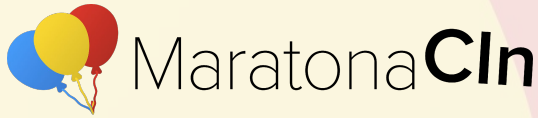


SELETIVA AULA 2

Buscas e Backtracking

Lua Guimarães <lgf>
João Luís <jlga>

rev. 1.1

LINKS E OBS

MaratonaCIn

Centro de Informática UFPE

Universidade Federal de Pernambuco

https://app.codeimage.dev/ – aqui o link do negócio de fazer foto do código. Se tiver dificuldade, me fala que eu te mostro como usar.

LEMBRAR DE DELETAR ESSE SLIDE!!!

MaratonaCIn

MaratonaCIn Centro de Informática UFPE Universidade Federal de Pernambuco

Binary Search

Busca linear

MaratonaCIn

Centro de Informática UFPE

Universidade Federal de Pernambuco

Dada uma lista de N números, descubra se o número X está ou não nessa lista.

Uma possibilidade de resolução é procurar linearmente por toda a lista:

- **Melhor caso: O(1)**, o número X é o primeiro da lista.
- **Pior caso: O(N)**, o número X não se encontra na lista.

Como em programação competitiva nos preocupamos **sempre com o pior caso**, tratamos a complexidade dessa busca como **linear**.

- A maioria dos problemas pede para que N buscas sejam realizadas.
- **$N \times N = N^2$**. O problema provavelmente não vai passar no tempo limite.

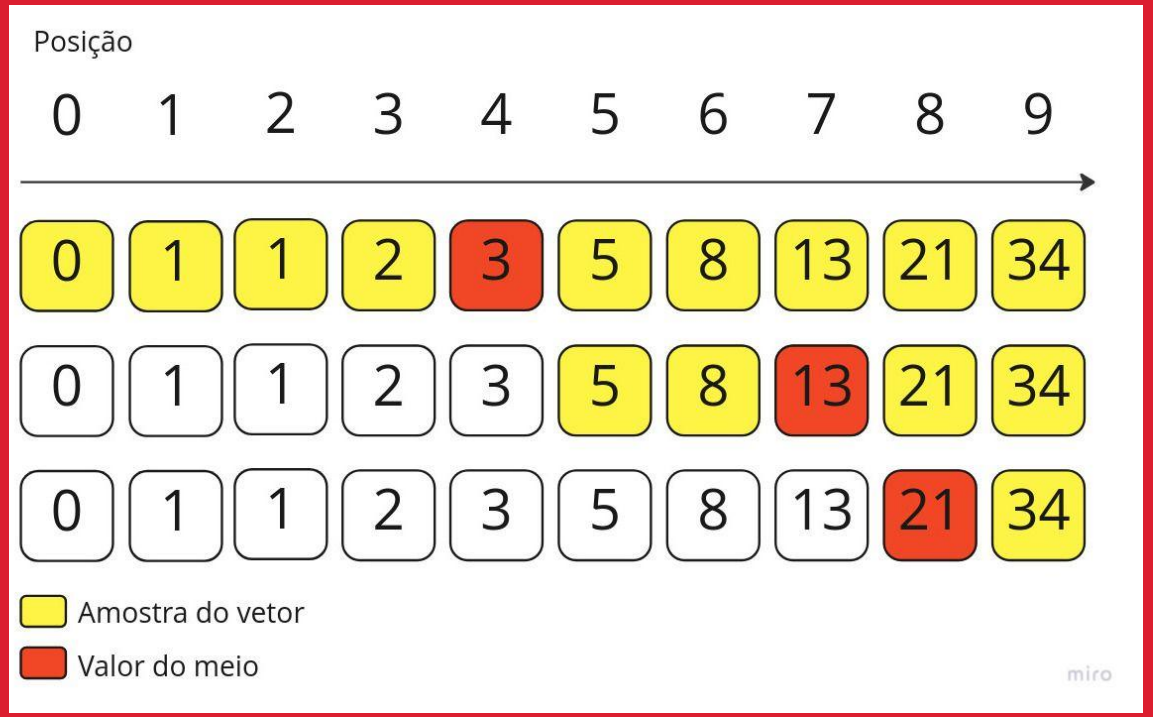
Como melhorar?

Supondo que a **lista esteja ordenada**, é possível realizar a busca de forma muito mais ótima.

Iniciamos procurando no item do meio, caso o item seja maior ou menor do que o número X, descartamos uma metade da lista

A cada iteração, **metade da lista é descartada**.

Complexidade: **O(Log(N))**.



Busca Binária

MaratonaCIn

Centro de Informática UFPE

Universidade Federal de Pernambuco

Isso é o que chamamos de **Busca Binária**:

- Primeiro ordenamos a lista com um **Sort**: **O(N×Log(N))**
- A seguir, separamos a lista em dois intervalos **[Left,Mid]** e **[Mid,Right]**
- Com base no valor de Mid, reduzimos o nosso espaço de busca.
- Caso **Mid < X**, continuamos a busca no intervalo **[Mid+1,Right]**
- Caso **Mid > X**, continuamos a busca no intervalo **[Left,Mid-1]**
- Repetimos o processo até que Mid = X ou o intervalo seja inválido.

Código de BS

Com isso, a complexidade do pior caso para realizar N buscas se torna:

- $O(N \times Log(N)) + O(N \times Log(N)) = \mathbf{O(N \times Log(N))}$
- Boa complexidade até $\mathbf{5 \times 10^6}$

A seguir, um código simples de uma função com o Binary Search básico implementado.

MaratonaCIn

Centro de Informática UFPE

Universidade Federal de Pernambuco

Bynary_Search.cpp

```cpp
bool Binary_Search(int n, int x, int a[]){
  int left = 0;
  int right = n-1;
  while (left <= right) {
    int mid = (left+right)/2;
    if (a[mid] < x) {
      left = mid+1;
    }
    else if (a[mid] > x) {
      right = mid-1;
    }
    else {
      return true;
    }
  }
  return false;
}
```

Funções do C++

Algumas funções com Binary Search já existem dentro de funções da biblioteca padrão de C++.

- A função **binary_search** retorna se o valor existe ou não na lista.
- A função **upper_bound** retorna um ponteiro para o primeiro item > que o valor na lista
- A função **lower_bound** retorna um ponteiro para o primeiro item ⩾ ao valor na lista
- **É necessário que a lista esteja ordenada.**

MaratonaCIn

Centro de Informática UFPE

Universidade Federal de Pernambuco

Functions.cpp

```cpp
bool ok = binary_search(v.begin(), v.end(), 3);
auto ub = upper_bound(v.begin(),v.end(),3);
auto lb = lower_bound(v.begin(), v.end(), 3);

int pos_ub = ub - v.begin();
int pos_lb = lb - v.begin();
```

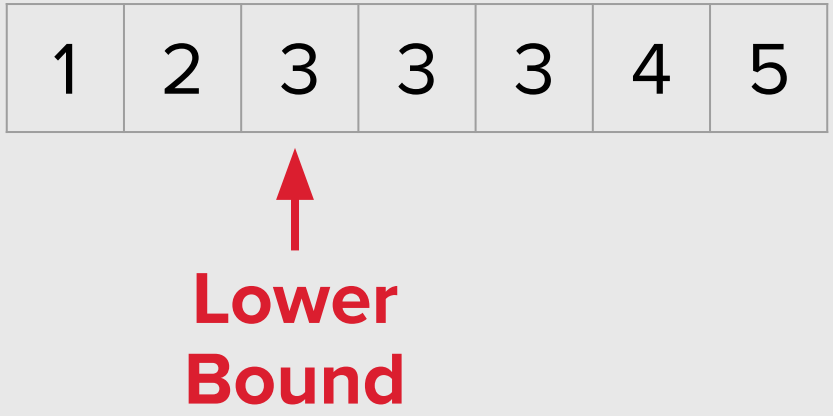
Lower X Upper

MaratonaCIn · Centro de Informática UFPE · Universidade Federal de Pernambuco

Lower Bound (Limite Inferior)

O que faz? Encontra o primeiro elemento que não é menor que o alvo.

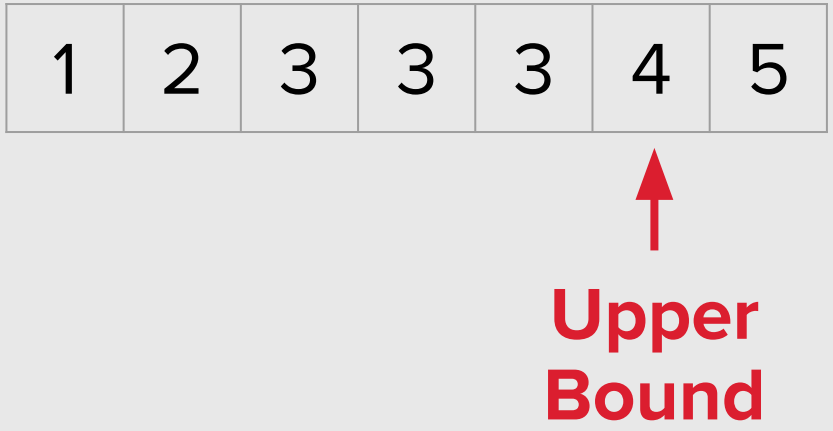
Em outras palavras: O primeiro elemento $\geqslant$ ao alvo.



Upper Bound (Limite Superior)

O que faz? Encontra o primeiro elemento estritamente maior que o alvo.

Em outras palavras: O primeiro elemento > ao alvo.



