
Д.С. Горбунов, В.А. Рубаков

Введение в теорию ранней Вселенной

Космологические возмущения. Инфляционная
теория

Москва

2009

Оглавление

Предисловие	vii
1 Джинсовская неустойчивость в ньютоновой теории тяготения	1
1.1 Джинсовская неустойчивость в статической среде	2
1.2 Развитие неустойчивости в расширяющейся Вселенной	6
1.3 Размеры неоднородностей и массы структур	11
2 Космологические возмущения в общей теории относительности. Уравнения линеаризованной теории	13
2.1 Фоновая метрика	13
2.1.1 Метрика в конформном времени	13
2.1.2 Космологические параметры и конформные времена различных эпох	14
2.2 Общее рассмотрение	19
2.2.1 Калибровка $h_{0i} = 0$	19
2.2.2 Линеаризованный тензор энергии-импульса идеальной жидкости	20
2.2.3 Разложение по спиральностям	22
2.3 Уравнения в секторах с определённой спиральностью	25
2.3.1 Тензорные моды	25
2.3.2 Векторные моды	28
2.3.3 Скалярные моды: конформная ньютонова калибровка	29
2.4 Режимы эволюции	31
2.5 *Массивное скалярное поле как тёмная материя	36
3 Эволюция векторных и тензорных мод	45
3.1 Векторные моды	45
3.2 Тензорные моды: реликтовые гравитационные волны	46
3.2.1 За горизонтом: константная и падающая моды	46
3.2.2 Под горизонтом. Сшивка с константной модой	48
4 Скалярные возмущения: результаты для однокомпонентных сред	51
4.1 Общие уравнения	51
4.2 Релятивистское вещество	53
4.3 Нерелятивистское вещество	55
4.4 Возмущения плотности нерелятивистского вещества на Λ -доминированной стадии	56
5 Первичные скалярные возмущения в реальной Вселенной	58
5.1 Адиабатическая мода и моды постоянной кривизны	59
5.2 Адиабатическая мода за горизонтом	62
5.3 Начальные условия для мод постоянной кривизны	68
5.4 Первичные спектры: данные наблюдений	69
5.5 Эволюция адиабатических возмущений: беглый обзор	74

6 *Скалярные возмущения до рекомбинации	77
6.1 Длинноволновые адиабатические моды	79
6.2 Адиабатические моды, входящие под горизонт на радиационно-доминированной стадии	79
6.2.1 Возмущения тёмной материи	81
6.2.2 Возмущения барион-фотонной компоненты	87
6.3 Адиабатические моды с промежуточными импульсами	91
6.4 СДМ-моды постоянной кривизны	92
6.5 Барионные моды постоянной кривизны	96
7 *Формирование структур	98
7.1 Эволюция неоднородностей материи после рекомбинации: линейная стадия	99
7.1.1 Спектр мощности $P(k, z)$	99
7.1.2 Барионные акустические осцилляции	109
7.2 Выход возмущений на нелинейную стадию	115
7.2.1 Предварительное обсуждение	115
7.2.2 Распределение по массам	117
8 *За рамками приближения идеальной жидкости	129
8.1 Функции распределения и уравнение Больцмана в искривлённом пространстве-времени	129
8.2 Общие уравнения для скалярных возмущений	141
8.3 Тёплая тёмная материя	144
8.3.1 Подавление роста возмущений	144
8.3.2 Ограничения на массу частиц из фазовой плотности	158
8.4 Особенности эволюции нейтринной компоненты	161
8.4.1 Ранние стадии эволюции возмущений: релятивистские нейтрино	163
8.4.2 Нерелятивистские нейтрино	169
8.4.3 Влияние нейтрино на возмущения материи. Космологические ограничения на массы нейтрино	172
8.5 Неидеальность барион-фотонной среды в эпоху рекомбинации	180
8.5.1 Толщина сферы последнего рассеяния	181
8.5.2 Эффект Силка	189
9 *Температура реликтового излучения	196
9.1 Анизотропия температуры реликтового излучения	197
9.2 Анизотропия температуры в приближении мгновенного отщепления фотонов	201
9.2.1 Общий формализм	201
9.2.2 Большие угловые масштабы	208
9.2.3 Промежуточные угловые масштабы	217
9.3 Малые угловые масштабы	228
9.4 Зависимость спектра анизотропии от космологических параметров . .	231
9.5 Анизотропия температуры в случае мод постоянной кривизны	235
10 *Поляризация реликтового излучения	238
10.1 Источники поляризации	238
10.2 Тензор поляризации. E - и B -моды	241
10.3 Генерация поляризации реликтового излучения	248
10.3.1 Общее рассмотрение	249
10.3.2 Скалярные возмущения	253
10.3.3 Тензорные возмущения	262
10.4 Обсуждение	270

11 Проблемы теории горячего Большого взрыва. Инфляция как способ их решения	274
11.1 Проблемы теории горячего Большого взрыва	275
11.1.1 Проблема горизонта	276
11.1.2 Проблема плоскостности	279
11.1.3 Проблема энтропии	280
11.1.4 Проблема первичных неоднородностей	280
11.2 Инфляция: основная идея	281
12 Инфляция в режиме медленного скатывания	286
12.1 Условия медленного скатывания	286
12.2 Модели инфляции	291
12.2.1 Инфляция с большим полем (“хаотическая инфляция”)	291
12.2.2 Инфляция вблизи максимума потенциала (“новая инфляция”)	297
12.2.3 Гибридная инфляция	300
12.2.4 Заключительные замечания	304
13 Генерация космологических возмущений на инфляционной стадии	307
13.1 Упрощенный анализ: флуктуации инфлатонного поля	308
13.1.1 Вакуумные флуктуации в плоском пространстве-времени	308
13.1.2 Генерация возмущений инфлатона	310
13.1.3 Первичные скалярные возмущения	317
13.2 *Скалярные возмущения с учётом возмущений метрики	321
13.3 Тензорные возмущения	325
13.4 Амплитуды и наклоны спектров. Сравнение с наблюдениями.	326
13.4.1 Амплитуда скалярных возмущений: плоскость потенциала инфлатона	326
13.4.2 Амплитуда тензорных возмущений	328
13.4.3 Наклоны спектров	333
13.5 Обсуждение	338
14 *Дополнительные вопросы инфляционной теории	343
14.1 “Вечная” инфляция	343
14.2 Генерация возмущений плотности за счёт дополнительного скалярного поля	346
14.2.1 Негауссовы адиабатические возмущения	346
14.2.2 Моды постоянной кривизны	351
14.3 Лёгкое скалярное поле в раздувающейся Вселенной	352
14.3.1 Поле малой массы без самодействия	353
14.3.2 Модель с потенциалом четвёртого порядка	359
14.4 Аксион как тёмная материя: CDM-возмущения постоянной кривизны	362
15 *Постинфляционный разогрев	368
15.1 Предварительные соображения	368
15.2 Распад колебаний инфлатона в теории с квадратичным потенциалом	372
15.2.1 Распад инфлатонных колебаний большой амплитуды	374
15.2.2 Случай слабой связи	379
15.3 Особенности теории с потенциалом ϕ^4	382
15.4 Рождение тяжёлых фермионов	387
15.5 Физические приложения	389
15.5.1 Генерация барионной асимметрии в процессе разогрева	389
15.5.2 Нетепловые фазовые переходы	393
15.5.3 Высокочастотные гравитационные волны	394

16 *Сценарии с коллапсом и отскоком	396
A Точные решения для гравитирующей материи	403
A.1 Гравитационный коллапс в ньютоновой теории тяготения	403
A.2 Сферический коллапс пылевидной материи в общей теории относительности	406
B Вывод линеаризованных уравнений Эйнштейна	413
C Гауссовые случайные величины и гауссовые случайные поля	419
C.1 Свойства гауссовых случайных величин	419
C.2 Гауссовые случайные поля	424
D Фермионы в гравитационных полях	427
D.1 Группа Лоренца как калибровочная группа	427
D.2 Фермионное действие и уравнение Дирака	431
E Рождение частиц во внешних полях. Метод преобразований Боголюбова	434
E.1 Бозоны	434
E.2 Фермионы	440
F Некоторые специальные функции и их свойства	444
F.1 Сферические функции Бесселя целого порядка $j_l(x)$	444
F.2 Полиномы Лежандра $P_n(x)$ и сферические гармоники $Y_{lm}(\mathbf{n})$	450
Монографии, обзоры	455
Литература	465

Предисловие

Современная космология тесно связана с физикой микромира, изучающей элементарные частицы и их взаимодействия на наиболее фундаментальном уровне. Именно с этой точки зрения и написана эта книга. Она является продолжением нашей книги “Введение в теорию ранней Вселенной. Теория горячего Большого взрыва” (Москва, Издательство ЛКИ, 2008), в которой изложены результаты, относящиеся к однородной изотропной Вселенной на горячей стадии её эволюции и на последующих космологических этапах. Данная книга посвящена теории развития космологических возмущений, т.е. неоднородностей во Вселенной, инфляционной теории и теории пост-инфляционного разогрева.

