

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ
ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования «Крымский федеральный университет им. В.И. Вернадского»

ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

«Численное моделирование колебаний физического маятника»

задание по дисциплине

«Компьютерное моделирование»

студента 2 курса группы ИВТ-б-о-201(1)

Мазлова Ивана Денисовича

направления подготовки 09.03.04 «Информатика и Вычислительная Техника»

Кандидат технических наук,
доцент, заведующий кафедрой
компьютерной инженерии и
моделирования

95 баллов

Милюков В.В.

(оценка)



22.12.2021

(подпись, дата)

Симферополь, 2020

Цели работы:

- Изучить и реализовать приемы численного интегрирования уравнений Ньютона и Лагранджа, опробовать и сравнить формулы вычисления периода колебаний по Гюйгенсу, уточненной и точной формулам (расчета с использованием эллиптического интеграла) на примере компьютерного моделирования движения маятника в системах с разной гравитацией, с разным коэффициентом угасания и другими настраиваемыми параметрами;
- Выявить природу погрешностей компьютерного моделирования при использовании различных методик расчетов;
- Изучить способы верификации компьютерных моделей на основании физических законов и аналитических моделей;
- Совершенствовать приемы объектно-ориентированного программирования для решения задач моделирования.

Теоретическая часть. Физическая постановка задачи.

Математический маятник - классический пример гармонического осциллятора, представляющий собой механическую систему, состоящую из материальной точки на конце невесомой нерастяжимой нити или лёгкого стержня и находящуюся в однородном поле сил тяготения. Другой конец нити (стержня) обычно неподвижен (и является материальной точкой, вокруг которой происходит колебание груза по дуге радиуса L). Период малых собственных колебаний маятника длины L , подвешенного в поле тяжести, равен:

$$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}} \quad (1)$$

и не зависит, в первом приближении, от амплитуды колебаний и массы маятника. Здесь g — ускорение свободного падения, а L — длина подвеса.

Математический маятник служит простейшей моделью физического тела, совершающего колебания, и эта модель не учитывает распределение массы. Колебания реального физического маятника при малых амплитудах совпадают с колебаниями математического маятника с приведённой длиной.

Уравнение колебаний маятника

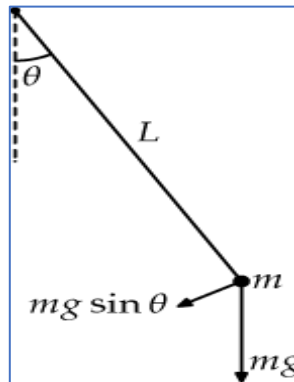


Рис. 1 Схема осциллятора

Если в записи второго закона Ньютона $m\vec{a} = \vec{F}$ для математического маятника выделить тангенциальную составляющую, получится выражение

$$m \cdot L \cdot \ddot{\varphi} = -m \cdot g \cdot \sin(\varphi),$$

так как

$$a_{\tau} = \dot{v} = \left(\frac{d}{dt}\right) \cdot \left(\frac{Ld\varphi}{dt}\right),$$

а из действующих на точку сил тяжести и натяжения ненулевую компоненту F_{τ} даёт только первая. Следовательно, колебания маятника описываются обыкновенным дифференциальным уравнением вида:

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{L} \cdot \sin(\varphi) = 0$$

где неизвестная функция $\varphi(t)$ — это угол отклонения маятника в момент t от нижнего положения равновесия, выраженный в радианах,

L — длина подвеса, g — ускорение свободного падения. Так как мы рассматриваем математический маятник, то потерь в системе нет. Из-за того, что в области малых углов $\sin(\varphi) \approx 0$, данное уравнение можно записать как:

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{L} \cdot \varphi = 0$$

Чтобы теперь решить дифференциальное уравнение (ДУ) второго порядка и получить формулу движения маятника, нужно задать два начальных условия – угол φ и его производную $\dot{\varphi}$ при $t=0$.

В общем случае решение ДУ с начальными условиями для маятника может быть получено численно. При этом необходимо учитывать зависимость угловой скорости $\dot{\varphi}$ от угла φ . Очевидным является тот факт, что при увеличении угла отклонения, поведение маятника всё сильнее отклоняется от режима гармонических колебаний.

Гармонические колебания

Уравнение гармонических колебаний при малых углах отклонения маятника около нижнего положения равновесия (когда $\sin(\varphi) \approx 0$):

$$\ddot{\varphi} + \omega_0^2 \cdot \varphi = 0,$$

где

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{L}}$$

определяется только параметрами маятника и является положительной и является собственной частотой колебаний.

