

(1)

## Суперсимметрия.

1. Что такое SUSY.
2. История открытия SUSY.
3. Улучшение УФ поведение в SUSY теориях.
4. Проблема калибровочной иерархии. Квадратичные поправки к массе хиггсовского бозона.
5. Косвенное экспериментальное доказательства
  - a) Константа свидетельствует о симметрии
  - б) Радиус протона
6. Проблема реализмического нарушения SUSY.

## Глава I. Некоторые сведения о спинорах и $\gamma$ -матрицах

Спинатура (+---)

$$\gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = 2\gamma^{\mu\nu} \cdot \mathbf{1}_4 \quad (\gamma^\mu)^+ = \gamma^0 \gamma^\mu \gamma^0$$

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ -\sigma_i & 0 \end{pmatrix}$$

$$\gamma^{\mu\nu} = \frac{1}{2} (\gamma^\mu \gamma^\nu - \gamma^\nu \gamma^\mu)$$

$$\gamma^{ij} = -i \epsilon_{ijk} \begin{pmatrix} \sigma_k & 0 \\ 0 & \sigma_k \end{pmatrix} \quad \gamma^{oi} = \begin{pmatrix} -\sigma_i & 0 \\ 0 & \sigma_i \end{pmatrix}$$

(2)

Матрица  $\gamma_5$  определяется как

$$\gamma_5 \equiv i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$(\gamma_5)^2 = 1; \quad \{\gamma_5, \gamma^\mu\} = 0$$

$$\text{tr}(\gamma^\mu \gamma^0 \gamma^1 \gamma^2 \gamma^3 \gamma_5) = -4i \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}; \quad \epsilon^{0123} = +1.$$

Матрица зарядового сопротивления

$$C \equiv i\gamma^0\gamma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$C^{-1} = C^T = -C; \quad C\gamma^\mu C^{-1} = -\gamma^{\mu T}$$

Базис 6 пространства матриц  $4 \times 4$  можно  
составить из 6 баз

$$1; \quad \gamma_5; \quad \gamma^\mu; \quad \gamma^\mu \gamma_5; \quad \gamma^{\mu\nu}$$

$$1 + 1 + 4 + 4 + 6 = 16$$

Условие полноты — м.и. множество фурза:

$$1 = \sum_n |n\rangle \langle n|$$

$$\delta_a^b \delta_c^d + (\gamma_5)_a^b (\gamma_5)_c^d + (\gamma^\mu)_a^b (\gamma_\mu)_c^d - (\gamma^\mu \gamma_5)_a^b (\gamma_\mu \gamma_5)_c^d$$

$$- \frac{1}{2} (\gamma^{\mu\nu})_a^b (\gamma_{\mu\nu})_c^d = 4 \delta_a^d \delta_c^b$$

Проверяется связь с  $\delta_d^c$ ;  $(\gamma_5)_d^c$  и т.д. (3)  
при фиксированных  $a$  и  $b$ .

Дираковский спинор - 4-х компонентной строкой

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix} \quad \text{т.е. если} \quad A_\mu \rightarrow \exp(\alpha)_\mu^\nu A_\nu, \text{ то}$$

$$\psi \rightarrow \exp\left(\frac{1}{4}\gamma^{\mu\nu}\alpha_{\mu\nu}\right)\psi$$

Компоненты  $\phi_a$  у дираковского спинора комплексное - т.е. будет 8 Re степеней свободы.

Они антикоммутируют,  $\phi_a\phi_b + \phi_b\phi_a = 0$   
(в классической теории поле)

Дираковский сопряжённый спинор  $\bar{\psi} = \psi^+ \gamma^0$ .

Дираковский спинор - аналог комплексного скалярного поля, а  $\bar{\psi}$  - комплексно сопряжённого скалярного поля.

Что является аналогом Re скалярного поля?

Майорановский спинор

$\bar{\psi} = \psi^T C$  - не противоречит 3-му кореню - преобразованию.

$$\psi^T C = (\psi_1 \ \psi_2 \ \psi_3 \ \psi_4) \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = (\psi_2, -\psi_1, -\psi_4, \psi_3)$$

(4)

$$\psi^+ \gamma^0 = (\psi_1^*, \psi_2^*, \psi_3^*, \psi_4^*) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = (\psi_3^*, \psi_4^*, \psi_1^*, \psi_2^*)$$

 $\Rightarrow$ 

$\psi_2 = \psi_3^*$ ;  $\psi_1 = -\psi_4^*$ , т.е. маинорановский спинор в

этом виде записывается как

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_2^* \\ -\psi_1^* \end{pmatrix}$$

Очевидно, что он имеет только 4 Re степеней свободы. В частности, можно выбрать такое представление для  $\gamma$ -матрицы, в котором конечный маинорановский спинор  $\in \text{Re}$ .

### Свойства маинорановых спиноров

$$\bar{\psi} \chi = \psi^T C \chi = (\psi^T C \chi)^T = -\chi^T C^T \psi = \chi^T C \psi = \bar{\chi} \psi$$

$$\bar{\psi} \gamma_5 \chi = -\chi^T (C \gamma_5)^T \psi = \bar{\chi} \gamma_5 \psi$$

$$\bar{\psi} \gamma^\mu \chi = -\chi^T (C \gamma^\mu)^T \psi = -\chi^T \gamma^{\mu T} C^{-1} \psi = \chi^T C C \gamma^{\mu T} C^{-1} \psi = -\bar{\chi} \gamma^\mu \psi$$

$$\bar{\psi} \gamma^\mu \gamma_5 \chi = \bar{\chi} \gamma^\mu \gamma_5 \psi$$

$$\bar{\psi} \gamma^\mu \omega \chi = -\bar{\chi} \gamma^\mu \omega \psi$$

Если  $\psi = \chi$  - максимальное значение спиноров, то (5)

$\bar{\psi} \gamma^\mu \psi = 0$ ;  $\bar{\psi} \gamma^{\mu\nu} \psi = 0$  и центральные только величины  $\bar{\psi} \psi$ ;  $\bar{\psi} \gamma_5 \psi$ ;  $\bar{\psi} \gamma^\mu \gamma_5 \psi$

$$1 + 1 + 4 = 6 = C_4^2$$

$$\psi_a \psi_b = -\psi_b \psi_a$$

$\psi_a$  - 4 компоненты - есть только  $\psi$

$\psi_a \psi_b \psi_c$  -  $C_4^3 = 4$  избавленных комбинации -  $\psi (\bar{\psi} \psi)$

$\psi_a \psi_b \psi_c \psi_d$  -  $C_4^4 = 1$  - есть только комбинация  $(\bar{\psi} \psi)^2$ .

Любую базисную комбинацию можно образовать через базисное с помощью действия Фуриа:

$$\delta_a^B \delta_c^d + (\gamma_5)_a^B (\gamma_5)_c^d + (\gamma^\mu)_a^B (\gamma^\mu)_c^d - (\gamma^\mu \gamma_5)_a^B (\gamma_\mu \gamma_5)_c^d$$

$$- \frac{1}{2} (\gamma^{\mu\nu})_a^B (\gamma_{\mu\nu})_c^d = 4 \delta_a^d \delta_c^B \quad | \psi_d \bar{\psi} \cdot \frac{1}{4}$$

$$\psi_a \bar{\psi}^B = -\frac{1}{4} \delta_a^B \bar{\psi} \psi - \frac{1}{4} (\gamma_5)_a^B \bar{\psi} \gamma_5 \psi - \frac{1}{4} (\gamma^\mu)_a^B \bar{\psi} \gamma_\mu \psi$$

$$+ \frac{1}{4} (\gamma^\mu \gamma_5)_a^B \bar{\psi} \gamma^\mu \gamma_5 \psi + \frac{1}{8} (\gamma^{\mu\nu})_a^B \bar{\psi} \gamma_{\mu\nu} \psi$$

0

$$(\bar{\psi} \chi)^+ = (\psi^+ \gamma^0 \chi)^+ = \chi^+ \gamma^0 \psi^+ = \chi^+ \gamma^0 \psi = \bar{\chi} \psi \quad | = \bar{\chi} \chi \quad (6)$$

$$(\bar{\psi} \gamma_5 \chi)^+ = (\psi^+ \gamma^0 \gamma_5 \chi)^+ = \chi^+ \gamma_5 \gamma^0 \psi^+ = -\bar{\chi} \gamma_5 \psi \quad | = -\bar{\psi} \gamma_5 \chi$$

$$(\bar{\psi} \gamma^\mu \chi)^+ = (\psi^+ \gamma^0 \gamma^\mu \chi)^+ = \chi^+ \gamma^\mu \gamma^0 \psi^+ = \bar{\chi} \gamma^\mu \psi \quad | = -\bar{\psi} \gamma^\mu \chi$$

$$(\bar{\psi} \gamma^\mu \gamma_5 \chi)^+ = \bar{\chi} \gamma^\mu \gamma_5 \psi \quad | = \bar{\psi} \gamma^\mu \gamma_5 \chi$$

$$(\bar{\psi} \gamma^\mu \gamma^\nu \chi)^+ = -\bar{\chi} \gamma^\mu \gamma^\nu \psi \quad | = \bar{\psi} \gamma^\mu \gamma^\nu \chi$$

произвольные спиноры

майорацовые  
спиноры

$\Rightarrow$  если  $\psi$  и  $\chi$  - майорацовые, то

$\bar{\chi} \chi; \bar{\psi} \gamma^\mu \gamma_5 \chi; \bar{\psi} \gamma^\mu \chi$  - Re величины

$\bar{\psi} \gamma_5 \chi; \bar{\psi} \gamma^\mu \chi$  - чисто мнимые.

Заметим, что

$$[i\bar{\psi} \gamma^\mu \partial_\mu \psi]^+ = -i \partial_\mu \bar{\psi} \gamma^\mu \psi \stackrel{\text{интегрирование по часм}}{\Rightarrow} i\bar{\psi} \gamma^\mu \partial_\mu \psi$$

- отсюда видно, что не нужно менять знак при комплексном conjugации,  $(\psi_a \psi_b)^* = \psi_b^* \psi_a^*$ .

## Вейлевские (шарльоне) спиноры

(7)

- CB матрицей  $\gamma_5$ . Поскольку  $(\gamma_5)^2 = 1$ , то если

$$\gamma_5 \psi = \lambda \psi \quad \text{и} \Rightarrow \lambda^2 = 1$$

Поскольку  $\lambda = \pm 1$ .

$\lambda = +1$  - правый спинор  $\psi_R$

$\lambda = -1$  - левый спинор  $\psi_L$

Очевидно, что m.k. в наших обозначениях

$$\gamma_5 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{то}$$

$$\psi_R = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}(1+\gamma_5)\psi$$

$$\psi_L = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}(1-\gamma_5)\psi$$

- очевидно  $\exists$  взаимооднозначное соответствие между левыми (правыми) спинорами и майтраворами:

$$\begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_2^* \\ \psi_2 \\ -\psi_1^* \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \psi_L \longrightarrow \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_2^* \\ -\psi_1^* \end{pmatrix} = \psi_M$$

$$\psi_L = \frac{1}{2}(1-\gamma_5)\psi_M$$

Запишем множество Фуруса для бесконечных спиноров:

(8)

$$\psi_a \bar{\psi}^b = -\frac{1}{4} \delta_a^b \bar{\psi} \psi - \frac{1}{4} (\gamma_5)_a^b \bar{\psi} \gamma_5 \psi + \frac{1}{4} (\gamma^M \gamma_5)_a^b \bar{\psi} \gamma_M \gamma_5 \psi$$

Умножим это равенство слева и справа на  $(1+\gamma_5)$ :

$$(1+\gamma_5) \psi_a \cdot \bar{\psi} (1+\gamma_5)^b = -\frac{1}{2} (1+\gamma_5)_a^b \bar{\psi} (1+\gamma_5) \psi$$

Аналогичным образом получаем, что

$$(1-\gamma_5) \psi_a \cdot \bar{\psi} (1-\gamma_5)^b = -\frac{1}{2} (1-\gamma_5)_a^b \bar{\psi} (1-\gamma_5) \psi$$

## Глава II. Алгебра SUSY и её представления.

### §1. Алгебра SUSY.

-  $\mathbb{Z}_2$  урадужированное расширение алгебры Планкаре

$$P_\mu = i \partial_\mu ; \quad M_{\mu\nu} = \chi_\mu P_\nu - \chi_\nu P_\mu$$

$$\left\{ \begin{array}{l} [P_\mu, P_\nu] = 0 \\ [P_\mu, M_{\alpha\beta}] = i(\gamma_{\mu\alpha} P_\beta - \gamma_{\mu\beta} P_\alpha) \\ [M_{\mu\nu}, M_{\alpha\beta}] = i(\gamma_{\mu\alpha} M_{\nu\beta} - \gamma_{\nu\beta} M_{\mu\alpha} + \gamma_{\mu\beta} M_{\alpha\nu} - \gamma_{\nu\alpha} M_{\beta\mu}) \end{array} \right.$$

- алгебра  
Планкаре

Добавим к генераторам  $P_\mu$ , для каждого из  $N$  штук ⑨  
майорановских спиноров  $Q_i$ ,  $i=1, N$

то тогда в простейшем случае

$$[Q_{ii}, P_\mu] = 0$$

$$[Q_{ia}, M_{\mu\nu}] = \frac{i}{2} (\gamma_{\mu\nu} Q_{ia})$$

$$\{Q_{ia}, Q_{jb}\} = -2\delta_{ij} (\gamma^{\mu} C)_{ab} P_\mu$$

- такие КС требуются, чтобы удовлетворились  
 $Z_2$ -изделированием свойствами любви.

Заметим, что матрица  $(\gamma^\mu C)$  симметрична, т.к.

$$C | C^\top \gamma^\mu C = -\gamma^{\mu T}$$

$$\gamma^\mu C = -C \gamma^{\mu T} = C^\top \gamma^{\mu T} = (\gamma^\mu C)^\top$$

Если  $N=1$ , то суперсимметрия называется нерасширенной, а если  $N>1$  - расширенной.

Оператор  $P_\mu^2$  коммутирует со всеми генераторами алгебры SUSY - т.е. оператор Казимира.

Его есть  $m^2 \Rightarrow$  представление алгебры SUSY делится на  
 а) безмассовое с  $m^2=0$   
 б) массивное с  $m^2 \neq 0$ .  
 $(>0)$

## §2. Безмассовое представление алгебр SUSY.

(10)

Пусть  $P_\mu^2 = 0$ . Тогда можно воспользоваться 60, б  
которой  $P^\mu = (E, 0, 0, E)$

$$(P_\mu^2 = P_0^2 - \vec{P}^2 = E^2 - E^2 = 0)$$

Это означает, что вектор импульса направлен  
по оси z. В группе браузущий эту CO сохра-  
няет только браузущее вокруг 3-ей оси, т.е.  
состояние характеризуется спиральностью

$$\frac{1}{E}(\vec{P}\vec{J}) = \frac{1}{E} \cdot E M_{12} = M_{12}, \text{ m.k.}$$

$$J_i = \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} M_{jk} \quad \Rightarrow \quad J_3 = M_{12}$$

Рассмотрим состояние с некоторой спиральностью  
 $\lambda$  (которое и.д. либо чисто, либо полужесткое):

$$M_{12}|E, \lambda\rangle = \lambda|E, \lambda\rangle$$

Рассмотрим состояние  $Q_{ia}|E, \lambda\rangle$  и найдем  
их спиральность:

$$M_{12}Q_{ia}|E, \lambda\rangle = [M_{12}, Q_{ia}]|E, \lambda\rangle + Q_{ia}M_{12}|E, \lambda\rangle =$$

$$= \lambda Q_{ia}|E, \lambda\rangle - \frac{i}{2} (\gamma_{12} Q_i)_a |E, \lambda\rangle$$

(11)

При этом

$$\gamma_{12} = -i \begin{pmatrix} \epsilon_3 & 0 \\ 0 & \epsilon_3 \end{pmatrix} = -i \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \mathcal{U}_{12} \begin{pmatrix} Q_{i1} \\ Q_{i2} \\ Q_{i3} \\ Q_{i4} \end{pmatrix} |E, \lambda\rangle = \begin{pmatrix} \lambda - \frac{1}{2} & & & \\ & \lambda + \frac{1}{2} & 0 & \\ & & \lambda - \frac{1}{2} & \\ 0 & & & \lambda + \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q_{i1} \\ Q_{i2} \\ Q_{i3} \\ Q_{i4} \end{pmatrix} |E, \lambda\rangle$$

Постоянное действие операторов  $Q_{i1}$  и  $Q_{i3}$   $\downarrow \lambda$   
на  $\frac{1}{2}$ , а действие операторов  $Q_{i2}$  и  $Q_{i4}$   $\uparrow \lambda$  на  $\frac{1}{2}$ .

Кроме того, где безразмеровых состояний

$$\{Q_{ia}, Q_{jb}\} = -2\delta_{ij} \cdot E (\gamma^0 C - \gamma^3 C)_{ab} = 4\delta_{ij} E \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Действительно,

$$(\gamma^0 - \gamma^3)C = \left[ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & \epsilon_3 \\ -\epsilon_3 & 0 \end{pmatrix} \right] C = \left( \begin{array}{c|cc} 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \cdot 2C =$$

$$= 2 \left( \begin{array}{c|cc} 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \left( \begin{array}{c|cc} 0 & -1 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \hline & 0 & -1 & 0 \end{array} \right) = -2 \left( \begin{array}{cccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) - \text{верно}$$

$\Rightarrow$  единственное квазивакуумное антикоммутирующее

$$\{Q_{i2}, Q_{j3}\} = 4\delta_{ij} E$$

При этом  $-\hat{Q}_1^+ = \hat{Q}_4$  в силу антикоммутации. (12)  
Поэтому

$$0 = \langle E, \lambda | \{\hat{Q}_1^+, Q_4\} | E, \lambda \rangle = \langle E, \lambda | \hat{Q}_1^+ \hat{Q}_1^- | E, \lambda \rangle + \langle E, \lambda | \hat{Q}_1^- \hat{Q}_1^+ | E, \lambda \rangle \Rightarrow$$

$$\hat{Q}_{i1}^- | E, \lambda \rangle = 0 ; \quad \hat{Q}_{i4}^- | E, \lambda \rangle = 0$$

Положим теперь

$$q_i = \frac{1}{2\sqrt{E}} Q_{i3} \quad \downarrow \lambda \text{ на } \frac{1}{2}$$

$$q_i^+ = \frac{1}{2\sqrt{E}} Q_{i2} \quad \uparrow \lambda \text{ на } \frac{1}{2}$$

$$\{q_i, q_j^+\} = \delta_{ij} \quad \{q_i, q_j\} = 0 \quad \{q_i^+, q_j^+\} = 0$$

- получается алгебра Клиффорда.

Возбужденное состояние с максимальной спиральностью  $\lambda_0$ :  $|E, \lambda_0\rangle$ . Мога ошибка, что

$$q_i^+ |E, \lambda_0\rangle = 0 \quad \forall i$$

Ну и  $|E, \lambda_0\rangle$  - 1 состояние. Мога

$$q_i |E, \lambda_0\rangle = |E, \lambda_0 - \frac{1}{2}, i\rangle - N \text{ состояний} \\ \text{с } \lambda = \lambda_0 - \frac{1}{2}$$

$q_i q_j |E, \lambda_0\rangle = |E, \lambda_0 - 1; [ij]\rangle - C_N^2$  состояний (13)  
со спиральностью  
 $\lambda_0 - 1$   
и т.д.

Последнее состояние

$q_{i_1} q_{i_2} \dots q_{i_N} |E, \lambda_0\rangle = |E, \lambda_0 - N/2\rangle$  - 1 состояния

Действие наше одно \$q\_i\$ всегда даёт нам 0  
всех антикоммутирующих состояний.

Ну есть \$\lambda\_0\$ - у нас - единица. Тогда

$$n_B = \sum_{\text{четн. } k} C_N^k \quad n_\Phi = \sum_{\text{нечетн. } k} C_N^k$$

$$\Rightarrow n_B - n_\Phi = \sum_{k=0}^N (-1)^k C_N^k = (1-1)^N = 0$$

Поэтому \$n\_B = n\_\Phi\$ - теорема о равенстве числа  
дополнительных и фермионических степеней свободы.

$$n_B + n_\Phi = \sum_{k=0}^N C_N^k = (1+1)^N = 2^N$$

$$\text{Поэтому } n_B = n_\Phi = 2^{N-1}$$

Пример:

$$1) \quad N=1; \quad \lambda_0 = 1/2 \quad \text{CPT-конструкция.} \quad \text{модель B3}$$

$$\begin{array}{c|c|c} \lambda & 0 & 1/2 \\ \hline n & 1 & 1 \end{array} + \begin{array}{c|c|c} \lambda & -1/2 & 0 \\ \hline n & 1 & 1 \end{array} = \begin{array}{c|c|c} \lambda & -1/2 & 0 & 1/2 \\ \hline n & 1 & 2 & 1 \end{array}$$

- модель Бесса-Зумино

$$2) N=1 \quad \lambda_0 = 1$$

(14)

$$\frac{\lambda}{n} \left| \begin{array}{c|c|c} 1/2 & 1 \\ \hline 1 & 1 \end{array} \right. + \frac{\lambda}{n} \left| \begin{array}{c|c|c} -1 & -1/2 \\ \hline 1 & 1 \end{array} \right. = \frac{\lambda}{n} \left| \begin{array}{c|c|c|c|c} -1 & -1/2 & 0 & 1/2 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right. \\ N=1 \text{ SYM}$$

$$3) \quad N=4 \quad \lambda_0 = 1$$

$$\frac{\lambda}{n} \left| \begin{array}{c|c|c|c|c} -1 & -1/2 & 0 & 1/2 & 1 \\ \hline 1 & 4 & 6 & 4 & 1 \end{array} \right. \quad -N=4 \text{ SYM}$$

$$4) \quad N=8 \quad \lambda_0 = 2$$

$$\frac{\lambda}{n} \left| \begin{array}{c|c|c|c|c|c|c|c|c} -2 & -3/2 & -1 & -1/2 & 0 & 1/2 & 1 & 3/2 & 2 \\ \hline 1 & 8 & C_8^2 & C_8^3 & C_8^4 & C_8^3 & C_8^2 & 8 & 1 \end{array} \right.$$

$N=8$  SUGRA

$$C_8^2 = \frac{8 \cdot 7}{2} = 28$$

$$C_8^3 = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{3 \cdot 2} = 56$$

$$C_8^4 = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{4 \cdot 3 \cdot 2} = 7 \cdot 2 \cdot 5 = 70$$

При  $N > 8$  вспектре имеем поле симметрии с чётным спином  $5/2$ , для которого не удаётся построить взаимодействующую меру. Поэтому  $N=8$  является предельным значением.

### §3. Матричное представление алгебр АЛСУ.

(15)

$$P_\mu^2 = m^2 \Rightarrow \exists \text{ CO, в которой } P^M = (m, 0, 0, 0)$$

Она инвариантна относительно группы брауноній  $SO(3)$  и  $\Rightarrow$  состояния характеризуются значениями  $\vec{J}^2$  и  $J_3$ . При этом

$$\vec{J}^2 = J(J+1)$$

$$J_3 = -J, \dots, J-1, J$$

Также как и в безмассовом случае  $J_3 = M_{12}$ .

Позему

$$\hat{J}_3 \begin{pmatrix} Q_{i1} \\ Q_{i2} \\ Q_{i3} \\ Q_{i4} \end{pmatrix} |J, J_3\rangle = \begin{pmatrix} J_3 - \frac{1}{2} & & & 0 \\ & J_3 + \frac{1}{2} & & \\ 0 & & J_3 - \frac{1}{2} & \\ & & & J_3 + \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q_{i1} \\ Q_{i2} \\ Q_{i3} \\ Q_{i4} \end{pmatrix} |J, J_3\rangle$$

$\Rightarrow$  операторы  $Q_{i1}$  и  $Q_{i3}$   $\downarrow J_3$  на  $\frac{1}{2}$

$Q_{i2}$  и  $Q_{i4}$   $\uparrow J_3$  на  $\frac{1}{2}$

$\Rightarrow$  видя базисные переходы в фермионов и антиторон. Но теперь

$$\{Q_{ia}, Q_{jb}\} = -2\delta_{ij} m (\gamma^0 c)_{ab} = 2\delta_{ij} m \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow Q_{i1}$  и  $Q_{i4}$  уже действуют нетривиально.

Определение операторов

(16)

$$q_I = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2m}} Q_{I,3} & \text{если } I = \overline{1, N} \\ \frac{i}{\sqrt{2m}} Q_{(I-N),1} & \text{если } I = \overline{N+1, 2N} \end{cases}$$

$\downarrow J_3 \text{ ua } \frac{1}{2}$

$$q_I^+ = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2m}} Q_{I,2} & \text{если } I = \overline{1, N} \\ \frac{i}{\sqrt{2m}} Q_{(I-N),4} & \text{если } I = \overline{N+1, 2N} \end{cases}$$

$\uparrow J_3 \text{ ua } \frac{1}{2}$

$I = \overline{1, 2N}$

При этом  $\left(\frac{i}{\sqrt{2m}} Q_{(I-N),1}\right)^+ = -\frac{i}{\sqrt{2m}} Q_{(I-N),1}^+ =$

$$= + \frac{i}{\sqrt{2m}} Q_{(I-N),4} = q_I^+ \quad - \text{берет в сину маинор-} \\ \text{ибоеми } Q_i.$$

Операторы  $q_I$  и  $q_I^+$  удовлетворяют АРС алгебре

Клиффорда

$$\{q_I, q_J^+\} = \delta_{IJ}; \quad \{q_I, q_J\} = 0; \quad \{q_I^+, q_J^+\} = 0$$

Поэтому как и ранее

$$n_B = n_\phi = 2^{2N-1}$$

Однако теперь если  $\lambda_{\max} = \lambda_0$ , то  $\lambda_{\min} = -\lambda_0$

$$\lambda_{\min} = \lambda_0 - \frac{2N}{2} = \lambda_0 - N = -\lambda_0$$

$$\Rightarrow \lambda_0 = N/2 \quad \text{и} \quad J_3 = \overline{-N/2, N/2}$$

Какое будет число состояний с заданными  $J$ ? (17)

$J$	$N$	1	2	3	4
0	2	5 $6-1$	14 ←	42	
$1/2$	1	4	14 ←	48	
1		1	6	27	
$3/2$			1	8	
2					1

$$C_6^3 = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{3 \cdot 2} = 20$$

$$20 - 6 = 14$$

$$C_6^2 = \frac{6 \cdot 5}{2} = 15$$

$$15 - 1 = 14$$

### Глава III. Построение суперсимметрических теорий с использованием суперпространства

#### § 1. Понятие о суперпространстве.

Оператор импульса является оператором трансмущий:

$$\psi(x^\mu + a^\mu) = \exp(a^\mu \partial_\mu) \psi(x) = \exp(-ia^\mu P_\mu) \psi(x)$$

$$\text{где } P_\mu = i\partial_\mu.$$

Можно ли построить аналоичное представление для операторов суперзаряда?

(18)

Рассмотрим суперпространство, по определению, координатами которого являются  $(x^{\mu}, \theta_i), i=\overline{1, N}$

где  $\theta_i$  - набор из  $N$  маишровских антикоммутирующих спиноров.

Суперложение изображается функцией, заданной на суперпространстве,  $\phi = \phi(x, \theta_i)$ .

Попробуем построить операторы супер заряда  $Q_i$ .

Можно попробовать взять  $Q_i = i \frac{\partial}{\partial \theta_i}$

по аналогии с операторами  $P_{\mu}$ .

Но тогда не выполняется КС

$$\{Q_{ia}, Q_{jb}\} = -2\delta_{ij} (\gamma^{\mu} C)_{ab} P_{\mu}$$

Правильности выражение является

$$Q_{ia} = i \frac{\partial}{\partial \theta_i^a} - (\gamma^{\mu} \theta_i)_a \partial_{\mu}.$$

Действительно, тогда

$$\{Q_{ia}, Q_{jb}\} = \left\{ i \frac{\partial}{\partial \theta_i^a} - (\gamma^{\mu} \theta_i)_a \partial_{\mu}, i \frac{\partial}{\partial \theta_j^b} - (\gamma^{\nu} \theta_j)_b \partial_{\nu} \right\}$$

$$= -i(\gamma^{\nu})_b^d \left\{ \frac{\partial}{\partial \theta_i^a}, \theta_j d \right\} \partial_{\nu} - i(\gamma^{\mu})_a^c \left\{ \frac{\partial}{\partial \theta_j^b}, \theta_i c \right\} \partial_{\mu}$$

Для выполнения дифференцирования вспомним, что  $\theta_i$  - маишровские спиноры:

$$\bar{\theta} = \theta^T C \Rightarrow \bar{\theta} \bar{C}^{-1} = \theta^T \Rightarrow \theta = C \bar{\theta}^T \quad (19)$$

$$\Rightarrow \theta_a = C_{ab} \bar{\theta}^b$$

Поэтому  $\frac{\partial \theta_{ai}}{\partial \bar{\theta}_j} = C_{ab} \delta_{ij}$

Как следствие,

$$\{Q_{ia}, Q_{jb}\} = -i(\gamma^0)_b{}^d C_{da} \partial_\nu \delta_{ij} - i(\gamma^\mu)_a{}^c \delta_{ij} C_{cb} \partial_\mu = \\ = -2i \delta_{ij} (\gamma^\mu C)_{ab} \partial_\mu = -2 \delta_{ij} (\gamma^\mu C)_{ab} P_\mu$$

где яко пришли во внимание ранее доказанное симметрическое матрицы  $(\gamma^\mu C)$ :

$$(\gamma^\mu C)_{ab} = (\gamma^\mu C)_{ba}.$$

т.о. получилось правильное кс.

При этом

$$\left\{Q_{ia}, \frac{\partial}{\partial \bar{\theta}_j}\right\} = \left\{i \frac{\partial}{\partial \theta_i^a} - (\gamma^\mu \theta_i)_a \partial_\mu, \frac{\partial}{\partial \bar{\theta}_j}\right\} = \\ = -\delta_{ij} (\gamma^\mu C)_{ab} \partial_\mu \neq 0.$$

Поэтому общее производное по  $\theta$  не инвариантно при преобразованиях суперсимметрии.

Однако можно определить т.н. суперинвариантное производное, которое коммутирует с суперзарядом:

$D_{ia} = \frac{\partial}{\partial \bar{\theta}_i^a} - i(\gamma^\mu \theta_i)_a \partial_\mu$  - суперсимметрическая  
ковариантная  
празводная.  
Когда

$$\{Q_{ia}, D_j b\} = \left\{ i \frac{\partial}{\partial \bar{\theta}_i^a} - (\gamma^\mu \theta_i)_a \partial_\mu, \frac{\partial}{\partial \bar{\theta}_j^b} - i(\gamma^\nu \theta_j)_b \partial_\nu \right\} \\ = - \left\{ (\gamma^\mu \theta_i)_a \partial_\mu, \frac{\partial}{\partial \bar{\theta}_j^b} \right\} + \left\{ \frac{\partial}{\partial \bar{\theta}_i^a}, (\gamma^\nu \theta_j)_b \partial_\nu \right\} = 0.$$

При этом

$$\{D_{ia}, D_j b\} = -2i \left\{ \frac{\partial}{\partial \bar{\theta}_i^a}, (\gamma^\nu \theta_j)_b \partial_\nu \right\} = -2i \delta_{ij} (\gamma^\mu C)_{ab} \partial_\mu$$

- ковариантное произведение не антикоммутируют.

Ключико убедиться, что ковариантные производные удовлетворяют правилу лейбница

$$D_{ia}(AB) = D_{ia}A \cdot B + (-1)^{P_A} A D_{ia}B.$$

## §2. $N=1$ чиральное склерическое суперполе

$N=1$  - первичная суперсимметрия, когда индекс  $i$  может принимать только 1 значение.

Когда  $\theta_i \rightarrow \theta$  и

$$Q_i \rightarrow Q = i \frac{\partial}{\partial \bar{\theta}} - (\gamma^\mu \theta) \partial_\mu;$$

$$D_i \rightarrow D = \frac{\partial}{\partial \bar{\theta}} - i(\gamma^\mu \theta) \partial_\mu.$$

Ковариантные производные называются члена-  
ми связей, инвариантное относительно преобразо-  
ваний суперсимметрии, самой известной из которых  
является условие чiralности

$$(1-\gamma_5)D\phi = 0 \iff (1-\gamma_5)_a{}^b D_b \phi = 0$$

Действительно, при преобразованиях SUSY

$$\phi(x, \theta) \rightarrow \exp(-i\bar{\epsilon}Q)\phi$$

тогда если  $(1-\gamma_5)D\phi = 0$ , то

$$\begin{aligned} (1-\gamma_5)D\phi' &= (1-\gamma_5)D[\exp(-i\bar{\epsilon}Q)\phi] = \\ &= \exp(-i\bar{\epsilon}Q)(1-\gamma_5)D\phi = 0 \end{aligned}$$

где  $\bar{\epsilon} \neq \epsilon(x)$  — антикоммутирующий член пре-  
образований спинор — параметр SUSY преобразований.

Как решить условие чiralности?

Можно разложить  $\phi(x, \theta)$  по компонентам,

$$\phi(x, \theta) = \psi_1(x) + \bar{\theta}\psi_1(x) + (\bar{\theta}\theta)\psi_2(x) + (\bar{\theta}\gamma_5\theta)\psi_3(x)$$

$$+ \bar{\theta}\gamma^M\gamma_5\theta \cdot \psi_4(x) + \bar{\theta}\theta \cdot \bar{\theta}\psi_2(x) + (\bar{\theta}\theta)^2\psi_4(x)$$

подействовать ковариантной производной и  
приравнить результат к 0. Но можно пошевелить,  
как устроен результат более простыми способами:

(22)

Заметим, что

$$(1-\gamma_s) D_a \left[ (1+\gamma_s) \theta_\beta \right] = (1-\gamma_s)_a^c \frac{\partial}{\partial \theta^c} \cdot (1+\gamma_s)_\beta^d \theta_d =$$

$$= (1-\gamma_s)_a^c (1+\gamma_s)_\beta^d \cdot C_{dc} = [(1+\gamma_s) C (1-\gamma_s)]_{ba} = 0$$

т.к.  $C = i \gamma^0 \gamma^2$  - произведение чётного числа  
 $\gamma$ -матриц.

