклонения тем больше, чем больше $|\mu_z|$; вверх или вниз зависит от знака μ_z. Согласно квантовой механике μ_z квантуется $\Rightarrow$ исходный пучок обязан расщепиться на число пучков, равное числу разрешенных μ_z. В итоге должно получится что-то вроде(**пространственное квантование** – набор эквидистантных пятен на экране): **Гипотеза**



спина электрона

Подсчитаем число пучков на выходе из неоднородного $\vec{B}$. Вопрос: Сколько возможных μ_z ?

$$\mu_z = -\mu_B m$$

где μ_B - магнетон Бора.

При фиксированном l число возможных m составляет $2l+1$ и учитывая, что $l, n \in N$, приходим к выводу, что число возможных m - нечетное. Проверим это:

Для этого пропустим пучок атомов водорода с $l = 0$ через область неоднородного магнитного поля. Поскольку $l = 0 \Rightarrow m = 0 \Rightarrow \mu_z = 0 \Rightarrow$ пучок должен проследовать прямо в центр экрана, НО это не так - он расщепляется на две составляющие! Таким образом приходиться предположить, что электрон обладает собственным моментом импульса или спином, которому соответствует некоторый магнитный момент. Приходим к определению полного момента импульса частицы:

$$\hat{J} = \hat{L} + \hat{S}$$

где $\hat{L}$ - орбитальный момент, $\hat{S}$ - спин.

Ввиду того (как оказалось), что электрон обладает внутренней степенью свободы(спином), то теперь для того, чтобы охарактеризовать его стационарные состояния в поле ядра нам потребуется уже не 3 квантовых числа а четыре (добавляется спиновое квантовое число - m_s)

Функция распределения Бозе-Эйнштейна
Функция распределения Бозе-Эйнштейна для частиц с целым (в том числе нулевым) спином имеет вид:

$$f(\varepsilon) = 1/(e^{\frac{\varepsilon-\mu}{kT}} - 1)$$

где ε - кинетическая энергия частицы, μ - химический потенциал, зависящий от температуры.
Функция распределения Ферми-Дирака
Функция распределения Ферми-Дирака определяет вероятность заселения (из-за двух возможнх ориентаций спина на каждом уровне энергии могут находиться 2 электрона) уровня с энергией ε и имеет вид:

$$f(\varepsilon) = 1/(e^{\frac{\varepsilon-\varepsilon_F}{kT}} + 1)$$

Здесь ε_F - энергия Ферми, параметр, определяемый из очевидного условия, что сумма заселенности всех уровней энергии должна равняться полному числу электронов:

$$\sum f(\varepsilon) = N_\varepsilon$$

Матрицы Паули
Если $s = \dfrac{1}{2}$, то возможны только два состояния

$$\left|\frac{1}{2} m_s\right\rangle; \qquad m_s = \pm\frac{1}{2} \tag{0.2}$$

Про состояние, котором проекция спина на направление z положительна,говорят "спин вверх запись же тоже сократим:

$$\left|\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right\rangle \equiv |+\rangle \tag{0.3}$$

Когда проекция отрицательна "спин вниз":

$$\left|\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right\rangle \equiv |-\rangle \tag{0.4}$$

Состояния $|+\rangle$ и $|-\rangle$
- ортогональны (в силу того, что являются собственными векторами, отвечающими различным с.з. оператора $\hat{S}_z$): $\langle -|+\rangle = \langle +|-\rangle = 0$
- норм. на единицу: $\langle -| =\rangle = \langle +|+\rangle = 1$
Соотношения при $s = \dfrac{1}{2}$:

$$\hat{S}^2 |sm_s\rangle = \hbar^2 s(s+1) |sm_s\rangle \tag{0.5}$$

$$\hat{S}_z |sm_s\rangle = \hbar m_s |sm_s\rangle \tag{0.6}$$

$$\hat{S}_\pm |sm_s\rangle = \hbar\sqrt{s(s+1) - m_s(m_s \pm 1)}\, |sm_s \pm 1\rangle \tag{0.7}$$

$$\hat{S}^2 |+\rangle = \hbar\frac{3}{4} |+\rangle \qquad \hat{S}_z |+\rangle = \frac{\hbar}{2} |+\rangle \qquad \hat{S}_+ |+\rangle = 0 \qquad \hat{S}_- |+\rangle = \hbar |-\rangle \tag{0.8}$$

$$\hat{S}^2 |-\rangle = \frac{3}{4}\hbar |-\rangle \qquad \hat{S}_z |-\rangle = -\frac{\hbar}{2} |-\rangle \qquad \hat{S}_+ |-\rangle = \hbar |+\rangle \qquad \hat{S}_- |-\rangle = 0 \tag{0.9}$$

$$\tag{0.10}$$

Выпишем матрицы операторов $\hat{S}^2, \hat{S}_z, \hat{S}_\pm$ ($\hat{A} \,:\, A_{ij} \equiv \langle i|\hat{A}|j\rangle$):

$$\hat{S}^2 = \begin{pmatrix} \langle +|\hat{S}^2|+\rangle & \langle +|\hat{S}^2|-\rangle \\ \langle -|\hat{S}^2|+\rangle & \langle -|\hat{S}^2|-\rangle \end{pmatrix} = \frac{3}{4}\hbar^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{0.11}$$

$$\hat{S}_z = \begin{pmatrix} \langle +|\hat{S}_z|+\rangle & \langle +|\hat{S}_z|-\rangle \\ \langle -|\hat{S}_z|+\rangle & \langle -|\hat{S}_z|-\rangle \end{pmatrix} = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{0.12}$$

$$\hat{S}_+ = \begin{pmatrix} \langle +|\hat{S}_+|+\rangle & \langle +|\hat{S}_+|-\rangle \\ \langle -|\hat{S}_+|+\rangle & \langle -|\hat{S}_+|-\rangle \end{pmatrix} = \hbar \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{0.13}$$

$$\hat{S} = \begin{pmatrix} \langle +|\hat{S}_-|+\rangle & \langle +|\hat{S}_-|-\rangle \\ \langle -|\hat{S}_-|+\rangle & \langle -|\hat{S}_-|-\rangle \end{pmatrix} = \hbar \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{0.14}$$

$$\hat{S}_x = \frac{\hat{S}_+ + \hat{S}_-}{2} = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{0.15}$$

$$\hat{S}_y = \frac{\hat{S}_+ - \hat{S}_-}{2i} = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \tag{0.16}$$

$$\hat{\sigma}_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{0.17}$$

$$\hat{\sigma}_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{0.18}$$

$$\hat{\sigma}_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \tag{0.19}$$

$$\tag{0.20}$$