Так как маятник колеблется только в одной плоскости, то можно перейти к единственной координате смещения маятника:

$$x = L \cdot \sin(\varphi) \approx L \cdot \varphi,$$

а значит получится такое уравнение:

$$\ddot{x} + \omega_0^2 \cdot x = 0$$

Малые колебания маятника являются гармоническими. Это означает, что смещение маятника от положения равновесия изменяется во времени по синусоидальному закону:

$$x = A \cdot \sin(\omega_0 \cdot t + \alpha),$$

где — амплитуда колебаний маятника, α — начальная фаза колебаний.

В этом случае нужно задать начальную координату x_0 и начальную скорость v_{x0} . Тогда из соотношений:

$$x_0 = A \cdot \sin(\alpha) \quad \text{и} \quad v_{x0} = A \cdot \omega_0 \cdot \cos(\alpha)$$

можно найти две независимые переменные α и A .

Если колебания не являются линейными и колебания достигают большей амплитуды нужно применять другую формулу.

Для маятника, совершающего колебания с большой амплитудой, закон движения более сложен:

$$\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) = k \cdot \operatorname{sn}(\omega_0 \cdot t; k),$$

де sn – это синус Якоби. Так для $k < 1$ он является периодической функцией и при малых углах отклонения совпадает с обычным тригонометрическим синусом. Тогда k можно рассчитать, как:

$$k = \frac{\varepsilon + \omega_0^2}{2 \cdot \omega_0^2},$$

$$\text{где } \varepsilon = \frac{E}{m \cdot L^2}$$

Тогда период колебаний нелинейного маятника будет вычисляться следующим образом:

$$T = \frac{2\pi}{\Omega}, \text{ где } \Omega = \frac{\pi \omega_0}{2K(k)},$$

а K — эллиптический интеграл первого рода.

$$T = 4 \sqrt{\frac{l}{g}} \cdot K\left(\sin \frac{\varphi_0}{2}\right) \quad \text{Точная формула (1)}$$

Для нахождения $K(k)$ обычно используется разложение эллиптического интеграла в ряд Тейлора:

$$T = T_0 \left\{ 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \sin^2\left(\frac{\varphi_0}{2}\right) + \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\right)^2 \sin^4\left(\frac{\varphi_0}{2}\right) + \dots + \left[\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right]^2 \sin^{2n}\left(\frac{\varphi_0}{2}\right) + \dots \right\}$$

где,

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \quad \text{формула Гюйгенса (2),}$$

используемая для малых амплитуд, φ_0 - максимальный (начальный) угол отклонения маятника от прямой, перпендикулярной оси x .

При углах отклонения до 60° (\approx до 1 радиана) можно использовать средний вариант по точности (укороченный вариант точной формулы с расчетом эллиптического интеграла, где в разложении Тэйлора присутствует только первых два слагаемых:

$$T = T_0 \left(1 + \frac{1}{4} \sin^2 \left(\frac{\varphi_0}{2} \right) \right) \quad \text{Уточненная формула (3)}$$

Существует ещё одна формула для расчета периода нелинейных колебаний, которая считается более точной, чем расчет эллиптического интеграла – формула периода, с квадратичной сходимостью для любого угла максимального отклонения. Но в данной работе она не рассматривается.

Сохранение и расчет энергии математического маятника.

В математическом маятнике, который не взаимодействует с окружающей средой, при гармонических колебаниях полная механическая энергия маятника является постоянной величиной. В процессе колебаний происходит перетекание потенциальной энергии в кинетическую до точки равновесия маятника. В этой точке кинетическая энергия маятника – максимальна, а потенциальная равна нулю. После прохождения точки равновесия начинается обратный процесс перехода энергий: кинетическая энергия по мере увеличения угла отклонения перетекает в потенциальную вплоть до достижения максимального угла отклонения φ_0 .

$$E = E_k + E_p = \frac{mv^2}{2} + mgh = \frac{mv^2}{2} + \frac{mgx^2}{2L} = \text{const},$$

где E_k - кинетическая энергия маятника; E_p - потенциальная энергия маятника; v - скорость движения маятника; x - линейное смещение груза маятника от положения равновесия по дуге окружности радиуса L , g – ускорение свободного падения.

Затухающие колебания.

Общий подход основан на использовании обобщенных уравнений Лагранжа:

$$\frac{d}{dt} \cdot \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial L}{\partial q} = Q$$

где Q - обобщенная сила,

$$Q = \vec{F}_c \frac{\partial \vec{r}}{\partial q}$$

Если сила сопротивления равна $|\vec{F}_c| = \alpha |\vec{v}|$, то применив диссипативную функцию Рэлея $D = \frac{\alpha v^2}{2}$, получаем $Q = -\frac{\partial D}{\partial \dot{q}}$ и скорость убыли энергии равна $2D$.