В основу книги положен курс лекций, читавшийся в течение ряда лет на кафедре квантовой статистики и теории поля физического факультета Московского государственного университета студентам, специализирующимся в области теоретической физики. Мы сочли целесообразным, однако, добавить ряд более специальных разделов, помеченных в книге звёздочкой.

Мы постарались сделать изложение в главах, посвященных инфляционной теории, максимально независимым от материала других глав. Это сделано для того, чтобы читатель, интересующийся именно инфляционной теорией, мог начать чтение сразу с Главы 11.

Для чтения книги достаточно, в принципе, знания материала, обычно излагаемого в курсах общей физики, а также начальных разделов квантовой теории поля. Поэтому основные Главы книги должны быть доступны студентам старших курсов университетов. Необходимые для их чтения сведения из теории гравитации и теории случайных полей помещены в приложениях, не претендующих, разумеется, на сколько-нибудь полное изложение этих самостоятельных направлений. В то же время, в некоторых разделах, помеченных звёздочкой, используются методы неравновесной статистической физики и более специальные методы квантовой теории поля, так что для их чтения желательно владение указанным материалом. Частично он изложен в Главе 8 и Приложениях D, E.

В некоторых местах этой книги мы используем результаты, изложенные в предыдущей книге “Введение в теорию ранней Вселенной. Теория горячего Большого взрыва”. Соответствующие ссылки начинаются с цифры I. Например, I.3.1 означает раздел 3.1 предыдущей книги, а (I.3.13) — уравнение (3.13) из неё.

Сколько-нибудь полный библиографический обзор по обсуждаемым темам выходил бы далеко за рамки этой книги. Для ориентировки читателя мы поместили в конце книги перечень монографий и обзоров, в которых рассматриваются затронутые нами вопросы. Разумеется, этот перечень далеко не полон. По ходу изложения мы также приводим ссылки на оригинальную литературу, откуда мы почерпнули те или иные частные результаты.

Наблюдательная космология, как и экспериментальная физика частиц, быстро

развивается. Приведённые в книге наблюдательные и экспериментальные данные и результаты их обработки, скорее всего, будут уточнены уже до выхода книги в свет. Восполнить этот пробел поможет, например, обращение к регулярно обновляемым материалам Particle Data Group, <http://pdg.lbl.gov/>

Мы хотели бы поблагодарить наших коллег из Института ядерных исследований РАН Ф.Л. Безрукова, С.В. Демидова, С.Л. Дубовского, В.А. Кузьмина, Д.Г. Левкова, М.В. Либанова, Э.Я. Нугаева, Г.И. Рубцова, Д.В. Семикоза, И.И. Ткачёва, С.В. Троицкого, А.А. Хмельницкого за участие в подготовке курса лекций и многочисленные полезные обсуждения и ценные замечания. Мы глубоко благодарны Г.С. Бисноватому-Когану, О.В. Верходанову, В.Н. Лукашу, В.Ф. Муханову, И.Д. Новикову, К.А. Постнову, М.В. Сажину, Р.А. Сюняеву, А.В. Тихонову, И.Л. Шапиро, М.Е. Шапошникову и Ю.В. Штанову за многочисленные полезные замечания и критику.

Глава 1

Джинсовская неустойчивость в ньютоновой теории тяготения

В этой и последующих главах мы рассмотрим, как развиваются неоднородности плотности вещества и неоднородности метрики в расширяющейся Вселенной. С точки зрения наблюдений интерес здесь представляют несколько связанных между собой аспектов. Упомянем о двух из них. Первый — это рост возмущений плотности, приводящий в конечном итоге к образованию структур (галактик, скоплений галактик и т.д.). Второй связан с наблюдаемой анизотропией и поляризацией реликтового излучения. Последние возникают в результате действия нескольких механизмов, так или иначе обусловленных неоднородностями плотности и не зависящими от них возмущениями другого типа — гравитационными волнами (точнее — тензорными возмущениями). Сравнение теории с наблюдениями позволяет получать ответы на два вопроса, ключевых для космологии: 1) каков был спектр первичных космологических возмущений, существовавших в начале стадии горячего Большого взрыва; 2) каковы основные свойства среды во Вселенной — обычного вещества, тёмной материи, тёмной энергии. Первичный спектр возмущений задаёт начальные данные для их эволюции; если бы первичных возмущений не было вовсе, то Вселенная осталась бы строго однородной и изотропной, и структуры в ней никогда бы не появились. В то же время, эволюция возмущений зависит от свойств среды и темпа расширения Вселенной на разных космологических этапах, и согласующаяся с наблюдениями картина возникает только при определённой пропорции между различными её компонентами. Мы увидим, что хорошие результаты получаются для холодной (или тёплой) тёмной материи, частицы которой являются нерелятивистскими уже при весьма высоких температурах.

В этой книге мы будем в основном рассматривать линеаризованную теорию для неоднородностей плотности и метрики, которая работает тогда, когда эти неоднородности $\delta\rho$ и $\delta g_{\mu\nu}$ малы по сравнению со средней плотностью и средней метрикой,

$$\delta\rho \ll \rho, \quad \delta g_{\mu\nu} \ll g_{\mu\nu}.$$

Линеаризованная теория вполне адекватна для описания эволюции возмущений на сравнительно ранних этапах расширения Вселенной. В частности, для обсуждения круга вопросов, связанных с реликтовым излучением, достаточно использовать именно линеаризованную теорию: ко времени последнего рассеяния реликтовых фотонов (периоду рекомбинации) возмущения плотности и метрики составляли, грубо

говоря, величину порядка

$$\frac{\delta\rho}{\rho} \sim \delta g_{\mu\nu} \sim \frac{\delta T}{T},$$

а из данных по анизотропии реликтового излучения следует, что $\delta T/T \sim 10^{-4} - 10^{-5}$.

В то же время, на не слишком больших пространственных масштабах в *современной* Вселенной выполняется $\delta\rho/\rho \gg 1$. Например, плотность массы в галактиках превышает среднюю плотность во Вселенной в $10^5 - 10^6$ раз. Линеаризованная теория заведомо неприменима для полного описания образования таких гравитационно связанных структур. Тем не менее, она даёт представление о том, как первоначально малые возмущения выросли до значений $\delta\rho/\rho \sim 1$; это и будет одним из основных вопросов, которые мы будем рассматривать. Мы убедимся, в частности, что возмущения относительно небольших масштабов действительно вырастают до значений $\delta\rho/\rho \sim 1$, а возмущения больших масштабов остаются малыми (линейными) вплоть до современной эпохи. Это согласуется с наблюдаемой картиной распределения вещества во Вселенной по крайней мере на качественном уровне. Для количественного сравнения необходимо привлекать методы, пригодные для изучения нелинейной динамики и далеко выходящие за рамки этой книги. В настоящее время наиболее распространёнными из таких методов являются численные расчёты.

Вопрос о механизме возникновения самих первичных возмущений плотности и метрики не находит своего решения в рамках теории горячего Большого взрыва, что является одной из проблем этой теории. Изящный ответ на этот вопрос даёт инфляционная теория, которую мы будем рассматривать в последующих главах.

1.1 Джинсовская неустойчивость в статической среде

В общих чертах механизм роста возмущений плотности состоит в следующем. Область повышенной плотности материи создаёт вокруг себя гравитационное поле. Оно притягивает окружающую материю, которая падает в эту область, создавая ещё больший контраст плотности. Процесс продолжается до тех пор, пока контраст плотности $\delta\rho/\rho$ не станет порядка единицы. После этого динамика переходит в нелинейную стадию; область с повышенной плотностью коллапсирует, при этом образуется компактный гравитационно связанный объект, например, галактика.

