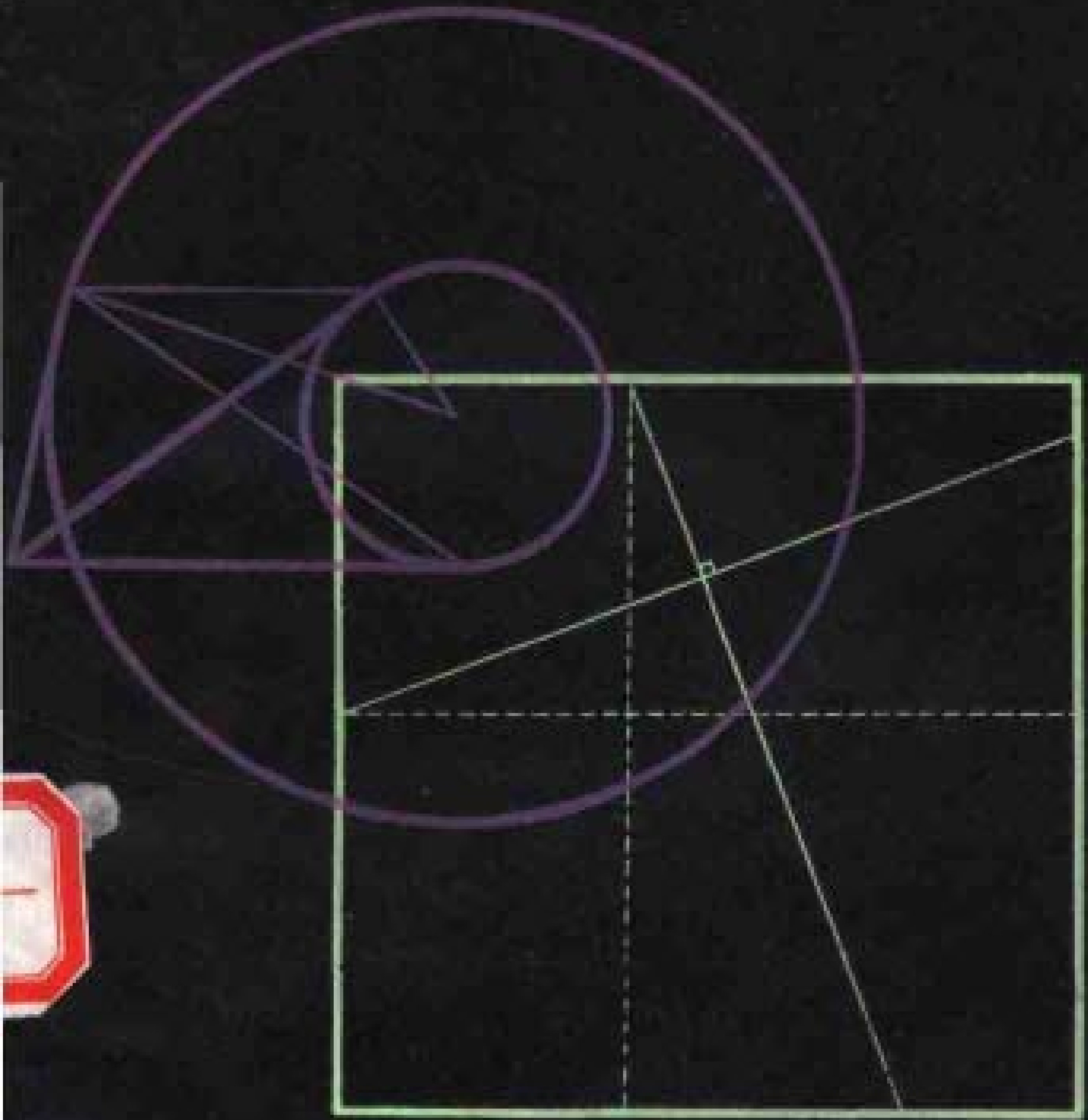
ZENYANG TIAN FUZHUXIAN



怎样添辅助线

责任编辑　冯　贤
封面设计　赵宜生

统一书号：7150·3390
定　　价：0.38元

中学生文库

怎样添辅助线

余振棠 谢传芳

上海教育出版社

中学生文库　　怎样添辅助线

余振棠　谢传芳　　上海教育出版社出版

（上海永福路123号）

江苏溧阳印刷厂印刷　新华书店上海发行所发行

开本 787×1092　1/32　印张 3　字数 58,000

1985年5月第1版　1986年8月第2次印刷

印数50,801—90,800本

统一书号：7150·3390　　定价：0.38元

内 容 提 要

平面几何证题中的添辅助线对初学者来说经常感到困难，本书根据中学生学习平面几何知识的需要，介绍几何证题中添辅助线的方法。作者积累了多年来的教学心得，从剖析简单几何题着手，总结出几种典型的添辅助线方法，以及这些方法在证明较复杂几何题时的综合运用。书中配有适量的习题，可供学生练习思考。本书说理清楚、透彻，是一本添辅助线证题的入门书，初中学生更值得一读。

前　言

证明平面几何命题，就同行军一样，要从起点(题设)出发，寻找出一条到达终点(结论)的路线．但是这种路线可能是畅通无阻的阳关大道，也可能是迂回曲折的崎岖小径，有的还可能被河流阻隔着，必须架了桥才能继续前进．证明几何命题中的添辅助线，就是起着架桥的作用．不少题目在证明过程中，只有添了辅助线才能顺利地进行证明，有时添了辅助线还可以大大地简化证题的步骤，易于获得要证明的结论．

在行军中，桥要架在什么地方，架怎样的桥，如何架等等，没有一种固定不变的、普遍适用的现成方案可循，必须根据具体的地形，进行详细地分析，才能选择一种最佳的架桥方案．在几何证题中，添辅助线问题也是如此，同样没有一个固定不变的、普遍适用的方法可循．因而怎样添辅助线便成了初学几何者所感到困难的问题．但是分析、思考、找寻解决这个问题的过程，确是一个逻辑非常严谨、想象非常丰富的、饶有趣味的思维过程．这本小册子是根据我们自己学几何与教几何的体会，试着对这个困难而饶有趣味的问题作些探讨，供初学几何的青年学生作参考．

目录 ZHONG XUE SHENG WENKU

一、简单问题

我们知道，在证明几何题的时候，一般总是凭着给出的图形(要是题目中没有给出图形，那就按照已知条件作出图形来)，从所求的结论出发，并根据学过的定义、公理、定理等来探求证题的途径，然后把题目证出来．例如：在$\triangle ABC$中，已知AD是中线，DE是AD的延长线，并且$DE=AD$．求证：$BE \mathrel{\underline{\parallel}} AC$(图1)．

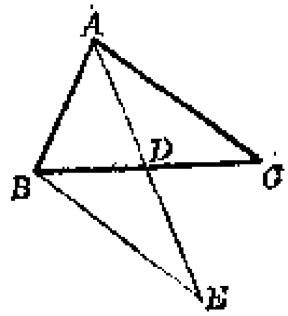


图 1

这里容易知道，要证明$BE \parallel AC$，可以从证明$\angle EBC=\angle ACB$，或者$\angle BEA=\angle CAE$着手．要证明$BE=AC$，可以从证明$\triangle BED\cong\triangle CAD$着手．而根据两个全等三角形的对应角相等，从后者的证明中就可以得到$\angle EBC=\angle ACB$，或者$\angle BEA=\angle CAE$．因此这里只要设法证明$\triangle BED\cong\triangle CAD$．

写出证明如下：

$\because$ AD是$\triangle ABC$的中线，$\therefore$ $BD=DC$．又DE是AD的延长线，$\therefore$ $\angle ADC=\angle BDE$，并且$DE=AD$，$\therefore$ $\triangle BED\cong\triangle CAD$，$\therefore$ $BE=AC$，$\angle EBD=\angle ACD$，$\therefore$ $BE \parallel AC$．

从上例看到，我们根据题设条件，凭着给出的图形，顺利地证得了所求的结论．但是在很多情况下，光凭所给的图形

还不能证得所求的结论，这时就需要添置辅助线了．就本题而论，如果连结 CE 这条辅助线，就得到 $\square ABEC$，同样可以证得 $BE \mathrel{\underline{\parallel}} AC$．可见证题步骤适当地简化了．下面我们再来看一些比较简单的例子．

含有中线的问题

[例 1] 如图 2，在 $\triangle ABC$ 中，AD 是 $\triangle ABC$ 的中线．求证：$AD<\frac{1}{2}(AB+AC)$．

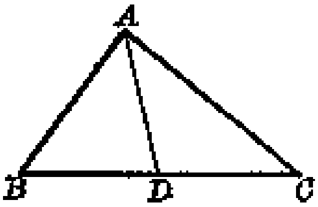


图 2

证法一

分析与思考　要证明 $AD<\frac{1}{2}(AB+AC)$，就是要证明 $2AD<AB+AC$．根据"三角形的两边之和大于第三边"这个性质，如果 AB，AC，$2AD$ 是一个三角形的三条边，那就可以了．但是，在给出的图形中，不存在这样一个三角形，那末必须添置怎样的辅助线呢？

上面的例子启发我们：如果延长 AD 到 E，使 $DE=AD$（图 3），并且连结 BE，那末 $BE=AC$．这样，从 $AB+BE>AE$，就可以证得所求的结论了．

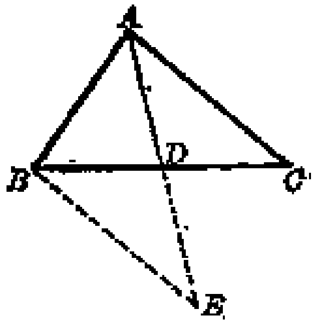


图 3

证明一　延长 AD 到 E，使 $DE=AD$．连结 BE．

在 $\triangle ADC$ 和 $\triangle EDB$ 中，

$$AD=DE,\ CD=BD,\ \angle ADC=\angle EDB,$$

$$\therefore\quad \triangle ADC\cong\triangle EDB.$$

$$\therefore\quad BE=AC.$$

在 $\triangle ABE$ 中，$AB+BE>AE$，

$$\therefore \quad AB+AC>2AD,$$

即 $$AD<\frac{1}{2}(AB+AC).$$

注：例题的"已知"和"求证"部分从略，下文相同.

这个证法，我们是把中线 AD 延长到 E，使 $DE=AD$，再连结 BE，DE、BE 成了添置的辅助线，然后证得结论成立的。添置 DE、BE 这两条辅助线，可以有多种方法．例如我们可以把 AC 平行移动到 BE 的位置上(参见图 3)，连结 DE，这时，只要证明 A、D、E 三点在一条直线上，并且 $DE=AD$ 就可以了.

证明二　从 B 作 $BE \perp\!\!\!\!= AC$，连结 DE.

$$\because \quad BE \parallel AC, \quad \therefore \quad \angle ACB=\angle EBC.$$

又 $BE=AC$，$BD=DC$，　$\therefore$　$\triangle BED \cong \triangle CAD$.

$$\therefore \quad \angle BDE=\angle CDA, \ DE=AD.$$

又 $\angle BDE+\angle EDC=180^\circ$，$\angle CDA+\angle EDC=180^\circ$，所以 A、D、E 在一条直线上，并且 $AE=2AD$.

在 $\triangle ABE$ 中，$AB+BE>AE$，　$\therefore$　$2AD<AB+AC$.

读者不妨试一试，如果将 $\triangle ADC$ 绕 D 点旋转 180°，能否证出所求的结论？所添的辅助线是否相同？

证法二

分析与思考　要证明 $AD<\frac{1}{2}(AB+AC)$，就是要证明 $AD<\frac{1}{2}AB+\frac{1}{2}AC$，为此我们可以先作出 $\frac{1}{2}AB$ 和 $\frac{1}{2}AC$，再设法证明它们的和大于 AD．容易看到，如图 4，如果取 AB 的中点 E，那末 AE 就是 $\frac{1}{2}AB$．而

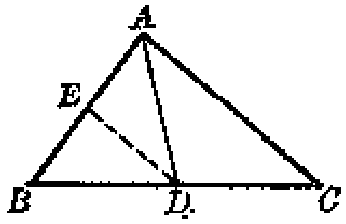


图 4

D 是 BC 的中点，如果连结 DE，那末 $DE=\frac{1}{2}AC$．这样就

把问题转化为求证 $AE+ED>AD$ 了。这从 $\triangle AED$ 中可以得到证明.

证明　从略.

上面的两种证法，由于思考的途径不同，所添置的辅助线也不同. 证法一是借助于全等三角形的对应部分相等，根据中线所蕴含的性质来添置辅助线的. 采取的方法是：可将中线延长一倍，或将某直线平移，或将三角形旋转，将图形改变位置，使分散的条件，集中在一起，得到由 AB、AC 和 $2AD$ 构成的三角形 ABE，从而证得所求的结论. 证法二是借助于中位线的性质来添置辅助线的. 得到由 $\frac{1}{2}AB$、$\frac{1}{2}AC$ 和 AD 构成的三角形 AED，从而证得所求的结论.

[例 2]　如图 5 AM 是 $\triangle ABC$ 的中线，四边形 $ABGF$ 和 $ACDE$ 是正方形. 求证：$EF=2AM$.

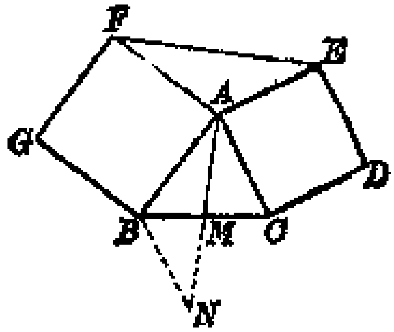


图　5

分析与思考　要证明 $EF=2AM$，可以先延长 AM 到 N，使 $AN=2AM$，然后设法证明 $EF=AN$. 要证明 $EF=AN$，可以从证明两个分别含有这两条线段的三角形全等着手. 连结 BN，只要证明 $\triangle ABN\cong\triangle FAE$ 就可以了，因为 $BN\parallel AC$. $\angle ABN+\angle BAC=180°$，而 $\angle BAF+\angle CAE=180°$，所以 $\angle ABN=\angle FAE$. $AB=FA$，$BN=AE$，容易证得 $\triangle ABN\cong\triangle FAE$，从而就可以证明 $EF=2AM$ 了.

证明　从略.

从例 1 的证法一和例 2 的证明可以看到，如果在题目中

含有三角形的中线的已知条件，比较多的情况是将中线延长一倍，添了这一条辅助线，便可得到两个全等的三角形，或平行四边形，这样有利于把条件与结论之间的关系建立起来。

练　　习

1. 已知 $\triangle ABC$，AM 是中线，$AB>AC$。求证：$\angle CAM>\angle BAM$。

2. 已知 $\triangle ABC$，AM 是中线，$\angle A>90°$。求证：$\angle BAM>\angle ABM$。

3. 在 $\triangle ABC$ 中，AD 是中线，也是角平分线。求证：$AD\perp BC$。

含有中点的问题

[例 3]　如图 6，在 $\triangle ABC$ 中，E 为 AC 的中点，D 在 BC 上，且 $BD=\frac{1}{3}BC$。求证：AD 平分 BE。

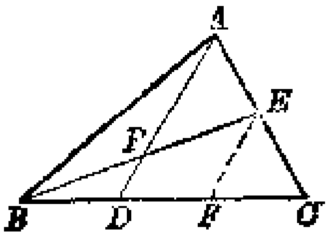


图　6

证法一

分析与思考　要证 DP 平分 BE，可以从三角形中位线定理的逆定理证得，设法作一个以 DP 为中位线的三角形就可以了。要使 D 点为三角形一边的中点，可在 DC 上取 $DF=BD$。连结 EF，如果能证明 $EF\parallel PD$，那末 P 点平分 BE。在 $\triangle ACD$ 中，因为 E 是 AC 的中点，只要证明 F 也是 DC 的中点就可以了。根据题设条件，显然 F 为 DC 的中点。

证明　从略。

证法二

分析与思考 要证明 $BP=PE$(图7)，BP 是 $\triangle BDP$ 的一条边，如果能作一个以 PE 为一边的三角形，与三角形 BDP 全等就可证得 $BP=PE$. 假设三角形 PEG 已作出，并且 $\triangle PEG\cong\triangle PBD$. 要使 $\triangle PEG\cong\triangle PBD$，便要有 $\angle BDP=\angle EGP$，$\angle DBP=\angle PEG$ 及 $BD=EG$. 为此，便要有 $EG\parallel BC$，及 $EG=\frac{1}{3}BC=\frac{1}{2}DC$，于是 EG 必须是 $\triangle ACD$ 的中位线. 因此，EG 可以作出，从而可证明 $BP=PE$.

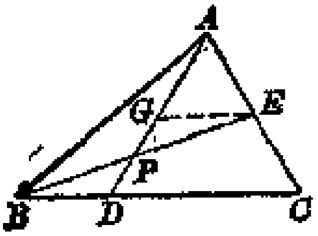


图 7

证明 从略.

[例4] 如图8，四边形 $ABCD$，$AC=BD$，M、N 为 AB、CD 的中点. 求证：AC、BD、MN 相交成一个等腰 $\triangle PQR$.

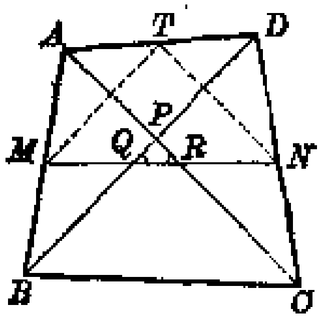


图 8

分析与思考 要证 $\triangle PQR$ 是等腰三角形，可从证明 $\angle PQR=\angle PRQ$ 着手，要证明 $\angle PQR=\angle PRQ$，图中没有直接关系，必须添辅助线把它们移动到容易建立关系的适当的位置上去. 由于 M、N 是 $\triangle ABD$、$\triangle ACD$ 一边的中点，便自然想到取另一边 AD 的中点 T，作中位线 MT、NT，要证明 $\angle PQR=\angle PRQ$ 就转换成证明 $\angle TMN=\angle TNM$. 由题设 $AC=BD$，于是可以证得 $TM=TN$，从而证得 $PQ=PR$.

证明 从略.

[例5] 求证连结梯形两对角线中点的线段平行且等于

两底差的一半.

如图 9, 本题求证 $MN \parallel BC$, 及 $MN=\frac{1}{2}(BC-AD)$.

证法一

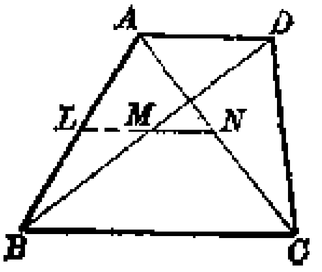


图 9

分析与思考　要证明 $MN \parallel BC$, 根据已知条件 N 是 AC 的中点, 只要证明 MN 是 $\triangle ACB$ 的中位线的一部分. 设 NM 的延长线与 AB 交于 L, 只要证明 L 是 AB 的中点就可以了. 另一方面要证明 $MN=\frac{1}{2}(BC-AD)$, 就是要证明 $NL-ML=\frac{1}{2}BC-\frac{1}{2}AD$, 也就是要证明 $NL=\frac{1}{2}BC$, $ML=\frac{1}{2}AD$. 这样便归结为要证明 L 是 AB 的中点. 为此, 不妨先取 AB 的中点 L, 然后证明 L、M、N 三点共线. 连结 ML、NL, 由于 $LN \parallel BC$, $LM \parallel AD$ 及 $AD \parallel BC$, 所以三点共线是容易证明的

证明　从略.

证法二

分析与思考　如图 10, 要证明 $MN \parallel BC$, 及 $MN=\frac{1}{2}(BC-AD)$, 如果在 BC 上截去 AD, 即取 $CE=AD$, 就是要证明 $MN \mathrel{\underline{\parallel}} \frac{1}{2}BE$. 也就是要证明 MN 是 $\triangle DBE$ 的中位线. 但 D、N、E 不一定共线, 所以必须证明 D、N、E 共线. 这由 $\triangle ADN \cong \triangle CEN$, 可得 $\angle AND=\angle CNE$, 所以不难证得 D、N、E 三点共线. 同时, 也可得 $DN=NE$, 于是 MN 便是 $\triangle DBE$ 的中位线.

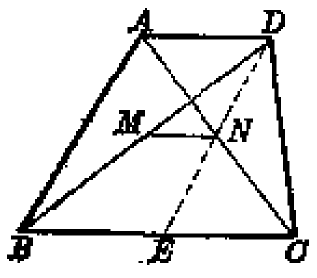


图 10

证明一 根据分析思路逆推来写(从略).

证明二 连结 DN 并且延长,交 BC 于 E.

$$\because \quad AD \parallel BC,$$

$$\therefore \quad \angle DAN = \angle ECN,\ \angle ADN = \angle CEN,$$

且 $AN = NC$,

$$\therefore \quad \triangle ADN \cong \triangle ECN,$$

$$\therefore \quad DN = NE,\ AD = CE.$$

又 $\because$ $DM = MB$, $\therefore$ MN 是 $\triangle DBE$ 的中位线,

$$\therefore \quad MN \parallel BC,$$

并且 $MN = \frac{1}{2}BE = \frac{1}{2}(BC - CE) = \frac{1}{2}(BC - AD)$.

这两种证法都是根据中位线定理来证明的. 但是采取的途径有所不同 证法一是先从要证明的结论"平行"问题着手,进行分析,即从"三角形的中位线平行于第三边"的性质来考虑,取 AB 边中点 L, 添辅助线 NL; 证法二是先从要证明的结论"两底差的一半"问题着手进行分析,即从"三角形中位线等于第三边一半"的性质来考虑,在 BC 上截去 AD, 然后添辅助线 DN、NE,证明 D、N、E 共线(证明一),或连结 DN 并延长交 BC 于 E, 证明 $CE = AD$(证明二).

在证法一中,证明 N、M、L 三点共线,与证法二的证明一中证明 D、N、E 三点共线,这一步决不能忽略 初学者往往"想当然"地不加证明,这是错误的.

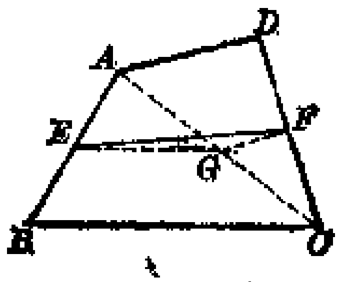


图 11

[例6] 如图11, 四边形 $ABCD$, E、F 为 AB、CD 的中点. 求证: $EF \leqslant \frac{1}{2}(AD + BC)$.

分析与思考 如果 $AD \parallel BC$, 则这个四边形是梯形. 所

以 $EF=\frac{1}{2}(AD+BC)$，即梯形的中位线定理。

如果 $AD\not\parallel BC$，那么 EF 与两底 AD、BC 间不能直接建立关系。而要证明 $EF<\frac{1}{2}(AD+BC)$，则必须在图中寻找与 $\frac{1}{2}AD$ 及 $\frac{1}{2}BC$ 分别相等的线段，根据中点的条件，自然会想到与 AD、BC 为底边的三角形中位线联系起来。因此必须添辅助线构成两个分别以 E 与 F 为一边中点、以 BC 与 AD 为底边的三角形。连结对角线 AC（或 BD）便得到需要的三角形 $\triangle ABC$ 和 $\triangle CAD$。然后取 AC 的中点 G，添中位线 EG、FG，便能证得结论成立。

证明　从略。

从例 3 到例 6 的已知条件中都含有三角形或多边形边的中点。证题方法都是添置中位线作为辅助线，然后应用三角形的中位线性质来证明。如果图形中已存在三角形或梯形，中位线可以马上作出(如例 3、例 4 及例 5 的证法一)；如果图形中不存在现成的，或适用的三角形，则要先构造出三角形，然后添置中位线证明(如例 5 的证法二和例 6)。

练　习

1．在 $\triangle ABC$ 中，D 为 AB 的中点，E 在 AC 上，且 $AE=\frac{2}{3}AC$，BE 交 CD 于 O，求证：$OE=\frac{1}{4}BE$。

2．若四边形的两对角线互相垂直，则两组对边的中点连线相等。

3．在 $\triangle ABC$ 中，E、F 分别为 BC、AB 的中点，M、N 在 AC 上，且 $AM=MN=NC$，FM、EN 的延长线交于 D，

求证：四边形 $ABCD$ 为平行四边形。

含有角平分线的问题

[例 7] 如图 12，在 $\triangle ABC$ 中，$\angle A=2\angle B$，CD 平分 $\angle C$，求证：$BC=AC+AD$。

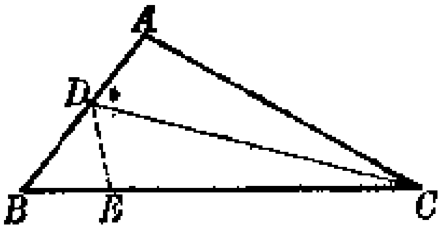


图 12

分析与思考　要证明 $BC=AC+AD$，设想能否将 BC 分成与 AC、AD 相等的两线段。这里 CD 是 $\angle C$ 的平分线，如果以 CD 为轴，将 $\triangle ACD$ 翻折过来，那么 A 点一定落在 BC 上，得 E 点。也就是 $CE=CA$，$DE=DA$。如果能证明 $BE=DE$，就可证得 $BE=DA$。由于 $\angle A=\angle CED=2\angle B$，就可证得结论成立。

证明　因为 CD 平分 $\angle C$，以 CD 为轴将 $\triangle ACD$ 翻折过来，A 点落在 CB 上，得 E 点，连结 ED，则 $ED=AD$，$\angle DAC=\angle DEC$。

又　　$\angle A=2\angle B$，　$\therefore$　$\angle DEC=2\angle B$，

而　　$\angle DEC=\angle B+\angle BDE$　$\therefore$　$\angle BDE=\angle B$，

$$\therefore\quad BE=DE=DA,$$

$$\therefore\quad BC=AC+AD.$$

注：本题也可以在 CB 上截取一段 CE，使 $CE=AC$，连结 DE，从证明 $\triangle ACD\cong\triangle ECD$ 着手。

[例 8] 如图 13，在 $\triangle ABC$ 中，$AB>AC$，AD 是 $\angle A$ 的平分线，E 是 AD 上的点．求证：$AB-AC>EB-EC$。

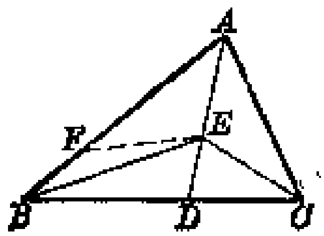


图 13

分析与思考　要证明 $AB-AC>EB-EC$，可在 AB 上截去 AC 后，比较剩下的线段与 EB 减

EC 所得的差的大小，或在 EB 上截去 EC 后，比较剩下的线段与 AB 减 AC 所得的差的大小. 根据题设条件，AD 是 $\angle A$ 的平分线，利用角平分线具有对称轴的性质，将 $\triangle ACE$ 沿 AD 翻折，那末 $AF=AC$，$EF=EC$. 这样就将问题转化为要求证明 $FB>EB-EC$ 了. 显然，从 $\triangle BFE$ 中可以证得结论成立.

