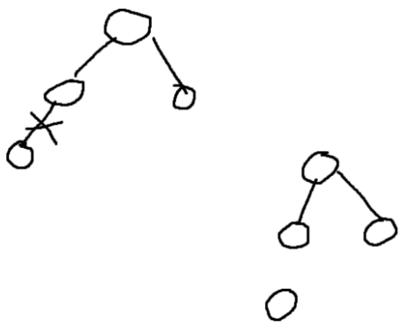
DZ 9

1. => 2.

Pošto je G stablo, G je povezan, acikličan i neusmjeren graf. Pošto je povezan, mora biti barem jedan brid između svakog para vrha u tom stablu. Ako pretpostavimo da između dva proizvoljna vrha stabla u i v ima 2 brida, unija ta dva brida sadržavat će ciklus pa G neće biti stablo, što je kontradikcija pretpostavke da je G stablo. Ciklus:

2. => 3.

Pretpostavimo da su svaka dva vrha u G povezana jedinstvenim putom. To znači da postoji samo jedan put između svaka dva vrha, što znači da će nedostajati brid između neka dva vrha ako maknemo bilo koji brid iz E. Pošto će tada jedan vrh biti „izoliran", neće postojati put između tog vrha i ostalih vrhova, pa je G nepovezan.



3. => 4.

G je povezan vrijedi u pretpostavci pa to trivijalno vrijedi. Ostaje nam dokazati da vrijedi |E| = |V| - 1. Pretpostavimo da imamo bilo kakav ciklus u grafu. Tada ne bi vrijedila pretpostavka da G postaje nepovezan ako maknemo bilo koji brid iz E jer možemo imati povezan graf ako maknemo jedan od bridova u tom ciklusu (sigurno će i dalje postojati barem jedan put između dva vrha u ciklusu). Dakle, graf je acikličan. Pošto je po pretpostavci i povezan, znamo da između svaka dva vrha ima samo jedan brid (jer bi inače bilo ciklusa). To znači da je G stablo, a u stablu svaki par vrhova ima samo 1 brid. Pošto to vrijedi, znamo da je ukupan broj bridova |E| = |V| - 1 jer između svaka dva vrha ima samo jedan brid.

i dalje povezano!

4. => 5.

Ako je G povezan i vrijedi |E| = |V| - 1, to znači da je broj bridova za jedan manji od broja vrhova u grafu. Pretpostavimo da imamo barem jedan ciklus u grafu. Pošto je po pretpostavci |E| = |V| - 1, to znači da je barem jedan vrh nepovezan jer je broj bridova u povezanom i acikličkom grafu |V| - 1, a tu imamo barem jedan ciklus. To je u kontradikciji s pretpostavkom da je G povezan.

5. => 6.

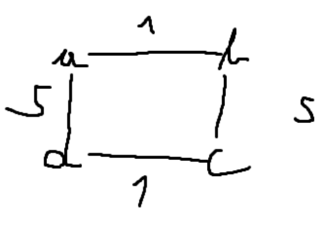
U pretpostavci imamo da je G acikličan pa to trivijalno vrijedi. Također imamo da vrijedi |E| = |V| - 1. Pošto je G acikličan i vrijedi prethodno, znamo da je G i povezan jer između bilo koja dva vrha imamo samo jedan put (ako pretpostavimo suprotno, da imamo minimalno dva puta između neka dva vrha vrijedilo bi da graf ima ciklus). Zato ako se u E doda bilo koji brid, taj brid stvara ciklus u G jer ćemo u bilo kojem slučaju imati dva puta između neka dva vrha.

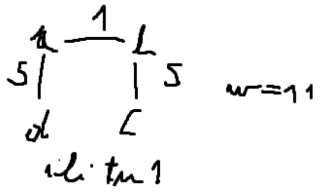
6. => 1.

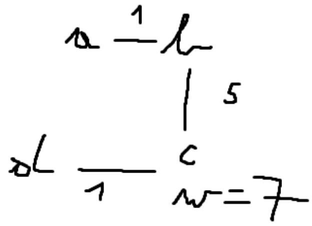
Ako je G acikličan i ako se u E doda bilo koji brid, G će sadržavati ciklus. Pretpostavimo da G nije povezan. To znači da između barem neka dva vrha nema brid. Pretpostavimo da su to proizvoljni vrhovi u i v. Po pretpostavci u 6. imamo da ako se u E doda bilo koji brid, G će sadržavati ciklus. Ako dodamo brid između u i v, naš graf neće sadržavati ciklus, pa je to kontradikcija s pretpostavkom, pa vrijedi da je graf povezan. Pošto je graf acikličan i povezan, imamo stablo.