Проиллюстрируем процесс развития гравитационной неустойчивости на простом примере ньютоновой теории тяготения и классической гидродинамики на фоне плоского пространства-времени. Излагаемый здесь механизм называют механизмом Джинса. Подчеркнём, что с точки зрения космологии этот механизм, как правило, не является реалистичным из-за расширения Вселенной. Тем не менее, некоторые особенности динамики он ухватывает правильно.

Итак, рассмотрим область пространства, заполненную нерелятивистской жидкостью. Жидкость создаёт гравитационный потенциал ϕ в соответствии с законом Ньютона,

$$\Delta\phi = 4\pi G\rho, \quad (1.1)$$

где $\rho(\mathbf{x}, t)$ — локальная плотность жидкости, а Δ — лапласиан в плоском пространстве, $\Delta \equiv \nabla^2$. Динамика жидкости описывается её уравнением состояния и уравне-

ниями гидродинамики

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla(\rho \mathbf{v}) = 0 \quad (1.2)$$

$$\rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\rho \mathbf{v} \nabla) \cdot \mathbf{v} = -\nabla p - \rho \nabla \phi, \quad (1.3)$$

где $p(\mathbf{x}, t)$ — локальное давление в жидкости, а \mathbf{v} — её скорость. Первое уравнение (уравнение непрерывности) можно получить, рассматривая баланс массы жидкости в заданном объёме, а второе (обобщение уравнения Эйлера) следует из второго закона Ньютона для того же объёма.¹

▷ Задача 1. Получить уравнения гидродинамики (1.2) и (1.3).

Предположим, что в отсутствие возмущений среда однородна и статична,

$$\rho(\mathbf{x}) = \text{const}, \quad p(\mathbf{x}) = \text{const}, \quad \mathbf{v}(\mathbf{x}) = 0, \quad (1.4)$$

и при этом ньютонов потенциал равен нулю. Такое предположение на самом деле ничем не оправдано; более того, оно противоречит уравнению (1.1). Иными словами, представление об однородной статической гравитирующей среде противоречит ньютоновой механике. Мы обсудим более реалистический случай зависящих от времени фонового гравитационного потенциала и плотности среды в разделе 1.2, а пока будем действовать в рамках сделанного предположения.

Эволюция малых возмущений ($\delta\rho, \delta p, \delta\mathbf{v} = \mathbf{v}, \delta\phi = \phi$) описывается системой уравнений, непосредственно следующих из (1.1), (1.2) и (1.3) в линейном порядке по возмущениям:

$$\Delta\phi = 4\pi G \delta\rho, \quad (1.5)$$

$$\frac{\partial \delta\rho}{\partial t} + \rho \nabla \mathbf{v} = 0, \quad (1.6)$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\frac{\nabla \delta p}{\rho} - \nabla \phi. \quad (1.7)$$

Здесь и далее ρ и p обозначают однородные фоновые величины. Полагая, что жидкость описывается уравнением состояния $p = p(\rho)$, исключим возмущение давления с помощью соотношения

$$\delta p = \frac{\partial p}{\partial \rho} \delta\rho \equiv u_s^2 \delta\rho, \quad (1.8)$$

где $u_s = \text{const}$ — скорость звука в среде. В результате дифференцирования уравнений (1.6) и (1.7) по времени и пространственным координатам, соответственно, и дальнейших очевидных подстановок получим линейное уравнение для возмущений плотности материи $\delta\rho(\mathbf{x}, t)$:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - u_s^2 \Delta - 4\pi G \rho \right) \delta\rho = 0. \quad (1.9)$$

¹Как мы отмечали в книге [1] (см. Приложение I.A), в общей теории относительности уравнение непрерывности и уравнение Эйлера суть следствия ковариантного сохранения тензора энергии-импульса идеальной жидкости.

В отсутствие гравитационных взаимодействий ($G = 0$) это уравнение описывает распространение звуковых волн в среде. Эффекты гравитации, однако, приводят к существенно иной динамике для волн достаточно большой длины.

Представив решение в виде интеграла Фурье²,

$$\delta\rho(\mathbf{x}, t) = \int d^3q e^{i\mathbf{qx}} \delta\rho(\mathbf{q}, t),$$

и записывая решение в виде

$$\delta\rho(\mathbf{q}, t) = e^{-i\omega t} \delta\rho(\mathbf{q}),$$

получим уравнение для закона дисперсии:

$$-\omega^2 + u_s^2 \mathbf{q}^2 - 4\pi G \rho = 0. \quad (1.10)$$

Из (1.10) следует, что уравнение (1.9) имеет два типа решений в зависимости от величины трёхмерного импульса $q \equiv |\mathbf{q}|$. Для возмущений с импульсами $q > q_J$, где

$$q_J \equiv \sqrt{\frac{4\pi G \rho}{u_s^2}}, \quad (1.11)$$

квадрат частоты положителен, частота действительна, и такие возмущения представляют собой звуковые волны. При меньших импульсах, $q < q_J$, частота ω является мнимой, и у уравнения (1.9) отсутствуют волновые решения. Одна из мод экспоненциально растёт, $\delta\rho(\mathbf{q}, t) \propto \exp(\Omega_q t)$, где $\Omega_q = \sqrt{\Omega_J^2 - u_s^2 q^2}$ и $\Omega_J = \sqrt{4\pi G \rho}$. Другая мода экспоненциально затухает. Отметим, что для вещества с нулевой скоростью звука (например, пыли), для каждой, сколь угодно малой, длины волны имеется экспоненциально растущая мода.

Экспоненциальный рост одного из решений говорит о нестабильности возмущений в гравитирующей жидкости: возмущения малой начальной амплитуды с длинами волн $\lambda > \lambda_J$, где

$$\lambda_J \equiv \frac{2\pi}{q_J} = \sqrt{\frac{u_s^2 \pi}{G \rho}}, \quad (1.12)$$

экспоненциально нарастают, контраст плотности со временем становится большим, $\delta\rho \sim \rho$, и наступает нелинейный режим. Характерным временем этого процесса служит

$$t_J = \frac{1}{\Omega_J} = \frac{1}{\sqrt{4\pi G \rho}}.$$

После наступления нелинейного режима происходит быстрый коллапс и образуется сравнительно компактный объект. Если начальная длина соответствующей коллапсирующей моды равна λ , то масса этого объекта по порядку величины равна

$$M \sim \rho \cdot \lambda^3.$$

Критическая длина волны λ_J получила название джинсовской длины, а сама нестабильность — джинсовской неустойчивости. Отметим универсальный характер джинсовой неустойчивости: критическая длина волны λ_J существует для любой среды

² В этой книге аргумент пространственного Фурье-образа мы будем всегда называть импульсом (физическими или конформными в зависимости от контекста). В дальнейшем физический импульс будет обозначаться буквой q , а букву p мы зарезервируем за давлением.

и определяется только плотностью среды и скоростью звука в ней. Отметим ещё, что джинсовское время по порядку величины совпадает с временем свободного падения (free fall) для однородного шара с плотностью массы ρ . Действительно, ускорение свободного падения в таком шаре на расстоянии r от его центра равно

$$\mathbf{w}(r) = -G \frac{M(r)}{r^2} \frac{\mathbf{r}}{r} = -\frac{4\pi}{3} G \rho r \frac{\mathbf{r}}{r}.$$

Если пробное тело падает с нулевой начальной скоростью с расстояния R , то время t_{ff} падения на центр оценивается из соотношения $|\mathbf{w}(R)| \cdot t_{ff}^2 \sim R$, откуда и следует $t_{ff} \sim t_J$.

▷ Задача 2. Найти время свободного падения точно.

Джинсовское время поучительно сравнить с хаббловским времененным масштабом. Вспоминая уравнение Фридмана $H^2 = (8\pi/3)G\rho$, мы видим, что $t_J \sim H^{-1}$, если среда, в которой развиваются неоднородности, доминирует во Вселенной, и $t_J \gg H^{-1}$ в обратной ситуации. В любом случае столь большая величина джинсовского времени указывает на неприменимость приближения статического фона, которое мы используем в этом разделе. Мы увидим в следующем разделе, что расширение Вселенной сильно меняет картину развития джинсовской неустойчивости. Тем не менее, выражение (1.12) даёт правильную оценку величины длины волны, начиная с которой происходит рост возмущений.

