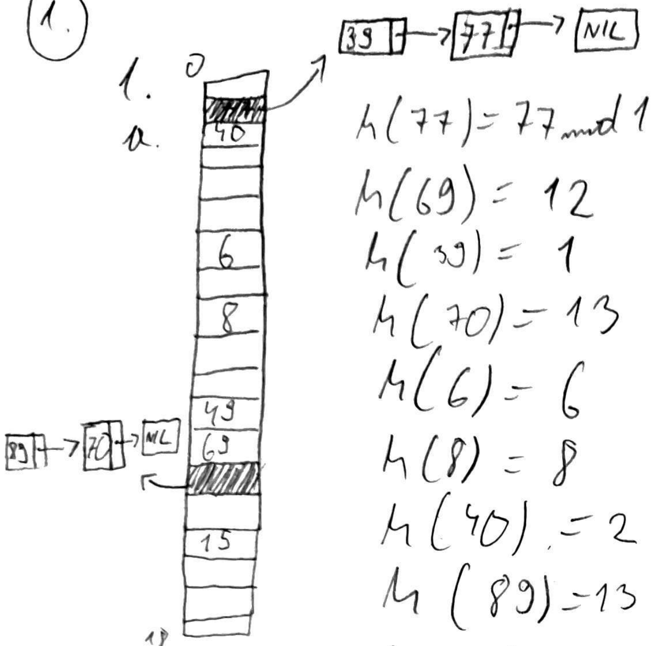
SPA 2

DZ 1

(1.)

1.

a.



$h(77) = 77 \bmod 19 = 1$ ubacujemo u tablicu na mjesto s indeksom 1

$h(69) = 12$ —"— 12

$h(39) = 1$ —"— 1

$h(70) = 13$ —"— 13

$h(6) = 6$ —"— 6

$h(8) = 8$ —"— 8

$h(40) = 2$ —"— 2

$h(89) = 13$ —"— 13

$h(49) = 11$ —"— 11

$h(15) = 15$ —"— 15

b.

$h(77,0) = (h_1(77) + 0 \cdot h_2(77)) \bmod 19$

$= 1$

$h(69,0) = h_1(69) \bmod 19$

$= 12$

$h(39,0) = h_1(39) \bmod 19$

$= 1$

$h(39,1) = (h_1(39) + 1 \cdot h_2(39)) \bmod 19$

$= (1+4) \bmod 19 = 5$

$h(70,0) = h_1(70) \bmod 19 = 13$

$h(6,0) = h_1(6) \bmod 19 = 6$

$h(8,0) = h_1(8) \bmod 19 = 8$

$h(40,0) = h_1(40) \bmod 19 = 2$

$h(89,0) = h_1(89) \bmod 19$

$= 13$

$h(89,1) = (h_1(89) + 1 \cdot h_2(89)) \bmod 19$

$= (13+18) \bmod 19$

$= 12$

$h(89,2) = (13+36) \bmod 19$

$= 11$

$h(49,0) = h_1(49) \bmod 19$

$= 11$

$h(49,1) = (11+14) \bmod 19$

$= 6$

$h(49,2) = (11+28) \bmod 19$

$= 1$

$h(49,3) = (11+42) \bmod 19$

$= 15$

$h(15,0) = h_1(15) \bmod 19$
$= 15$
$h(15,1) = (15+16) \bmod 19$
$= 12$
$h(15,2) = (15+32) \bmod 19$
$= 9$

0	
	77
	40
	39
	6
	8
	15
	89
	69
	70
	49
18	

2. Nije univerzalna jer za npr. $m=3$ i $a_1=a_2=a_3$ i za npr. 987 i 107 $\quad 9\cdot1+8\cdot1+7\cdot1 = 24 \bmod 8 = 0$

$1\cdot1+0\cdot1+7\cdot1 = 8 \bmod 8 = 0$

vjerojatnost da se preslikaju u isto je $1 > \frac{1}{8}$.

(2.) Ako definiramo sluč. varijablu X koja modelira vjerojatnost kolizije za $0,\dots,m-1$ ubačenih ključeva:

$$X \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & \cdots & m-1 \\ 0 & \frac{1}{m} & \frac{2}{m} & \cdots & \frac{m-1}{m} \end{pmatrix}$$ imamo očekivanje

$$EX = \sum_{i=1}^{m} \frac{m-i}{m} = \frac{m^2 - \frac{m(m+1)}{2}}{m} = \frac{m^2-m}{2m}$$

(3.)

1. Pošto je $n \le m/2$, imamo da su bar pola mjesta prazna u tablici u svakom trenutku. Kada bi imali više od k pokušaja morali bi u svakom od prvih k pokušaja doći na indeks na kojem je već nešto u tablici, a vjerojatnost na to je manja od $1/2$, pa je vjerojatnost da se to dogodi svih prvih k manja ili jednako od $\left(\frac{1}{2}\right)^k$
ili jednako
$= \frac{1}{2^k} = 2^{-k}$

2. Koristimo dokaz iz prethodnog zadatka za $k = 2 \lg n$, dobije vjerojatnost je $\le 2^{-2\lg n} = 2^{\lg n^{-2}} = \frac{1}{n^2}$, tj. $O\left(\frac{1}{n^2}\right)$. ■

3. Pošto je $X = \max\{X_i : 1 \le i \le n\}$, imamo

$$\Pr\{X > 2\lg n\} = \Pr\{X_1 > 2\lg n \vee X_2 > 2\lg n \vee \dots \vee X_n > 2\lg n\}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \Pr\{X_i > 2\lg n\} \underset{\text{zadatak}}{\overset{\text{prošli}}{\le}} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n^2} = \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n}, \text{ tj. } O\left(\frac{1}{n}\right).$$ ■

4.

$$EX = \sum_{i=1}^{n} i \cdot \Pr\{X = i\} \le \Pr\{X \le 2\lg n\}\, 2\lg n + \Pr\{X > 2\lg n\}\, n$$

$$\le \frac{n-1}{n}\, 2\lg n + \frac{1}{n}\, n = 2\lg n + 1 - \frac{2\lg n}{n} \in O(\lg n)$$ ■