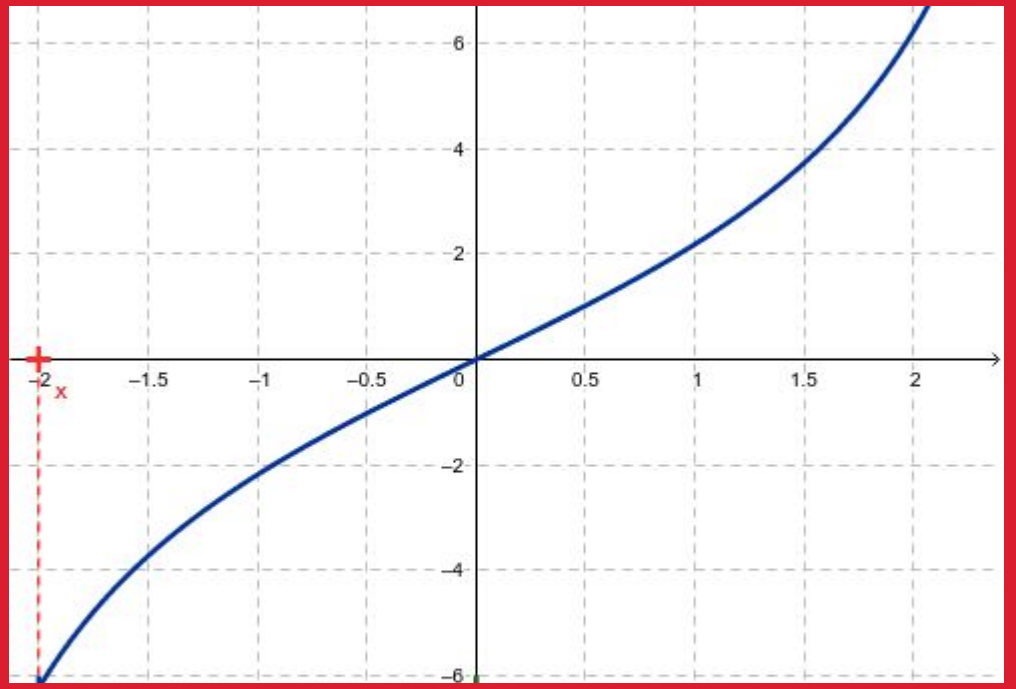
Funções Monótonas

MaratonaCIn Centro de Informática UFPE Universidade Federal de Pernambuco

Temos uma função monótona e queremos saber qual o **maior x tal que `f(x) < k`**.

Uma função monótona é uma função cujo valor só cresce ou só decresce conforme o argumento aumenta.

Todo problema que envolve uma função monótona pode ser solucionado com busca binária.



Factory Machines

MaratonaCIn

Centro de Informática UFPE

Universidade Federal de Pernambuco

A factory has n machines which can be used to make products. Your goal is to make a total of t products.

For each machine, you know the number of seconds it needs to make a single product. The machines can work simultaneously, and you can freely decide their schedule.

What is the shortest time needed to make t products?

Input

The first input line has two integers n and t: the number of machines and products.

The next line has n integers $k_1, k_2, \ldots, k_n$: the time needed to make a product using each machine.

Output

Print one integer: the minimum time needed to make t products.

Constraints

- $1 \leq n \leq 2 \cdot 10^5$
- $1 \leq t \leq 10^9$
- $1 \leq k_i \leq 10^9$

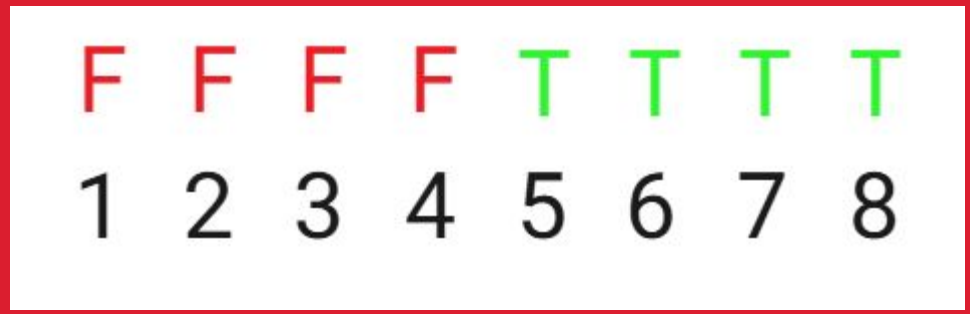
```
Menor tempo: 1
Maior tempo: 10^18
```

BS na resposta

O problema se resume a descobrir o **menor x tal qual F(x) ⩾ t**.

Como **F(x) é monótona**, podemos transformar ela em um booleano.

Basta pensar que, se é possível construir k brinquedos em t segundos, também é possível construir em t+1, t+2, t+3, etc.



Resolução

Setamos “l” para o menor valor possível, e “r” para o máximo.

Caso “f” consiga ser resolvida em **tempo linear**, a complexidade do código se torna **O(N×Log(r))**.

Como r = 10^{18} e log(r) = 60, a complexidade total se torna **60 × 2×10^5 = 1.2×10^7.**

O código roda em menos de um segundo!

BB_na_resposta.cpp

```
ll l = 1;
ll r = 1e18;
ll ans;
while (l ⩽ r) {
    ll m = (l+r)/2;
    if (f(m,a,t)) {
        ans = m;
        r = m-1;
    }
    else {
        l = m+1;
    }
}
```

MaratonaCIn

Centro de Informática UFPE

Universidade Federal de Pernambuco

Dúvidas?

MaratonaCIn

MaratonaCIn Centro de Informática UFPE Universidade Federal de Pernambuco

Two Pointers

Problema

MaratonaCIn

Centro de Informática UFPE

Universidade Federal de Pernambuco

Dado um array com N inteiros e um valor S, qual o maior segmento contínuo do array com a soma <= S.

Exemplo:

- **N** = 7, **S** = 20
- 2 6 4 3 6 8 9

Como resolver em **tempo linear**?

Two Pointers

Iniciamos com dois ponteiros no primeiro elemento e começamos a armazenar a soma e o tamanho de cada intervalo válido.

Sum = 2

Ans = 1

Two Pointers

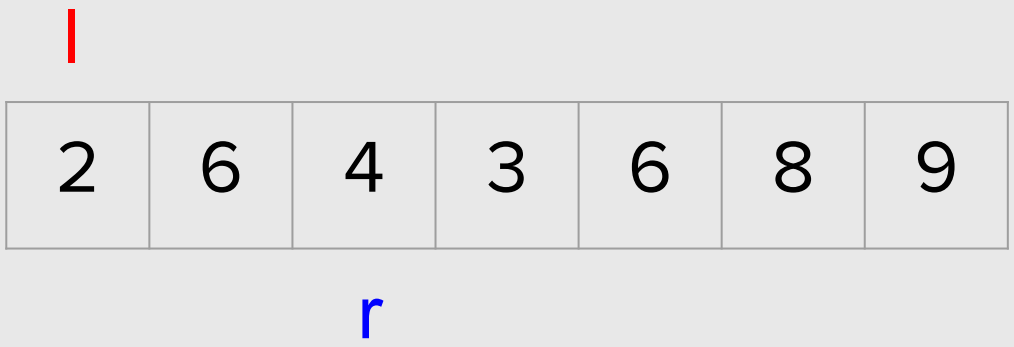
Se a soma for menor do que S, movemos j para a direita e adicionamos v[r] a soma.

Sum = 8

Ans = 2

Two Pointers

Se a soma for menor do que S, movemos j para a direita e adicionamos v[r] a soma.

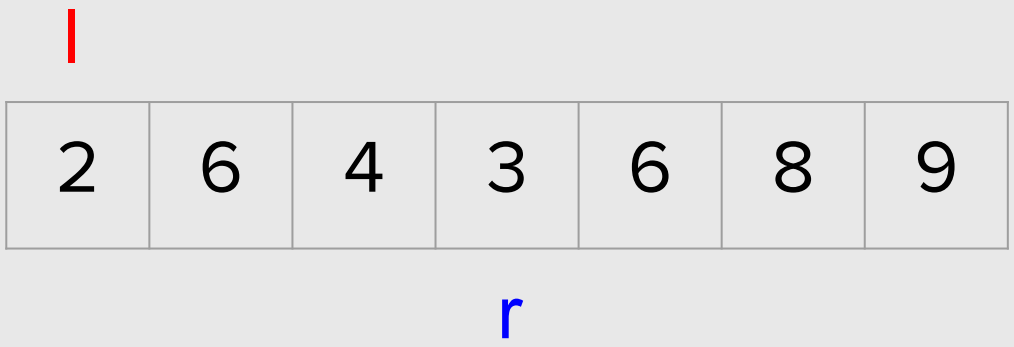


Sum = 12

Ans = 3

Two Pointers

Se a soma for menor do que S, movemos j para a direita e adicionamos v[r] a soma.

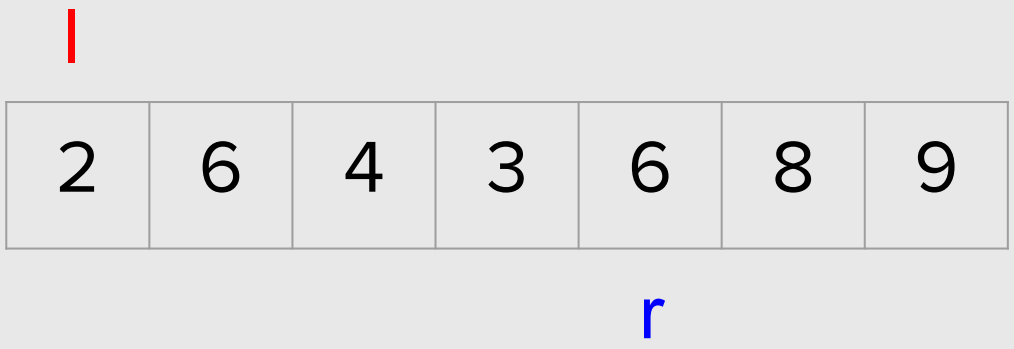


Sum = 15

Ans = 4

Two Pointers

Já quando a soma supera S, retiramos v[l] da soma e movemos l para a direita.

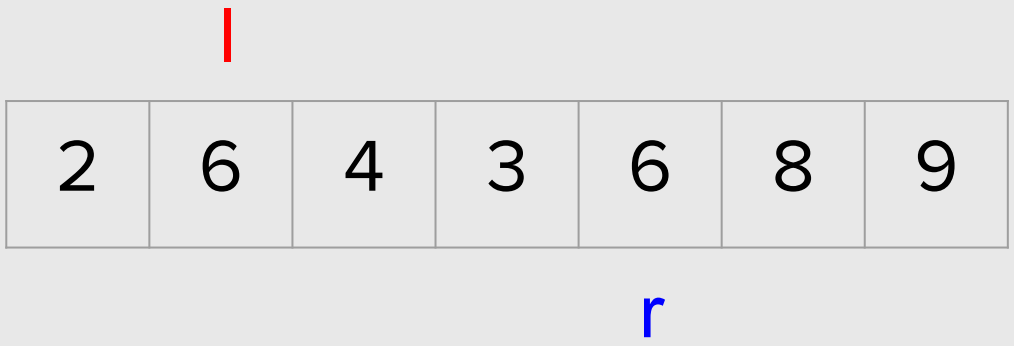


Sum = 21

Ans = 4

Two Pointers

Já quando a soma supera S, retiramos v[l] da soma e movemos l para a direita.