Массу шара диаметра, равного джинсовской длине волны, называют джинсовской массой; по порядку величины это минимальная масса объекта, образующегося в результате джинсовской неустойчивости. Найдём для примера джинсовскую массу сразу после эпохи рекомбинации, предполагая, что Вселенная заполнена водородом (наличием гелия в среде для оценки пренебрегаем). По определению будем иметь

$$M_J = \frac{\pi}{6} \rho_H \lambda_J^3 = \frac{\pi^{5/2}}{6G^{3/2}} \frac{u_s^3}{\sqrt{\rho_H}},$$

причём сразу после рекомбинации

$$\rho_H \approx m_p \eta_B n_\gamma(T_r) = \frac{2\zeta(3)}{\pi^2} m_p \eta_B T_r^3,$$

где температура рекомбинации T_r приближённо равна 0.25 эВ (см. конец раздела 8.5.1), $\eta_B \sim 6 \cdot 10^{-10}$ — барион-фотонное отношение (см. раздел I.5.2), и для газа нерелятивистских частиц $u_s^2 = 5T_r/3m_p$. Таким образом, численно джинсовская масса сразу после рекомбинации составляет

$$M_J \simeq 10^6 M_\odot,$$

где масса Солнца в естественной системе единиц равна

$$M_\odot = 1.1 \cdot 10^{57} \text{ ГэВ}. \quad (1.13)$$

Во Вселенной без тёмной материи облака с массой большей джинсовской сжимались бы под действием собственного гравитационного поля. Как мы увидим в следующем разделе, сжатие это, однако, было бы не экспоненциальным по времени,

а степенным, что обусловлено расширением Вселенной, противодействующим развитию неустойчивости. Здесь же отметим, что джинсовская масса получилась по порядку величины равной массе самых лёгких, карликовых галактик и шаровых звёздных скоплений.

Подчеркнём, что приведённое вычисление имеет мало отношения к реальной Вселенной, в которой имеется тёмная материя. Например, холодная тёмная материя на интересующих нас стадиях космологической эволюции представляет собой газ бесстолкновительных частиц, обладающий чрезвычайно низкой эффективной температурой. Действительно, как мы видели в разделе I.2.5, эффективная температура нерелятивистских свободных частиц падает как $1/a^2$, в то время как температура фотонов падает как $1/a$. Поэтому эффективная температура тёмной материи к эпохе рекомбинации не превышает T_r^2/T_d , где T_d — температура выхода тёмной материи из кинетического равновесия, причём $T_d \gg T_r$. В связи с этим давление тёмной материи (точнее, влияние пространственных компонент тензора энергии-импульса) пренебрежимо мало, джинсовская неустойчивость начинает развиваться в ней до эпохи рекомбинации, и именно наличие тёмной материи в основном определяет эволюцию возмущений плотности и ньютонова потенциала в реальной Вселенной после перехода с радиационно-доминированной на пылевидную стадию. Неоднородности же барионной компоненты следуют за возмущениями тёмной материи: образно говоря, барионы сваливаются в гравитационные ямы, образованные тёмной материйей. Этот круг вопросов мы подробно рассмотрим в Главах 6 и 7.

В случае газа релятивистских частиц с уравнением состояния $p = \rho/3$ скорость звука равна $u_s = 1/\sqrt{3}$. Поэтому джинсовская длина λ_J на радиационно-доминированной стадии сравнима с размером горизонта, который по порядку величины равен $H^{-1} = \sqrt{3}/(8\pi G\rho)$. Используемый в этой Главе ньютонов подход совершенно неадекватен для изучения волн с такими длинами; мы увидим в разделе 4.2, что возмущения плотности релятивистского газа не растут на радиационно-доминированной стадии.

В заключение этого раздела отметим, что для сферически-симметричной материи с нулевым давлением (“пыли”) задача о гравитационном коллапсе имеет точное решение как в рамках ньютоновской теории тяготения, так и в общей теории относительности; в последней соответствующее решение называют решением Толмэна. Мы приводим эти решения в Приложении А. И в том, и в другом случае при любой массе пылевого шара за конечное собственное время частиц среды, по порядку величины равное времени свободного падения, в его центре появляется сингулярность; в общей теории относительности решение описывает образование чёрной дыры. Образование чёрной дыры в центре пылевого облака любой массы обусловлено полной сферической симметрией задачи. В реалистичных ситуациях с неполной симметрией чёрная дыра, вообще говоря, не образуется. Отметим также важность учёта давления и диссипативных процессов в веществе при рассмотрении реалистических задач о коллапсе.

1.2 Развитие неустойчивости в расширяющейся Вселенной

С точки зрения космологических приложений более реалистической является задача об устойчивости линейных возмущений в жидкости не на статическом фоне, а на

фоне расширяющейся однородной и изотропной Вселенной. В общем случае исследование космологических возмущений должно проводиться в рамках общей теории относительности; этому будут посвящены последующие Главы. В то же время, для описания гравитационных взаимодействий нерелятивистской материи на масштабах длин, малых по сравнению с хаббловским размером, и при не слишком высоких плотностях энергии должна быть справедлива ньютона теория. Действительно, в этом случае пространство-время близко к плоскому, движения среды — медленные, а гравитационное поле почти целиком обусловлено массами частиц среды. Поэтому уравнения (1.1), (1.2) и (1.3) должны правильно описывать как эволюцию однородной изотропной Вселенной в случае среды с малым давлением, так и развитие гравитационной неустойчивости в этой среде. Так оно и происходит. Однородная изотропная Вселенная в ньютоновом подходе описывается следующим образом:

$$\rho = \rho(t), \quad p = p(t), \quad \bar{\mathbf{V}} = \mathbf{x} \cdot H(t), \quad \bar{\phi} = \frac{2\pi G}{3}\rho\mathbf{x}^2. \quad (1.14)$$

Здесь и далее черта обозначает фоновое значение соответствующей величины; для полной скорости среды мы в этом разделе используем обозначение \mathbf{V} . Для плотности энергии и давления мы черту не используем; ρ и p всегда будут обозначать фоновые величины.

Потенциал $\bar{\phi}$ действительно является решением уравнения (1.1), а функции $\rho(t)$ и $H(t)$ должны удовлетворять системе уравнений

$$\frac{d\rho}{dt} + 3H\rho = 0, \quad (1.15a)$$

$$\frac{dH}{dt} + H^2 = -\frac{4\pi}{3}G\rho. \quad (1.15b)$$

Эта система в ньютоновом подходе представляет собой следствие уравнений (1.2) и (1.3). В общей теории относительности уравнение (1.15a) совпадает с уравнением ковариантного сохранения тензора энергии-импульса (I.3.11) в пренебрежении давлением среды; уравнение (1.15b) — это следствие уравнения (I.3.11) и уравнения Фридмана (I.3.7) для пространственно-плоской Вселенной. Неудивительно, что одним из решений системы (1.15) служит известное космологическое решение для пылевидной материи, см. (I.3.19), (I.3.20),

$$H = \frac{2}{3t}, \quad \rho = \frac{1}{6\pi G t^2}. \quad (1.16)$$

Другие решения мы в этой Главе рассматривать не будем. Подчеркнём, что ньютоновское приближение неприменимо для расстояний порядка или больше хаббловского размера, поэтому мы ограничимся рассмотрением областей размера $|\mathbf{x}| \ll H^{-1}$ и возмущений с длинами волн $\lambda \ll H^{-1}$.

▷ *Задача 3. Найти общее решение системы уравнений (1.15). Сравнить с общим решением системы (I.3.7), (I.3.11) и объяснить различие.*

Рассмотрим эволюцию малых возмущений

$$\delta\rho, \quad \delta p = u_s^2\delta\rho, \quad \delta\phi \equiv \Phi, \quad \delta\mathbf{V} = \mathbf{v}.$$

Мы ввели здесь обозначения для возмущений скорости и гравитационного потенциала так, чтобы приблизить их к используемым в последующих Главах. Систему

соответствующих уравнений найдём аналогично тому, как мы поступили в разделе 1.1: разложим уравнения (1.1), (1.2), (1.3) в ряд по малым возмущениям на фоне решения (1.14), (1.15) и ограничимся линейным порядком. Подчеркнём, что для волн сравнительно малой длины давление, даже если оно невелико по сравнению с плотностью энергии, играет существенную роль; например, джинсовская длина (1.12) пропорциональна скорости звука $u_s = (\delta p / \delta \rho)^{1/2}$. Поэтому величиной $\delta \rho$ мы не пренебрегаем. В то же время, пренебрежение давлением в уравнениях (1.15) для однородного фона законно поскольку $p \ll \rho$.