Для простоты вычислений в настоящей работе мы будем самостоятельно задавать коэффициент λ . В случае, если $\lambda < \omega_0$, мы получим периодические затухающие колебания, если $\lambda \geq \omega_0$, то - аperiodическое затухание.

Математический алгоритм:

Для итерационного расчёта новых значений координат и скорости я опробовал оба алгоритма: Эйлера и Верле.

Ниже приведен математический алгоритм с использованием предиктора-корректора, совмещенный с **алгоритмом Верле**, как наиболее оптимальный и точный алгоритм вычисления итераций физического маятника:

$$\varphi_{i+1} = \varphi_i + v_i \cdot \Delta t + \frac{a_i \cdot \Delta t^2}{2}$$

Предиктор:

$$\begin{aligned} \text{predict_}v_{i+1} &= v_i + a_i \cdot \Delta t, \\ \text{predict_}a_{i+1} &= -\sin(\varphi_{i+1}) \cdot \left(\frac{g}{L}\right) - 2 \cdot \lambda \cdot \text{predict_}v_{i+1} \end{aligned}$$

Корректор:

$$\begin{aligned} v_{i+1} &= v_i + \frac{(a_i + \text{predict_}a_{i+1})}{2} \cdot \Delta t \\ a_{i+1} &= -\sin(\varphi_{i+1}) \cdot \left(\frac{g}{L}\right) - 2 \cdot \lambda \cdot v_{i+1} \end{aligned}$$

Код программы для алгоритма Верле с предиктором-корректором имеет вид:

```
def verlet(self, i=0):
    self.ang[i+1] = self.ang[i] + self.spd[i]*self.dt + self.acc[i]*self.dt2
    pr_spd       = self.spd[i] + self.acc[i]*self.dt
    pr_acc       = self.accel(pr_spd, self.ang[i+1])
    self.spd[i+1] = self.spd[i] + self.dt0_5 * (self.acc[i]+pr_acc)
    self.acc[i+1] = self.accel(self.spd[i+1], self.ang[i+1])
```

Рис. 2 Код алгоритма Верле с предиктор-корректором

Однако, в программе для сравнения сохранена возможность использования менее точного математического **алгоритма Эйлера**, который намного хуже сохраняет энергию:

$$\begin{aligned}\varphi_{i+1} &= \varphi_i + v_i \cdot \Delta t \\ v_{i+1} &= v_i + a_i \cdot \Delta t, \\ a_{i+1} &= -\sin(\varphi_{i+1}) \cdot \left(\frac{g}{L}\right) - 2 \cdot \lambda \cdot v_{i+1}\end{aligned}$$

Код программы для алгоритма Эйлера имеет вид:

```
def euler(self, i=0):
    self.ang[i+1] = self.ang[i] + self.dt * self.spd[i]
    self.spd[i+1] = self.spd[i] + self.acc[i]*self.dt
    self.acc[i+1] = self.accel(self.spd[i+1], self.ang[i+1])
```

Рис. 3 Код алгоритма Эйлера без предиктор-корректора

Код программы расчета ускорения – общий для обоих алгоритмов:

```
def accel(self, spd, ang):
    return np.sin(ang)*self.minus_g_div_L - self.damp_decr_x2*spd
```

Рис. 4 Код расчета ускорения

где **minus_g_div_L** – рассчитанная для оптимизации работы программы константа (меняется только при изменении g или длины нити L , а **damp_decr_x2** – двойной коэффициент затухания ($2 \cdot \lambda$).

Для работы гистограммы распределения внутренней энергии маятника используется код, вычисляющий потенциальную (E_p), кинетическую (E_k) и полную энергию осциллятора:

```
self.Ep[self.ticks] = self.g * self.L * (1-np.cos(self.ang[self.ticks])) # mgh
self.Ek[self.ticks] = 0.5 * (self.L*self.spd[self.ticks])**2 # 0.5mv^2
Ecur = self.Ep[self.ticks] + self.Ek[self.ticks]
```

Рис. 5 Код расчета энергий маятника

Программа так же регистрирует каждый проход маятника через положение равновесия и рассчитывает текущее значение периода колебаний маятника по полученному значению полупериода – метод «засечек».