证明　从略.

注：本题也可以在 AB 上取一段 AF，使 $AF=AC$，连结 EF，从证明 $\triangle FAE\cong\triangle CAE$ 着手.

上面这两个例子的已知条件中都含有角平分线，角平分线具有对称轴的性质，在证明过程中通常利用这个性质，将图形沿角平分线翻折或借助于全等三角形对应元素相等来添置辅助线，使已知条件与结论联系在一起，从面证得结论成立.

［例 9］　如图 14，在 $\triangle ABC$ 中，AT 是 $\angle A$ 的平分线，AM 是中线，$BE\perp AT$ 于 E，$CF\perp AT$ 于 F. 求证：$ME=MF$.

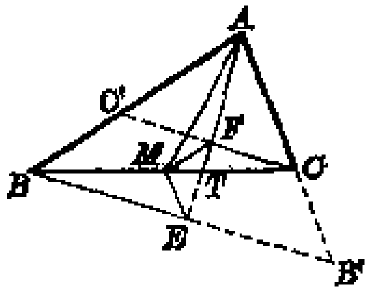


图　14

证法一

分析与思考　要证明 $ME=MF$，可以从证明 $\angle MEF=\angle MFE$ 来考虑. 这里 $\angle MEF=\angle MFE$ 没有直接的关系，必须寻找与 $\angle MEF$、$\angle MFE$ 分别相等的角. 已知 M 是 BC 的中点，将 CF 延长交 AB 于 C'，如能证得 F 点为 CC' 的中点，那么 $MF\parallel AB$，$\angle MFE=\angle BAT$. 现在来考虑 F 点是否为 CC' 的中点？因为 AT 是 $\angle A$ 的平分线，并且 $CF\perp AT$，所以 F 点为 CC' 的中点. 按同样的思路可证得 $\angle MEF=\angle CAT$，从而可证得 $\angle MEF=\angle MFE$.

证明 延长 CF 交 AB 于 C'，$\because \angle CAF=\angle FAC'$，$CF\perp AF$，

$$\therefore\ \triangle ACF\cong\triangle AC'F,\quad \therefore\ CF=FC',$$

F 为 CC' 的中点，又已知 M 是 BC 的中点，

$$\therefore\ FM\parallel AB,\quad \therefore\ \angle MFE=\angle BAT.$$

延长 BE 交 AC 延长线于 B'，同理可得 $ME\parallel CB'$，$\angle MEF=\angle CAT$，

$$\because\ \angle BAT=\angle CAT,$$

$$\therefore\ \angle MFE=\angle MEF,\quad \therefore\ ME=MF.$$

证法二

分析与思考 如图14，要证明 $ME=MF$，也可以从证明 ME、MF 都和某一条线段相等着手．这里，M 是 BC 的中点，如果延长 CF 交 AB 于 C'，可知 $C'F=FC$，F 为 CC' 的中点．从而证得 $FM\parallel C'B$，并且 $FM=\frac{1}{2}C'B$．同理，证得 $ME\parallel CB'$，并且 $ME=\frac{1}{2}CB'$．如能证得 $C'B=CB'$，就可证得 $ME=MF$ 了．

证明 从略．

［例10］ 如图15，在 $\triangle ABC$ 中，AD 平分 $\angle A$，并且 $AD=AB$，CM 垂直于 AD 的延长线．求证：$AM=\frac{1}{2}(AB+AC)$．

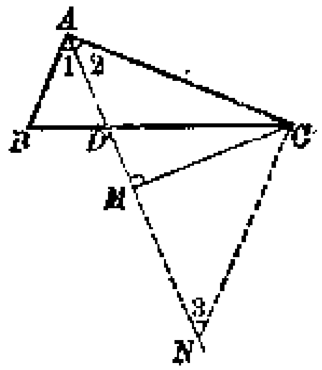


图 15

证法一

分析与思考 要证明 $AM=\frac{1}{2}(AB+AC)$，就是要证明 $2AM=AB+AC$．可以延长 AM 到 N，使 $AN=2AM$，然后设法证明

$AN=AB+AC$. 因为 $AB=AD$，所以要证明 $AN=AB+AC$ 就只要证明 $AN=AD+AC$，这样，就将问题转化为要求证明 $DN=AC$ 了. 又因为 $CM\perp AM$，所以 $AC=CN$，这就将问题转化为要求证明 $DN=CN$ 了. 因为 $\angle 2=\angle 3$，而 $\angle 1=\angle 2$，所以 $\angle 1=\angle 3$. 由此可得 $\angle B=\angle DCN$，而 $\angle B=\angle ADB=\angle CDN$，所以 $\angle CDN=\angle DCN$，$DN=CN$. 从而就可以证得 $AM=\frac{1}{2}(AB+AC)$.

证明　从略.

证法二

分析与思考　如图 16，要证明 $AM=\frac{1}{2}(AB+AC)$，可以先作出一条线段，使它的长等于 $\frac{1}{2}(AB+AC)$，然后设法证明这条线段和 AM 相等就可以了. 因为 AD 是 $\angle A$ 的平分线，如果以 AD 为轴，将 $\triangle ACM$ 翻折，AC 一定落在 AB（这里不妨设 $AC>AB$）的延长线上，设 $AE=AC$. 因为 $CM\perp AM$，所以 M 是 EC 的中点. 这样，只要延长 EA 到 F，使 $AF=EA$，那末 $AM=\frac{1}{2}FC$，由此可知要证明 $AM=\frac{1}{2}(AB+AC)$ 就只要证明 $FC=AB+AC$.

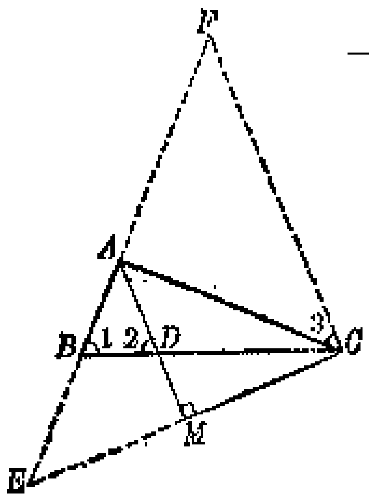


图　16

又因为 $BF=BA+AF=BA+AC$，所以要证明 $FC=AB+AC$，就只要证明 $BF=FC$. 要证明 $BF=FC$，可以从证明 $\angle FBC=\angle FCB$ 着手，这里 $AM\parallel FC$（为什么？）$\angle 2=\angle FCB$，而 $\angle 1=\angle 2$，所以 $\angle 1=\angle FCB$，由此可得 $FB=FC$，从而就可以证得所求的结论了.

证法三

分析与思考　参照证法二，也可以设法找到另一条等于$\frac{1}{2}(AB+AC)$的线段，然后证明它与AM相等．如图17，延长CM与AB的延长线交于E，得$AC=AE$，$BE=AE-AB=AC-AB=AC+AB-2AB=AC+AB-2AD$，即$BE+2AD=AC+AB$，

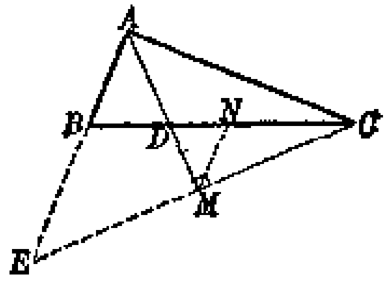


图　17

要证$AM=\frac{1}{2}(AB+AC)$，只要证$AM=\frac{1}{2}BE+AD$．由于$AM=AD+DM$，所以只要证明$DM=\frac{1}{2}BE$就可以了．而M是CE的中点，过M作中位线MN后，问题就转化为证明$DM=NM$了．要证明$DM=NM$，这可以从$\angle DNM=\angle ABC=\angle ADB=\angle MDN$得到解决．

证法四

分析与思考　顺着证法三的思路，设法直接作出$\frac{1}{2}(AB+AC)$的线段．已知AM为$\angle A$的平分线，沿AM将$\triangle ACM$翻折，使$\triangle ACM$落在$\triangle AEM$的位置上，取BE的中点N，则AN就是所要作的线段$\frac{1}{2}(AB+AC)$了（图18）．已知$CM\perp AM$，M便是EC的中点，$NM\parallel BC$，因此不难证得$AM=AN$，$AM=\frac{1}{2}(AB+AC)$．

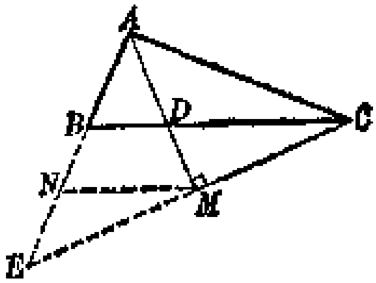


图　18

证明　从略．

证法五

分析与思考 要证明 $AM=\frac{1}{2}(AB+AC)$，即 $2AM=AB+AC$. 也可以先作出 $AB+AC$，即延长 BA 到 E，使 $AE=AC$，则 $BE=AB+AC$，再设法证明 $BE=2AM$.（以下分析过程，请读者参见图19，自己完成）

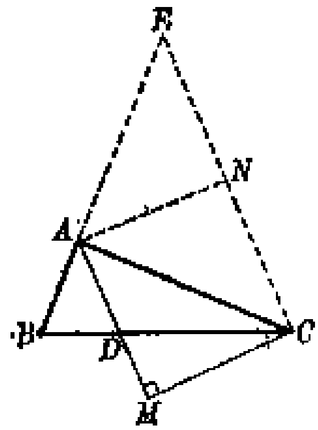


图 19

证明 从略.

例9和例10这两题的已知条件中都含有角平分线，且同时都有与角平分线垂直的线段(例9中的 $BE\perp AT$，例10中的 $CM\perp AD$). 我们通常可以利用角平分线具有对称轴的性质及等腰三角形的三线合一性质，添有关辅助线，使与某些线段构成一个等腰三角形. 借助等腰三角形的性质，便把角的相等关系转换到线段相等的关系上来. 这样便把条件(角平分线及线段垂直关系)与结论(线段相等关系)联系起来，易于证得所要证的结论. 如例9和例10的证法二、证法三、证法四采用的是同样的方法，即延长与角平分线垂直的这条直线，使构成一个等腰三角形，于是它的垂足就是底边的中点. 然后利用中位线定理证题.

在三角形中含有角平分线条件的证题，通常也可以过其它顶点(或角平分线与对边的交点)作角平分线的平行线或其它边的平行线. 因为添了这样的辅助线也可与某些线段构成一个等腰三角形，利用等腰三角形的性质可以把条件与结论很好地联系起来. 如例10的证法一的辅助线的作法也可改为"作 $CN\parallel AB$ 交 AM 的延长线于 N"，然后证明 $AN=2AM$；证法五的辅助线作法也可改为"作 $CE\parallel AM$ 交 BA 的延长线于 E"，然后证明 $AE=AC$.

练　习

1. 在$\triangle ABC$中，$AB>AC$，AT是角平分线，AD是高。求证：$\angle DAT=\frac{1}{2}(\angle C-\angle B)$。

2. 在$\triangle ABC$中，$AC=3AB$，AM是角平分线，CD垂直AM于D。求证：$AM=DM$。

3. 在$\triangle ABC$中，BD平分$\angle B$，CE平分$\angle C$，$AD\perp BD$，$AE\perp CE$。求证：$DE\parallel BC$。

4. 在$\triangle ABC$中，AT是$\angle A$的外角平分线，$BE\perp AT$于E，$CF\perp AT$于F，M为BC的中点，求证：$ME=MF=\frac{1}{2}(AB+AC)$。

关于梯形、正方形和正三角形问题

[例 11]　求证对角线相等的梯形是等腰梯形。

已知：梯形$ABCD$，$AD\parallel BC$，$AC=BD$。

求证：$AB=DC$。

分析与思考　如图 20，要证明$AB=CD$，只要证$\triangle ABC\cong\triangle DBC$，因为已有$AC=BD$，及$BC=BC$，两个条件，只要再证夹角$\angle 1$与$\angle 2$相等。但在现在这个位置，$\angle 1=\angle 2$是无法求得的。因此必须把$AC$(或$BD$)移动到一个新的位置，再建立$AC$、$BD$、$\angle 1$、$\angle 2$之间的关系。这里有两种方法可以考虑：

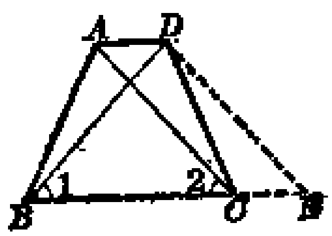


图　20

(1)　如图 20，如果把AC平移到DE的位置，便可得到

平行四边形 $ACED$ 和等腰 $\triangle DBE$，从而可证得 $\angle 2=\angle E=\angle 1$.

(2) 如图 21，如果从 A、D 分别作 BC 的垂线 AE、DF，则 $AE \mathrel{\underline{\parallel}} DF$，于是 $Rt\triangle ACE \cong Rt\triangle DBF$，从而也可以证得 $\angle 1=\angle 2$.

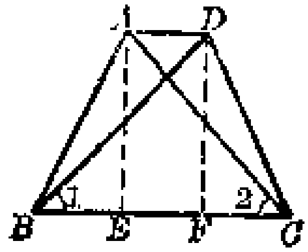


图 21

证明　从略.

[例 12]　如图 22，在正方形 $ABCD$ 中，E、F、G、H 分别为各边上的点，且 $EG \perp HF$.

求证：$EG=HF$.

证法一

分析与思考　要证明 $EG=HF$，便要充分利用正方形各边相等，各角是直角的性质，构造出两个分别以 EG、HF 为对应边的全等三角形来证明. 如图 22，将 AB，BC 平移到 HN、EM 的位置，这样便可构成 $\triangle EMG$ 和 $\triangle HNF$，容易证得这两个三角形全等.

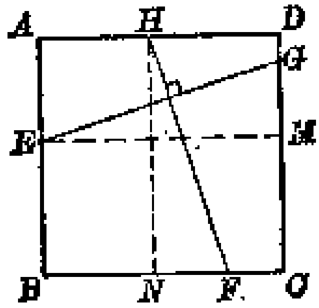


图 22

证明　从略.

证法二

分析与思考　要证明 $EG=HF$，也可以将 EG、HF 平移到 BP、AQ 的位置，造成两个全等三角形 $\triangle PBC$ 和 $\triangle QAB$.（图 23）

证明　从略.

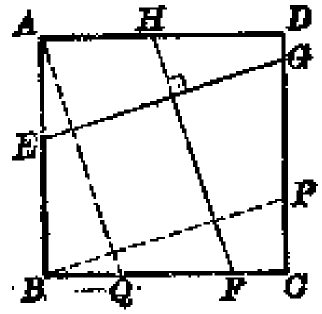


图 23

上面两种证法都是根据正方形的性质，将有关线段进行平移后，使条件与结论的关系集中到两个全等三角形中，从而证

得结论成立.

[例13] 如图24, P 是正方形 $ABCD$ 的对角线 BD 上的一点, PE 垂直 CD 于 E, PF 垂直 BC 于 F.

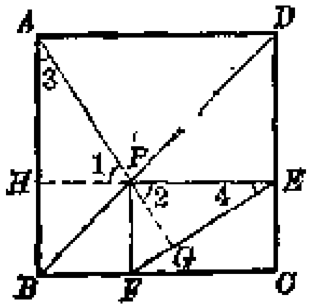


图 24

求证: (1) $AP=EF$.

(2) $AP\perp EF$.

证法一

分析与思考 要证明 $AP=EF$, 可设法使 AP 和 EF 分别成为两全等三角形中的两对应线段. 图形上明显地有一个以 EF 为斜边的 $\text{Rt}\triangle PEF$, 因此需要在适当位置作一个以 AP 为斜边的直角三角形. 延长 EP 与 AB 相交于 H, 得 $\text{Rt}\triangle PAH$, 只要证明 $\triangle PAH\cong\triangle FEP$, 就能证得 $AP=EF$. 要证明 $AP\perp EF$, 必须先延长 AP 与 EF 相交于 G, 只需证明 $\angle 2+\angle 4=90^\circ$ 就可以了.

证明 从略.

证法二

分析与思考 要证明 $AP=EF$, 因为 A、C 关于对角线 BD 成轴对称, 连结 PC, 因此 $AP=CP$ (图25). 要证 $AP=EF$, 只要证明 $CP=EF$, 由于 CP 和 EF 是矩形 $PFCE$ 的对角线, 显然相等. 要证 $AP\perp EF$, 必须先延长 AP 与 EF、BC 交于 G、H, 要证 $GH\perp EF$, 只要证 $\angle 3+\angle 5=90^\circ$, 而 $\angle 5=\angle 2=\angle 1$, 所以只要证 $\angle 3+\angle 1=90^\circ$, 而 $\triangle ABH$ 是直角三角形, 便可证得结论成立.

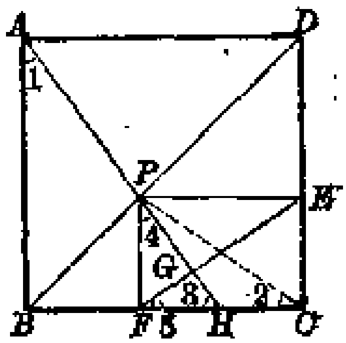


图 25

证明 从略.

上述两种证法，都是根据正方形各角是直角，关于对角线成轴对称图形等特有的性质来添辅助线的，使构成两直角三角形来证明有关的线段相等或角相等.

[例 14] 如图 26，P 是等边三角形 ABC 外接圆 $\overset{\frown}{BC}$ 上的一点.

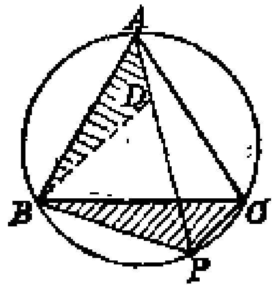


图 26

求证：$PA=PB+PC$.

证法一

分析与思考　如图 26，要证 $PA=PB+PC$，可在 PA 上取一段 PD，使 $PD=PB$，然后证明 $DA=PC$. 要证明 $DA=PC$，可以连结 BD，从证明 $\triangle ABD\cong\triangle CBP$ 着手. 而 $\triangle ABD$ 可由 $\triangle BPC$ 以 B 点为中心，按逆时针方向旋转 60° 后得到，于是就不难证得结论成立了.

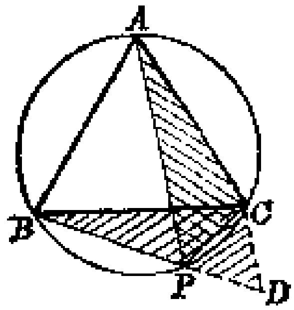


图 27

证明　从略.

证法二

分析与思考　如图 27，要证 $PA=PB+PC$，如果延长 BP 至 D，使 $PD=PC$，那末只要证明 $BD=AP$ 就可以了. 要证明 $BD=AP$，可以连结 CD，从证明 $\triangle CBD\cong\triangle CAP$ 着手. 而 $\triangle CBD$ 可由 $\triangle CAP$ 以 C 点为中心，按逆时针方向旋转 60° 后得到.

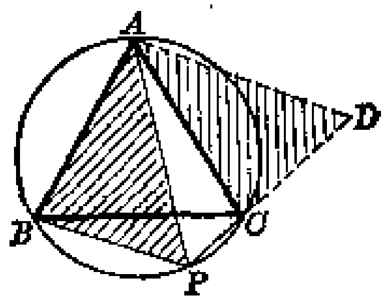


图 28

证明　从略.

证法三

分析与思考　如图 28，要证 $PA=PB+PC$，如果延长 PC 至 D，使 $CD=BP$，那末只要证明 $PD=PA$ 就可以了. 要证明 $PD=PA$，连结 AD，可从证明

$\triangle APD$ 为正三角形着手. 要证明 $\triangle APD$ 是正三角形, 可以从证明 $\triangle APD$ 为等腰三角形, 其中有一个内角为 60° 而证得. $\triangle ACD$ 可由 $\triangle ABP$ 以 A 点为中心, 按逆时针方向旋转 60° 后得到.

以上三种证法, 都是利用正三角形各边相等与各角都相等这一性质, 将图形中一小三角形绕着正三角形某一顶点旋转 60° 后, 添置辅助线构成一对全等三角形, 从而把分散的线段集中在一起, 证得命题成立. 由于选择不同的小三角形, 绕着不同的顶点旋转, 因此产生了多种证法, 但本题证法的基本思路是相一致的.

[例 15] 如图 29, E 是正方形 $ABCD$ 中 BC 边上的一点, F 是 $\angle DAE$ 的平分线与 CD 的交点.

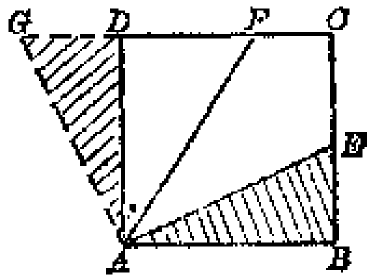


图 29

求证: $AE=FD+BE$.

证法一

分析与思考 要证 $AE=FD+BE$, 不妨在 FD 延长线上取 $DG=BE$, 然后设法证明 $GF=AE$. 连结 AG, $\triangle ADG$ 可由 $\triangle ABE$ 以 A 点为中心, 按逆时针方向旋转 90° 而得. 这里 $AG=AE$, 要证明 $GF=AE$, 就转为证明 $AG=GF$. 要证明 $AG=GF$, 只要证明 $\angle GAF=\angle GFA$, 由于 AF 是 $\angle DAE$ 的平分线, 容易证得结论成立.

证明 从略.

例 11 到例 15 的证题思路, 都是根据正方形、正三角形与平行四边形的特有性质, 将部分图形进行适当的变换后, 通过全等三角形的对应元素相等, 使题目的条件与证题的结论联

系起来，从而证得结论成立．例 11、12，都是将某一线段平行移到另一个适当位置，用平移变换①的方法来添置辅助线的；例 13 连同前面的例 7 到例 10 是根据轴对称图形的性质，将某一图形变到与某一直线成轴对称的图形，用对称变换的方法来添置辅助线的；例 14、15 都是将某一图形以某一点为中心，旋转一个适当的角度，用旋转变换的方法来添置辅助线的．

上述三种几何变换添辅助线的方法在几何证题中是经常用到的．

练　　习

1．在梯形 $ABCD$ 中，$AB /\!/ CD$，$AB>CD$，$AD>BC$．求证：$\angle A<\angle B$．

2．在梯形 $ABCD$ 中，$AB /\!/ CD$，$AC\perp BD$，求证：$AC^2+BD^2=(AB+CD)^2$．

3．C 在线段 AB 上，以 AC、BC 为边向同侧作正 $\triangle ACD$ 和正 $\triangle BCE$，AE、CD 交于 P，BD、CE 交于 Q，求证：$CP=CQ$．

4．已知 $\triangle ABC$，以 AB、BC 为边向形外作正方形 $ABFG$ 和正方形 $BCDE$，AE 与 CF 交于 H．求证：BH 平分 $\angle EHF$．

三角形内的特殊点问题

[例 16]　如图 30，G、I 分别为任意 $\triangle ABC$ 的重心

---

① 关于平移变换、对称变换、旋转变换的详细内容请参阅本社于 1981 年出版的《几何变换》一书．

和内心，且$GI \parallel BC$. 求证：$AB+AC=2BC$.