Удобно вместо абсолютной флуктуации плотности энергии $\delta \rho$ использовать относительную флуктуацию

$$\delta(\mathbf{x}, t) \equiv \frac{\delta \rho(\mathbf{x}, t)}{\rho(t)} .$$

Тогда уравнения для линейных возмущений будут иметь вид

$$\Delta \Phi = 4\pi G \rho \delta , \quad (1.17a)$$

$$\frac{\partial \delta}{\partial t} + H \mathbf{x} \nabla \delta + \nabla \mathbf{v} = 0 , \quad (1.17b)$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + H \mathbf{v} + H \cdot (\mathbf{x} \nabla) \mathbf{v} = -u_s^2 \nabla \delta - \nabla \Phi . \quad (1.17c)$$

Чтобы найти решение этой системы, воспользуемся следующим Фурье-преобразованием для возмущений:

$$\delta(\mathbf{x}, t) = \int d^3 k \exp \left[i \mathbf{k} \frac{\mathbf{x}}{a(t)} \right] \cdot \delta(\mathbf{k}, t) , \quad (1.18)$$

и так же для других величин. Здесь $a(t)$ — масштабный фактор, который в ньютоновой теории определяется по аналогии с общей теорией относительности,

$$H(t) = \frac{1}{a} \frac{da}{dt} .$$

В общей теории относительности переменные \mathbf{k} и \mathbf{x}/a — это конформный импульс и координата в сопутствующей системе отсчёта; в ньютоновой теории использование Фурье-преобразования в виде (1.18) — просто удобный трюк, позволяющий избавиться от явной зависимости коэффициентов в уравнениях (1.17) от пространственных координат. Для временных производных возмущений будем иметь

$$\frac{\partial \delta}{\partial t} = \int d^3 k \exp \left[i \mathbf{k} \frac{\mathbf{x}}{a(t)} \right] \cdot \left[-i \frac{\mathbf{kx}}{a} H \delta(\mathbf{k}, t) + \frac{\partial \delta(\mathbf{k}, t)}{\partial t} \right] .$$

Тогда для Фурье-образов линейных возмущений получим систему уравнений

$$k^2 \Phi = -4\pi G \rho a^2 \delta , \quad (1.19a)$$

$$\frac{\partial \delta}{\partial t} + i \frac{\mathbf{k}}{a} \mathbf{v} = 0 , \quad (1.19b)$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + H \mathbf{v} + i \frac{\mathbf{k}}{a} (u_s^2 \delta + \Phi) = 0 . \quad (1.19c)$$

Здесь и в дальнейшем функции пространственных координат и их Фурье-образы мы обозначаем одними и теми же символами; в необходимых случаях мы будем указывать на зависимость от \mathbf{x} или \mathbf{k} , как мы это сделали в (1.18), при этом $k^2 = \mathbf{k}^2$.

Уравнение (1.19а) показывает, что именно возмущения плотности энергии являются источником возмущений гравитационного потенциала. Оно позволяет исключить величину Φ из системы уравнений, описывающих эволюцию космологических возмущений.

Рассмотрим эволюцию возмущений скорости. Для этого воспользуемся уравнением (1.19а) и запишем уравнение (1.19с) в следующем виде:

$$\frac{\partial}{\partial t} (a\mathbf{v}) + i\mathbf{k} \left(u_s^2 - 4\pi G \rho \frac{a^2}{k^2} \right) \delta = 0 . \quad (1.20)$$

Для каждого \mathbf{k} вектор возмущения скорости удобно разложить на поперечную и продольную компоненты,

$$\mathbf{v} = \mathbf{V}^T + i\mathbf{k}v ,$$

причём поперечная компонента удовлетворяет $\mathbf{k} \cdot \mathbf{V}^T = 0$. Отметим, что в координатном представлении продольная компонента записывается через скалярную функцию $v(\mathbf{x}, t)$ как $\mathbf{v}^L = \nabla v$, поэтому $v(\mathbf{x}, t)$ является потенциалом скоростей. Поперечные и продольные компоненты возмущений скорости эволюционируют независимо друг от друга, что связано с симметрией фона относительно пространственных вращений, см. подробнее раздел 2.2.3.

Из уравнения (1.20) видно, что возмущения плотности материи δ дают вклад только в уравнение для продольной компоненты возмущений скорости. Напротив, поперечные компоненты скорости соответствуют возмущениям, для которых $\delta\rho = 0$. Последний тип возмущений называют векторными модами. Для них плотность энергии и давление остаются однородными, а скорость ортогональна волновому вектору \mathbf{k} . Таким образом, в случае векторных мод мы имеем дело с вихревыми возмущениями, несущими ненулевой угловой момент.

Поперечные компоненты скорости удовлетворяют уравнению

$$\frac{\partial}{\partial t} (a\mathbf{V}^T) = 0$$

и затухают с масштабным фактором по закону

$$V^T = \frac{\text{const}}{a(t)} . \quad (1.21)$$

Для рассматриваемого случая доминирования нерелятивистского вещества выполняется $a(t) \propto t^{2/3}$, откуда $V^T \propto t^{-2/3}$. Соотношение (1.21) имеет простую интерпретацию, связанную с сохранением углового момента в расширяющейся Вселенной. Угловой момент участка среды, имеющего физический размер l и характерные скорости вращательного движения V^T , оценивается как произведение массы, скорости и размера, то есть как $(\rho l^3) \cdot V^T \cdot l$. При расширении Вселенной физический размер l растёт пропорционально масштабному фактору a , поэтому сохранение углового момента означает, что

$$\rho V^T a^4 = \text{const} . \quad (1.22)$$

Плотность энергии ρ нерелятивистского вещества падает как a^{-3} , и последнее соотношение сводится к (1.21).

Векторные возмущения, по-видимому, не играют сколько-нибудь существенной роли в реальной Вселенной, поскольку они быстро затухают на стадии доминирования нерелятивистской материи, см. также раздел 3.1.

Потенциал продольной компоненты скорости v связан с возмущением плотности, как это следует из (1.19b),

$$v = \frac{a}{k^2} \cdot \frac{\partial \delta}{\partial t} .$$

Воспользуемся этим соотношением, чтобы получить замкнутое уравнение для эволюции возмущений плотности энергии. Выразив Φ из (1.19a), получим из (1.19c) уравнение на относительное возмущение,

$$\frac{\partial^2 \delta}{\partial t^2} + 2H \frac{\partial \delta}{\partial t} + \left(\frac{k^2}{a^2} u_s^2 - 4\pi G \rho \right) \delta = 0 , \quad (1.23)$$

обобщающее уравнение (1.9) на случай расширяющейся Вселенной. В статическом случае, когда $H = 0$, мы возвращаемся к уже полученному нами результату: моды, у которых физический импульс $q = k/a$ меньше джинсовского, нестабильны.

Утверждение о наличии нестабильности для мод с большими длинами волн справедливо и для случая расширяющейся Вселенной, однако развитие нестабильностиносит не экспоненциальный, а степенной характер. Покажем это, рассматривая малые импульсы, $q \ll q_J$. На пылевидной стадии космологической эволюции параметр Хаббла и плотность энергии изменяются со временем по законам (1.16), поэтому уравнение на коротковолновые моды принимает вид

$$\frac{\partial^2 \delta}{\partial t^2} + \frac{4}{3t} \frac{\partial \delta}{\partial t} - \frac{2}{3t^2} \delta = 0 . \quad (1.24)$$

Растущее решение уравнения (1.24) эволюционирует по закону

$$\delta \propto t^{2/3} , \quad (1.25)$$

то есть растёт линейно с масштабным фактором, $\delta \propto a$. По сравнению со статическим случаем рост возмущений подавлен вследствие расширения Вселенной.