Кроме того, определим величину

$$y^M = x^M + \frac{i}{2} \bar{\theta} \gamma^M \gamma_5 \theta \quad (y^M)^* = x^M - \frac{i}{2} \bar{\theta} \gamma^M \gamma_5 \theta$$

тогда

$$(1-\gamma_s) D_a y^M = (1-\gamma_s)_a^\beta \left( \frac{\partial}{\partial \theta^\beta} - i (\gamma^\beta \theta)_\beta^d \partial_d \right) \left( x^M + \frac{i}{2} \bar{\theta} \gamma^M \gamma_5 \theta \right) = -i (1-\gamma_s) \gamma^M \theta_a + \frac{i}{2} (1-\gamma_s)_a^\beta \frac{\partial}{\partial \bar{\theta}^\beta}$$

$(\bar{\theta} \gamma^M \gamma_5 \theta)$

Пишем:

$$\frac{\partial}{\partial \bar{\theta}^\beta} (\bar{\theta} \gamma^M \gamma_5 \theta) = \gamma^M \gamma_5 \theta_\beta + \frac{\partial}{\partial \bar{\theta}^\beta} (\bar{\theta} \gamma^M \gamma_5 \theta) =$$

$$= \gamma^M \gamma_5 \theta_\beta + \frac{\partial}{\partial \bar{\theta}^\beta} (\bar{\theta} \gamma^M \gamma_5 \theta) = 2 \gamma^M \gamma_5 \theta_\beta$$

- б/c  $\gamma$  дифференцируется только как  $x^2$

$$(т.о. \frac{\partial}{\partial \bar{\theta}^\beta} (\bar{\theta} \gamma^M \theta) = 0)$$

Поэтому

$$(1-\gamma_s)D_a y^{\mu} = -i(1-\gamma_s)\gamma^{\mu}\theta_a + i(1-\gamma_s)\cancel{\gamma^{\mu}}\gamma_s\theta_a =$$

$$= -i(1-\gamma_s)\gamma^{\mu}\theta_a + i(1-\gamma_s)\gamma^{\mu}\theta_a = 0$$

$\Rightarrow (1-\gamma_s)D_a$  даёт 0 при действии на  $y^{\mu}$  и

$(1+\gamma_s)\theta$ . Как следствие,

$$(1-\gamma_s)D_a \phi(y^{\mu}, (1+\gamma_s)\theta) = 0.$$

Можно показать, что функция

$\phi(y^{\mu}, (1+\gamma_s)\theta)$  является наиболее общим решением уравнения нулевого квадрата.

При этом

$$\frac{1}{2}(1+\gamma_s)\theta = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \theta_3 \\ \theta_4 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{любая 3-я степень равна 0.}$$

Второе действие может быть сведено к  $\bar{\theta}(1+\gamma_s)\theta$ , т.к.

$$(1+\gamma_s)\theta_a \cdot \bar{\theta}(1+\gamma_s)^b = -\frac{1}{2}(1+\gamma_s)_a^b \cdot \bar{\theta}(1+\gamma_s)\theta.$$

Поэтому

$$\phi(y^{\mu}, (1+\gamma_s)\theta) = \psi(y^{\mu}) + \bar{\theta}(1+\gamma_s)\psi(y^{\mu}) + \frac{1}{2}\bar{\theta}(1+\gamma_s)\theta f(y^{\mu})$$

где  $\psi$  и  $f$  - комплексные скаляры, а  $\psi$  - майорановский спинор (удобно).

Помимо  $\varphi, \psi$  и  $f$  изображаются компонентами  
полями. 24

Наиболее закон преобразования компонентных полей под действием преобразований SUSY:

$$\delta\phi = -i\bar{\epsilon}Q\phi,$$

$$i\bar{\epsilon} Q = i\frac{\partial}{\partial\bar{\theta}} - \gamma^\mu\theta\frac{\partial}{\partial x^\mu}$$

Перейдём к координатам  $(\bar{\theta}, y^\mu)$ : ( $\theta' = \theta$ )

$$Q = i\frac{\partial\bar{\theta}'}{\partial\bar{\theta}}\frac{\partial}{\partial\bar{\theta}'} + i\frac{\partial y^\mu}{\partial\bar{\theta}}\frac{\partial}{\partial y^\mu} - (\gamma^\mu\theta)\cdot\left(\frac{\partial\bar{\theta}'}{\partial x^\mu}\frac{\partial}{\partial\bar{\theta}'}\right)$$

$$+ \frac{\partial y^\rho}{\partial x^\mu}\frac{\partial}{\partial y^\rho} = i\frac{\partial}{\partial\bar{\theta}} + i\cdot\frac{\partial}{\partial\bar{\theta}}(\bar{\theta}\gamma^\mu\gamma_5\theta)\frac{\partial}{\partial y^\mu} - \frac{i}{2} -$$

$$-(\gamma^\mu\theta)\frac{\partial}{\partial y^\mu} = i\frac{\partial}{\partial\bar{\theta}} - \gamma^\mu\gamma_5\theta\frac{\partial}{\partial y^\mu} - \gamma^\mu\theta\frac{\partial}{\partial y^\mu} =$$

$$= i\frac{\partial}{\partial\bar{\theta}} - \gamma^\mu(1+\gamma_5)\theta\frac{\partial}{\partial y^\mu}.$$

Поэтому

$$\delta\phi = -i\bar{\epsilon}\left(i\frac{\partial}{\partial\bar{\theta}} - \gamma^\mu(1+\gamma_5)\theta\frac{\partial}{\partial y^\mu}\right)(\varphi(y) + \bar{\theta}(1+\gamma_5)\psi(y))$$

$$+ \frac{1}{2}\bar{\theta}(1+\gamma_5)\theta f(y)) =$$

$$= \left(\bar{\epsilon}\frac{\partial}{\partial\bar{\theta}} + i\bar{\epsilon}\gamma^\mu(1+\gamma_5)\theta\frac{\partial}{\partial y^\mu}\right)(\varphi(y) + \bar{\theta}(1+\gamma_5)\psi(y))$$

$$+ \frac{1}{2}\bar{\theta}(1+\gamma_5)\theta f(y)) =$$

(25)

$$= \bar{\epsilon}(1+\gamma_5)\psi(y) + \bar{\epsilon}(1+\gamma_5)\theta f(y) + i\bar{\epsilon}\gamma^\mu(1+\gamma_5)\theta.$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial y^\mu} + i\bar{\epsilon}\gamma^\mu(1+\gamma_5)\theta \cdot \bar{\theta}(1+\gamma_5) \frac{\partial \psi}{\partial y^\mu} = (\text{m. фура})$$

$$= \bar{\epsilon}(1+\gamma_5)\psi(y) + \bar{\theta}(1+\gamma_5)\epsilon f(y) - i\bar{\theta}(1+\gamma_5)\gamma^\mu\epsilon \partial_\mu\psi(y)$$

$$- \frac{i}{2}\bar{\epsilon}\gamma^\mu(1+\gamma_5)\partial_\mu\psi(y) \cdot \bar{\theta}(1+\gamma_5)\theta =$$

$$= \delta\psi(y) + \bar{\theta}(1+\gamma_5)\delta\psi(y) + \frac{1}{2}\bar{\theta}(1+\gamma_5)\theta\delta f(y)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \delta\psi = \bar{\epsilon}(1+\gamma_5)\psi \\ \delta[(1+\gamma_5)\psi] = (1+\gamma_5)[\epsilon f - i\gamma^\mu\epsilon \partial_\mu\psi] \\ \delta f = -i\bar{\epsilon}\gamma^\mu(1+\gamma_5)\partial_\mu\psi \end{cases}$$

One more, чтобы убрать простота  $(1+\gamma_5)$  в законе преобразования спинорного суперпозиции, рассмотрим величину

$$\phi^* = \left( \psi(y) + \bar{\theta}(1+\gamma_5)\psi(y) + \frac{1}{2}\bar{\theta}(1+\gamma_5)\theta f(y) \right)^*$$

приимаше бо значение, то

$$(\gamma^\mu)^* = \left( x^\mu + \frac{i}{2}\bar{\theta}\gamma^\mu\gamma_5\theta \right)^* = x^\mu - \frac{i}{2}\bar{\theta}\gamma^\mu\gamma_5\theta.$$

$\Rightarrow$

$$\phi^* = \psi^*(y^*) + \bar{\theta}(1-\gamma_5)\psi(y^*) + \frac{1}{2}\bar{\theta}(1-\gamma_5)\theta f^*(y^*)$$

Будет, что  $\phi^*$  отличается от  $\phi$  заменой (26)  
 $\psi \rightarrow \psi^*$ ;  $f \rightarrow f^*$  и  $\gamma_5 \rightarrow -\gamma_5$ . Поэтому  
 $\phi^*$  является антикирватионом суперполем,

$$(1 + \gamma_5) D \phi^* = 0$$

Полностью аналогично супер  $\phi$ , применяв к  
 $\phi^*$  оператор  $-i\bar{\epsilon}Q$ , получаем, что

$$\left\{ \begin{array}{l} \delta \psi^* = \bar{\epsilon}(1 - \gamma_5)\psi \\ \delta [(1 - \gamma_5)\psi] = (1 - \gamma_5) [\epsilon f^* - i\gamma^\mu \epsilon \partial_\mu \psi^*] \\ \delta f^* = -i\bar{\epsilon} \gamma^\mu (1 - \gamma_5) \partial_\mu \psi \end{array} \right.$$

Первое и третье равенства - просто на комп-  
лекное сопряжение отличаются от предыдущих.  
Итак, теперь можно получить

$$\begin{aligned} \delta \psi &= \frac{1}{2} \delta [(1 - \gamma_5)\psi] + \frac{1}{2} \delta [(1 + \gamma_5)\psi] = \\ &= \frac{1}{2} (1 - \gamma_5) [(Re f - iIm f) \epsilon - i\gamma^\mu (\partial_\mu Re \psi - i\partial_\mu Im \psi) \epsilon] \\ &\quad + \frac{1}{2} (1 + \gamma_5) [(Re f + iIm f) \epsilon - i\gamma^\mu (\partial_\mu Re \psi + i\partial_\mu Im \psi) \epsilon] \\ &= (Re f + i\gamma_5 Im f) \epsilon - i(\partial_\mu Re \psi + i\gamma_5 \partial_\mu Im \psi) \gamma^\mu \epsilon \\ \Rightarrow \text{окончательно получим закон SUSY преоб-} \\ \text{разования компонентных полей в виде} \end{aligned}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \delta\psi = \bar{\epsilon}(1+\gamma_5)\psi \\ \delta\psi = (\text{Re}f + i\gamma_5\text{Im}f)\epsilon - i(\partial_\mu \text{Re}\psi + i\gamma_5\partial_\mu \text{Im}\psi)\gamma^\mu\epsilon \\ \delta f = -i\bar{\epsilon}\gamma^\mu(1+\gamma_5)\partial_\mu\psi \end{array} \right.$$

Видно, что бозон  $\psi$  переходит в фермион  $\psi$  и обратно. Параметр преобразований — антикоммутирующий маинорановский спинор  $\epsilon \neq \epsilon(x)$ .

(Без уравнивающих SUSY явления модальной симметрии)

### §3. Построение явно суперсимметрических действий

Рассмотрим киральное суперполе

$$\Phi(y, \theta) = \psi(y) + \bar{\theta}(1+\gamma_5)\psi(y) + \frac{1}{2}\bar{\theta}(1+\gamma_5)\theta f(y)$$

$$(1-\gamma_5)\mathcal{D}\Phi = 0$$

Могда при преобразованиях суперсимметрии

$$\delta f = -i\bar{\epsilon}\gamma^\mu(1+\gamma_5)\partial_\mu\psi = \partial_\mu(-i\bar{\epsilon}\gamma^\mu(1+\gamma_5)\psi)$$

— старшая компонента кирального суперполе сдвигается на полную производную.

Поэтому с точностью до поверхностных членов  $\text{Re}$  и SUSY-инвариантного выражениям будет

(28)

$$S_1 = 2 \int d^4x (f + f^*)$$

Запишем это выражение в более красивом виде:  
Пусть  $\alpha$ - фазовая переменная. Тогда по определению положим

$$\int d\alpha \cdot 1 = 0; \quad \int d\alpha \cdot \alpha = 1 \iff \int d\alpha = \frac{\partial}{\partial \alpha}.$$

С помощью аналогичного интегрирования можно выделить  $f$  из  $\Phi$ :

$$\bar{\theta}(I + \gamma_5)\theta = \theta^T C(I + \gamma_5)\theta = (\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4) \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \hline 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \\ \theta_4 \end{bmatrix} = (\theta_2, -\theta_1, -\theta_4, \theta_3) \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2\theta_3 \\ 2\theta_4 \end{bmatrix} =$$

$$= -2\theta_4\theta_3 + 2\theta_3\theta_4 = 4\theta_3\theta_4.$$

Эту величину можно убрать с помощью интегрирования

$$\int d^2\theta = \int d\theta_4 d\theta_3, \text{ действительно,}$$

$$\int d^2\theta \cdot 1 = 0 \quad \int d^2\theta \theta_3 = \int d^2\theta \theta_4 = 0$$

$$\int d^2\theta \bar{\theta}(I + \gamma_5)\theta = \int d\theta_4 d\theta_3 \cdot 4\theta_3\theta_4 = 4 \int d\theta_4 \theta_4 = 4.$$

(29)

Эту величину можно записать в виде

$$\int d^2\theta = \frac{1}{4} \frac{\partial}{\partial \theta} (1+\gamma_5) \frac{\partial}{\partial \bar{\theta}}, \text{ поскольку тогда}$$

$$\frac{1}{4} \frac{\partial}{\partial \theta} (1+\gamma_5) \frac{\partial}{\partial \bar{\theta}} [\bar{\theta}(1+\gamma_5)\theta] = \frac{1}{4} \frac{\partial}{\partial \theta} (1+\gamma_5) \cdot 2(1+\gamma_5)\theta =$$

$$= \frac{\partial}{\partial \theta_a} (1+\gamma_5)_a^b \theta_b = \text{tr}(1+\gamma_5) = 4 - \text{верно.}$$

Остальные равенства также оцениваются.

Поэтому

$$\int d^4x d^2\theta \tilde{\Psi}(y, \theta) = \int d^4x d^2\theta [\tilde{\Psi}(x, \theta) + \frac{i}{2} \bar{\theta} \gamma^\mu \gamma_5 \theta \partial_\mu \tilde{\Psi}(x, \theta)]$$

$$+ \frac{1}{2} \cdot \frac{i}{2} \bar{\theta} \gamma^\mu \gamma_5 \theta \cdot \frac{i}{2} \bar{\theta} \gamma^\nu \gamma_5 \theta \partial_\mu \partial_\nu \tilde{\Psi}(x, \theta)]$$

помимо  
правдивое

$$\Rightarrow \int d^4x d^2\theta [ \cancel{\Psi}(x) + \bar{\theta}(1+\gamma_5) \cancel{\Psi}(x) + \frac{1}{2} \bar{\theta}(1+\gamma_5)\theta f(x) ]$$

0              0

$$= 2 \int d^4x f(x).$$

Аналогичным образом можно рассмотреть антиквадратичное поле

$$\tilde{\Psi}^*(y^*, \theta) = \cancel{\Psi}^*(y^*) + \bar{\theta}(1-\gamma_5) \cancel{\Psi}(y^*) + \frac{1}{2} \bar{\theta}(1-\gamma_5)\theta f^*(y^*)$$

В этом случае необходимо рассмотреть величину

$$\bar{\theta}(1-\gamma_5)\theta = \theta^T C(1-\gamma_5)\theta = (\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4) \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

30

$$\left[ \begin{array}{c|c} 2 & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right] \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = (\theta_2, -\theta_1, -\theta_4, \theta_3) \begin{pmatrix} 2\theta_1 \\ 2\theta_2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} =$$

$$= 2\theta_2\theta_1 - 2\theta_1\theta_2 = 4\theta_2\theta_1.$$

Эту величину можно убрать интегрированием

$$\int d^2\bar{\theta} = \int d\theta_1 d\theta_2 = \frac{1}{4} \frac{\partial}{\partial \theta} (1-\gamma_S) \frac{\partial}{\partial \bar{\theta}},$$

ног действием которого

$$\int d^2\bar{\theta} \bar{\theta} (1-\gamma_S) \theta = \int d\theta_1 d\theta_2 \cdot 4\theta_2\theta_1 = 4.$$

Можно аналогично сформулировать суперполе

$$\int d^4x d^2\bar{\theta} \Phi^* = \int d^4x [2f^* + n. \text{произвное}]$$

Поскольку с помощью до интегралов от полных произвных SUSY инвариант можно выразить в виде

$$S_1' = 2 \int d^4x (f + f^*) = \int d^4x d^2\theta \Phi + \int d^4x d^2\bar{\theta} \Phi^*$$

$$= \int d^4x d^2\theta \Phi + k.c.$$

где  $\Phi$  — произвное киральное суперполе, которое по определению удовлетворяет условию

$$(1-\gamma_S)\mathcal{D}\Phi = 0.$$

(31)

Еще один инвариант может быть построен  
исходя из Re скалярного суперполе  $\mathbb{V}$ ,  
 $\mathbb{V} = \mathbb{V}^*$

Несо понять, что его старшая компонента  
(коэффициент при  $(\bar{\theta}\theta)^2$ ) будет при SUSY преобра-  
зованиях сдвигаться на полную производную:

$$\mathbb{V}(x, \theta) = \dots + \bar{\theta}\theta \cdot \bar{\theta}\lambda(x) + \frac{1}{4}(\bar{\theta}\theta)^2 \mathbb{D}(x)$$

где  $\lambda(x)$  - майоранивский спинор,  $\mathbb{D}(x) \in \text{Re } \ell$   
среди  $\text{Re}$  суперполе  $\mathbb{V}(x, \theta)$ .

Чтобы найти закон преобразования компонен-  
тных полей, применим оператор супер заряда:

$$\delta \mathbb{V} = -i\bar{\epsilon}Q\mathbb{V} \quad \text{где } Q = i\frac{\partial}{\partial\bar{\theta}} - \gamma^\mu\theta\partial_\mu.$$

Чтобы получилось  $(\bar{\theta}\theta)^2$  нужно, чтобы  
много  $\frac{\partial}{\partial\bar{\theta}}$  действовало на  $\theta^5 = 0$  — *кем*

много  $-\gamma^\mu\theta\partial_\mu$  действовало бы на  $\theta^3$ :

$$\delta \mathbb{V} = \dots + \frac{1}{4}(\bar{\theta}\theta)^2 \delta \mathbb{D}(x) = \dots + \bar{\theta}\theta \cdot i\bar{\epsilon}\gamma^\mu\theta \cdot \bar{\theta}\partial_\mu \lambda(x)$$

В силу тождества Фурье

$$\theta \cdot \bar{\theta} = -\frac{1}{4}(\bar{\theta}\theta) - \frac{1}{4}\gamma_5 \cdot \bar{\theta}\gamma_5\theta + \frac{1}{4}(\gamma^0\gamma_5) \cdot \bar{\theta}\gamma^0\gamma_5\theta$$

(32)

Далее будем показать, что

$$\bar{\theta}\theta \cdot \bar{\theta}\gamma_5\theta = 0; \quad \bar{\theta}\theta \cdot \bar{\theta}\gamma^0\gamma_5\theta = 0$$

и  $\Rightarrow$

$$\delta \mathbb{V} = \dots + \frac{1}{4}(\bar{\theta}\theta)^2 \delta \mathbb{D}(x) = -\frac{1}{4}(\bar{\theta}\theta)^2 \cdot i\bar{\epsilon}\gamma^\mu \partial_\mu A(x) + \dots$$

$$\Rightarrow \delta \mathbb{D} = -i\bar{\epsilon}\gamma^\mu \partial_\mu A = [\epsilon \neq \epsilon(x)] = \partial_\mu [-i\bar{\epsilon}\gamma^\mu A]$$

-  $\mathbb{D}$  также является на полную произвольно.

Поэтому (с учётом вещественности  $\mathbb{D}$ ) в качестве инварианта можно выбрать

$$S_2 = 2 \int d^4x \mathbb{D}.$$

Старшую компоненту  $\mathbb{V}$  можно выделить с помощью интегрирования по  $\theta$ :

$$(\bar{\theta}\theta)^2 = (\theta^\top C \theta)^2 = [(\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4) \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \\ \theta_4 \end{pmatrix}]^2 =$$

$$= [\theta_2\theta_1 - \theta_1\theta_2 - \theta_4\theta_3 + \theta_3\theta_4]^2 = [2\theta_2\theta_1 + 2\theta_3\theta_4]^2 =$$

$$= 8\theta_2\theta_1\theta_3\theta_4$$

Эта величина определенным образом устрашает действием

$$\int d^4\theta = \int d^2\theta d^2\bar{\theta} = \int d\theta_4 d\theta_3 \int d\theta_1 d\theta_2.$$

При этом

$$\int d^4\theta (\bar{\theta}\theta)^2 = \int d\theta_4 d\theta_3 d\theta_2 d\theta_1 \cdot \delta_{\theta} \theta_1 \theta_3 \theta_4 = 8$$

Как следствие,

$$\int d^4\theta = \frac{1}{8} \left( \frac{\partial}{\partial\theta} \frac{\partial}{\partial\bar{\theta}} \right)^2, \text{ действительно,}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{8} \left( \frac{\partial}{\partial\theta} \frac{\partial}{\partial\bar{\theta}} \right)^2 (\bar{\theta}\theta)^2 &= \frac{1}{8} \left( \frac{\partial}{\partial\theta} \frac{\partial}{\partial\bar{\theta}} \right) \cdot \frac{\partial}{\partial\theta_a} \cdot 4\theta_a (\bar{\theta}\theta) = \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial\theta} \frac{\partial}{\partial\bar{\theta}} \right) \left[ 4(\bar{\theta}\theta) + 2\theta_a \bar{\theta}^a \right] = \\ &= \frac{\partial}{\partial\theta} \frac{\partial}{\partial\bar{\theta}} \cdot (\bar{\theta}\theta) = \frac{\partial}{\partial\theta_a} \cdot 2\theta_a = 2 \cdot 4 = 8. \end{aligned}$$

т.о. мы можем записать рассмотриваемый инвариант в виде

$$S_2 = \int d^4x d^4\theta \mathbb{V} \quad \text{где} \quad \mathbb{V} = \mathbb{V}^*$$

Окончательно мы получаем, что для инвариантного действия можно брать запись в виде

$$S' = \int d^4x d^4\theta \mathbb{V} + \left( \int d^4x d^2\theta \mathbb{D} \Phi + \text{k.c.} \right)$$

$$\text{где} \quad \mathbb{V} = \mathbb{V}^* \quad \text{и} \quad (1 - \gamma_5) D \Phi = 0.$$

## Глава IV. Модель Весса-Зуммо

(34)

### § 1. Простейший барионный модель Весса-Зуммо

Рассмотрим  $N=1$  киральное скалярное суперполе  $\phi$ , т.к.  $(1+\gamma_5)D\phi = 0$ .

В терминах компонент

$$\phi(y^M, (1+\gamma_5)\theta) = \psi(y) + \bar{\theta}(1+\gamma_5)\psi(y) + \frac{1}{2}\bar{\theta}(1+\gamma_5)\theta f(y)$$

Построим из  $\phi$  вынужденное скалярное суперполе

$$V = \frac{1}{4}\phi^*\phi$$

$$\text{Очевидно, что } V^* = \frac{1}{4}\phi^*\phi = V.$$

Поэтому действие

$$S' = \frac{1}{4} \int d^4x d^4\theta \phi^*\phi \quad \leftarrow \text{модель Весса-Зуммо}$$

будет являться SUSY-инвариантным.

Запишем действие модели ВЗ в терминах компонентных полей.

Для этого нужно взять интеграл по  $d^4\theta$ .  
Но предварительно нужно записать  $\phi$  через  $x^M$  и  $\theta$ , разлагая функции

$$y^M = x^M + \frac{i}{2}\bar{\theta}\gamma^M\gamma_5\theta \quad \text{в ортогоности } x^M.$$

(35)

$$\begin{aligned}\phi &= \psi(y) + \bar{\theta}(1+\gamma_5)\psi(y) + \frac{1}{2}\bar{\theta}(1+\gamma_5)\theta f(y) = \\ &= \psi(x) + \frac{i}{2}\bar{\theta}\gamma^\mu\gamma_5\theta\partial_\mu\psi(x) + \frac{1}{2}\cdot\frac{i}{2}\bar{\theta}\gamma^\mu\gamma_5\theta\cdot\frac{i}{2}\bar{\theta}\gamma^\nu\gamma_5\theta\cdot \\ &\quad \cdot\partial_\mu\partial_\nu\psi(x) + \bar{\theta}(1+\gamma_5)\psi(x) + \bar{\theta}(1+\gamma_5)\partial_\mu\psi(x)\cdot\frac{i}{2}\bar{\theta}\gamma^\mu\gamma_5\theta \\ &\quad + \frac{1}{2}\bar{\theta}(1+\gamma_5)\theta f(x) + \frac{1}{2}\bar{\theta}(1+\gamma_5)\theta\cdot\frac{i}{2}\bar{\theta}\gamma^\mu\gamma_5\theta\partial_\mu f(x)\end{aligned}$$

(Все остальные слагающие равны 0, поскольку максимальная степень  $\theta$  равна 4).

Все слагающие 4-й степени по  $\theta$  должны сводиться к  $(\bar{\theta}\theta)^2$ , например,

$$\bar{\theta}\gamma^\mu\gamma_5\theta\cdot\bar{\theta}\gamma^\nu\gamma_5\theta = C^{\mu\nu}(\bar{\theta}\theta)^2$$

коэффициент  $C^{\mu\nu}$  можно вычислить, применив к обеим частям равенства  $\int d^4\theta$ :

$$8C^{\mu\nu} = \int d^4\theta C^{\mu\nu}(\bar{\theta}\theta)^2 = \int d^4\theta \cdot \bar{\theta}\gamma^\mu\gamma_5\theta\cdot\bar{\theta}\gamma^\nu\gamma_5\theta =$$

$$= \frac{1}{8} \left( \frac{\partial}{\partial\theta} \frac{\partial}{\partial\bar{\theta}} \right)^2 [\bar{\theta}\gamma^\mu\gamma_5\theta\cdot\bar{\theta}\gamma^\nu\gamma_5\theta] = \frac{1}{8} \left( \frac{\partial}{\partial\theta} \frac{\partial}{\partial\bar{\theta}} \right)$$

$$\cdot \frac{\partial}{\partial\theta} [2\gamma^\mu\gamma_5\theta\cdot\bar{\theta}\gamma^\nu\gamma_5\theta + (\mu \leftrightarrow \nu)] = \frac{1}{4} \left( \frac{\partial}{\partial\theta} \frac{\partial}{\partial\bar{\theta}} \right).$$

$$\cdot [\gamma^\mu\gamma_5\theta_a \cdot \bar{\theta}\gamma^\nu\gamma_5\theta^a \cdot 2 + (\mu \leftrightarrow \nu)] = -\frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial\theta} \frac{\partial}{\partial\bar{\theta}} \right)$$

$$\cdot [\bar{\theta}\gamma^\nu\gamma_5\gamma^\mu\gamma_5\theta + (\mu \leftrightarrow \nu)] = +\frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial\theta} \frac{\partial}{\partial\bar{\theta}} \right) \cdot 2\gamma^{\mu\nu}(\bar{\theta}\theta)$$

(36)

$$= \gamma^{\mu\bar{\omega}} \cdot 2 \frac{\partial}{\partial \theta_a} \theta_a = 8\gamma^{\mu\bar{\omega}}$$

$\Rightarrow C^{\mu\bar{\omega}} = \gamma^{\mu\bar{\omega}}$  и мы получаем тождество

$$\bar{\theta} \gamma^{\mu} \gamma_5 \theta \cdot \bar{\theta} \gamma^{\bar{\omega}} \gamma_5 \theta = \gamma^{\mu\bar{\omega}} (\bar{\theta} \theta)^2$$

Аналогичным образом проверяется (2/3), что

$$(\bar{\theta} \gamma_5 \theta)^2 = - (\bar{\theta} \theta)^2$$

$$\bar{\theta} \gamma_5 \theta \cdot \bar{\theta} \theta = 0; \quad \bar{\theta} \theta \cdot \bar{\theta} \gamma^{\mu} \gamma_5 \theta = 0; \quad \bar{\theta} \gamma_5 \theta \cdot \bar{\theta} \gamma^{\bar{\omega}} \gamma_5 \theta = 0.$$

Еще одним полезным тождеством будет выражение для  $\bar{\theta} \gamma^{\mu} \gamma_5 \theta \cdot \bar{\theta}$  через  $(\bar{\theta} \theta) \cdot \bar{\theta}$ .  
Чтобы корректно индексов соблюсти необходимо, чтобы

$$\bar{\theta} \gamma^{\mu} \gamma_5 \theta \cdot \bar{\theta} = c \cdot (\bar{\theta} \theta) \cdot \bar{\theta} \gamma^{\mu} \gamma_5$$

где постоянную  $c$  можно определить с помощью  
утихания на  $\gamma^{\bar{\omega}} \gamma_5 \theta$ :

$$\begin{aligned} \bar{\theta} \gamma^{\mu} \gamma_5 \theta \cdot \bar{\theta} \gamma^{\bar{\omega}} \gamma_5 \theta &= c \cdot (\bar{\theta} \theta) \cdot \bar{\theta} \gamma^{\mu} \gamma_5 \gamma^{\bar{\omega}} \gamma_5 \theta \\ &\quad // \qquad // \\ \gamma^{\mu\bar{\omega}} (\bar{\theta} \theta)^2 &\quad -c \cdot (\bar{\theta} \theta) \cdot \bar{\theta} (\gamma^{\mu\bar{\omega}} + \cancel{\gamma^{\bar{\omega}\bar{\omega}}}) \theta = -c \gamma^{\mu\bar{\omega}} (\bar{\theta} \theta)^2 \\ \Rightarrow c &= -1 \quad \text{и получаем тождество} \end{aligned}$$

$$\bar{\theta} \gamma^{\mu} \gamma_5 \theta \cdot \bar{\theta} = - (\bar{\theta} \theta) \cdot \bar{\theta} \gamma^{\mu} \gamma_5 .$$

Поэтому выражение для кирального суперона может записать в виде

$$\phi(x, \theta) = \psi(x) + \bar{\theta}(1+\gamma_5)\psi(x) + \frac{1}{2}\bar{\theta}(1+\gamma_5)\theta f(x) + \frac{i}{2}\bar{\theta}\gamma^\mu\gamma_5\theta.$$

$$\partial_\mu\psi(x) - \frac{i}{2}(\bar{\theta}\theta)\cdot\bar{\theta}\gamma^\mu(1+\gamma_5)\partial_\mu\psi(x) - \frac{1}{8}(\bar{\theta}\theta)^2\partial_\mu^2\psi(x)$$

Аналогичным образом для антикирального суперона

$$\phi^*(x, \theta) = \psi^*(x) + \bar{\theta}(1-\gamma_5)\psi(x) + \frac{1}{2}\bar{\theta}(1-\gamma_5)\theta f^*(x) - \frac{i}{2}\bar{\theta}\gamma^\mu\gamma_5\theta.$$

$$\partial_\mu\psi^*(x) - \frac{i}{2}(\bar{\theta}\theta)\cdot\bar{\theta}\gamma^\mu(1-\gamma_5)\partial_\mu\psi(x) - \frac{1}{8}(\bar{\theta}\theta)^2\partial_\mu^2\psi^*(x)$$

Подставим эти разложения в действие модели  
Бесса-Зуинко

$$S = \frac{1}{4}\int d^4x d^4\theta \phi^*\phi = \frac{1}{4}\int d^4x d^4\theta \left[ \psi^* \cdot \left(-\frac{1}{8}\right)(\bar{\theta}\theta)^2\partial_\mu^2\psi \right.$$

$$+ \bar{\psi}(1-\gamma_5)\theta \cdot \left(-\frac{i}{2}\right)(\bar{\theta}\theta)\cdot \bar{\theta}\gamma^\mu(1+\gamma_5)\partial_\mu\psi + \frac{1}{2}\bar{\theta}(1-\gamma_5)\theta f^*$$

$$- \frac{1}{2}\bar{\theta}(1+\gamma_5)\theta f - \frac{i}{2}\bar{\theta}\gamma^\mu\gamma_5\theta\partial_\mu\psi^* \cdot \frac{i}{2}\bar{\theta}\gamma^\nu\gamma_5\theta\partial_\nu\psi$$

$$- \frac{i}{2}(\bar{\theta}\theta)\cdot\bar{\psi}(1+\gamma_5)\theta\cdot\bar{\theta}\gamma^\mu(1-\gamma_5)\partial_\mu\psi - \frac{1}{8}(\bar{\theta}\theta)^2\partial_\mu^2\psi^*\psi \left]$$

Используя приведённые выше тождества, а также тождество Фурье

$$\theta\cdot\bar{\theta} = -\frac{1}{4}(\bar{\theta}\theta) - \frac{1}{4}\gamma_5\cdot\bar{\theta}\gamma_5\theta + \frac{1}{4}\gamma^\alpha\gamma_5\cdot\bar{\theta}\gamma^\alpha\gamma_5\theta$$

Morgan

(38)

$$S' = \frac{1}{4} \int d^4x d^4\theta \left\{ -\frac{1}{8} \varphi^* \partial_\mu^2 \varphi (\bar{\theta}\theta)^2 + \frac{i}{8} (\bar{\theta}\theta)^2 \cdot \bar{\psi}(1-\gamma_5) \cdot \right.$$

$$\gamma^\mu (1+\gamma_5) \partial_\mu \psi + \frac{1}{2} (\bar{\theta}\theta)^2 f^* f + \frac{1}{4} (\bar{\theta}\theta)^2 \partial_\mu \varphi^* \partial_\mu \varphi$$

$$\left. + \frac{i}{8} (\bar{\theta}\theta)^2 \bar{\psi}(1-\gamma_5) \gamma^\mu (1-\gamma_5) \partial_\mu \psi - \frac{1}{8} (\bar{\theta}\theta)^2 \partial_\mu^2 \varphi^* \cdot \varphi \right\} =$$

$$\left[ \int d^4\theta (\bar{\theta}\theta)^2 = 8 \right]$$

$$= \int d^4x \left\{ -\frac{1}{4} \varphi^* \partial_\mu^2 \varphi + \frac{i}{2} \bar{\psi}(1-\gamma_5) \gamma^\mu \partial_\mu \psi + f^* f \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \partial_\mu \varphi^* \partial_\mu \varphi + \frac{i}{2} \bar{\psi}(1+\gamma_5) \gamma^\mu \partial_\mu \psi - \frac{1}{4} \partial_\mu^2 \varphi^* \cdot \varphi \right\} =$$

(имеет формулы по частям слагающие со скалярным полем)

$$= \int d^4x \left\{ \partial_\mu \varphi^* \partial_\mu \varphi \left( \frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \right) + i \bar{\psi} \gamma^\mu \partial_\mu \psi + f^* f \right\}$$

$$= \int d^4x \left\{ \partial_\mu \varphi^* \partial_\mu \varphi + i \bar{\psi} \gamma^\mu \partial_\mu \psi + f^* f \right\}$$

т.о. очевидно получаем, что

$$S = \frac{1}{4} \int d^4x d^4\theta \phi^* \phi = \int d^4x \left\{ \partial_\mu \varphi^* \partial_\mu \varphi + i \bar{\psi} \gamma^\mu \partial_\mu \psi + f^* f \right\}$$

§2. Инвариантность модели Весса-Зуммо 39  
относительно преобразований суперсимметрии.