Sum = 19

Ans = 4

Two Pointers

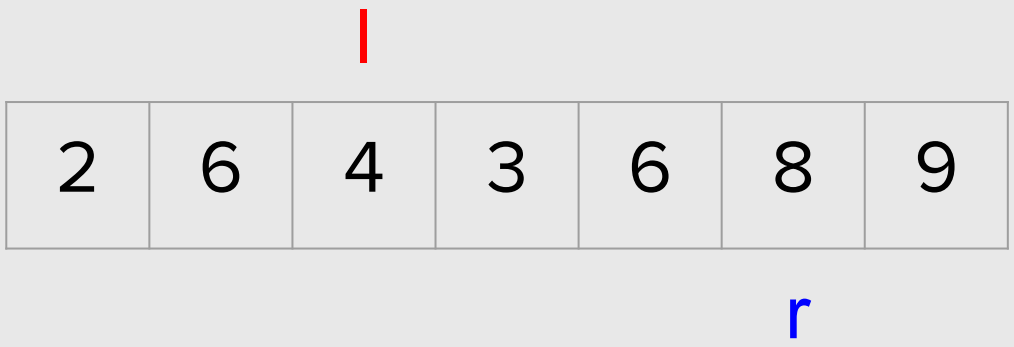
Continuamos o processo até r sair do array.

Sum = 27

Ans = 4

Two Pointers

Continuamos o processo até r sair do array.



Sum = 21

Ans = 4

Two Pointers

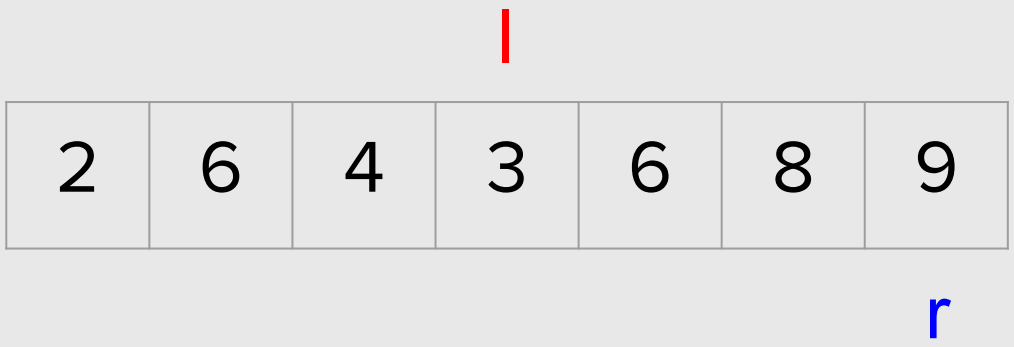
Continuamos o processo até r sair do array.

Sum = 17

Ans = 4

Two Pointers

Continuamos o processo até r sair do array.



Sum = 26

Ans = 4

Two Pointers

Continuamos o processo até r sair do array.

Sum = 23

Ans = 4

Two Pointers

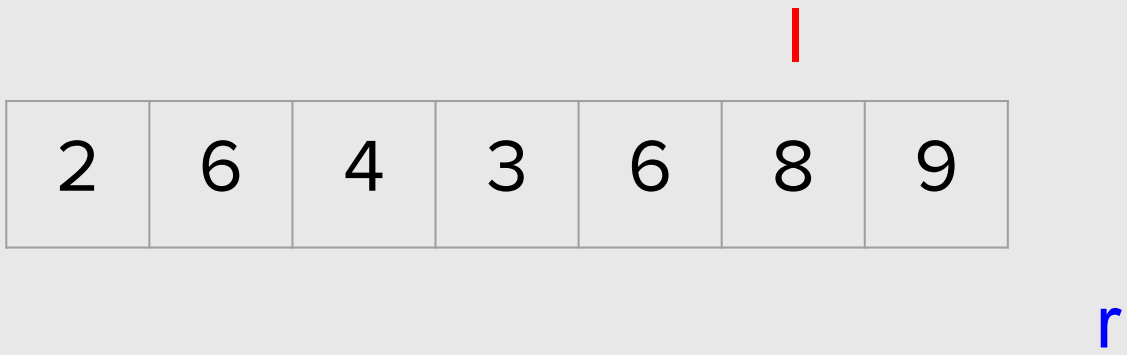
Continuamos o processo até r sair do array.

Sum = 17

Ans = 4

Two Pointers

Continuamos o processo até r sair do array.



Sum = 17

Ans = 4

Código

MaratonaCIn

Centro de Informática UFPE

Universidade Federal de Pernambuco

Two_Pointers.cpp

```cpp
int l = 0;
int sum = 0;
int best = 0;

for (int r=0; r<n; r++) {
    sum += a[r];
    while (sum > s) {
        sum -= a[l];
        l++;
    }

    best = max(best, r-l+1);
}
```

MaratonaCIn

Centro de Informática UFPE

Universidade Federal de Pernambuco

Dúvidas?

MaratonaCIn

MaratonaCIn Centro de Informática UFPE Universidade Federal de Pernambuco

Sweep Line

Problema

Dados N intervalos abertos e Q queries, descubra para cada query em quantos intervalos ela se encontra.

Exemplo:

- **N** = 3
- 1 5, 3 7, 4 10
- **Q** = 3
- 6, 2, 4

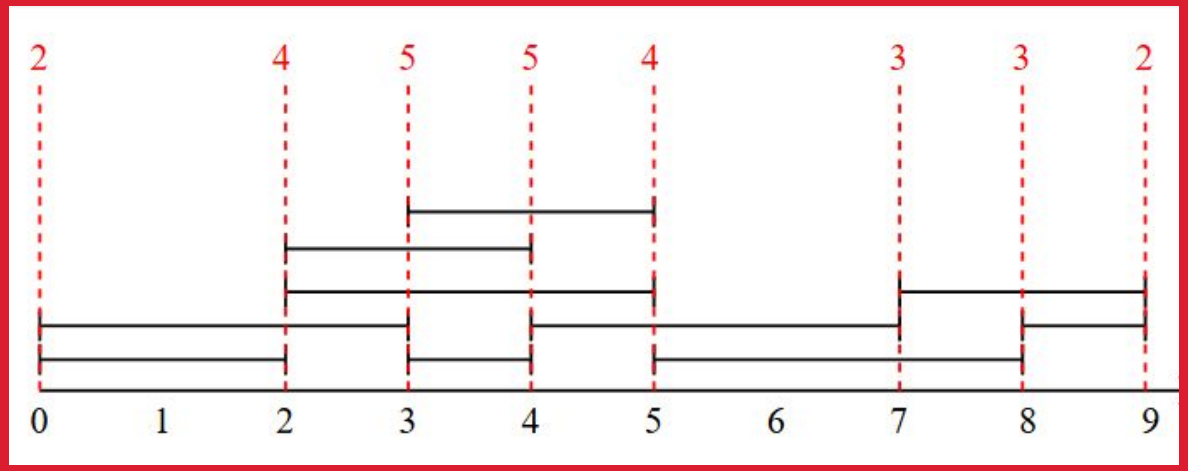
A resolução bruteforce é procurar em todos os intervalos para cada query.

- **Complexidade: O(N×Q)**, N buscas para cada query Q.

Sweep Line

Dados os intervalos, atravessamos todo o range com uma linha vertical, **somando todas as intersecções**.

Então, armazenamos essas intersecções para que possamos obter as respostas das queries de forma muito mais rápida.

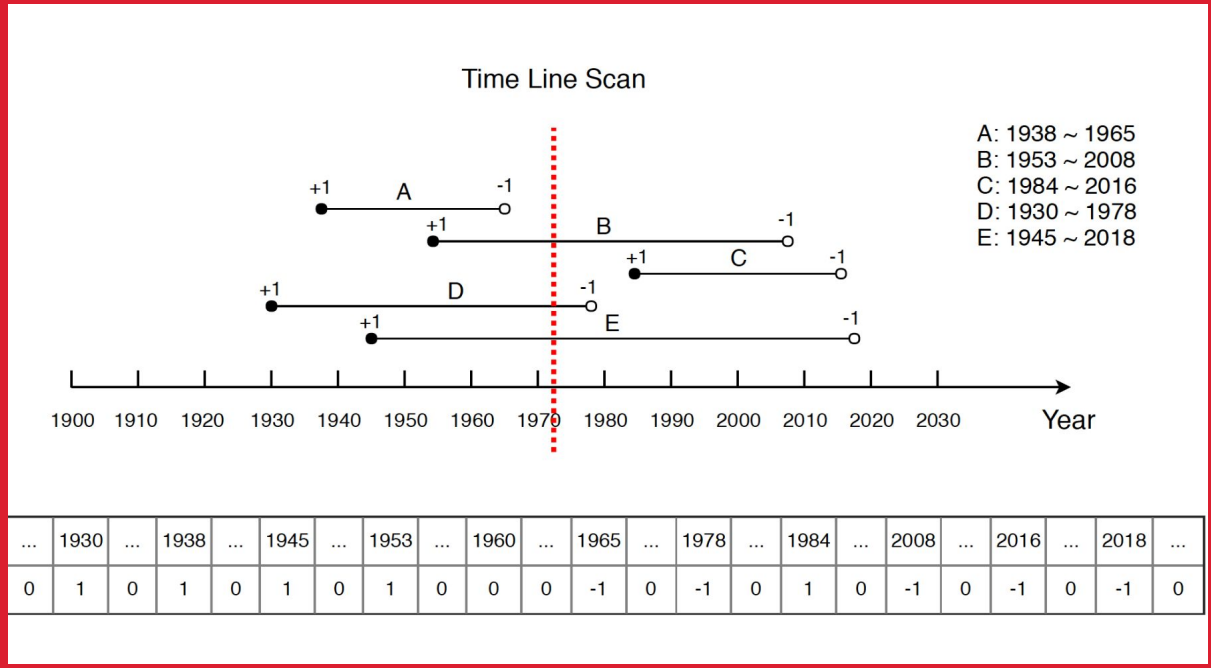


Passo a passo

Primeiro passo: Armazenamos os intervalos, utilizando, por exemplo, um vetor de pairs.

Segundo passo: criamos um vetor onde somamos 1 em cada posição onde um intervalo foi iniciado, e subtraímos 1 em cada posição onde um intervalo foi encerrado.

Qual estrutura utilizamos a seguir?