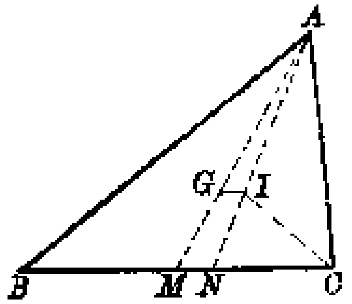


图 30

证法一

分析与思考 要证明$AB+AC=2BC$，就是要证明$BC=\frac{1}{2}AB+\frac{1}{2}AC$，也就是将$BC$分成$\frac{1}{2}AB$和$\frac{1}{2}AC$的两段. 那么如何作出这个分点呢？又$G$和$I$分别为三角形的重心和内心，根据重心的性质，作中线$AGM$，那么$M$是$BC$的中点，因$\triangle ABC$三边不等，$BM\neq\frac{1}{2}AB$、$CM\neq\frac{1}{2}AC$. 作角平分线$AI$，并延长交$BC$于$N$，根据角平分线性质定理，有$\frac{AB}{BN}=\frac{AC}{NC}$，如果这个比为2:1，那么点$N$就是所要作的分点了. 连结$CI$，$CI$也是角平分线，在$\triangle ACN$中，也有$\frac{AC}{NC}=\frac{AI}{IN}$，因此要证$\frac{AC}{NC}=\frac{2}{1}$，只要证$\frac{AI}{IN}=\frac{2}{1}$. 在$\triangle AMN$中，已知$GI \parallel MN$，又$G$为三角形的重心，$\frac{AG}{GM}=\frac{2}{1}$，所以不难证得$\frac{AI}{IN}=\frac{2}{1}$.

证明 从略.

[例 17] 如图 31，H、O分别为$\triangle ABC$的垂心和外心，M为BC的中点.

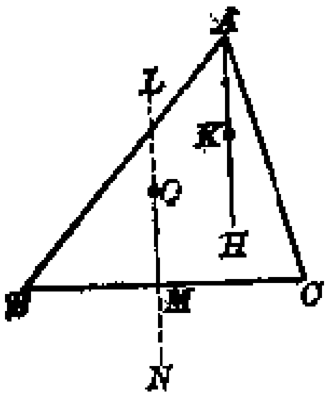


图 31

求证：$AH=2OM$.

证法一

分析与思考　要证 $AH=2OM$，可以作出长度等于 $2OM$ 的线段，再证明它与 AH 相等，或者作出长度等于 $\frac{1}{2}AH$ 的线段，再证明它与 OM 相等．要作出长度等于 $2OM$ 的线段，最简单的方法是把 OM 或 MO 延长一倍，如图 31 中的 ON 或 ML；要作出长度等于 $\frac{1}{2}AH$ 的线段，最简单的办法是取 AH 中点 K．然后设法证明 $ON=AH$，或 $ML=AH$，或 $OM=AK$，或 $OM=KH$．但从 N、L 或 K 点的位置来看，这些都是难于证明的．

那末要作等于 $2OM$ 的线段，便得从另外角度去考虑了．鉴于 M 为 BC 的中点，根据三角形中位线定理，如果能作出一个以 OM 为中位线的三角形来，则它的底边长就等于 $2OM$ 了(图 32)．这样，连结 BO，并延长使 $OD=BO$，连结 DC，那么 $\triangle BDC$ 便是需要的三角形．现在只要证明 $DC=AH$ 就可以了．

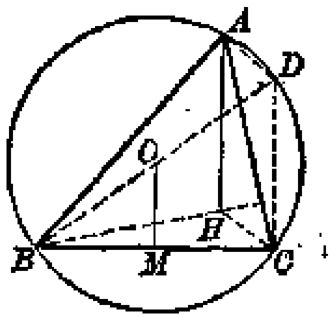


图　32

根据外心和垂心的性质，$OM\perp BC$，$AH\perp BC$，所以 $AH\parallel DC$．要证明 $DC=AH$，只要证明四边形 $AHCD$ 为平行四边形，即证明 $CH\parallel DA$ 就可以了．根据垂心性质 $CH\perp AB$，因此，只要证明 $DA\perp AB$，即证 $\angle BAD$ 为直角．又根据外心性质及 $BO=OD$，BD为外接圆的直径，于是就可证得 $\angle BAD$ 为直角了．

证明　从略．

证法二

分析与思考　同证法一那样，可从中位线定理着手作一

个三角形，使它的底边为 AH，于是它的中位线是 $\frac{1}{2}AH$. 如图 33，连结 CH，取 AC、CH 的中点 P、Q，连结 PQ，那么 $PQ=\frac{1}{2}AH$. 现在只要证明 $OM=PQ$ 问题就解决了. 这里，$PQ \parallel AH \parallel OM$，因此只要证明四边形 $POMQ$ 是平行四边形就可以了. 因为 $MQ \parallel BH$，$BH \perp AC$ 及 $OP \perp AC$，于是就不难证得 $OP \parallel MQ$.

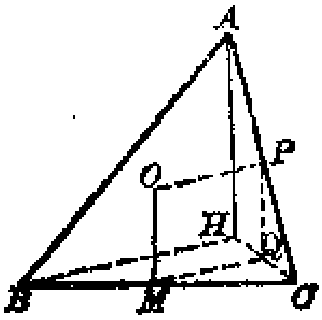


图 33

证明　从略。

证法三

分析与思考　要证 $AH=2OM$，即证 $\frac{AH}{OM}=\frac{2}{1}$，这样就转化为证明比例线段的问题了. 因此，如果能作出以 AH 及 OM 为对应边的两个相似三角形，然后证明它们的相似比为2:1就可以了. 如图 34 连结 CH，便得到 $\triangle ACH$，根据三角形的垂心及外心的性质，可知 $AH \parallel OM$. 为了作出与 $\triangle ACH$ 相似的三角形，可取 AB 的中点 N，连结 ON、NM 得 $\triangle OMN$，根据三角形中位线定理及垂心和外心的性质，便可证明 $\triangle OMN \backsim \triangle HCA$. 并且相似比 $\frac{AC}{MN}=\frac{2}{1}$ 也随之而得到了.

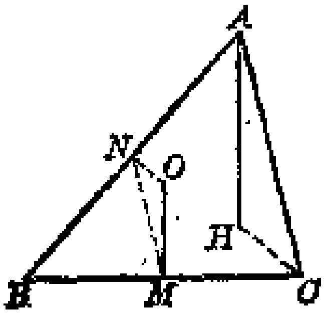


图 34

证明　从略。

内心、外心、重心、垂心是三角形内的特殊点，它们各有自己固有的性质. 如果题目的题设或结论中出现这些特殊点时，在证题中便要添置能显示它们特性的辅助线. 如内心要作

有关的角平分线，并与其为三角形的内切圆圆心联系起来；外心要作有关边的垂直平分线，并与其为三角形的外接圆圆心联系起来；重心要作中线，并与其将中线分成2:1的性质联系起来；垂心则要作高线，并与其出现的有关角相等或互余的性质联系起来。

练　习

1．在$\triangle ABC$中，G为重心，$\angle A$为直角，求证：$GB^2+GC^2=5GA^2$.

2．求证三角形的垂心、重心、外心共线.

3．在$\triangle ABC$中，AD是角平分线，O是内心，求证：$\dfrac{OA}{OD}=\dfrac{AB+AC}{BC}$.

含有二倍角的问题

[例18]　在$\triangle ABC$中，$\angle B=2\angle A$，$AB=2BC$. 求证：$AB^2=AC^2+BC^2$.

证法一

分析与思考　要证$AB^2=AC^2+BC^2$，只要证明$\angle C$为直角．设法证明$\angle C$与某一个直角相等，而要证明两个角相等，通常是利用全等三角形，为此，考虑如何用已知条件来构成一个直角三角形，使它与含有$\angle C$的三角形全等．由于$\angle B=2\angle A$，作$\angle B$的平分线BD，便得一个等腰$\triangle ABD$(图35)，再作$DE\perp AB$，易得$\triangle BDE\cong\triangle BDC$，于是就能证得$\angle C$为直角了。

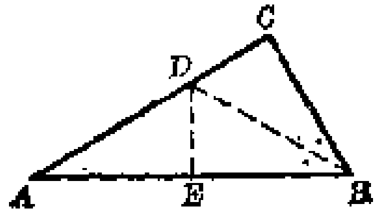


图　35

证明　从略。

证法二

分析与思考　要证明 $\angle C=90°$ 也可以从三角形内角和去考虑，设法证明 $\angle C=\angle A+\angle B$，通常把 $\angle C$ 分成两个角，先使其一等于 $\angle A$，再证另一等于 $\angle B$. 为此，如图36，在 $\angle C$ 内部作 $\angle ACD=\angle A$(因为 $AB>BC$,所以 $\angle C>\angle A$).这样，$\triangle ADC$ 成为一个等腰三角形，且 $\angle CDB=\angle ACD+\angle A=2\angle A=\angle B$，因而 $\triangle BCD$ 也是等腰三角形，于是可证得 $AD=\frac{1}{2}AB$，$BD=BC$，$\angle BCD=\angle B$ 了。

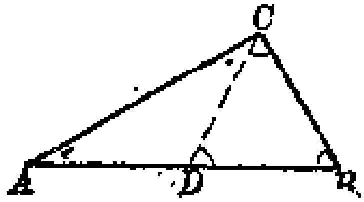


图　36

证明　从略。

证法三

分析与思考　要证明 $\triangle ABC$是直角三角形，也可以着眼于证明 AB 上的中线等于 $\frac{1}{2}AB$，为此可作 AB 上的中线 CE(图37)，证明 $CE=BC$ 就可以了。而要证 $CE=BC$，就要证 $\angle 1=\angle 2$，而要证 $\angle 1=\angle 2$，在 $\triangle BCE$ 中是无法解决的，还必须利用 $\angle B=2\angle A$ 的条件，构造一个含有 $\angle 1$ 的三角形，使它与 $\triangle ABC$ 全等。为此，延长 AB 到 D，使 $BD=BE$，连结 CD，得 $\triangle DEC$，从证明 $\triangle DEC\cong\triangle ABC$ 着手，这里 $\triangle BCD$ 为等腰三角形，$\angle 2=2\angle D$，所以 $\angle A=\angle D$，$AC=CD$，$DE=AB$，所以不难证得 $\triangle DEC\cong\triangle ABC$，$\angle 1=\angle 2$ 了。

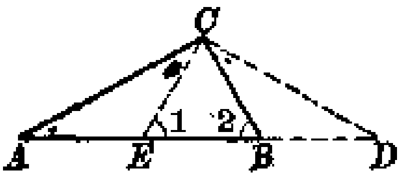


图　37

证明　从略。

证法四

分析与思考　要证明 $AB^2=AC^2+BC^2$，也就是要证明图 38 中的 $c^2=a^2+b^2$，这个关系式可由含有 a、b、c 的等式中得到．从证法三的证题思路可知等腰 $\triangle BCD$ ∽等腰 $\triangle ADC$，列出比例式 $\frac{AD}{CD}=\frac{AC}{BC}$，即 $\frac{c+a}{b}=\frac{b}{a}$，$\frac{3a}{b}=\frac{b}{a}$，从而可推出 $a^2+b^2=c^2$．

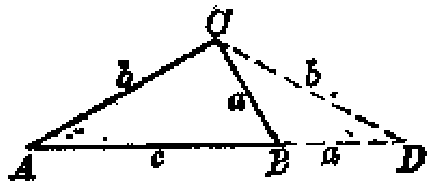


图　38

证明　从略。

证法五

分析与思考　要证明 $a^2+b^2=c^2$，这个关系式也可利用角平分线的性质得到．如图 39，作 CD 平分 $\angle C$，因此有 $\frac{AC}{BC}=\frac{AD}{BD}$．这里还必须求出分别用 a、b、c 来表示 AD、BD 的式子．以 CD 为轴，将 $\triangle CDB$ 翻折，得 $\triangle CDE$，那么 $\triangle CDE\cong\triangle CDB$，这里 $\angle CED=\angle B=2\angle A$，又 $\angle CED=\angle A+\angle EDA$．从而可证得 $\angle EDA=\angle A$，$AE=ED=BD$，设 $AB=c=2a$，$AC=b$，$BC=a$，则 $BD=b-a$，而 $AD=AB-BD=2a-(b-a)=3a-b$，代入上面的比例式，再利用比例性质，就可得到要证的结论．

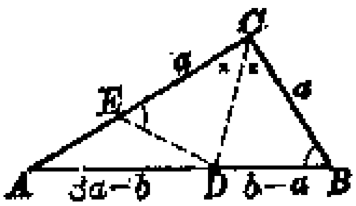


图　39

证明　从略。

这个例题要证的结论是一个三角形为直角三角形，这里虽然介绍了五种证法，但归纳起来可从三个途径去思考：(1) 证明三角形的一个角为 90° 或这个角与某一直角相等；(2) 证明三角形一边上的中线等于这边的一半；(3) 用勾股定

理的逆定理证明。

这个例题的已知条件中，含有两倍角关系，添辅助线的方法却有一个共同的特点，即都构造出一个含 $\angle B$ 的外角为顶角的等腰三角形。如证法一含 $\angle CDB(=\angle B)$ 的外角 $\angle ADB$ 为顶角的等腰三角形 ADB. 证法二含 $\angle CDB(=\angle B)$ 的外角 $\angle ADC$ 为顶角的等腰三角形 ADC; 证法三、四含 $\angle B$ 的外角 $\angle CBD$ 为顶角的等腰三角形 CBD; 证法五含 $\angle CED$ $(=\angle B)$ 的外角 $\angle AED$ 为顶角的等腰三角形 AED. 因此在三角形中含有一个角是另一个角的两倍角的条件，证题时通常可按上述方法来添置辅助线。

练　习

1. 在 $\triangle ABC$ 中，$\angle B=2\angle C$，AD 是角平分线，求证：$AC=AB+BD$.

2. 在 $\triangle ABC$ 中，$\angle B=2\angle C$，求证：$AC<2AB$.

3. 在 $\triangle ABC$ 中，$\angle B=2\angle C$，AD 是高，求证：$AB=CD-BD$.

4. 在 $\triangle ABC$ 中，$\angle B=2\angle C$，求证：$AC^2=AB^2+BC\cdot AB$.

关于直角三角形问题

[例 19]　如图 40，在 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 中，$\angle C=90°$，E 为 AC 的中点，$EH\perp AB$. 求证：$BH^2-AH^2=BC^2$.

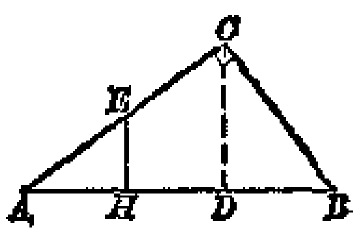


图　40

证法一

分析与思考　要证 BH^2-AH^2

$=BC^2$，就是要证$(BH+AH)(BH-AH)=BC^2$。也就是证$AB(BH-AH)=BC^2$。作$CD\perp AB$，由直角三角形的射影定理可知$BC^2=AB\cdot BD$，所以$BH-AH$必须等于BC在AB上的射影长BD。换句话，只要证明$BD=BH-AH$。在$\triangle ACD$中，根据中位线定理的逆定理可知$AH=HD$，所以可证得$BD=BH-HD=BH-AH$。

证明　从略。

证法二

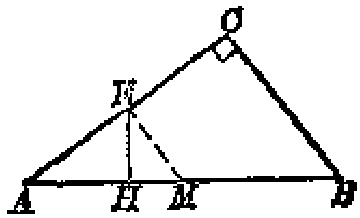


图　41

分析与思考　仿照证法一，也可以取AB的中点M(图41)，连结EM，同样得到一个$Rt\triangle AEM$及其斜边上的高EH，且EM是$\triangle ABC$的中位线。这时，要证$BH^2-AH^2=BC^2$，就是证$(AM+MH)^2-(AM-MH)^2=(2EM)^2$，也就是证$AM\cdot MH=EM^2$，在$Rt\triangle EAM$中这个结论显然是成立的。

证明　从略。

证法三

分析与思考　由于结论$BC^2=BH^2-AH^2$是勾股定理的形式，我们可以设法构造一个直角三角形，使BH及BC、AH成为斜边及直角边。如图42，连结BE，$\triangle BCE$和$\triangle BEH$都为直角三角形，从$BC^2=BE^2-CE^2=(BH^2+EH^2)-AE^2$推得结论成立。

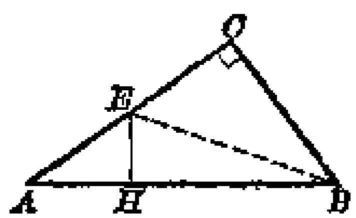


图　42

证明　从略。

[例20]　如图43，在$\triangle ABC$中，$\angle B=2\angle C$，AD是BC边上的高，M是BC边的中点。求证：$DM=\frac{1}{2}AB$。

证法一

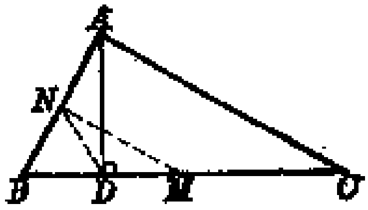


图 43

分析与思考　要证 $DM=\frac{1}{2}AB$, 从图43可以知道, $\frac{1}{2}AB$ 是 Rt$\triangle ABD$ 斜边的一半, 并且等于斜边上中线的长, 因此作中线 DN 后, 只要证明 $DM=DN$ 就可以了. 连结 MN, 得到 $\triangle DMN$, 因此只要证明 $\angle NMD=\angle MND$ 就可以了. 由于 MN 为 $\triangle ABC$ 的中位线, 所以 $MN \parallel AC$, $\angle NMD=\angle C$, 于是只要证 $\angle MND=\angle C$ 了. 而 $\angle MND=\angle BDN-\angle NMD=\angle BDN-\angle C$. 要证明 $\angle BDN=2\angle C$, 这是因为 ND 是 Rt$\triangle ABD$ 的中线, 所以显然有 $\angle BDN=\angle B=2\angle C$ 了.

证明　从略.

证法二

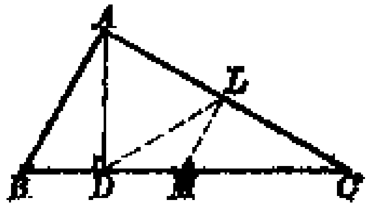


图 44

分析与思考　如图 44, 仿照证法一, 取 AC 中点 L, 作 $ML \parallel BA$, 连结 DL, 则 DL 就是 Rt$\triangle ACD$ 的中线了. 这就从直角三角形斜边上中线的性质容易证明 $\angle MLD=\angle CML-\angle MDL=\angle B-\angle C=\angle C=\angle MDL$.

证明　从略.

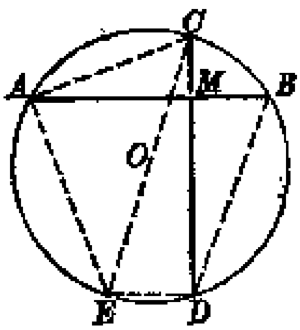


图 45

[例 21]　如图 45, $\odot O$ 内两弦 AB、CD 垂直相交于 M, d 为 $\odot O$ 的直径. 求证: $MA^2+MB^2+MC^2+MD^2=d^2$.

分析与思考　要证明 $MA^2+MB^2+MC^2+MD^2=d^2$, 已知条件是 $AB\perp CD$, 这就可从证明勾股定理着手. 从结论里的 MA^2+MC^2 启发我们, 连结 AC,

得直角$\triangle AMC$, $MA^2+MC^2=AC^2$. 又从AC^2和d^2启示我们,可以从以AC为直角边,d为斜边的直角三角来考虑. 因此作直径CE,连结AE,构成直角$\triangle ACE$,可知$AC^2+AE^2=d^2$. 然后,如能证明$AE^2=MB^2+MD^2$,问题就可解决了. 连结BD,只要证$BD=AE$,要证$BD=AE$,连结ED,只要证$ED\parallel AB$,因为$\angle CDE$为直角,就可证得$ED\parallel AB$.

证明　从略.

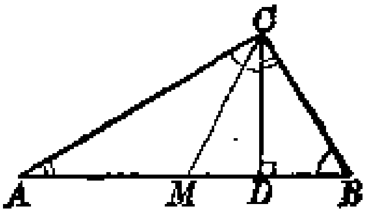


图　46

在题目里,含有直角三角形的已知条件,较常见的是添置两种辅助线,即斜边上的高和斜边上的中线. 因为在直角$\triangle ABC$中(图46),斜边上的高为CD. 三边不仅存在勾股定理的关系,还有其它的关系:

角的关系有

$$\angle A=\angle BCD,\ \angle B=\angle ACD;$$

线段的关系有

$$AC^2=AD\cdot AB,\ BC^2=BD\cdot AB,\ CD^2=AD\cdot BD,$$

$$CD\cdot AB=AC\cdot BC,\ \frac{AD}{DB}=\frac{AC^2}{BC^2}.$$

斜边上的中线为CM,有如下一些关系:

角的关系有

$$\angle A=\angle ACM,\ \angle B=\angle BCM;$$

线段关系有

$$CM=AM=BM=\frac{1}{2}AB.$$

应该注意,在图形中直角三角形往往不是明显出现的,而蕴含在其它的条件内. 为了证题需要,必须先添辅助线构成直角三角形. 特别是结论具有$c^2=a^2+b^2$的形式,更应着意

寻找直角三角形，使有关线段尽可能含于直角三角形中．如例19证法三，例20的两种证法以及例21的证法都是按这个思路去添置辅助线的．

练 习

1．在$\triangle ABC$中，$\angle C=90°$，$BC>AC$，CD为高，M为AB的中点，以AM为直径的圆，交CD于E，求证 $AE^2=\frac{1}{2}AC^2$．

2．在$\triangle ABC$中，高BD、CE，又BC、DE的中点分别是F、G，求证$DE\perp FG$．

3．在$\triangle ABC$中，$\angle A=90°$，以AB为直径的圆交BC于D，过D作切线DE交AC于E，求证$AE=EC$．

比例线段问题

[例22] 如图47，AE为$\triangle ABC$的外接圆直径，AD是BC边上的高．求证：$AB\cdot AC=AD\cdot AE$．

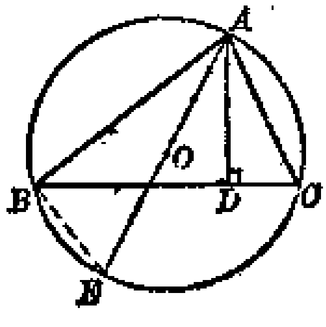


图 47

分析与思考 要证$AB\cdot AC=AD\cdot AE$，就是要证$\frac{AC}{AE}=\frac{AD}{AB}$．要证这个比例式成立，首先便得考虑$AC$，$AD$与$AE$，$AB$是否为两个相似三角形的对应边．因此便要找出以$AC$，$AD$两线段为边的三角形，及以$AE$、$AB$两线段为边的三角形，然后证明它们相似．要得到$\triangle ACD$及$\triangle ABE$，就要连结$BE$．得到这两三角形后，证明它们相似就不难了．

注：如图48，连结 CE，得 $\triangle AEC$，再证明 $\triangle AEC \backsim \triangle ABD$，也可证得结论成立。

证明　从略。

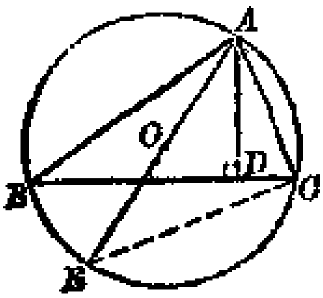


图　48

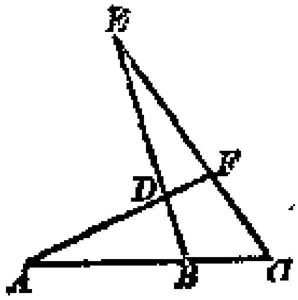


图　49

[例 23]　如图 49，B 是 $\triangle ACF$ 中 AC 边上的三等分点，过 B 引射线与 CF 延长线交于 E，与 AF 交于 D，使 $\frac{ED}{DB}=\frac{AB}{BC}=\frac{2}{1}$，求证：$\frac{AD}{DF}=\frac{7}{2}$。

证法一

分析与思考　本题是证明线段的比例式问题．求证比例式，一般可从三个方面去解决．(1) 通过证明两三角形相似，得对应线段成比例；(2) 利用平行线截割定理证得比例式；(3) 利用角平分线定理证得比例式．根据本题的已知条件 $\frac{ED}{DB}=\frac{AB}{BC}=\frac{2}{1}$，要证的结论 $\frac{AD}{DF}=?$ 从图形上考虑，既不存在相似三角形条件，也不存在角平分线条件，本题要想通过添辅助线来构成角平分线的条件是困难的，因此设法添置辅助线使构成相似三角形．这里，较好的方法是添平行线．但平行线要添在哪里呢？仔细分析题设和结论中的六条线段的比之后，便不难发现 D 和 B 都是这些线段的内分点（在 $\frac{AB}{BC}$ 中，B 是 AC 的内分点，在 $\frac{AD}{DF}$、$\frac{ED}{DB}$ 中，D 是 AF 和

EB 的内分点），因为这些分点跟条件和结论都有关系．因此，我们便考虑过 D 点或 B 点作平行线．过 D 点可作 AC 或 CE 的平行线，过 B 点可作 AF 或 CE 的平行线，作了平行线后，证明就不难了．

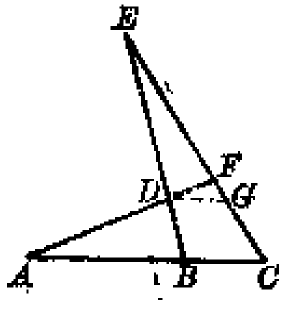


图 50

证明一　如图 50，过 D 作 $DG \parallel AC$，交 EC 于 G.