Убедимся, что

$$S' = \frac{1}{4} \int d^4x d^4\theta \phi^* \phi = \int d^4x \left[ \partial_\mu \varphi^* \partial_\mu \varphi + i \bar{\psi} \gamma^\mu \partial_\mu \psi + f^* f \right]$$

инвариантно относительно преобразований

$$\left\{ \begin{array}{l} \delta \varphi = \bar{\epsilon} (1 + \gamma_5) \psi \\ \delta \psi = (R f + i \bar{\psi} \gamma_5 J m f) \epsilon - i (\partial_\mu R e \varphi + i \bar{\psi}_5 \partial_\mu J m \varphi) \gamma^\mu \epsilon \\ \delta f = -i \bar{\epsilon} \gamma^\mu (1 + \gamma_5) \partial_\mu \psi \end{array} \right.$$

где  $\epsilon \neq \epsilon(x)$ .

Заметим, что  $f$  - вспомогательное поле, которое может быть исключено из уравнений движений:  $f = 0 ; f^* = 0$ , т.к.

$$S' \Rightarrow \int d^4x \left[ \partial_\mu \varphi^* \partial_\mu \varphi + i \bar{\psi} \gamma^\mu \partial_\mu \psi \right]$$

Относительно каких преобразований будет инвариантно это действие? Предположимо,

$$\left\{ \begin{array}{l} \delta \varphi = \bar{\epsilon} (1 + \gamma_5) \psi \\ \delta \psi = -i (\partial_\mu R e \varphi + i \bar{\psi}_5 \partial_\mu J m \varphi) \gamma^\mu \epsilon \end{array} \right.$$

тогда как

$$0 = \delta f = -i\bar{\epsilon}\gamma^{\mu}(1-\gamma_5)\partial_{\mu}\psi = -i\bar{\epsilon}(1-\gamma_5)\gamma^{\mu}\partial_{\mu}\psi$$

в силу уравнения движения для спинорного поля.

Убедимся, что такая инвариантность действительно есть и заодно найдём соответствующий сохраняющийся ток.

Это можно сделать с помощью т.н. метода Киттера.

Положим формально  $\epsilon = \epsilon(x)$  и предположим,

что

$$\delta S = \int d^4x \partial_{\mu} \bar{\epsilon} J^{\mu}$$

тогда при  $\epsilon \neq \epsilon(x)$   $\delta S = 0$  — получается требуемое инвариантство.

У1 получаем из ур-я  $\delta S = 0$  и  $\Rightarrow$  на уравнениях движения

$$0 = \delta S = \int d^4x \partial_{\mu} \bar{\epsilon} J^{\mu} = \int d^4x \bar{\epsilon}(x) \partial_{\mu} J^{\mu}$$

$\Rightarrow$  в силу произвольности  $\epsilon(x)$  получаем 3-е  
сохранение

$$\partial_{\mu} J^{\mu} = 0,$$

т.е.  $J^{\mu}$  оказывается сохраняющимся током.

Умнож, вспомогаю

(41)

$$\delta S' = 8 \int d^4x (\partial_\mu \varphi^* \partial_\mu \varphi + i \bar{\psi} \gamma^\mu \partial_\mu \psi)$$

при преобразованиях

$$\left\{ \begin{array}{l} \delta \varphi = \bar{\epsilon}(x) \cdot (1 + \gamma_5) \varphi \\ \delta \psi = -i (\partial_\mu \text{Re} \varphi + i \gamma_5 \partial_\mu \text{Im} \varphi) \gamma^\mu \epsilon(x). \end{array} \right.$$

Начнем:

$$\delta S' = \int d^4x \left\{ \partial_\mu \delta \varphi^* \cdot \partial_\mu \varphi + \partial_\mu \varphi^* \partial_\mu \delta \varphi + i \delta \bar{\psi} \gamma^\mu \partial_\mu \psi \right.$$

$$+ i \bar{\psi} \gamma^\mu \partial_\mu \delta \psi \left. \right\} \stackrel{?}{=} \int d^4x \left\{ -\delta \varphi^* \partial_\mu^2 \varphi - \delta \varphi \partial_\mu^2 \varphi^* + \right.$$

$$+ 2i \bar{\psi} \gamma^\mu \partial_\mu \delta \psi \left. \right\} =$$

$$= \int d^4x \left\{ -\bar{\epsilon}(1 - \gamma_5) \psi \partial_\mu^2 \varphi - \bar{\epsilon}(1 + \gamma_5) \psi \partial_\mu^2 \varphi^* + 2i \bar{\psi} \gamma^\mu \partial_\mu \cdot \right.$$

$$\cdot \left[ -i (\partial_\nu \text{Re} \varphi + i \gamma_5 \partial_\nu \text{Im} \varphi) \gamma^\nu \epsilon(x) \right] \left. \right\} =$$

$$= \int d^4x \left\{ -\bar{\epsilon}(1 - \gamma_5) \psi \partial_\mu^2 \varphi - \bar{\epsilon}(1 + \gamma_5) \psi \partial_\mu^2 \varphi^* + 2 \bar{\psi} \gamma^\mu \gamma^0 \cdot \right.$$

$$\cdot \partial_\mu \partial_\nu (\text{Re} \varphi - i \gamma_5 \text{Im} \varphi) \epsilon + 2 \bar{\psi} \gamma^\mu \gamma^0 (\partial_\nu \text{Re} \varphi - i \gamma_5 \partial_\nu \text{Im} \varphi)$$

$$\cdot \partial_\mu \epsilon \left. \right\} =$$

(42)

$$\begin{aligned}
 &= \int d^4x \left\{ -\bar{\epsilon} (1-\gamma_5) \psi \partial_\mu^2 \psi - \bar{\epsilon} (1+\gamma_5) \psi \partial_\mu^2 \psi^* + 2\bar{\psi} (\partial_\mu^2 \text{Re}\psi - \right. \\
 &\quad \left. - i\gamma_5 \partial_\mu \text{Im}\psi) \epsilon + 2\bar{\psi} \gamma^\mu \gamma^0 (\partial_\mu \text{Re}\psi - i\gamma_5 \partial_\mu \text{Im}\psi) \partial_\mu \epsilon \right\} \\
 &= \int d^4x \cdot 2\bar{\psi} \gamma^\mu \gamma^0 (\partial_\mu \text{Re}\psi - i\gamma_5 \partial_\mu \text{Im}\psi) \partial_\mu \epsilon
 \end{aligned}$$

При этом

$$\begin{aligned}
 \bar{\psi} \gamma^\mu \gamma^0 \psi &= \bar{\psi} (\gamma^{\mu 0} + \gamma^{0 \mu}) \psi = \bar{\chi} \psi \cdot \gamma^{\mu 0} - \bar{\chi} \gamma^{\mu 0} \psi = \\
 &= \bar{\chi} (\gamma^{\mu 0} + \gamma^{0 \mu}) \psi = \bar{\chi} \gamma^0 \gamma^\mu \psi.
 \end{aligned}$$

Поэтому  $\delta S$  можно скончательно записать в виде

$$\begin{aligned}
 \delta S &= 2 \int d^4x \partial_\mu \bar{\epsilon} \gamma^0 \gamma^\mu (\partial_\mu \text{Re}\psi - i\gamma_5 \partial_\mu \text{Im}\psi) \psi = \\
 &= \int d^4x \partial_\mu \bar{\epsilon} J^\mu
 \end{aligned}$$

$$\text{где } J^\mu = 2\bar{\psi} \gamma^0 \gamma^\mu (\partial_\mu \text{Re}\psi - i\gamma_5 \partial_\mu \text{Im}\psi) \psi$$

- м.и. суперток.

Суперток является инвариантом антикоммутирующим спаринга, также как и параметр преобразования суперсимметрии.

(43)

Сохранение супертона может быть легко проверено явным вычислением:

$$\begin{aligned}
 \partial_\mu J^\mu &= \partial_\mu \left[ 2\gamma^0 \gamma^\mu (\partial_\nu \text{Re} \psi - i \gamma_5 \partial_\nu \text{Im} \psi) \psi \right] = \\
 &= 2\gamma^0 \gamma^\mu (\partial_\mu \partial_\nu \text{Re} \psi - i \gamma_5 \partial_\mu \partial_\nu \text{Im} \psi) \psi + \\
 &+ 2\gamma^0 \gamma^\mu (\partial_\nu \text{Re} \psi - i \gamma_5 \partial_\nu \text{Im} \psi) \partial_\mu \psi = \\
 &= 2(\partial_\mu^2 \text{Re} \psi - i \gamma_5 \partial_\mu^2 \text{Im} \psi) \psi + 2(\partial_\nu \text{Re} \psi - i \gamma_5 \partial_\nu \text{Im} \psi) \\
 &\cdot \gamma^0 \gamma^\mu \partial_\mu \psi = 0
 \end{aligned}$$

В силу уравнений движения для скалярного поля  $\partial_\mu^2 \psi = 0$  и спинорного поля  $\gamma^\mu \partial_\mu \psi = 0$ .

### §3. Количество степеней свободы бозонов и фермионов в модели В3

Все массовые под-стри состоят из 2 см. свободы  $\psi$  и  $\bar{\psi}$ , 2 см. cb.  $y$  f и 4 см. cb.  $y$   $\bar{f}$   
 $\Rightarrow$  всего бозонных и фермионных степеней свободы соппадает.

На массовой поверхности

(44)

$$f = 0; \quad \gamma^\mu \partial_\mu \psi = 0 \quad \partial_\mu^2 \psi = 0.$$

Поэтому  $\gamma^\mu \psi - 2$  cm. свободен ( $k_\alpha^2 = 0$ )

Что будет с  $\psi$ ?

$$0 = \gamma^\mu \partial_\mu \psi = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \partial_0 \psi + \begin{pmatrix} 0 & \vec{e} \\ -\vec{e} & 0 \end{pmatrix} \bar{\nabla} \psi$$

$$\text{Если } \psi \sim e^{-ik_0 x^\alpha}, \text{ то } \partial_0 \psi = -ik_0 \psi$$

$$\bar{\nabla} \psi = i \bar{k} \psi$$

$\Rightarrow$

$$0 = \begin{pmatrix} 0 & -ik_0 \\ -ik_0 & 0 \end{pmatrix} \psi + \begin{pmatrix} 0 & i\bar{e}\bar{k} \\ -i\bar{e}\bar{k} & 0 \end{pmatrix} \psi, \quad \text{сокращая на } -i, \\ \text{получим, что}$$

$$0 = \begin{pmatrix} 0 & k_0 - \bar{e}\bar{k} \\ k_0 + \bar{e}\bar{k} & 0 \end{pmatrix} \psi. \quad \text{тогда } \psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_2^* \\ -\psi_1^* \end{pmatrix}$$

$$\left. \begin{array}{l} (k_0 - \bar{e}\bar{k}) \begin{pmatrix} \psi_2^* \\ -\psi_1^* \end{pmatrix} = 0 \\ (k_0 + \bar{e}\bar{k}) \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} = 0. \end{array} \right\} \quad \begin{array}{l} \text{- первое уравнение} \\ \text{следует из второго,} \\ \text{действительно,} \end{array}$$

$$(k_0 + \bar{e}^* \bar{k}) \begin{pmatrix} \psi_1^* \\ \psi_2^* \end{pmatrix} = 0$$

$$-(k_0 + \bar{e}^* \bar{k}) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_1^* \\ \psi_2^* \end{pmatrix} = 0$$

(45)

$$-\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} (k_0 + \bar{E}^* \bar{k}) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_2^* \\ -\psi_1^* \end{pmatrix} = 0$$

$$G_2 (k_0 + \bar{E}^* \bar{k}) G_2 \begin{pmatrix} \psi_2^* \\ -\psi_1^* \end{pmatrix} = 0$$

$$(k_0 - \bar{E} \bar{k}) \begin{pmatrix} \psi_2^* \\ -\psi_1^* \end{pmatrix} = 0 \quad -\text{верно.}$$

$$0 = (k_0 + \bar{E} \bar{k}) \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_0 + k_3 & k_1 - ik_2 \\ k_1 + ik_2 & k_0 - k_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}$$

$$0 = \det = k_0^2 - k_3^2 - k_1^2 - k_2^2 = k_0^2 - E^2 \quad -\text{верно}$$

$\Rightarrow \psi_2$  можно выражать через  $\psi_1$  и остаются  
только 2 независимые компоненты

$\Rightarrow$  Майорановский спинор на массовой поб-стк  
имеет 2 ст. свободы

т.о. число бозонных и фермионных ст. свобод

on shell совпадает.

§4. Модель Весса-Зуммо с массой и взаимо-  
действием

$$S = \int d^4x d^4\theta \mathcal{V} + \left( \int d^4x d^2\theta \phi + \text{k.c.} \right)$$

- общий формал SUSY инвариант.

Наш строим теорию исходя из киральского скалярного суперфилда  $\phi$ :

$$(1-\gamma_5)D\phi = 0$$

$$\phi = \varphi(y^\mu) + \bar{\theta}(1+\gamma_5)\psi(y^\mu) + \frac{1}{2}\bar{\theta}(1+\gamma_5)\theta f(y^\mu)$$

$$\text{тогда } y^\mu = x^\mu + \frac{i}{2}\bar{\theta}\gamma^\mu\gamma_5\theta$$

$$\mathcal{V} = \frac{1}{4}\phi^*\phi = \mathcal{V}^*$$

Возьмем теперь

$$\phi = \frac{m}{4}\phi^2 + \frac{\lambda}{6}\phi^3$$

Это суперфилд является киральным, поскольку

$$(1-\gamma_5)D\Phi = \frac{m}{2}\phi \cdot (1-\gamma_5)D\phi + \frac{\lambda}{2}\phi^2 \cdot (1-\gamma_5)D\phi = 0$$

Поэтому инвариантное действие может быть записано в виде

$$S = \frac{1}{4} \int d^4x d^4\theta \phi^* \phi + \left( \int d^4x d^2\theta \left( \frac{1}{4}m\phi^2 + \frac{1}{6}\lambda\phi^3 \right) + \text{k.c.} \right) - \text{модель ВЗ с массой и взаимодействием.}$$

Запишем это действие в терминах our-  
покеттических полей. (47)

Ранее было доказано, что

$$\frac{1}{4} \int d^4x d^4\theta \phi^* \phi = \int d^4x (\partial_\mu \psi^* \partial^\mu \psi + i \bar{\psi} \gamma^\mu \partial_\mu \psi + f^* f)$$

Остается вычислить

$$\int d^4x d^2\theta \left( \frac{1}{4} m \phi^2 + \frac{1}{6} \lambda \phi^3 \right) + \text{к.с.}$$

Вакуум: m. к.  $(1 - \gamma_5) D \Phi = 0$ , то

$$\Phi = \Phi(y^\mu, (1 + \gamma_5)\theta)$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \int d^4x d^2\theta \Phi(y^\mu, (1 + \gamma_5)\theta) &= \int d^4x d^2\theta [\Phi(x^\mu, (1 + \gamma_5)\theta) \\ &+ \frac{i}{2} \bar{\theta} \gamma^\mu \gamma_5 \theta \partial_\mu \cancel{\Phi}(x^\mu, (1 + \gamma_5)\theta) + \frac{1}{2} \cdot \frac{i}{2} \bar{\theta} \gamma^\mu \gamma_5 \theta \cdot \frac{i}{2} \bar{\theta} \gamma^\nu \gamma_5 \theta \\ &\cdot \partial_\mu \partial_\nu \cancel{\Phi}(x^\mu, (1 + \gamma_5)\theta)] \Rightarrow \int d^4x d^2\theta \Phi(x^\mu, (1 + \gamma_5)\theta) \end{aligned}$$

*полное производное*

$\Rightarrow$  при вычислении действие можно формально заменить  $y^\mu$  на  $x^\mu$ , то сильно упрощает вычисления.

Поэтому

(48)

$$\int d^4x d^2\theta \left[ \frac{1}{4} m \phi^2(y, \theta) + \frac{1}{6} \lambda \phi^3(y, \theta) \right] =$$

$$\Rightarrow \int d^4x d^2\theta \left[ \frac{1}{4} m \phi^2(x, \theta) + \frac{1}{6} \lambda \phi^3(x, \theta) \right] =$$

$$= \int d^4x d^2\theta \left[ \frac{1}{4} m \left( \psi(x) + \bar{\theta}(1+\gamma_5) \psi(x) + \frac{1}{2} \bar{\theta}(1+\gamma_5) \theta f(x) \right)^2 \right.$$

$$\left. + \frac{1}{6} \lambda \left( \psi(x) + \bar{\theta}(1+\gamma_5) \psi(x) + \frac{1}{2} \bar{\theta}(1+\gamma_5) \theta f(x) \right)^3 \right] =$$

(восківують тензори 2-ї ступеня  $(1+\gamma_5)\theta$ )

$$= \int d^4x d^2\theta \left[ \frac{1}{4} m \left( \bar{\theta}(1+\gamma_5) \theta \cdot \psi f + \bar{\psi}(1+\gamma_5) \theta \cdot \bar{\theta}(1+\gamma_5) \psi \right) \right.$$

$$\left. + \frac{1}{6} \lambda \left( \frac{3}{2} \bar{\theta}(1+\gamma_5) \theta \cdot \psi^2 f + 3 \psi \cdot \bar{\psi}(1+\gamma_5) \theta \cdot \bar{\theta}(1+\gamma_5) \psi \right) \right] =$$

[Іспользовані тензори може симбо фура

$$(1+\gamma_5)\theta \cdot \bar{\theta}(1+\gamma_5) = -\frac{1}{2} \bar{\theta}(1+\gamma_5)\theta \cdot (1+\gamma_5)$$

тому

$$= \int d^4x d^2\theta \cdot \bar{\theta}(1+\gamma_5) \theta \left[ \frac{1}{4} m \cdot \psi f - \frac{1}{8} m \bar{\psi}(1+\gamma_5) \psi + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{4} \lambda \psi^2 f - \frac{1}{4} \lambda \psi \bar{\psi}(1+\gamma_5) \psi \right] = \left[ \int d^2\theta \cdot \bar{\theta}(1+\gamma_5) \theta = 4 \right]$$

$$= \int d^4x \left[ m \psi f - \frac{1}{2} m \bar{\psi}(1+\gamma_5) \psi + \lambda \psi^2 f - \lambda \psi \bar{\psi}(1+\gamma_5) \psi \right]$$

(49)

Поэтому

$$S' = \frac{1}{4} \int d^4x d^4\theta \phi^* \phi + \left[ \int d^4x d^4\theta \left( \frac{1}{4} m \phi^2 + \frac{1}{6} \lambda \phi^3 \right) + \text{k.c.} \right]$$

$$= \int d^4x \left\{ \partial_\mu \psi^* \partial^\mu \psi + i \bar{\psi} \gamma^\mu \partial_\mu \psi + f^* f \right\} + m \psi f$$

$$- \frac{1}{2} m \bar{\psi} (1 + \gamma_5) \psi + \lambda \psi^2 f - \lambda \psi \bar{\psi} (1 + \gamma_5) \psi \right] + m \psi^* f^*$$

$$- \frac{1}{2} m \bar{\psi} (1 - \gamma_5) \psi + \lambda \psi^* f^* - \lambda \psi^* \bar{\psi} (1 - \gamma_5) \psi \right\} =$$

$$= \int d^4x \left\{ \partial_\mu \psi^* \partial^\mu \psi + i \bar{\psi} \gamma^\mu \partial_\mu \psi + \underline{f^* f} + \underline{m \psi f} + \underline{m \psi^* f^*} \right.$$

$$\left. + \underline{\lambda f \psi^2} + \underline{\lambda f^* \psi^*} - m \bar{\psi} \psi - \lambda \psi \bar{\psi} (1 + \gamma_5) \psi - \lambda \psi^* \bar{\psi} (1 - \gamma_5) \psi \right\}$$

- будто, что появилось массовое слагаемое  
без поля  $\psi$ . Но это - шахордановская масса.

Две меры, чтобы получить массу скалярного  
поля  $\psi$ , необходимо испытать вспомогательное  
поле  $f$  ( $u f^*$ ) на уравнениях движений:

$$f : f^* + m \psi + \lambda \psi^2 = 0$$

$$f^* : f + m \psi^* + \lambda \psi^{*2} = 0$$

Как исключить вспомогательное поле?

(50)

Если в выражении присутствует

$$\frac{1}{2} x_i A_{ij} x_j + x_i B_i = \frac{1}{2} x^T A x + x^T B$$

то это выражение для  $x_i$  имеет вид

$$0 = A_{ij} x_j + B_i$$

$$\Rightarrow x_i = - (A^{-1})_{ij} B_j \Leftrightarrow x = - A^{-1} B$$

Подставляем это в исходное выражение:

$$\frac{1}{2} x^T A x + x^T B \Leftrightarrow \frac{1}{2} B^T A^{-1} A A^{-1} B - B^T A^{-1} B =$$

$$= B^T A^{-1} B \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \right) = - \frac{1}{2} B^T A^{-1} B \Leftrightarrow - \frac{1}{2} x^T A x$$

*вклад членов слагаемых в (-2) раза  
больше вклада квадратичных*

$\Rightarrow$  При исключении беспомогательных полей можно взять квадратичное слагаемое с обратными знаками и подставлять в них решение уп-д движений.

Поэтому слагаемое в полиномии  $f$  и  $f^*$  имеет вид

$$-f^* f = -|m\varphi + \lambda\varphi^2|^2$$

т.о. после исключения беспомогательных полей  $f$  и  $f^*$  генерируемые при этом вид

$$S = \frac{1}{4} \int d^4x d^4\theta \phi^* \phi + \left[ \int d^4x d^2\theta \left( \frac{1}{4} m\phi^2 + \frac{1}{6} \lambda \phi^3 \right) + \text{k.c.} \right] \quad (51)$$

$$\Rightarrow \int d^4x \left\{ \partial_\mu \varphi^* \partial^\mu \varphi + i \bar{\psi} \gamma^\mu \partial_\mu \psi - m \bar{\psi} \psi - |m\varphi + \lambda \varphi^2|^2 \right.$$

$$\left. - \lambda \varphi \bar{\psi} (1+\gamma_5) \psi - \lambda \varphi^* \bar{\psi} (1-\gamma_5) \psi \right\}$$

- появилась масса скалярного поля, которая оказывается равной массе спинорного поля
- характеризует особенность SUSY теории.

Есть  $\varphi^4$  и грави, приём компактной взаимодействия массе взаимосвязан.

Потенциал скалярных полей

$$V = |m\varphi + \lambda \varphi^2|^2$$

автоматически оказывается положительно определённой - массе особенность SUSY теории.

Глава IV.  $N=1$  суперсимметрическое калибровочное теории

§ 1. Калибровочное инвариантное обобщение модели  
Весса-Зуммо

Построим SUSY калибровочное теории. План аналогичен классической теории полей!

(52)

$$\partial_\mu \varphi^+ \partial^\mu \varphi \rightarrow \partial_\mu \varphi^+ \partial^\mu \varphi$$

$$\text{т.е. } \partial_\mu \varphi = \partial_\mu \varphi + i A_\mu \varphi$$

(В наших обозначениях  $A_\mu = e A_\mu^A T^A$ , т.е.  $T^A$  - эрмитовы генераторы,  $(T^A)^+ = T^A$ .

Для нормировки генераторов будем использовать представление  $t^A$  используя условие

$$\text{tr}(t^A t^B) = \frac{1}{2} \delta^{AB}$$

Могда если

$$\begin{cases} \varphi \rightarrow \omega \varphi \\ A_\mu \rightarrow \omega A_\mu \bar{\omega}^1 - i \omega \partial_\mu \bar{\omega}^1 \end{cases}$$

но

$$\begin{aligned} \partial_\mu \varphi &\rightarrow \partial_\mu (\omega \varphi) + i (\omega A_\mu \bar{\omega}^1 - i \omega \partial_\mu \bar{\omega}^1) \omega \varphi \\ &= \cancel{\partial_\mu \omega} \varphi + \omega \partial_\mu \varphi + i \omega A_\mu \varphi + \omega \cancel{\partial_\mu \omega} \bar{\omega}^1 \omega \varphi = \\ &= \omega (\partial_\mu \varphi + i A_\mu \varphi) = \omega \partial_\mu \varphi. \end{aligned}$$

Затем строим теорию поле

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + i [A_\mu, A_\nu] \rightarrow \omega F_{\mu\nu} \bar{\omega}^1$$

$$(F_{\mu\nu} = e F_{\mu\nu}^A t^A)$$

и добавляем в теорию

$$-\frac{1}{2e^2} \text{tr} F_{\mu\nu}^2 = -\frac{1}{4} (F_{\mu\nu}^A)^2, \text{ м.з.}$$

получается теория с

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}(F_{\mu\nu}^A)^2 + \partial_\mu \varphi^+ \partial^\mu \varphi - V(\varphi, \varphi^+)$$

инвариантная относительно локальных калибровочных преобразований.

Аналогом  $\partial_\mu \varphi^+ \partial^\mu \varphi$  является модель ВЗ

$$S' = \frac{1}{4} \int d^4x d^4\theta \phi^+ \phi \quad \text{где } (1-\gamma_5)D\phi = 0.$$

Она инвариантна относительно локальных преобразований

$$\begin{aligned} \phi &\rightarrow \omega \phi \\ \phi^+ &\rightarrow \phi^+ \bar{\omega}' \end{aligned} \quad (\omega^+ = \bar{\omega}')$$

где  $\omega \neq \omega(x)$

но локальной инвариантности нет:

$\phi \rightarrow \omega(x)\phi$  нарушает условие кирватости:

$$(1-\gamma_5)D(\omega(x)\phi) \neq 0$$

а если  $\phi \rightarrow \omega(y)\phi$ , то  $\phi^+ \rightarrow \phi^+ \bar{\omega}'(y^*)$ .

$$\text{где } y^{\mu*} = x^\mu - \frac{i}{2}\bar{\theta}j^\mu \gamma_5 \theta \neq y^\mu = x^\mu + \frac{i}{2}\bar{\theta}j^\mu \gamma_5 \theta$$

Поэтому  $\bar{\omega}'(y^*) \omega(y) \neq 1$

Это разумно, т.к. для Э локальной инвариантности нужно калибровочное поле.

Для того, чтобы получить локальную калибр-54  
волну инвариантную теорию, необходимо добавить  
калибровочное поле.

Калибровочное поле  $A_\mu$  входит как компонента  
в существенное скалярное суперполе  $V(x, \theta)$ :

$$V(x, \theta) = C(x) + i\bar{\theta}\gamma_5\beta(x) + \frac{1}{2}\bar{\theta}\theta \cdot k(x) + \frac{i}{2}\bar{\theta}\gamma_5\theta \cdot H(x) \\ - \frac{1}{2}\bar{\theta}\gamma^\mu\gamma_5\theta \cdot A_\mu(x) + \frac{1}{2}(\bar{\theta}\theta) \cdot \bar{\theta}\gamma^\mu\gamma_5\partial_\mu\beta(x) + i\sqrt{2}(\bar{\theta}\theta) \\ \cdot \bar{\theta}\gamma_5\lambda(x) + \frac{1}{4}(\bar{\theta}\theta)^2 \left( D(x) - \frac{1}{2}\partial_\mu^2 C(x) \right)$$

Многа действие калибровочного инвариантного  
обобщения модели Весса-Зумини можно записать  
в виде

$$S' = \frac{1}{4} \int d^4x d^4\theta \phi^+ e^{2V} \phi \quad \text{где } \phi = \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \vdots \\ \phi_n \end{pmatrix}$$

При этом локальная калибровочная инвариантность  
имеет вид

$$\left\{ \begin{array}{l} \phi \rightarrow e^{i\Lambda} \phi \\ \phi^+ \rightarrow \phi^+ e^{-i\Lambda^+} \\ e^{2V} \rightarrow e^{i\Lambda^+} e^{2V} e^{-i\Lambda} \end{array} \right. \quad \text{где } \Lambda \text{ - произвольное} \\ \text{киральное суперполе,} \\ (1 - \gamma_5) D \Lambda = 0$$

Важно, что в масштабном случае экспоненты  
имеют обобщение в суп.

(55)

Внутри  $V$  содержится огньшко иного степени свободы, но и калибривочный пружин в 1 также огньшко велик. Оказывается, что можно убрать гасить степеней свободы внутри  $V$  с помощью калибривочного пружина. Покажем это в обеих случаях. Тогда

$$e^{2V} \rightarrow e^{i\Lambda^* + 2V - i\Lambda}$$

$$\Leftrightarrow V \rightarrow V + \frac{i}{2}(\Lambda^* - \Lambda)$$

$$\Lambda(y, \theta) = \alpha(y) + \bar{\theta}(1+\gamma_5)\beta(y) + \frac{1}{2}\bar{\theta}(1+\gamma_5)\theta\gamma(y)$$

$$\text{т.е. } y^M = x^M + \frac{i}{2}\bar{\theta}\gamma^M\gamma_5\theta$$

$$\Lambda(x, \theta) = \alpha(x) + \bar{\theta}(1+\gamma_5)\beta(x) + \frac{1}{2}\bar{\theta}(1+\gamma_5)\theta\gamma(x) + \frac{i}{2}\bar{\theta}\gamma^M\gamma_5\theta$$

$$\cdot \partial_\mu \alpha(x) - \frac{i}{2}(\bar{\theta}\theta) \cdot \bar{\theta}\gamma^M(1+\gamma_5)\partial_\mu \beta(x) - \frac{1}{8}(\bar{\theta}\theta)^2 \partial_\mu^2 \alpha(x)$$

Беря комплексное сопряжение, получаем, что

$$\Lambda^*(x, \theta) = \alpha^*(x) + \bar{\theta}(1-\gamma_5)\beta(x) + \frac{1}{2}\bar{\theta}(1-\gamma_5)\theta\gamma^*(x) - \frac{i}{2}\bar{\theta}\gamma^M\gamma_5\theta$$

$$\cdot \partial_\mu \alpha^*(x) - \frac{i}{2}(\bar{\theta}\theta) \cdot \bar{\theta}\gamma^M(1-\gamma_5)\partial_\mu \beta(x) - \frac{1}{8}(\bar{\theta}\theta)^2 \partial_\mu^2 \alpha^*(x)$$

т.е. утено, что в обеих случаях эрмитово сопряжение заменяется на комплексное сопряжение.

Поскольку  $V \rightarrow V + \frac{i}{2}(\Lambda^* - \Lambda)$ , то

(56)

$$\delta V = \frac{i}{2}(\Lambda^* - \Lambda), \text{ m.e.}$$

$$\begin{aligned} & \delta \left[ C + i\bar{\theta}\gamma_5 \beta + \frac{1}{2}\bar{\theta}\theta \cdot K + \frac{i}{2}\bar{\theta}\gamma_5 \theta \cdot H - \frac{1}{2}\bar{\theta}\gamma^\mu \gamma_5 \theta A_\mu \right. \\ & + \frac{1}{2}\bar{\theta}\theta \cdot \bar{\theta}\gamma^\mu \gamma_5 \partial_\mu \beta + i\sqrt{2}\bar{\theta}\theta \cdot \bar{\theta}\gamma_5 \lambda + \frac{1}{4}(\bar{\theta}\theta)^2 \left( D - \frac{1}{2}\partial_\mu^2 \beta \right) \left. \right] \\ &= \frac{i}{2} \left\{ \alpha^* + \bar{\theta}(1-\gamma_5)\beta + \frac{1}{2}\bar{\theta}(1-\gamma_5)\theta\gamma^* - \frac{i}{2}\bar{\theta}\gamma^\mu \gamma_5 \theta \partial_\mu \alpha^* \right. \\ & - \frac{i}{2}\bar{\theta}\theta \cdot \bar{\theta}\gamma^\mu(1-\gamma_5)\partial_\mu \beta - \frac{1}{8}(\bar{\theta}\theta)^2 \partial_\mu^2 \alpha^* - \alpha - \bar{\theta}(1+\gamma_5)\beta \\ & - \frac{1}{2}\bar{\theta}(1+\gamma_5)\theta\gamma - \frac{i}{2}\bar{\theta}\gamma^\mu \gamma_5 \theta \partial_\mu \alpha + \frac{i}{2}\bar{\theta}\theta \cdot \bar{\theta}\gamma^\mu(1+\gamma_5)\partial_\mu \beta \\ & \left. + \frac{1}{8}(\bar{\theta}\theta)^2 \partial_\mu^2 \alpha \right\} = \\ &= Jm\alpha - i\bar{\theta}\gamma_5 \beta + \frac{1}{2}\bar{\theta}\theta \cdot Jm\gamma - \frac{i}{2}\bar{\theta}\gamma_5 \theta \operatorname{Re}\gamma + \frac{1}{2}\bar{\theta}\gamma^\mu \gamma_5 \theta \cdot \\ & \cdot \partial_\mu \operatorname{Re}\alpha - \frac{1}{2}\bar{\theta}\theta \cdot \bar{\theta}\gamma^\mu \gamma_5 \partial_\mu \beta - \frac{1}{8}(\bar{\theta}\theta)^2 \partial_\mu^2 Jm\alpha \end{aligned}$$

Помимо

$$\delta C = Jm\alpha$$

$$\delta \beta = -\beta$$

$$\delta K = Jm\gamma$$

$$\delta H = -\operatorname{Re}\gamma$$

$$\delta A_\mu = -\partial_\mu \operatorname{Re}\alpha$$

$$\delta \left[ i\sqrt{2}\gamma_5 \lambda + \frac{1}{2}\gamma^\mu \gamma_5 \partial_\mu \beta \right] =$$

$$= -\frac{1}{2}\gamma^\mu \gamma_5 \partial_\mu \beta$$

$$\Rightarrow \boxed{\delta \lambda = 0}$$

$$\delta \left[ D - \frac{1}{2}\partial_\mu^2 \beta \right] = -\frac{1}{2}\partial_\mu^2 Jm\alpha$$

$$\Rightarrow \boxed{\delta D = 0}$$

Поэтому можно выразить  $\text{Im}\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\text{Re}\gamma$  и  $\text{Im}\gamma$  (57)  
т.к. запустить поле  $C$ ,  $Z$ ,  $K$  и  $H$ .