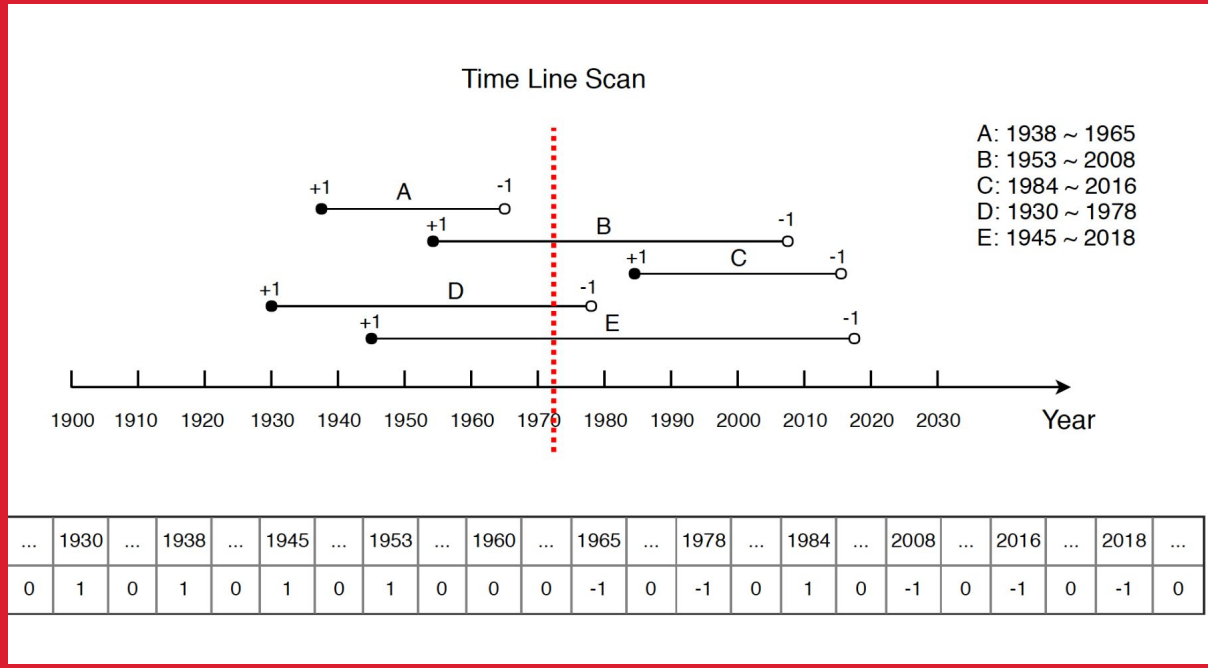
...	1930	...	1938	...	1945	...	1953	...	1960	...	1965	...	1978	...	1984	...	2008	...	2016	...	2018	...
0	1	0	1	0	1	0	1	0	0	0	-1	0	-1	0	1	0	-1	0	-1	0	-1	0

Passo a passo

Primeiro passo: Armazenamos os intervalos, utilizando, por exemplo, um vetor de pairs.

Segundo passo: criamos um vetor onde somamos 1 em cada posição onde um intervalo foi iniciado, e subtraímos 1 em cada posição onde um intervalo foi encerrado.

Qual estrutura utilizamos a seguir? **Prefix Sum**



...	1930	...	1938	...	1945	...	1953	...	1960	...	1965	...	1978	...	1984	...	2008	...	2016	...	2018	...
0	1	0	1	0	1	0	1	0	0	0	-1	0	-1	0	1	0	-1	0	-1	0	-1	0

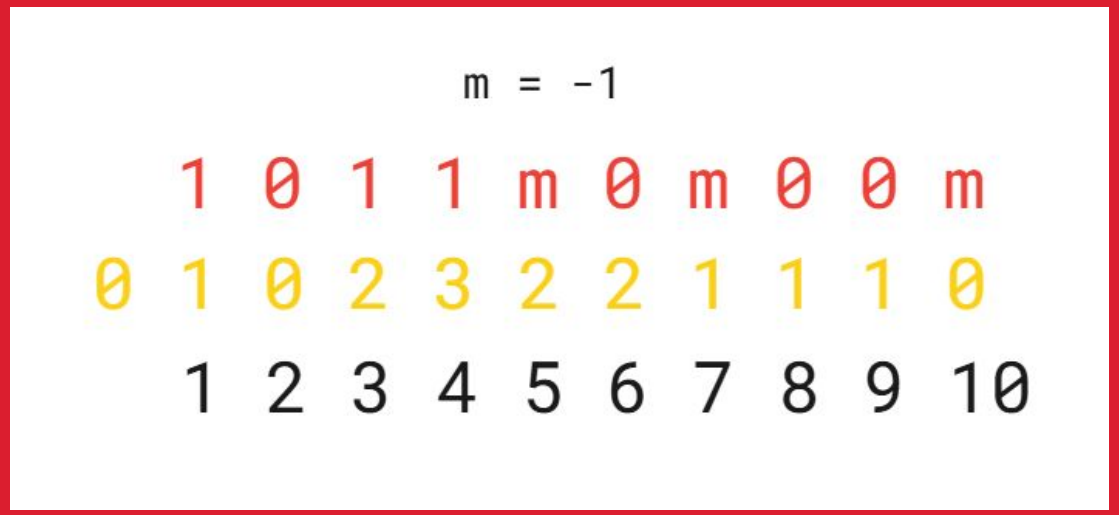
Passo a passo

Com o vetor de prefix sum conseguimos obter todas as queries em **tempo linear**.

Intervalos do exemplo:

- **1 - 5**
- **3 - 7**
- **4 - 10**

Ao lado, consta como ficaria o **vetor de contagem**, o **prefix sum** e os **índices**.



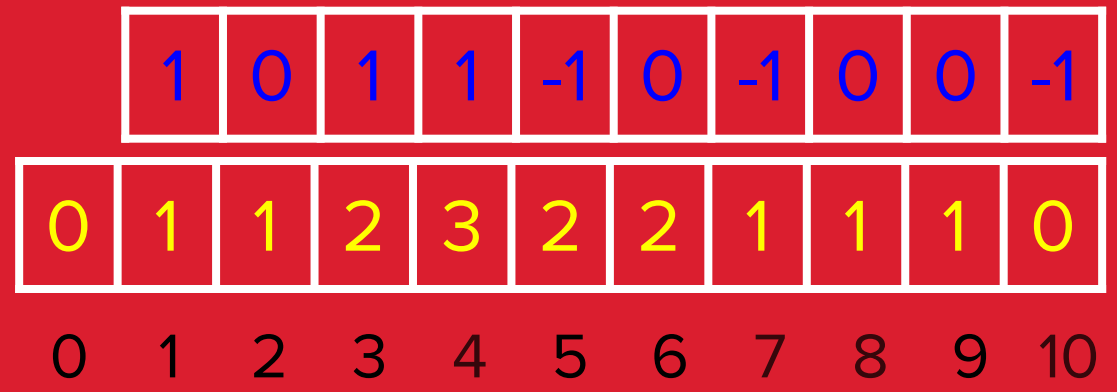
Passo a passo

Com o vetor de prefix sum conseguimos obter todas as queries em **tempo linear**.

Intervalos do exemplo:

- **1 - 5**
- **3 - 7**
- **4 - 10**

Ao lado, consta como ficaria o **vetor de contagem**, o **prefix sum** e os **índices**.



Código

Com base no que vimos, podemos implementar o seguinte código utilizando dois vetores de tamanho do **maior número possível de um dos pontos do intervalo**.

Entretanto, vetores só conseguem armazenar por volta de **1 milhão de números**.

O que fazer se **MAXN = 1×10^9**?

MaratonaCIn — Centro de Informática UFPE — Universidade Federal de Pernambuco

Sweep_Line.cpp

```cpp
vector<int> contador(MAXN+1,0);
vector<int> prefixsum(MAXN+1,0);

for(auto [l, r]: v){
    contador[l]++;
    contador[r]--;
}

for (int i=1; i<=MAXN; i++) {
    prefixsum[i] = contador[i] + prefixsum[i-1];
}

while(q--) {
    int x;
    cin >> x;
    cout << prefixsum[x] << "\n";
}
```

Compressão de Coordenadas

Em dada questão, os valores dos intervalos podem chegar até 10^9, **mas sua quantidade chegará somente até 10^5 ou 10^6**. Com isso, podemos utilizar a compressão de coordenadas para tirarmos as duplicatas e deixarmos um vetor apenas com os valores utilizados.

Para isso, sortamos e depois aplicamos a **função erase com unique no vetor.**

Cc.cpp

```
sort(v.begin(), v.end());
v.erase(unique(v.begin(), v.end()), v.end());
```

Lower e Upper

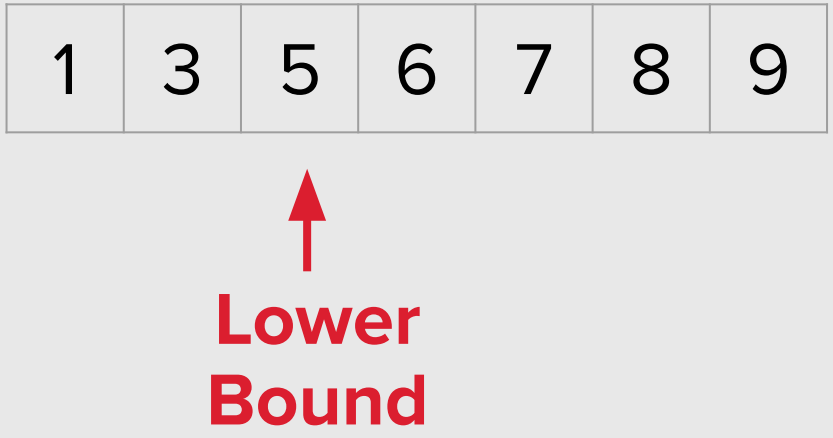
MaratonaCIn

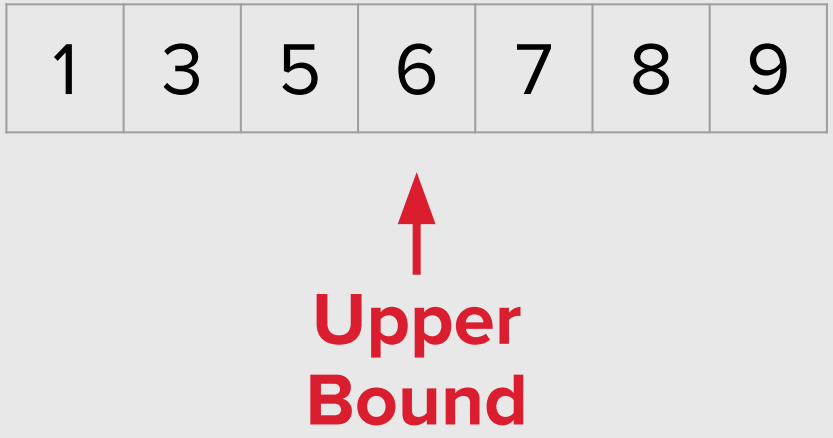
Centro de Informática UFPE

Universidade Federal de Pernambuco

Alteramos o vetor de contagem utilizando o limite inferior.

Acessamos o valor das queries com o limite superior - 1.