在 $\triangle FAC$ 中，

$$\frac{FA}{FD}=\frac{AC}{DG}=\frac{3BC}{DG} \tag{1}$$

在 $\triangle EBC$ 中，

$$\frac{BC}{DG}=\frac{EB}{ED}=\frac{3}{2} \tag{2}$$

把(2)代入(1)，得 $\frac{AF}{FD}=\frac{9}{2}$，

$$\therefore\quad \frac{AD}{DF}=\frac{7}{2}.$$

证明二　如图 51，过 D 作 $DG \parallel EC$，交 AC 于 G.

在 $\triangle BEC$ 中，

$$\frac{BG}{GC}=\frac{BD}{DE}=\frac{1}{2},$$

$$\therefore\quad \frac{BC}{GC}=\frac{3}{2},$$

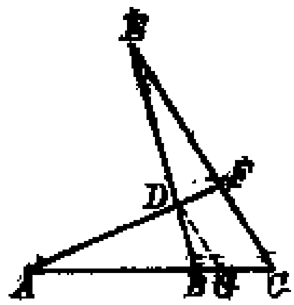


图 51

而 $BC=\frac{1}{3}AC$，$\therefore\quad \frac{AC}{GC}=\frac{9}{2}$，

在 $\triangle ACF$ 中，

$$\frac{AF}{DF}=\frac{AC}{GC},\quad \therefore\quad \frac{AF}{DF}=\frac{9}{2},$$

$$\therefore\quad \frac{AD}{DF}=\frac{7}{2}.$$

证明三　如图52，过 B 作 $BG \parallel AF$ 交 EC 于 G.

在 $\triangle CFA$ 中，

$$\frac{AF}{BG}=\frac{AC}{BC}=\frac{3}{1}, \qquad (1)$$

在 $\triangle EBG$ 中，

$$\frac{BG}{DF}=\frac{EB}{ED}=\frac{3}{2}. \qquad (2)$$

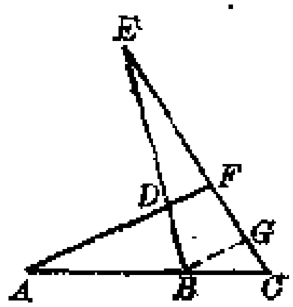


图　52

(1)式×(2)式，得

$$\frac{AF}{DF}=\frac{9}{2}, \quad \therefore \quad \frac{AD}{DF}=\frac{7}{2}.$$

证明四　如图53，过 B 作 $BG \parallel CE$ 交 AF 于 G.

$\because \triangle EFD \backsim \triangle BGD$,

$$\therefore \quad \frac{DF}{DG}=\frac{ED}{DB}=\frac{2}{1},$$

$$\therefore \quad DG=\frac{1}{2}DF.$$

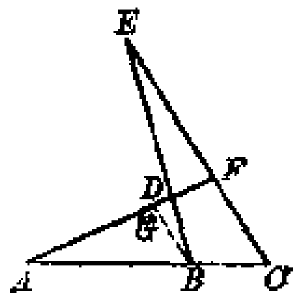


图　53

在 $\triangle ACF$ 中，

$$\frac{AG}{AF}=\frac{AB}{AC}=\frac{2}{3},$$

$$\therefore \quad \frac{AD-DG}{AD+DF}=\frac{2}{3}, \quad \frac{AD-\frac{1}{2}DF}{AD+DF}=\frac{2}{3},$$

化简，得 $$\frac{AD}{DF}=\frac{7}{2}.$$

证法二

分析与思考　上面的证法是从有关线段的内分点出发，作平行线的，如果把 A 看作线段 BC 和 DF 的外分点，把 E 看作线段 BD 的外分点．那么从外分点出发来作平行线，也可证得同样的结论．

证明一　如图54，过 A 作 $AG \parallel EB$ 交 CE 的延长线于 G.

在 $\triangle ACG$ 中，

$$\frac{BE}{AG}=\frac{BC}{AC}=\frac{1}{3} \qquad (1)$$

在 $\triangle AFG$ 中，

$$\frac{AG}{DE}=\frac{AF}{DF} \qquad (2)$$

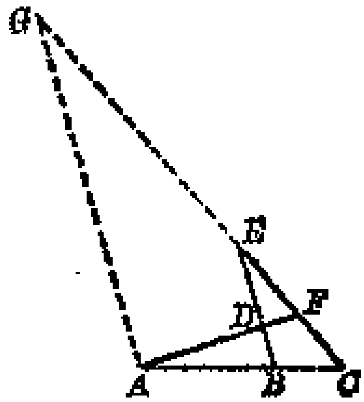


图　54

(1)式×(2)式，得

$$\frac{BE}{DE}=\frac{AF}{3DF},$$

$$\because \frac{BE}{DE}=\frac{3}{2}, \quad \therefore \frac{3}{2}=\frac{AF}{3DF}, \quad \frac{AF}{DF}=\frac{9}{2},$$

$$\therefore \frac{AD}{DF}=\frac{7}{2}.$$

证明二　如图55，过 A 作 $AG \parallel EC$，与 EB 的延长线交于 G.

$\because$ $\triangle ABG \backsim \triangle CBE$,

$$\therefore \frac{BG}{BE}=\frac{AB}{BC}=\frac{2}{1},$$

$\therefore$ $BG=2EB$.

$\because$ $\triangle FED \backsim \triangle AGD$,

$$\therefore \frac{DF}{AD}=\frac{ED}{DG}=\frac{ED}{DB+BG}$$

$$=\frac{ED}{DB+2EB}=\frac{2DB}{DB+6DB}=\frac{2}{7},$$

$$\therefore \frac{AD}{DF}=\frac{7}{2}.$$

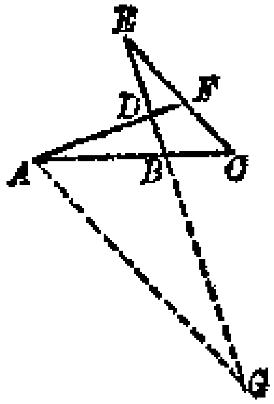


图　55

证明三　过 E 作 $EG \parallel FA$ 交 CA 的延长线于 G(图56)。

再利用三角形比例线段定理证明.

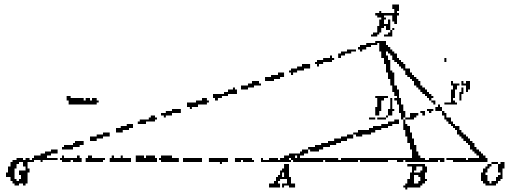


图 56

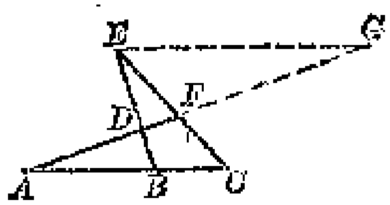


图 57

证明四 过 E 作 $EG \parallel AC$, 交 AF 的延长线于 G(图 57), 再利用相似三角形证明.

这两种证明请读者自已完成.

同样, 也可把 C、F 看作 AB、AD 的外分点, 从 F 或 C 作平行线, 又可得四种证法.

从以上各种证法可知, 类似这样的求证比例线段的题目, 从比例分点出发作平行线是较好的方法. 为使图形简单, 容易证明, 还必须选择适当的位置添平行线.

[例 24] 如图 58, $\triangle ABC$ 被一直线 XY 所截, 与 AB、BC、CA 分别相交于 X、Y、Z. 求证:

$$\frac{AX}{XB}\cdot\frac{BY}{YC}\cdot\frac{CZ}{ZA}=1.$$

(这个命题称为 Menelaus 定理)

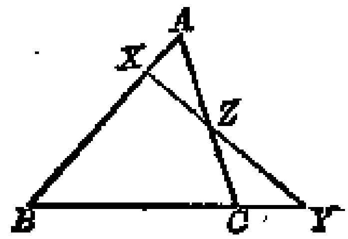


图 58

证法一

分析与思考 要证明 $\frac{AX}{XB}\cdot\frac{BY}{YC}\cdot\frac{CZ}{ZA}=1$, 先将它变形为 $\frac{BY}{YC}\cdot\frac{CZ}{ZA}=\frac{XB}{AX}$. 要证明 $\frac{BY}{YC}\cdot\frac{CZ}{ZA}=\frac{XB}{AX}$, 便要找到线段 a, 使满足 $\frac{BY}{YC}\cdot\frac{CZ}{ZA}=\frac{XB}{a}\cdot\frac{a}{AX}$, 这个式子由比例式 $\frac{BY}{YC}=\frac{XB}{a}$ 和 $\frac{CZ}{ZA}=\frac{a}{AX}$ 相乘而

得，考虑 $\frac{BY}{YC}=\frac{XB}{a}$，可在 $\triangle BYX$ 中，过 C 点作 $CD \parallel XY$；便有 $\frac{BY}{YC}=\frac{BX}{XD}$（图 59）。在 $\triangle ACD$ 中，有 $\frac{CZ}{ZA}=\frac{DX}{AX}$（这里的 DX 就是所要添的辅助线线段 a），这就不难证得所需的结论了。

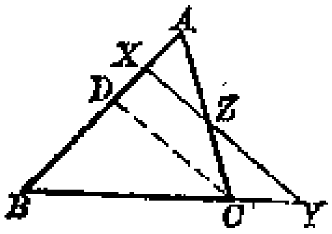


图 59

证明　从略。

证法二

分析与思考　如证法一分析的那样，要证明 $\frac{BY}{YC}=\frac{XB}{a}$、$\frac{CZ}{ZA}=\frac{a}{AX}$，也可从 C 点作 $CD \parallel AB$（图 60），同样可证得结论成立。

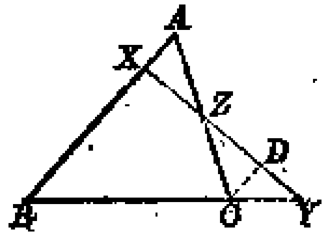


图 60

证明　请读者自己完成。

证法三

分析与思考　如果将 $\frac{AX}{XB}\cdot\frac{BY}{YC}\cdot\frac{CZ}{ZA}=1$ 变形为 $\frac{AX}{XB}\cdot\frac{CZ}{ZA}=\frac{YC}{BY}$，便要找到线段 b，使满足 $\frac{AX}{XB}\cdot\frac{CZ}{ZA}=\frac{b}{BY}\cdot\frac{YC}{b}$，这个式子由比例式 $\frac{AX}{XB}=\frac{b}{BY}$ 和 $\frac{CZ}{ZA}=\frac{YC}{b}$ 相乘而得，如图 61。可以过 A 点作 $AD \parallel XY$ 交 BC 的延长线于 D。在 $\triangle ABD$ 中，$\frac{AX}{XB}=\frac{YD}{BY}$，在 $\triangle ACD$ 中，$\frac{CZ}{ZA}=\frac{YC}{YD}$（这里的 YD 就是所要添的辅助线线段 b），这就不难证得所需的结论了。

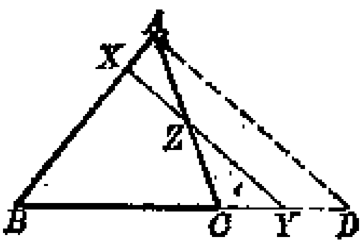


图 61

证明　从略。

过 B 点作 XY 或 AC 的平行线，同样可证得结论成立，这里就不用多说了。

证法四

分析与思考　要证得 $\frac{AX}{XB}\cdot\frac{BY}{YC}\cdot\frac{CZ}{ZA}=1$，如果把 $\frac{AX}{XB}$，$\frac{BY}{YC}$，$\frac{CZ}{ZA}$ 这三个比都能化成 $\frac{a}{b}$、$\frac{b}{c}$、$\frac{c}{a}$，那么它的乘积必然等于1。要得到 $\frac{a}{b}$、$\frac{b}{c}$、$\frac{c}{a}$，需要寻找一条与 $\frac{AX}{XB}$，$\frac{BY}{YC}$，$\frac{CZ}{ZA}$ 这三个线段比都有关系的截线。如图62，如果连结 BZ，过 A, C 分别作 BZ 的平行线，交 XY 及其延长线于 M、N，那么 MY 就成为所需的截线，于是便有 $\frac{AX}{XB}=\frac{AM}{BZ}$、$\frac{BY}{YC}=\frac{BZ}{CN}$、$\frac{CZ}{ZA}=\frac{CN}{AM}$，三式相乘就得到 $\frac{AX}{XB}\cdot\frac{BY}{YC}\cdot\frac{CZ}{ZA}=\frac{AM}{BZ}\cdot\frac{BZ}{CN}\cdot\frac{CN}{AM}=1$。同样地，连结 CX（或 AY），分别作 AM、BN 平行 CX，交 XY 及其延长线于 M、N，也可得到同样的结果。

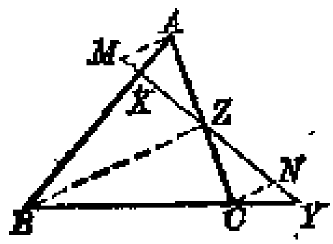


图 62

证明　从略。

[例 25]　如图63，自 $\odot O$ 内直径 AB 的两端向弦 CD 作垂线 AE, BF (E, F 为垂足)。求证：$OE=OF$。

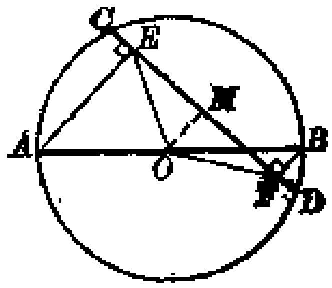


图 63

分析与思考　要证 $OE=OF$，显然可以从证明 $\triangle OEF$ 是等腰三角形着手，即证明 $\angle OEF=\angle OFE$，但这两个角的角顶都不在圆周上，所以不能直接证得．从图形可知，作 $OM\perp CD$，如果能证明 OM 是 EF 的垂

直平分线，那么就有 $OE=OF$. 所以还需证明 $EM=MF$. 这里 $AE\perp CD$, $BF\perp CD$, 因而 $AE\parallel OM\parallel BF$. 应用平行截割定理便可证得 $EM=MF$.

证明　从略.

在这里，顺便提一下对平行截割定理的应用. 本题的证明如果把图形画成图 64 那样，应用平行截割定理作 $OM\perp CD$ 这条辅助线，对初学者来说，困难是不大的. 而对图 63 那样的情形，就不容易看出这种关系. 平行截割定理中截线的位置有两种情形：一种是两条截线相交在这组平行线外；另一种是两条截线相交在这组平行线之间. 在应用时，特别需要注意的是后一种情形.

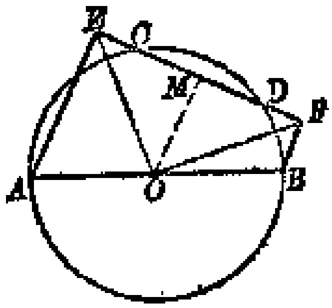


图　64

[例 26]　如图 65, AD 是 $\triangle ABC$ 的高，延长 AD 交外接圆于 H, 再以 AD 为直径作圆交 AB、AC 于 E、F, EF 交 AD 于 G. 求证：$AD^2=AG\cdot AH$.

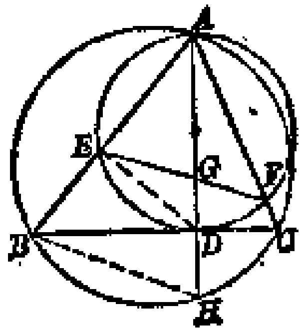


图　65

证法一

分析与思考　要证 $AD^2=AG\cdot AH$, 就是要证 $\dfrac{AD}{AG}=\dfrac{AH}{AD}$. 因为 AG、AH、AD 是同一条直线上的三条线段，因此找不到含有这三条线段所组成的两个相似三角形. 这时，必须设法寻找一个过渡比例式来建立这个式子和结论的联系. 由于 AD 是 $\odot AEF$ 的直径，连结 DE, $\triangle DAB$ 为直角三角形，于是有 $AD^2=AE\cdot AB$. 因此，要证 $AD^2=AG\cdot AH$, 只要证 $AE\cdot AB=AG\cdot$

AH，就是证 $\frac{AE}{AG}=\frac{AH}{AB}$，于是只要证明 $\triangle AEG\backsim\triangle AHB$ 就可以了．因为它们有一个公共角，只要证明 $\angle AEG=\angle H$．因为 $\angle H=\angle C$，只要证明 $\angle AEG=\angle C$．又 $\angle C$ 是 $\angle CAD$ 的余角，$\angle AEG$ 是 $\angle DEF$ 的余角，而 $\angle CAD=\angle DEF$，于是能证得结论成立．

证明　从略．

证法二

分析与思考　要证 $AE\cdot AB=AG\cdot AH$，只要证明 E、G、H、B 四点共圆就可以了．要证 E、G、H、B 四点共圆，可从证明 $\angle ABH=\angle AGE$ 着手．由于 $\angle ABH=\angle ABD+\angle DBH$，$\angle AGE=\angle ADE+\angle DEG$，因此只要证明 $\angle ABD=\angle ADE$，及 $\angle DBH=\angle DEG$，这些是不难证明的．

证明　从略．

从例 22 到例 26 证明的结论都与比例线段有关．证明比例线段的问题，首先都要把结论写成比例式．如求证 $ab=cd$，先要化成 $\frac{a}{c}=\frac{d}{b}$ 或 $\frac{a}{d}=\frac{c}{b}$；求证 $a^2=bc$，先要化成 $\frac{a}{b}=\frac{c}{a}$ 或 $\frac{a}{c}=\frac{b}{a}$．在平面几何中，证明比例线段的定理，首先可从相似三角形的性质定理考虑．寻找这个比例式的各个线段能否构成两个相似三角形的两组对应边．如果图形中存在这样的三角形，便可根据已知条件去证明它们相似．如果不存在现成的三角形，便要添辅助线，把线段的某些端点连结起来，构成三角形（如例 22），然后证明它们相似．如果构成比例式的各个线段不能成为相似三角形的对应边，一般都要选择分点，作其它线段的平行线，然后应用平行截割定理导出比例线段

关系(如例23的几种证法，及例24的证法一、证法二、证法三).

如果结论所要求证明的四条比例线段都在同一条直线上，不可能构成两个相似三角形，也不可能利用平行截割定理时，便要根据图形的特点，找到另外两条线段，使能作为“中介比”，然后应用有关定理进行证明(如例26的证法一、证法二).

此外，直角三角形中的比例中项定理、射影定理，与三角形内角(或外角)平分线定理，也可以用来证明比例线段.

练　习

1. 在$\triangle ABC$中，一直线交AB、AC及BC的延长线于D、E、F，且$AD=AE$. 求证：$\dfrac{CF}{BF}=\dfrac{CE}{BD}$.

2. 在$\triangle ABC$中，一直线交AB、AC及BC的延长线于D、E、F，且$\dfrac{AE}{CE}=\dfrac{BF}{CF}$，求证：$D$为$AB$的中点.

3. 在$\triangle ABC$中，AT是$\angle A$的外角平分线，求证：$\dfrac{BT}{CT}=\dfrac{AB}{AC}$.

4. AB为半圆的直径，$PQ\perp AB$于P，且交半圆于Q. R为半圆上任一点，AR、BR分别交直线PQ于X，Y，求证：$PQ^2=PX\cdot PY$.

四点共圆问题

[例27]　如图66，在$\triangle ABC$中，$AD\perp BC$于D，以AD为直径的圆交AB、AC于E、F. 求证：B、E、F、C四点共圆.

证法一

分析与思考　要证明B、E、F、C四点共圆，自然要想到必须证明四边形$BEFC$对角互补，或一外角等于内对角，为此，连结EF，设法证明$\angle 1=\angle B$. 图里，$\angle B$是$Rt\triangle ABD$的内角，$\angle 1$是圆周角，$\angle 1$与$\angle B$联系不起来，这里还需寻找一个与$\angle 1$、$\angle B$分别相等的“中介角”，从圆内考虑，$\angle 1$所对的弧是$\overset{\frown}{AE}$，如果连结DE，那么$\angle 2=\angle 1$. 又AD是直径，DE便成为$Rt\triangle ABD$斜边上的高，于是得出$\angle 1=\angle 2=\angle B$.

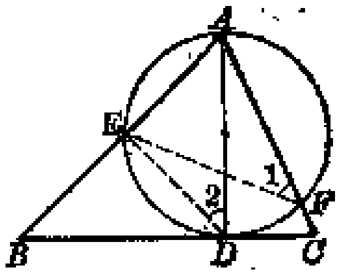


图　66

证明　从略.

证法二

分析与思考　如图67，要证明B、E、F、C四点共圆，也可以从证明$AE\cdot AB=AF\cdot AC$着手. 这里，AD是直径，如果连结DE、DF，它们分别成为直角$\triangle ABD$与直角$\triangle ACD$斜边上的高，从而应用射影定理就能证得$AE\cdot AB=AD^2=AF\cdot AC$.

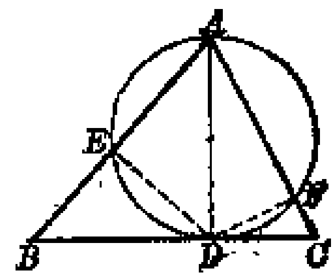


图　67

证明　从略.

[例28]　如图68，在$\triangle ABC$中，$\angle A$为直角，$AD\perp BC$于D，过CD的圆交AC于E，连结BE交圆于F，求证：$AF\perp BE$.