Если знак текущего угла отклонения φ_i не совпадает со знаком угла отклонения в предыдущей итерации φ_{i-1} , это означает, что маятник пересек точку равновесия в промежутке между временем предыдущей и текущей итераций. Соответственно можно, не учитывая изменение скорости и ускорения, приближенно рассчитать время прохождения маятником положения равновесия:

$$t = t_i - \frac{\Delta t \cdot \varphi_i}{(\varphi_i - \varphi_{i-1})}$$

Для вычисления периода колебаний «по засечкам времени» при прохождении маятника через точку равновесия используется следующий код:

```
# признак прохождения нижней точки: разные знаки у углов отклонения
if np.sign(self.ang[self.ticks])!=np.sign(self.ang[self.ticks-1]):
    t0 = self.time[self.ticks] - self.dt*self.ang[self.ticks] /\
        (self.ang[self.ticks] - self.ang[self.ticks-1])
    if self.Last_Half_T_time!=0:
        self.T = (t0 - self.Last_Half_T_time) * 2
    self.Last_Half_T_time = t0
```

Рис. 6 Код алгоритма фиксации прохождения маятником положения равновесия

Описание программы и ход работы.

Программа выполнена на языке программирования Python 3 с использованием библиотек Tkinter, numpy и Matplotlib.

Основной сложность такой реализации явилась оптимизация скорости работы программы, т.к. Python в целом не предназначен для создания динамических графических приложений. Именно по этой причине, чтобы отображать сразу несколько графиков в реальном режиме времени и пришлось использовать вышеуказанные библиотеки.

Вот такой получился интерфейс программы:

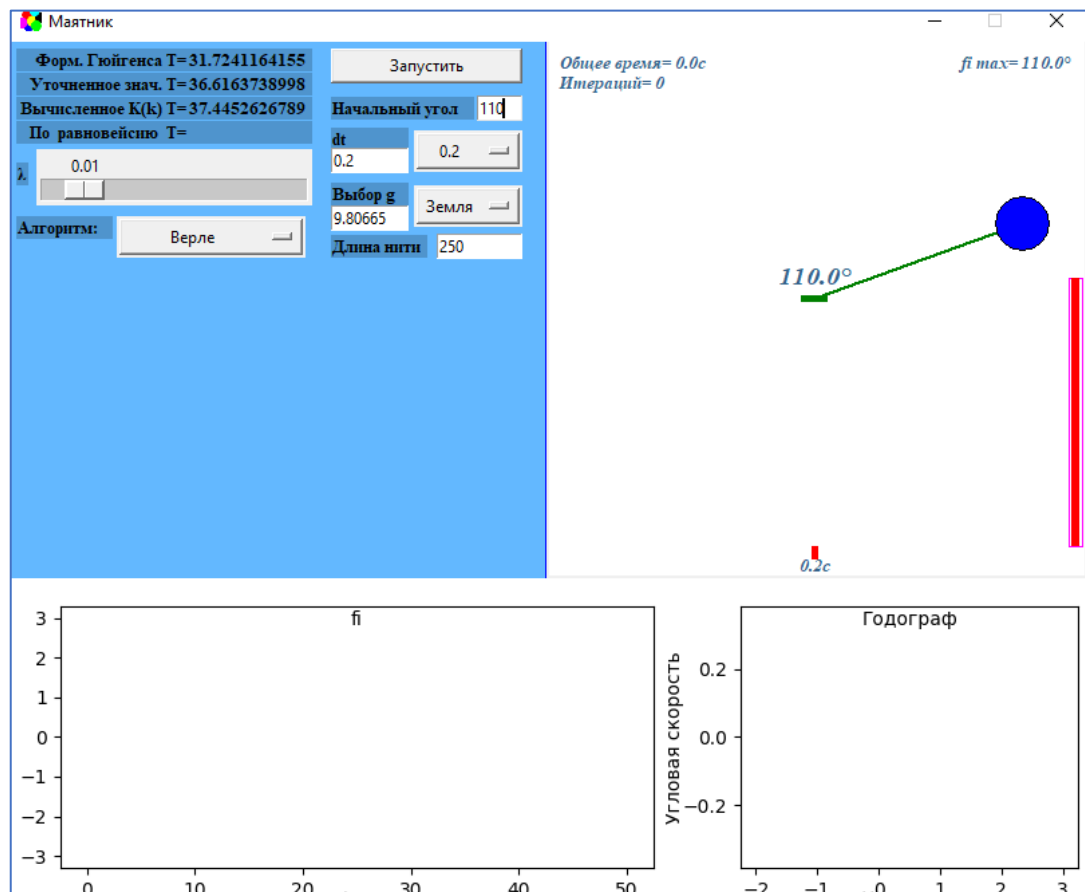


Рис. 7 Интерфейс программы численного модулирования колебаний маятника

После установки всех необходимых параметров как:

- Начальный угол отклонения - φ_0
- Шаг дискретизации по времени – dt
- Ускорение свободного падения - g
- Длина невесомого стержня (или нити) – L
- Коэффициент затухания колебаний - λ
- И математический алгоритм вычисления положения маятника во времени

необходимо активировать запуск кнопкой «Запустить». После этого начнется движение маятника и построение графиков. Название кнопки при этом поменяется на «Остановить» (кнопка работает как триггер).