Código

MaratonaCIn

Centro de Informática UFPE

Universidade Federal de Pernambuco

Cc.cpp

```cpp
for(auto [l, r]: v){
        int pos1 = lower_bound(v.begin(), v.end(), l) - v.begin();
        int pos2 = lower_bound(v.begin(), v.end(), r) - v.begin();
        contador[pos1]++; contador[pos2]--;
}

for(int i = 1; i<=sz; i++) {
    prefixsum[i] = contador[i-1] + prefixsum[i-1];
}

while(q--){
    ll pos;
    cin >> pos;
    cout << contador[(upper_bound(v.begin(), v.end(), pos) - v.begin())-1] << endll;
}
```

MaratonaCIn

Centro de Informática UFPE

Universidade Federal de Pernambuco

Dúvidas?

MaratonaCIn

MaratonaCIn Centro de Informática UFPE Universidade Federal de Pernambuco

Busca exaustiva

Testando toda possibilidade

O que é?

MaratonaCIn

Centro de Informática UFPE

Universidade Federal de Pernambuco

Complete search, ou busca completa, ou ainda busca de força bruta, trata-se de uma técnica de procurar uma resposta testando todos os cenários possíveis e escolhendo o melhor (ou um qualquer) dentre eles.

Analogia Principal: Quebrar uma senha de 4 números

- Você testa um valor (0000).
- Se conseguiu, para.
- Se não conseguiu, testa outro valor (0001).

Objetivo: Explorar sistematicamente todas as possíveis soluções candidatas até que uma solução, ou a melhor solução, seja encontrada.

Quando usar?

MaratonaCIn · Centro de Informática UFPE · Universidade Federal de Pernambuco

A Busca Completa só é viável quando o "espaço de busca" (o número total de cenários) é pequeno o suficiente para ser verificado em tempo hábil.

O Fator Decisivo: As Constraints (Limites de Entrada)

- Um computador moderno executa cerca de 10^8 operações/segundo.
- A busca deve ter menos casos que esse limite.

	Limite de N	Exemplo de Problema
$O(N!)$	$N \leq 11$	Permutações (Ex. Caixeiro Viajante - TSP)
$O(N \times 2^N)$	$N \leq 22$	Subconjuntos (Ex. Problema da Mochila)
$O(N^K)$	$N \leq 464$ (para $K=3$)	Loops aninhados (Ex: Achar uma tripla)
$O(K^N)$	Depende de k e N	Backtracking geral (Ex. Sudoku)

Permutações

Como gerar? Podemos usar o `next_permutation`, que transforma uma sequência na sua próxima permutação lexicograficamente.

Ele Retorna true se uma próxima permutação foi encontrada, e false se a sequência já está na maior permutação possível (ex: [3, 2, 1]).

Complexidade? `O(N)` por chamada `O(N!)` no loop do-while.

MaratonaCIn Centro de Informática UFPE Universidade Federal de Pernambuco

next_permutation.cpp

```cpp
vector<int> v = {1, 2, 3};
// 1. Garanta que o vetor esteja ordenado
sort(v.begin(), v.end());

// 2. Use o loop do-while para iterar
// por todas as permutações
do {
    for (auto e : v) cout << e << ' ';
    cout << endl;
} while (next_permutation(v.begin(), v.end()));
```

Subconjuntos

Como gerar? Podemos usar Bitmasks para gerar todos os subconjuntos, testando todas as combinações de pegar ou não pegar um item.

Exemplo: Se i=5 (binário 101), significa "pegar o item 0" e "pegar o item 2".

Complexidade? $O(N \times 2^N)$, pois precisamos iterar pelos bits para ver quais estão setados.

MaratonaCIn Centro de Informática UFPE Universidade Federal de Pernambuco

substet mask.cpp

```cpp
for (int mask = 0; mask < (1 << n); mask++) {
    for (int bit = 0; bit < n; bit++) {
        if (mask & (1 << (bit))) {
            // bit está no subconjunto
        }
    }
}
```

Loops aninhados

Como gerar? Podemos encontrar todos os pares, triplas, ..., como loops aninhados. Essa estratégia é usada quando o número de "escolhas" é fixo e pequeno.

Complexidade? $O(N^K)$ onde N é o número de elementos no conjunto de escolha e K é o número de elementos que serão escolhidos.

Mais especificamente $C(N,K)$ operações se não tiver repetição.

MaratonaCIn

Centro de Informática UFPE

Universidade Federal de Pernambuco

loops.cpp

```cpp
for (int i = 0; i < n; i++) {
    for (int j = i + 1; j < n; j++) {
        for (int k = j + 1; k < n; k++) {
            // Testa o trio (i, j, k)
        }
    }
}
```

MaratonaCIn

MaratonaCIn Centro de Informática UFPE Universidade Federal de Pernambuco

Backtracking

Busca “inteligente”

O que é?

MaratonaCIn Centro de Informática UFPE Universidade Federal de Pernambuco

Backtracking trata-se de uma técnica de força bruta que é “inteligente”.

Analogia Principal: Resolver um labirinto.

- Você avança por um caminho (constrói uma solução parcial).
- Você chega em uma bifurcação (tem várias escolhas).
- Você escolhe um caminho.
- Se bater num beco sem saída (solução inválida), você volta atrás (backtracks) até a última bifurcação e tenta o outro caminho.

Objetivo: Explorar sistematicamente todas as possíveis soluções candidatas, mas descartando (podando) caminhos que você já sabe previamente que não levarão a uma resposta.

Como pensar?

Todo backtracking é uma função recursiva que segue, mais ou menos, o seguinte modelo:

- Testa se a solução tá certa.
- Para cada decisão:
  - Faz uma escolha
  - Chama para o novo estado
  - Desfaz a escolha

MaratonaCIn Centro de Informática UFPE Universidade Federal de Pernambuco

backtracking.cpp

```cpp
void backtrack( /* estado atual */ ) {
        // 1. Caso Base: É uma solução completa e válida?
        if (é_solucao_completa(estado_atual)) {
            return armazenar_solucao(estado_atual);
        }

    // 2. Iterar sobre todas as próximas escolhas (Transições)
    for (cada_proxima_escolha) {

        // 3. Poda: A escolha é válida?
        if (é_valida(proxima_escolha)) {

            // 4. FAZER (Aplicar a transição)
            aplica_escolha(proxima_escolha);

            // 5. Recursão (Avançar para o próximo estado)
            backtrack( /* novo estado */ );

            // 6. DESFAZER (O Backtrack real)
            desfaz_escolha(proxima_escolha);
        }
    }

}
```

Estados

Pergunta-chave: "O que eu preciso saber agora para tomar a próxima decisão?"

Definição: Um Estado é uma "foto" da sua solução parcial. São as informações mínimas necessárias para continuar a busca.

Como definir: Geralmente, são os parâmetros da sua função recursiva.

MaratonaCIn Centro de Informática UFPE Universidade Federal de Pernambuco

EXEMPLOS:

- N-Rainhas:
  - Estado: (int linha_atual, vector<vector<bool>>& board)

- Subset Sum (Soma dos Subconjuntos):
  - Estado: (int idx, int soma_atual)

Transições

Pergunta-chave: "Quais são minhas próximas escolhas a partir do estado atual?"

Definição: Uma Transição é a ação ou escolha que te leva de um estado para o próximo.

Como definir: Geralmente, é o loop for dentro da sua função recursiva.

MaratonaCIn

Centro de Informática UFPE

Universidade Federal de Pernambuco

EXEMPLOS:

- N-Rainhas
  - Transição: "Onde posso colocar a rainha nesta linha?"
- Subset Sum:
  - Transição: "Para o elemento v[index], eu tenho duas escolhas:"
  - Incluir ou não incluir v[index] na soma.

A Mágica

O "Fazer" (Aplicar Transição) é o que modifica o estado.

O "Desfazer" (Backtrack) é o que restaura o estado exatamente como era antes.

MaratonaCIn

Centro de Informática UFPE

Universidade Federal de Pernambuco

Por que desfazer?

Para que na próxima iteração do loop (ex: tentar (linha, col+1)), o estado esteja limpo, como se a tentativa anterior nunca tivesse acontecido.

Poda (Pruning)

É o que torna o backtracking "inteligente" e não só um força bruta cego.

Conceito: "Cortar" galhos da árvore de busca que nunca levarão a uma solução.

MaratonaCIn

Centro de Informática UFPE

Universidade Federal de Pernambuco

Exemplo: Subset Sum (com números positivos)

Estado: (index, soma_atual)

Poda: if (soma_atual > K) { return; }

Por quê? Se a soma já passou de K e só temos números positivos para adicionar, é impossível voltar para K. Parar a busca agora economiza tempo exponencial.

Receita de bolo

MaratonaCIn

Centro de Informática UFPE

Universidade Federal de Pernambuco

Identifique: O problema pede para "gerar todos...", "encontrar um caminho...", "verificar se é possível..."? As restrições são pequenas (ex: N <= 20)? -> Provavelmente backtracking.

Defina o Estado: "Quais parâmetros minha função backtrack() precisa?" (Ex: index, soma_atual, linha_atual).

Defina as Transições: "Quais são minhas escolhas em cada estado?" (Ex: "tentar todas as colunas", "incluir ou não incluir o item", "tentar todos os vizinhos no grafo"). Isso será seu loop for ou suas chamadas recursivas.

Receita de bolo

Defina a Poda (Pruning): "Quando uma escolha é obviamente inválida?" (Ex: "coluna já usada", "soma atual > alvo"). Isso é o if (é_valida(...)) antes da recursão.