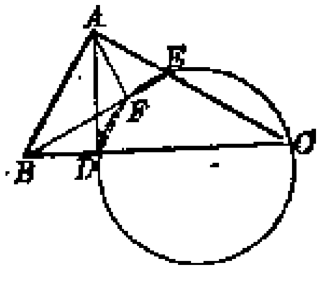


图　68

证法一

分析与思考　要证$AF\perp BE$，可证$\angle AFB=\angle ADB=90°$，而要证$\angle AFB=\angle ADB$，必须先证$A$、$B$、$D$、$F$四点共

圆．鉴于已知条件D、F、E、C四点共圆，以及AD为直角$\triangle ABC$斜边上的高，必须着意寻找相等的角．连结DF，不难证得$\angle BFD=\angle C=\angle BAD$，$B$、$D$、$F$、$A$四点共圆了．

证明 从略．

证法二

分析与思考 要证明$AF\perp BE$，在$Rt\triangle ABE$中，也可以从证明$AB^2=BF\cdot BE$着手．又AD是直角$\triangle ABC$斜边上的高，有$AB^2=BD\cdot BC$，于是只要证明$BF\cdot BE=BD\cdot BC$．而BFE及BDC是已知圆的割线，这就不难证得结论成立．

证明 从略．

例27、28中都含有四点共圆的条件，有的不显著，而是蕴含在题设之中．证题时，常常要添置辅助圆来证明角的相等或互补．判断四点共圆的方法，除按定义（即四点与某定点等距）外，一般有图69所示的三种情形．

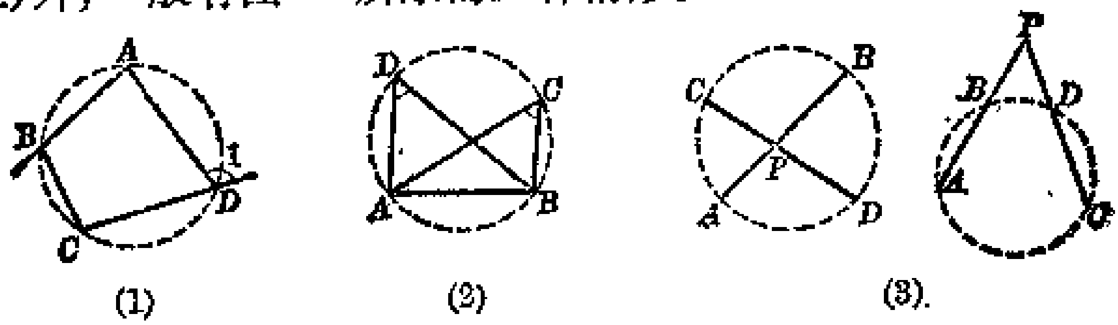


图 69

(1) $\left.\begin{array}{l}\angle A+\angle C=180^\circ\\ \text{或 }\angle 1=\angle B\end{array}\right\}\Rightarrow A、B、C、D$ 四点共圆；

(2) $\angle C=\angle D\Rightarrow A、B、C、D$ 四点共圆；

(3) $AP\cdot PB=CP\cdot PD\Rightarrow A、B、C、D$ 四点共圆．

练　习

1. 在圆O中，P为$\overset{\frown}{AB}$的中点，弦PC、PD交弦AB于

E、F，求证：$PE \cdot PC = PF \cdot PD$。

2．切线 $AB \perp AC$，B、C 为切点，CD 为弦，$BE \perp CD$ 于 E，求证：$BE = DE$。

3．在 $\triangle ABC$ 中，$AB = AC$，E 为 $\triangle ABC$ 外接圆 $\overset{\frown}{BC}$ 上的任一点，AE 交 BC 于 D，求证：$AB^2 = AD \cdot AE$。

4．四边形 $ABCD$，AC 垂直 BD 于 O，O 在各边的射影分别是 E、F、G、H，求证：E、F、G、H 四点共圆。

两圆的相切和相交问题

[例 29]　如图 70，两圆互相外切于 T，过 T 引任意两直线，分别交两圆于 A、B、C、D．求证：$AC \parallel BD$。

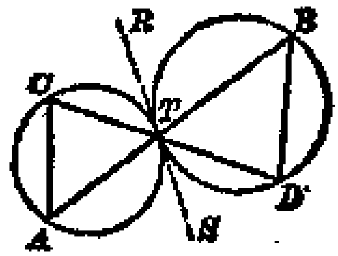


图　70

分析与思考　要证 $AC \parallel BD$，便要证 $\angle A = \angle B$（或 $\angle C = \angle D$），但 $\angle A$、$\angle B$ 分别处于两个圆内，没有直接的关系．因此，必须找到一个能够沟通这两个角的"中介角"．如果过切点 T，作公切线 RTS，那么弦切角 $\angle CTR$、$\angle DTS$ 就成为对顶角，再利用弦切角和同弧上的圆周角关系，就可证得结论成立。

证明　从略。

[例 30]　如图 71，两圆互相内切于 T，大圆内一弦 AB 与小圆相切于 C，连结 TA、TB 交小圆于 P、Q．求证：(1) $\angle ATC = \angle BTC$；(2) $TP/TQ = AC/BC$。

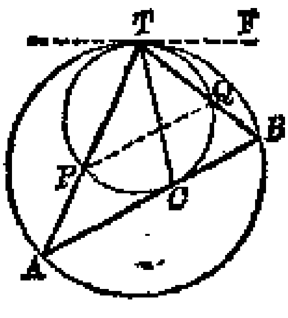


图　71

分析与思考　(1) 要证明 $\angle ATC = \angle BTC$，只需证明 $\angle TCB - \angle A = \angle ATC$，$\angle TCB - \angle A = \angle BTC$．但

是 $\angle TCB-\angle A$ 与 $\angle BTC$ 没有直接关系，必须寻找与这三个角有关系的"中介角"．已知 AB 过切点 C，T 是两圆相切的切点，过 T 点作切线 TF，弦切角就显示出来了，于是有 $\angle FTC=\angle TCB$，$\angle A=\angle FTB$，所以不难证得 $\angle ATC=\angle BTC$．

(2) 要证明 $\dfrac{AC}{BC}=\dfrac{TP}{TQ}$，就是要证明 $\dfrac{TA}{TB}=\dfrac{TP}{TQ}$，连结 PQ，也就是要证明 $PQ\parallel AB$．这可以从证明 $\angle TPQ=\angle TAB$ 着手．因为 $\angle TPQ$ 与 $\angle TAB$ 都与同一个弦切角相等，于是就不难证得结论成立．

证明　从略．

例 29 和例 30 的题设中都含有两圆相切的条件，要使分处在两个圆内的角建立等量关系，常需要作一条公切线．因为作了这条公切线，将会出现两圆的公共的弦切角，于是就沟通了两圆的圆周角．

[例 31]　如图 72，两圆相交于 A、B，P 是一个圆上一点，PQ 是这个圆的直径，连 PA、PB 交另一圆于 C、D．求证：$PQ\perp CD$．

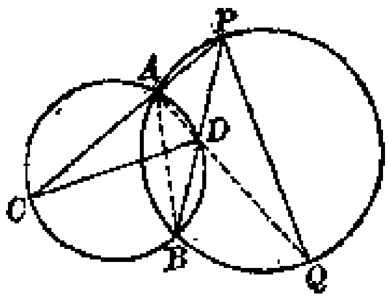


图　72

证法一

分析与思考　要证 $PQ\perp CD$，只要证 $\angle C+\angle CPQ=90°$，在 $\odot ABQP$ 内，PQ 为直径，连结 AQ，$\angle AQP+\angle CPQ=90°$．如果 $\angle PCD=\angle AQP$，那么问题就解决了．而 $\angle PCD$ 和 $\angle AQP$ 是分别处于两圆内的圆周角，没有直接关系，因此必须寻找一个"中介角"与这两个角建立联系．现在只有从两圆的公共的相交位置去考虑，连结 AB，$\angle ABP$ 既是

$\odot ACBD$ 的圆内角，又是 $\odot ABQP$ 的圆内角，并且 $\angle ACD=\angle ABP=\angle AQP$，于是就能证得结论成立.

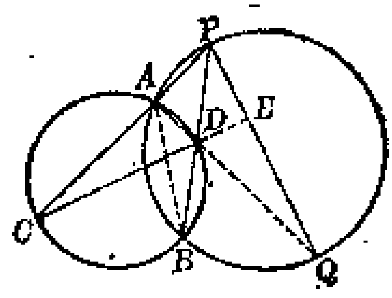


图 73

证法二

分析与思考　要证 $PQ\perp CD$，不妨如图 73，延长 CD 与 PQ 交于 E，证明 $\angle CEQ=90°$. 因为 PQ 为直径，连结 AQ，$\angle CAQ=90°$，所以要证明 $\angle CEQ=90°$，换句话，只要证 A、C、Q、E 四点共圆. 从图形分析，如能证明 $\angle ACD=\angle AQP$，那么 A、C、Q、E 四点共圆. 连结公共弦 AB，便可得到 $\angle ACD=\angle ABD=\angle AQP$，于是就能证得结论成立.

证明　从略.

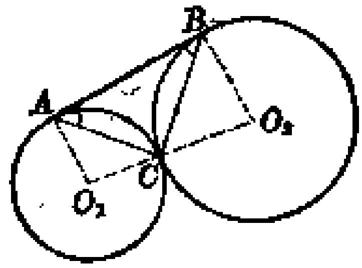


图 74

[例 32]　如图 74，圆 O_1 与圆 O_2 外切于 C 点，AB 为两圆的一条外公切线，A、B 为切点. 求证：$AC^2+BC^2=AB^2$.

证法一

分析与思考　要证 $AC^2+BC^2=AB^2$，就是要证 $\triangle ABC$ 为直角三角形，也就是要证 $\angle BAC+\angle ABC=90°$. 这里 $\angle BAC$ 和 $\angle ABC$ 分别是 $\odot O_1$、$\odot O_2$ 的弦切角，它们的度数等于 $\overset{\frown}{AC}$、$\overset{\frown}{BC}$ 所对圆心角度数的一半. 如果能证得两圆心角度数之和为 180°，那么 $\angle BAC+\angle ABC=90°$. 因此必须连结连心线 O_1O_2 及半径 O_1A、O_2B，从四边形 AO_1O_2B 中，显然可证得 $\angle AO_1C+\angle BO_2C=180°$，于是就能证得结论成立.

证明　从略.

证法二

分析与思考　如图 75，要证明 $\triangle ACB$ 为直角三角形，也可以从证明斜边中点 D 与三角形三个顶点距离相等着手．因为 DA、DB 是两圆切线，如果 DC 也是两圆的切线就可以了．因此只要过 C 作两圆的公切线与 AB 交于 D，就可以证得 $DA=DC=DB$ 了．

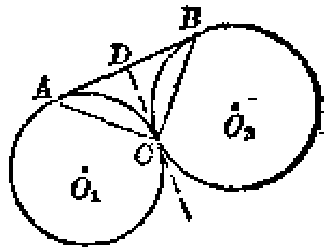


图　75

证明　从略．

[例 33]　如图 76，AB 为互相外切的两圆 $\odot O_1$、$\odot O_2$ 的一条外公切线，A、B 为切点．设两圆直径分别为 d_1、d_2．求证：$AB^2=d_1\cdot d_2$．

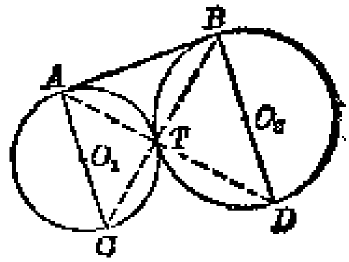


图　76

证法一

分析与思考　要证 $AB^2=d_1d_2$，就是要证 $\dfrac{AB}{d_1}=\dfrac{d_2}{AB}$．分别作 $\odot O_1$、$\odot O_2$ 的直径 AO_1C 和 BO_2D，就是要证 $\dfrac{AB}{AC}=\dfrac{BD}{AB}$．这可从证明含有这三线段的两个三角形相似着手．连结 AD、BC，便要证明 $\triangle ABC\backsim\triangle ABD$．设 T 为两圆的公切点，$\angle ATB=90^\circ$，因此 AD、BC 相交于 T．根据弦切角与圆周角的相等关系，不难证得 $\triangle ABC\backsim\triangle ABD$，于是就能证得 $AB^2=d_1d_2$．

证明　从略．

证法二

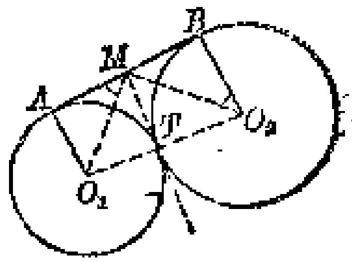


图　77

分析与思考　如图 77，要证明 $AB^2=d_1d_2$，就是要证明 $\left(\dfrac{AB}{2}\right)^2=\dfrac{d_1}{2}\cdot\dfrac{d_2}{2}$．如果过 T 作公切线交 AB 于 M，那么 M 即为 AB 的中点．所

以要证$\left(\frac{AB}{2}\right)^2=\frac{d_1}{2}\cdot\frac{d_2}{2}$，就是要证$MA^2=O_1A\cdot O_2B$，也就是要证$\frac{AM}{O_1A}=\frac{O_2B}{BM}$，这可从证明含有这三线段的两个三角形相似着手．连结O_1M、O_2M，$\angle O_1AM=\angle O_2BM=90°$，所以要证$\triangle O_1AM\backsim\triangle O_2BM$，只要证$\angle AMO_1=\angle BO_2M$．因为$\angle AMO_1=\frac{1}{2}\angle AMT$，$\angle BO_2M=\frac{1}{2}\angle BO_2T$，所以要证$\angle AMO_1=\angle BO_2M$，只要证$\angle AMT=\angle BO_2T$，由于四边形$BO_2TM$内接于圆，于是就不难证得结论成立．

证明　从略．

证法三

分析与思考　要证明$AB^2=d_1d_2$，由题设$\odot O_1$与$\odot O_2$互相外切于T，如果连结O_1O_2，$O_1O_2=O_1T+TO_2=\frac{1}{2}(d_1+d_2)$．因此要找$AB$与$d_1d_2$关系，可以找$AB$与$O_1O_2$的关系．如图78，把$AB$平移到$O_1H$位置，便构成$\mathrm{Rt}\triangle O_1O_2H$．由勾股定理得$O_1H^2=O_1O_2^2-O_2H^2$．要证$AB^2=d_1d_2$，就是要证$O_1H^2=2O_1T\cdot 2O_2T=4O_1T\cdot O_2T$．这由图中$O_1O_2^2-O_2H^2=(O_1T+O_2T)^2-(O_2B-BH)^2=(O_1T+O_2T)^2-(O_2T-O_1A)^2=(O_1T+O_2T)^2-(O_2T-O_1T)^2=4O_1T\cdot O_2T$证得．

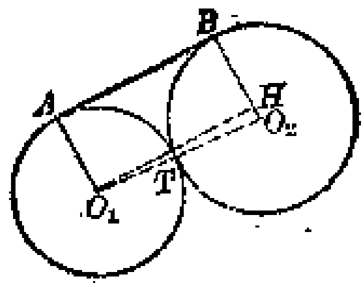


图 78

证明　从略．

例29到例33的题设中，分别含有两圆相切或相交的条件，在证题中要使分处于两圆内的几何图形联系起来，常常需要添置公切线或公共弦，有时也需要作一条连心线，利用连心线垂直公切线或公共弦的性质进行证明．

练　　习

1. 两圆相交于 A、B，AC、AD 分别是两圆的直径，求证：C、B、D 三点共线。

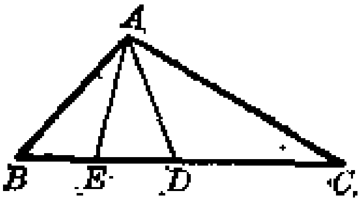
2. 两圆相交于 A、B，过 A、B 分别作两圆的弦 AD、BF，各交另一圆于 C、E，求证：$CF \parallel DE$。

3. 两圆外切于 P，一圆的弦 AB 的延长线切另一圆于 C，延长 AP 交另一圆于 D，求证：$\angle BPC = \angle CPD$。

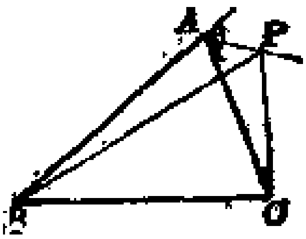
4. AB 为半圆 O 的直径，C 为半圆上的任一点，$CD \perp AB$ 于 D。$\odot P$ 外切 $\odot O$ 于 E，切直线 CD 于 F，并且 A、E 在 CD 的同侧，求证：A、E、F 三点共线。

练习题一

1. 已知 AD 是 $\triangle ABC$ 的中线，AE 是 $\triangle ABD$ 的中线，且 $BA = BD$，求证：$AC = 2AE$。



（第 1 题图）

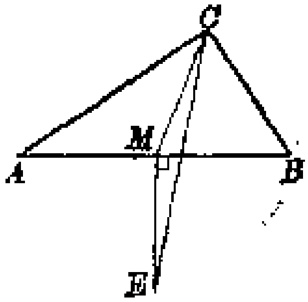


（第 3 题图）

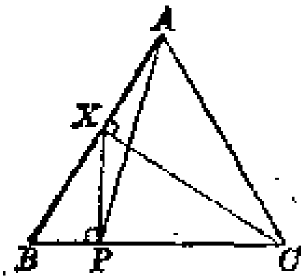
2. 求证三角形的周长大于三条中线的和。

3. 已知 P 为 $\triangle ABC$ 的 $\angle A$ 的外角平分线上任意一点，求证：$PB + PC > AB + AC$。

4. 已知 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 斜边 AB 上的垂直平分线 ME 和直角 C 的角平分线相交于 E。求证：$MC = ME$。



（第 4 题图）

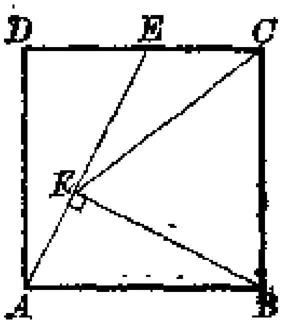


（第 5 题图）

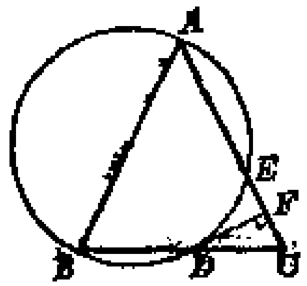
5．已知等腰三角形 ABC，$AB=AC$，CX 为 AB 上的高，作 $XP\perp BC$ 于 P．求证：$AB^2=PA^2+PX^2$

6．证明矩形对角线长，大于两对边间任何线段的长．

7．正方形 $ABCD$，E 为 CD 的中点，连续 AE，作 $BF\perp AE$ 于 F，连结 CF．求证：$CF=CB$．



（第 7 题图）

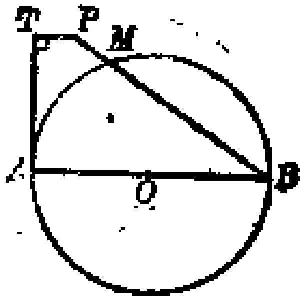


（第 8 题图）

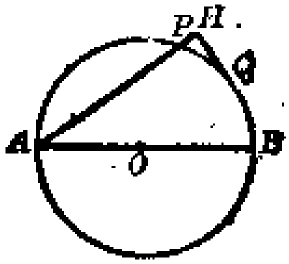
8．已知 $\triangle ABC$，$AB=AC$，以 AB 为直径作圆交 BC 于 D，交 AC 于 E，作 $DF\perp AC$ 于 F．求证：$DF^2=EF\cdot FA$．

9．求证三角形的垂心关于三边的对称点在三角形的外接圆的圆周上．

10．如图，AB 为 $\odot O$ 的直径，AT 为 $\odot O$ 的切线，P 为弦 BM 延长线上的一点．$PT\perp AT$．$PT=PM$．求证：$PB=AB$．



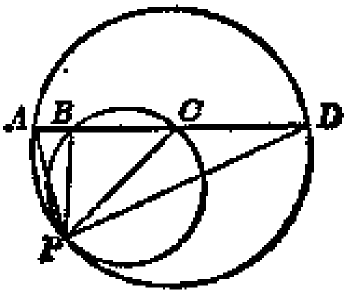
(第 10 题图)



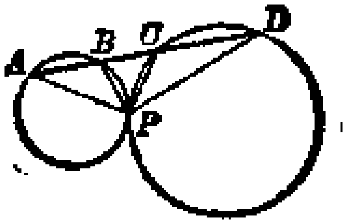
(第 11 题图)

11．AB 为 $\odot O$ 的直径，AP 为弦，Q 为 $\overset{\frown}{BP}$ 的中点，切线 QH 与 AP 延长线交于 H．求证：$QH \perp AP$．

12．如图，两圆互相内切于 P，一割线与两圆顺次相交于 A、B、C、D．求证：$\angle APB = \angle CPD$．



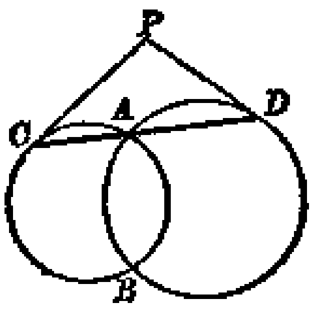
(第 12 题图)



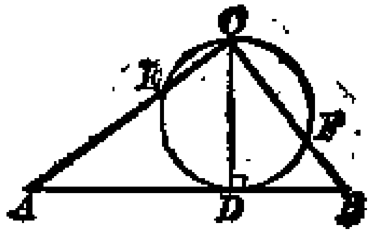
(第 13 题图)

13．如图，两圆外切于 P，一割线依次交两圆于 A、B、C、D．求证：$\angle APD + \angle BPC = 180°$．

14．两圆交于 A、B，过 A 的直线交两圆于 C、D，过 C、D 作两圆的切线相交于 P．求证：B、C、P、D 四点共圆．



(第 14 题图)

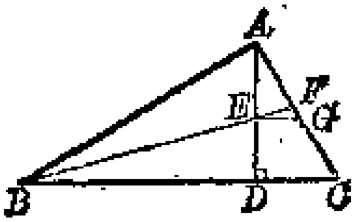


(第 15 题图)

15. 在$\triangle ABC$中，$\angle C=90°$，CD是高，以CD为直径的圆交AC、BC于E、F. 求证：$\frac{BF}{AE}=\frac{BC^3}{AC^3}$.

16. 如图，在$\triangle ABC$中，$\angle B=3\angle C$，AD是$\angle A$的平分线，$BD\perp AD$. 求证：$BD=\frac{1}{2}(AC-AB)$.

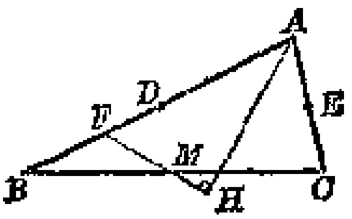
（第16题图）



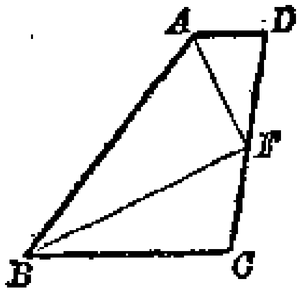
（第17题图）

17. 在Rt$\triangle ABC$中，$\angle A=90°$，AD为BC边上的高，BF为$\angle B$的平分线，AD、BF相交于E，$EG\parallel BC$，求证：$CG=AF$.

18. 如图，D、E为$\triangle ABC$的边AB、AC的中点，$AB>AC$，在DB间取$DF=AE$，从F作$\angle A$平分线的垂线，垂足为H，FH交BC于M. 求证：$BM=MC$.



（第18题图）

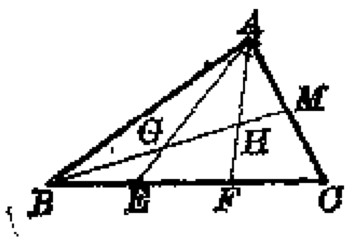


（第19题图）

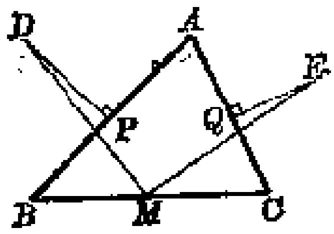
19. 在梯形$ABCD$中，$AD\parallel BC$，$AD+BC=AB$，F为CD的中点. 求证：$\angle A$、$\angle B$的平分线相交于F.

20. 在$\triangle ABC$中，$AC=BC$，$\angle B=2\angle C$. 求证：$AC^2=AB^2+AC\cdot AB$.

21. 如图，在$\triangle ABC$中，E、F为BC边上三等分点，M为AC的中点，AE、AF与BM分别相交于G、H；求证：$BG:GH:HM=5:3:2$.



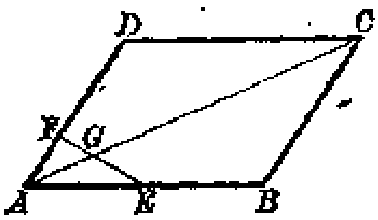
(第 21 题图)



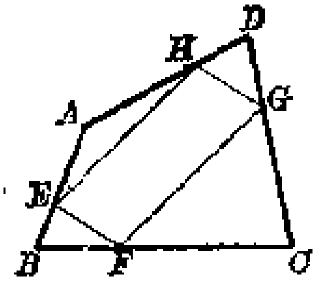
(第 22 题图)

22. 如图，P、Q、M为$\triangle ABC$三边的中点，$PD\perp AB$，$PD=\frac{1}{2}AB$；$EQ\perp AC$，$EQ=\frac{1}{2}AC$. 求证：(1) $DM=EM$；(2) $DM\perp EM$.

23. 如图，E为$\square ABCD$的边AB的中点. $AF=\frac{1}{3}DF$，EF交AC于G. 求证：$AC=5AG$.



(第 23 题图)

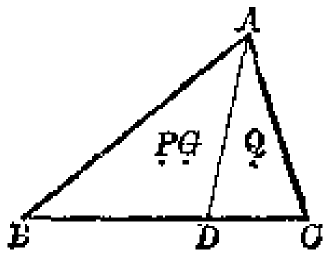


(第 24 题图)

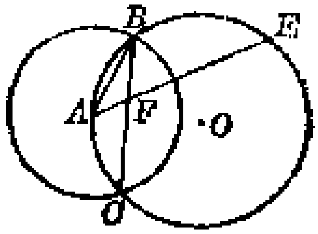
24. 如图，E、F、G、H为四边形$ABCD$各边上的点，且$\frac{AE}{EB}=\frac{AH}{HD}=\frac{CF}{FB}=\frac{CG}{GD}=2$. 求证：(1) 四边形$EFGH$为平行四边形；(2) $S_{\square EFGH}=\frac{4}{9}S_{四边形ABCD}$.