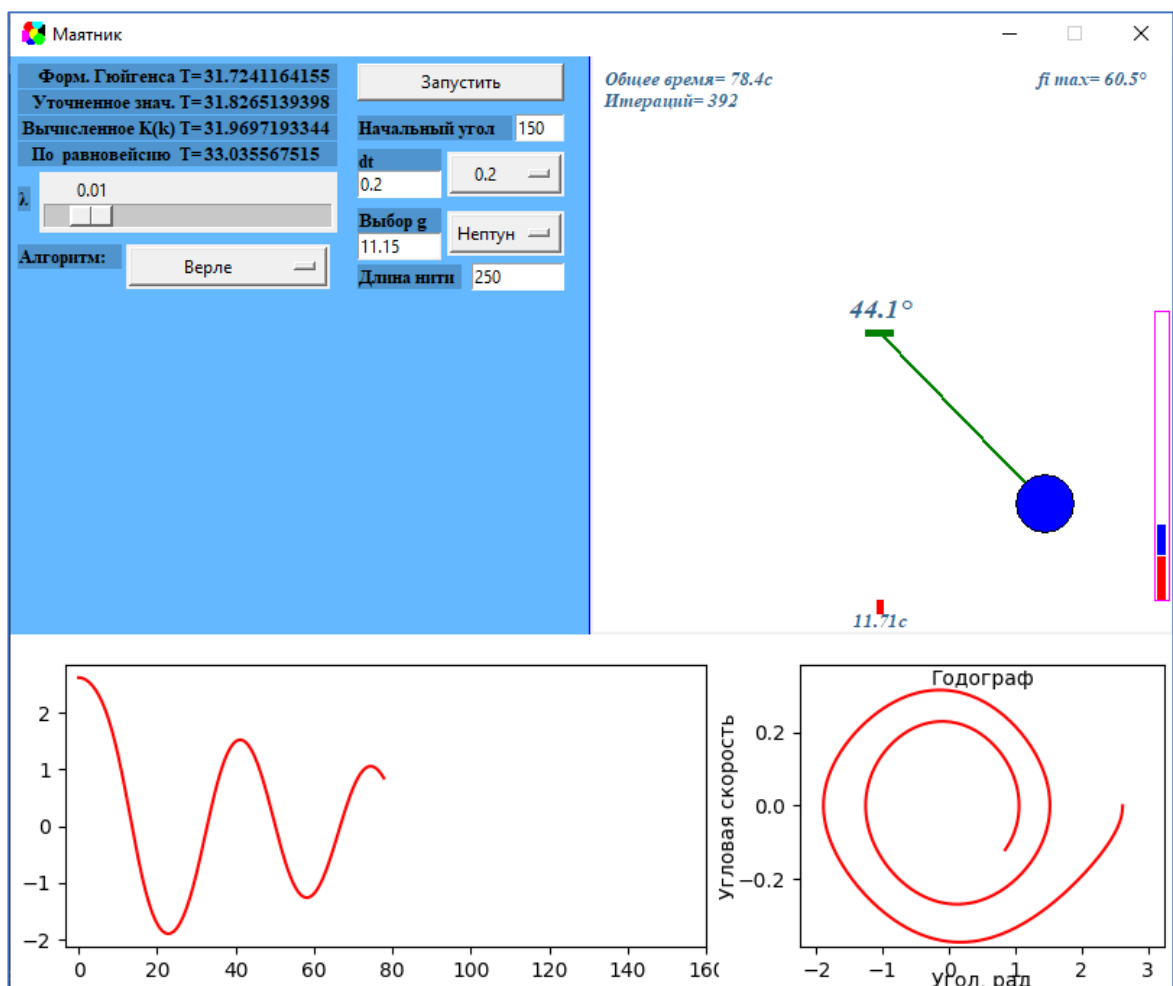


Рис. 8 Программа в работе

График слева снизу – график колебаний маятника. Он отображает динамику изменения угла отклонения по времени. На рисунке 3 видно, что при установленном коэффициенте затухания $\lambda = 0.01$ амплитуда колебаний постепенно уменьшается.

График справа – называется Годограф и отображает взаимосвязь угловой скорости и угла отклонения. Так как обе эти величины при затухающих колебаниях постепенно уменьшаются, график имеет «форму улитки».