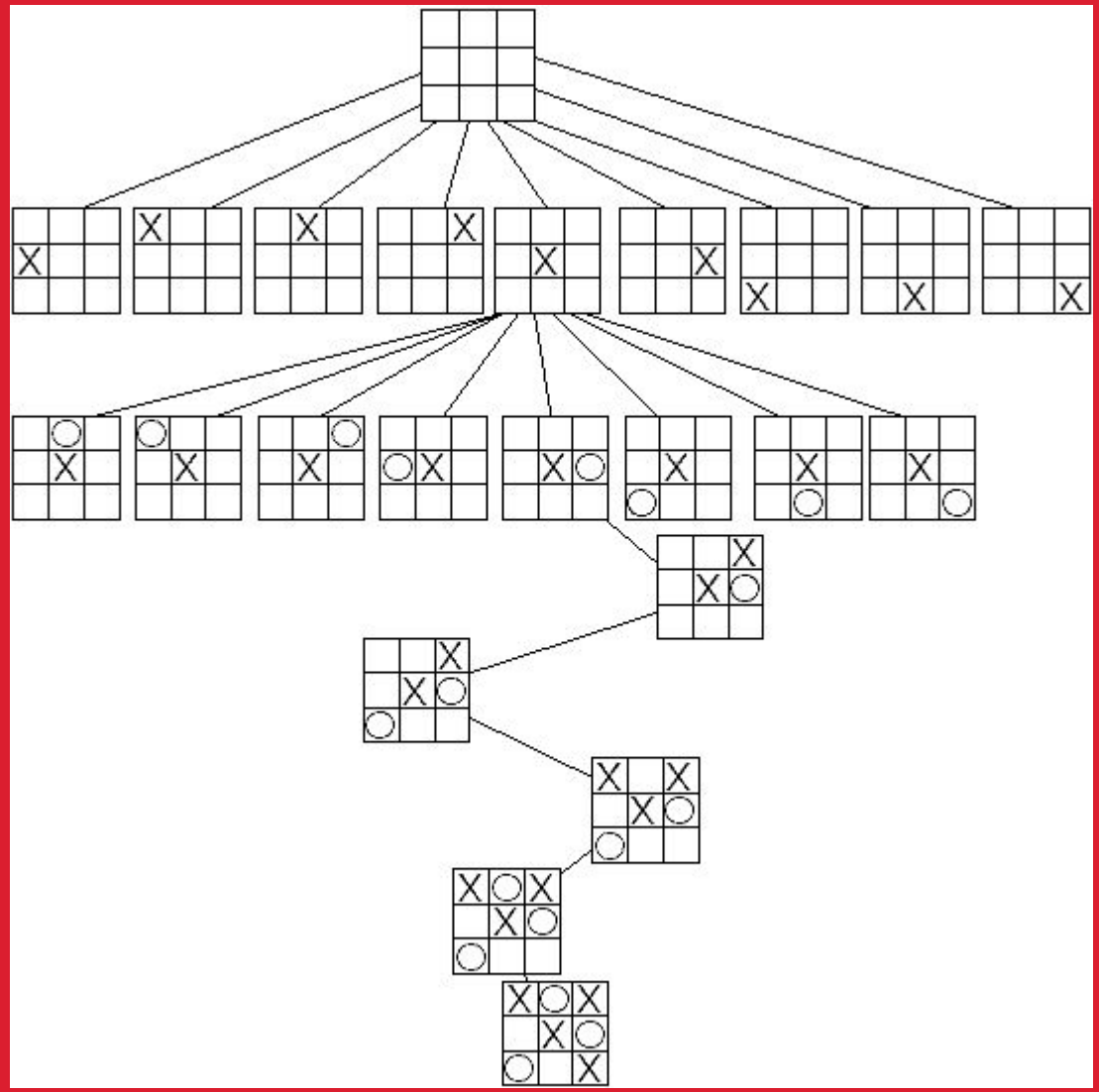
Defina o Caso Base: "Quando eu paro?"

- Sucesso: "Encontrei uma solução completa." (Ex: linha == N nas N-Rainhas, soma_atual == alvo).
- Falha: "Cheguei ao fim sem solução" (Ex: index == N no Subset Sum, mas soma != alvo).

Complexidade

A pergunta: "Meu backtracking é rápido o suficiente?"

- Depende do número total de estados que sua recursão pode visitar!
- A complexidade raramente é polinomial. Ela é quase sempre Exponencial ou Fatorial.
- A complexidade é ditada pela forma da Árvore de Estados.



Complexidade

MaratonaCIn

Centro de Informática UFPE

Universidade Federal de Pernambuco

A complexidade de tempo do seu backtracking é (aproximadamente):

`Complexidade=(Número Total de Estados na Árvore)×(Custo por Transição)`

Custo por Transição: É o custo de "Fazer" e "Desfazer".

- Ideal: O(1) (ex: usado[i] = true, soma += valor).
- Ruim: O(N) (ex: copiar um vetor inteiro em cada chamada). Tente evitar isso!

Número Total de Estados: É o que realmente domina. É o número de nós na sua árvore de recursão.

Decisão Binária

MaratonaCIn Centro de Informática UFPE Universidade Federal de Pernambuco

Problema: Gerar Subconjuntos de N elementos.

Estados: (int index) - "Estou decidindo sobre o elemento index".

Transições: Para cada estado (índice), temos 2 escolhas (transições):

Incluir o elemento.

Não incluir o elemento.

Análise da Árvore:

Nível 0 (raiz): 1 estado

Nível 1: 2 estados

Nível 2: 4 estados

...

Nível N: 2N estados (folhas)

Número Total de Estados:

$1+2+4+\cdots+2N = 2^N$

Decisão Binária

MaratonaCIn Centro de Informática UFPE Universidade Federal de Pernambuco

Análise da Árvore:

Nível 0 (raiz): 1 estado

Nível 1: 2 estados

Nível 2: 4 estados

...

Nível N: 2N estados (folhas)

Número Total de Estados:

$1+2+4+\cdots+2N=2N+1-1$

Complexidade: $O(2^N)$ estados × $O(1)$ por transição = $O(2^N)$

Moral: Se em cada passo N você tem k escolhas independentes, a complexidade será da ordem de $O(k^N)$.

Escolha e Reduza

MaratonaCIn | Centro de Informática UFPE | Universidade Federal de Pernambuco

Problema: Gerar Permutações de N elementos.

Estados: (int k) - "Estou escolhendo o k-ésimo elemento da permutação".

Transições: O número de escolhas diminui a cada nível.

Análise da Árvore:

Nível 1 (Raiz): Temos N escolhas (qualquer um dos N números).

Nível 2: Temos N−1 escolhas (qualquer um, exceto o já usado).

Nível 3: Temos N−2 escolhas.

...

O número de folhas (soluções completas) é $N \times (N-1) \times \cdots \times 1 = N!$

Escolha e Reduza

MaratonaCIn Centro de Informática UFPE Universidade Federal de Pernambuco

Análise da Árvore:

Nível 1 (Raiz): Temos N escolhas (qualquer um dos N números).

Nível 2: Temos N−1 escolhas (qualquer um, exceto o já usado).

Nível 3: Temos N−2 escolhas.

...

O número de folhas (soluções completas) é $N \times (N-1) \times \cdots \times 1 = N!$

Número Total de Estados: O número total de nós na árvore é $1+N+N(N-1)+\cdots+N!$. Isso é dominado pelo número de folhas.

Complexidade: O(Número de Folhas) é uma boa aproximação. A complexidade é O(N!).

Análise x poda

MaratonaCIn Centro de Informática UFPE Universidade Federal de Pernambuco

Impacto da poda na complexidade:

No pior caso, a poda pode não ajudar (ex: se alvo for gigante). A complexidade teórica continua $O(2^N)$.

Na prática, a poda "corta" (prunes) galhos inteiros da árvore de estados. Isso é o que torna o backtracking viável!

Conclusão:

Pense na complexidade do pior caso (sem poda) para saber se a ideia geral é relativamente viável.

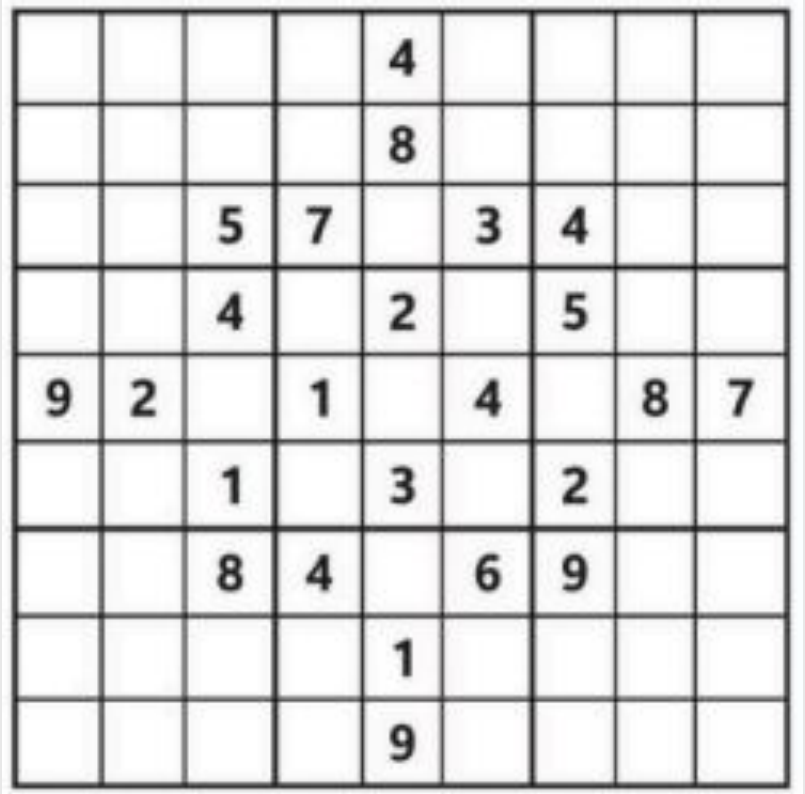
Use a Poda para otimizar o caso médio e passar nos testes. Experiência em problemas semelhantes é bom para ter o feeling.

Exemplo

MaratonaCIn Centro de Informática UFPE Universidade Federal de Pernambuco

Você recebe um tabuleiro de sudoku parcialmente preenchido.

Responda se é possível completá-lo.



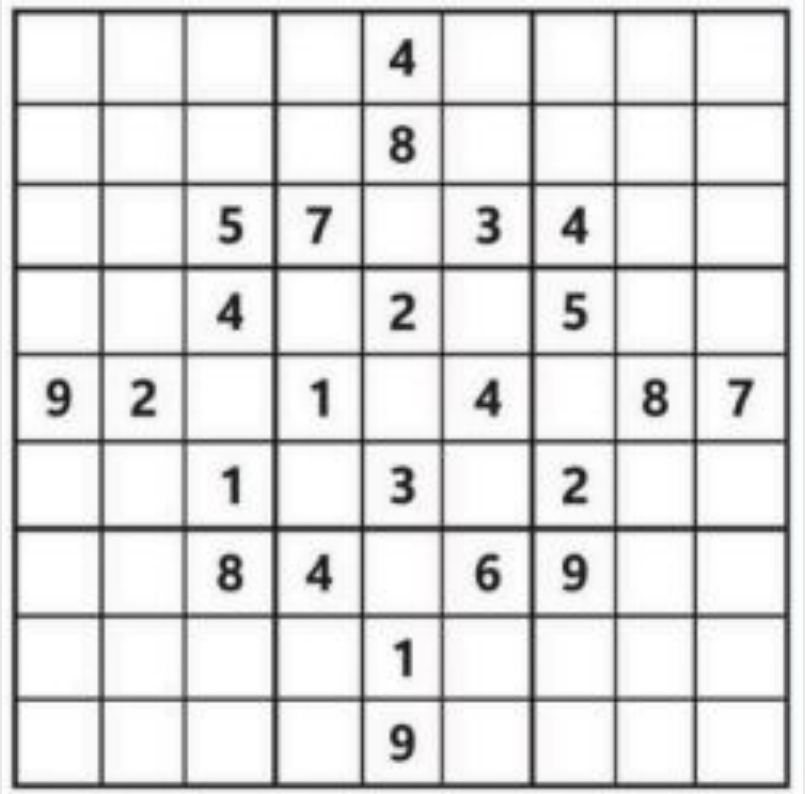
				4				
				8				
		5	7		3	4		
		4		2		5		
9	2		1		4		8	7
		1		3		2		
		8	4		6	9		
				1				
				9				

Exemplo

MaratonaCIn Centro de Informática UFPE Universidade Federal de Pernambuco

Ideia naive (Força bruta):

Para cada quadrado não preenchido (up to n×n), tente cada uma das 10 possibilidades.