25. D为$\triangle ABC$底边BC上任意一点，连结AD，G、P、Q分别是$\triangle ABC$、$\triangle ABD$、$\triangle ACD$的重心. 求证：

(1) P、G、Q 三点共线；(2) $\frac{GP}{GQ}=\frac{CD}{BD}$。



（第 25 题图）

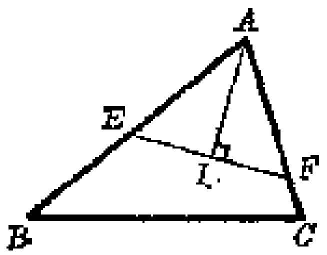


（第 26 题图）

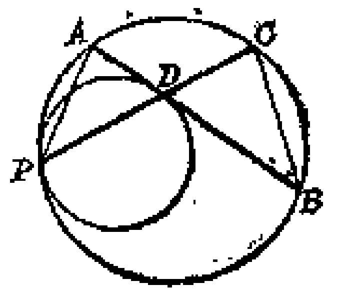
26. 如图 A 为 $\odot O$ 上一点，以 A 为中心作圆与 $\odot O$ 相交于 B、C，$\odot O$ 的弦 AE 交 BC 于 F. 求证：$AB^2=AE\cdot AF$.

27. 已知 AD、BE、CF 为 $\triangle ABC$ 的三条高，H 为垂心. 求证：$AD\cdot DH=DE\cdot DF$.

28. I 为 $\triangle ABC$ 的内心，过 I 作 $EF\perp AI$ 交 AB、AC 于 E、F. 求证：$IE^2=BE\cdot CF$.



（第 28 题图）

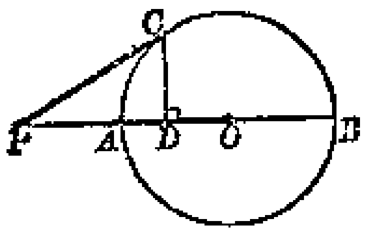


（第 29 题图）

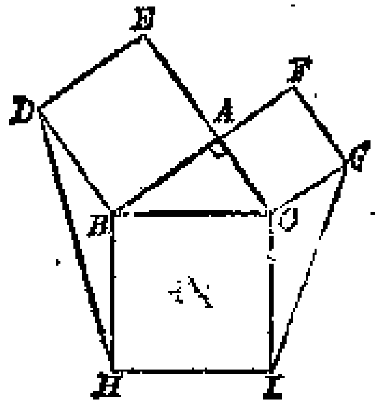
29. 两圆内切于 P，大圆弦 AB 与小圆相切于 D，连结 PD 并延长交大圆于 C. 求证：$AD\cdot CP=AP\cdot BC$.

30. 两圆外切，再以连心线为直径作圆，求证这三个圆必有公共的外公切线.

31. 如图，P 是 $\odot O$ 直径延长线上的一点，PC 是切线，$CD\perp AB$ 于 D. 求证：$\frac{PA}{AD}=\frac{PB}{BD}$.



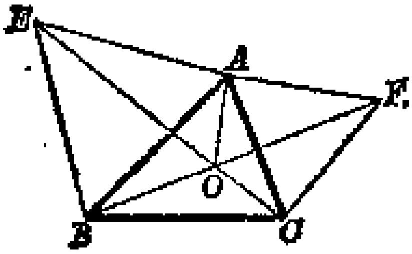
(第 31 题图)



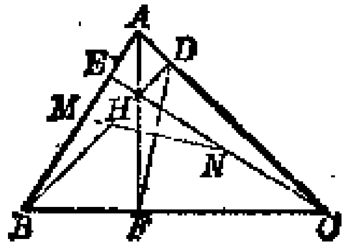
(第 32 题图)

32. 如图, 在 Rt$\triangle ABC$ 中, $\angle A=90^\circ$, 在三边各向外侧作正方形 $ABDE$、$BCIH$、$ACGF$. 求证: (1) $GI^2=AB^2+4AC^2$, $DH^2=AC^2+4AB^2$; (2) $GI^2+DH^2=5BC^2$.

33. 在 $\triangle ABC$ 中, 以 AB、AC 为边向外作等边三角形 ABE 及 ACF, BF、CE 相交于 O, 求证: AO 平分 $\angle EOF$.



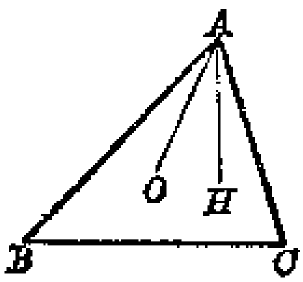
(第 33 题图)



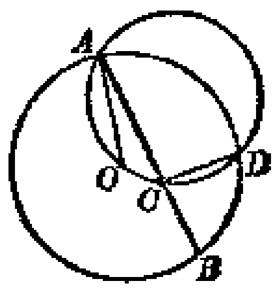
(第 34 题图)

34. 如图, AF、BD、CE 分别为 $\triangle ABC$ 三边 BC、CA、AB 上的高, H 为垂心, 且 $AB=CH$. M、N 分别为 AB、CH 的中点. 求证: $MN\perp DF$.

35. H 和 O 分别为 $\triangle ABC$ 的垂心和外心. (1) 若 AH



(第 35 题图)

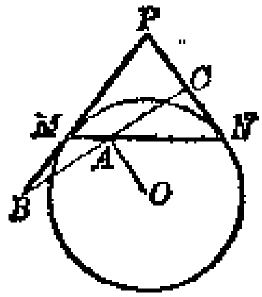


(第 36 题图)

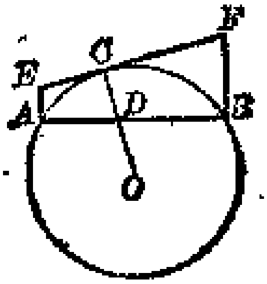
$=AO$，则 $\angle BAC=60°$；(2) 若 $AH=BC$，则 $\angle BAC=45°$。

36. 已知 AB 为 $\odot O$的弦，以 AO 为弦作一圆交 AB 于 C，交 $\odot O$ 于 D。求证：$BC=CD$。

37. 已知过 $\odot O$ 内的弦 MN 两端作两切线相交于 P。A 为 MN 上一点，过 A 作 $BC\perp OA$，交 PM 于 B，交 PN 于 C。求证：$AB=AC$。



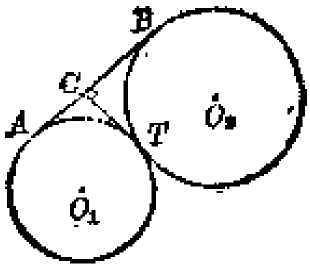
(第 37 题图)



(第 38 题图)

38. 如图，AB 为 $\odot O$ 的弦，EF 为 $\odot O$的切线，C 为切点。$AE\perp AB$，$BF\perp AB$，CO 交 AB 于 D。
求证：(1) $CE\cdot CF=AD\cdot BD$；(2) $CD^2=AE\cdot BF$。

39. 直径为 d_1、d_2 的两圆 O_1、O_2 互相外切于 T，AB 为两圆的一条外公切线，A、B 为切点。作 $TC\perp AB$ 于 C。求证：$\frac{1}{TC}=\frac{1}{d_1}+\frac{1}{d_2}$。



(第 39 题图)

二、比较复杂的问题

建造高楼大厦，比建造一幢简易的平房显然要困难得多，但高楼大厦毕竟是从平地上由一层一层的楼面建筑上去的。如果人们学会了建造平房，在此基础上也就可以学会建造高楼大厦．在几何里，比较复杂的问题，实质上也是由几个相同类型或不同类型的简单问题组成的．如果我们对一个复杂的问题能正确地剖析出它是由哪几个简单问题组成的，那么也就不难解决比较复杂的问题了．当然，一个比较复杂的问题，它的几何图形可能要复杂一些，已知条件可能要多一些，条件与结论间的关系，可能要隐蔽些．比较复杂的几何题的证明，有时需要添几条辅助线，那是有一定难度的．但是，只要熟练地掌握简单问题的添线方法，可将复杂问题剖析成几个简单问题的添线方法去解决。

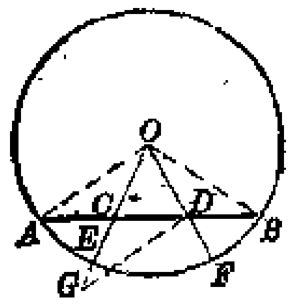


图 79

下面将对一些具体例子进行剖析，向读者提供关于复杂问题证题中添辅助线的思路与方法。

[例1] 如图79，AB 为 $\odot O$ 的弦，C，D 是 AB 的三等分点，过 C、D 的半径交圆于 E、F．求证：

(1) $\overset{\frown}{AE}=\overset{\frown}{BF}$；　　(2) $\overset{\frown}{EF}>\overset{\frown}{AE}$。

证法一

分析与思考 (1) 要证明 $\overparen{AE}=\overparen{BF}$，可以转化为证明 $\angle AOE=\angle BOF$，这只要证明 $\triangle OAC\cong\triangle OBD$ 就可以了.

(2) 要证明 $\overparen{EF}>\overparen{AE}$，就是要证明 $\angle EOF>\angle AOE$. 这里 C、D 为 AB 的三等分点，OC 便是 $\triangle OAD$ 的中线，这就归结为比较三角形的顶角被对边中线所分成的两个角的大小的问题了.

要把这两个不在同一个三角形内的角，搬到一个三角形中去，可仿照上节中的例1、例2中线问题的添线方法，把中线 OC 延长一倍到 G，连结 GD，证明 $\angle GOD>\angle G$ 就可以了，这由 $DG=OA=OF>OD$，所以结论是容易证得的.

证明 从略.

证法二

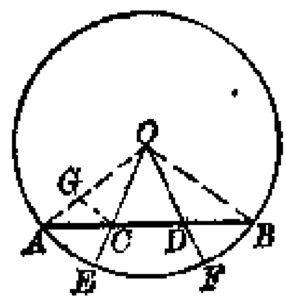


图 80

分析与思考 如图 80，要证明 $\angle AOC<\angle COD$，又 $\angle AOC$、$\angle COD$ 分处在两个三角形中，就可联想到用"两个三角形内，两边对应相等，第三边不等，则大边所对角也大"这条定理来证. 因为 $OC<OE=OA$，所以可在 OA 上取 $OG=OC$，连结 GC，$\triangle OGC$ 与 $\triangle OCD$ 是两个有两边对应相等的等腰三角形，因此只要证明 $CG<CD$ 就可以了. 因为 $AC=CD$，所以只要证明 $AC>CG$. 在 $\triangle ACG$ 内，只要证 $\angle AGC>\angle A$. 这由 $\angle AGC>\angle OCG=\angle OGC>\angle A$ 便可证得.

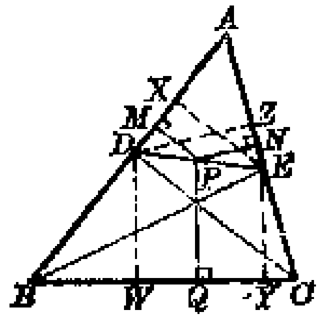


图 81

证明 从略.

[例 2] 如图 81，BE、CD 是 $\triangle ABC$ 的角平分线，P 是

DE 的中点，$PQ\perp BC$，$PM\perp AB$，$PN\perp AC$，Q、M、N 为它们的垂足．求证：$PQ=PM+PN$．

分析与思考　要证 $PQ=PM+PN$，可在 PQ 上截取一段使等于 PM，然后证明余下的线段与 PN 相等．但采用这个方法难以找到余下的线段与 PN 的关系，因此必须另觅其它途径．

要证 $PQ=PM+PN$，而在这个位置，PM、PN 与 PQ 是难于连上关系的．鉴于 P 是 DE 的中点，可以考虑构造出一个三角形，利用三角形中位线定理，求出 PM 和 PN 的倍量，再设法使与 PQ 建立关系．作 $EX\parallel PM$ 交 AB 于 X，那么 $EX=2PM$；同理作 $DZ\parallel PN$，便得 $DZ=2PN$．因此要证 $PQ=PM+PN$，只要证 $2PQ=EX+DZ$ 了．由于 BE 及 CD 是 $\angle B$ 及 $\angle C$ 的平分线，所以沿 CD 把 DZ 翻折过来，Z 便落在 BC 上的 W 点，那么 $DW=DZ$；同理，把 EX 沿 BE 翻折过来，得 $EY=EX$．这样，问题就转化为证明 $2PQ=DW+EY$ 了．由图形明显地看出 DW、PQ、EY 是三条平行线，四边形 $DWYE$ 是直角梯形．这由梯形的中位线定理就可以证得了．

证明　从略．

例 1 是把比较弧的大小先转化为比较圆心角的大小，再把比较圆心角的大小转化为比较三角形内两个角的大小，最后把角的问题转化为三角形的中线问题去解决．例 2 是抓住中点这一条件，添辅助线构造出一个三角形，利用中位线定理及角平分线的对称轴性质，把所要证明的两线段进行平移及对称变换，使结论中原来互相孤立的三线段都集中在一个直角梯形中，利用梯形的中位线定理去解决．

[例 3]　如图 82, 在四边形 $ABCD$ 中, $AB=CD$, M、N 为 AD、BC 的中点. NM 的延长线与 BA、CD 的延长线相交于 P、Q. 求证: $\angle 1=\angle 2$.

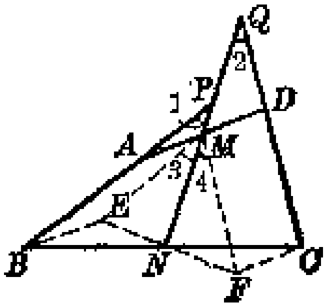


图　82

证法一

分析与思考　$\angle 1$ 和 $\angle 2$ 分处在 $\triangle PBN$ 和 $\triangle QCN$ 中, 显然找不到相等的关系, 必须设法把它们平移到适当位置. 试从与 $\angle 1$、$\angle 2$ 最接近的 M 点作 $ME\parallel AB$, 作 $MF\parallel CD$, 便只要证 $\angle 3=\angle 4$. 要证 $\angle 3=\angle 4$, 可以从证明含有这两个角的三角形全等着手. 根据已知条件 $AB=CD$, 因此取 $ME=AB$, $MF=CD$, 显然 $ME=MF$. 连结 EN、NF, 便要证 $\triangle MEN\cong\triangle MFN$. 这里, MN 为公共边, 只要证 $EN=FN$, 要证 $EN=FN$, 便只要证 $\triangle BEN\cong\triangle CFN$, 由于 $BN=NC$, $BE=AM=MD=FC$, 又 $BE\parallel AD\parallel FC$, 因此 $\angle EBN=\angle FCN$, 这就容易证明 $EN=NF$ 了.

证明　从略.

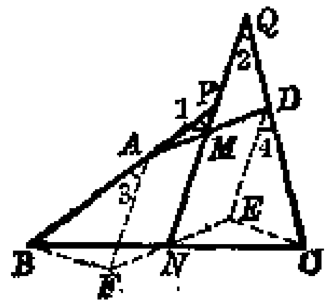


图　83

证法二

分析与思考　如图 83, 要证明 $\angle 1=\angle 2$, 也可以分别过 A 点和 D 点, 作 $DE \underline{\parallel} MN$, $AF \underline{\parallel} MN$, 就有 $\angle 3=\angle 1$, $\angle 4=\angle 2$. 要证 $\angle 1=\angle 2$, 就是要证 $\angle 3=\angle 4$. 连结 EF, 四边形 $AFED$ 显然是平行四边形, 且 FE 过 N 点. 因此要证 $\angle 3=\angle 4$, 就只要证 $\triangle ABF\cong\triangle DCE$. 由于 $AB=CD$, $AF=DE$, 只要证明 $BF=CE$ 就可以了. 由于 EF 与 BC 互相平分, 所以四边形 $ECFB$ 为平行四边形, 于是可以证得 $BF=CE$ 了.

证明　从略。

证法三

分析与思考　要证明 $\angle 1=\angle 2$，也可以分别过 A 点、B 点（或 D、C）作 $AG \parallel QN$，$BG \parallel QC$ 交于 G（图 84），证明 $\angle 3=\angle 4$。要证明 $\angle 3=\angle 4$，就是要证明 $BA=BG$，由于 $BA=CD$，因此只要证 $BG=CD$，连结 GN、ND，只要证 $\triangle BGN \cong \triangle CDN$ 就可以了。已有 $BN=NC$，$\angle GBN=\angle DCN$，只要再证 $\angle BGN=\angle CDN$。因为 $\angle BGN=\angle 4+\angle AGN$，$\angle CDN=\angle 2+\angle QND$，又 $\angle 2=\angle 4$，所以只要证 $\angle AGN=\angle QND$。但 DNG 是不是一条直线，还需证明 D、N、G 三点共线，而要证明 D、N、G 三点共线是比较困难的。

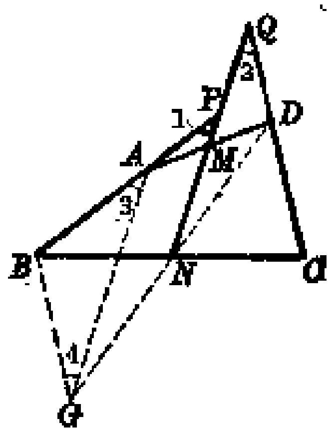


图 84

为了避免证明 D、N、G 三点共线，我们不妨把解题思路逆过来，即作 $AG \parallel QN$，延长 DN 与 AG 交于 G，连结 BG，这样，要证 $\angle 1=\angle 2$，就只要证 $\angle 2=\angle 4$ 和 $\angle 3=\angle 4$。要证 $\angle 2=\angle 4$，就只要证 $BG \parallel QC$，也就是证 $\angle GBC=\angle QCB$，这便转化为证明 $\triangle BGN \cong \triangle DCN$。这里，$N$ 为 BC 中点，$\angle BNG=\angle CND$，还需证 $NG=ND$。而在 $\triangle ADG$ 中，$MN \parallel AG$，M 为 AD 中点，所以 $DN=NG$。

要证 $\angle 3=\angle 4$，只要证 $BA=BG$，也就是证 $DC=BG$，由于 $\triangle BGN \cong \triangle DCN$，显然可证得 $DC=BG$。

证明　从略。

证法四

分析与思考　要证明 $\angle 1$ 与 $\angle 2$，因为 M、N 分别为 AD、

BC 的中点，也可以与三角形的中位线联系起来考虑，利用中位线平行于三角形底边的性质，有可能把 $\angle 1$、$\angle 2$ 集中在一个三角形中．而图形中的 AD、BC 都不是三角形的一边，因此必须先构造出以 AD 或 BC 为一边的三角形．连结 AC(或 BD) 就可以得到一个三角形(图 85)．取 AC 的中点 O，那么 OM、ON 分别是 $\triangle ADC$ 与 $\triangle ABC$ 的中位线．因为 $OM \parallel CD$，$ON \parallel AB$，所以 $\angle 1=\angle 4$，$\angle 2=\angle 3$，要证 $\angle 1=\angle 2$，只要证 $\angle 3=\angle 4$，这样便转化为证明 $OM=ON$ 了，因为 $OM=\frac{1}{2}CD$，$ON=\frac{1}{2}AB$，$AB=CD$，所以 $OM=ON$ 是不难证得的．

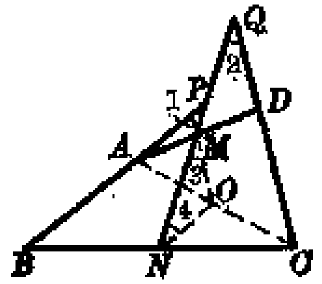


图 85

由以上各种证法可知，本题如"简单问题"中的例 11、例 12 那样，用"平移变换"的方法把要证明相等的两角 $\angle 1$，$\angle 2$ 移到有利的位置 $\angle 3$，$\angle 4$ 上来，然后利用全等三角形或等腰三角形的性质进行证明．

特别从证法四的分析，更容易显示出它与"简单问题"之间的联系．如果我们把"简单问题"中的例 6(图 11)、例 9(图 14)，与本题的证法四(图 85)对照一下，就会发现这三个图形是多么相似！图 85 与图 11 中所添的辅助线更是完全一样．本题证法四的思路可以说是"简单问题"例 9 的证法一、证法二与例 6 的证法的综合．

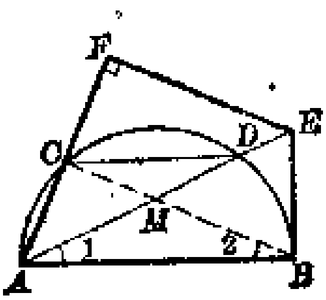


图 86

［例 4］ 如图 86，CD 是半圆内平行于直径 AB 的一条弦．AD 的延长线与过 B 的切线相交于 E．从 E 作 AC 延长线的垂线，垂足为 F．求证：$AC=CF$．

证法一

分析与思考　要证 $AC=CF$，因为图中有一个现成的三角形 AEF，就会联想到用中位线定理的逆定理去解决．取 AE 的中点 M 后，只要证明 $MC\parallel EF$ 就可以了．因为 $EF\perp AF$，所以要证 $MC\parallel EF$，只要证 $MC\perp AF$．又因为 C 点在半圆上，所以 $\angle ACB=90°$，于是要证 C、M、B 三点共线．为避免证三点共线这一难点，不妨先连结 BC，交 AE 于 M，然后设法证明 M 为 AE 中点及 $BC\parallel EF$．因为 $\angle ACB$ 为半圆所对圆周角，容易证得 $BC\parallel EF$．要证 M 为 AE 的中点，因为 BE 是切线，$\angle ABE=90°$，AE 便成为 $Rt\triangle ABE$ 的斜边．所以要证 $MA=ME$，只要证 $MA=MB$，由于 $OD\parallel AB$，易知 $\angle 1=\angle 2$，于是可证得结论成立．

证明　从略．

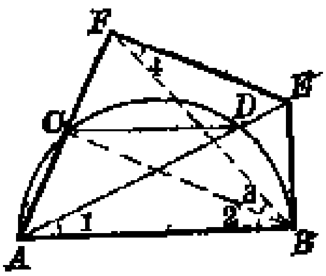


图 87

证法二

分析与思考　要证 $AC=CF$，也可以从含有以 AC、CF 为对应边的两个三角形证明这两个三角形全等着手．如图 87，连结 BC 得到一个 $Rt\triangle ABC$，再连结 BF，就得到另一个 $Rt\triangle FBC$．要证这两三角形全等，只要证 $\angle 2=\angle 3$ 就可以了．因为 $\angle 2=\angle 1$，$\angle 3=\angle 4$，所以要证 $\angle 2=\angle 3$，只要证 $\angle 1=\angle 4$．这里，EB 是切线，$BE\perp AB$，$EF\perp AF$，所以 A、B、E、F 四点共圆．因此容易证得 $\angle 1=\angle 4$ 了．

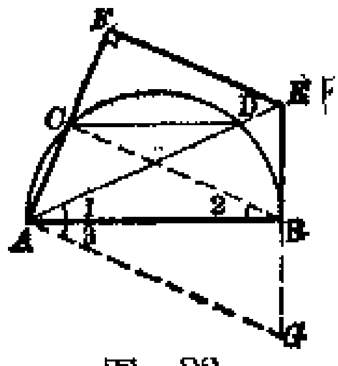


图 88

证明　从略．

证法三

分析与思考　要证 $AC=CF$，仿照证法一，如果过 A 再

作 EF 的平行线与切线 EB 的延长线交于 G(图 88)，只要证明 B 是 EG 的中点，利用平行截割定理同样可证明 $AC=CF$．要证 B 是 EG 中点，只要证明 $\triangle ABG\cong\triangle ABE$，这里，$AG\parallel BC$，所以 $\angle 3=\angle 2=\angle 1$，这就容易证得上述两三角形全等了．

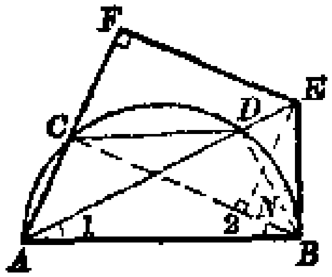


图 89

证明　从略．

证法四

分析与思考　要证 $AC=CF$，也可从证明 AC、CF 分别等于图形中另一线段着手．如图 89，连结 BC，由于 $CD\parallel AB$，显然 $BD=AC$，因此只要证明 $CF=BD$ 就可以了．但 BD 与 CF 还是没有直接关系，这就需要设法再找一条与 BD、CF 都有关系的线段．如果作 $EN\perp BC$，那么 EN 便是矩形 $ENCF$ 的一边，显然 $NE=CF$．因此只要证明 $EN=BD$ 就可以了．这可从证明 $\triangle BEN\cong\triangle EBD$ 去解决．图中只要证明 $\angle EBN=\angle BED$ 就可以了．因为 $\angle EBN$ 是 $\angle 2$ 的余角，$\angle BED$ 是 $\angle 1$ 的余角，要证 $\angle EBN=\angle BED$，只要证 $\angle 1=\angle 2$，因为 $CD\parallel AB$ 显然 $\angle 1=\angle 2$．

证明　从略．

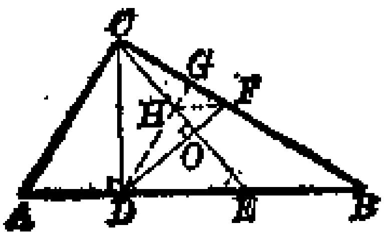


图 90

［例 5］　如图 90，CD 为直角三角形 ABC 斜边 AB 上的高．过 C 点的斜线交 AB 于 E，过 D 点作 CE 的垂线 DO，并延长交 BC 于 F．求证：$AD:DE=CF:FB$．

证法一

分析与思考　要证明 $AD:DE=CF:FB$，而 ADE 与 CFB 却是两条互不相关的线段．便得先找一条与 ADE 与

CFB 都能建立关系的中介线段. 过 $AD:DE$ 的分点 D 作 $DG \parallel AC$ 交 BC 于 G、交 CE 于 H, 就有 $\frac{AD}{DE}=\frac{CH}{HE}$. 要证 $\frac{AD}{DE}=\frac{CF}{FB}$ 便转化为证明 $\frac{CH}{HE}=\frac{CF}{FB}$ 了. 而这正是 $\triangle CBE$ 中两边上的四条线段, 连结 HF, 只要证明 $HF \parallel EB$ 就可以了. 因为 $CD \perp AB$, 所以要证 $HF \parallel AB$, 就只要证明 $FH \perp CD$. 从图形中不难发现 DG 和 CO 是 $\triangle CDF$ 的两条高线, H 就是 $\triangle CDF$ 的垂心, 那么 FH 必然垂直于 CD.