Справа от колеблющегося маятника в виде гистограммы отображено изменение полной энергии маятника: красным столбиком отображается потенциальная энергия E_p , а синим – кинетическая E_k . При этом сумма этих двух энергий при заданном λ будет уменьшаться. Фиолетовым незакрашенным контуром обозначена E_{\max} , которая была при старте маятника с начальным отклонением от вертикальной оси на угол φ_0 . Если убрать коэффициент затухания, то сумма красной и синей гистограммы будет постоянно находиться в контуре E_{\max} , т.к. общая энергия маятника равна сумме кинетической и потенциальной и является неизменной.

Так же на поле графика ещё отображается количество итераций и общее время колебания маятника. Справа вверху в углу отображается максимальный угол отклонения по итогам последнего полупериода.

Слева вверху отображается период колебания маятника, рассчитанный математически по трем формулам:

- Гюйгенса (наиболее неточная) (2)
- Уточненная (3) и
- Вычисленная $K(k)$, рассчитанная с использованием эллиптического интеграла (1)

Кроме того, программным путем ещё рассчитывается T по прохождению маятника через точку равновесия.

Таким образом есть возможность сравнить работу разных по точности формул на разных стартовых углах отклонения.

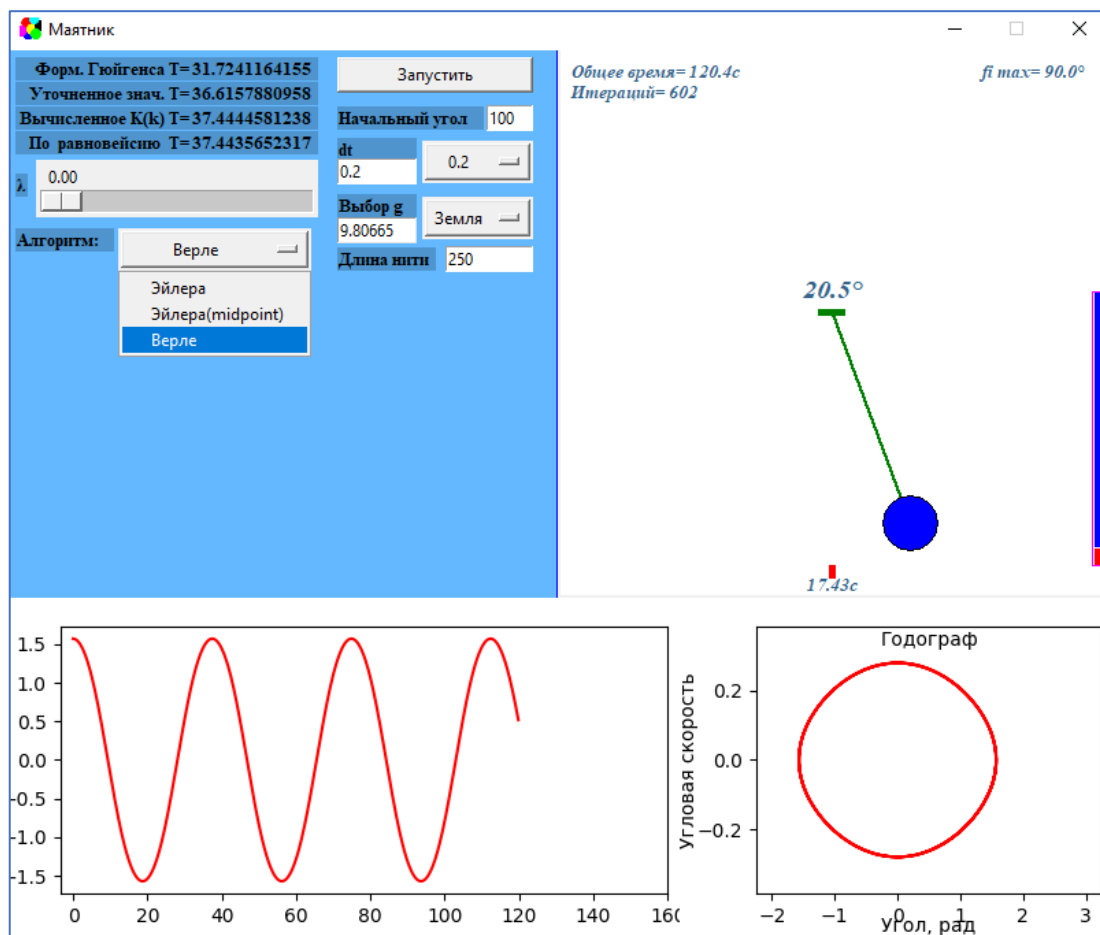


Рис. 9 Колебания маятника без коэффициента затухания

Как видно на рисунке 4, при отсутствии затухания график Годографа имеет форму окружности, т.к. не происходит потерь энергии и для соответствующих фаз колебания показания угловой скорости подвеса маятника и его угла отклонения от вертикальной оси не изменяются. Таким образом мы получаем модель математического маятника.