Линейный по масштабному фактору рост возмущений имеет место лишь на пылевидной стадии эволюции Вселенной. На радиационно-доминированной стадии возмущения растут ещё медленнее (см. ниже в этом разделе и Главы 4, 6). Тем не менее, даже сравнительно медленного роста оказывается достаточно, чтобы возмущения с малыми длинами волн, начав эволюцию в ранней Вселенной с уровня $\delta \sim 10^{-5}$, вышли на нелинейный режим и успели образовать наблюдаемые в современной Вселенной структуры — галактики и их скопления. Этот вопрос мы несколько подробнее рассмотрим в Главе 7.

Уравнение (1.23) допускает обобщение на случай многокомпонентной жидкости. А именно, рассмотрим ситуацию, когда среда состоит из нескольких не взаимодействующих между собой компонент, нумеруемых индексом λ , каждая из которых характеризуется плотностью энергии, давлением и скоростью ρ_λ , p_λ и \mathbf{v}_λ , соответственно. Тогда уравнение (1.23) для компоненты λ имеет вид

$$\frac{\partial^2 \delta_\lambda}{\partial t^2} + 2H \frac{\partial \delta_\lambda}{\partial t} - 4\pi G \sum_{\lambda'} \rho_{\lambda'} \delta_{\lambda'} = 0 , \quad (1.26)$$

где суммирование ведётся по всем компонентам среды. Применим это уравнение к возмущениям нерелятивистской тёмной материи на радиационно-доминированной

стадии, считая, что вкладом возможных неоднородностей плотности релятивистского вещества в сумму, фигурирующую в (1.26), можно пренебречь. Это предположение оправдывается тем обстоятельством, что для релятивистского вещества интересующие нас моды с $\lambda \ll H^{-1}$ не растут (для релятивистского вещества джинсовская длина формально сравнима с H^{-1} , см. конец раздела 1.1). Для тёмной материи здесь и далее мы будем использовать обозначение CDM . На радиационно-доминированной стадии справедливо

$$4\pi G\rho_{CDM} \ll H^2 = \frac{8\pi}{3}G\rho_{rad},$$

где обозначение rad относится к релятивистской компоненте. В силу указанного неравенства вкладом самой тёмной материи в сумму в (1.26) можно пренебречь. Параметр Хаббла на радиационно-доминированной стадии равен $H(t) = (2t)^{-1}$ (см. раздел I.3.2.2), так что эволюция возмущений тёмной материи описывается уравнением

$$\frac{\partial^2 \delta_{CDM}}{\partial t^2} + \frac{1}{t} \frac{\partial \delta_{CDM}}{\partial t} = 0,$$

Общее решение этого уравнения имеет вид:

$$\delta_{CDM}(t) = C_1 + C_2 \ln \frac{t}{t_1}, \quad (1.27)$$

то есть рост возмущений происходит логарифмически со временем. Это ещё более медленный рост, чем в эпоху доминирования нерелятивистского вещества, что связано со сравнительно быстрым расширением Вселенной на радиационно-доминированной стадии. Общее утверждение состоит в том, что чем выше темп расширения, тем сильнее подавление роста возмущений нерелятивистского вещества.

▷ *Задача 4. Найти закон эволюции возмущений нерелятивистского вещества в гипотетической Вселенной, в плотность энергии которой основной вклад вносит пространственная кривизна. То же для эпохи доминирования космологической постоянной.*

В заключение подчеркнём, что проведённый в этой Главе анализ носит, разумеется, предварительный характер. Главный недостаток ньютоновой теории состоит в том, что она неадекватна для изучения волн с длинами, сравнимыми с размером текущего горизонта или превосходящими этот размер. Поэтому в её рамках невозможно связать амплитуды волн, имеющихся при сравнительно поздних временах, с начальными космологическими возмущениями. Второй серьёзный недостаток — неприменимость ньютоновой теории (по крайней мере в изложенном здесь виде) к веществу, состоящему из релятивистских частиц, в частности, к барион-фотонной среде до рекомбинации. Наконец, в ньютоновой теории отсутствуют тензорные возмущения (гравитационные волны). Последовательное описание космологических возмущений возможно только в рамках общей теории относительности.

1.3 Размеры неоднородностей и массы структур

Линейная стадия эволюции возмущения современного размера R заканчивается тогда, когда контраст плотности в соответствующей области перестаёт быть малым.

Если данная область имеет повышенную плотность, то после этого, как мы уже говорили и как следует из результатов Приложения А, материя в ней испытывает коллапс, в результате которого образуется компактный объект массы

$$M(R) \simeq \frac{4\pi}{3} R^3 \rho_{M,0}, \quad (1.28)$$

где $\rho_{M,0} = \Omega_M \rho_c$ — современная средняя плотность массы тёмной материи и барионов. Для дальнейшего полезно иметь представление о том, какие современные пространственные масштабы начальных возмущений соответствуют тем или иным структурам во Вселенной. Для оценки используем приведённые в разделах I.1.3 и 2.1.2 значения $\rho_c = 1.5 \cdot 10^{11} \cdot M_\odot / \text{Мпк}^3$, $\Omega_M = 0.24$. Тогда из (1.28) получим, что размеру $R = 1$ Мпк соответствует объект массы $M \simeq 1.5 \cdot 10^{11} M_\odot$. Такой масштаб масс характерен для обычных (не карликовых) галактик. Подчеркнём, что речь идёт о полной массе, включающей массу гало тёмной материи. Итак, масштабы, соответствующие галактикам, — это

$$\text{галактики : } R \sim (1 - 3) \text{ Мпк} \iff (10^{11} - 4 \cdot 10^{12}) M_\odot.$$

Наша Галактика — крупная, её масса составляет около $10^{12} M_\odot$. Ещё раз отметим, что указанные размеры — это современные размеры областей, из которых материя собирается в галактики. Размеры самих галактик заметно меньше, они составляют $10 - 100$ кпк, так что плотность материи в центральных областях галактик превышает среднюю плотность в $10^5 - 10^6$ раз.

Скопления галактик характеризуются заметно большими значениями R и M :

$$\text{скопления галактик : } R \sim (10 - 30) \text{ Мпк} \iff (10^{14} - 4 \cdot 10^{15}) M_\odot.$$

Это — самые большие гравитационно связанные объекты во Вселенной. Их размеры составляют $1 - 10$ Мпк, а плотность материи в центральных областях в $100 - 1000$ раз превышает среднюю.

По-видимому, наименьшие образования из звёзд, погруженных в гало тёмной материи, — это карликовые галактики. Для них соответствующие оценки имеют вид

$$\text{карликовые галактики : } R \sim (40 - 400) \text{ кпк} \iff (10^7 - 10^{10}) M_\odot.$$

Из гало меньших масс барионы “выдуваются” излучением первых звёзд и потоками вещества, возникающими в результате взрывов этих звёзд. Масштаб масс $M \sim 10^5 M_\odot$, тем не менее, представляет интерес: в гало таких масс образуются первые звёзды (см. также начало раздела 7.2). Для таких гало

$$\text{гало протозвёзд : } R \sim 10 \text{ кпк} \iff 10^5 M_\odot. \quad (1.29)$$

Разумеется, приведённые выше оценки весьма условны: во Вселенной имеются структуры всех масс, начиная с карликовых галактик и кончая богатыми скоплениями. Мы обсудим распределение структур по массам в разделе 7.2.2.

Глава 2

Космологические возмущения в общей теории относительности. Уравнения линеаризованной теории

Перейдём к рассмотрению линейной теории космологических возмущений в рамках общей теории относительности. В первую очередь нам необходимо найти в явном виде соответствующие уравнения. Они получаются линеаризацией уравнений Эйнштейна и ковариантных законов сохранения энергии-импульса на фоне зависящей от времени однородной изотропной метрики и однородной плотности материи. В основном тексте мы остановимся на моментах, важных для понимания; некоторые детали вывода мы поместили в Приложение B.