证明　从略.

证法二

分析与思考　仿证法一的思路, 也可先从过 F 点作 $FH \parallel AB$ 交 CE 于 H 着手, 然后证明 $DH \parallel AC$.

证明　从略.

证法三

分析与思考　要证明 $AD:DE=CF:FB$, 从图 90 可以看到, CF、FB、DE 都是 $\triangle BCE$ 被直线 DF 所截得到的线段. 因此, 可以试用"简单问题"中例 24 的 Menelaus 定理来证明. $\triangle BCE$ 被直线 DOF 所截后, 有 $\frac{CF}{FB}\cdot\frac{BD}{DE}\cdot\frac{EO}{OC}=1$.

要证 $\frac{AD}{DE}=\frac{CF}{FB}$, 就是证 $\frac{AD}{DE}=\frac{DE}{BD}\cdot\frac{OC}{EO}$, 也就是证 $\frac{AD\cdot BD}{DE^2}=\frac{OC}{EO}$. 而 AD、BD 是 $Rt\triangle ABC$ 中的两直角边在斜边上的射影, 所以 $AD\cdot BD=CD^2$. 因此要证 $\frac{AD}{DE}=\frac{CF}{FB}$, 只要证 $\frac{CD^2}{DE^2}=\frac{OC}{EO}$, 在 $Rt\triangle DEO$ 中应用射影定理就能证得 $\frac{CD^2}{DE^2}=\frac{OC}{EO}$.

证明　从略.

例4、例5两题的证法，也可说是"简单问题"证法的综合．例4证法一是添中位线，证法二是连结 BO、BF 构造出两个全等三角形，证法三、证法四利用平移变换作平行线，使所要证明的线段移到适当位置．这些都是我们在"简单问题"证明中遇到过的方法．但这两个例题比解决"简单问题"的思路复杂，原因是：牵涉到的几何知识面较广．如例4证法二要用到四点共圆；证法四要用到余角关系；例5证法一、证法二都要用到垂心定义；证法三应用 Menelaus 定理后，还要应用直角三角形的比例中项定理及射影定理．这样所添的辅助线常不止一条．并且所添的辅助线有时比较特殊，如例4证法三要把辅助线添在图形外面，例4证法一 BO 这条辅助线它的一段是 $\triangle AEF$ 的中位线，另一段又是直角三角形 ABE 的中线.

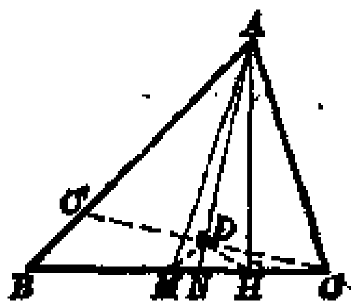


图 91

[例6]　如图91，AM、AN、AH 分别是 $\triangle ABC$ 的中线、角平分线和高．且 $AB>AC$．求证：$(AB-AC)^2=4MN\cdot MH$.

分析与思考　如图91，要证 $(AB-AC)^2=4MN\cdot MH$，就是要证 $\left(\frac{AB-AC}{2}\right)^2=MN\cdot MH$，也就是要证 $\frac{AB-AC}{2}$ 是 MN 和 MH 的比例中项．在图中必须先着手找到与 $\frac{AB-AC}{2}$ 等价的线段．将 AC 沿角平分线 AN 翻折，C 点落在 AB 上得 C' 点，那么 $BC'=AB-AC$，连结 CC'，AN 垂直平分 CC'，设垂足为 D，连结 MD，那么 $MD=\frac{BC'}{2}$．因此，问

题便转化为要证$MD^2=MN\cdot MH$，也就是要证$\dfrac{MD}{MN}=\dfrac{MH}{MD}$.要证$\dfrac{MD}{MN}=\dfrac{MH}{MD}$，这可从证明$\triangle DMN\backsim\triangle DMH$着手．因为$\angle DMN$为公共角，因此只要再证$\angle MDN=\angle DHM$就可以了．由于$DM\parallel AB$，有$\angle MDN=\angle BAN=\dfrac{1}{2}\angle A$；$\angle AHO=90^\circ=\angle ADO$，有$H$、$O$、$A$、$D$四点共圆，所以$\angle DHM=\angle OAD=\dfrac{1}{2}\angle A$，从而可证得$\angle MDN=\angle DHM$.

证明　从略.

［例7］　如图92，AM是$\triangle ABC$的中线，一条与BC不平行的直线分别交AB、AM、AC于P、N、Q．求证：$\dfrac{AB}{AP}+\dfrac{AC}{AQ}=\dfrac{2AM}{AN}$.

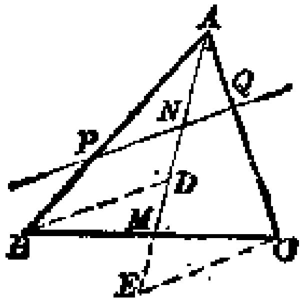


图　92

证法一

分析与思考　要使左边的两个异分母分式相加成$\dfrac{2AM}{AN}$，便必须把这两个异分母分式化成同分母分式，最好这个分母就是AN．因此必须作出满足$\dfrac{AB}{AP}=\dfrac{x}{AN}$及$\dfrac{AC}{AQ}=\dfrac{y}{AN}$的线段$x$、$y$，然后设法证明$x+y=2AM$．为此，作$BD\parallel PN$、$CE\parallel NQ$分别交$AM$及其延长线于$D$、$E$，于是$x=AD$，$y=AE$．要证$\dfrac{AB}{AP}+\dfrac{AC}{AQ}=\dfrac{2AM}{AN}$，可以转化为证明$\dfrac{AD}{AN}+\dfrac{AE}{AN}=2\dfrac{AM}{AN}$，就是要证$AD+AE=2AM$．这里，$AD=AM-MD$，$AE=AM+ME$，就是要证$(AM-MD)+(AM+ME)=2AM$，即证$MD=ME$．这可从证明$\triangle BDM\cong\triangle CEM$得到．由于$BD\parallel CE$，$M$是$BC$的中点，容易证得两三角形全等.

证明 从略。

证法二

分析与思考 要证 $\frac{AB}{AP}+\frac{AC}{AQ}=2\frac{AM}{AN}$，由已知条件 $AB>AP$，$AC>AQ$，上式可转化为证明 $\frac{AP+PB}{AP}+\frac{AQ+QC}{AQ}=2\frac{AM}{AN}$，就是证 $2+\frac{PB}{AP}+\frac{QC}{AQ}=2\frac{AM}{AN}$，如果能作出满足 $\frac{PB}{AP}=\frac{x}{AN}$，$\frac{QC}{AQ}=\frac{y}{AN}$ 的线段 x、y，那么便只要证 $2AN+x+y=2AM$ 就可以了。如图 92，作 $BD\parallel PQ$，$CE\parallel PQ$，就得到 $x=ND$，$y=NE$。要证 $2AN+x+y=2AM$，就是要证 $2AN+ND+NE=2AM$。因为 $AN+MN=AM$，所以只要证 $ND+NE=2MN$，就是 $(MN-DM)+(MN+ME)=2MN$，即 $DM=ME$ 就可以了。

证明 从略。

证法三

分析与思考 仿照证法二的分析，要作出满足 $\frac{PB}{AP}=\frac{x}{AN}$ 和 $\frac{QC}{AQ}=\frac{y}{AN}$ 中的 x，y，如图 93，也可以过 B、C 分别作 BD、CE 平行于 AM，分别交 PQ 延长线于 D、E，$\triangle BDP\backsim\triangle PAN$，$\triangle CEQ\backsim\triangle ANQ$，便得 $x=BD$，$y=CE$。因此要证 $\frac{AB}{AP}+\frac{AC}{AQ}=\frac{2AM}{AN}$，便只要证 $2+\frac{PB}{AP}+\frac{QC}{AQ}=\frac{2AM}{AN}$，就是证 $2AN+BD+CE=2AM$，即证 $BD+CE=2MN$。由于 MN 是梯形 $BCED$ 的中位线，$BD+CE=2MN$ 显然成立。

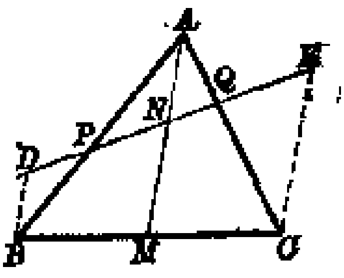


图 93

证明　从略.

[例 8]　如图 94, 已知圆内接四边形 $ABCD$. 求证: $AC\cdot BD=AB\cdot CD+AD\cdot BC$.

(这个命题叫做 Ptolemy 定理)

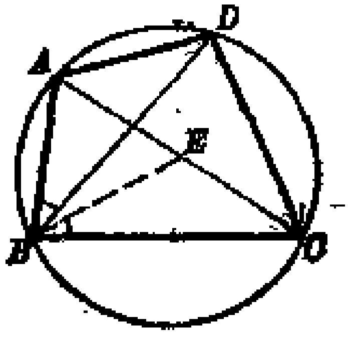


图 94

分析与思考　我们知道要证 $ad=bc$, 可转化为证明 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$. 本题要证 $AC\cdot BD=AB\cdot CD+AD\cdot BC$, 这个式子的右边是两组线段乘积的和, 因此不能用一般方法把它变形成四线段成比例的形式, 只能设法把左边的 $AC\cdot BD$ 拆成两组线段乘积的和, 使每一组的乘积分别等于 $AB\cdot CD$ 和 $AD\cdot BC$. 最简单的办法可以在 AC(或 BD)上找适当的分点 E, 使 $AC\cdot BD$ 变形为 $(CE+EA)\cdot BD=CE\cdot BD+EA\cdot BD$, 并满足 $CE\cdot BD=AD\cdot BC$ 和 $EA\cdot BD=AB\cdot CD$. 关键就在于确定分点 E.

如果要使 $CE\cdot BD=AD\cdot BC$ 和 $AE\cdot BD=AB\cdot CD$ 成立, 就是要使 $\frac{CE}{BC}=\frac{AD}{BD}$ 和 $\frac{AE}{AB}=\frac{CD}{BD}$ 成立, 也就是要使 $\triangle EBC\backsim\triangle ABD$ 和 $\triangle ABE\backsim\triangle CBD$. 因为 $\triangle ABD$ 已确定, 且 $\angle ADB=\angle ACB$, 所以要使 $\triangle BEC\backsim\triangle BAD$, 便只须作出 BE, 使 $\angle EBC=\angle ABD$, 这样在 AC 上就得到 E 点. 但是 $\triangle ABE$ 与 $\triangle DBC$ 是否相似? 还须进一步证明. 由于 $\angle BAE=\angle BDC$, $\angle ABE=\angle ABD+\angle DBE=\angle EBC+\angle DBE=\angle DBC$, 这就容易证得两三角形相似.

证明　从略.

例 6、例 7、例 8 都属于求证比例线段问题, 而且比较复杂. 但比例线段问题, 归根结底还是要用相似形或平行截割

定理去证明．关键在于进行分析，通过添辅助线，把它们分解为若干个简单问题，使有关线段转化为相似三角形的对应边或为平行线截割的线段．如例 6 的上半段，就是综合运用了处理角平分线问题时的翻折法和截取法作出对称点、对称线段，以及遇到线段中点时采用添中位线的方法，然后把结论转化为证明 $MD^2=MN\cdot MH$ 这样一个简单的比例中项问题；例 7 的证法则是通过添平行线分解为两个简单的比例线段问题，化异分母分式加法为同分母的分式加法，最后简化为求证一线段等于另两线段的和这样一个简单问题去解决；例 8 则是通过多层次的复杂分析，找出某一线段的分点，作出 BE 这样一条“一线多用”的辅助线，把问题转化为证明两组三角形相似，得出两组比例式．从而把证明两组线段乘积的和这样复杂的问题简化成求证四条线段成比例的简单问题．

［例 9］ 如图 95，l 为 $\odot O$ 外一条直线，$OA\perp l$ 于 A．过 A 引圆的割线 ACD 交圆于 C、D．过 C、D 作 $\odot O$ 的切线 CM、DN 交 l 于 M、N．求证：$AM=AN$．

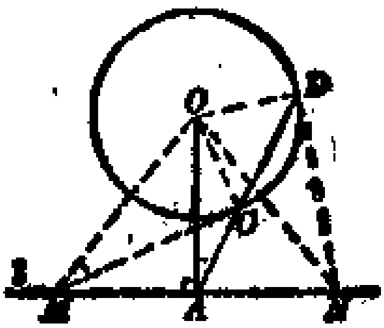


图 95

分析与思考 要证 $AM=AN$，只要证明 OA 是 MN 的垂直平分线．已知 $OA\perp MN$，因此只要证 $OM=ON$．由图形看出，如果以 O 为中心，把 $\triangle OMC$ 沿逆时针方向旋转，使 OC 落到 OD 的位置，那么 CM 便与 DN 重合，因此要证 $OM=ON$，便要证 $\triangle OCM\cong\triangle ODN$．除了已有 $OC=OD$ 及 $\angle OCM=\angle ODN=90°$ 两个条件外，还必须证明 $CM=DN$ 或 $\angle OMC=\angle OND$．显然，前者这两条线段处在这个位置，证明是困难的，那么只能设法证明 $\angle OMC=\angle OND$ 了．但这

两个角也分处两边无直接关系，因此必须寻找一个"中介角"。从图形的位置看来如果能证明$\angle OAD$分别等于$\angle OMC$和$\angle OND$，那么问题就解决了。也就是要证明M、A、C、O及N、A、O、D分别四点共圆，由于$OA\perp l$，$OC\perp MC$以及$OD\perp ND$，所以是不难证明四点共圆的。

证明　从略。

[例10]　如图96，从圆外一点P作$\odot O$的切线PA、PB，PO与AB相交于M。过M任意作弦CD。求证：PO平分$\angle CPD$。

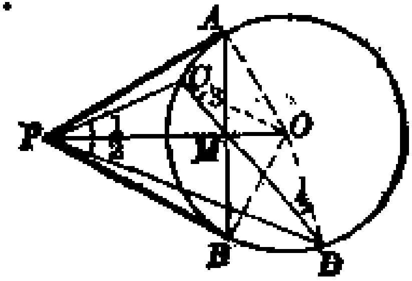


图 96

分析与思考　要证$\angle 1=\angle 2$，从图形可以看到PM为$\triangle CPD$的顶角平分线，根据三角形内角平分线性质逆定理，只要证$\dfrac{PC}{PD}=\dfrac{MC}{MD}$就可以了。但是$PC$、$PD$这两条线段很难找到与其它线段的关系，因此，只好试把$\angle 1$、$\angle 2$移到其它位置上去再证了。观察图形，不难发现作出半径OC，OD后，$\triangle OCD$是等腰三角形，$\angle 3=\angle 4$。而$\angle 3$、$\angle 4$与$\angle 1$、$\angle 2$都是处在四边形$PCOD$中的角，如果能证明P、C、O、D四点共圆，那末就可证得$\angle 1=\angle 4$，$\angle 2=\angle 3$，$\angle 1=\angle 2$了！因此，关键在于如何证明P、C、O、D四点共圆。要证P、C、O、D四点共圆，图中没有任何角的相等或相补关系可以利用，根据上节第44页添辅助圆的方法去考虑，如果能证明$MC\cdot MD=MO\cdot MP$就可以了。因为$MC\cdot MD=MA\cdot MB$，所以只要证$MO\cdot MP=MA\cdot MB=MA^2$。作半径$OA$，便出现直角$\triangle PAO$，根据直角三角形的比例中项定理，容易证得$MA^2=MO\cdot MP$。

证明 从略.

例 9、例 10 是证明圆内线段相等和圆内角相等的问题. 由于条件和结论之间的关系比较隐蔽，因此要分别证明它们相等是比较困难的. 如果说例 7、例 8 的困难是如何把一个复杂的问题分解为几个简单的问题；那么例 9、例 10 的困难则在于如何把条件与结论间非常隐蔽的关系，逐步转化为比较明朗的关系. 而要完成这些比较复杂的转化，常常要找出它们和“中介角”、“中介线段”的关系，而往往在寻找这些“中介”关系的过程中需要作出辅助线. 如例 9 先是为了证明 $AM=AN$，而添置 OM, ON 这两条辅助线，继而又为了证明 $OM=ON$，而添置 OC, OD，最后为了找寻 $\angle OMC$ 与 $\angle OND$ 的等量关系，分别过 O、C、A、M 及 O、D、N、A 作了两个辅助圆. 例 10 先是为了寻找 $\angle 1=\angle 2$ 的中介角，而添置 OC、OD 这两条辅助线，后来又为了证明 $\angle 1=\angle 4$、$\angle 2=\angle 3$，考虑过 O、C、P、D 作辅助圆，为了要证得这四个点共圆，才添置半径 OA，构造出直角三角形 PAO. 可以看到这是在一环紧扣一环，一步深入一步的分析、思考过程中逐步添出辅助线的，经过推理论证，使条件逐渐向结论转化.

[例11] 证明同圆或等圆中任意两个内接三角形的面积比等于三边长连乘积的比.

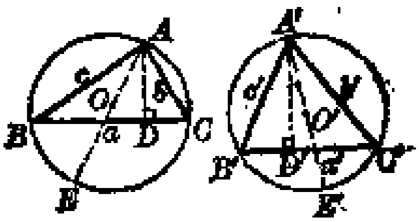


图 97

分析与思考 如图 97，设等圆 O, O' 中，两内接三角形为 $\triangle ABC$ 和 $\triangle A'B'C'$，其各边分别为 a, b, c 及 a', b', c'. 结论要证明 $\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle A'B'C'}}=\frac{a\cdot b\cdot c}{a'\cdot b'\cdot c'}$. 可先作出 BC 及 $B'C'$ 上的高 AD、$A'D'$. 要证 $\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle A'B'C'}}=\frac{abc}{a'b'c'}$，就

是要证 $\dfrac{\frac{1}{2}AD\cdot a}{\frac{1}{2}A'D'\cdot a'}=\dfrac{abc}{a'b'c'}$. 也就是要证 $\dfrac{AD}{A'D'}=\dfrac{bc}{b'c'}$. 联想到"简单问题"中的例22: "三角形两边乘积等于第三边上的高与外接圆直径的乘积", 如果添置两圆的直径 AE 和 $A'E'$, 那么, $AE=A'E'$, 也就很容易地证得 $\dfrac{AD}{A'D'}=\dfrac{bc}{b'c'}$.

证明　从略.

[例12]　如图98, 两圆 O_1、O_2 外切于 P. AB 为两圆的一条外公切线. AC 为 $\odot O_1$ 的直径. 从 C 作 $\odot O_2$ 的切线 CD, 切点为 D. 求证: $AC=CD$.

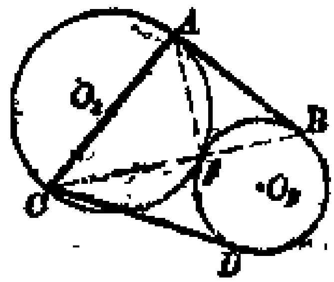


图　98

分析与思考　要证 $AC=CD$, 图中现在所处的位置, 是难以找到这种关系的, 必须设法证明 AC 和 CD 分别等于第三个量. 由于 CD 是 $\odot O_2$ 的切线, 必然会想到应用切割线定理去解决. 但图中无现成的割线, 必须添置辅助线. 观察图中 C、P、B 三点的位置, 假如这三点在一条直线上, 那么就有 $CD^2=CP\cdot CB$, 从而只要证明 $AC^2=CP\cdot CB$ 就可以了. 要证 C、P、B 三点共线, 只要证明 $\angle APC+\angle APB=180°$, 由于 AC 是 $\odot O_1$的直径, 显然$\angle APC=90°$, 因此只要再证明 $\angle APB=90°$, 也就是证明 $\triangle APB$ 是直角三角形. 利用"简单问题"中例32的结论可以证得 $\angle APB=90°$　现在再需证明 $AC^2=CP\cdot CB$. 易知, 这个结论在直角 $\triangle ACB$ 中, 可由射影定理证得.

证明　从略.

从例1到例10, 都是多次应用证明"简单问题"的分析、

思考方法及添辅助线的方法去解决的. 例11和例12,则是通过剖析,分解出一类与“简单问题”完全一样的命题,直接应用“简单问题”的现成结论去证明的. 这样,证明过程往往可简化. 所以说,解决“简单问题”时采用的思考途径和添线方法是证明复杂问题的基础,并且有些命题的结论也是证明“复杂问题”的理论依据. 但是这不是绝对的,有时候复杂问题中的命题的结论却是证明“简单问题”的理论依据. 例如,“简单问题”中的例14“P是等边三角形 ABC 外接圆 BC 上的一点,求证 $PA=PB+PC$”(图99). 我们观察图形,发现 $ABPC$ 是一个圆内接四边形,并且结论是求证对角线 PA 等于两条边 PB、PC的和,使我们立刻会想到“比较复杂问题”中例7的 Ptolemy 定理,即“圆内接四边形两组对边乘积的和等于对角线的乘积”. 直接应用这条定理,不必添任何辅助线也就可以证出它的结论. 我们在 $PA \cdot BC = PC \cdot AB + PB \cdot AC$ 的两边,分别除以等边三角形的边长,就可以直接得到 $PA=PB+PC$ 的结论.

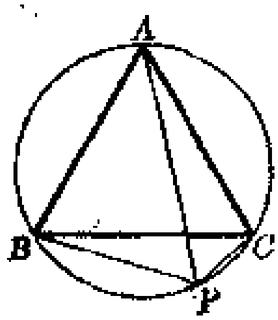


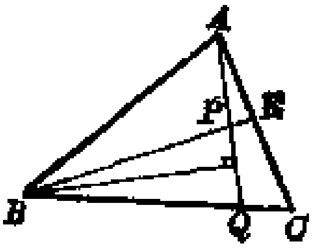
图 99

添辅助线问题,讲到这里也需告一段落了. 从上面可以看到,几何证题的知识是非常丰富的,证题的方法是非常灵活的. 简单问题与复杂问题的证明思路往往是互相渗透,相辅相成的,一般来说,没有一个标准,一定要把某几个问题划为简单问题,其余的都归结为复杂问题. 在这本小册子里,为了便于由浅入深地、比较方便地讲清一些问题证明的思考方法才这样做了. 目的是让读者领悟怎样将复杂问题剖析、转化为简单问题去解决的思想方法,从而在这过程中逐渐获得了添辅助线的各种方法.