- получается т.н. калибровка Весса-Зуммо, в  
которой

$$V(x, \theta) = -\frac{1}{2} \bar{\theta} \gamma^\mu \gamma_5 \theta A_\mu(x) + i\sqrt{2}(\bar{\theta}\theta) \cdot \bar{\theta} \gamma_5 \lambda(x) + \\ + \frac{1}{4} (\bar{\theta}\theta)^2 D(x)$$

В такой калибровке имеется симметрия изв-  
арииантность относительно преобразований с

$$\lambda(y, \theta) = \text{Re}\alpha(y) \equiv a(y), \text{ т.е.}$$

$$\left. \begin{array}{l} \phi \rightarrow e^{ia(y)} \phi \\ \phi^* \rightarrow e^{-ia(y^*)} \phi^* \\ V \rightarrow V + \frac{i}{2}(a(y^*) - a(y)) \end{array} \right\} \quad \begin{array}{l} \text{(напомним, что} \\ \text{это - адекватный)} \end{array}$$

При этом же получаем, что при таких преоб-  
разованиях

$$\varphi \rightarrow e^{ia} \varphi; \psi \rightarrow e^{ia} \psi; f \rightarrow e^{ia} f$$

$$A_\mu \rightarrow A_\mu - \partial_\mu a; \lambda \rightarrow \lambda; D \rightarrow D$$

т.е. симметрия извариантность в калибровке  
ВЗ соответствует обобщенным калибровочным преоб-  
разованиям.

В шаблонами случае можна вернуться калибровку B3 (58)

$$V(x, \theta) = -\frac{1}{2} \bar{\theta} \gamma^\mu \gamma_5 \theta A_\mu(x) + i\sqrt{2} \bar{\theta} \theta \cdot \bar{\theta} \gamma_5 \lambda(x) + \frac{1}{4} (\bar{\theta} \theta)^2 D(x)$$

Но теперь при остаточных преобразованиях с

$$\Lambda(y, \theta) = a(y)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \phi \rightarrow e^{ia(y)} \phi; \quad \phi^+ \rightarrow \phi^+ e^{-ia(y^*)} \\ e^{2V} \rightarrow e^{ia(y^*)} e^{2V} e^{-ia(y)} \end{array} \right.$$

Воспользуемся тем что поля  $A_\mu, \lambda$  и  $D$  не меняются при этих остаточных преобразованиях.

Имеем:

$$e^{2V} = 1 + 2V + \frac{1}{2}(2V)^2 + \dots \xrightarrow{B3} 1 + 2V + 2V^2 =$$

ибо в калибровке B3, т.к.  $V \sim \theta^2$

$$= 1 - \bar{\theta} \gamma^\mu \gamma_5 \theta A_\mu + 2i\sqrt{2} \bar{\theta} \theta \cdot \bar{\theta} \gamma_5 \lambda + \frac{1}{2} (\bar{\theta} \theta)^2 D +$$

$$+ 2 \left(-\frac{1}{2}\right)^2 \bar{\theta} \gamma^\mu \gamma_5 \theta A_\mu \cdot \bar{\theta} \gamma^0 \gamma_5 \theta A_0 =$$

$$= 1 - \bar{\theta} \gamma^\mu \gamma_5 \theta A_\mu + 2i\sqrt{2} \bar{\theta} \theta \cdot \bar{\theta} \gamma_5 \lambda + \frac{1}{2} (\bar{\theta} \theta)^2 (D + A_\mu^2)$$

Также приходим к выводу, что

$e^{-ia(y)}$  — киральное суперполе

$e^{+ia(y^*)}$  — антикиральное суперполе.

(59)

Позиону

$$e^{-ia(y)} = e^{-ia(x)} + \frac{i}{2} \bar{\theta} \gamma^\mu \gamma_5 \theta \partial_\mu e^{-ia(x)} - \frac{1}{8} (\bar{\theta} \theta)^2 \partial_\mu^2 e^{-ia(x)}$$

$$e^{ia(y)*} = e^{ia(x)} - \frac{i}{2} \bar{\theta} \gamma^\mu \gamma_5 \theta \partial_\mu e^{ia(x)} - \frac{1}{8} (\bar{\theta} \theta)^2 \partial_\mu^2 e^{+ia(x)}$$

Позиону при осматривающих калибротованиях преобразованиях

$$\begin{aligned} 1 - \bar{\theta} \gamma^\mu \gamma_5 \theta A'_\mu + 2i\sqrt{2} \bar{\theta} \theta \cdot \bar{\theta} \gamma_5 \lambda' + \frac{1}{2} (\bar{\theta} \theta)^2 (D' + A'^2) = \\ = \left( e^{ia} - \frac{i}{2} \bar{\theta} \gamma^\mu \gamma_5 \theta \partial_\mu e^{ia} - \frac{1}{8} (\bar{\theta} \theta)^2 \partial_\mu^2 e^{ia} \right) \left( 1 - \bar{\theta} \gamma^\mu \gamma_5 \theta A_\mu \right. \\ \left. + 2i\sqrt{2} \bar{\theta} \theta \cdot \bar{\theta} \gamma_5 \lambda + \frac{1}{2} (\bar{\theta} \theta)^2 (D + A^2) \right) \left( \bar{e}^{-ia} + \frac{i}{2} \bar{\theta} \gamma^\mu \gamma_5 \theta \right. \\ \left. \cdot \partial_\mu \bar{e}^{-ia} - \frac{1}{8} (\bar{\theta} \theta)^2 \partial_\mu^2 \bar{e}^{-ia} \right) \end{aligned}$$

Переносим бс в правой части, ббде обозначение  $\omega \equiv e^{ia}$ ;  $\omega^{-1} = \bar{e}^{-ia}$ . тогда

$$-A'_\mu = \omega (-A_\mu) \omega^{-1} + \omega \underbrace{\frac{i}{2} \partial_\mu \omega^{-1}}_{\text{второе}} - \underbrace{\frac{i}{2} \partial_\mu \omega \omega^{-1}}_{\text{третье}}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{A'_\mu = \omega A_\mu \omega^{-1} - i \omega \partial_\mu \omega^{-1}}$$

- правильной закон преобразования поле дира-макса в использующих обозначениях

$\lambda' = \omega \lambda \omega^{-1}$  - закон преобразования поле  
в присоединенное представление  
калиброповинной группы (60)

$$D' + A_\mu'^2 = \omega (D + A_\mu^2) \bar{\omega}^{-1} + i \partial_\mu \omega A_\mu \bar{\omega}^{-1} - i \omega A_\mu \partial_\mu \bar{\omega}^{-1}$$

$$- \frac{1}{4} \partial_\mu^2 \omega \cdot \bar{\omega}^{-1} - \frac{1}{4} \omega \partial_\mu^2 \bar{\omega}^{-1} + \frac{1}{2} \partial_\mu \omega \cdot \partial_\mu \bar{\omega}^{-1}$$

Возьмем из этого равенства величину  $D'$ :

$$D' = - (\omega A_\mu \bar{\omega}^{-1} + i \partial_\mu \omega \cdot \bar{\omega}^{-1}) (\omega A_\mu \bar{\omega}^{-1} - i \omega \partial_\mu \bar{\omega}^{-1})$$

$$+ \omega (D + A_\mu^2) \bar{\omega}^{-1} + i \partial_\mu \omega A_\mu \bar{\omega}^{-1} - i \omega A_\mu \partial_\mu \bar{\omega}^{-1} -$$

$$- \frac{1}{4} \partial_\mu^2 \omega \cdot \bar{\omega}^{-1} - \frac{1}{4} \omega \partial_\mu^2 \bar{\omega}^{-1} + \frac{1}{2} \partial_\mu \omega \cdot \partial_\mu \bar{\omega}^{-1} =$$

$$= - \cancel{\omega A_\mu^2 \bar{\omega}^{-1}} - \cancel{i \partial_\mu \omega A_\mu \bar{\omega}^{-1}} + \cancel{\omega A_\mu \partial_\mu \bar{\omega}^{-1}} - \cancel{\partial_\mu \omega \partial_\mu \bar{\omega}^{-1}}$$

$$+ \omega (D + A_\mu^2) \bar{\omega}^{-1} + i \cancel{\partial_\mu \omega A_\mu \bar{\omega}^{-1}} - i \cancel{\omega A_\mu \partial_\mu \bar{\omega}^{-1}}$$

$$- \frac{1}{4} \partial_\mu^2 \omega \cdot \bar{\omega}^{-1} - \frac{1}{4} \omega \partial_\mu^2 \bar{\omega}^{-1} \cancel{+ \frac{1}{2} \partial_\mu \omega \cdot \partial_\mu \bar{\omega}^{-1}} =$$

$$= \omega D \bar{\omega}^{-1} - \frac{1}{4} \partial_\mu^2 \omega \cdot \bar{\omega}^{-1} - \frac{1}{4} \omega \partial_\mu^2 \bar{\omega}^{-1} - \frac{1}{2} \partial_\mu \omega \cdot \partial_\mu \bar{\omega}^{-1}$$

$$= \omega D \bar{\omega}^{-1} - \frac{1}{4} \partial_\mu^2 (\omega \cdot \bar{\omega}^{-1}) = \omega D \bar{\omega}^{-1}$$

$$\Rightarrow \boxed{D' = \omega D \bar{\omega}^{-1}} \quad - матче присоединенное представление.$$

Возьмем теперь действие калибровочного извращающего обобщение шодежи ВЗ в калибровке ВЗ в терминах компонентных полей:

$$S = \frac{1}{4} \int d^4x d^4\theta \phi^+ e^{2V} \phi = \frac{1}{4} \int d^4x d^4\theta \phi^+ \phi +$$

$$+ \frac{1}{4} \int d^4x d^4\theta \phi^+ (e^{2V} - 1) \phi \equiv S_0 + S_1$$

Величина  $S_0$  должна найдена ранее,

$$S_0 = \frac{1}{4} \int d^4x d^4\theta \phi^+ \phi = \int d^4x \left[ \partial_\mu \psi^+ \partial_\mu \psi + i \bar{\psi} \gamma^\mu \partial_\mu \psi + f^+ f \right],$$

поскольку остается только вычислить

$$S_1' = \frac{1}{4} \int d^4x d^4\theta \phi^+ (e^{2V} - 1) \phi$$

При этом в калибровке ВЗ

$$e^{2V} - 1 \stackrel{B3}{=} 2V + 2V^2 = - \bar{\theta} \gamma^\mu \gamma_5 \theta A_\mu + 2i\sqrt{2} \bar{\theta} \theta \cdot \bar{\theta} \gamma_5 \lambda$$

$$+ \frac{1}{2} (\bar{\theta} \theta)^2 (D + A_\mu^2)$$

В терминах  $x^\mu$  и  $\theta$ , поле  $\phi$  и  $\phi^+$  примут вид

$$\begin{aligned} \phi(x, \theta) = & \psi + \bar{\theta}(1 + \gamma_5)\psi + \frac{1}{2} \bar{\theta}(1 + \gamma_5)\theta f + \frac{i}{2} \bar{\theta} \gamma^\mu \gamma_5 \theta \partial_\mu \psi \\ & - \frac{i}{2} \bar{\theta} \theta \cdot \bar{\theta} \gamma^\mu (1 + \gamma_5) \partial_\mu \psi - \frac{1}{8} (\bar{\theta} \theta)^2 \partial_\mu^2 \psi \end{aligned}$$

$$\phi^+(x, \theta) = \psi^+ + \bar{\psi}(1-\gamma_5)\theta + \frac{1}{2}\bar{\theta}(1-\gamma_5)\theta f^+ - \frac{i}{2}\bar{\theta}\gamma^\mu\gamma_5\theta\partial_\mu\psi^+ \quad (62)$$

$$+ \frac{i}{2}\bar{\theta}\theta\cdot\partial_\mu\bar{\psi}(1+\gamma_5)\gamma^\mu\theta - \frac{1}{8}(\bar{\theta}\theta)^2\partial_\mu^2\psi^+$$

Поскольку с учётом того, что  $\bar{\theta}\theta\cdot\bar{\theta}\gamma^\mu\gamma_5\theta = 0$

$$\bar{\theta}\gamma_5\theta\cdot\bar{\theta}\gamma^\mu\gamma_5\theta = 0$$

и что все степени  $\theta$ , начиная с пятой равны 0, получаем

$$S'_1 = \frac{1}{4}\int d^4x d^4\theta \left( \psi^+ + \bar{\psi}(1-\gamma_5)\theta - \frac{i}{2}\bar{\theta}\gamma^\mu\gamma_5\theta\partial_\mu\psi^+ \right).$$

$$\cdot \left( -\bar{\theta}\gamma^\mu\gamma_5\theta A_\mu + 2i\sqrt{2}\bar{\theta}\theta\cdot\bar{\theta}\gamma_5\lambda + \frac{1}{2}(\bar{\theta}\theta)^2(D+A_\mu^2) \right)$$

$$\cdot \left( \psi + \bar{\theta}(1+\gamma_5)\psi + \frac{i}{2}\bar{\theta}\gamma^\mu\gamma_5\theta\partial_\mu\psi \right) \stackrel{\rightarrow}{=}$$

(оставившиеся только слагающие 4-й степени по  $\theta$ )

$$\Rightarrow \frac{1}{4}\int d^4x d^4\theta \left\{ -\psi^+ \bar{\theta}\gamma^\mu\gamma_5\theta A_\mu \cdot \frac{i}{2}\bar{\theta}\gamma^\mu\gamma_5\theta\partial_\mu\psi \right.$$

$$+ \frac{i}{2}\bar{\theta}\gamma^\mu\gamma_5\theta\partial_\mu\psi^+ \cdot \bar{\theta}\gamma^\mu\gamma_5\theta A_\mu \cdot \psi + \frac{1}{2}(\bar{\theta}\theta)^2\psi^+(D+A_\mu^2)\psi$$

$$- \bar{\psi}(1-\gamma_5)\theta \cdot \bar{\theta}\gamma^\mu\gamma_5\theta A_\mu \cdot \bar{\theta}(1+\gamma_5)\psi + 2i\sqrt{2}\bar{\psi}(1-\gamma_5)\theta \cdot$$

$$\cdot \bar{\theta}\theta\cdot\bar{\theta}\gamma_5\lambda \cdot \psi + 2i\sqrt{2}\psi^+ \bar{\theta}\theta\cdot\bar{\theta}\gamma_5\lambda \cdot \bar{\theta}(1+\gamma_5)\psi \Big\} =$$

$$= \frac{1}{4}\int d^4x d^4\theta \left\{ -\frac{i}{2}(\bar{\theta}\theta)^2\psi^+ A_\mu \partial_\mu\psi + \frac{i}{2}(\bar{\theta}\theta)^2\partial_\mu\psi^+ A_\mu\psi \right.$$

$$+ \frac{1}{2}(\bar{\theta}\theta)^2\psi^+(D+A_\mu^2)\psi - \bar{\theta}\gamma^\mu\gamma_5\theta \cdot \frac{i}{4}\bar{\theta}\gamma^\mu\gamma_5\theta \cdot$$

$$\cdot \bar{\psi}(1-\gamma_5)\gamma^\mu\gamma_5(1+\gamma_5)A_\mu\psi - \frac{i}{\sqrt{2}}(\bar{\theta}\theta)^2\bar{\psi}(1-\gamma_5)\gamma_5\lambda \cdot \psi$$

(63)

$$-\frac{i}{\sqrt{2}} (\bar{\theta}\theta)^2 \varphi^+ \bar{\lambda} \gamma_5 (1+\gamma_5) \psi \}$$

$$= \frac{1}{4} \int d^4x d^4\theta (\bar{\theta}\theta)^2 \left\{ -\frac{i}{2} \varphi^+ A_\mu \partial_\mu \varphi + \frac{i}{2} \partial_\mu \varphi^+ A_\mu \varphi \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \varphi^+ (D + A_\mu^2) \varphi - \frac{1}{2} \bar{\psi} (1-\gamma_5) \gamma^\mu A_\mu \psi + \frac{i}{\sqrt{2}} \bar{\psi} (1-\gamma_5) \lambda \psi \right. \\ \left. - \frac{i}{\sqrt{2}} \varphi^+ \bar{\lambda} (1+\gamma_5) \psi \right\}$$

Две волнистые интеграла используются равенство

$\int d^4\theta (\bar{\theta}\theta)^2 = \delta$ , с помощью которого получаем, что

$$S'_1 = \int d^4x \left\{ -i \varphi^+ A_\mu \partial_\mu \varphi + i \partial_\mu \varphi^+ A_\mu \varphi + \varphi^+ (D + A_\mu^2) \varphi \right. \\ \left. - \bar{\psi} (1-\gamma_5) \gamma^\mu A_\mu \psi + i\sqrt{2} \bar{\psi} (1-\gamma_5) \lambda \psi - i\sqrt{2} \varphi^+ \bar{\lambda} (1+\gamma_5) \psi \right\}$$

Сложим теперь это выражение со слагаемым  $S_0$ :

$$S = \frac{1}{4} \int d^4x d^4\theta \phi^+ e^{2V} \phi = S_0 + S'_1 =$$

$$= \int d^4x \left\{ \partial_\mu \varphi^+ \partial^\mu \varphi - i \varphi^+ A_\mu \partial_\mu \varphi + i \partial_\mu \varphi^+ A_\mu \varphi + \varphi^+ A_\mu^2 \varphi \right. \\ \left. + \varphi^+ D \varphi + i \bar{\psi} \gamma^\mu \partial_\mu \psi - \bar{\psi} (1-\gamma_5) \gamma^\mu A_\mu \psi + i\sqrt{2} \bar{\psi} (1-\gamma_5) \lambda \psi \right. \\ \left. - i\sqrt{2} \varphi^+ \bar{\lambda} (1+\gamma_5) \psi \right\}$$

$$\partial_\mu \varphi^+ = \partial_\mu \varphi^+ - i \varphi^+ A_\mu.$$

$$\partial_\mu \varphi = \partial_\mu \varphi + i A_\mu \varphi$$

Поэтому

$$\partial_\mu \varphi^+ \partial_\mu \varphi = \partial_\mu \varphi^+ \partial_\mu \varphi - i \varphi^+ A_\mu \partial_\mu \varphi + i \partial_\mu \varphi^+ A_\mu \varphi +$$

$+ \varphi^+ A_\mu^2 \varphi$  — именно такая структура и получилась.

Для спинорного поля необходимо еще добавить полную ковариантную

$$- i \bar{\psi} \gamma_5 \gamma^\mu \partial_\mu \psi = - \frac{i}{2} \partial_\mu (\bar{\psi} \gamma_5 \gamma^\mu \psi), \text{ действующую,}$$

$$\Pi = - \frac{i}{2} \partial_\mu \bar{\psi} \gamma_5 \gamma^\mu \psi - \frac{i}{2} \bar{\psi} \gamma_5 \gamma^\mu \partial_\mu \psi = - i \bar{\psi} \gamma_5 \gamma^\mu \partial_\mu \psi$$

Monga слагающее, квадратичное по  $\psi$ , пропущено

$$i \bar{\psi} (1 - \gamma_5) \gamma^\mu \partial_\mu \psi - \bar{\psi} (1 - \gamma_5) \gamma^\mu A_\mu \psi =$$

$$= i \bar{\psi} (1 - \gamma_5) \gamma^\mu (\partial_\mu \psi + i A_\mu \psi) = i \bar{\psi} (1 - \gamma_5) \gamma^\mu \partial_\mu \psi$$

$$\text{так } \partial_\mu \psi = \partial_\mu \psi + i A_\mu \psi$$

и  $\Rightarrow$  все обозначения преобразились в ковариантные.

Окончательно, действие для калибровочного изо-  
риантного свободного поля Весса-Зумини  
записывается в виде

$$S = \frac{1}{4} \int d^4x d^4\theta \phi^+ e^{2V} \phi = \int d^4x \left\{ \partial_\mu \psi^+ \partial^\mu \psi + i\bar{\psi}(1-\gamma_5)\gamma^\mu \partial_\mu \psi + f^+ f + \psi^+ D \psi + i\sqrt{2}\bar{\psi}(1-\gamma_5)\lambda \psi - i\sqrt{2}\psi^+ \bar{\lambda}(1+\gamma_5)\psi \right\}$$

Используя, что компонентное выражение здесь на-  
писано в калибровке Весса-Зумини.

## §2. Преобразование суперсимметрии в калибровке Весса-Зумини

В калибровке B3

$$V(x, \theta) = -\frac{1}{2}\bar{\theta}\gamma^\mu\gamma_5\theta A_\mu(x) + i\sqrt{2}(\bar{\theta}\theta)\bar{\theta}\gamma_5\lambda(x) + \frac{1}{4}(\bar{\theta}\theta)^2 D(x)$$

Но калибровка B3 не является суперсимметрико-  
изовариантной:

$$\delta V = -i\bar{\epsilon}QV \quad \text{где} \quad Q = i\frac{\partial}{\partial\bar{\theta}} - \gamma^\mu\theta\partial_\mu.$$

$\Rightarrow$  в  $\delta V$  будут присутствовать слагаемые, не-  
 зависящие от  $\theta$ , которых нет в калибровке B3

т.о. преобразование susy "сдвигом" калибровки (66)

B3. Но ее можно восстановить с помощью некоторого калибровочного преобразования:

$$\delta = \delta_{\text{susy}} + \delta_{\text{gauge}}$$

Это преобразование удобно спарить с использованием не  $V$ , а суперпотенциала  $e^{2V}$ , поскольку в этом случае калибровочное преобразование более просто:

$$e^{2V} \rightarrow e^{i\Lambda^+} e^{2V} e^{-i\Lambda^-} \quad (1 - \gamma_5) D\Lambda = 0$$

и  $\Rightarrow$  если  $\Lambda$  мало, то

$$\delta_{\text{gauge}} e^{2V} = i\Lambda^+ e^{2V} - ie^{2V} \Lambda^-$$

(Соответствующее выражение для  $\delta_{\text{gauge}} V$  известно, но слишком сложнее)

Ранее было показано, что в калибровке B3

$$e^{2V} = 1 - \bar{\theta} \gamma^\mu \gamma_5 \theta A_\mu + 2i\sqrt{2} \bar{\theta} \theta \cdot \bar{\theta} \gamma_5 \lambda + \frac{1}{2} (\bar{\theta} \theta)^2 (D + A_\mu^2)$$

$$\delta_{\text{susy}} e^{2V} = -i\bar{\epsilon} Q e^{2V} = -i\bar{\epsilon} \left( i \frac{\partial}{\partial \bar{\theta}} - \gamma^\mu \theta \partial_\mu \right) e^{2V} =$$

$$= \left( \bar{\epsilon} \frac{\partial}{\partial \bar{\theta}} + i\bar{\epsilon} \gamma^\mu \theta \partial_\mu \right) \left( 1 - \bar{\theta} \gamma^\mu \gamma_5 \theta A_\mu + 2i\sqrt{2} \bar{\theta} \theta \cdot \bar{\theta} \gamma_5 \lambda \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2} (\bar{\theta} \theta)^2 (D + A_\mu^2) \right)$$

2/3

$$= -2\bar{\epsilon} \gamma^\mu \gamma_5 \theta A_\mu + 4i\sqrt{2} \bar{\epsilon} \theta \cdot \bar{\theta} \gamma_5 \lambda + 2i\sqrt{2} \bar{\theta} \theta \cdot \bar{\epsilon} \gamma_5 \lambda$$

$$+ 2\bar{\epsilon} \theta \cdot \bar{\theta} \theta (D + A_\mu^2) - i\bar{\epsilon} \gamma^\mu \theta \cdot \bar{\theta} \gamma^\nu \gamma_5 \theta \partial_\mu A_\nu - 2\sqrt{2} \bar{\epsilon} \gamma^\mu \theta \cdot$$

$$\cdot \bar{\theta} \gamma_5 \partial_\mu \lambda \cdot \bar{\theta} \theta =$$

$$= -2\bar{\epsilon} \gamma^\mu \gamma_5 \theta A_\mu - i\sqrt{2} (\bar{\theta} \theta) \bar{\epsilon} \gamma_5 \lambda - i\sqrt{2} (\bar{\theta} \gamma_5 \theta) \bar{\epsilon} \lambda$$

$$+ i\sqrt{2} \bar{\theta} \gamma^\mu \gamma_5 \theta \cdot \bar{\epsilon} \gamma^\mu \lambda + 2i\sqrt{2} (\bar{\theta} \theta) \bar{\epsilon} \gamma_5 \lambda + 2\bar{\epsilon} \theta \cdot \bar{\theta} \theta (D + A_\mu^2)$$

$$+ i\bar{\epsilon} \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma_5 \theta \cdot \bar{\theta} \theta \partial_\mu A_\nu + \frac{1}{\sqrt{2}} \bar{\epsilon} \gamma^\mu \gamma_5 \partial_\mu \lambda (\bar{\theta} \theta)^2 =$$

2/3

$$= -2\bar{\epsilon} \gamma^\mu \gamma_5 \theta A_\mu + i\sqrt{2} (\bar{\theta} \theta) \bar{\epsilon} \gamma_5 \lambda - i\sqrt{2} (\bar{\theta} \gamma_5 \theta) \bar{\epsilon} \lambda$$

$$+ i\sqrt{2} \bar{\theta} \gamma^\mu \gamma_5 \theta \cdot \bar{\epsilon} \gamma^\mu \lambda + 2\bar{\epsilon} \theta \cdot \bar{\theta} \theta (D + A_\mu^2) + i\bar{\epsilon} \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma_5 \theta \cdot$$

$$\cdot \bar{\theta} \theta \partial_\mu A_\nu + \frac{1}{\sqrt{2}} \bar{\epsilon} \gamma^\mu \gamma_5 \partial_\mu \lambda (\bar{\theta} \theta)^2$$

При этом подчеркнутых слагаемых в калибровке ВЗ нет. Их необходимо сократить с помощью специального подобранного бесконечно малого калибр-вочного преобразования

$$\delta_{\text{gauge}} e^{2V} = i \gamma^1 e^{2V} - i e^{2V} \gamma^1$$

При этом оказывается, что правило записи формулы (68) для  $\Lambda$  будет

$$\Lambda(y^\mu(1+\gamma_5)\theta) = +i\bar{\epsilon}\gamma^\mu(1+\gamma_5)\theta A_\mu(y) - \frac{i}{\sqrt{2}}\bar{\theta}(1+\gamma_5)\theta.$$

$$+ \bar{\epsilon}(1-\gamma_5)\lambda(y)$$

$\Leftrightarrow$

$$\begin{aligned} \Lambda &= +i\bar{\epsilon}\gamma^\mu(1+\gamma_5)\theta A_\mu(x) + i\bar{\epsilon}\gamma^\mu(1+\gamma_5)\theta \cdot \underbrace{\frac{i}{2}\bar{\theta}\gamma^0\gamma_5\theta}_{-\gamma^0\gamma_5\theta\cdot\bar{\theta}\theta} \partial_\mu A_\mu(x) \\ &- \frac{i}{\sqrt{2}}\bar{\theta}(1+\gamma_5)\theta \cdot \bar{\epsilon}(1-\gamma_5)\lambda(x) = \\ &= +i\bar{\epsilon}\gamma^\mu(1+\gamma_5)\theta A_\mu(x) - \frac{i}{2}\bar{\epsilon}\gamma^\mu\gamma^0(1-\gamma_5)\theta \cdot (\bar{\theta}\theta) \partial_\mu A_\mu(x) \\ &- \frac{i}{\sqrt{2}}\bar{\theta}(1+\gamma_5)\theta \cdot \bar{\epsilon}(1-\gamma_5)\lambda(x) \end{aligned}$$

Как следствие,

$$\begin{aligned} \Lambda^+ &= +i\bar{\epsilon}\gamma^\mu(1-\gamma_5)\theta A_\mu(x) - \frac{i}{2}\bar{\epsilon}\gamma^\mu\gamma^0(1+\gamma_5)\theta \cdot \bar{\theta}\theta \cdot \partial_\mu A_\mu(x) \\ &- \frac{i}{\sqrt{2}}\bar{\theta}(1-\gamma_5)\theta \cdot \bar{\epsilon}(1+\gamma_5)\lambda(x) \end{aligned}$$

С помощью этих выражений находим (23)

$$\begin{aligned} \delta_{\text{gauge}} e^{2V} &= i\Lambda^+ e^{2V} - ie^{2V} \Lambda = \\ &= (-\bar{\epsilon}\gamma^\mu(1-\gamma_5)\theta A_\mu - \frac{i}{2}\bar{\epsilon}\gamma^\mu\gamma^0(1+\gamma_5)\theta \cdot \bar{\theta}\theta \partial_\mu A_\mu - \frac{i}{\sqrt{2}}\bar{\theta}(1-\gamma_5)\theta \cdot \bar{\epsilon}(1+\gamma_5)\lambda) \\ &\quad (1 - \bar{\theta}\gamma^0\gamma_5\theta A_\alpha + 2i\sqrt{2}\bar{\theta}\theta \cdot \bar{\epsilon}\gamma_5\lambda + ) \end{aligned}$$

(69)

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{2} (\bar{\theta}\theta)^2 (D + A_\nu^2) \Big) - \left( 1 - \bar{\theta}\gamma^\mu \gamma_5 \theta A_\mu + 2i\sqrt{2} \bar{\theta}\theta \cdot \bar{\theta}\gamma_5 \lambda \right. \\
& \left. + \frac{1}{2} (\bar{\theta}\theta)^2 (D + A_\nu^2) \right) \left( -\bar{\epsilon}\gamma^\mu (1+\gamma_5) \theta A_\mu - \frac{i}{2} \bar{\epsilon}\gamma^\mu \gamma^5 (1-\gamma_5) \theta \cdot \right. \\
& \cdot \bar{\theta}\theta \cdot \partial_\nu A_\mu - \frac{i}{\sqrt{2}} \bar{\theta}(1+\gamma_5)\theta \cdot \bar{\epsilon}(1-\gamma_5)\lambda \Big) = \\
& = -\bar{\epsilon}\gamma^\mu (1-\gamma_5) \theta A_\mu - \frac{i}{2} \bar{\epsilon}\gamma^\mu \gamma^5 (1+\gamma_5) \theta \cdot \bar{\theta}\theta \cdot \partial_\nu A_\mu - \frac{i}{\sqrt{2}} \bar{\theta}(1-\gamma_5)\theta \\
& \cdot \bar{\epsilon}(1+\gamma_5)\lambda + \bar{\epsilon}\gamma^\mu (1-\gamma_5) \theta A_\mu \cdot \bar{\theta}\gamma^5 \gamma_5 \theta A_\nu - 2i\sqrt{2} \cdot \bar{\epsilon}\gamma^\mu (1-\gamma_5) \theta A_\mu \\
& \cdot \bar{\theta}\theta \cdot \bar{\theta}\gamma_5 \lambda \downarrow + \bar{\epsilon}\gamma^\mu (1+\gamma_5) \theta A_\mu + \frac{i}{2} \bar{\epsilon}\gamma^\mu \gamma^5 (1-\gamma_5) \theta \cdot \bar{\theta}\theta \partial_\nu A_\mu \\
& + \frac{i}{\sqrt{2}} \bar{\theta}(1+\gamma_5)\theta \cdot \bar{\epsilon}(1-\gamma_5)\lambda - \bar{\theta}\gamma^5 \gamma_5 \theta A_\nu \cdot \bar{\epsilon}\gamma^\mu (1+\gamma_5) \theta A_\mu \\
& + 2i\sqrt{2} \bar{\theta}\theta \cdot \bar{\theta}\gamma_5 \lambda \cdot \bar{\epsilon}\gamma^\mu (1+\gamma_5) \theta A_\mu = \\
& = 2\bar{\epsilon}\gamma^\mu \gamma_5 \theta A_\mu - i\sqrt{2} \bar{\theta}\theta \cdot \bar{\epsilon}\gamma_5 \lambda + i\sqrt{2} \bar{\theta}\gamma_5 \theta \cdot \bar{\epsilon}\lambda - \\
& - i\bar{\epsilon}\gamma^\mu \gamma^5 \gamma_5 \theta \cdot \bar{\theta}\theta \cdot \partial_\nu A_\mu - \bar{\epsilon}\gamma^\mu (1-\gamma_5) \gamma^5 \gamma_5 \theta \overset{+1}{(\bar{\theta}\theta)} A_\mu A_\nu \\
& + \bar{\epsilon}\gamma^\mu (1+\gamma_5) \gamma^5 \gamma_5 \theta \overset{-1}{(\bar{\theta}\theta)} A_\nu A_\mu + \frac{i}{\sqrt{2}} \bar{\epsilon}\gamma^\mu (1-\gamma_5) \gamma_5 \overset{-1}{A_\mu} \lambda \overset{+1}{(\bar{\theta}\theta)} {}^2 \\
& - \frac{i}{\sqrt{2}} \bar{\epsilon}\gamma^\mu (1+\gamma_5) \gamma_5 \lambda \overset{+1}{A_\mu} \overset{+1}{(\bar{\theta}\theta)} {}^2 =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 2\bar{\epsilon}\gamma^\mu\gamma_5\theta A_\mu - i\sqrt{2}\bar{\theta}\theta \cdot \bar{\epsilon}\gamma_5\lambda + i\sqrt{2}\bar{\theta}\gamma_5\theta \cdot \bar{\epsilon}\lambda \\
&- i\bar{\epsilon}\gamma^\mu\gamma^0\gamma_5\theta \cdot \bar{\theta}\theta \partial_\nu A_\mu - \bar{\epsilon}\gamma^\mu\gamma^0\theta \cdot \bar{\theta}\theta (A_\mu A_\nu + A_\nu A_\mu) \\
&- \bar{\epsilon}\gamma^\mu\gamma^0\gamma_5\theta \cdot \bar{\theta}\theta [A_\mu, A_\nu] - \frac{i}{\sqrt{2}}(\bar{\theta}\theta)^2 \cdot (A_\mu \cdot \bar{\epsilon}\gamma^\mu\lambda + \\
&+ \bar{\epsilon}\gamma^\mu\lambda \cdot A_\mu) + \frac{i}{\sqrt{2}}(\bar{\theta}\theta)^2 \cdot \bar{\epsilon}\gamma^\mu\gamma_5 [A_\mu, \lambda] = 
\end{aligned}$$

2/3

$$\begin{aligned}
&= 2\bar{\epsilon}\gamma^\mu\gamma_5\theta A_\mu - i\sqrt{2}\bar{\theta}\theta \cdot \bar{\epsilon}\gamma_5\lambda + i\sqrt{2}\bar{\theta}\gamma_5\theta \cdot \bar{\epsilon}\lambda \\
&- i\bar{\epsilon}\gamma^\mu\gamma^0\gamma_5\theta \cdot \bar{\theta}\theta \cdot (\partial_\nu A_\mu - i[A_\mu, A_\nu]) - 2\bar{\epsilon}\theta \cdot \bar{\theta}\theta \cdot A_\mu^2
\end{aligned}$$

$$-\frac{i}{\sqrt{2}}(\bar{\theta}\theta)^2 (A_\mu \cdot \bar{\epsilon}\gamma^\mu\lambda + \bar{\epsilon}\gamma^\mu\lambda \cdot A_\mu) + \frac{i}{\sqrt{2}}(\bar{\theta}\theta)^2 \bar{\epsilon}\gamma^\mu\gamma_5 [A_\mu, \lambda]$$

