Lógica Computacional: 21/22

Trabalho 1

Grupo 7

- David José de Sousa Machado (A91665)
- Ivo Miguel Gomes Lima (A90214)

Inicialização

Para a resolução destes exercícios usamos a biblioteca [OR-Tools] que criou uma interface para o SCIP. Esta biblioteca foi instalada com o commando `pip install ortools`.

```
!pip install ortools
```

```
Requirement already satisfied: ortools in /usr/local/lib/python3.7/dist-packages (9.1.9490)
Requirement already satisfied: absl-py>=0.13 in /usr/local/lib/python3.7/dist-packages (from ortools) (0.15.0)
Requirement already satisfied: protobuf>=3.18.0 in /usr/local/lib/python3.7/dist-packages (from ortools) (3.19.0)
Requirement already satisfied: six in /usr/local/lib/python3.7/dist-packages (from absl-py>=0.13->ortools) (1.15.0)
```

```
import networkx as nx
from ortools.linear_solver import pywraplp
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from IPython.display import HTML, display
from tabulate import tabulate
import timeit
import random

np.set_printoptions(threshold=np.inf, linewidth=np.inf)
```

Problema 2: Sudoku

Tradicional o jogo Sudoku tem dimensoes 3×3 (corresponde ao caso $N = 3$), o nosso objetivo é preencher uma grelha de $N^2 \times N^2$ com inteiros positivos no intervalo 1 até N^2, satisfazendo as seguintes regras:

> Cada inteiro no intervalo 1 até N^2, ocorre só uma vez em cada coluna, linha e secção $N \times N$.

> No início do jogo uma fração $0 < \alpha < 1$ das N^4 casas da grelha são preenchidas de forma consistente com a regra anterior.

As condições exigidas foram:

1. Um programa que inicialize a grelha a partir dos parâmetros N e α
2. Apresentação de uma solução para as combinações de parâmetros $N \in (3, 4, 5, 6)$ e $\alpha \in (0.0, 0.2, 0.4, 0.6)$. Tirando ainda conclusões relativamente à complexidade computacional das mesmas.

Implementação

1.

```
def gerar_sudoku(n, alpha):
  leng = n**2
  matrix = np.zeros((leng, leng))
  dispensable = round((1-alpha) * n**4)

  # gera sudoku correcto
  for line in range(leng):
    aux = line // n
    for col in range(leng):
      val = line*n + col + aux
      matrix[line][col] = val % leng + 1

  # mistura aleatoriamente
  for step in range(0, leng, n):
    for _ in range(leng):
      r1 = random.randint(0, n-1)
      r2 = random.randint(1, n-1)
      l1 = r1 + step
      l2 = (r1 + r2) % n + step
```

```
      matrix[[l1, l2]] = matrix[[l2, l1]]

  for step in range(0, leng, n):
    for _ in range(leng):
      r1 = random.randint(0, n-1)
      r2 = random.randint(1, n-1)
      c1 = r1 + step
      c2 = (r1 + r2) % n + step

      matrix[:, [c1, c2]] = matrix[:, [c2, c1]]

  solution = np.copy(matrix)

  # apagar elementos
  while dispensable > 0:
    x = random.randint(0, leng-1)
    y = random.randint(0, leng-1)
    if matrix[x, y] != 0:
      dispensable -= 1
    matrix[x, y] = 0

  return solution.astype(int).tolist(), matrix.astype(int).tolist()

solved, unsolved = gerar_sudoku(3, 0)
unsolved
```

```
[[0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0],
 [0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0],
 [0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0],
 [0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0],
 [0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0],
 [0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0],
 [0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0],
 [0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0],
 [0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0]]
```

2.

Uma vez que tivemos de adotar uma estratégica lógica acabamos por pensar no Sudoku como um grafo onde cada linha\coluna apenas pode ter uma cor, ou seja transformou-se num problema de coloração de grafos.

