Э-19 4-вектор плотности тока. Уравнение Максвелла «с источниками». Закон сохранения электрического заряда.

4-вектор плотности тока

$$\rho(t,\vec{x}) = \sum_a q_a \delta(\vec{x} - \vec{x}_a(t))$$
$$\vec{j}(t,\vec{x}) = \sum_a q_a \vec{v}_a \delta(\vec{x} - \vec{x}_a(t)),$$

где a - индекс частицы.

Утв. 0.1. $j^{\mu}_{(x)} \equiv \left(\rho(t,\vec{x}), \vec{j}(t,\vec{x})\right)$ есть 4-вектор.

Док-во.

$$j^{\mu}_{(x)} = \sum_a q_a \frac{dx^{\mu}_a}{dt}\delta(\vec{x} - \vec{x}_a(t)) = \sum_a q_a \frac{dx^{\mu}_a}{dr_a}\frac{dr_a}{dt}\delta(\vec{x} - \vec{x}_a(t)) = \sum_a q_a \int dr \frac{dx^{\mu}_a}{dr}\frac{\delta(r - r_a)}{\left(\frac{dt}{dr}\right)_{r=r_a}}\delta(\vec{x} - \vec{x}_a(r)) =$$
$$= \sum_a q_a \int dx^{\mu}_a \delta(x - x_a(r))$$

x^{μ}_a - 4-вектор, $\delta(x - x_a(r))$ - Лоренцев скаляр $\rightarrow$ $j^{\mu}_{(x)}$ - 4-х вектор.

■

Уравнение Максвелла «с источниками»

$\mathcal{L}$ - плотность лагранжиана.

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{emf} + \mathcal{L}_{int}$$
$$\mathcal{L}_{emf} = -\frac{1}{4}F\cdot\cdot F = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\nu\mu} = \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$$
$$\mathcal{L}_{int} = -j\cdot\mathcal{A} = -j_{\mu}\mathcal{A}^{\mu}$$
$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\mathcal{A}^{\alpha}} = \frac{\partial\mathcal{L}_{int}}{\partial\mathcal{A}^{\alpha}} = -j_{\mu}\delta^{\mu}_{\alpha} = -j_{\alpha};$$
$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_{\beta}\mathcal{A}^{\alpha})} = \frac{\partial\mathcal{L}_{emf}}{\partial(\partial_{\beta}\mathcal{A}^{\alpha})} = \frac{1}{4}\cdot 2F_{\mu\nu}\frac{\partial F^{\mu\nu}}{\partial(\partial_{\beta}\mathcal{A}^{\alpha})} = \frac{1}{2}F_{\mu\nu}\frac{\partial(\partial^{\mu}\mathcal{A}^{\nu} - \partial^{\nu}\mathcal{A}^{\mu})}{\partial(\partial_{\beta}\mathcal{A}^{\alpha})} = \frac{1}{2}\left(F^{\mu}_{\nu}\frac{\partial(\partial_{\mu}\mathcal{A}^{\nu})}{\partial(\partial_{\beta}\mathcal{A}^{\alpha})} - F^{\nu}_{\mu}\frac{\partial(\partial_{\nu}\mathcal{A}^{\mu})}{\partial(\partial_{\beta}\mathcal{A}^{\alpha})}\right) =$$
$$= \frac{1}{2}\left(F^{\mu}_{\nu}\delta^{\beta}_{\mu}\delta^{\nu}_{\alpha} - F_{\mu}{}^{\nu}\delta^{\beta}_{\nu}\delta^{\mu}_{\alpha}\right) = \frac{1}{2}\left(F^{\beta}_{\alpha} - F_{\alpha}{}^{\beta}\right)$$

Подставляем полученные частные производные в полевые уравнения Эйлера - Лагранжа:

$$-j_{\alpha} - \frac{1}{2}\partial_{\beta}\left(F^{\beta}_{\alpha} - F_{\alpha}{}^{\beta}\right) = 0 \rightarrow \partial^{\beta}F_{\beta\alpha} = -j_{\alpha}$$

Распишем подробнее:

$$\partial^0 F_{00} + \partial^1 F_{10} + \partial^2 F_{20} + \partial^3 F_{30} = -j_0 \rightarrow \partial_x E_x + \partial_y E_y + \partial_z E_z = \rho$$
$$\begin{cases} \partial^0 F_{01} + \partial^1 F_{11} + \partial^2 F_{21} + \partial^3 F_{31} = -j_1 \rightarrow -\partial_t(-E_x) - \partial_y B_z + \partial_z B_y = -j_x \\ \partial^0 F_{02} + \partial^1 F_{12} + \partial^2 F_{22} + \partial^3 F_{32} = -j_2 \rightarrow -\partial_t(-E_y) + \partial_x B_z - \partial_z B_x = -j_y \\ \partial^0 F_{03} + \partial^1 F_{13} + \partial^2 F_{23} + \partial^3 F_{33} = -j_3 \rightarrow -\partial_t(-E_z) - \partial_x B_y + \partial_y B_x = -j_z \end{cases}$$

Первое уравнение дает выражение для дивергенции электрического поля, остальные три - для ротора магнитного поля. Так получаем вторую пару уравнений Максвелла:

$$\begin{cases} \nabla \cdot \vec{E} = \rho \\ \nabla \times \vec{B} = \partial_t \vec{E} + \vec{j} \end{cases}$$

Закон сохранения электрического заряда.
Из уравнений Максвелла «с источниками» :

$$\partial^\beta F_{\beta\alpha} = -j_\alpha \longrightarrow \partial^\alpha \partial^\beta F_{\beta\alpha} = -\partial^\alpha j_\alpha$$
$$\partial^\alpha \partial^\beta F_{\beta\alpha} = \partial^\beta \partial^\alpha F_{\alpha\beta} = \partial^\alpha \partial^\beta F_{\alpha\beta} = -\partial^\alpha \partial^\beta F_{\beta\alpha} \longrightarrow \partial^\alpha \partial^\beta F_{\beta\alpha} = 0$$

Получаем закон сохранения электрического заряда:

$$\partial^\alpha j_\alpha = 0,$$

или:

$$\partial_t \rho + \nabla \cdot \vec{j} = 0$$