No more

$$\begin{aligned}
&\delta_{\text{gauge}} e^{2V} + \delta_{\text{gauge}} e^{2V} = -2\bar{\epsilon}\gamma^\mu\gamma_5\theta A_\mu + i\sqrt{2}\bar{\theta}\theta \cdot \bar{\epsilon}\gamma_5\lambda \\
&- i\sqrt{2}\bar{\theta}\gamma_5\theta \cdot \bar{\epsilon}\lambda + i\sqrt{2}\bar{\theta}\gamma^\mu\gamma_5\theta \cdot \bar{\epsilon}\gamma^\mu\lambda + 2\bar{\epsilon}\theta \cdot \bar{\theta}\theta (D + A_\mu^2) \\
&+ i\bar{\epsilon}\gamma^\mu\gamma^0\gamma_5\theta \cdot \bar{\theta}\theta \cdot \partial_\mu A_\nu + \frac{i}{\sqrt{2}}\bar{\epsilon}\gamma^\mu\gamma_5\partial_\mu\lambda \cdot (\bar{\theta}\theta)^2 \\
&+ 2\bar{\epsilon}\gamma^\mu\gamma_5\theta A_\mu - i\sqrt{2}\bar{\theta}\theta \cdot \bar{\epsilon}\gamma_5\lambda + i\sqrt{2}\bar{\theta}\gamma_5\theta \cdot \bar{\epsilon}\lambda \\
&- i\bar{\epsilon}\gamma^\mu\gamma^0\gamma_5\theta \cdot \bar{\theta}\theta \cdot (\partial_\mu A_\nu - i[A_\mu, A_\nu]) - 2\bar{\epsilon}\theta \cdot \bar{\theta}\theta A_\mu^2 \\
&- \frac{i}{\sqrt{2}}(\bar{\theta}\theta)^2 (A_\mu \cdot \bar{\epsilon}\gamma^\mu\lambda + \bar{\epsilon}\gamma^\mu\lambda \cdot A_\mu) + \frac{i}{\sqrt{2}}(\bar{\theta}\theta)^2 \bar{\epsilon}\gamma^\mu\gamma_5 [A_\mu, \lambda]
\end{aligned}$$

(71)

$$\begin{aligned}
 &= i\sqrt{2} \bar{\theta} \gamma^\mu \gamma_5 \theta \cdot \bar{\epsilon} \gamma^\lambda + 2\bar{\epsilon} \theta \cdot \bar{\theta} \theta \cdot D + i\bar{\epsilon} \gamma^{\mu\nu} \gamma_5 \theta \cdot \\
 &\cdot \bar{\theta} \theta \cdot F_{\mu\nu} + \frac{1}{\sqrt{2}} \bar{\epsilon} \gamma^\mu \gamma_5 \partial_\mu \lambda \cdot (\bar{\theta} \theta)^2 - \frac{i}{\sqrt{2}} (\bar{\theta} \theta)^2 (A_\mu \cdot \bar{\epsilon} \gamma^\lambda) \\
 &+ \bar{\epsilon} \gamma^\lambda \lambda \cdot A_\mu
 \end{aligned}$$

Это выражение соответствует с

$$\delta e^{2V} = -\bar{\theta} \gamma^\mu \gamma_5 \theta \delta A_\mu + 2i\sqrt{2} (\bar{\theta} \theta) \cdot \bar{\theta} \gamma_5 \delta \lambda + \frac{1}{2} (\bar{\theta} \theta)^2 \cdot$$

$$\cdot \delta(D + A_\mu^2)$$

$$\Rightarrow \delta A_\mu = -i\sqrt{2} \bar{\epsilon} \gamma^\lambda \lambda$$

$$\delta(D + A_\mu^2) = \sqrt{2} \bar{\epsilon} \gamma^\mu \gamma_5 \partial_\mu \lambda - i\sqrt{2} (A_\mu \cdot \bar{\epsilon} \gamma^\lambda + \bar{\epsilon} \gamma^\lambda A_\mu)$$

$$\Rightarrow \delta D = \sqrt{2} \bar{\epsilon} \gamma^\mu \gamma_5 \partial_\mu \lambda$$

$$2i\sqrt{2} (\bar{\theta} \theta) \cdot \bar{\theta} \gamma_5 \delta \lambda = -i\bar{\theta} \gamma^{\mu\nu} \gamma_5 \epsilon (\bar{\theta} \theta) F_{\mu\nu} + 2\bar{\theta} \epsilon (\bar{\theta} \theta) D$$

$$\Rightarrow \delta \lambda = -\gamma_5 \frac{i\sqrt{2}}{4} [-i\gamma^{\mu\nu} \gamma_5 \epsilon F_{\mu\nu} + 2\epsilon D] =$$

$$= -\frac{1}{2\sqrt{2}} \gamma^{\mu\nu} \epsilon F_{\mu\nu} - \frac{i}{\sqrt{2}} \gamma_5 \epsilon D$$

Поэтому окончательно преобразование SUSY  
калибровочного шутинкеля в калибровке B3  
принимает вид

$$\delta A_\mu = -i\sqrt{2} \bar{\epsilon} \gamma_\mu \lambda$$

$$\delta \lambda = -\frac{i}{2\sqrt{2}} \gamma^{\mu\nu} \epsilon F_{\mu\nu} - \frac{i}{\sqrt{2}} \gamma_5 \epsilon D$$

$$\delta D = \sqrt{2} \bar{\epsilon} \gamma^\mu \gamma_5 \partial_\mu \lambda$$

Кроме того, идентифицируются и преобразования SUSY для киральского шурбатиплита:

$$\delta \phi = \delta_{\text{SUSY}} \phi + \delta_{\text{gauge}} \phi = -i\bar{\epsilon} Q \phi + i\Lambda \phi$$

т.к.  $\phi \rightarrow e^{i\Lambda} \phi$  при калиброновых преобразованиях.

Вот исходный добавок:

$$i\Lambda \phi = i \left( i\bar{\epsilon} \gamma^\mu (1+\gamma_5) \theta A_\mu(y) - \frac{i}{\sqrt{2}} \bar{\theta} (1+\gamma_5) \theta \bar{\epsilon} (1-\gamma_5) \lambda(y) \right).$$

$$\cdot \left( \psi(y) + \bar{\theta} (1+\gamma_5) \psi(y) + \frac{i}{2} \bar{\theta} (1+\gamma_5) \theta f(y) \right) =$$

$$= -\bar{\epsilon} \gamma^\mu (1+\gamma_5) \theta A_\mu(y) \psi(y) - \frac{i}{\sqrt{2}} \bar{\theta} (1+\gamma_5) \theta \cdot \bar{\epsilon} (1-\gamma_5) \lambda(y) \psi(y)$$

$$- \bar{\epsilon} \gamma^\mu (1+\gamma_5) \theta A_\mu(y) \cdot \bar{\theta} (1+\gamma_5) \psi(y) =$$

$$= \bar{\theta} (1+\gamma_5) \gamma^\mu \epsilon A_\mu \psi(y) - \frac{i}{\sqrt{2}} \bar{\theta} (1+\gamma_5) \theta \bar{\epsilon} (1-\gamma_5) \lambda \psi(y)$$

$$+ \frac{i}{2} \bar{\theta} (1+\gamma_5) \theta \cdot \bar{\epsilon} \gamma^\mu (1+\gamma_5) A_\mu \psi(y)$$

Поэтому

$$\left\{ \begin{array}{l} \delta_{\text{gauge}} \psi = 0 \\ \delta_{\text{gauge}} [(1+\gamma_5)\psi] = (1+\gamma_5) \gamma^\mu \epsilon A_\mu \psi \\ \delta_{\text{gauge}} f = -i\sqrt{2} \bar{\epsilon} (1-\gamma_5) \lambda \psi + \bar{\epsilon} \gamma^\mu (1+\gamma_5) A_\mu \psi \end{array} \right.$$

Ранее было показано, что

$$\left\{ \begin{array}{l} \delta_{\text{susy}} \psi = \bar{\epsilon} (1+\gamma_5) \psi \\ \delta_{\text{susy}} [(1+\gamma_5)\psi] = (1+\gamma_5) [\epsilon \cdot f - i \gamma^\mu \epsilon \partial_\mu \psi] \\ \delta_{\text{susy}} f = -i\bar{\epsilon} \gamma^\mu (1+\gamma_5) \partial_\mu \psi \end{array} \right.$$

Складывая, получаем з-и преобразований компонент кирольного мультиплекса в калибровке Весса-Зуммо:

$$\left\{ \begin{array}{l} \delta \psi = \bar{\epsilon} (1+\gamma_5) \psi \\ \delta [(1+\gamma_5)\psi] = (1+\gamma_5) [\epsilon \cdot f - i \gamma^\mu \epsilon \partial_\mu \psi] \\ \delta f = -i\bar{\epsilon} \gamma^\mu (1+\gamma_5) \partial_\mu \psi - i\sqrt{2} \bar{\epsilon} (1-\gamma_5) \lambda \psi \end{array} \right.$$

Убираем оператор также как и ранее:

$$\left\{ \begin{array}{l} \delta \psi = \bar{\epsilon} (1+\gamma_5) \psi \\ \delta \psi = (R e f + i \gamma_5 J m f) \epsilon - i (R e \partial_\mu \psi + i \gamma_5 J m \partial_\mu \psi) \gamma^\mu \epsilon \\ \delta f = -i\bar{\epsilon} \gamma^\mu (1+\gamma_5) \partial_\mu \psi - i\sqrt{2} \bar{\epsilon} (1-\gamma_5) \lambda \psi \end{array} \right.$$

(74)

§3. Суперсимметрический аналог тензора напряжимости калибровочного поля.

В следующем случае

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + i [A_\mu, A_\nu]$$

При локальных калибровочных преобразованиях

$$F_{\mu\nu} \rightarrow w F_{\mu\nu} \bar{w}' \quad \text{где } w \in G$$

Построим суперполе, которое является суперсимметрическим аналогом  $F_{\mu\nu}$ . Оказывается, что оно представляет собой вейлевский спинор

$$W_a = \frac{1}{32} \bar{D}(1-\gamma_5)D \left[ \bar{e}^{2V} (1+\gamma_5) D_a e^{2V} \right]$$

Постараемся понять, почему это так.

Вызапись основных свойств  $W_a$ :

$$1) \quad (1-\gamma_5)_a^\beta W_\beta = 0, \quad \text{т.к. } (1-\gamma_5)(1+\gamma_5) = 0$$

$\Rightarrow W$  действительно является вейлевским (правым) спинором.

2)  $W_a$  - киральное суперполе,

$$(1-\gamma_5) D_\beta W_a = 0$$

- следствие антикоммутиации компонент  $(1-\gamma_5)D$ .

Действительно, у  $(1-\gamma_s)D$  только 2 компонента, (75)  
поэтому, если они антикоммутируют, то любое  
3-е произведение будет равно 0.

Однако

$$\{D_a, D_b\} = -2(\gamma^{\mu}C)_{ab} i\partial_{\mu} \neq 0.$$

Также не менее, при умножении на  $(1-\gamma_s)_c^a (1-\gamma_s)_d^b$   
получаем

$$\{(1-\gamma_s)D_c, (1-\gamma_s)D_d\} = -2[(1-\gamma_s)\gamma^{\mu}C(1-\gamma_s)]_{cd} i\partial_{\mu} = 0$$

и.к.  $\gamma^{\mu}C$  является произведением 3-х  $\gamma$ -матриц

$$u \Rightarrow (1-\gamma_s)\gamma^{\mu}C(1-\gamma_s) = (1-\gamma_s)(1+\gamma_s)\gamma^{\mu}C = 0.$$

Поэтому компоненты  $(1-\gamma_s)D$  антикоммутируют

$$u \Rightarrow (1-\gamma_s)D_a \cdot (1-\gamma_s)D_b \cdot (1-\gamma_s)D_c = 0$$

В частности,  $(1-\gamma_s)D_a \cdot \bar{D}(1-\gamma_s)D = 0$

$$= \frac{1}{2} C^{bc} (1-\gamma_s)D_a \cdot (1-\gamma_s)D_b \cdot (1-\gamma_s)D_c = 0$$

Поэтому величина  $\bar{D}(1-\gamma_s)D$  при действии на  
любое суперполе будет давать чистоное суперполе.

3) Находим теперь как  $W_a$  изменяется при гамильтонионных преобразованиях:

(76)

Ранее мы нашли, что при калибровочных преобразованиях

$$e^{2V} \rightarrow e^{i\Lambda^+} e^{2V} e^{-i\Lambda^-} \quad \text{также } (1-\gamma_5)D\Lambda = 0$$

$$u \Rightarrow e^{-2V} \rightarrow e^{i\Lambda^-} e^{-2V} e^{-i\Lambda^+}$$

поэтому

$$W_a = \frac{1}{32} \bar{D}(1-\gamma_5)D \left[ \bar{e}^{-2V} (1+\gamma_5)D_a e^{2V} \right] \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{1}{32} \bar{D}(1-\gamma_5)D \left[ e^{i\Lambda^+} \bar{e}^{-2V} e^{-i\Lambda^-} (1+\gamma_5)D_a (e^{i\Lambda^+} e^{2V} \bar{e}^{-i\Lambda^-}) \right]$$

поскольку  $\Lambda^+$  антиковариантно и

$i\Lambda^-$  ковариантно

$$u \Rightarrow e^{i\Lambda^+} \Rightarrow (1+\gamma_5)D_a e^{i\Lambda^+} = 0.$$

$$= e^{i\Lambda^+} \frac{1}{32} \bar{D}(1-\gamma_5)D \left[ \bar{e}^{-2V} (1+\gamma_5)D_a (e^{2V} \bar{e}^{-i\Lambda^-}) \right] =$$

(правило Лейбница для ковариантной производной)

$$= e^{i\Lambda^+} \frac{1}{32} \bar{D}(1-\gamma_5)D \left[ \bar{e}^{-2V} ((1+\gamma_5)D_a e^{2V}) \bar{e}^{-i\Lambda^-} \right]$$

$$+ e^{i\Lambda^+} \frac{1}{32} \bar{D}(1-\gamma_5)D \left[ (1+\gamma_5)D_a \bar{e}^{-i\Lambda^-} \right] =$$

$$= e^{i\Lambda^+} W_a \bar{e}^{-i\Lambda^-} + e^{i\Lambda^+} \frac{1}{32} \bar{D}^\mu \left\{ (1-\gamma_5)D_\mu, (1+\gamma_5)D_a \right\} \bar{e}^{-i\Lambda^-}$$

При этом

$$\left\{ (1-\gamma_5)D_\mu, (1+\gamma_5)D_a \right\} = -2 \left[ (1-\gamma_5)\gamma^\mu C (1+\gamma_5) \right]_{\mu a} i\partial_\mu =$$

$$= -4[(1-\gamma_5)\gamma^\mu c]_{ba} i\partial_\mu.$$

Поэтому при калибровочных преобразованиях

$$\begin{aligned} W_a &\rightarrow e^{+i\Lambda} W_a \bar{e}^{-i\Lambda} - \frac{i}{8} e^{i\Lambda} (\overline{D}(1-\gamma_5)\gamma^\mu c_b) \partial_\mu \bar{e}^{-i\Lambda} \underbrace{c_c^{-1}}_{CC^{-1}} \\ &= e^{i\Lambda} W_a \bar{e}^{-i\Lambda} - \frac{i}{8} e^{i\Lambda} \partial_\mu (D_b c^{bc} \cdot c_{cd} ((1-\gamma_5)\gamma^{\mu\nu})^d{}_a) \bar{e}^{-i\Lambda} \\ &= e^{i\Lambda} W_a \bar{e}^{-i\Lambda} + \frac{i}{8} e^{i\Lambda} \partial_\mu \cancel{(}\cancel{\gamma^\mu(1-\gamma_5)D})_a \bar{e}^{-i\Lambda} \\ &\quad \text{O } \cancel{(} \text{киральность } \bar{e}^{-i\Lambda} \cancel{)} \end{aligned}$$

Поэтому

$$W_a \rightarrow e^{i\Lambda} W_a \bar{e}^{-i\Lambda}$$

- похоже на закон преобразования тензора поля. Кажется, видно, что калибровочное преобразование переводит киральное суперполе снова в киральное.

4) Находим, выражение  $W_a$  в калибровке Весса-Зуммо.

В калибровке ВЗ калибровочное суперполе имеет вид

$$V_{B3}(x, \theta) = -\frac{1}{2} \bar{\theta} \gamma^\mu \gamma_5 \theta A_\mu(x) + i\sqrt{2} (\bar{\theta} \theta) \bar{\theta} \gamma_5 \lambda(x) + \frac{1}{4} (\bar{\theta} \theta)^2 D(x)$$

- разложение начинается со второй степени  $\theta$ .

Позиционный

$$e^{-2V} D_\theta e^{2V} = (1 - 2V + 2V^2) D_\theta (1 + 2V + 2V^2) =$$

$$= (1 - 2V + 2V^2) \underbrace{(2D_\theta V + 2V D_\theta V + 2D_\theta V \cdot V)}_{\sim \theta^1} =$$

$$= 2D_\theta V + 2V D_\theta V + 2D_\theta V \cdot V - \underline{4V D_\theta V} =$$

$$= 2D_\theta V + 2D_\theta V \cdot V - 2V D_\theta V = 2D_\theta V - 2[V, D_\theta V]$$

Напомним, что это выражение  $V_{B3}$  и

$$D = \frac{\partial}{\partial \bar{\theta}} - i(\gamma^\mu \theta) \partial_\mu.$$

$$D V_{B3} = \left( \frac{\partial}{\partial \bar{\theta}} - i(\gamma^\mu \theta) \partial_\mu \right) \left( -\frac{1}{2} \bar{\theta} \gamma^0 \gamma_5 \theta A_\nu + i\sqrt{2} \bar{\theta} \theta \cdot \bar{\theta} \gamma_5 \lambda \right.$$

$$+ \frac{1}{4} (\bar{\theta} \theta)^2 D \right) = - \gamma^\mu \gamma_5 \theta A_\mu + 2i\sqrt{2} \bar{\theta} \theta \cdot \bar{\theta} \gamma_5 \lambda + i\sqrt{2} \bar{\theta} \theta \cdot$$

$$\cdot \gamma_5 \lambda + \theta \cdot (\bar{\theta} \theta) D + \frac{i}{2} (\gamma^\mu \theta) \cdot \bar{\theta} \gamma^0 \gamma_5 \theta \partial_\mu A_\nu + (\gamma^\mu \theta) \cdot$$

$$\sqrt{2} (\bar{\theta} \theta) \cdot \bar{\theta} \gamma_5 \partial_\mu \lambda =$$

$$= \gamma_5 \gamma^\mu \theta A_\mu + \cancel{\frac{i}{\sqrt{2}} \bar{\theta} \theta \cdot \gamma_5 \lambda} - \frac{i}{\sqrt{2}} \bar{\theta} \gamma_5 \theta \cdot \lambda + \frac{i}{\sqrt{2}} \bar{\theta} \gamma^\mu \gamma_5 \theta \cdot$$

$$\cdot \gamma^\mu \lambda + \cancel{i\sqrt{2} \bar{\theta} \theta \cdot \gamma_5 \lambda} + \theta \cdot (\bar{\theta} \theta) D - \frac{i}{2} \gamma^\mu \gamma^0 \gamma_5 \theta \cdot \bar{\theta} \theta \cdot$$

$$\cdot \partial_\mu A_\nu - \frac{1}{2\sqrt{2}} (\bar{\theta} \theta)^2 \gamma^\mu \gamma_5 \theta \partial_\mu \lambda =$$

(79)

$$\begin{aligned}
 &= \gamma_5 \gamma^\mu \theta A_\mu + \frac{i}{\sqrt{2}} \bar{\theta} \theta \cdot \gamma_5 \lambda - \frac{i}{\sqrt{2}} \bar{\theta} \gamma_5 \theta \lambda + \frac{i}{\sqrt{2}} \cdot \\
 &\quad \cdot \bar{\theta} \gamma^\mu \gamma_5 \theta \gamma^\lambda + \theta \cdot (\bar{\theta} \theta) D - \frac{i}{2} \gamma_5 \gamma^\mu \gamma^\lambda \theta \cdot \bar{\theta} \theta \partial_\mu A_\lambda \\
 &\quad + \frac{1}{2\sqrt{2}} (\bar{\theta} \theta)^2 \gamma_5 \gamma^\mu \partial_\mu \lambda
 \end{aligned}$$

Кроме того, нам необходимо

$$[V, D_B V]_{B3} = \left[ -\frac{1}{2} \bar{\theta} \gamma^\mu \gamma_5 \theta A_\mu + i\sqrt{2} \bar{\theta} \theta \cdot \bar{\theta} \gamma_5 \lambda + \frac{1}{4} (\bar{\theta} \theta)^2 D, \right.$$

$$\begin{aligned}
 &\left( \gamma_5 \gamma^\lambda \theta A_\lambda + \frac{i}{\sqrt{2}} \bar{\theta} \theta \cdot \gamma_5 \lambda - \frac{i}{\sqrt{2}} \bar{\theta} \gamma_5 \theta \lambda + \frac{i}{\sqrt{2}} \bar{\theta} \gamma^\lambda \gamma_5 \theta \gamma^\lambda \right. \\
 &\quad \left. + \theta \cdot (\bar{\theta} \theta) D - \frac{i}{2} \gamma_5 \gamma^\mu \gamma^\lambda \theta \cdot (\bar{\theta} \theta) \partial_\mu A_\lambda + \frac{1}{2\sqrt{2}} (\bar{\theta} \theta)^2 \gamma_5 \gamma^\lambda \partial_\lambda \lambda \right] \\
 &= -\frac{1}{2} \gamma_5 \gamma^\lambda \theta \cdot \bar{\theta} \gamma^\mu \gamma_5 \theta [A_\mu, A_\lambda] - \frac{i}{2\sqrt{2}} (\bar{\theta} \theta)^2 \gamma^\mu [A_\mu, \lambda] \\
 &\quad + i\sqrt{2} \left( -\frac{1}{4} \right) (\bar{\theta} \theta)^2 \cancel{\gamma_5 \gamma^\lambda} \cancel{\gamma_5} [\lambda, A_\lambda] = \\
 &= \frac{1}{2} \gamma^\lambda \gamma^\mu \theta (\bar{\theta} \theta) [A_\mu, A_\lambda] - \frac{i}{\sqrt{2}} (\bar{\theta} \theta)^2 \gamma^\mu [A_\mu, \lambda]
 \end{aligned}$$

Итак

$$\frac{1}{2} (1+\gamma_5)_a^b \cdot e^{-2V} D_B e^{2V} = \frac{1}{2} e^{-2V} (1+\gamma_5) D_a e^{2V} =$$

$$= (1+\gamma_5) D_a V - [V, (1+\gamma_5) D_a V] =$$

(80)

$$\begin{aligned}
 &= (1+\gamma_5) \left\{ \gamma^\mu \theta A_\mu + \frac{i}{\sqrt{2}} \bar{\theta} (1-\gamma_5) \theta \cdot \lambda + \frac{i}{\sqrt{2}} \bar{\theta} \gamma^\mu \gamma_5 \theta \gamma^\mu \lambda \right. \\
 &\quad + \theta \cdot (\bar{\theta} \theta) D - \frac{i}{2} \gamma^\mu \gamma^\nu \theta \cdot \bar{\theta} \theta \cdot \partial_\mu A_\nu + \frac{1}{2\sqrt{2}} (\bar{\theta} \theta)^2 \gamma^\mu \partial_\mu \lambda \\
 &\quad \left. - \frac{1}{2} \gamma^\mu \gamma^\nu \theta \cdot \bar{\theta} \theta \cdot \underbrace{[A_\mu, A_\nu]}_{\text{---}} + \frac{i}{\sqrt{2}} (\bar{\theta} \theta)^2 \gamma^\mu [A_\mu, \lambda] \right\}_a
 \end{aligned}$$

D/3

$$\begin{aligned}
 &= (1+\gamma_5) \left\{ \gamma^\mu \theta_a A_\mu + \frac{i}{\sqrt{2}} \lambda_a \cdot \bar{\theta} (1-\gamma_5) \theta + \gamma^\mu \lambda_a \cdot \frac{i}{\sqrt{2}} \bar{\theta} \gamma^\mu \gamma_5 \theta \right. \\
 &\quad + \theta_a (\bar{\theta} \theta) \left( D - \frac{i}{2} \partial_\mu A_\mu \right) - \frac{i}{2} \gamma^\mu \theta_a \cdot (\bar{\theta} \theta) (\partial_\mu A_\nu + i [A_\mu, A_\nu]) \\
 &\quad \left. + \frac{1}{2\sqrt{2}} (\bar{\theta} \theta)^2 \gamma^\mu (\partial_\mu \lambda_a + 2i [A_\mu, \lambda_a]) \right\} = \frac{1}{2} e^{-2V} (1+\gamma_5) D_a e^{2V}
 \end{aligned}$$

После этого к полученному выражению необходимо применить оператор  $\frac{1}{16} \bar{D} (1-\gamma_5) D$ .

При этом  $\bar{D}^a \equiv D_b C^{ba} = C^{ba} \left( \frac{\partial}{\partial \bar{\theta}^b} - i (\gamma^\mu \theta)_b \partial_\mu \right)$

Имеем:

$$\begin{aligned}
 &(-C \gamma^\mu \theta)^T = (-C \gamma^\mu C' C \theta)^T = (\gamma^{\mu T} C \theta)^T = \\
 &= \theta^T C^T \gamma^\mu = -\bar{\theta} \gamma^\mu
 \end{aligned}$$

$$C^{ba} \frac{\partial}{\partial \bar{\theta}^b} = C^{ba} \frac{\partial \theta_c}{\partial \bar{\theta}^b} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta_c} = (\text{comp. 19}) = C^{ba} C_{cb} \frac{\partial}{\partial \theta_c} = -\frac{\partial}{\partial \theta_a}$$

Поэтому

$$\bar{D} = -\frac{\partial}{\partial \theta} + i\bar{\theta}\gamma^\mu \partial_\mu$$

Как следствие,

$$\bar{D}(1-\gamma_5)\bar{D} = \left(-\frac{\partial}{\partial \theta} + i\bar{\theta}\gamma^\mu \partial_\mu\right)(1-\gamma_5)\left(\frac{\partial}{\partial \bar{\theta}} - i\gamma^0 \theta \partial_0\right) =$$

$$\cancel{D}\cancel{D} = -\frac{\partial}{\partial \theta}(1-\gamma_5)\frac{\partial}{\partial \bar{\theta}} + 2i\bar{\theta}\gamma^\mu(1-\gamma_5)\frac{\partial}{\partial \bar{\theta}}\partial_\mu + \bar{\theta}(1+\gamma_5)\theta\partial^2$$

На какой бы объект не действовал бы этот оператор, всегда будет получаться идентичное суперполе. Действительно, переберём все возможности:

$$a) \underline{\bar{D}(1-\gamma_5)\bar{D}\varphi(x)} = \bar{\theta}(1+\gamma_5)\theta\partial^2\varphi(x) = \underline{\bar{\theta}(1+\gamma_5)\theta\partial^2\varphi(y)}$$

$$\delta) \underline{\bar{D}(1-\gamma_5)\bar{D}(\theta_a\varphi(x))} = -2i(1-\gamma_5)\gamma^\mu\theta_a\partial_\mu\varphi(x) + \bar{\theta}(1+\gamma_5)\theta\cdot\theta_a\partial^2\varphi(x) \\ = \underline{-2i\gamma^\mu(1+\gamma_5)\theta_a\partial_\mu\varphi(y)}$$

$$m.k. = -2i\gamma^\mu(1+\gamma_5)\theta_a\partial_\mu\varphi(x) + \gamma^\mu(1+\gamma_5)\theta_a\cdot\bar{\theta}\gamma^0\gamma_5\theta\partial_\mu\partial_\nu\varphi(x)$$

$$= -2i\gamma^\mu(1+\gamma_5)\theta_a\partial_\mu\varphi(x) - \gamma^\mu(1+\gamma_5)\gamma^0\gamma_5\theta\cdot(\bar{\theta}\theta)^{-1}\partial_\mu\partial_\nu\varphi(x)$$

$$= -2i\gamma^\mu(1+\gamma_5)\theta_a\partial_\mu\varphi(x) + (1-\gamma_5)\theta\cdot(\bar{\theta}\theta)\partial^2\varphi(x)$$

$$= -2i\gamma^\mu(1+\gamma_5)\theta_a + \theta\cdot\bar{\theta}(1+\gamma_5)\theta\partial^2\varphi(x) - \text{берно.}$$

b)

$$\underline{\bar{D}(1-\gamma_5)D(\bar{\theta}\theta \cdot \varphi(x))} = -\frac{\partial}{\partial \theta} (1-\gamma_5) \cdot 2\theta \cdot \varphi(x)$$

$$+ 2i\bar{\theta}\gamma^\mu(1-\gamma_5) \cdot 2\theta \partial_\mu \varphi(x) + (\bar{\theta}\theta)^2 \partial_\mu^2 \varphi(x) =$$

$$= -8\varphi(x) - 4i\bar{\theta}\gamma^\mu\gamma_5\theta \partial_\mu \varphi(x) + (\bar{\theta}\theta)^2 \partial_\mu^2 \varphi(x) = \underline{-8\varphi(y)},$$

$$c) \quad \underline{\bar{D}(1-\gamma_5)D(\bar{\theta}\gamma_5\theta \cdot \varphi(x))} = 8\varphi(x) + 4i\bar{\theta}\gamma^\mu\gamma_5\theta \partial_\mu \varphi(x)$$

$$+ (\bar{\theta}\gamma_5\theta)^2 \partial_\mu^2 \varphi(x) = \underline{+8\varphi(y)},$$

$$g) \quad \underline{\bar{D}(1-\gamma_5)D(\bar{\theta}\gamma^\rho\gamma_5\theta \cdot \varphi(x))} = 2i\bar{\theta}\gamma^\mu(1-\gamma_5) \cdot 2\gamma^\rho\gamma_5\theta \partial_\mu \varphi(x)$$

$$= 4i\bar{\theta}\gamma^\mu\gamma^\rho(1+\gamma_5)\theta \partial_\mu \varphi(x) = \underline{4i\bar{\theta}(1+\gamma_5)\theta \partial_\mu^2 \varphi(y)},$$

$$e) \quad \underline{\bar{D}(1-\gamma_5)D(\theta_a(\bar{\theta}\theta) \cdot \varphi(x))} = \left( -\frac{\partial}{\partial \theta} (1-\gamma_5) \frac{\partial}{\partial \bar{\theta}} + 2i \frac{\partial}{\partial \theta} (1-\gamma_5) \cdot \right.$$

$$\left. \gamma^\mu \theta \partial_\mu \right) (\theta_a(\bar{\theta}\theta) \cdot \varphi(x)) = (1-\gamma_5) \frac{\partial}{\partial \bar{\theta}} \theta \left( \delta_a^\beta \bar{\theta}\theta + 2\theta_a \bar{\theta}^\beta \right) \varphi(x)$$

$$- 2i(1-\gamma_5)\gamma^\mu \theta_\beta \cdot \left( \delta_a^\beta \bar{\theta}\theta + 2\theta_a \bar{\theta}^\beta \right) \partial_\mu \varphi(x) =$$

$$= (4(1-\gamma_5)\theta_a - 8\theta_a) \varphi(x) - 2i(1-\gamma_5)\gamma^\mu \theta_a \overset{\text{y5}}{\cancel{\theta}} \bar{\theta} \partial_\mu \varphi(x)$$

$$- 4i\theta_a \cdot \bar{\theta}\gamma^\mu\gamma_5\theta \partial_\mu \varphi(x) = - 4(1+\gamma_5)\theta_a \varphi(x) -$$

$$- 2i(1+\gamma_5)\theta_a \cdot \bar{\theta}\gamma^\mu\gamma_5\theta \partial_\mu \varphi(x) = \underline{-4(1+\gamma_5)\theta_a \varphi(y)},$$

(83)

$$*) \quad \underbrace{\bar{D}(1-\gamma_S)D((\bar{\theta}\theta)^2\varphi(x))}_{=} = -\frac{\partial}{\partial\theta_a}(1-\gamma_S)\cdot 4\theta_a(\bar{\theta}\theta)\varphi(x)$$

$$= [-16\bar{\theta}\theta - 4\theta_a \cdot 2\bar{\theta}(1-\gamma_S)^a] \varphi(x) = [-16\bar{\theta}\theta + 8\bar{\theta}(1-\gamma_S)\theta] \varphi$$

$$= -8\bar{\theta}(1+\gamma_S)\theta \varphi(y)$$

- видно, что во всех случаях действительно получается краильное суперполе.

Применим теперь полученные результаты для вычисления

$$\begin{aligned} W_a &= \frac{1}{32} \bar{D}(1-\gamma_S)D[e^{-2V}(1+\gamma_S)D_a e^{2V}] = \\ &= \frac{1}{16} \bar{D}(1-\gamma_S)D \cdot \frac{1}{2} (e^{-2V}(1+\gamma_S)D_a e^{+2V}) = \\ &= \frac{1}{16} \bar{D}(1-\gamma_S)D \left[ (1+\gamma_S) \left\{ \gamma^\mu \theta_a A_\mu + \frac{i}{\sqrt{2}} \lambda_a \bar{\theta}(1-\gamma_S)\theta + \right. \right. \\ &\quad + \gamma^\mu \lambda_a \cdot \frac{i}{\sqrt{2}} \bar{\theta} \gamma^\nu \gamma_S \theta + \theta_a (\bar{\theta}\theta) \left( D - \frac{i}{2} \partial_\mu A_\mu \right) - \frac{i}{2} \gamma^\mu \theta_a \cdot \bar{\theta}\theta \cdot \\ &\quad \cdot \left( \partial_\mu A_\nu + i[A_\mu, A_\nu] \right) + \frac{1}{2\sqrt{2}} (\bar{\theta}\theta)^2 \gamma^\mu (\partial_\mu \lambda_a + 2i[A_\mu, \lambda_a]) \left. \right\} \Big] \\ &= \frac{1}{16} (1+\gamma_S) \left\{ -2i\gamma^\mu \gamma^\nu (1+\gamma_S) \theta_a \partial_\nu A_\mu (y) + \frac{i}{\sqrt{2}} (-16) \lambda_a (y) \right. \\ &\quad \left. + \frac{i}{\sqrt{2}} \cdot 4i\bar{\theta}(1+\gamma_S)\theta \gamma^\mu \partial_\mu \lambda_a (y) - 4(1+\gamma_S) \theta_a \left( D(y) - \frac{i}{2} \partial_\mu A_\mu (y) \right) \right\} \end{aligned}$$

(84)

$$\begin{aligned}
& - \frac{i}{2} \gamma^{\mu\nu} (-4) (1+\gamma_5) \theta_a \cdot (\partial_\mu A_\nu(y) + i [A_\mu(y), A_\nu(y)]) \\
& + \frac{1}{2\sqrt{2}} \cdot (-8) \bar{\theta}(1+\gamma_5) \theta \cdot \gamma^\mu (\partial_\mu \lambda_a(y) + 2i [A_\mu(y), \lambda_a(y)]) \Big\} = \\
& = (1+\gamma_5) \left\{ -\frac{i}{4} (\gamma^{\mu\nu} + \gamma^{\nu\mu}) \theta_a \cdot \underline{\partial_\nu A_\mu} - \frac{i}{\sqrt{2}} \lambda_a - \frac{1}{4\sqrt{2}} \bar{\theta}(1+\gamma_5) \theta \cdot \right. \\
& \cdot \underline{\gamma^\mu \partial_\mu \lambda_a} - \frac{1}{2} \theta_a \left( D - \frac{i}{2} \partial_\mu A_\mu \right) + \frac{i}{4} \gamma^{\mu\nu} \theta_a (\underline{\partial_\mu A_\nu} + i [A_\mu, A_\nu]) \\
& \left. - \frac{1}{4\sqrt{2}} \bar{\theta}(1+\gamma_5) \theta \cdot \underline{\gamma^\mu (\partial_\mu \lambda_a + 2i [A_\mu, \lambda_a])} \right\} = \\
& \boxed{Q/B} = (1+\gamma_5) \left\{ -\frac{i}{\sqrt{2}} \lambda_a(y) - \frac{1}{2} \theta_a D(y) + \frac{i}{4} \gamma^{\mu\nu} \theta_a F_{\mu\nu}(y) \right. \\
& \left. - \frac{1}{2\sqrt{2}} \bar{\theta}(1+\gamma_5) \theta \cdot \gamma^\mu \partial_\mu \lambda_a(y) \right\}
\end{aligned}$$

$$\text{где } F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + i [A_\mu, A_\nu]$$

$$\partial_\mu \lambda = \partial_\mu \lambda + i [A_\mu, \lambda]$$

т.о. окончательно мы получаем, что в каноническое  
Бесс-Зумино

$$\boxed{W_a = \frac{1}{2} (1+\gamma_5) \left\{ -i\sqrt{2} \lambda_a(y) - \theta_a D(y) + \frac{i}{2} \gamma^{\mu\nu} \theta_a F_{\mu\nu}(y) \right.} \\
\left. - \frac{1}{\sqrt{2}} \bar{\theta}(1+\gamma_5) \theta \gamma^\mu \partial_\mu \lambda_a(y) \right\}}$$

т.о. киральное суперполе  $W_a(y^M, (1+\gamma_5)\theta)$  в ка- (85)  
честве одной из компонент содержит  $F_{\mu\nu}$  и  $\Rightarrow$   
является его суперсимметрическим аналогом.