Para o efeito criamos um grafo com n^4 vértices V e $\frac{((2(n^2-1)+(n-1)^2)\times n^4)}{2}$ arestas E, que obedeçam às seguintes regras:

1. $\forall_{(o,d)} \in E, \forall_{0\leq c<k} \cdot x_{o,c} + x_{d,c} \leq 1$
2. $\forall_v \in V, \sum_{0\leq c<k} \cdot x_{v,c} = 1$

```
def solve_color_ip(graph, k):
    solver = pywraplp.Solver.CreateSolver('BOP')

    # criar dicionario de variaveis x{i,j}
    x = {}
    for v in graph:
      x[v] = {}
      for c in range(k):
        x[v][c] = solver.BoolVar('x[%i][%i]' % (v,c))

    # Adicionar cores predefinidas
    for v in graph:
      if graph.nodes[v]['color'] == 0: # não tem cor
        continue
      for c in range(k):
        if (graph.nodes[v]['color']-1) == c: # tem a cor c
          solver.Add(x[v][c] == 1)
        else:
          solver.Add(x[v][c] == 0)

    # vertices adjacentes tem cores diferentes
    for o, d in graph.edges:
      for c in range(k):
        solver.Add(x[o][c] + x[d][c] <= 1)

    # cada vertice adjacente tem cores diferentes
    for v in graph:
      solver.Add(sum(x[v][c] for c in range(k)) == 1)

    status = solver.Solve()

    if status == pywraplp.Solver.OPTIMAL:
      for v in graph:
```

```
        for c in range(k):
          if (round(x[v][c].solution_value()) == 1):
            graph.nodes[v]['color'] = c + 1
      return True

    return False

def draw_with_colors(graph):
    nx.draw(graph, with_labels=True, node_size=1000, node_color = [graph.nodes[n]['color'] for n in graph], pos = nx.shell_layout(graph))

def draw_board(graph, leng):
  for pos, color in graph.nodes.data():
    if pos % leng == 0:
      print()
    print("{:3}".format(color['color']), end=" ")


def solve_sudoku_graph(n, initial):
  leng = n**2
  tab = nx.Graph()

  tab.add_nodes_from(list(range(leng**2)))
  arestas = []

  # edges linhas
  for head in range(0, leng**2, leng):
    line = list(range(head, head+leng))
    for x in range(leng):
      arestas += [(line[x], ind) for ind in line[x+1:]]

  # edges colunas
  for head in range(leng):
    col = list(range(head, leng**2, leng))
    for x in range(leng):
      arestas += [(col[x], ind) for ind in col[x+1:]]

  # edges quadrado
  corners = []

  for i in range(n):
    corners += list(range(leng*n*i, leng*n*i+leng, n))
```

```
  for corner in corners:
    step = n*(n-1)
    elements = range(corner, corner+leng)
    quadrado = [elements[ind] + step*(ind // n) for ind in range(leng)]
    for x in range(leng):
      arestas += [(quadrado[x], ind) for ind in quadrado[x+1:]]

  tab.add_edges_from(arestas)
  #end