				4				
				8				
		5	7		3	4		
		4		2		5		
9	2		1		4		8	7
		1		3		2		
		8	4		6	9		
				1				
				9				

Exemplo

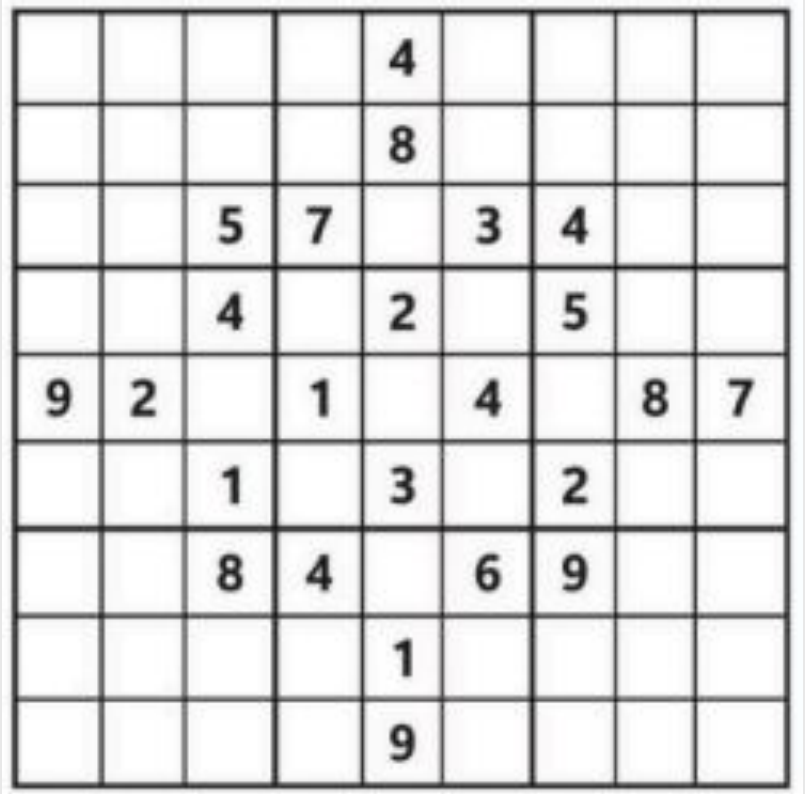
MaratonaCIn Centro de Informática UFPE Universidade Federal de Pernambuco

Ideia naive (Força bruta):

Para cada quadrado não preenchido (up to n×n), tente cada uma das 9 possibilidades.

Complexidade: $9^{n \times n}$

(passa para n até 3)



Exemplo

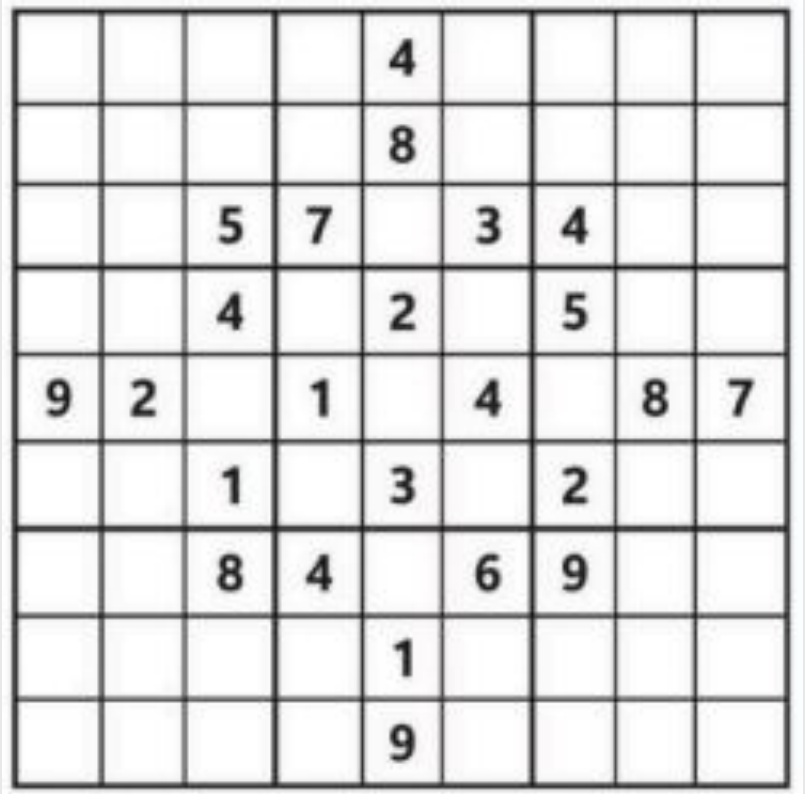
MaratonaCIn · Centro de Informática UFPE · Universidade Federal de Pernambuco

Ideia com BackTracking

Para cada quadrado não preenchido, tente uma possibilidade e veja se o jogo continua possível. Se não, volta pra o último estado válido e tenta outra escolha.

Complexidade teórica: $9^{n \times n}$

Na prática: Cada corte economiza $9^{n \times n-1}$ estados!



				4				
				8				
		5	7		3	4		
		4		2		5		
9	2		1		4		8	7
		1		3		2		
		8	4		6	9		
				1				
				9				

Exemplo

MaratonaCIn Centro de Informática UFPE Universidade Federal de Pernambuco

Ideia com BackTracking

Para cada quadrado não preenchido, tente uma possibilidade e veja se o jogo continua possível. Se não, volta pra o último estado válido e tenta outra escolha.

Complexidade teórica: $9^{n \times n}$

Na prática: Cada corte economiza $9^{n \times n-1}$ estados!

8	1	7	9	4	5	3	2	6
3	4	6	2	8	1	7	9	5
2	9	5	7	6	3	4	1	8
7	8	4	6	2	9	5	3	1
9	2	3	1	5	4	6	8	7
5	6	1	8	3	7	2	4	9
1	3	8	4	7	6	9	5	2
4	7	9	5	1	2	8	6	3
6	5	2	3	9	8	1	7	4

Exemplo

MaratonaCIn Centro de Informática UFPE Universidade Federal de Pernambuco

Ideia com BackTracking

Para cada quadrado não preenchido, tente uma possibilidade e veja se o jogo continua possível. Se não, volta pra o último estado válido e tenta outra escolha.

Complexidade teórica: $9^{n \times n}$

Na prática: Cada corte economiza $9^{n \times n-1}$ estados!

8	1	7	9	4	5	3	2	6
3	4	6	2	8	1	7	9	5
2	9	5	7	6	3	4	1	8
7	8	4	6	2	9	5	3	1
9	2	3	1	5	4	6	8	7
5	6	1	8	3	7	2	4	9
1	3	8	4	7	6	9	5	2
4	7	9	5	1	2	8	6	3
6	5	2	3	9	8	1	7	4

SAMPLE: ....4.... ....8.... ..57.34.. ..4.2.5.. 92.1.4.87 ..1.3.2.. ..84.69.. ....1.... ....9....

Exemplo

MaratonaCIn

Centro de Informática UFPE

Universidade Federal de Pernambuco

sudoku.cpp

```cpp
bool check(const vector<string>& board, int row, int col, char c) {
    for (int i = 0; i < 9; i++) {
        if (board[row][i] == c) return false;
        if (board[i][col] == c) return false;
        if (board[3 * (row / 3) + i / 3][3 * (col / 3) + i % 3] == c)
            return false;
    }
    return true;
}

bool solveSudoku(vector<string>& board, int i = 0, int j = 0) {
    if (i == 9) return true;
    if (j == 9) return solveSudoku(board, i + 1, 0);

    if (board[i][j] != '.') return solveSudoku(board, i, j + 1);

    for (char c = '1'; c <= '9'; c++) {
        if (check(board, i, j, c)) {
            board[i][j] = c;
            if (solveSudoku(board, i, j + 1)) return true;
            board[i][j] = '.';
        }
    }

    return false;
}
```

Exemplo

MaratonaCIn · Centro de Informática UFPE · Universidade Federal de Pernambuco

backtracking.cpp

```cpp
void backtrack( /* estado atual */ ) {
        // 1. Caso Base: É uma solução completa e válida?
        if (é_solucao_completa(estado_atual)) {
            return armazenar_solucao(estado_atual);
        }

    // 2. Iterar sobre todas as próximas escolhas (Transições)
    for (cada_proxima_escolha) {

        // 3. Poda: A escolha é válida?
        if (é_valida(proxima_escolha)) {

            // 4. FAZER (Aplicar a transição)
            aplica_escolha(proxima_escolha);

            // 5. Recursão (Avançar para o próximo estado)
            backtrack( /* novo estado */ );

            // 6. DESFAZER (O Backtrack real)
            desfaz_escolha(proxima_escolha);
        }
    }

}
```

sudoku.cpp

```cpp
bool check(const vector<string>& board, int row, int col, char c) {
    for (int i = 0; i < 9; i++) {
        if (board[row][i] == c) return false;
        if (board[i][col] == c) return false;
        if (board[3 * (row / 3) + i / 3][3 * (col / 3) + i % 3] == c)
            return false;
    }
    return true;
}

bool solveSudoku(vector<string>& board, int i = 0, int j = 0) {
    if (i == 9) return true;
    if (j == 9) return solveSudoku(board, i + 1, 0);

    if (board[i][j] != '.') return solveSudoku(board, i, j + 1);

    for (char c = '1'; c <= '9'; c++) {
        if (check(board, i, j, c)) {
            board[i][j] = c;
            if (solveSudoku(board, i, j + 1)) return true;
            board[i][j] = '.';
        }
    }

    return false;
}
```