В ходе симуляции можно поменять применяемый математический алгоритм и все параметры настройки маятника — в этом случае маятник

продолжит колебаться с показаниями энергии на момент изменения настроек, но уже с новыми настройками.

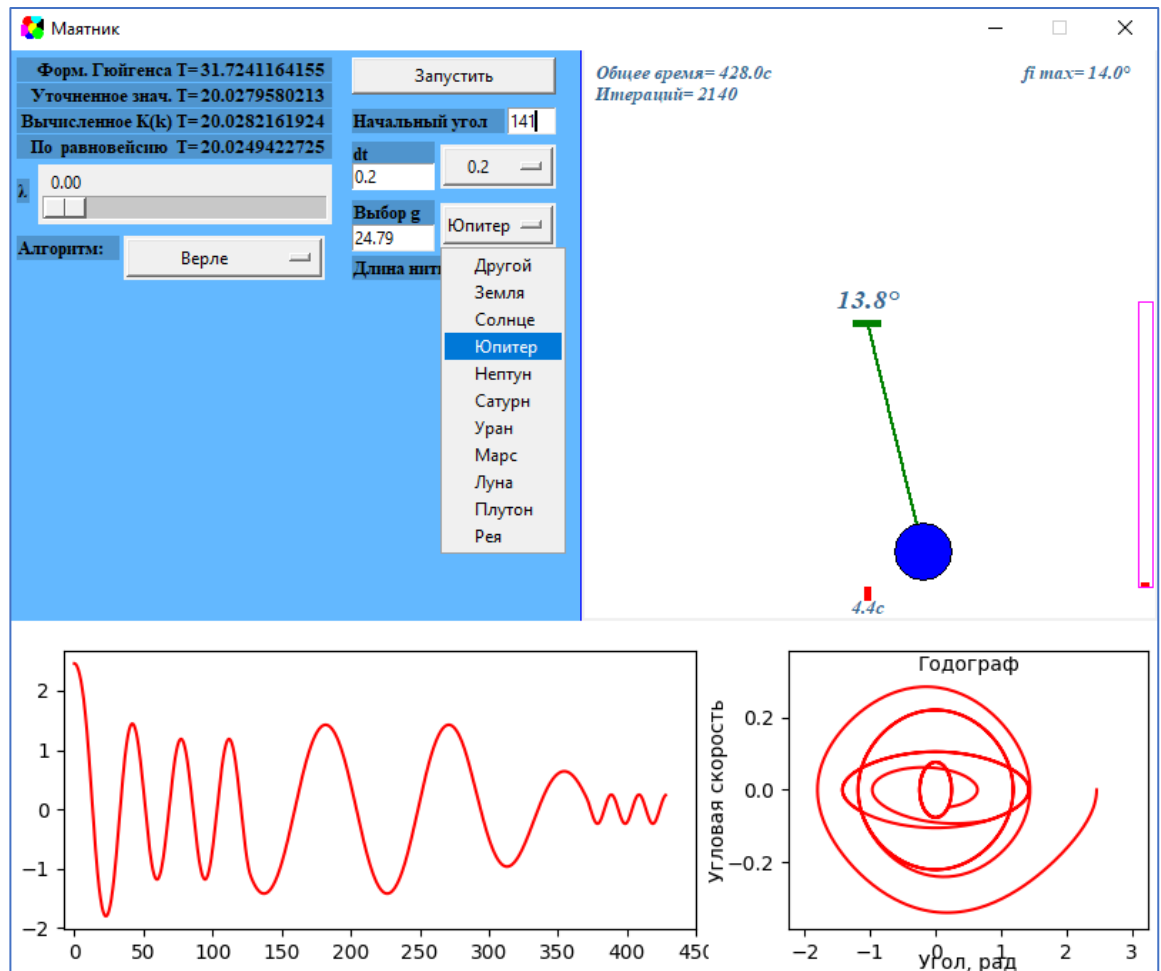


Рис. 10 Динамическая смена настроек маятника в процессе колебания

Так, например, на 60 секунде убрали затухание, на 130 – переместили маятник с Земли на Луну, а на 340-й секунде, примерно, тот же маятник отправили на Юпитер. В результате Годограф скорости отобразил весьма замысловатый график, похожий на «глаз».