  tab.add_edges_from(arestas)

  for row in range(leng):
    for col in range(leng):
      tab.nodes[row*leng + col]['color'] = initial[row][col]

  if solve_color_ip(tab, leng):
    return tab

  return False

n, alpha = 5, 0.4

solucao, tabuleiro = gerar_sudoku(n, alpha)

graph = solve_sudoku_graph(n, tabuleiro)
print(graph)
draw_board(graph, n**2)
```

```
Graph with 625 nodes and 20000 edges

 11   8  17  14  13  12   3  19  20   9  24  16  21  25  15   4   2  22   1  18  10   6   5  23   7
  3  22  25  24  21   2  13   1   5   4   8  14   6  10  23  12  15   9  11   7  19  16  17  18  20
  6   7  20   9  10  17  16  11  15   8  18  19   5   2  22  24  14  25  21  23   4   1  12  13   3
 16  19  12  23  18  22   7  21  10  24  17   4   1  20   9   3   5  13   6   8  14  11  15   2  25
  1   2   5   4  15  25  23   6  18  14  13  12  11   3   7  19  20  17  10  16  24  21  22   8   9
 17  15  16  10  14  24  19   2  21  20  22  13  12   1  25  18   4   3  23   6   5   7   8   9  11
 25  18  11  20  19  23   9  22   1  13   7   5   4   6   3  10  17   8   2  21  15  12  16  14  24
 24   3   6  21   4   8  18  17  11  10  14  15  20  16   2   5  12   7  19   9  25  13  23  22   1
 22  12   1   7   2   3   4  25   6   5   9  23  10  11   8  15  16  24  13  14  20  19  18  17  21
  9  13   8   5  23   7  14  12  16  15  19  24  17  21  18  25  11   1  22  20   6   2   3   4  10
  4  21   7   6  20   9   8   5  12  11  15  10  16  17  14  13  22  19  18  25   1  23  24   3   2
```

```
23 25  2  1  5  4 24  3 17  6 20 11  8 12 13 16 10 14  9 15 21 18 19  7 22
13 14 15 16  8 19 20 18 22 21 25  1  2 23 24  6  7  4  3  5 11 17  9 10 12
18 17 22 19  3 10 25 23  2  1  5  6  9  7  4 11 21 12  8 24 16 20 14 15 13
12  9 10 11 24 14 15 13  7 16  3 21 18 22 19  1 23  2 20 17  8 25  4  5  6
 7  5 21  2  6 15 11  4 13 22 23 17 14  8 12  9 25 20 16 19  3 24 10  1 18
14 24 13 15 11 16 10  9 23 17 21 22 19 18 20  2  3  5 12  1  7  4 25  6  8
 8 10 18 17  9 20 21 14  3 19  1 25 24  4 16 22  6 23  7 13 12  5  2 11 15
19 16  3 25  1  5  6 24  8 12 11  2  7 13 10 17 18 15 14  4 22  9 20 21 23
20  4 23 12 22 18  1  7 25  2  6  9  3 15  5 21  8 10 24 11 17 14 13 19 16
21  6  9  8  7 13 12 10 14 25 16 18 15 19 17 23 24 11  5 22  2  3  1 20  4
 5 11 24 22 16  1  2 20  4  3 10  8 23  9  6 14 13 21 17 12 18 15  7 25 19
10 23 14 13 12 11 17 15 19  7  4  3 22 24 21 20  1 18 25  2  9  8  6 16  5
 2  1  4  3 25  6  5  8  9 18 12 20 13 14 11  7 19 16 15 10 23 22 21 24 17
15 20 19 18 17 21 22 16 24 23  2  7 25  5  1  8  9  6  4  3 13 10 11 12 14
```