Exemplo

MaratonaCIn

Centro de Informática UFPE

Universidade Federal de Pernambuco

backtracking.cpp

```cpp
void backtrack( /* estado atual */ ) {
        // 1. Caso Base: É uma solução completa e válida?
        if (é_solucao_completa(estado_atual)) {
            return armazenar_solucao(estado_atual);
        }

    // 2. Iterar sobre todas as próximas escolhas (Transições)
    for (cada_proxima_escolha) {

        // 3. Poda: A escolha é válida?
        if (é_valida(proxima_escolha)) {

            // 4. FAZER (Aplicar a transição)
            aplica_escolha(proxima_escolha);

            // 5. Recursão (Avançar para o próximo estado)
            backtrack( /* novo estado */ );

            // 6. DESFAZER (O Backtrack real)
            desfaz_escolha(proxima_escolha);
        }
    }

}
```

sudoku.cpp

```cpp
bool check(const vector<string>& board, int row, int col, char c) {
    for (int i = 0; i < 9; i++) {
        if (board[row][i] == c) return false;
        if (board[i][col] == c) return false;
        if (board[3 * (row / 3) + i / 3][3 * (col / 3) + i % 3] == c)
            return false;
    }
    return true;
}

bool solveSudoku(vector<string>& board, int i = 0, int j = 0) {
    if (i == 9) return true;
    if (j == 9) return solveSudoku(board, i + 1, 0);

    if (board[i][j] != '.') return solveSudoku(board, i, j + 1);

    for (char c = '1'; c <= '9'; c++) {
        if (check(board, i, j, c)) {
            board[i][j] = c;
            if (solveSudoku(board, i, j + 1)) return true;
            board[i][j] = '.';
        }
    }

    return false;
}
```

Exemplo

MaratonaCIn

Centro de Informática UFPE

Universidade Federal de Pernambuco

backtracking.cpp

```cpp
void backtrack( /* estado atual */ ) {
        // 1. Caso Base: É uma solução completa e válida?
        if (é_solucao_completa(estado_atual)) {
            return armazenar_solucao(estado_atual);
        }

    // 2. Iterar sobre todas as próximas escolhas (Transições)
    for (cada_proxima_escolha) {

        // 3. Poda: A escolha é válida?
        if (é_valida(proxima_escolha)) {

            // 4. FAZER (Aplicar a transição)
            aplica_escolha(proxima_escolha);

            // 5. Recursão (Avançar para o próximo estado)
            backtrack( /* novo estado */ );

            // 6. DESFAZER (O Backtrack real)
            desfaz_escolha(proxima_escolha);
        }
    }

}
```

sudoku.cpp

```cpp
bool check(const vector<string>& board, int row, int col, char c) {
    for (int i = 0; i < 9; i++) {
        if (board[row][i] == c) return false;
        if (board[i][col] == c) return false;
        if (board[3 * (row / 3) + i / 3][3 * (col / 3) + i % 3] == c)
            return false;
    }
    return true;
}

bool solveSudoku(vector<string>& board, int i = 0, int j = 0) {
    if (i == 9) return true;
    if (j == 9) return solveSudoku(board, i + 1, 0);

    if (board[i][j] != '.') return solveSudoku(board, i, j + 1);

    for (char c = '1'; c <= '9'; c++) {
        if (check(board, i, j, c)) {
            board[i][j] = c;
            if (solveSudoku(board, i, j + 1)) return true;
            board[i][j] = '.';
        }
    }

    return false;
}
```

Exemplo

MaratonaCIn

Centro de Informática UFPE

Universidade Federal de Pernambuco

backtracking.cpp

```cpp
void backtrack( /* estado atual */ ) {
        // 1. Caso Base: É uma solução completa e válida?
        if (é_solucao_completa(estado_atual)) {
            return armazenar_solucao(estado_atual);
        }

    // 2. Iterar sobre todas as próximas escolhas (Transições)
    for (cada_proxima_escolha) {

        // 3. Poda: A escolha é válida?
        if (é_valida(proxima_escolha)) {

            // 4. FAZER (Aplicar a transição)
            aplica_escolha(proxima_escolha);

            // 5. Recursão (Avançar para o próximo estado)
            backtrack( /* novo estado */ );

            // 6. DESFAZER (O Backtrack real)
            desfaz_escolha(proxima_escolha);
        }
    }

}
```

sudoku.cpp

```cpp
bool check(const vector<string>& board, int row, int col, char c) {
    for (int i = 0; i < 9; i++) {
        if (board[row][i] == c) return false;
        if (board[i][col] == c) return false;
        if (board[3 * (row / 3) + i / 3][3 * (col / 3) + i % 3] == c)
            return false;
    }
    return true;
}

bool solveSudoku(vector<string>& board, int i = 0, int j = 0) {
    if (i == 9) return true;
    if (j == 9) return solveSudoku(board, i + 1, 0);

    if (board[i][j] != '.') return solveSudoku(board, i, j + 1);

    for (char c = '1'; c <= '9'; c++) {
        if (check(board, i, j, c)) {
            board[i][j] = c;
            if (solveSudoku(board, i, j + 1)) return true;
            board[i][j] = '.';
        }
    }

    return false;
}
```

Exemplo

MaratonaCIn — Centro de Informática UFPE — Universidade Federal de Pernambuco

backtracking.cpp

```cpp
void backtrack( /* estado atual */ ) {
        // 1. Caso Base: É uma solução completa e válida?
        if (é_solucao_completa(estado_atual)) {
            return armazenar_solucao(estado_atual);
        }

    // 2. Iterar sobre todas as próximas escolhas (Transições)
    for (cada_proxima_escolha) {

        // 3. Poda: A escolha é válida?
        if (é_valida(proxima_escolha)) {

            // 4. FAZER (Aplicar a transição)
            aplica_escolha(proxima_escolha);

            // 5. Recursão (Avançar para o próximo estado)
            backtrack( /* novo estado */ );

            // 6. DESFAZER (O Backtrack real)
            desfaz_escolha(proxima_escolha);
        }
    }

}
```

sudoku.cpp

```cpp
bool check(const vector<string>& board, int row, int col, char c) {
    for (int i = 0; i < 9; i++) {
        if (board[row][i] == c) return false;
        if (board[i][col] == c) return false;
        if (board[3 * (row / 3) + i / 3][3 * (col / 3) + i % 3] == c)
            return false;
    }
    return true;
}

bool solveSudoku(vector<string>& board, int i = 0, int j = 0) {
    if (i == 9) return true;
    if (j == 9) return solveSudoku(board, i + 1, 0);

    if (board[i][j] != '.') return solveSudoku(board, i, j + 1);

    for (char c = '1'; c <= '9'; c++) {
        if (check(board, i, j, c)) {
            board[i][j] = c;
            if (solveSudoku(board, i, j + 1)) return true;
            board[i][j] = '.';
        }
    }

    return false;
}
```

Exemplo

MaratonaCIn · Centro de Informática UFPE · Universidade Federal de Pernambuco

backtracking.cpp

```cpp
void backtrack( /* estado atual */ ) {
        // 1. Caso Base: É uma solução completa e válida?
        if (é_solucao_completa(estado_atual)) {
            return armazenar_solucao(estado_atual);
        }

    // 2. Iterar sobre todas as próximas escolhas (Transições)
    for (cada_proxima_escolha) {

        // 3. Poda: A escolha é válida?
        if (é_valida(proxima_escolha)) {

            // 4. FAZER (Aplicar a transição)
            aplica_escolha(proxima_escolha);

            // 5. Recursão (Avançar para o próximo estado)
            backtrack( /* novo estado */ );

            // 6. DESFAZER (O Backtrack real)
            desfaz_escolha(proxima_escolha);
        }
    }

}
```

sudoku.cpp

```cpp
bool check(const vector<string>& board, int row, int col, char c) {
    for (int i = 0; i < 9; i++) {
        if (board[row][i] == c) return false;
        if (board[i][col] == c) return false;
        if (board[3 * (row / 3) + i / 3][3 * (col / 3) + i % 3] == c)
            return false;
    }
    return true;
}

bool solveSudoku(vector<string>& board, int i = 0, int j = 0) {
    if (i == 9) return true;
    if (j == 9) return solveSudoku(board, i + 1, 0);

    if (board[i][j] != '.') return solveSudoku(board, i, j + 1);

    for (char c = '1'; c <= '9'; c++) {
        if (check(board, i, j, c)) {
            board[i][j] = c;
            if (solveSudoku(board, i, j + 1)) return true;
            board[i][j] = '.';
        }
    }

    return false;
}
```

Exemplo

MaratonaCIn — Centro de Informática UFPE — Universidade Federal de Pernambuco

backtracking.cpp

```cpp
void backtrack( /* estado atual */ ) {
        // 1. Caso Base: É uma solução completa e válida?
        if (é_solucao_completa(estado_atual)) {
            return armazenar_solucao(estado_atual);
        }

    // 2. Iterar sobre todas as próximas escolhas (Transições)
    for (cada_proxima_escolha) {

        // 3. Poda: A escolha é válida?
        if (é_valida(proxima_escolha)) {

            // 4. FAZER (Aplicar a transição)
            aplica_escolha(proxima_escolha);

            // 5. Recursão (Avançar para o próximo estado)
            backtrack( /* novo estado */ );

            // 6. DESFAZER (O Backtrack real)
            desfaz_escolha(proxima_escolha);
        }
    }

}
```

sudoku.cpp

```cpp
bool check(const vector<string>& board, int row, int col, char c) {
    for (int i = 0; i < 9; i++) {
        if (board[row][i] == c) return false;
        if (board[i][col] == c) return false;
        if (board[3 * (row / 3) + i / 3][3 * (col / 3) + i % 3] == c)
            return false;
    }
    return true;
}

bool solveSudoku(vector<string>& board, int i = 0, int j = 0) {
    if (i == 9) return true;
    if (j == 9) return solveSudoku(board, i + 1, 0);

    if (board[i][j] != '.') return solveSudoku(board, i, j + 1);

    for (char c = '1'; c <= '9'; c++) {
        if (check(board, i, j, c)) {
            board[i][j] = c;
            if (solveSudoku(board, i, j + 1)) return true;
            board[i][j] = '.';
        }
    }

    return false;
}
```

MaratonaCIn

Centro de Informática UFPE

Universidade Federal de Pernambuco

Dúvidas?

MaratonaCIn

Centro de Informática UFPE

Universidade Federal de Pernambuco

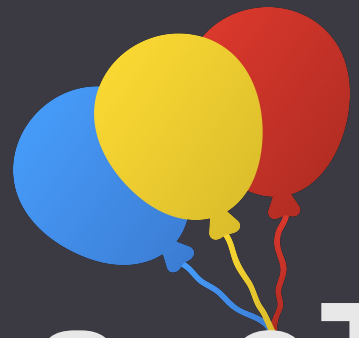
Dúvidas?

Próximo passo:
Fazer o Homework!

MaratonaCIn

Centro de Informática UFPE

Universidade Federal de Pernambuco



That's all, Folks!