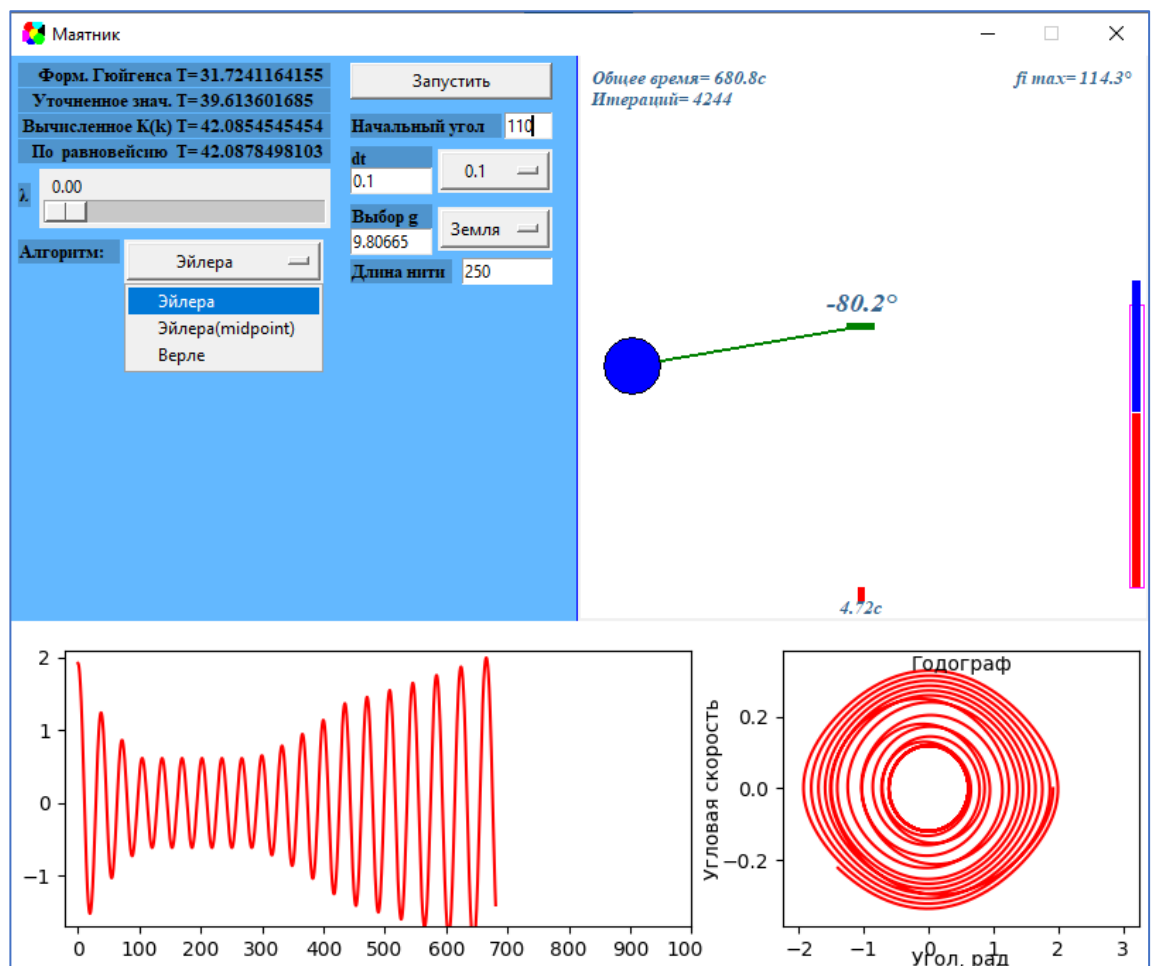


Рис. 11 Сравнение алгоритмов Эйлера и Верле

На рисунке 6 наглядно продемонстрирована разница методов математического исчисления положения маятника.

Старт был произведен с методом Верле (с механизмом предиктор-корректора), на 100-й секунде был отключен коэффициент затухания и на 300-й секунде переключен метод с Верле на Эйлера. Мы видим, как постепенно начала расти амплитуда колебаний и общая энергия маятника. В результате на 780-й секунде колебаний общая энергия стала больше, чем E_{\max} (которая была у маятника в момент старта). А расти она стала с момента включения алгоритма Эйлера и не только компенсировала потери энергии из-за затухания, но и превысила первоначальное значение. Это показывает, что алгоритм Эйлера по сравнению с алгоритмом Верле намного хуже сохраняет энергию осцилляционной системы.

Вывод.

- В ходе выполнения задания была численно промоделирована осцилляторная система с несколькими вариантами настройки и алгоритмами математической обработки.
- Была проверена работоспособность алгоритма предиктор-корректор и выявлена разница между алгоритмами Эйлера и Верле.
- Изучены способы верификации компьютерных моделей на основании физических законов и аналитических моделей.