A outra forma que encontramos para resolver um Sudoku de rank N levou-nos a vê-lo como uma matriz tridimensional ($n^2 \times n^2 \times n^2$) $Sudoku(X, Y, Z)$ em que X representa a linha, Y a coluna e Z a cor.

Para o efeito estabelecemos as seguintes restrições:

1. $\forall_x \in X, \forall_y \in Y \cdot \sum_{0 \leq z < Z} Sudoku_{x,y,z} = 1$
2. $\forall_x \in X, \forall_z \in Z \cdot \sum_{0 \leq y < Y} Sudoku_{x,y,z} = 1$
3. $\forall_y \in Y, \forall_z \in Z \cdot \sum_{0 \leq x < X} Sudoku_{x,y,z} = 1$
4. $\forall_x \in X : \frac{n}{x}, \forall_y \in Y : \frac{n}{y}, \forall_{0 \leq c_x < n^2}, \forall_{0 \leq c_y < n^2} \cdot \sum_{0 \leq z < Z} Sudoku_{x+c_x, y+c_y, z} = 1$

```
def solve_sudoku_ip(n, board):
  leng = n**2
  solver = pywraplp.Solver.CreateSolver('BOP')

  # Criar variáveis
  sudoku = {}
  for x in range(leng):
    for y in range(leng):
      for z in range(leng):
        sudoku[x, y, z] = solver.BoolVar('sudoku[%i,%i,%i]' % (x, y, z))

  # Adicionar cores predefinidas
  for x in range(leng):
    for y in range(leng):
```

```
      if board[x][y] > 0:
        for z in range(leng):
          solver.Add(sudoku[x, y, z] == int(board[x][y] == z+1))

  # Cada par (x,y) só tem uma cor
  for x in range(leng):
    for y in range(leng):
      solver.Add(sum(sudoku[x, y, z] for z in range(leng)) == 1)


  for z in range(leng):
    # Cores diferentes nas linhas
    for x in range(leng):
      solver.Add(sum(sudoku[x, y, z] for y in range(leng)) == 1)

    # Cores diferentes nas colunas
    for y in range(leng):
      solver.Add(sum(sudoku[x, y, z] for x in range(leng)) == 1)

    # Cores diferentes nos blocos
    for corner_x in range(0, leng, n):
      for corner_y in range(0, leng, n):
        solver.Add(sum(sudoku[corner_x + x, corner_y + y, z] for x in range(n) for y in range(n)) == 1)


  status = solver.Solve()

  result = [[0] * leng for _ in range(leng)]
  if status == pywraplp.Solver.OPTIMAL:
    # colorir
    for x in range(leng):
      for y in range(leng):
        result[x][y] = sum((z + 1) * round(sudoku[x, y, z].solution_value()) for z in range(leng))

  return result

n, alpha = 3, 0.2

solucao, tabuleiro = gerar_sudoku(n, alpha)

res = solve_sudoku_ip(n, tabuleiro)
```

```
print("Unsolved\n",tabulate(tabuleiro))
print("Solved\n",tabulate(res))
```

```
Unsolved
 -  -  -  -  -  -  -  -  -
0  0  1  0  0  0  0  0  9
0  8  0  0  0  0  0  0  0
0  0  0  0  9  0  0  1  0
7  6  0  8  0  0  0  0  4
4  0  0  0  0  0  9  0  0
0  0  8  0  0  0  0  0  0
0  0  3  0  8  0  0  0  0
2  0  0  0  0  0  7  0  0
0  0  0  0  0  0  0  0  0
-  -  -  -  -  -  -  -  -
Solved
 -  -  -  -  -  -  -  -  -
6  7  1  3  4  8  2  5  9
9  8  5  2  1  7  6  4  3
3  2  4  5  9  6  8  1  7
7  6  9  8  2  5  1  3  4
4  5  2  1  6  3  9  7  8
1  3  8  4  7  9  5  6  2
5  1  3  7  8  2  4  9  6
2  4  6  9  3  1  7  8  5
8  9  7  6  5  4  3  2  1
-  -  -  -  -  -  -  -  -
```

Conclusão

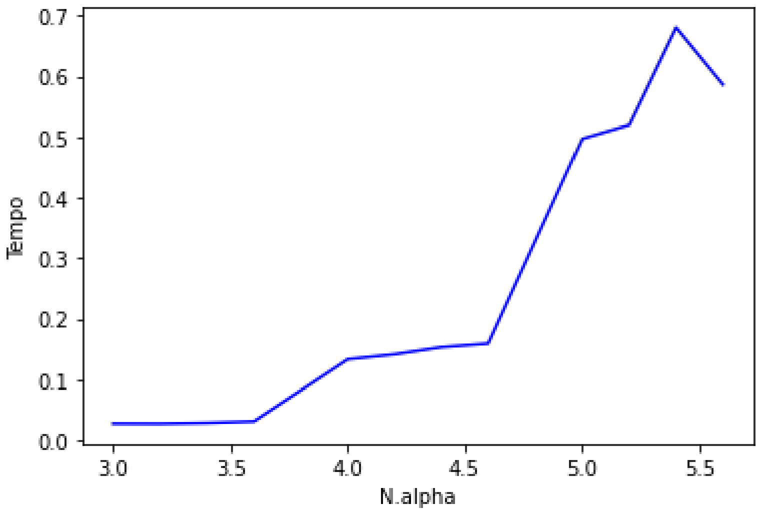
Tirando proveito das módulos `timeit` e `matplotlib` obtivemos os resultados abaixo apresentados.

```
alphas = [0.0, 0.2, 0.4, 0.6]
ns = list(range(3, 6))
reps = 10
```

```
x = [3.0, 3.2, 3.4, 3.6, 4.0, 4.2, 4.4, 4.6, 5.0, 5.2, 5.4, 5.6]
cube = []
graph = []
```

