Э-13 Убедитесь, что симметризованный тензор энергии-импульса электромагнитного поля калибровочно инвариантен; интерпретируйте его компоненты.

Канонический тензор энергии-импульса имеет вид:

$$\underset{emf}{T}^{\mu\nu} = F^{\mu\lambda}\partial^{\nu}A_{\lambda} - \frac{1}{4}F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta}\eta^{\mu\nu}$$

$$\underset{emf}{T}^{\mu\nu} - F^{\mu\lambda}\partial_{\lambda}A^{\nu} = F^{\mu\lambda}(\partial^{\nu}A_{x} - \partial_{\lambda}A^{\nu}) - \frac{1}{4}F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta}\eta^{\mu\nu} = F^{\mu\lambda}F^{\nu}_{\lambda} - \frac{1}{4}F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta}\eta^{\mu\nu} \equiv \underset{emf}{\Theta}^{\mu\nu}$$

$\underset{emf}{\Theta}^{\mu\nu}$ - симметризованый тензор энергии-импульса электромагнитного поля.
Выразим компоненты тензора $T^{\mu\nu}$ через напряжённости электрического и магнитного полей. С помощью значений $F_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & -H_z & H_y \\ -E_y & H_z & 0 & -H_x \\ -E_z & -H_y & H_x & 0 \end{bmatrix}$, $\quad F^{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -H_z & H_y \\ E_y & H_z & 0 & -H_x \\ E_z & -H_y & H_x & 0 \end{bmatrix}$ легко убедиться в том, что T^{00} совпадает, как и следовало, с плотностью энергии $W = \dfrac{E^2 + H^2}{8\pi}$, а компоненты $cT^{0\alpha}$ - с компонентами вектора Пойнтинга $S = \dfrac{c}{4\pi}[EH]$. Пространственные же компоненты $T^{\alpha\beta}$ образуют трёхмерный тензор с составляющими

$$\sigma_{xx} = \frac{1}{8\pi}(E_y^2 + E_z^2 - E_x^2 + H_y^2 + H_z^2 - H_x^2),$$
$$\sigma_{xy} = -\frac{1}{4\pi}(E_xE_y + H_xH_y)$$

и т. д., или

$$\sigma_{\alpha\beta} = \frac{1}{4\pi}\{-E_{\alpha}E_{\beta} - H_{\alpha}H_{\alpha} + \frac{1}{2}\delta_{\alpha\beta}(E^2 + H^2)\}.$$

Этот трёхмерный тензор называют максвелловским тензором напряжений.

Проверим удовлетворяет ли симметризованый тензор энергии-импульса электромагнитного поля локальному закону сохранения, т.е. уравнению непрерывности

$$\partial_{\mu}\underset{emf}{\Theta}^{\mu\nu} = 0.$$

Проверим, так ли это:

$$\partial_{\mu}\underset{emf}{\Theta}^{\mu\nu} = \partial_{\mu}\underset{emf}{T}^{\mu\nu} - \partial_{\mu}(F^{\mu\lambda}\partial_{x}A^{\nu})$$

$\partial_{\mu}\underset{emf}{T}^{\mu\nu} = 0$, (см.упр.в разделе "Канонический тензор энергии-импульса")
$\partial_{\mu}(F^{\mu\lambda})\partial_{x}A^{\nu} = 0$, т.к. в теории свободного ЭМП $\partial_{\mu}F^{\mu\lambda} = 0$(см. ур. Максвелла "с источниками когда этих источников нет($\gamma^{\lambda} = 0$))
$F^{\mu\lambda}\partial_{\mu}\partial_{x}A^{\nu} = 0$, т.к. антисимметричный тензор Максвелла сворачивается с симметричным $\partial_{\mu}\partial_{\lambda}$.