Э-12 Калибровочные преобразования. Инвариантность тензора Максвелла относительно калибровочных преобразований. Связь полей $\vec{E}$ и $\vec{B}$ с 4-векторным потенциалом A^μ.

Калибровочные преобразования

$$\mathcal{A}_\mu \longrightarrow \mathcal{A}'_\mu \equiv \mathcal{A}_\mu + \partial_\mu f(x)$$

Инвариантность тензора Максвелла относительно калибровочных преобразований

$$F_{\mu\nu} \longrightarrow F'_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu \mathcal{A}'_\nu - \partial_\nu \mathcal{A}'_\mu = \partial_\mu \mathcal{A}_\nu + \partial_\mu \partial_\nu f(x) - \partial_\nu \mathcal{A}_\mu - \partial_\nu \partial_\mu f(x) = F_{\mu\nu}$$

Связь полей $\vec{E}$ и $\vec{B}$ с 4-векторным потенциалом A^μ

$$\left.\begin{aligned} -E_x &= F_{01} = \partial_0 \mathcal{A}_1 - \partial_1 \mathcal{A}_0 \\ -E_y &= F_{02} = \partial_0 \mathcal{A}_2 - \partial_2 \mathcal{A}_0 \\ -E_z &= F_{03} = \partial_0 \mathcal{A}_3 - \partial_3 \mathcal{A}_0 \end{aligned}\right\} \qquad \vec{E} = -\nabla\phi - \partial_t \vec{\mathcal{A}}$$

$$\left.\begin{aligned} B_x &= F_{23} = \partial_2 \mathcal{A}_3 - \partial_3 \mathcal{A}_2 \\ -B_y &= F_{13} = \partial_1 \mathcal{A}_3 - \partial_3 \mathcal{A}_1 \\ B_z &= F_{12} = \partial_1 \mathcal{A}_2 - \partial_2 \mathcal{A}_1 \end{aligned}\right\} \qquad \vec{B} = \nabla \times \vec{\mathcal{A}}$$

$$p_\alpha = (-\mathcal{E}, \vec{p}) \frac{dp_\alpha}{dr} = qF_{\alpha\beta} \frac{dx^\beta}{dr};$$

$$dr = \sqrt{1-v^2} dt = \frac{dt}{\gamma} \to \gamma \frac{dp_\alpha}{dt} = qF_{\alpha\beta} \gamma \frac{dx^\beta}{dt} \to \frac{dp_\alpha}{dt} = qF_{\alpha\beta} \frac{dx^\beta}{dt};$$

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} -\mathcal{E} \\ p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix} = q \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & B_z & -B_y \\ E_y & -B_z & 0 & B_x \\ E_z & B_y & -B_x & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix}$$

или:

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = q\vec{E} \cdot \vec{v}$$

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = q\vec{E} + q\vec{v} \times \vec{B} \text{(Сила Лоренца)}$$