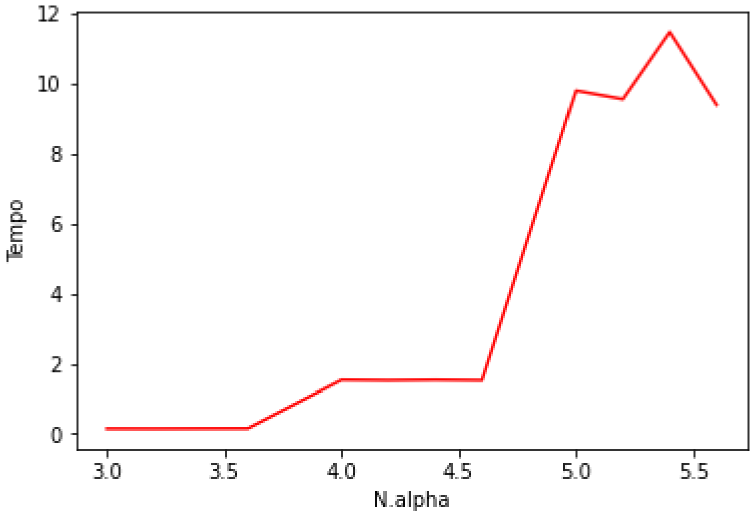
```
headers = ["0.0", "0.2", "0.4", "0.6"]

timestamps = np.zeros((6-3, 4))
#
for n in range(len(ns)):
  for alpha in range(len(alphas)):
    solucao, tabuleiro = gerar_sudoku(ns[n], alphas[alpha])
    elapsed_time = timeit.timeit(lambda : solve_sudoku_ip(ns[n], tabuleiro), number=reps)
    timestamps[n, alpha] = round(elapsed_time/reps, 4)
    cube.append(timestamps[n, alpha])

print(tabulate(timestamps,headers))

# labels
plt.xlabel("N.alpha")
plt.ylabel("Tempo")

# linha cubo
plt.plot(x, cube, 'b', label='Matriz cúbica')

plt.show()
```

```
   0.0     0.2     0.4     0.6
------  ------  ------  ------
0.027   0.0268  0.0281  0.0305
0.133   0.1411  0.1528  0.1588
0.4965  0.5193  0.6802  0.586
```