2.1 Фоновая метрика

2.1.1 Метрика в конформном времени

В дальнейшем нам будет удобно работать в конформных координатах и записывать метрику пространственно-плоской¹ однородной и изотропной Вселенной в виде

$$\begin{aligned} ds^2 &= a^2(\eta) [d\eta^2 - dx^i dx^i] \\ &= a^2(\eta) \cdot \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu, \end{aligned} \tag{2.1}$$

где $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(+1, -1, -1, -1)$ — метрика Минковского. Напомним, что конформное время η связано с космологическим временем t следующим образом:

$$a(\eta) d\eta = dt.$$

В дальнейшем производную по η мы будем обозначать штрихом, а производную по t , как и прежде, точкой. Например, для параметра Хаббла имеем

$$H \equiv \frac{\dot{a}}{a} = \frac{a'}{a^2}. \tag{2.2}$$

¹Напомним, что пространственная кривизна Вселенной пренебрежимо мала на всех известных стадиях космологической эволюции. Мы, впрочем, будем обсуждать возможные эффекты, связанные с пространственной кривизной, в некоторых местах книги.

Уравнение Фридмана (I.3.7) при этом записывается в виде

$$\frac{a'^2}{a^4} = \frac{8\pi}{3} G\rho , \quad (2.3)$$

а (ij) -компоненты уравнений Эйнштейна (I.A.80) сводятся к

$$2\frac{a''}{a^3} - \frac{a'^2}{a^4} = -8\pi Gp , \quad (2.4)$$

где ρ и p — плотность энергии и давление однородной материи (космологические возмущения пока не рассматриваем). Напомним ещё ковариантный закон сохранения энергии (I.3.11),

$$\rho' = -3\frac{a'}{a} (\rho + p) . \quad (2.5)$$

В терминах конформного времени рассмотренные в разделе I.3.2 космологические решения имеют следующий вид:

— радиационно-доминированная (РД) стадия,

$$a(\eta) = \text{const} \cdot \eta , \quad \eta = \text{const} \cdot t^{1/2} ; \quad (2.6)$$

— стадия доминирования нерелятивистского вещества (“пыли”, МД-стадия),

$$a(\eta) = \text{const} \cdot \eta^2 , \quad \eta = \text{const} \cdot t^{1/3} ; \quad (2.7)$$

— стадия доминирования тёмной энергии (ЛД-стадия), плотность которой считаем для определённости не зависящей от времени (космологическая постоянная, или, что то же самое, плотность энергии вакуума),

$$a(\eta) = -\frac{1}{H_{dS}\eta} , \quad \eta = -\text{const} \cdot e^{-H_{dS}t} , \quad \eta < 0 , \quad (2.8)$$

где параметр Хаббла H_{dS} постоянен, $H_{dS}^2 = (8\pi/3) G\rho_\Lambda$.

2.1.2 Космологические параметры и конформные времена различных эпох

Отвлечёмся от основного изложения, чтобы напомнить сведения о нашей Вселенной, которые нам понадобятся на протяжении этой книги.

Состав Вселенной характеризуется величинами Ω_λ — современными отношениями плотности энергии компонент среды λ к критической плотности. Подчеркнём, что мы определяем Ω_λ только для современной эпохи, ни о какой зависимости этих величин от времени речь идти не может. В дальнейшем, если это особо не оговорено, мы будем производить численные оценки для значений, принятых в книге [1]:

$$\Omega_{CDM} = 0.2 , \quad \Omega_B = 0.042 , \quad \Omega_M = \Omega_B + \Omega_{CDM} = 0.24 , \quad \Omega_\Lambda = 0.76 \quad (2.9a)$$

$$H_0 = h \cdot 100 \frac{\text{км}}{\text{с} \cdot \text{Мпк}} , \quad h = 0.73 \quad (2.9b)$$

$$\rho_c = \frac{3}{8\pi} M_{Pl}^2 H_0^2 = 1.054 \cdot 10^{-5} h^2 \text{ ГэВ см}^{-3} = 2.775 \cdot 10^{11} h^2 \cdot M_\odot \text{ Мпк}^{-3} \quad (2.9c)$$

$$\eta_B \equiv \frac{n_B}{n_\gamma} = 6.1 \cdot 10^{-10} , \quad n_{\gamma,0} = 410 \text{ см}^{-3} . \quad (2.9d)$$

Мы отмечаем современные значения величин индексом 0; в частности, H_0 — современное значение параметра Хаббла, $n_{\gamma,0}$ — современная плотность числа реликтовых фотонов. Обозначения CDM , B , M и Λ относятся к тёмной материи, барионам, нерелятивистской материи и тёмной энергии, соответственно. Отметим, что тёмная материя может быть как холодной, так и тёплой. Для большинства разделов этой книги различие между холодной и тёплой тёмной материи несущественно, и мы будем для определённости использовать обозначение CDM . Места, где это различие важно, мы специально будем отмечать.

Значения указанных параметров постоянно уточняются², современные значения см. в [3]. Напомним, что

$$\begin{aligned} H_0^{-1} &= 1.0 h^{-1} \cdot 10^{10} \text{ лет} = 3.0 h^{-1} \cdot 10^3 \text{ Мпк} \\ &= 1.3 \cdot 10^{10} \text{ лет} = 4.1 \cdot 10^3 \text{ Мпк}, \quad h = 0.73, \end{aligned}$$

или

$$H_0^{-1} = 3.1 h^{-1} \cdot 10^{17} \text{ с} = 0.93 h^{-1} \cdot 10^{28} \text{ см} \quad (2.10a)$$

$$= 4.2 \cdot 10^{17} \text{ с} = 1.3 \cdot 10^{28} \text{ см}, \quad h = 0.73. \quad (2.10b)$$

Сделаем замечание по поводу параметра Ω_{rad} . Договоримся, что под Ω_{rad} мы будем понимать современную плотность энергии фотонов и нейтрино в *предположении о том, что ни один тип нейтрино не имеет массы*. Это предположение не выполняется в реальном мире, и тем не менее такое определение Ω_{rad} является удобным. Дело в том, что нас в этой книге будет часто интересовать плотность энергии релятивистских компонент космической среды на радиационно-доминированной стадии или в эпоху рекомбинации. На этих стадиях нейтрино можно считать безмассовыми. Действительно, космологическое ограничение на сумму масс нейтрино составляет $\sum_{e,\mu,\tau} m_{\nu_i} < 0.6$ эВ (а по результатам некоторых анализов ещё меньше), и с учётом данных физики частиц это означает, что масса нейтрино каждого типа не превышает 0.2 эВ. Это меньше температуры рекомбинации³ $T_r = 0.25$ эВ, а тем более температуры перехода с радиационно-доминированной на пылевидную стадию. В этой ситуации интересующая нас плотность энергии релятивистских компонент в эпоху красного смещения z получается простым пересчётом, $\rho_{rad}(z) \propto (1+z)^4 \Omega_{rad} h^2$, причём здесь фигурирует именно та величина Ω_{rad} , которую мы только что определили. При таком определении величина $\Omega_{rad} h^2$ хорошо известна (в предположении, что во Вселенной нет гипотетических новых релятивистских частиц), см. разделы I.4.4 и I.4.1,

$$\Omega_{rad} h^2 = 1.68 \cdot \Omega_{\gamma} h^2 = 4.15 \cdot 10^{-5}, \quad (2.11)$$

и при используемом значении h имеем численно

$$\Omega_{rad} = 7.8 \cdot 10^{-5}, \quad h = 0.73.$$

При выбранных значениях параметров переход с радиационно-доминированной на пылевидную стадию, то есть момент, когда $\rho_M = \rho_{rad}$, соответствует красному смещению

$$z_{eq} = 3.1 \cdot 10^3.$$

²Во время написания этой книги измеренные значения параметров составляли [2] $\Omega_{CDM} = 0.233$, $\Omega_B = 0.046$, $\Omega_M = 0.27$, $\Omega_{\Lambda} = 0.73$, $h = 0.71$.

³В разделе I.6.2 на основе равновесного анализа было получено значение $T_r = 0.27$ эВ. На самом деле рекомбинация несколько затягивается, см. раздел 8.5.1. Здесь и далее мы используем значение T_r , полученное в разделе 8.5.1 с учётом этого обстоятельства.