При остаточных калибровочных преобразованиях с  
 $\Lambda = a(y^M)$ ,  $a \in \text{Re}$  и  $w = e^{ia}$

мы получаем, что из з-ва преобразование

$$W_a \rightarrow e^{i\Lambda} W_a e^{-i\Lambda}$$

получаются преобразования

$$\lambda \rightarrow w\lambda w^{-1}; \quad D \rightarrow wDw^{-1};$$

$$F_{\mu\nu} \rightarrow wF_{\mu\nu}w^{-1}; \quad \partial_\mu \lambda \rightarrow w\partial_\mu \lambda w^{-1}$$

- всё получается правильно.

#### §4. $N=1$ суперсимметрическая теория Циннга

Построим теперь суперсимметрический аналог

величин

$$\int d^4x \left( -\frac{1}{4}(F_{\mu\nu}^A)^2 \right) = -\frac{1}{2e^2} \text{tr} \int d^4x F_{\mu\nu}^2.$$

- предположительно некоторая величина, квадра-  
тическая по  $W_a$  и инвариантная относи-  
тельно групповой подгруппы.

Вариант  $\bar{W}W$  же  $\bar{W} = W^+ \gamma^0$  не подходит, т.к.  $W$  - правый спинор, а

$$\begin{aligned}\bar{\psi}_R &= \left[ \frac{1}{2}(1+\gamma_5)\psi \right]^+ \gamma^0 = \psi^+ \frac{1}{2}(1+\gamma_5) \gamma^0 = \psi^+ \gamma^0 \frac{1}{2}(1-\gamma_5) \\ &= (\bar{\psi})_L \quad \text{и} \Rightarrow \bar{\psi}_R \psi_L = 0.\end{aligned}$$

Но есть еще одно коренное вариантическое выражение

$$\overline{W^c} W = W^T C W = W_a C^{ab} W_b$$

где  $C$  - матрица зарядового сопряжения.

Однако, что это выражение  $\neq 0$  из-за киральности, т.к.  $C$  есть произведение 2-х  $\gamma$ -матриц.

Величина  $W_a C^{ab} W_b$  очевидно является киральной и  $\Rightarrow$  где получим инвариант относительно преобразований суперсимметрии её нужно приводить по киральному суперпространству:

$$S_{N=1 \text{ SYM}} = \frac{1}{2e^2} \operatorname{Re} \operatorname{tr} \int d^4x d^2\theta W_a C^{ab} W_b$$

- действие  $N=1$  суперсимметричной теории Янга-Миллса, записанное в терминах суперполей

Суперсимметрия и калибр-симметрия описаны 87

Калиброворонье избарванием:

$$W_a \rightarrow e^{i\Lambda} W_a e^{-i\Lambda}$$

$$\Rightarrow \text{tr} \int d^4x d^2\theta W_a C^{ab} W_b \rightarrow \text{tr} \int d^4x d^2\theta e^{i\Lambda} W_a \cancel{e^{-i\Lambda}}$$

$$\cancel{C^{ab} e^{i\Lambda} W_b e^{-i\Lambda}} = \text{tr} \int d^4x d^2\theta W_a C^{ab} W_b = i\omega$$

Наиболее теперь выражение для действия в терминах компонентных полей в калибровке

Бесс-Зуммо.

Ранее было показано, что в калибровке ВЗ

$$W_a = \frac{1}{2}(1+\gamma_5) \left\{ -i\sqrt{2}\lambda_a(y) - \theta_a D(y) + \frac{i}{2}\gamma^{\mu\nu}\theta_a F_{\mu\nu}(y) \right. \\ \left. - \frac{1}{\sqrt{2}}\bar{\theta}(1+\gamma_5)\theta \gamma^\mu \partial_\mu \lambda_a(y) \right\}$$

имеем:

$$\left[ \frac{1}{2}(1+\gamma_5)\lambda \right]^T C = \lambda^T \frac{1}{2}(1+\gamma_5) C = \lambda^T C \frac{1}{2}(1+\gamma_5) =$$

$$= \bar{\lambda} \cdot \frac{1}{2}(1+\gamma_5)$$

$$\left[ \frac{1}{2}(1+\gamma_5)\gamma^{\mu\nu}\theta \right]^T C = \theta^T (\gamma^{\mu\nu})^T C \cdot \frac{1}{2}(1+\gamma_5) =$$

$$= \bar{\theta} C^{-1} \frac{1}{2}(\gamma^\mu \gamma^\nu - \gamma^\nu \gamma^\mu)^T C \cdot \frac{1}{2}(1+\gamma_5) = -\bar{\theta} \gamma^{\mu\nu} \frac{1}{2}(1+\gamma_5)$$

(88)

$$[\frac{1}{2}(1+\gamma_5)\gamma^\mu \partial_\mu \lambda]^T C = \partial_\mu \lambda^T \gamma^{\mu T} C \cdot \frac{1}{2}(1+\gamma_5) = \\ = - \partial_\mu \bar{\lambda} \gamma^\mu \frac{1}{2}(1+\gamma_5).$$

Поэтому

$$W^T C = \left\{ -i\sqrt{2} \bar{\lambda}(y) - \bar{\theta} D(y) - \frac{i}{2} \bar{\theta} \gamma^{\mu \nu} F_{\mu \nu}(y) + \right. \\ \left. + \frac{1}{\sqrt{2}} \bar{\theta}(1+\gamma_5) \theta \cdot \partial_\mu \bar{\lambda}(y) \gamma^\mu \right\} \frac{1}{2}(1+\gamma_5)$$

Ранее было показано, что

$$\int d^4x d^2\theta \Phi(y, (1+\gamma_5)\theta) = \int d^4x d^2\theta \Phi(x, (1+\gamma_5)\theta) +$$

+ поверхностные члены.

Поэтому с точностью до поверхностных членов

$$S_{N=1 \text{ SYM}} = \frac{1}{2e^2} \text{Re} \text{tr} \int d^4x d^2\theta \left\{ -i\sqrt{2} \bar{\lambda}(x) - \bar{\theta} D(x) - \right. \\ \left. - \frac{i}{2} \bar{\theta} \gamma^{\mu \nu} F_{\mu \nu}(x) + \frac{1}{\sqrt{2}} \bar{\theta}(1+\gamma_5) \theta \partial_\mu \bar{\lambda}(x) \gamma^\mu \right\} \frac{1}{2}(1+\gamma_5) \cdot \\ \cdot \left\{ -i\sqrt{2} \lambda(x) - \theta D(x) + \frac{i}{2} \gamma^{\alpha \beta} \theta F_{\alpha \beta}(x) - \frac{1}{\sqrt{2}} \bar{\theta}(1+\gamma_5) \theta \gamma^\alpha \partial_\alpha \lambda(x) \right\} \\ - \text{ нужно сохранить только слагаемое, квадратичное по } (1+\gamma_5)\theta \text{ и использующее равенство} \\ \int d^2\theta \cdot \bar{\theta}(1+\gamma_5)\theta = 4.$$

(89)

$$\Rightarrow S_{N=1 \text{ SYM}} = \frac{1}{2e^2} \text{Re} \operatorname{tr} \int d^4x d^2\theta \left\{ + i\cancel{\sqrt{2}} \bar{\lambda} \cdot \frac{1}{2} (1+\gamma_5) \gamma^\mu \partial_\mu \lambda \right.$$

$$+ \cancel{\frac{1}{\sqrt{2}}} \bar{\theta} (1+\gamma_5) \theta + \bar{\theta} \cdot \frac{1}{2} (1+\gamma_5) \theta \cdot D^2 + \frac{1}{4} \bar{\theta} \gamma^{\mu\nu} \frac{1}{2} (1+\gamma_5) \gamma^{\alpha\beta} \theta$$

$$+ F_{\mu\nu} F_{\alpha\beta} + \cancel{\frac{1}{\sqrt{2}}} \bar{\theta} (1+\gamma_5) \theta \cdot \partial_\mu \bar{\lambda} \gamma^\nu \frac{1}{2} (1+\gamma_5) (-i) \cancel{\sqrt{2}} \lambda \}$$

При more

$$\bar{\theta} \gamma^{\mu\nu} \gamma^{\alpha\beta} (1+\gamma_5) \theta = \frac{1}{4} \bar{\theta} \theta \cdot \operatorname{tr} (\gamma^{\mu\nu} \gamma^{\alpha\beta} (1+\gamma_5)) +$$

$$+ \frac{1}{4} \bar{\theta} \gamma_5 \theta \cdot \operatorname{tr} (\gamma^{\mu\nu} \gamma^{\alpha\beta} (1+\gamma_5) \gamma_5) - \frac{1}{8} \cancel{\bar{\theta} \gamma^{\delta\theta} \theta} \operatorname{tr} (\gamma^{\mu\nu} \gamma^{\alpha\beta} (1+\gamma_5) \gamma^{\delta\theta})$$

$$\cdot (1+\gamma_5) \gamma^{\delta\theta} ) =$$

$$= \cancel{\frac{1}{4}} \bar{\theta} (1+\gamma_5) \theta \cdot \cancel{\left[ \gamma^{\mu\beta} \gamma^{\alpha\delta} - \gamma^{\mu\alpha} \gamma^{\beta\delta} - i \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} \right]}$$

Нормируя

$$S_{N=1 \text{ SYM}} = \frac{1}{2e^2} \text{Re} \operatorname{tr} \int d^4x d^2\theta \cdot \bar{\theta} (1+\gamma_5) \theta \cdot \left\{ \frac{i}{2} \bar{\lambda} (1+\gamma_5) \gamma^\mu \partial_\mu \lambda \right.$$

$$+ \frac{1}{2} D^2 + \frac{1}{8} F_{\mu\nu} F_{\alpha\beta} \left( - \gamma^{\mu\alpha} \gamma^{\beta\delta} + \gamma^{\mu\beta} \gamma^{\alpha\delta} - i \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} \right) -$$

$$- \frac{i}{2} \cancel{\partial_\mu \bar{\lambda} \gamma^\mu (1+\gamma_5) \lambda} \left. \right\} =$$

$$= \frac{2}{e^2} \text{Re} \operatorname{tr} \int d^4x \left\{ - \frac{1}{4} F_{\mu\nu}^2 - \frac{i}{4} F_{\mu\nu} \tilde{F}^{\mu\nu} + \frac{1}{2} D^2 \right.$$

$$+ i \bar{\lambda} \gamma^\mu \partial_\mu \lambda - \frac{i}{2} \partial_\mu (\bar{\lambda} \gamma^\mu \gamma_5 \lambda) \left. \right\}$$

т.к.  $\text{tr } F_{\mu\nu} \tilde{F}^{\mu\nu}$  - поле гравитации, то (90)

имущее гасить подгипотезального выражение является полной гравитацией.

После вычитания существенной части получим

$$S_{N=1 \text{ SYM}} = \frac{2}{e^2} \text{tr} \int d^4x \left\{ -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^2 + \frac{1}{2} D^2 + i\bar{\gamma}^\mu \partial_\mu \lambda \right\}$$

- видно, что  $D$  - вспомогательное поле, а суперпартийон  $A_\mu$  является шайболовским спинором  $\lambda$  в присоединенном представлении калибровочной группы.

Д/З Доказать тождество

$$0 = (\gamma^\mu)^{ab} (\gamma_\mu)^{cd} + (\gamma^\mu)^{ac} (\gamma_\mu)^{db} + (\gamma^\mu)^{ad} (\gamma_\mu)^{bc}$$

Указание: провести разложение по матрицам

$$C_{ba} \quad (\gamma_5 C)_{ba} \quad (\gamma^0 C)_{ba} \quad (\gamma^0 \gamma_5 C)_{ba} \quad (\gamma^{ab} C)_{ba},$$

которые образуют базис в н-ве  $4 \times 4$  матриц

Д/З С помощью этого тождества доказать инвариантность теории относительно SUSY преобразований

$$\delta A_\mu = -i\sqrt{2} \bar{\epsilon} \gamma_\mu \lambda \quad \delta \lambda = -\frac{i}{2\sqrt{2}} \gamma^\mu \epsilon F_{\mu\nu} - \frac{i}{\sqrt{2}} \gamma_5 \epsilon D$$

$$\delta D = \sqrt{2} \bar{\epsilon} \gamma^\mu \gamma_5 \partial_\mu \lambda$$

## §5. $N=1$ суперсимметрическое КХД

(91)

Построим  $N=1$  суперсимметрическое обобщение КХД — т.е. теории, в которой есть дураковские фермионы, а левые и правые частицы одинаковыми образом взаимодействуют с калибровочными полеми. При этом  $G$  — калибровочная группа, а  $R$  — представление, в котором лежат дураковские фермионы.

1 дураковский фермион имеет on shell 4 см. в.

1 шайораковский фермион — 2 см. в.

Поэтому разумно строить дураковский фермион из 2-х шайораковских.

$$(1 - \gamma_5) D \phi = 0$$

$$\phi(y^\mu, (1 + \gamma_5)\theta) = \psi(y) + \bar{\theta}(1 + \gamma_5)\psi(y) + \frac{1}{2}\bar{\theta}(1 + \gamma_5)\theta f(y)$$

- внутри кирального суприона содержится 1 шайораковский спинор.

Пусть  $\phi$  лежит в представлении  $R$  калибровочной группы. Возьмём ещё суприон  $\tilde{\phi} \in \overline{R}$ , т.е.  $(1 - \gamma_5) D \tilde{\phi} = 0$

$$\tilde{\Phi}(y^M, (1+\gamma_5)\theta) \equiv \tilde{\varphi}(y) + \bar{\theta}(1+\gamma_5)\tilde{\psi}(y) + \frac{1}{2}\bar{\theta}(1+\gamma_5)\theta\tilde{f}(y) \quad (92)$$

- здесь появляется ещё один антибарионический спинор  $\tilde{\psi}$ .

Поскольку чётко представление  $\overline{R}$  будем понимать так же.

Действие  $N=1$  SQCD можно записать в терминах суперполей в виде

$$S = \frac{1}{2e^2} \text{tr} \text{Re} \int d^4x d^2\theta W_a C^{ab} W_b + \frac{1}{4} \int d^4x d^4\theta$$

$$(\phi^+ e^{2V} \phi + \tilde{\phi}^+ e^{-2V^T} \tilde{\phi}) + \left( \frac{1}{2} \int d^4x d^2\theta \tilde{\phi}^T \phi + \text{k.c.} \right)$$

Эта теория обладает явной инвариантной относительно преобразований SUSY и групп Лоренца. Кроме того, есть компактная инвариантность:

$$\begin{cases} \phi \rightarrow e^{i\Lambda} \phi & \text{также } (1-\gamma_5)D\Lambda = 0 \\ \tilde{\phi} \rightarrow \bar{e}^{-i\Lambda^T} \tilde{\phi} & \Lambda = e\Lambda^A T^A \\ e^{2V} \rightarrow e^{i\Lambda^+} e^{2V} e^{-i\Lambda^-} & (\text{или } \Lambda = e\Lambda^A t^A) \end{cases}$$

Действительно, для компактных групп если

$$\varphi \rightarrow \omega \varphi, \text{ то } \varphi^* \rightarrow \omega^* \varphi^* = (\omega^+)^T \varphi^* = (\bar{\omega}')^T \varphi^*$$

Поэтому и  $\tilde{\phi} \in \bar{R}$  такой закон преобразования. (93)

$$\phi^+ e^{2V} \phi \rightarrow \phi^+ \cancel{e^{-i\Lambda^+}} \cdot e^{i\Lambda^+} e^{2V} \cancel{e^{-i\Lambda^-}} \cdot e^{i\Lambda^-} \phi = \phi^+ e^{2V} \phi = i\omega$$

$$\text{tr } W_a C^{ab} W_b \rightarrow \text{tr} (\cancel{e^{i\Lambda^-}} W_a \cancel{e^{-i\Lambda^-}} C^{ab} \cancel{e^{i\Lambda^+}} W_b \cancel{e^{-i\Lambda^+}}) = \text{tr} (W_a C^{ab} W_b) = i\omega$$

$$e^{-2V} \rightarrow e^{i\Lambda^-} e^{-2V} e^{-i\Lambda^+}$$

$$e^{-2V^T} \rightarrow e^{-i\Lambda^*} e^{-2V^T} e^{i\Lambda^T}$$

$$\tilde{\phi}^+ \tilde{e}^{-2V^T} \tilde{\phi} \rightarrow \tilde{\phi}^+ \cancel{e^{i\Lambda^*}} \cdot \cancel{e^{-i\Lambda^*}} \tilde{e}^{-2V^T} \cancel{e^{i\Lambda^T}} \cancel{e^{-i\Lambda^T}} \tilde{\phi} = \tilde{\phi}^+ \tilde{e}^{-2V^T} \tilde{\phi} = i\omega.$$

$$\tilde{\phi}^T \phi \rightarrow \tilde{\phi}^T \cancel{e^{-i\Lambda^-}} \cdot \cancel{e^{i\Lambda^+}} \phi = \tilde{\phi}^T \phi = i\omega.$$

Т.о. мы убедились, что рассматриваемая теория действительна является калибровочно инвариантной.

Запишем теперь действие в терминах компонентных полей в калибровке В3 и убедимся, что оно действительно описывает суперсимметричное обобщение КХД.

Норму бсн уже было вычислено ранее:

(94)

$$\frac{1}{2e^2} \text{tr} \text{Re} \int d^4x d^4\theta W_a C^{ab} W_b = \frac{2}{e^2} \text{tr} \int d^4x \left\{ -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^2 + \frac{1}{2} D^2 + i \bar{\lambda} \gamma^\mu \partial_\mu \lambda \right\}$$

$$\frac{1}{4} \int d^4x d^4\theta \phi^+ e^{2V} \phi = \int d^4x \left\{ \partial_\mu \phi^+ \partial^\mu \phi + i \bar{\psi} (1 - \gamma_5) \gamma^\mu \partial_\mu \psi + f^+ f - \bar{\psi}^+ D \psi + i \sqrt{2} \bar{\psi} (1 - \gamma_5) \lambda \psi - i \sqrt{2} \psi^+ \bar{\lambda} (1 + \gamma_5) \psi \right\}$$

Аналогичным образом вычисляется слагаемое с суперполем  $\tilde{\Phi}$ , в котором  $A_\mu, \lambda$  и  $D$  нужно заменить на  $-A_\mu^T; -\lambda^T$  и  $-D^T$  соответственно.

В результате

$$\frac{1}{4} \int d^4x d^4\theta \tilde{\Phi}^+ e^{-2V^T} \tilde{\Phi} = \int d^4x \left\{ \partial_\mu \tilde{\psi}^+ \partial^\mu \tilde{\psi} + i \bar{\tilde{\psi}} (1 - \gamma_5) \gamma^\mu \partial_\mu \tilde{\psi} + \tilde{f}^+ \tilde{f} - \tilde{\psi}^+ D^T \tilde{\psi} - i \sqrt{2} \bar{\tilde{\psi}} (1 - \gamma_5) \lambda^T \tilde{\psi} + i \sqrt{2} \tilde{\psi}^+ \bar{\lambda}^T (1 + \gamma_5) \tilde{\psi} \right\}$$

тое транспонирование действует на члены от калибровочной группы. При этом

$$\partial_\mu \psi = \partial_\mu \psi + i A_\mu \psi \quad \partial_\mu \tilde{\psi} = \partial_\mu \tilde{\psi} + i A_\mu \tilde{\psi}$$

$$\partial_\mu \tilde{\psi} = \partial_\mu \tilde{\psi} - i A_\mu^T \tilde{\psi} \quad \partial_\mu \tilde{\psi} = \partial_\mu \tilde{\psi} - i A_\mu^T \tilde{\psi}$$

$$\partial_\mu \lambda = \partial_\mu \lambda + i [A_\mu, \lambda]$$

$$\frac{m}{2} \int d^4x d^2\theta \tilde{\phi}^T \phi + \text{k.c.} \xrightarrow{\text{(омбрасорбции н. праизб.)}} \text{95}$$

$$\xrightarrow{} \frac{m}{2} \int d^4x d^2\theta \left( \tilde{\psi}^T(x) + \bar{\psi}(x) (1+\gamma_5) \theta + \frac{1}{2} \bar{\theta} (1+\gamma_5) \theta \tilde{f}^T(x) \right).$$

$$\left( \psi(x) + \bar{\theta} (1+\gamma_5) \psi(x) + \frac{1}{2} \bar{\theta} (1+\gamma_5) \theta f(x) \right) + \text{k.c.} =$$

$$= \frac{m}{2} \int d^4x d^2\theta \cdot \bar{\theta} (1+\gamma_5) \theta \left\{ \frac{1}{2} \tilde{\psi}^T f + \frac{1}{2} \tilde{f}^T \psi - \frac{1}{2} \bar{\psi} (1+\gamma_5) \psi \right\}$$

$$+ \text{k.c.} =$$

$$= m \int d^4x \left\{ \tilde{\psi}^T f + \tilde{f}^T \psi - \bar{\psi} (1+\gamma_5) \psi \right\} + \tilde{\psi}^T f^* + \tilde{f}^T \psi^*$$

$$- \bar{\psi} (1-\gamma_5) \psi \right\} =$$

$$= m \int d^4x \left\{ \tilde{\psi}^T f + \tilde{f}^T \psi + \tilde{\psi}^T f^* + \tilde{f}^T \psi^* - 2 \bar{\psi} \psi \right\}$$

м.о., собирая б.c. вместе, получаем, что

$$S = \int d^4x \left\{ \frac{2}{e^2} \text{tr} \left( -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^2 + \frac{1}{2} D^2 + i \bar{\lambda} \gamma^\mu \partial_\mu \lambda \right) \right\}$$

$$+ \partial_\mu \psi^+ \partial^\mu \psi + i \bar{\psi} (1-\gamma_5) \gamma^\mu \partial_\mu \psi + f^+ f + \psi^+ D \psi$$

$$+ i \sqrt{2} \bar{\psi} (1-\gamma_5) \lambda \psi - i \sqrt{2} \psi^+ \bar{\lambda} (1+\gamma_5) \psi \right\} + \partial_\mu \tilde{\psi}^+ \partial^\mu \tilde{\psi}$$

$$+ i \bar{\psi} (1+\gamma_5) \gamma^\mu \partial_\mu \tilde{\psi} + \tilde{f}^+ \tilde{f} - \tilde{\psi}^+ D^T \tilde{\psi} - i \sqrt{2} \bar{\tilde{\psi}} (1-\gamma_5) \lambda^T \tilde{\psi}$$

$$+ i \sqrt{2} \tilde{\psi}^+ \bar{\lambda}^T (1+\gamma_5) \tilde{\psi} \right\} + m \left( \tilde{\psi}^T f + \tilde{f}^T \psi + \tilde{\psi}^T f^* + \tilde{f}^T \psi^* - 2 \bar{\psi} \psi \right)$$

При этом спиноры  $\psi$  и  $\tilde{\psi}$  - антигравовские. (96)

Было бы желательно записать результат в терминах дураковского спинора, который можно определить формулой

$$\psi = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[ (1 + \gamma_5) \psi + (1 - \gamma_5) \tilde{\psi} \right]$$

тогда

$$\begin{aligned}\bar{\psi} &= \psi^+ \gamma^0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[ \psi^+ (1 + \gamma_5) + \tilde{\psi}^+ (1 - \gamma_5) \right] \gamma^0 = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left[ \psi^+ \gamma^0 (1 - \gamma_5) + \tilde{\psi}^+ \gamma^0 (1 + \gamma_5) \right] = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left[ \bar{\psi} (1 - \gamma_5) + \bar{\tilde{\psi}} (1 + \gamma_5) \right]\end{aligned}$$

Поэтому

$$i \bar{\psi} \gamma^\mu \partial_\mu \psi = i \bar{\psi} \gamma^\mu (\partial_\mu + i A_\mu) \psi = \frac{i}{2} \left[ \underline{\bar{\psi} (1 - \gamma_5)} + \underline{\bar{\tilde{\psi}} (1 + \gamma_5)} \right] \cdot$$

$$\cdot \gamma^\mu (\partial_\mu + i A_\mu) \left[ \underline{(1 + \gamma_5) \psi} + \underline{(1 - \gamma_5) \tilde{\psi}} \right] = i \bar{\psi} (1 - \gamma_5) \gamma^\mu \cdot$$

$$\cdot (\partial_\mu + i A_\mu) \psi + i \bar{\tilde{\psi}} (1 + \gamma_5) \gamma^\mu (\partial_\mu + i A_\mu) \tilde{\psi}$$

Чисим:

$$\begin{aligned}i \bar{\tilde{\psi}} (1 + \gamma_5) \gamma^\mu \partial_\mu \tilde{\psi} &= i \bar{\tilde{\psi}} (1 - \gamma_5) \gamma^\mu \partial_\mu \tilde{\psi} + 2i \bar{\tilde{\psi}} \gamma_5 \gamma^\mu \partial_\mu \tilde{\psi} = \\ &= i \bar{\tilde{\psi}} (1 - \gamma_5) \gamma^\mu \partial_\mu \tilde{\psi} + \partial_\mu [i \bar{\tilde{\psi}} \gamma_5 \gamma^\mu \tilde{\psi}]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 i\bar{\psi}(1+\gamma_5)\gamma^\mu \cdot iA_\mu \tilde{\psi} &= i\tilde{\psi}^T C(1+\gamma_5)\gamma^\mu \cdot iA_\mu \tilde{\psi} = \\
 &= (i\tilde{\psi}^T C(1+\gamma_5)\gamma^\mu \cdot iA_\mu \tilde{\psi})^T = i\tilde{\psi}^T \cdot iA_\mu^T C C^{-1} \gamma^{\mu T} (1+\gamma_5) C \tilde{\psi} \\
 &= i\tilde{\psi}^T C \cdot iA_\mu^T (-\gamma^\mu) (1+\gamma_5) \tilde{\psi} = i\bar{\psi}(1-\gamma_5)\gamma^\mu (-iA_\mu^T) \tilde{\psi}
 \end{aligned}$$

Поэтому

$$\begin{aligned}
 i\bar{\psi}\gamma^\mu \partial_\mu \psi &= i\bar{\psi}(1-\gamma_5)\gamma^\mu (\partial_\mu + iA_\mu) \psi + i\bar{\psi}(1-\gamma_5)\gamma^\mu \\
 &\quad \cdot (\partial_\mu - iA_\mu^T) \tilde{\psi} + \partial_\mu [i\bar{\psi}\gamma_5 \gamma^\mu \tilde{\psi}] \xrightarrow{\text{можна исключить из действия.}}
 \end{aligned}$$

Массовое слагаемое:

$$\begin{aligned}
 \bar{\psi}\psi &= \frac{1}{2} [\underline{\bar{\psi}(1-\gamma_5)} + \underline{\bar{\psi}(1+\gamma_5)}] \cdot [\underline{(1+\gamma_5)\psi} + \underline{(1-\gamma_5)\tilde{\psi}}] \\
 &= \bar{\psi}(1-\gamma_5)\tilde{\psi} + \bar{\psi}(1+\gamma_5)\psi = 2\bar{\psi}\tilde{\psi}.
 \end{aligned}$$

т.о. в действии действительно будет присутствовать дураковский лауриниан

$$i\bar{\psi}\gamma^\mu \partial_\mu \psi - m\bar{\psi}\psi \quad \text{где } \partial_\mu \psi \equiv \partial_\mu \psi + iA_\mu \psi.$$

Но ещё есть токавиче слагаемое, которое также необходимо записать через спинор  $\psi$ . Имеем:

(98)

$$i\sqrt{2}\bar{\psi}(1-\gamma_5)\lambda\psi = i\bar{\psi}(1-\gamma_5)\lambda\psi \quad - \text{очевидно}$$

$$-i\sqrt{2}\psi^+\bar{\lambda}(1+\gamma_5)\psi = -i\psi^+\bar{\lambda}(1+\gamma_5)\psi \quad - \text{очевидно}$$

$$-i\sqrt{2}\bar{\tilde{\psi}}(1-\gamma_5)\lambda^T\tilde{\psi} = [\text{нужно преобразовать, чтобы записать в терминах } \psi]$$

$$= -i\sqrt{2}(\bar{\tilde{\psi}}(1-\gamma_5)\lambda^T\tilde{\psi})^T = -i\sqrt{2}\tilde{\psi}^T\bar{\lambda}(1-\gamma_5)\tilde{\psi} =$$

$$= -i\tilde{\psi}^T\bar{\lambda}(1-\gamma_5)\psi$$

$$i\sqrt{2}\tilde{\psi}^+\bar{\lambda}^T(1+\gamma_5)\tilde{\psi} = i\sqrt{2}(\tilde{\psi}^+\bar{\lambda}^T(1+\gamma_5)\tilde{\psi})^T =$$

$$= i\sqrt{2}\bar{\tilde{\psi}}(1+\gamma_5)\lambda\tilde{\psi}^* = i\bar{\psi}(1+\gamma_5)\lambda\tilde{\psi}^*.$$

т.о. в терминах дураковского спинора  $\psi$  действие рассматриваемой модели записывается в виде

$$S = \int d^4x \left\{ \frac{2}{e^2} \text{tr} \left( -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^2 + \frac{1}{2} D^2 + i\bar{\lambda}\gamma^\mu \partial_\mu \lambda \right) \right.$$

$$+ \partial_\mu \psi^+ \partial^\mu \psi + \partial_\mu \tilde{\psi}^+ \partial^\mu \tilde{\psi} + f^+ f + \tilde{f}^+ \tilde{f} + \psi^+ D \psi$$

$$- \tilde{\psi}^+ D \tilde{\psi} + m (\tilde{\psi}^+ f + \tilde{f}^+ \psi + \tilde{\psi}^+ f^* + \tilde{f}^+ \psi^*) +$$

$$+ i\bar{\psi}\gamma^\mu \partial_\mu \psi - m\bar{\psi}\psi + i\bar{\psi}(1-\gamma_5)\lambda\psi - i\psi^+\bar{\lambda}(1+\gamma_5)\psi$$

$$- i\tilde{\psi}^T\bar{\lambda}(1-\gamma_5)\psi + i\bar{\psi}(1+\gamma_5)\lambda\tilde{\psi}^* \right\}$$

Исключим в этом выражении вспомогательное поле  $D$ ,  $f$  и  $\tilde{f}$ .

Используем поле  $D^A$  ( $D = e D^A t^A$  в части действия, соответствующей  $N=1$  SYM, и  $D = e D^A \tilde{t}^A$  в части, содержащей суперполе материи).

$$\frac{2}{e^2} \operatorname{tr} \left( \frac{1}{2} D^2 \right) = \frac{1}{2} (D^A)^2$$

$\Rightarrow$  все слагаемое, содержащие  $D^A$ , имеют вид

$$\frac{1}{2} (D^A)^2 + e \varphi^+ T^A D^A \varphi - e \tilde{\varphi}^+ T^{AT} D^A \tilde{\varphi}$$

$\Rightarrow$  при  $e$  движении где  $D^A$  присутствует

$$0 = D^A + e \varphi^+ T^A \varphi - e \tilde{\varphi}^+ T^{AT} \tilde{\varphi} =$$

$$= D^A + e (\varphi^+ T^A \varphi - \tilde{\varphi}^+ T^A \tilde{\varphi}^*)$$

поскольку  $\tilde{\varphi}^+ T^{AT} \tilde{\varphi} = (\tilde{\varphi}^+ T^{AT} \tilde{\varphi})^T = \tilde{\varphi}^+ T^A \tilde{\varphi}^*$ .