2.

Ako imamo graf s 4 vrha {a, b, c, d} i bridovima (a, b), (b, c), (c, d) i (d, a) koji imaju težine 1, 5, 1, 5 i podijelimo ga u V1 = {a, d} i V2 = {b, c}, onda postoji samo jedan brid između vrhova u V1 (to je brid (a, d)) i V2 (to je brid (b, c)) i njihova sveukupna težina je 5 + 5 = 10. Ako odaberemo minimalno težak brid iz E koji spaja par (V1, V2) to bi bio brid težine 1. Tada bi ukupna težina grafa bila 11. Međutim, minimalna težina u grafu bila bi kada bi uzeli dva brida težine 1 i jedan brid težine 5 što je u sumi 7. Dakle, algoritam ne računa dobro MST u svim slučajevima.







3.

A) Pokazat ćemo da nikad ne mičemo brid koji mora biti član MST-a. Ako maknemo brid e, e ne može biti most (jer micanjem e graf mora biti povezan u našem algoritmu – to provjerimo u if uvjetu). To znači da je e član nekog ciklusa u grafu. Pošto mičemo bridove u padajućem poretku po težinama, težina svakog drugog brida u ciklusu mora biti manja ili jednaka od težine brida e. Sada dokažimo: Ako je e brid maksimalne težine u nekom ciklusu povezanog grafa G = (V, E) tada e nije član nijednog MST-a T.

Dokaz:

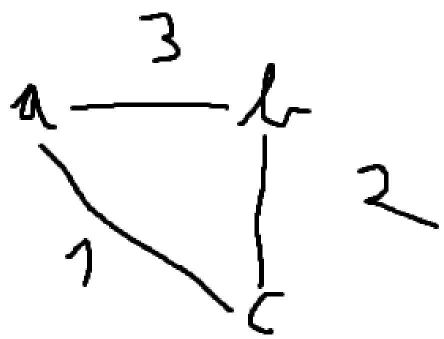
Dokažimo kontradikcijom. Pretpostavimo da postoji MST T s bridom e. Želimo pokazati da T nije MST. Promotrimo ciklus C koji uključuje e. Tada postoji brid e' u C koji nije u T, jer je T stablo a stabla nemaju cikluse. Napravimo novo stablo T' tako što maknemo e iz T i dodamo e'. Iz pretpostavke znamo da je w(e) > w(e'). Po tome, stablo T' ima manju sumu težina od T, što je kontradikcija s pretpostavkom da je T MST.

Nakon što smo to dokazali, znamo da postoji MST iz G koji ne sadrži e, pa je algoritam valjan.

Da bi ovo implementirali, sortiramo bridove u O(E lgE) vremenu. Za svaki brid moramo znati je li T – {e} povezan, pa moramo napraviti DFS (O(V + E) za svaki brid, tj. O(E(V + E))). Pošto to dominira vremenskom složenosti, ukupna vremenska složenost bit će O(E^2).

B) Ovaj algoritam ne vraća MST. Neka je G graf s 3 vrha {a, b, c}. Neka su bridovi (a, b) (w = 3), (b, c) (w = 2) i (c, a) (w = 1). Ako algoritam analizira bridove u redoslijedu kojeg sam naveo, uzet će dva najteža brida umjesto dva najlakša, pa neće konstruirati MST.

Da bi ovo efikasno implementirali, trebali bi koristiti disjunktne skupove kako bi pazili na povezane komponente. Ako bi zvali UNION na istu komponentu napravili bi ciklus. Tako bi pravili |V| MAKE-SET operacija, najviše 3|E| FIND-SET i UNION operacija, pa bi složenost bila O(E * alfa(V)).



C) Ovaj algoritam poziva se na dokaz koji sam napravio u algoritmu A), pa bi vratio MST. Jedini bridovi koje mičemo su maksimalne težine u ciklusu, pa uvijek postoji MST koji ne sadrži te bridove.

Kako bi ovo efikasno implementirali, moramo naći brid maksimalne težine u ciklusu. Za svaki brid koji je u ciklusu možemo DFS-om naći brid maksimalne težine u ciklusu. DFS tada radi u O(V) vremenu jer tada imamo najviše jedan ciklus (koji najviše ima |V| bridova). Ukupna složenost biti će O(EV).