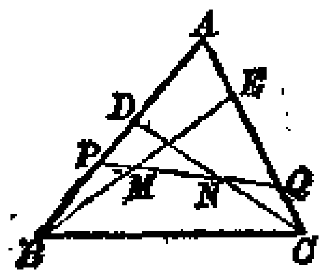
练 习 题 二

1. 在 $\triangle ABC$ 中，$\angle B=2\angle C$，AD为 BC 边上的高，求证：$CD=AB+BD$。

2. BE为 $\triangle ABC$ 的中线，从 A 引 $\angle EBC$ 的平分线的垂线，分别交 BE、BC 于 P、Q。求证：$PE=\frac{1}{2}QC$。



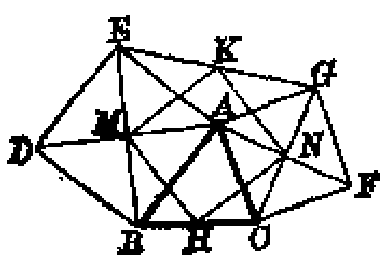
（第 2 题图）



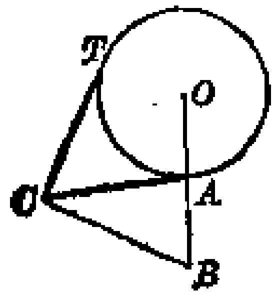
（第 3 题图）

3 在 $\triangle ABC$ 的边 AB、AC 上各取一点 D、E，使 $BD=CE$，M、N 为 BE、CD 的中点，延长 MN 交 AB、AC 于 P、Q。求证：$AP=AQ$。

4. 如图，以 $\triangle ABC$ 的边 AB、AC 为边作正方形 $ABDE$，$ACFG$。M、N 为这两个正方形的对角线的交点，K、H 分别为 EG、BC 的中点。求证四边形 $HMKN$ 为正方形。



（第 4 题图）

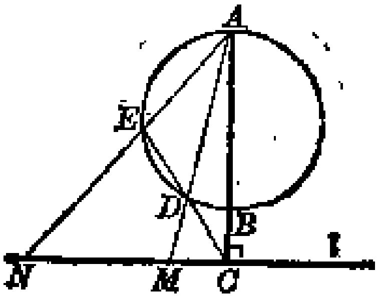


（第 5 题图）

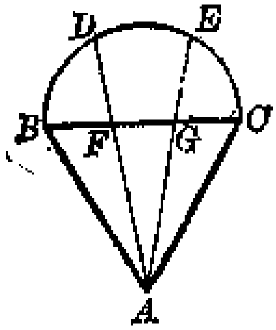
5. 如图，延长半径 OA 到 B，使 $AB=OA$，过圆上 T 点的切线 TC 与线段 AB 不相交，作 $BC\perp TC$ 于 C。求证：

$\angle CAO=3\angle AOB$.

6. 圆外一直线 l 与直径 AB 的延长线垂直，垂足为 C. 过 C 引割线交圆于 D、E，延长 AE、AD 分别交 l 于 N、M. 求证：$MD\cdot CN=CD\cdot NE$.



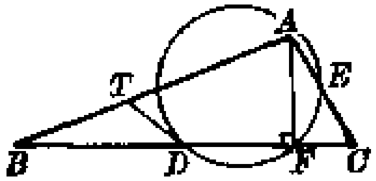
（第 6 题图）



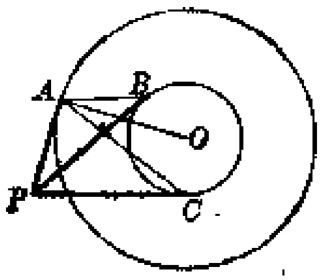
（第 7 题图）

7. 如图，BC 为半圆的直径，$\triangle ABC$ 为正三角形，D，E 将半圆三等分. 连 AD、AE 交 BC 于 F、G. 求证：F、G 将 BC 三等分.

8. 在 $\triangle ABC$ 中，$AB>AC$，$AF\perp BC$ 于 F，D、E 为 BC，AC 的中点，过 D 作 $\odot DFE$ 的切线 DT，交 AB 于 T. 求证：$\angle TDB=\angle C-\angle B$.



（第 8 题图）

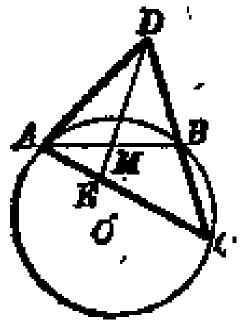


（第 9 题图）

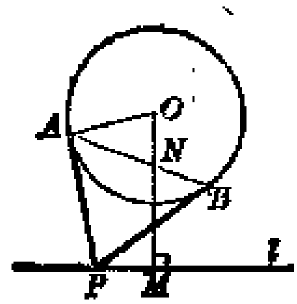
9. 自同心圆 O 外一点 P，引外圆切线 PA，内圆切线 PB、PC（A、B、C 均为切点）. 求证：OA 平分 $\angle BAC$.

10. M 为 $\odot O$ 弦 AB 的中点，C 为圆上任意一点. 切线 AD 交 CB 的延长线于 D，延长 DM 交 AC 于 E. 求证：

$$\frac{AD^2}{BD^2}=\frac{CE}{AE}.$$



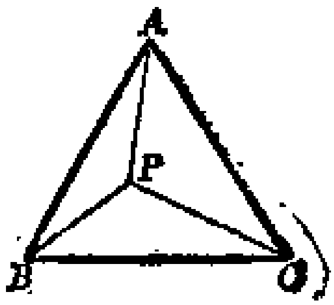
（第 10 题图）



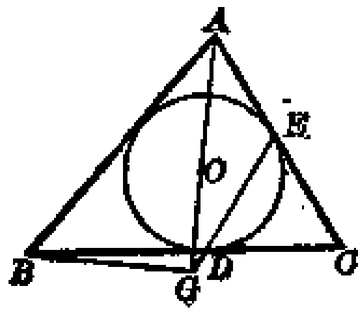
（第 11 题图）

11．P 为 $\odot O$ 外直线 l 上的一点，从 P 作 $\odot O$ 的两切线 PA、PB，A、B 为切点，作 $OM \perp l$ 于 M，OM 交 AB 于 N．求证：$OA^2 = OM \cdot ON$．

12．P 为等边三角形 ABC 内的一点．求证：$PA+PB+PC<2BC$．



（第 12 题图）



（第 13 题图）

13．$\triangle ABC$ 的内切圆 O 与 BC、CA 分别切于 D、E．AO 与 ED 的延长线相交于 G．求证：$AG \perp BG$．

14．如图，在 $\odot O$ 的弦 AB 两端的延长线上取 $AC=BD$．从 C、D 在 AB 的两侧各作切线 CE、DF．求证：EF 平分 AB．

（第 14 题图）

（第 15 题图）

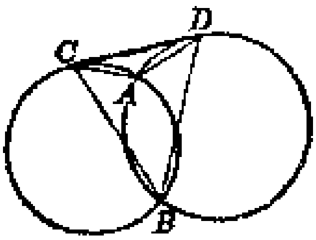
15．AB 是半圆的直径，过 A、B 的两弦 AC 和 BD 相交于 E．求证：$AB^2=AE\cdot AC+BE\cdot BD$．

16．证明不内接于圆的四边形 $ABCD$ 中，$AB\cdot CD+AD\cdot BC>AC\cdot BD$．

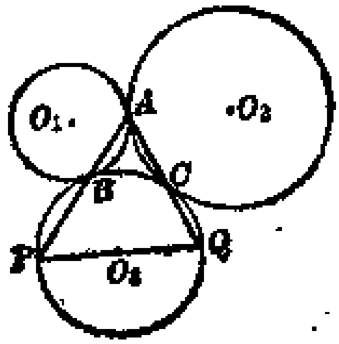
17．O 为 $\triangle ABC$ 的外心．AO，BO，CO 的延长线交对边于 L、M、N．求证：$\frac{1}{AL}+\frac{1}{BM}+\frac{1}{CN}=\frac{2}{AO}$．

18．P 为 $\triangle ABC$ 内的任意一点，连结 AP、BP、CP，并延长交对边于 D、E、F．求证：$\frac{PD}{AD}+\frac{PE}{BE}+\frac{PF}{CF}=1$．

19．两圆相交于 A、B 两点．CD 是两圆的一条外公切线．求证：$\frac{AC}{BC}=\frac{AD}{BD}$．



（第19题图）



（第20题图）

20．互相外切的三圆 O_1、O_2、O_3，切点分别为 A、B、C，连结 AB、AC 并延长交 $\odot O_3$ 于 P、Q．求证：PQ 为 $\odot O_3$ 的直径．

练习题解答概要和提示

练 习 题 一

1．延长AE到F，使$EF=EA$，证明$\triangle ACD\cong\triangle AFD$．

2．证明三角形两边的和大于第三边上中线的二倍．

3．在BA延长线上取C点关于AP的对称点C'，连结PC'，证明$PB+PC'>BC'$．

4．作AB上高CD，证明$\angle DCE=\angle MCE$．

5．作BC上高AD，用勾股定理证明．

6．平移对边间线段，使一端点落在矩形顶点上，然后用三角形边角不等关系来证．

7．过C点作$CM\parallel EA$交AB于M，证明CM为BF的垂直平分线．

8．连结AD，应用直角三角形的比例中项定理去证明．

9．设三角形为ABC，垂心为H，H关于AC的对称点为F，证明$\angle AFB=\angle ACB$．

10．连结PA、MA，证明$\angle BPA=\angle TPA=\angle BAP$．

11．连结PB、PQ，证明$QH\parallel BP$，或连结AQ、BQ，证明$\angle HQA+\angle HAQ=90^\circ$．

12．作公切线．

13．作公切线PQ交AD于Q，证明$\angle A+\angle D=\angle BPC$．

14．作公共弦AB，连结BC、BD，证明$\angle CBD+\angle P$

$=180^\circ$.

15. 连结 DE、DF，从 $\triangle BDF \backsim \triangle ABC$，得 $\frac{BC}{AC}=\frac{BF}{DF}$；从 $\triangle ABC \backsim \triangle CDF$，得 $\frac{BC}{AC}=\frac{DF}{CF}$；从 $\triangle ABC \backsim \triangle ADE$，得 $\frac{BC}{AC}=\frac{DE}{AE}=\frac{CF}{AE}$. 三式相乘得 $\frac{BC^3}{AC^3}=\frac{BF}{AE}$.

16. 延长 BD 交 AC 于 E.

17. 作 $FH \perp BC$ 于 H，证明 $AE=AF=FH$ 及 $\triangle AEG \cong \triangle FHC$.

18. 延长 FH 与 AC 的延长线相交于 G，作 $CK \parallel AB$ 交 FG 于 K. 证明 $\triangle BFM \cong \triangle CKM$.

19. 延长 AF 与 BC 的延长线交于 E. 证明 $\triangle ADF \cong \triangle ECF$ 及 $\triangle BAE$ 为等腰三角形. 然后证明 BF、AF 为角平分线.

20. 构成一个等腰三角形，使 $\angle B$ 等于它的顶角的外角. 有多种证法.

21. 连结 MF，$MF \parallel AE$，$\therefore BG=GM$，$MF=\frac{1}{2}AE=2GE$，$\therefore AE=2MF=4GE=\frac{4}{3}AG$，$\therefore AG:MF=3:2$，又 $\triangle MFH \backsim \triangle AGH$，$\therefore GH:HM=AG:MF=3:2$，$\therefore BG:GH:HM=5:3:2$.

22. 连结 PM、QM，从证明 $\triangle PDM \cong \triangle QEM$ 着手.

23. 延长 FE 与 CB 的延长线交于 M，则 $\triangle AEF \cong \triangle BEM$，$\therefore BM=AF$. 又 $\triangle AFG \backsim \triangle CMG$，$\frac{CG}{AG}=\frac{CM}{AF}=\frac{CM}{BM}=\frac{4}{1}$，$\therefore \frac{AC}{AG}=\frac{5}{1}$.

24. 连结 BD，$\triangle AEH \backsim \triangle ABD$，$EH \parallel BD$，且 $EH=$

$\frac{2}{3}BD$, 同理 $\triangle CGF \backsim \triangle CDB$, $GF \parallel BD$, 且 $GF=\frac{2}{3}BD$,

$\therefore$ $EH \perp\!\!\!= GF$, 四边形 $EFGH$ 为平行四边形.

$$\frac{S_{\triangle ABH}}{S_{\triangle ABD}}=\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{4}{9},\quad \frac{S_{\triangle CGF}}{S_{\triangle CDB}}=\frac{4}{9}.$$

$$\therefore\quad S_{\triangle ABH}+S_{\triangle CGF}=\frac{4}{9}S_{\square ABCD}.$$

同理
$$S_{\triangle BEF}+S_{\triangle DHG}=\frac{1}{9}S_{\square ABCD},$$

$$\therefore\quad S_{\square EFGH}=\left(1-\frac{4}{9}-\frac{1}{9}\right)S_{\square ABCD}=\frac{4}{9}S_{\square ABCD}.$$

25. 连结 PG、GQ, 连结 AP、AG、AQ 并延长交 BC 于 M、N、L, 则 $\frac{AP}{PM}=\frac{AG}{GN}=\frac{AQ}{QL}=\frac{2}{1}$, $\therefore$ $PG \parallel BC$, $GQ \parallel BC$.

$\therefore$ P、G、Q 共线. 又 $\frac{GP}{MN}=\frac{AG}{AN}=\frac{2}{3}$, $\frac{GQ}{NL}=\frac{2}{3}$,

$$\therefore\quad \frac{GP}{GQ}=\frac{MN}{NL}=\frac{BN-BM}{CN-CL}=\frac{BC-BD}{BC-CD}=\frac{CD}{BD}.$$

26. 连结 BE、AC, 证明 $\triangle ABF \backsim \triangle ABE$.

27. 过 B、D、H、F 作辅助圆, 证明 $\angle HFD=\angle HBD$ 及 $\angle ABE=\angle HDF$. 过 A, B, D, E 作辅助圆, 证明 $\angle EBD=\angle EAD$ 及 $\angle ABE=\angle EDA$, 然后证明 $\triangle ADE \backsim \triangle DFH$.

28. 连结 BI, CI, 证明 $\triangle BEI \backsim \triangle CFI$.

29. 作公切线 PT, 连结 PB, 证明 $\triangle APD \backsim \triangle CPB$.

30. 作两圆公切线 AB, 证明以连心线为直径的圆与 AB 相切, 即证明连心线中点到 AB 的距离等于连心线的一半.

31. 连结 CA、CB, 证明 CA、CB 是 $\triangle PCD$ 的顶角的内、外角平分线. 再用三角形内、外角平分线性质定理去证明.

32. 过 I 作 GC 延长线的垂线 IO, 则 $\triangle ICO \cong \triangle ABC$, 在

Rt$\triangle IGO$ 中，用勾股定理证明．

33．证法一：分别作 $\triangle ABF$、$\triangle ACE$ 的高 AM、AN，先证明 $\triangle ABF \cong \triangle ACE$，得 $BF=CE$．再根据面积公式证明 $AM=AN$，证明 $\triangle AMO \cong \triangle ANO$，得 $\angle AOF=\angle AOE$．证法二：证明 $\triangle ABF \cong \triangle ACE$，得 $\angle AFO=\angle ACO$ 和 $\angle AEO=\angle ABO$．$\therefore$ A、O、C、F 及 A、O、B、E 分别四点共圆，$\therefore$ $\angle AOF=\angle ACF=60^\circ$；$\angle AOE=\angle ABE=60^\circ$．

34．连结 DM、MF、FN、ND，证明四边形 $DMFN$ 为菱形．

35．(1) 连结 OB，作 $OM \perp BC$，则 $OM=\frac{1}{2}AH=\frac{1}{2}AO=\frac{1}{2}BO$，$\therefore$ Rt$\triangle OBM$ 中，$\angle BOM=60^\circ$，$\therefore$ $\angle BAC=\angle BOM=60^\circ$．

(2) 作 $OM \perp BC$，连结 BO，则 $OM=\frac{1}{2}AH=\frac{1}{2}BC=BM$；$\therefore$ Rt$\triangle OBM$ 中，$\angle BOM=45^\circ$，$\therefore$ $\angle BAC=\angle BOM=45^\circ$．

36．连结 OD、BD，$\angle B=\frac{1}{2}\angle AOD$，$\angle BDC=\angle AOD-\angle B=\angle AOD-\angle B=\frac{1}{2}\angle AOD$，$\therefore$ $\angle B=\angle BDC$，$\therefore$ $CB=CD$．

37．连结 OB、OC、OM、ON，$\because$ O、A、C、N 四点共圆，$\therefore$ $\angle ACO=\angle ANO$．又 O、A、M、B 四点共圆，$\therefore$ $\angle ABO=\angle AMO$，而 $\angle ANO=\angle AMO$，$\therefore$ $\triangle OBC$ 是等腰三角形．$\therefore$ $AB=AC$．

38．连结 ED、AC、DF、BC，$\because$ C、D、B、F 四点共圆，$\therefore$ $\angle FCB=\angle FDB$，$\therefore$ C、D，A、E 四点共圆，$\angle CAD=\angle CED$，而 $\angle FCB=\angle CAD$，$\therefore$ $\angle FDB=\angle CED$，又

$\angle FBD = 90^\circ = \angle ECD$, $\therefore$ $\triangle FDB \backsim \triangle ECD$,

$\therefore$ $\dfrac{BD}{CE} = \dfrac{BF}{CD} = \dfrac{DF}{ED}$; (1) 同理可证, $\triangle CDF \backsim \triangle AED$,

$\therefore$ $\dfrac{CF}{AD} = \dfrac{CD}{AE} = \dfrac{DF}{DE}$. (2) 由 (1)、(2) 得 $\dfrac{BD}{CE} = \dfrac{CF}{AD}$,

$\therefore$ $CE \cdot CF = AD \cdot BD$, 又 $\dfrac{BF}{CD} = \dfrac{CD}{AE}$, $\therefore$ $CD^2 = AE \cdot BF$.

39. 连结 O_1O_2、O_1A、O_2B, 作 $O_1D \perp O_2B$ 于 D, 交 TC 于 E, 则 $ET \parallel DO_2$, $\therefore$ $\dfrac{TE}{O_2D} = \dfrac{O_1T}{O_1O_2}$, 即

$$\frac{TC - O_1A}{O_2B - O_1A} = \frac{O_1T}{O_1T + O_2T}, \quad \frac{TC - \frac{1}{2}d_1}{\frac{1}{2}d_2 - \frac{1}{2}d_1} = \frac{\frac{1}{2}d_1}{\frac{1}{2}(d_1 + d_2)},$$

$$\frac{2TC - d_1}{d_2 - d_1} = \frac{d_1}{d_1 + d_2} = \frac{2TC}{2d_2} = \frac{TC}{d_2},$$

$$\therefore \quad d_1 d_2 = TC(d_1 + d_2), \quad \therefore \quad \frac{1}{TC} = \frac{1}{d_1} + \frac{1}{d_2}.$$

练 习 题 二

1. 在 DC 上取 $DE = BD$, 连结 AE, 则 $AB = AE = EC$.

2. 作 $CF \parallel BE$ 交 AQ 延长线于 F, 证明 $\triangle CQF$ 为等腰三角形.

3. 取 BC 的中点 R, 连结 RM、RN, 证明 $\triangle RMN$ 为等腰三角形, 再证 $\angle APQ = \angle MNR$, $\angle AQP = \angle NMR$.

4. 连结 BG、CE, $\triangle ABG \cong \triangle AEC$, $\therefore$ $BG = CE$, $MK \underline{\parallel} \frac{1}{2}BG$, $HN \underline{\parallel} \frac{1}{2}BG$, $\therefore$ $MK \underline{\parallel} HN$, $\therefore$ $MHNK$ 为菱形, 又 $BG \perp CE$, $\therefore$ $MHNK$ 为正方形.

5. 连结 TA 并延长交 CB 的延长线于 D, 连结 OT,

$OT /\!/ CD$, $\triangle OAT \cong \triangle BAD$, $AT=AD=AC$, $\angle OAT=\angle OTA=\angle D=\angle ACB$, $\therefore$ $\angle CAO=3\angle ACB$.

6．证法一：连结 BD，C、B、D、M 四点共圆，$\angle CMD=\angle ABD=\angle CEN$，$\therefore$ $\triangle CDM \backsim \triangle CNE$，

$\therefore$ $\dfrac{MD}{CD}=\dfrac{NE}{CN}$。

证法二：连结 BE，N、E、B、C 四点共圆，$\angle CNE=\angle ABE=\angle ADE=\angle CDM$，$\triangle CDM \backsim \triangle CNE$.

7．连结 BD，证 $BD /\!/ AC$，$\triangle BDF \backsim \triangle CAF$，

$$\frac{BF}{CF}=\frac{BD}{AC}=\frac{\frac{1}{2}BC}{AC}=\frac{1}{2},\ BF=\frac{1}{3}BC.$$

8．连结 DE、EF，$\angle TDB=\angle DEF=\angle EFC-\angle EDC=\angle C-\angle B$.

9．连结 PO、OB、OC，证明 B、A、P、O 四点共圆及 P、C、O、A 四点共圆。

10．作 $BF /\!/ DE$ 交 AC 于 F，$AD^2=DB\cdot DC$，

$$\frac{AD^2}{BD^2}=\frac{CD}{BD}=\frac{CE}{EF}=\frac{CE}{AE}.$$

11．连结 OB、OP、AM，证明 A、O、M、P 四点共圆，$\angle AMO=\angle APO$，又 O、A、P、B 四点共圆，$\therefore$ $\angle APO=\angle ABO=\angle BAO$，$\therefore$ $\angle AMO=\angle BAO$，$\therefore$ $\triangle AON \backsim \triangle AMO$.

12．过 P 作 $MN /\!/ BC$ 交 AB、AC 于 M、N，$\because$ $BM+PM>PB$，$CN+PN>PC$，$AN>PA$，相加后即证得.

13．连结 OD、OB，$\angle AGE=\angle CED-\angle CAG=\frac{1}{2}(180°

$-C)-\frac{1}{2}A=90^\circ-\frac{1}{2}C-\frac{1}{2}A=\frac{1}{2}B=\angle OBD$, $\therefore$ O、B、G、D 四点共圆，$\therefore$ $\angle BGA=\angle BDO=90^\circ$.

14. 设 EF 与 AB 相交于 M，连结 OM、OE、OF、OC、OD，易证 $OC=OD$，$\mathrm{Rt}\triangle OEC\cong\mathrm{Rt}\triangle OFD$，$\therefore$ $\angle EOC=\angle FOD$，$\therefore$ $\angle COD=\angle EOF$，$\angle OCM=\angle OEM$，$\therefore$ 四边形 $OECM$ 内接于圆. $\therefore$ $\angle OMC=\angle OEC=90^\circ$，$\therefore$ $OM\perp AB$，$AM=MB$

15. 过 C、E、B 三点作圆交 AB 于 F，$\therefore$ $AE\cdot AC=AF\cdot AB$，且 $\angle AFE=\angle ACB=90^\circ=\angle ADB$，$\therefore$ A、D、E、F 四点共圆，$\therefore$ $BE\cdot BD=BF\cdot AB$，$\therefore$ $AE\cdot AC+BE\cdot BD=AB(AF+BF)=AB^2$.

16. 作 AE，使 $\angle BAE=\angle DAC$，作 BE，使 $\angle ABE=\angle DCA$，并且 AE 和 BE 相交于 E，连结 DE，从证明 $\triangle ABE\backsim\triangle ACD$ 及 $\triangle ABC\backsim\triangle ADE$ 着手.

17. 过 O 作 BC 的平行线交 AB、AC 于 E、F，则

$$\frac{AF}{AC}=\frac{EF}{BC}=\frac{AO}{AL},\quad \frac{BO}{BM}=\frac{BC-OF}{BC},\quad \frac{CO}{CN}=\frac{BC-OE}{BC},$$

$$\therefore\quad \frac{AO}{AL}+\frac{BO}{BM}+\frac{CO}{CN}=\frac{2BC}{BC}=2.$$

18. 证法一：过 P 作 $ST\parallel BC$ 分别交 AB、AC 于 S、T，

$$\frac{PE}{BE}=\frac{PT}{BC},\quad \frac{PF}{CF}=\frac{PS}{BC},$$

$$\frac{PD}{AD}=\frac{AD-AP}{AD}=1-\frac{AP}{AD}=1-\frac{AT}{AC}=1-\frac{ST}{BC},$$

$$\therefore\quad \frac{PE}{BE}+\frac{PF}{CF}+\frac{PD}{AD}=\frac{PT}{BC}+\frac{PS}{BC}+1-\frac{ST}{BC}=1.$$

证法二：作 $PM\perp BC$ 于 M，作 $AN\perp BC$ 于 N，

$\frac{PD}{AD}=\frac{PM}{AN}=\frac{S_{\triangle CPB}}{S_{\triangle ABC}}$，同理 $\frac{PE}{BE}=\frac{S_{\triangle CPA}}{S_{\triangle ABC}}$，$\frac{PF}{CF}=\frac{S_{\triangle APB}}{S_{\triangle ABC}}$，

$\frac{PD}{AD}+\frac{PE}{BE}+\frac{PF}{CF}=\frac{S_{\triangle CPB}+S_{\triangle CPA}+S_{\triangle APB}}{S_{\triangle ABC}}=\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle ABC}}=1$.

19. 连结 BA 并延长交 CD 于 M. 证明 $\triangle CMA\backsim\triangle CBM$ 及 $\triangle DMA\backsim\triangle DBM$，得 $\frac{AC}{BC}=\frac{CM}{MB}$，及 $\frac{AD}{BD}=\frac{DM}{MB}$. 又由 $MC^2=MA\cdot MB=MD^2$，$\therefore$ $MC=MD$，

$\therefore$ $\frac{AC}{BC}=\frac{AD}{BD}$.

20. 连结 O_1O_2、O_1O_3、O_2O_3，则 O_1O_2、O_1O_3、O_2O_3 必过 A、B、C. $\therefore$ $\angle O_1AB=\angle O_1BA=\angle PBO_3=\angle BPO_3$，$\therefore$ $AO_1\parallel PO_3$，同理，$AO_1\parallel QO_3$，$\therefore$ P、O_3、Q 三点共线，$\therefore$ PQ 为 $\odot O_3$ 的直径.