Для исключения поле  $D^A$  подставляем решение  $\varphi$ -и движения в квадратичное члене с обратными знаками,

$$-\frac{1}{2} (D^A)^2 \Rightarrow -\frac{e^2}{2} (\varphi^+ T^A \varphi - \tilde{\varphi}^+ T^A \tilde{\varphi}^*)^2$$

При этом  $(\varphi^+ T^A \varphi)^* = (\varphi^+ T^A \varphi)^+ = \varphi^+ T^A \varphi \in \mathbb{R}$

и аналогично  $\tilde{\varphi}^+ T^A \tilde{\varphi}^* \in \mathbb{R}$

Затем исключаем  $f$  и  $\tilde{f}$ . Согласно с этим (100) получим итогом  $buge$

$$f^+ f + \tilde{f}^+ \tilde{f} + m(\tilde{\varphi}^\tau f + \tilde{f}^\tau \varphi + \tilde{\varphi}^+ f^* + \tilde{f}^+ \varphi^*)$$

мат. зно уп-е движение записывается в виде

$$0 = f^+ + m\tilde{\varphi}^\tau \Leftrightarrow f^* = -m\tilde{\varphi}$$

$$0 = f + m\tilde{\varphi}^* \Leftrightarrow f = -m\tilde{\varphi}^*$$

$$0 = \tilde{f}^+ + m\varphi^\tau \Leftrightarrow \tilde{f}^* = -m\varphi$$

$$0 = \tilde{f} + m\varphi^* \Leftrightarrow \tilde{f} = -m\varphi^*$$

Подставляем решение уравнений движения в

$$-f^+ f - \tilde{f}^+ \tilde{f} \rightarrow -m^2 \tilde{\varphi}^+ \tilde{\varphi} - m^2 \varphi^+ \varphi$$

Поэтому после исключения вспомогательных полей получим, что

$$\begin{aligned} S' = \int d^4x \left\{ & -\frac{1}{4} (F_{\mu\nu}^A)^2 + i\bar{\lambda}^A \gamma^\mu \partial_\mu \lambda^A + \partial_\mu \varphi^+ \partial^\mu \varphi \\ & + \partial_\mu \tilde{\varphi}^+ \partial^\mu \tilde{\varphi} - m^2 \varphi^+ \varphi - m^2 \tilde{\varphi}^+ \tilde{\varphi} - \frac{e^2}{2} (\varphi^+ T^A \varphi - \tilde{\varphi}^+ \tilde{T}^A \tilde{\varphi}^*)^2 \right. \\ & + i\bar{\psi} \gamma^\mu \partial_\mu \psi - m\bar{\psi} \psi + i\bar{\psi} (1-\gamma_5) \lambda \varphi - i\varphi^+ \bar{\lambda} (1+\gamma_5) \psi \\ & \left. - i\tilde{\varphi}^+ \bar{\lambda} (1-\gamma_5) \psi + i\bar{\psi} (1+\gamma_5) \lambda \tilde{\varphi}^* \right\} \end{aligned}$$

Видно, что рассматриваемая теория действует (101) только симметрическими обобщениями КХД. Так же есть потенциал для скалярных полей

$$V = m^2 \varphi^\dagger \varphi + m^2 \tilde{\varphi}^\dagger \tilde{\varphi} + \frac{e^2}{2} (\varphi^\dagger T^A \varphi - \tilde{\varphi}^\dagger T^A \tilde{\varphi})^2 \geq 0$$

- автоматически получается положительно определенное выражение. (Это следствие алгебры суперсимметрии)

Массы бозонных полей  $\varphi$  и  $\tilde{\varphi}$  равны массе фермиона  $\psi$ .

(Фурковский спинор  $\psi$  имеет 2 скалярных супер搭档а  $\varphi$  и  $\tilde{\varphi}$ , а калибровочный бозон  $A_\mu$  - шайковский спинор  $\lambda$  - калиброн)

## Глава VI. Калибровочное теории с расширенной суперсимметрией

### §1. $N=2$ суперсимметрическая теория Дуга-Миллса

- суперсимметрическое обобщение теории Дуга-Миллса, инвариантное относительно 2-х преобразований суперсимметрии.

$N=2$  SYM соответствует следующей таблице:

$$N=2 \quad \lambda_0 = 1$$

$$N=2 \quad \lambda_0 = 0$$

$\lambda$	0	$\frac{1}{2}$	1
$n_{\text{сост.}}$	1	2	1

$\lambda$	-1	$-\frac{1}{2}$	0
$n_{\text{сост.}}$	1	2	1

(+ CPT симметрическая таблица)

$\lambda$	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1
$n_{\text{сост.}}$	1	2	2	2	1

$\Rightarrow$  в этой теории есть бозонное поле  $A_\mu$ ,  
2 майоранаовых спинора и 2 Re скалара  
(или эквивалентно 1 комплексный скаляр)

$\lambda$	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1
$n_{\text{сост.}}$	1	1	0	1	1

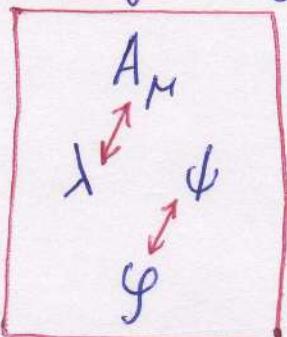
$N=1$  SYM

$\lambda$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$
$n_{\text{сост.}}$	1	2	1

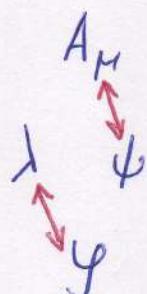
модель B3

$\Rightarrow N=2$  SYM можно строить из  $N=1$  SYM  
с полеми  $A_\mu$  и  $\lambda$  и моделью B3 с поле-  
ми  $\phi$  и  $\psi$ .

Как действует 2 суперсимметрии?



$N=1$  SUSY



дополнительная  
SUSY

$$\left\{ \begin{array}{l} \delta A_\mu = -i\sqrt{2} \bar{\epsilon} \gamma_\mu \lambda \\ \delta \lambda = -\frac{1}{2\sqrt{2}} \gamma^\mu \bar{\epsilon} F_{\mu\nu} - \frac{i}{\sqrt{2}} \gamma_5 \bar{\epsilon} D \\ \delta D = \sqrt{2} \bar{\epsilon} \gamma^\mu \gamma_5 \partial_\mu \lambda \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \delta \psi = \bar{\epsilon} (1 + \gamma_5) \psi \\ \delta \bar{\psi} = (R e f + i \gamma_5 J m f) \bar{\epsilon} - i (R e \partial_\mu \psi + i \gamma_5 J m \partial_\mu \psi) \gamma^\mu \bar{\epsilon} \\ \delta f = -i \bar{\epsilon} \gamma^\mu (1 + \gamma_5) \partial_\mu \psi - i \sqrt{2} \bar{\epsilon} (1 - \gamma_5) \lambda \psi \end{array} \right.$$

- видно, что  $A_\mu$  и  $\lambda$  (при чибальских калибровочных преобразованиях) меняются по присоединенному представлению, а  $\psi$  и  $\bar{\psi}$  должны лежать в одинаковом и тоже же представлении калибровочной группы.

$\Rightarrow$  для 2 второй суперсимметрии нужно, чтобы  $\psi$  и  $\bar{\psi}$  лежали в присоединенном представлении.

Действие теории будет содержать  $N=1$  SYM, для которой

(104)

$$S_1 = \frac{1}{2e^2} \text{Re} \text{tr} \int d^4x d^4\theta W_a C^{ab} W_b$$

и калибровочно-инвариантное обобщение модели Весса-Зумино, для которой  $\phi \in \text{Adj}$ .

Ранее мы представили  $\phi$  в виде столбца,

$$\phi = \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \vdots \\ \phi_n \end{pmatrix} \text{ тогда } S_{B3} = \frac{1}{4} \int d^4x d^4\theta \phi^+ e^{2V} \phi.$$

Но теперь такие обозначения уже не удобны, т.к.

$V = eV^A t^A$  содержит  $A_\mu = eA_\mu^A t^A$  и  $\lambda = e\lambda^A t^A$  а очень желательно, чтобы  $\lambda$  и  $\phi$  входили бы в действие симметричным образом. Поэтому нужно, чтобы  $\phi = e\phi^A t^A$  и  $\Rightarrow$

более удобно  $\phi$  записывать в виде

$$\phi = e\phi^A t^A$$

(Это, конечно, возможно только в случае, когда  $\phi$  лежит в присоединенном представлении калибровочной группы)

Сравним эти 2 варианта обозначений:

(105)

$$\varphi = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \vdots \\ \varphi_n \end{pmatrix} \text{ где } n = \dim G$$

$$\partial_\mu \varphi_A = \partial_\mu \varphi_A + i (A_\mu)_A{}^B \varphi_B$$

$$= \partial_\mu \varphi_A + i A_\mu^c (T_{\text{Adj}}^c)_A{}^B \varphi_B$$

$$= \partial_\mu \varphi_A + e A_\mu^c f^{cab} \varphi_B$$

$$= \underbrace{\partial_\mu \varphi_A - e f^{abc} A_\mu^B \varphi_c}_\text{Всё получилось одинаково}$$

$$\varphi^{*A} \varphi^A = \varphi^+ \varphi$$

$\Rightarrow \varphi^+ \varphi$  в таких  
однозначных соотвествиях  
ем  $\frac{2}{e^2} \text{tr}(\varphi^+ \varphi)$  справа

$$e^{2V} \phi = \phi + 2V\phi + \frac{1}{2!} (2V)^2 \phi$$

$$+ \frac{1}{3!} (2V)^3 \phi + \dots$$

$$\phi^+ e^{2V} \phi$$

$$\phi \rightarrow e^{i\lambda} \phi$$

$$\varphi = e \varphi^A t^A$$

$$A = \overline{1, \dim G}$$

$$\partial_\mu \varphi = \partial_\mu \varphi + i [A_\mu, \varphi] =$$

$$= e t^A \partial_\mu \varphi^A + i [e A_\mu^B t^B,$$

$$e \varphi^c t^c] = e t^A (\partial_\mu \varphi^A$$

$$- e f^{ABC} A_\mu^B \varphi^c) = e t^A \partial_\mu \varphi^A$$

$$\partial_\mu \varphi^A = \underbrace{\partial_\mu \varphi^A - e f^{ABC} A_\mu^B \varphi^c}_\text{Всё получилось одинаково}$$

$$\varphi^{*A} \varphi^A = 2 \cdot \text{tr}(t^A t^B) \varphi^A \varphi^B$$

$$= \frac{2}{e^2} \text{tr}(e t^A \varphi^A \cdot e t^B \varphi^B)$$

$$= \frac{2}{e^2} \text{tr}(\varphi^+ \varphi)$$

$$\phi + [2V, \phi] + \frac{1}{2!} [2V, [2V, \phi]]$$

$$+ \frac{1}{3!} [2V, [2V, [2V, \phi]]] + \dots =$$

$$= e^{2V} \phi e^{-2V}$$

$$\frac{2}{e^2} \text{tr}(\phi^+ e^{2V} \phi e^{-2V})$$

$$\phi \rightarrow e^{i\lambda} \phi e^{-i\lambda}$$

(106)

Позонуу если  $\phi = e^{\phi^A t^A}$ , то

$$S_2 = \frac{1}{2e^2} \text{tr} \int d^4x d^4\theta \phi^+ e^{2V} \phi \bar{e}^{-2V}$$

Это выражение калибровочно инвариантно, т.к.

если  $\phi \rightarrow e^{i\Lambda} \phi \bar{e}^{-i\Lambda}$        $\phi^+ \rightarrow e^{i\Lambda^+} \phi^+ \bar{e}^{-i\Lambda^+}$   
 $e^{2V} \rightarrow e^{i\Lambda^+} e^{2V} \bar{e}^{-i\Lambda}$        $\bar{e}^{-2V} \rightarrow e^{i\Lambda} \bar{e}^{-2V} \bar{e}^{-i\Lambda^+}$

то

$$\text{tr}(\phi^+ e^{2V} \phi \bar{e}^{-2V}) \rightarrow \text{tr}(e^{i\Lambda^+} \phi^+ \bar{e}^{-i\Lambda^+} \cdot e^{i\Lambda^+} e^{2V} \bar{e}^{-i\Lambda} \cdot e^{i\Lambda} \phi \bar{e}^{-i\Lambda} \cdot e^{i\Lambda} \bar{e}^{-2V} \bar{e}^{-i\Lambda^+}) = \text{tr}(\phi^+ e^{2V} \phi \bar{e}^{-2V}) = \text{int.}$$

Разумно предположить, что

$$S_{N=2 \text{ SYM}} = S_1 + S_2 = \frac{1}{2e^2} \text{Re} \text{tr} \int d^4x d^4\theta W_a C^{ab} W_b$$

$$+ \frac{1}{2e^2} \text{tr} \int d^4x d^4\theta \phi^+ e^{2V} \phi \bar{e}^{-2V}$$

В терминах компонентных полей

$$S = \frac{2}{e^2} \text{tr} \int d^4x \left\{ -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^2 + i \bar{\lambda} \gamma^\mu \partial_\mu \lambda + \frac{1}{2} D_\mu^2 \right\}$$

$$+ \partial_\mu \psi^+ \partial^\mu \psi + f^+ f + i \bar{\psi} (1 - \gamma_5) \gamma^\mu \partial_\mu \psi + \psi^+ [D_\mu \psi]$$

$$+ i \sqrt{2} \bar{\psi} (1 - \gamma_5) [\lambda, \psi] - i \sqrt{2} \psi^+ \{ \bar{\lambda}, (1 + \gamma_5) \psi \} \}$$

$$\text{где } \{ \bar{\lambda}, (1 + \gamma_5) \psi \} = \bar{\lambda}^\alpha (1 + \gamma_5) \psi_\alpha + (1 + \gamma_5) \psi_\alpha \bar{\lambda}^\alpha =$$

$$= e \bar{\lambda}^\alpha A^\alpha (1 + \gamma_5) e \psi_\alpha^\beta t^\beta + e (1 + \gamma_5) \psi_\alpha^\beta t^\beta e \bar{\lambda}^\alpha A^\alpha =$$

$$= e^2 \bar{\lambda}^A (1 + \gamma_5) \psi^B (t^A t^B - t^B t^A) = e^2 \bar{\lambda}^A (1 + \gamma_5) \psi^B [t^A, t^B] \quad (107)$$

$$= i e^2 f^{ABC} \bar{\lambda}^A (1 + \gamma_5) \psi^B t^C.$$

Заметим, что

$$\{ \bar{\psi}, (1 + \gamma_5) \lambda \} = i e^2 f^{ABC} \bar{\psi}^A (1 + \gamma_5) \lambda^B t^C = - \{ \bar{\lambda}, (1 + \gamma_5) \psi \}$$

Ковариантное произведение имеет вид

$$\partial_\mu \lambda = \partial_\mu \lambda + i [A_\mu, \lambda]$$

$$\partial_\mu \psi = \partial_\mu \psi + i [A_\mu, \psi]$$

Рассмотрим выражение

$$\begin{aligned} \text{tr} \int d^4x \cdot i \bar{\psi} \gamma_5 \gamma^\mu \partial_\mu \psi &= \text{tr} \int d^4x (i \bar{\psi} \gamma_5 \gamma^\mu \partial_\mu \psi - \\ &- \bar{\psi} \gamma_5 \gamma^\mu [A_\mu, \psi]) = \text{tr} \int d^4x \left( \frac{i}{2} \partial_\mu (\bar{\psi} \gamma_5 \gamma^\mu \psi) \right. \\ &\quad \left. - \bar{\psi} \gamma_5 \gamma^\mu [A_\mu, \psi] \right) \Rightarrow \text{tr} \int d^4x \cdot (-i) e \bar{\psi}^A t^A \gamma_5 \gamma^\mu [e A_\mu^B t^B, \right. \\ &\quad \left. e \psi^c t^c] = - \frac{i e^3}{2} \int d^4x f^{ABC} \bar{\psi}^A \gamma_5 \gamma^\mu A_\mu^B \psi^C = 0 \end{aligned}$$

поскольку симметричный тензор  $\bar{\psi}^A \gamma_5 \gamma^\mu \psi^c$   
 $(= \bar{\psi}^c \gamma_5 \gamma^\mu \psi^A)$  соравнивается с антисимметрическим  
тензором  $f^{ABC}$ .

Ноэточку действие теории можно переписать в 108

$$S = \frac{2}{e^2} \text{tr} \int d^4x \left\{ -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^2 + i \bar{\lambda} \gamma^\mu \partial_\mu \lambda + i \bar{\psi} \gamma^\mu \partial_\mu \psi + \frac{1}{2} D^2 \right. \\ \left. + \partial_\mu \psi^+ \partial^\mu \psi + f^+ f^- + \psi^+ [\bar{D}, \psi] + i\sqrt{2} \psi \{ \bar{\psi}, (1-\gamma_5) \lambda \} \right. \\ \left. - i\sqrt{2} \psi^+ \{ \bar{\lambda}, (1+\gamma_5) \psi \} \right\}$$

где  $\delta$  и  $\psi$  приходят во вспомогательные,  $\lambda$  и  $D$

$$\text{tr} (\bar{\psi} (1-\gamma_5) [\lambda, \psi]) = \frac{ie^3}{2} f^{ABC} \bar{\psi}^A (1-\gamma_5) \lambda^B \psi^C = \\ = \frac{ie^3}{2} f^{CAB} \psi^C \bar{\psi}^A (1-\gamma_5) \lambda^B = \text{tr} (\psi \{ \bar{\psi}, (1-\gamma_5) \lambda \})$$

Уз выражение для действия видно, что спиноры  $\lambda$  и  $\psi$  входят в него симметричным образом.

Действительно, пусть

$$\lambda = \psi_1 ; \quad \psi = \psi_2 . \quad \text{тогда}$$

$$\text{tr} (i\sqrt{2} \psi \{ \bar{\psi}, (1-\gamma_5) \lambda \}) = \text{tr} \left( \frac{i}{\sqrt{2}} \psi \{ \bar{\psi}, (1-\gamma_5) \lambda \} \right)$$

$$- \frac{i}{\sqrt{2}} \psi \{ \bar{\lambda}, (1-\gamma_5) \psi \} = \text{tr} \left( - \frac{i}{\sqrt{2}} \epsilon^{ij} \psi \{ \bar{\psi}_i, (1-\gamma_5) \psi_j \} \right)$$

аналогично

$$\text{tr} (-i\sqrt{2} \psi^+ \{ \bar{\lambda}, (1+\gamma_5) \psi \}) = \text{tr} \left( - \frac{i}{\sqrt{2}} \epsilon^{ij} \psi^+ \{ \bar{\psi}_i, (1+\gamma_5) \psi_j \} \right)$$

т.о. в явно  $SO(2)$  суперсимметричной форме генер- (109)  
вие теории можно записать в виде

$$\begin{aligned} S = \frac{2}{e^2} \text{tr} \int d^4x \left\{ -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^2 + i \bar{\psi}_i \gamma^\mu \partial_\mu \psi_i + \frac{1}{2} D^2 + \right. \\ \left. + \partial_\mu \psi^+ \partial^\mu \psi + f^+ f + D[\psi^+, \psi] - \frac{i}{\sqrt{2}} \varepsilon_{ij} \psi \{ \bar{\psi}_i, (1 + \gamma_5) \psi_j \} \right. \\ \left. - \frac{i}{\sqrt{2}} \varepsilon_{ij} \psi^+ \{ \bar{\psi}_i, (1 + \gamma_5) \psi_j \} \right\} \end{aligned}$$

$\Rightarrow$  благодаря дополнительной  $SO(2)$  симметрии есть и 2-я суперсимметрия:

$$\begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \\ \psi \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi_2 \\ -\psi_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi \\ -\lambda \end{pmatrix}$$

- преобразование имеет видами  $\psi$  и  $\lambda$ .

Как записать преобразования  $N=2$  SUSY?

$$\left\{ \begin{array}{l} \delta A_\mu = -i\sqrt{2} \bar{\epsilon}_i \gamma^\mu \psi_i \quad (N=1 \text{ SUSY } \sim \epsilon_1) \\ \delta \psi_i = -\frac{1}{2\sqrt{2}} \gamma^{\mu\nu} \epsilon_i F_{\mu\nu} - \frac{i}{\sqrt{2}} \gamma_5 \epsilon_i D - \epsilon_{ij} (\text{Ref} + \\ + i\gamma_5 \text{Im } f) \epsilon_j + i \epsilon_{ij} (\text{Re } \partial_\mu \psi + i\gamma_5 \text{Im } \partial_\mu \psi) \gamma^\mu \epsilon_j \\ \delta D = \sqrt{2} \bar{\epsilon}_i \gamma^\mu \gamma_5 \partial_\mu \psi_i \\ \delta \psi = \epsilon_{ij} \bar{\epsilon}_i (1 + \gamma_5) \psi_j \end{array} \right.$$

где  $\text{Ref} \equiv e^{t^A \text{Ref}^A}$  и т.д.

Исключаем теперь вспомогательное поле  $f, f^+$  (110)

и  $D$ :

$$f=0; f^+=0$$

$$0 = D + [\varphi^+, \varphi] \Rightarrow D = [\varphi, \varphi^+]$$

Найдем

$$S = \frac{2}{e^2} \text{tr} \int d^4x \left\{ -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^2 + i \bar{\psi}_i \gamma^\mu \partial_\mu \psi_i + \partial_\mu \varphi^+ \partial^\mu \varphi \right.$$

$$\left. - \frac{1}{2} [\varphi, \varphi^+]^2 - \frac{i}{\sqrt{2}} \epsilon_{ij} \varphi \{ \bar{\psi}_i, (1-\gamma_5) \psi_j \} - \frac{i}{\sqrt{2}} \epsilon_{ij} \varphi^+ \{ \bar{\psi}_i, (1+\gamma_5) \psi_j \} \right\}$$

Получим выражение для  $\varphi$  в виде

$$\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}} (P + iS); \quad P^+ = P; \quad S^+ = S$$

$$\Leftrightarrow \varphi^A = \frac{1}{\sqrt{2}} (P^A + iS^A); \quad P^A, S^A \in \text{Re.}$$

Мы имеем

$$[\varphi, \varphi^+] = \frac{1}{2} [P + iS, P - iS] = \frac{1}{2} [P, -iS] + \frac{1}{2} [iS, P]$$

$$= -i [P, S]$$

$$\partial_\mu \varphi^+ \partial^\mu \varphi = \frac{1}{2} (\partial_\mu P)^2 + \frac{1}{2} (\partial_\mu S)^2$$

$$- \frac{i}{\sqrt{2}} \epsilon_{ij} \varphi \{ \bar{\psi}_i, (1-\gamma_5) \psi_j \} - \frac{i}{\sqrt{2}} \epsilon_{ij} \varphi^+ \{ \bar{\psi}_i, (1+\gamma_5) \psi_j \} =$$

$$= -\frac{i}{2} \varepsilon_{ij} (P + iS) \{ \bar{\psi}_i, (1-\gamma_5) \psi_j \} - \frac{i}{2} \varepsilon_{ij} (P - iS) \{ \bar{\psi}_i, (1+\gamma_5) \psi_j \} \quad (111)$$

$$= -i \varepsilon_{ij} P \{ \bar{\psi}_i, \psi_j \} - \varepsilon_{ij} S \{ \bar{\psi}_i, \gamma_5 \psi_j \}$$

Поэтому с использованием этих обозначений действие переописывается в виде

$$S = \frac{2}{e^2} \text{tr} \int d^4x \left\{ -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^2 + i \bar{\psi}_i \gamma^\mu \partial_\mu \psi_i + \frac{1}{2} (\partial_\mu P)^2 + \frac{1}{2} (\partial_\mu S)^2 \right. \\ \left. + \frac{1}{2} [P, S]^2 - i \varepsilon_{ij} P \{ \bar{\psi}_i, \psi_j \} - \varepsilon_{ij} S \{ \bar{\psi}_i, \gamma_5 \psi_j \} \right\}$$

При этом потенциал скалярных полей имеет вид

$$V(P, S) = -\frac{1}{e^2} \text{tr} [P, S]^2 = -\frac{1}{e^2} \text{tr} (ie^2 f^{ABC} P^B S^C)^2 \\ = \frac{e^2}{2} (f^{ABC} P^B S^C)^2 \geq 0$$

- как обычно, потенциал скалярных полей оказывается положительно определенным.

$V(P, S) = 0$  если  $P^A = S^A$  - т.к. плоское направление, вдоль которого потенциал не распред.

## §2. $N=2$ суперсимметрическим

(112)

Можем ли  $N=2$  суперсимметрическую теорию  
Лига-Шмидта взаимодействовать с полями ма-  
терии  $N=2$  суперсимметрическими образом? Да!

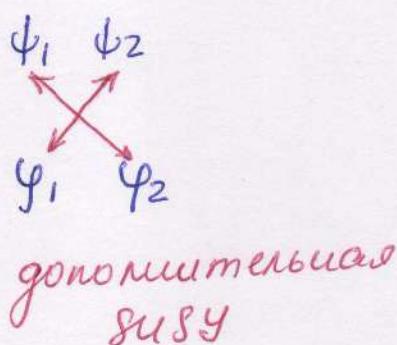
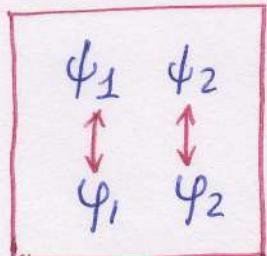
Как отразить  $N=2$  модели с матерней?

Рассмотрим вначале теорию без калибровочных  
поляй.

$\lambda$	$-1/2$	0	$1/2$
$n_{\text{сост.}}$	2	4	2

- есть 2 майоранаовских  
спинора  $\psi_1, \psi_2$  и  
2 комплексных скалера

- это 2 модели B3.



На самом деле, если  $\phi_1 \in R$ , то  $\phi_2$  нужно  
взять в сопряжённом представлении  $\bar{R}$ , пос-  
кольку тогда можно написать калибровочно  
инвариантное массовое слагаемое!

$$S = \frac{1}{4} \int d^4x d^4\theta (\phi_1^\dagger \phi_1 + \phi_2^\dagger \phi_2) + \left( \frac{m}{2} \int d^4x d^2\theta \phi_2^T \phi_1 + \right. \\ \left. + \text{k.c.} \right)$$

Это выражение инвариантно относительно преобразований

$$\phi_1 \rightarrow e^{i\Lambda} \phi_1; \quad \phi_2 \rightarrow e^{-i\Lambda^T} \phi_2$$

$$\text{т.е. } (I - \gamma_5) D \Lambda = 0, \text{ т.к.}$$

$$\phi_2^T \phi_1 \rightarrow \phi_2^T \cancel{e^{-i\Lambda}} \cancel{e^{i\Lambda}} \phi_1 = \phi_2^T \phi_1 = \text{int}$$

Как будут теперь выглядеть преобразования суперсимметрии?

Линейная суперсимметрия имеет вид

$$\left\{ \begin{array}{l} \delta \psi_1 = \bar{\epsilon}_1 (I + \gamma_5) \psi_1 \\ \delta [(I + \gamma_5) \psi_1] = (I + \gamma_5) [\epsilon_1 f_1 - i \gamma^\mu \epsilon_1 \partial_\mu \psi_1] \\ \delta f_1 = -i \bar{\epsilon}_1 \gamma^\mu (I + \gamma_5) \partial_\mu \psi_1 \\ \delta \psi_2 = \bar{\epsilon}_2 (I + \gamma_5) \psi_2 \\ \delta [(I + \gamma_5) \psi_2] = (I + \gamma_5) [\epsilon_2 f_2 - i \gamma^\mu \epsilon_2 \partial_\mu \psi_2] \\ \delta f_2 = -i \bar{\epsilon}_2 \gamma^\mu (I + \gamma_5) \partial_\mu \psi_2 \end{array} \right.$$

$N=2$  суперсимметрия получается из  $\mathbb{Z}_2$ -инвариантности, меняющей местами спиноры.

Но при этом нужно учитывать, что  
 $\psi_1$  и  $(1+\gamma_5)\psi_2$  лежат в разных представлениях  
 калибровочной группы. Поэтому  $\delta\psi_1$  должно  
 выражаться через  $(1-\gamma_5)\psi_2$ :

$$\delta\psi_1 = \bar{\epsilon}_1(1+\gamma_5)\psi_1 + \bar{\epsilon}_2(1-\gamma_5)\psi_2$$

Поэтому преобразование второй SUSY полу-  
 чается с помощью  $\mathbb{Z}_2$  преобразования

$$\psi_1 \leftrightarrow \psi_2; \quad \psi_1 \leftrightarrow \psi_1^*; \quad \psi_2 \leftrightarrow \psi_2^*$$

$$f_1 \leftrightarrow f_1^*; \quad f_2 \leftrightarrow f_2^*$$

которое описывает основное ковариантное  
 компонентное действие

$$S' = \int d^4x \left\{ \partial_\mu \psi_1^+ \partial^\mu \psi_1 + \partial_\mu \psi_2^+ \partial^\mu \psi_2 + i\bar{\psi}_1 \gamma^\mu \partial_\mu \psi_1 \right.$$

$$+ i\bar{\psi}_2 \gamma^\mu \partial_\mu \psi_2 + f_1^+ f_1 + f_2^+ f_2 + m \psi_1^T f_2 + m \psi_2^T f_1$$

$$\left. + m \psi_1^+ f_2^* + m \psi_2^+ f_1^* - m \bar{\psi}_1 \psi_2 \right\}$$

(комплексное сопряжение для скалеров мене-  
 ет представление по калибровочной группе  
 на сопряжённое)

Morgan преобразование второй SUSY примут 115  
форм

$$\left\{ \begin{array}{l} \delta \psi_1^* = \bar{\epsilon}_2 (1 + \gamma_5) \psi_2 \\ \delta [(1 + \gamma_5) \psi_2] = (1 + \gamma_5) [\epsilon_2 f_1^* - i \gamma^\mu \epsilon_2 \partial_\mu \psi_1^*] \\ \delta f_1^* = -i \bar{\epsilon}_2 \gamma^\mu (1 + \gamma_5) \partial_\mu \psi_2 \\ \delta \psi_2^* = \bar{\epsilon}_2 (1 + \gamma_5) \psi_1 \\ \delta [(1 + \gamma_5) \psi_1] = (1 + \gamma_5) [\epsilon_2 f_2^* - i \gamma^\mu \epsilon_2 \partial_\mu \psi_2^*] \\ \delta f_2^* = -i \bar{\epsilon}_2 \gamma^\mu (1 + \gamma_5) \partial_\mu \psi_1 \end{array} \right.$$

Проведя комплексное сопряжение для скалеров и соединив результат с первой SUSY, получим преобразование с двумя параметрами  $\epsilon_1$  и  $\epsilon_2$ , относительно которых будет избрана рассматриваемая теория:

$$\left\{ \begin{array}{l} \delta \psi_1 = \bar{\epsilon}_1 (1 + \gamma_5) \psi_1 + \bar{\epsilon}_2 (1 - \gamma_5) \psi_2 \\ \delta [(1 + \gamma_5) \psi_1] = (1 + \gamma_5) [\epsilon_1 f_1 - i \gamma^\mu \epsilon_1 \partial_\mu \psi_1 + \epsilon_2 f_2^* \\ \quad - i \gamma^\mu \epsilon_2 \partial_\mu \psi_2^*] \\ \delta f_1 = -i \bar{\epsilon}_1 \gamma^\mu (1 + \gamma_5) \partial_\mu \psi_1 - i \bar{\epsilon}_2 \gamma^\mu (1 - \gamma_5) \partial_\mu \psi_2 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \delta \psi_2 = \bar{\epsilon}_1 (1 + \gamma_5) \psi_2 + \bar{\epsilon}_2 (1 - \gamma_5) \psi_1 \\ \delta [(1 + \gamma_5) \psi_2] = (1 + \gamma_5) [\epsilon_1 f_2 - i \gamma^\mu \epsilon_1 \partial_\mu \psi_2 + \epsilon_2 f_1^* \\ \quad - i \gamma^\mu \epsilon_2 \partial_\mu \psi_1^*] \\ \delta f_2 = -i \bar{\epsilon}_1 \gamma^\mu (1 + \gamma_5) \partial_\mu \psi_2 - i \bar{\epsilon}_2 \gamma^\mu (1 - \gamma_5) \partial_\mu \psi_1 \end{array} \right.$$

т.е. в каждой формуле все слагаемые одинаково меняются при калибровочных преобразованиях.

### §3. $N=2$ суперсимметрическое калибровочное теории с полеми маттеры

Построим  $N=2$  суперсимметрическую теорию, содержащую  $N=2$  SYM и супермультиплет, локально калибровочно инвариантную.

Однажды, такую теорию нужно искать среди теорий с  $N=1$  суперсимметрией:

$$S' = S_{N=2 \text{ SYM}} + S_{\text{matter}} , \text{ т.е.}$$

$$S_{N=2 \text{ SYM}} = \frac{1}{2e^2} \text{R} \text{etr} \int d^4x d^2\theta W_a C^{ab} W_b$$

$$+ \frac{1}{2e^2} \text{tr} \int d^4x d^4\theta \phi^+ e^{2V} \phi^- e^{-2V}$$

$$S_{\text{matter}} = \frac{1}{4} \int d^4x d^4\theta \left( \phi_1^+ e^{2V} \phi_1 + \phi_2^+ e^{-2V^T} \phi_2 \right)$$

$$+ \left\{ \int d^4x d^2\theta \left( \frac{1}{2} m \phi_2^T \phi_1 + c \cdot \phi_2^T \phi \phi_1 \right) + \text{k.c.} \right\}$$

где  $c$  - безразмерная постоянная необходимость введении которой будет пояснена далее. Также далее будет найдено её численное значение.

$N=1$  SUSY очевидна. Так же легко проверяется калибровочная симметрия относительно преобразований

$$e^{2V} \rightarrow e^{i\Lambda^+} e^{2V} e^{-i\Lambda^-} \Rightarrow W_a \rightarrow e^{i\Lambda} W_a e^{-i\Lambda}$$

$$\phi \rightarrow e^{i\Lambda} \phi e^{-i\Lambda} \quad (\phi \in \text{Adj})$$

$$\phi_1 \rightarrow e^{i\Lambda} \phi_1 \quad (\phi_1 \in \mathcal{L})$$

$$\phi_2 \rightarrow e^{-i\Lambda^T} \phi_2 \quad (\phi_2 \in \bar{\mathcal{R}})$$

Действительно, например,

$$\phi_2^+ e^{-2V^T} \phi_2 \rightarrow \phi_2^+ e^{i\Lambda^*} (e^{i\Lambda} e^{-2V} e^{-i\Lambda^+})^T e^{-i\Lambda^T} \phi_2$$

$$= \phi_2^+ e^{i\Lambda^*} \cancel{e^{-i\Lambda^*}} \cancel{e^{-2V^T}} \cancel{e^{i\Lambda^T}} \cancel{e^{-i\Lambda^T}} \phi_2 = \phi_2^+ e^{-2V^T} \phi_2 = i\omega$$

$$\phi_2^T \phi \phi_1 \rightarrow \phi_2^T \cancel{e^{-i\Lambda}} \cancel{e^{i\Lambda}} \phi \cancel{e^{-i\Lambda}} \cancel{e^{i\Lambda}} \phi_1 = \phi_2^T \phi \phi_1 = i\omega$$

$\Rightarrow$  действие, приведённое выше, действительно является калибровочно-инвариантным.

(118)

Запишем теперь это в компонентах.