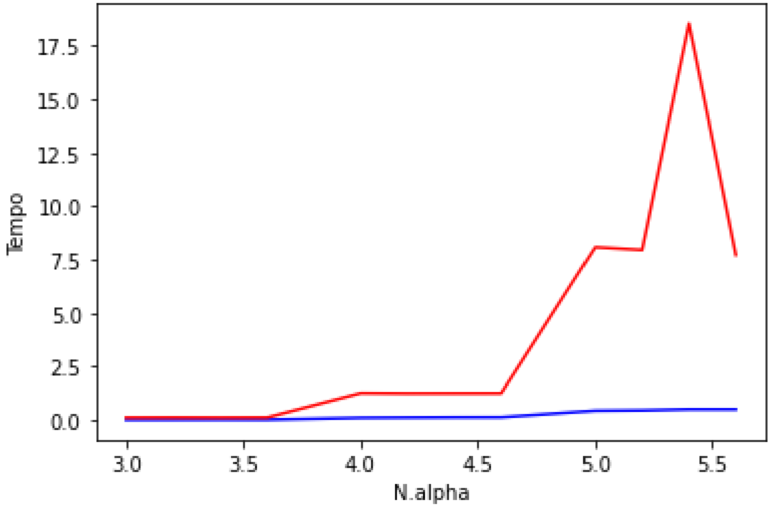
```
for n in range(len(ns)):
  for alpha in range(len(alphas)):
    solucao, tabuleiro = gerar_sudoku(ns[n], alphas[alpha])
    elapsed_time = timeit.timeit(lambda : solve_sudoku_graph(ns[n], tabuleiro), number=reps)
    timestamps[n, alpha] = round(elapsed_time/reps, 4)
    graph.append(timestamps[n, alpha])

print(tabulate(timestamps,headers))

# labels
plt.xlabel("N.alpha")
plt.ylabel("Tempo")

# linha grafo
plt.plot(x, graph, 'r', label='Grafo')

plt.show()
```

```
     0.0     0.2      0.4     0.6
------  ------  -------  ------
0.1485  0.147    0.1508  0.1534
1.534   1.5218   1.5337  1.5211
9.8     9.5566  11.4755  9.393
```




```
# labels
plt.xlabel("N.alpha")
```

```
plt.ylabel("Tempo")


# linha cubo
plt.plot(x, cube, 'b', label='Matriz cúbica')
# linha grafo
plt.plot(x, graph, 'r', label='Grafo')

plt.show()
```



Para acrescentar informção aos dados recolhidos pela nossa resolução, fomos consultar alguns documentos *online* que enunciam:

> " Um Sudoku tem uma solução válida (existir apenas uma solução para cada puzzle) se tiver no mínimo 17 células preenchidas."

No contexto do nosso problema as células preenchidos são dados pelo α, através de alguma matemática básica entendemos que:

$$\alpha = 0.0 \rightarrow \ 0 \ células \ preenchidas$$
$$\alpha = 0.2 \rightarrow \ \approx 16 \ células \ preenchidas$$
$$\alpha = 0.4 \rightarrow \ \approx 32 \ células \ preenchidas$$
$$\alpha = 0.6 \rightarrow \ \approx 49 \ células \ preenchidas$$

O segundo fator que aumenta a dificuldade de resolver a pergunta é o número de células que têm de ser analisadas pois consome-se muito tempo a pesquisar grelhas completas, uma vez que o número de subconjuntos de cardinal 17 num conjunto com 81 (tabuleiro $3^2 \times 3^2$) elementos é igual a

$$\frac{81!}{17! \cdot (81-17)!} = \frac{81!}{17!(64)!} = \frac{4.56873...^{31}}{3.55687...^{14}}$$

Mas temos de testar várias grelhas, mais precisamente

$$6\ 670\ 903\ 752\ 021\ 072\ 936\ 960 \approx 6,7 \times 10^{21}\ grelhas^{[3]}$$

Enquanto que o número de grelhas aumenta linearmente a computação de uma solução válida para o problema aumenta exponencialmente, mesmo quando é utilizada a solução lógica.

Mesmo que não estejamos interessados na validade de um Sudoku, os cálculos acima continuam a ser relevantes para o desfecho do nosso problema. Inicialmente pensamos:

> Quanto menor o número de células preenchidas no início do problema maior será o número de comparações que o algoritmo realiza, no entanto após realizar os testes, surgiu um padrão, onde menos células preenchidas implica maior liberdade e o inverso implica mais derivações lógicas. Mas existe um ponto intermédio no qual a liberdade e as opções lógicas se anulam parcialmente.

Referências

[1] https://www.sudokuwiki.org/Brute_Force_vs_Logical_Strategies

[2] https://pt.wikipedia.org/wiki/Sudoku

[3] http://repositorium.sdum.uminho.pt/handle/1822/21115

[4] https://ionline.sapo.pt/artigo/442988/sudoku-n-mero-minimo-de-pistas-ja-nao-e-misterio-?seccao=Mundo_i

0 s concluído à(s) 21:35