Фактически, все уже выписано кроме

$$\int d^4x d^2\theta \phi_2^T \phi \phi_1 = \int d^4x d^2\theta \phi_2^T \phi \phi_1 \Big|_{y^M \rightarrow x^M} + \cancel{\text{неберхности}} \cancel{\text{ион}}$$

$$\rightarrow \int d^4x d^2\theta \left( \varphi_2^T(x) + \bar{\psi}_2(x)(1+\gamma_5)\theta + \frac{1}{2} f_2^T(x) \bar{\theta}(1+\gamma_5)\theta \right) \cdot$$

$$\cdot \left( \varphi(x) + \bar{\theta}(1+\gamma_5)\psi(x) + \frac{1}{2} \bar{\theta}(1+\gamma_5)\theta f(x) \right) \left( \varphi_1(x) + \bar{\theta}(1+\gamma_5)\psi_1(x) \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \bar{\theta}(1+\gamma_5)\theta f_1(x) \right) = \left[ \int d^2\theta \bar{\theta}(1+\gamma_5)\theta = 4; \right. \\ \left. (1+\gamma_5)\theta \cdot \bar{\theta}(1+\gamma_5) = -\frac{1}{2} (1+\gamma_5) \cdot \bar{\theta}(1+\gamma_5)\theta \right] = \\ = 2 \int d^4x \left\{ \varphi_2^T \varphi f_1 + \varphi_2^T f \varphi_1 + f_2^T \varphi \varphi_1 - \bar{\psi}_2 \varphi (1+\gamma_5) \psi_1 \right. \\ \left. - \bar{\psi}_2 (1+\gamma_5) \psi \varphi_1 - \varphi_2^T \bar{\psi} (1+\gamma_5) \psi_2 \right\}$$

(После сокращений  $\bar{\psi}_1, \bar{\psi}_2$  содержит транспонирование, а  $\bar{\psi} \equiv e^{\bar{\psi}^A T^A}$  не содержит транспонирования по индексам калибровочной группы)

т.о. можно записать действие рассмотриваемой теории в терминах компонентных полей:

$$S' = \frac{Re}{2e^2} \text{tr} \int d^4x d^2\theta W_a C^{ab} W_b + \frac{1}{2e^2} \text{tr} \int d^4x d^4\theta \phi^+ e^{2V} \phi^- e^{-2V} \\ + \frac{1}{4} \int d^4x d^4\theta \left( \phi_1^+ e^{2V} \phi_1^- + \phi_2^+ e^{-2V} \phi_2^- \right) + \int d^4x d^2\theta \left( \frac{1}{2} m \cdot \right)$$

$$\cdot \phi_2^T \phi_1 + c \phi_2^T \phi \phi_1 \Big) + \text{k.c.} \Big\} =$$

$$= \frac{2}{e^2} \text{tr} \int d^4x \left\{ -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^2 + i \bar{\lambda} \gamma^\mu \partial_\mu \lambda + i \bar{\psi} \gamma^\mu \partial_\mu \psi + \frac{1}{2} D^2 \right.$$

$$+ \partial_\mu \psi^+ \partial^\mu \psi + f^+ f + \psi^+ [D, \psi] + i \sqrt{2} \psi \{ \bar{\psi}, (1-\gamma_5) \lambda \}$$

$$- i \sqrt{2} \psi^+ \{ \bar{\lambda}, (1+\gamma_5) \psi \} \Big\} \Big]$$

$$+ \int d^4x \left\{ \partial_\mu \psi_1^+ \partial^\mu \psi_1 + i \bar{\psi}_1 (1-\gamma_5) \gamma^\mu \partial_\mu \psi_1 + f_1^+ f_1 + \psi_1^+ D \psi_1 \right.$$

$$\left. + i \sqrt{2} \bar{\psi}_1 (1-\gamma_5) \lambda \psi_1 - i \sqrt{2} \psi_1^+ \bar{\lambda} (1+\gamma_5) \psi_1 \right\} + \partial_\mu \psi_2^+ \partial^\mu \psi_2$$

$$+ i \bar{\psi}_2 (1-\gamma_5) \gamma^\mu \partial_\mu \psi_2 + f_2^+ f_2 - \psi_2^+ D^T \psi_2 - i \sqrt{2} \bar{\psi}_2 (1-\gamma_5) \lambda^T \psi_2$$

$$\left. + i \sqrt{2} \psi_2^+ \bar{\lambda}^T (1+\gamma_5) \psi_2 \right\} + m (\psi_2^T f_1 + f_2^T \psi_1 + \psi_2^+ f_1^* + f_2^+ \psi_1^*$$

$$- 2 \bar{\psi}_2 \psi_1 \Big) + 2c (\psi_2^T \psi f_1 + \psi_2^T f \psi_1 + f_2^T \psi \psi_1 - \bar{\psi}_2 \psi (1+\gamma_5) \psi_1$$

$$\left. - \bar{\psi}_2 (1+\gamma_5) \psi \psi_1 - \psi_2^T \bar{\psi} (1+\gamma_5) \psi_1 \right\} + 2c^* (f_1^+ \psi^+ \psi_2^* + \psi_1^+ f \psi_2^*)$$

$$+ \psi_1^+ \psi^+ f_2^* - \bar{\psi}_2 (1-\gamma_5) \psi^+ \psi_2 \left. - \psi_1^+ \bar{\psi} (1-\gamma_5) \psi_2 - \bar{\psi}_1 (1-\gamma_5) \psi \psi_2^* \right\}$$

Коэффициенты при ведущих слагаемых должны быть одинаковы по модулю для наименее высоких

суперсимметрии.

(120)

(Возможные доказательства сложные и не приводятся)

Фаза с может быть включена в определение полей.

$$c = \frac{i}{\sqrt{2}} \quad \text{будет использовано в наших обозначениях.}$$

Наша суперполевое действие рассматриваемой модели примет вид

$$\begin{aligned} S = & \frac{1}{2e^2} \operatorname{Re} \operatorname{tr} \int d^4x d^2\theta W_a C^{ab} W_b + \frac{1}{2e^2} \operatorname{tr} \int d^4x d^4\theta \phi^+ e^{2V} \phi^{-2V} \\ & + \frac{1}{4} \int d^4x d^4\theta (\phi_1^+ e^{2V} \phi_1 + \phi_2^+ e^{-2V} \phi_2^T) + \left\{ \int d^4x d^2\theta \left( \frac{1}{2} m \phi_2^T \phi_1 \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{i}{\sqrt{2}} \phi_2^T \phi \phi_1 \right) \right\} + \text{k.c.} \end{aligned}$$

Для того, чтобы записать окончательное выражение для компонентного действия необходимо исключить вспомогательные поля из уравнений движений.

(Результат приводится на следующем)

§ 4.  $N=4$  суперсимметрическая теория Лица-Миллса

(121)

Построим теперь теорию, изваривающую относительно 4-х преобразований суперсимметрии.

В соответствии с теорией представлений алгебр суперсимметрии для этой теории

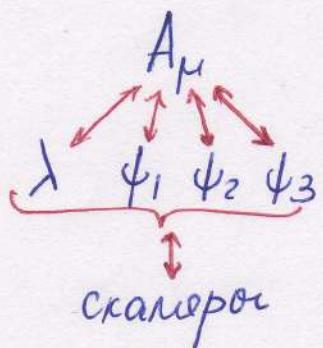
$\lambda$	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	=
$n_{\text{коэф.}}$	1	4	6	4	1	
	$C_4^0$	$C_4^1$	$C_4^2$	$C_4^3$	$C_4^4$	

$$= \frac{\lambda}{n_{\text{коэф.}}} \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline & -1 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ \hline 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 1 \\ \hline \end{array} + \frac{\lambda}{n_{\text{коэф.}}} \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \hline 2 & 4 & 2 \\ \hline \end{array}$$

$N=2$  SYM                       $N=2$  инфермультиплет

$$= \frac{\lambda}{n_{\text{коэф.}}} \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline & -1 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ \hline \end{array} + 3 \times \frac{\lambda}{n_{\text{коэф.}}} \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \hline 1 & 2 & 1 \\ \hline \end{array}$$

$N=1$  SYM                      3 модели ВЗ.



— каждое из 4-х суперсимметрий переносит  $A_\mu$  со своим спинором.

Однако, что это возможно только если все поля материи лежат в присоединенном представлении.

Меорию с 4-ми суперсимметриями имеет  
среди теорий с 2-ми суперсимметриями:

$N=2$  SYM + шармультиплет:

$$S = \frac{1}{2e^2} \text{tr} \operatorname{Re} \int d^4x d^2\theta W_a C^{ab} W_b + \frac{1}{2e^2} \text{tr} \left\{ \int d^4x d^4\theta \phi^+ e^{2V} \phi^- e^{-2V} \right. \\ \left. + \frac{1}{4} \int d^4x d^4\theta (\phi_1^+ e^{2V} \phi_1^- + \phi_2^+ e^{-2V} \phi_2^-) + \left\{ \int d^4x d^2\theta \left( \frac{1}{2} m \phi_2^T \phi_1^- \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. + \frac{i}{\sqrt{2}} \phi_2^T \phi \phi_1^- \right) + \text{k.c.} \right\} \right\}$$

При этом  $m=0$ , т.к.  $\phi_1, \phi_2$  и  $\phi_2^T$  должны входить в генерирующие симметрии, а  $\phi_1, \phi_2 \in \text{Adj}$ .

Заметим, что  $\overline{\text{Adj}} = \text{Adj}$ , т.к.

$$(\tau_{\text{Adj}}^A)_{BC} = -if^{ABC} \quad \text{и} \Rightarrow$$

$$-(\tau_{\text{Adj}}^A)_{BC}^T = -(-if^{ACB}) = -if^{ABC} = (\tau_{\text{Adj}}^A)_{BC}.$$

При этом от обозначений для  $\phi_1$  и  $\phi_2$  будем удобно перейти к  $e\phi_{1,2}^A t^A$ .

$$\phi = \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \vdots \\ \phi_n \end{pmatrix} \rightarrow e\phi^A t^A = e\phi^1 t^1 + e\phi^2 t^2 + \dots + e\phi^n t^n$$

где  $n = \dim G$  где  $\text{Adj}$ .

Morga, как обсуждалось ранее,

$$\phi_i^+ e^{2V} \phi_i^- \rightarrow \frac{2}{e^2} \text{tr} \phi_i^+ e^{2V} \phi_i^- e^{-2V}$$

$$\phi \cdot \phi_i^- \rightarrow [\phi, \phi_i^-]$$

Кроме того, преобразование  $\phi \rightarrow \phi_3$ .

В результате получаем действие  $N=4$  SYM, записанное в терминах  $N=1$  суперполей:

$$S = \frac{1}{2e^2} \text{tr} \text{Re} \int d^4x d^2\theta W_a C^{ab} W_b + \frac{1}{2e^2} \text{tr} \int d^4x d^4\theta$$

$$\cdot \phi_i^+ e^{2V} \phi_i^- e^{-2V} + \left\{ \int d^4x d^2\theta \frac{i}{\sqrt{2}} \cdot \frac{2}{e^2} \text{tr} \phi_2 [\phi_3, \phi_i] + \text{k.c.} \right\}$$

Можно записать это действие в явно  $SO(3)$ -инвариантном виде

$$S = \frac{1}{2e^2} \text{tr} \text{Re} \int d^4x d^2\theta W_a C^{ab} W_b + \frac{1}{2e^2} \text{tr} \int d^4x d^4\theta \phi_i^+ e^{2V} \phi_i^- e^{-2V}$$

$$+ \left\{ \frac{i}{3\sqrt{2}e^2} \text{tr} \int d^4x d^2\theta \epsilon_{ijk} \phi_i [\phi_j, \phi_k] + \text{k.c.} \right\}$$

Однако явное  $SO(3)$  инвариантность и  $N=1$  суперсимметрия этого действия — это далеко не все симметрии этой теории.

Для того, чтобы увидеть большие число симметрий, запишем это действие в терминах полипонентных полей:

$$S = \frac{2}{e^2} \text{tr} \int d^4x \left\{ -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^2 + i \bar{\lambda} \gamma^\mu \partial_\mu \lambda + \frac{1}{2} D^2 \right\}$$

$N=1$  SYM

$$+ \partial_\mu \varphi_i^+ \partial^\mu \varphi_i + i \bar{\psi}_i \gamma^\mu \partial_\mu \psi_i + f_i^+ f_i + \varphi_i^+ [D, \varphi_i]$$

(нет связи с  $\bar{\chi}_S$ )

$$+ i \sqrt{2} \varphi_i \left\{ \bar{\psi}_i, (1-\gamma_5) \lambda \right\} - i \sqrt{2} \varphi_i^+ \left\{ \bar{\lambda}, (1+\gamma_5) \psi_i \right\}$$

3 модели B3

$$- \frac{i}{\sqrt{2}} \varepsilon_{ijk} \varphi_i \left\{ \bar{\psi}_j, (1+\gamma_5) \psi_k \right\} + \frac{i}{\sqrt{2}} \varepsilon_{ijk} f_i [ \varphi_j, \varphi_k ]$$

$$- \frac{i}{\sqrt{2}} \varepsilon_{ijk} \varphi_i^+ \left\{ \bar{\psi}_j, (1-\gamma_5) \psi_k \right\} + \frac{i}{\sqrt{2}} \varepsilon_{ijk} f_i^+ [ \varphi_j^+, \varphi_k^+ ] \}$$

но скольку

$$i \text{tr} \int d^4x d^2\theta \varepsilon_{ijk} \phi_i [\phi_j, \phi_k] = -\frac{1}{2} \int d^4x d^2\theta \varepsilon_{ijk} f^{ABC} e^3$$

$$\phi_i^A \phi_j^B \phi_k^C$$

и при комплексном сопряжении знак меняется не нужно.

Используя вспомогательные поля  $D$  и  $f_i$ :

$$D + [\varphi_i, \varphi_i^+] = 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} D^2 + \varphi_i^+ [D, \varphi_i] \rightarrow -\frac{1}{2} D^2 \rightarrow -\frac{1}{2} [\varphi_i, \varphi_i^+]^2$$

Аналогично, при сопряжении имеем  $f_i^+$  и  $f_i$  симметрическое выражение

$$f_i + \frac{i}{\sqrt{2}} \epsilon_{ijk} [\psi_j, \psi_k] = 0$$

$$f_i^+ + \frac{i}{\sqrt{2}} \epsilon_{ijk} [\psi_j^+, \psi_k^+] = 0$$

Поэтому складающее с полами  $f_i$  и  $f_i^+$  пришум  
буг

$$- f_i^+ f_i \rightarrow \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} [\psi_j, \psi_k] \epsilon_{imn} [\psi_m^+, \psi_n^+] =$$

$$= \frac{1}{2} (\delta_{jm} \delta_{kn} - \delta_{jn} \delta_{km}) [\psi_j, \psi_k] [\psi_m^+, \psi_n^+] =$$

$$= [\psi_i, \psi_j] [\psi_i^+, \psi_j^+]$$

Поэтому после исключения вспомогательных полей  
действие записывается в виде

$$\begin{aligned} S = & \frac{2}{e^2} \text{tr} \int d^4x \left\{ -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^2 + i \bar{\lambda} \gamma^\mu \partial_\mu \lambda + i \bar{\psi}_i \gamma^\mu \partial_\mu \psi_i \right. \\ & + \partial_\mu \psi_i^+ \partial^\mu \psi_i + i \sqrt{2} \psi_i \{ \bar{\psi}_i, (1-\gamma_5) \lambda \} - i \sqrt{2} \psi_i^+ \{ \bar{\lambda}, (1+\gamma_5) \psi_i \} \\ & - \frac{i}{\sqrt{2}} \epsilon_{ijk} \psi_i \{ \bar{\psi}_j, (1+\gamma_5) \psi_k \} - \frac{i}{\sqrt{2}} \epsilon_{ijk} \psi_i^+ \{ \bar{\psi}_j, (1-\gamma_5) \psi_k \} \\ & \left. - \frac{1}{2} [\psi_i, \psi_i^+]^2 + [\psi_i, \psi_j] [\psi_i^+, \psi_j^+] \right\} \end{aligned}$$

При этом скалярное поле удобно записать в  
виде  $\psi_i = \frac{1}{\sqrt{2}} (P_i + i S_i)$ , где

$$P_i^A \in Re; \quad S_i^A \in Re \quad (P_i = e P_i^A t^A; \quad S_i = e S_i^A t^A) \quad (126)$$

Moga

$$\partial_\mu \varphi_i^+ \partial^\mu \varphi_i = \frac{1}{2} (\partial_\mu P_i)^2 + \frac{1}{2} (\partial_\mu S_i)^2$$

$$\text{tr} [ i\sqrt{2} \varphi_i \{ \bar{\psi}_i, (1-\gamma_5) \lambda \} - i\sqrt{2} \varphi_i^+ \{ \bar{\lambda}, (1+\gamma_5) \psi_i \} ]$$

$$- \frac{i}{\sqrt{2}} \varepsilon_{ijk} \varphi_i \{ \bar{\psi}_j, (1+\gamma_5) \psi_k \} - \frac{i}{\sqrt{2}} \varepsilon_{ijk} \varphi_i^+ \{ \bar{\psi}_j, (1-\gamma_5) \psi_k \} ]$$

$$= \text{tr} [ i (P_i + iS_i) \{ \bar{\psi}_i, (1-\gamma_5) \lambda \} + i (P_i - iS_i) \{ \bar{\psi}_i,$$

$$(1+\gamma_5) \lambda \} - \frac{i}{2} \varepsilon_{ijk} (P_i + iS_i) \{ \bar{\psi}_j, (1+\gamma_5) \psi_k \} -$$

$$- \frac{i}{2} \varepsilon_{ijk} (P_i - iS_i) \{ \bar{\psi}_j, (1-\gamma_5) \psi_k \} ] =$$

$$= \text{tr} [ 2i P_i \{ \bar{\psi}_i, \lambda \} + 2S_i \{ \bar{\psi}_i, \gamma_5 \lambda \} ]$$

$$- i \varepsilon_{ijk} P_i \{ \bar{\psi}_j, \psi_k \} + \varepsilon_{ijk} S_i \{ \bar{\psi}_j, \gamma_5 \psi_k \} ]$$

Kacouey,

$$\text{tr} [ -\frac{1}{2} [\varphi_i, \varphi_i^+]^2 + [\varphi_i, \varphi_j] [\varphi_i^+, \varphi_j^+] ] =$$

$$= \text{tr} \left\{ -\frac{1}{8} [P_i + iS_i, P_i - iS_i]^2 + \frac{1}{4} [P_i + iS_i, P_j + iS_j] \right.$$

$$\cdot [P_i - iS_i, P_j - iS_j] \} =$$

(127)

$$= \text{tr} \left\{ + \frac{1}{2} [P_i, S_i]^2 + \frac{1}{4} ([P_i, P_j] - [S_i, S_j]) + \right. \\ \left. + i[P_i, S_j] - i[P_j, S_i] \right) ([P_i, P_j] - [S_i, S_j] \\ - i[P_i, S_j] + i[P_j, S_i]) \right\} =$$

$$= \text{tr} \left\{ + \frac{1}{2} [P_i, S_i]^2 + \frac{1}{4} ([P_i, P_j] - [S_i, S_j])^2 \right. \\ \left. + \frac{1}{4} ([P_i, S_j] - [P_j, S_i])^2 \right\} =$$

$$= \frac{1}{4} \text{tr} \left\{ + 2 \underbrace{[P_i, S_i]^2}_{\text{---}} + [P_i, P_j]^2 + [S_i, S_j]^2 - \right.$$

$$\left. - 2 \underbrace{[P_i, P_j][S_i, S_j]}_{\text{---}} + 2 [P_i, S_j]^2 - 2 [P_i, S_j] [P_j, S_i] \right\} =$$

$$\nearrow - 2 P_i [S_j [P_j, S_i]] =$$

$$= (\text{m. дкоду}) = + 2 P_i [P_j [S_i, S_j]] + 2 P_i [S_i [S_j, P_j]]$$

$$\overrightarrow{=} + 2 \underbrace{[P_i, P_j][S_i, S_j]}_{\text{---}} - 2 \underbrace{[P_i, S_i] [P_j, S_j]}_{\text{---}}$$

Соединяя подобные члены, получаем, что

$$= \frac{1}{4} \text{tr} \left\{ [P_i, P_j]^2 + [S_i, S_j]^2 + 2 [P_i, S_j]^2 \right\}$$

т.о. после исключении вспомогательных полей  
члены можно перенести в вид

$$\begin{aligned}
 S' = & \frac{2}{e^2} \text{tr} \int d^4x \left\{ -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^2 + i \bar{\lambda} \gamma^\mu \partial_\mu \lambda + i \bar{\psi}_i \gamma^\mu \partial_\mu \psi_i \right. \\
 & + \frac{1}{2} (\partial_\mu P_i)^2 + \frac{1}{2} (\partial_\mu S_i)^2 + 2i P_i \{ \bar{\psi}_i, \lambda \} - i \varepsilon_{ijk} P_i \{ \bar{\psi}_j, \psi_k \} \\
 & + 2S_i \{ \bar{\psi}_i, \gamma_5 \lambda \} + \varepsilon_{ijk} S_i \{ \bar{\psi}_j, \gamma_5 \psi_k \} + \frac{1}{4} [P_i, P_j]^2 + \\
 & \left. + \frac{1}{4} [S_i, S_j]^2 + \frac{1}{2} [P_i, S_j]^2 \right\}
 \end{aligned} \tag{128}$$

- здесь есть явная  $SO(3)$  симметрия, однако также присутствует и  $SO(4)$  симметрия. Перенесём действие так, чтобы она стала явной:

Определение

$$\psi_I = \begin{cases} \psi_i, & I=i=1,3 \\ \lambda, & I=4. \end{cases}$$

$$P_{IJ} = \begin{cases} \varepsilon_{ijk} P_k, & I,J=i,j=\overline{1,3} \\ -P_i, & J=4; I=i=\overline{1,3} \end{cases}$$

$$S_{IJ} = \begin{cases} \varepsilon_{ijk} S_k, & I,J=\overline{1,3} \\ +S_i, & J=4, I=i=\overline{1,3} \end{cases}$$

Мы можем убедиться, что

$$\left. \begin{array}{l} P_{IJ} = -\frac{1}{2} \epsilon_{IJKL} P_{KL} \\ S_{IJ} = +\frac{1}{2} \epsilon_{IJKL} S_{KL} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{SO(4)-инвариантное} \\ \text{связь.} \end{array} \quad (129)$$

Действительно, например,

$$P_{ij} \stackrel{?}{=} -\frac{1}{2} \epsilon_{ijk4} P_{4k} - \frac{1}{2} \epsilon_{ijk4} P_{k4} = \epsilon_{ijk} P_k - \text{бесно.}$$

Можно

$$P_{IJ} \{ \bar{\psi}_I, \psi_J \} = -2 P_i \{ \bar{\psi}_i, \lambda \} + \epsilon_{ijk} P_k \{ \bar{\psi}_j, \psi_k \}$$

$$S_{IJ} \{ \bar{\psi}_I, \gamma_5 \psi_J \} = 2 S_i \{ \bar{\psi}_i, \gamma_5 \lambda \} + \epsilon_{ijk} S_k \{ \bar{\psi}_j, \gamma_5 \psi_k \}$$

Кроме того,

$$P_{IJ}^2 = \epsilon_{ijk} P_k \cdot \epsilon_{ije} P_e + 2 P_i^2 = 4 P_i^2$$

Поэтому

$$S = \frac{2}{e^2} \text{tr} \int d^4x \left\{ -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^2 + i \bar{\psi}_I \gamma^\mu \partial_\mu \psi_I + \frac{1}{8} (\partial_\mu P_{IJ})^2 \right.$$

$$+ \frac{1}{8} (\partial_\mu S_{IJ})^2 - i P_{IJ} \{ \bar{\psi}_I, \psi_J \} + S_{IJ} \{ \bar{\psi}_I, \gamma_5 \psi_J \}$$

$$+ \frac{1}{64} [P_{IJ}, P_{KL}]^2 + \frac{1}{64} [S_{IJ}, S_{KL}]^2 + \frac{1}{32} [P_{IJ}, S_{KL}]^2 \left. \right\}$$

- будущий элемент  $SO(4)$ -симметрии, который имеет 4 суперсимметрии.

## Глава VII. Суперсимметрия на квантовом уровне

(130)

Особый интерес к суперсимметрическим теориям связан с улучшением (по сравнению с несуперсимметрическими случаями) ультрафиолетовым поведением.

При этом улучшение УФ поведения можно поиметь, если использовать суперлинейное квантование. Его можно выполнить, сохранив  $N=1$  SUSY как явную симметрию теории, записать выражение для производящего функционала и эффективного действия. Также можно построить и суперлинейные правила Фейнмана.

Основной результат этого анализа:

Любой вклад в эффективное действие может быть представлен как интеграл по полному суперпространству,

$$\int d^4x d^4\theta.$$

При этом расходимости являются локальными, благодаря тому все расходимости являются интегралами по полному суперпространству от

локальных выражений.

(131)

Следствием является т.н. теорема о неперенормировке суперпотенциала:

В  $N=1$  суперсимметрических теориях отсутствуют расходящиеся квантовые поправки к суперпотенциалу.

т.е. если, например,

$$S = \frac{1}{4} \int d^4x d^4\theta \phi^{*i} \phi_i + \left( \int d^4x d^2\theta \left( \frac{1}{4} m_0^{ij} \phi_i \phi_j + \frac{1}{6} \lambda_0^{ijk} \phi_i \phi_j \phi_k \right) + \text{k.c.} \right)$$

то нет расходящихся со структурой

$$\int d^4x d^2\theta m^{ij} \phi_i \phi_j \quad \text{или} \quad \int d^4x d^2\theta \lambda^{ijk} \phi_i \phi_j \phi_k$$

Заметим, что (без доказательства)

$$\int d^4x d^2\theta \phi^2 = \int d^4x d^4\theta \phi \cdot \frac{1}{16\partial^2} \bar{D}(1+\gamma_5) D \phi$$

и подынтегральное выражение является локальной.

Однако неперенормировка потенциала не означает, что масса  $m^{ij}$  и кавитонные константы  $\lambda^{ijk}$  не перенормируются. Действительно,

в теории инициомас расходимости со структурой

(132)

$$\int d^4x d^4\theta \phi^* i \phi_i$$

которое ликвидируется переориентировкой

$$\phi_i = (\sqrt{Z})_i^j \phi_{Rj}$$

Поэтому с учётом переориентированного суперпотенциала

$$m^{ij} = (\sqrt{Z})_k^i (\sqrt{Z})_l^j m_0^{kl}$$

$$\lambda^{ijk} = (\sqrt{Z})_m^i (\sqrt{Z})_n^j (\sqrt{Z})_p^k \lambda_0^{mnp}$$

$\Rightarrow$  переориентировка масс и гравитационных констант в суперсимметрических теориях связана с переориентированной киральюю суперплоским материи.

Заметим, что переориентированное суперсимметрические теории получаются только если суперпотенциал не более чём кубики по суперплоским материи. (В этом случае общий потенциал будет не более чём 4-й степени по скалярным полем и в теории не будет разрывов констант связи)

Рассмотрим теперь суперсимметрическое калибровочное теории. В случае, если калибровочная группа является простой, то

$$S' = \frac{1}{2e^2} \text{tr} R e \int d^4x d^3\theta W_a C^{ab} W_b + \frac{1}{4} \int d^4x d^4\theta \phi^{*i} (e^{2V})_i^j \phi_j$$

$$+ \left( \int d^4x d^3\theta \left( \frac{1}{4} m_0^{ij} \phi_i \phi_j + \frac{1}{6} \lambda_0^{ijk} \phi_i \phi_j \phi_k \right) + \text{k.c.} \right)$$

где предполагается, что массовое слагаемое и слагаемое с юкавским взаимодействием являются калибровочно-инвариантными, например,

$$m_0^{ij} (e^{i\Lambda} \phi)_i (e^{j\Lambda} \phi)_j = m_0^{ij} \phi_i \phi_j$$

Представление  $\Lambda$  в виде  $\Lambda_i^j = (T^A)_i^j \Lambda^A$  и раскладывая это равенство с точностью до величины первого порядка по  $\Lambda$ , получаем, что

$$m_0^{ik} (T^A)_k^j + m_0^{kj} (T^A)_k^i = 0$$

Аналогично, калибровочная инвариантность юкавского слагаемого даёт

$$\lambda_0^{ijm} (T^A)_m^k + \lambda_0^{imk} (T^A)_m^j + \lambda_0^{mjk} (T^A)_m^i = 0$$

Как и в случае теорий без калибровочного суперполе, суперпотенциал не перенормируется,

и перенормировка масел и гравитационных констант (134) связана с перенормировкой  $\phi$ : теми же формулами, что и ранее.

Перенормируется ли

$$\frac{1}{2e_0^2} \text{Re} \operatorname{tr} \int d^4x d^2\theta W_a C^{ab} W_b ?$$

(Здесь интегрирование только по  $d^2\theta$ )

$$W_a = \frac{1}{32} \bar{D}(1-\gamma_S) D \left[ e^{-2V} (1+\gamma_S) D_a e^{2V} \right]$$

Поэтому

$$\frac{1}{2e_0^2} \text{Re} \operatorname{tr} \int d^4x d^2\theta W_a C^{ab} W_b = [W_b - \text{циральное суперполе}]$$

$$= \frac{1}{64e_0^2} \text{Re} \operatorname{tr} \int d^4x d^2\theta \bar{D}(1-\gamma_S) D \left[ e^{-2V} (1+\gamma_S) D_a e^{2V} \cdot [C^{ab} W_b] \right]$$

может вносить в силу  
циральности  $W_b$ .

При этом

$$\int d^2\bar{\theta} = \frac{1}{4} \frac{\partial}{\partial \theta} (1-\gamma_S) \frac{\partial}{\partial \bar{\theta}} = -\frac{1}{4} \bar{D}(1-\gamma_S) D +$$

+ полное независимое по  $x^\mu$ .

Поэтому с точностью до поверхности членов

$$\int d^4x d^4\theta = \int d^4x d^2\theta d^2\bar{\theta} = \int d^4x d^2\theta \left( -\frac{1}{4} \right) \bar{D}(1-\gamma_S) D$$

Это означает, что рассматриваемое слагающее представимо в виде интеграла по полному суперпространству от локального выражения:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2e_0^2} \text{Re} \text{tr} \int d^4x d^2\theta W_a C^{ab} W_b &= \\ = - \frac{1}{16e_0^2} \text{Re} \text{tr} \int d^4x d^4\theta e^{-2V} (1 + \gamma_5) D_a e^{2V} \cdot C^{ab} W_b \end{aligned}$$

Как следствие, могут существовать расходящиеся квантовые поправки, имеющие такую структуру.

Поэтому переориентироваться могут заряд и калибровочное поле (при использовании метода фанового поля — квантовое калибровочное поле)

Однако известно, что в  $N=1$  суперсимметрических калибровочных теориях переориентировка заряда связана с переориентированной суперполей материи т.к. точно  $NSVZ \beta$ -функцией:

$$\frac{\beta(\alpha, \lambda)}{\alpha^2} = - \frac{3C_2 - T(R) + C(R)_i{}^j (\gamma_\phi)_j{}^i(\alpha, \lambda)/r}{2\pi (1 - C_2 \alpha / 2\pi)}$$

$$\text{т.е. } r = \dim G$$

$$\begin{aligned} \text{tr}(T^A T^B) &= T(R) \delta^{AB} & \left( \text{tr}(t^A t^B) = \frac{1}{2} \delta^{AB} \right) \\ (T^A T^A)_i{}^j &= C(R)_i{}^j & \text{несправедливое представление} \\ f^{ACD} f^{BCD} &= C_2 \delta^{AB} & ([T^A, T^B] = i f^{ABC} T^C) \end{aligned}$$

Капомииши, это же не определено

$$\beta(\alpha, \lambda) \equiv \frac{d\alpha}{d\ln \mu} \Big|_{\begin{array}{l} \alpha_0 = \text{const} \\ \lambda_0 = \text{const} \end{array}}$$

$$(\gamma_\phi)_j{}^i(\alpha, \lambda) \equiv \frac{d \ln Z_j{}^i}{d \ln \mu} \Big|_{\begin{array}{l} \alpha_0 = \text{const} \\ \lambda_0 = \text{const} \end{array}}$$

где  $\mu$  — масса нормировки,  $\alpha_0, \lambda_0$  — это же константы связи, а  $\alpha, \lambda$  — переориентированные константы связи.

Изучим теперь квантовое свойство  $N=2$  суперсимметрических камбровских теорий. В случае простой камбровской группы

$$S = \frac{1}{2e^2} R \text{tr} \int d^4x d^2\theta W_a C^{ab} W_b + \frac{1}{2e^2} \text{tr} \int d^4x d^4\theta$$

$$\cdot \phi^+ e^{2V} \phi^- e^{-2V} + \frac{1}{4} \int d^4x d^4\theta (\phi_1^+ e^{2V} \phi_1^- + \phi_2^+ e^{-2V} \phi_2^-)$$

$$+ \left\{ \int d^4x d^2\theta \left( \frac{1}{2} m_0 \phi_2^T \phi_1^- + \frac{i}{\sqrt{2}} \phi_2^T \phi_1^- \right) + \text{k.c.} \right\}$$

Если теория квантуется с сохранением  $N=2$  суперсимметрии, то  $\phi$  преобразуется также как и фанное камбровское поле  $u \Rightarrow$  не преобразуется. Поэтому не переориентируются  $u, \phi_1, \phi_2$  (т.е. квантуются) в силу  $N=1$

теоремы о суперсимметрии (см. введение (137) слагающее)

При условии  $N=2$  суперсимметричного квантования можно также показать, что из NSVZ  $\beta$ -функции следует конечность все однопараметрического приближения:

$$\beta(\alpha) = -\frac{\alpha^2}{\pi} (C_2 - T(R_0))$$

где  $R_0$  — представление, в котором находится  $\phi_1$  (или  $\phi_2$ ).

Если  $R_0 = \text{Adj}$ , а  $m_0 = 0$ , то получаем  $N=4$  SYM. В этом случае

$$T(R_0) = T(\text{Adj}) = C_2 \quad \text{m.k.}$$

$$\text{tr}(T_{\text{Adj}}^A T_{\text{Adj}}^B) = -if^{ACD} \cdot (-i)f^{BDC} = C_2 \delta^{AB}$$

$\Rightarrow \beta(\alpha) = 0$  —  $N=4$  SYM константа во всех порядкех теории возмущений.

Это также означает, что этого действия

$$S = \frac{1}{2e_0^2} \text{tr} \text{Re} \int d^4x d^2\theta W_a \bar{c}^{ab} W_b + \frac{1}{2e_0^2} \text{tr} \int d^4x d^4\theta$$

$$\cdot \phi_i^+ e^{2V} \phi_i^- e^{-2V} + \left\{ \frac{i}{3\sqrt{2} e_0^2} \text{tr} \int d^4x d^2\theta \epsilon_{ijk} \phi_i [\phi_j, \phi_k] \right. \\ \left. + \text{k.c.} \right\}$$

Действительно, здесь все коэффициенты жёстко заданы  $N=4$  суперсимметрией, т.к. перенормироваться может только константа связи. Но слагаемое с  $\phi^3$  не перенормируется в силу  $N=1$  теоремы о перенормировке (суперпоменуала). Поэтому не перенормируется и заряд.