Для дальнейшего полезно найти коэффициенты пропорциональности в (2.6) и (2.7). Глубоко на радиационно-доминированной стадии выполняется

$$H^2 = \frac{8\pi}{3} G \frac{\pi^2}{30} g_* T^4 = \left(\frac{g_{*,0}}{g_*} \right)^{1/3} \Omega_{rad} H_0^2 \left(\frac{a_0}{a} \right)^4 ,$$

где g_* — эффективное число степеней свободы при температуре T , $g_{*,0} = 43/11$ — современное значение этой величины⁴ и мы воспользовались сохранением энтропии, $g_* a^3 T^3 = \text{const}$, при получении второй формулы. Отсюда получим

$$\eta = \int_0^t \frac{d\tilde{t}}{a(\tilde{t})} = \int_0^a \frac{d\tilde{a}}{\tilde{a}^2 H(\tilde{a})} \quad (2.12a)$$

$$= \left(\frac{g_*}{g_{*,0}} \right)^{1/6} \frac{1}{a_0 H_0 h^{-1} \sqrt{\Omega_{rad}} h^2} \frac{a}{a_0} \quad (2.12b)$$

Входящие сюда величины не содержат заметных неопределённостей, если речь идёт о температурах ниже 100 ГэВ, поскольку число степеней свободы при таких температурах известно, а $\Omega_{rad} h^2$ и $H_0 h^{-1}$ даются формулами (2.11) и (2.10a). Глубоко на пылевидной стадии имеем $H^2 = H_0^2 \Omega_M (a_0/a)^3$ и

$$\eta = \frac{2}{a_0 H_0 \sqrt{\Omega_M}} \left(\frac{a}{a_0} \right)^{1/2} . \quad (2.13)$$

Здесь уже имеется некоторая неопределённость, связанная со значением $\Omega_M h^2$.

В ряде мест этой книги нам понадобятся аккуратные оценки конформного времени, соответствующего той или иной космологической эпохе. Сделаем эти оценки, считая, что плотность тёмной энергии не зависит от времени. В этом случае уравнение Фридмана для пространственно-плоской Вселенной можно записать в виде следующей зависимости параметра Хаббла от красного смещения:

$$H = H_0 \sqrt{\Omega_\Lambda + \Omega_M (1+z)^3 + \Omega_{rad} (1+z)^4} .$$

Для конформного времени будем иметь

$$\eta = \int_z^\infty \frac{d\tilde{z}}{a_0 H_0 \sqrt{\Omega_\Lambda + (1+\tilde{z})^3 \Omega_M + (1+\tilde{z})^4 \Omega_{rad}}} \quad (2.14)$$

Отсюда получим выражение для конформного времени современной эпохи:

$$\eta_0 = \frac{2}{a_0 H_0 \sqrt{\Omega_M}} I(\Omega_M) , \quad (2.15)$$

где интеграл $I(\Omega_M)$ равен (он нам встречался в разделе I.6.4, где мы пренебрегали величиной Ω_{rad})

$$I(\Omega_M) = \frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{dz}{\sqrt{(1+z)^3 + \frac{\Omega_\Lambda}{\Omega_M} + \frac{\Omega_{rad}}{\Omega_M} (1+z)^4}} .$$

⁴Здесь и далее в этой книге современное число степеней свободы определено так, что современная плотность энтропии равна $s_0 = (2\pi^2/45)g_{*,0}T_0^3$. Заметим, что современная плотность энергии релятивистских частиц (в случае безмассовых нейтрино) равна $\rho_{rad,0} = (\pi^2/30)\hat{g}_{*,0}T_0^4$, где $\hat{g}_{*,0} = 3.36$. В книге [1] в качестве современного эффективного числа степеней свободы фигурировала величина $\hat{g}_{*,0}$.

Его численное значение при $\Omega_M = 0.24$, $\Omega_\Lambda = 0.76$ равно

$$I(0.24) = 0.87 . \quad (2.16)$$

Для конформного времени эпохи рекомбинации η_r запишем, учитывая, что ρ_Λ пре-небрежимо мало при $\eta \lesssim \eta_r$,

$$\begin{aligned} \eta_r &= \int_{z_r}^{\infty} \frac{dz}{a_0 H_0 \sqrt{(1+z)^3 \Omega_M + (1+z)^4 \Omega_{rad}}} \\ &= \frac{2}{a_0 H_0 \sqrt{\Omega_M}} \cdot \mathcal{F}\left(\frac{\Omega_{rad}}{\Omega_M}\right), \end{aligned} \quad (2.17)$$

где

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\left(\frac{\Omega_{rad}}{\Omega_M}\right) &= \sqrt{\frac{1}{1+z_r} + \frac{\Omega_{rad}}{\Omega_M}} - \sqrt{\frac{\Omega_{rad}}{\Omega_M}} \\ &= \sqrt{\frac{1}{1+z_r} + \frac{1}{1+z_{eq}}} - \frac{1}{\sqrt{1+z_{eq}}} . \end{aligned} \quad (2.18)$$

Здесь

$$1+z_r = \frac{T_r}{T_0} = 1060 ,$$

— красное смещение эпохи рекомбинации. При записи последнего равенства мы учли, что $\Omega_M/\Omega_{rad} = 1 + z_{eq}$. Отметим, что отношение Ω_{rad}/Ω_M можно рассматривать как функцию единственного не вполне известного параметра $\Omega_M h^2$, поскольку величина $\Omega_{rad} h^2$ хорошо известна, см. (2.11). Для выбранных значений параметров имеем численно

$$\mathcal{F} = 0.018 .$$

Отсюда получаем важное для дальнейшего соотношение

$$\frac{\eta_0}{\eta_r} = \frac{I(\Omega_M)}{\mathcal{F}} , \quad (2.19)$$

и при используемых значениях параметров

$$\frac{\eta_0}{\eta_r} = 49.5 . \quad (2.20)$$

Отметим, что обратная к этой величине равна углу, под которым сегодня виден горизонт эпохи рекомбинации, $\Delta\theta_r = \eta_r/\eta_0 \simeq 0.02$. Тем самым мы уточнили оценку⁵, сделанную в разделе I.6.4.

Наконец, конформное время перехода с радиационно-доминированной на пылевидную стадию (РД/МД перехода) равно

$$\eta_{eq} = \frac{2}{a_0 H_0 \sqrt{\Omega_M}} \frac{1}{\sqrt{1+z_{eq}}} \left(\sqrt{2} - 1 \right) . \quad (2.21)$$

⁵Разница состоит в том, что в разделе I.6.4 мы пренебрегали отличием выражения (2.18) от $(1+z_r)^{-1/2}$, то есть использовали приближение $z_r \ll z_{eq}$. Для обсуждения в разделе I.6.4 зависимости угла $\Delta\theta_r$ от Ω_Λ и Ω_{curv} это несущественно.

Таким образом, имеем численно

$$\frac{\eta_r}{\eta_{eq}} = 2.3, \quad \frac{\eta_0}{\eta_{eq}} = 1.2 \cdot 10^2. \quad (2.22)$$

Мы видим, что рекомбинация и РД/МД переход разнесены в конформном времени несильно. Подчеркнём, что определение РД/МД перехода как момента, когда выполняется равенство $\rho_M = \rho_{rad}$, весьма условно: отношение ρ_M/ρ_{rad} довольно слабо зависит от масштабного фактора, $\rho_M/\rho_{rad} \propto a(\eta)$, так что нерелятивистская материя и релятивистская компонента дают сравнимые вклады в плотность энергии в течение довольно длительного интервала времени вблизи η_{eq} .

В литературе, как правило, полагают современное значение масштабного фактора равным единице (если не обсуждается возможная пространственная кривизна Вселенной). Мы этого делать не будем. Тем не менее, отметим, что при $a_0 = 1$ величины η_0 , η_r и η_{eq} имеют смысл современных размеров горизонта соответствующих эпох. Численно они составляют

$$a_0\eta_0 = 1.5 \cdot 10^4 \text{ Мпк}, \quad a_0\eta_r = 2.9 \cdot 10^2 \text{ Мпк}, \quad a_0\eta_{eq} = 1.3 \cdot 10^2 \text{ Мпк}. \quad (2.23)$$

▷ Задача 1. Повторить приведённый анализ конформных времён для случая тёмной энергии с уравнением состояния $p_{DE} = w_{DE}\rho_{DE}$, где w_{DE} постоянно во времени. Сделать численные оценки для $w_{DE} = -0.8$ и $w_{DE} = -1.2$.

Указание: считать современные значения параметров такими же, как в (2.9); в частности $\Omega_{DE} = \Omega_\Lambda = 0.76$.

В заключение раздела отметим, что хотя в выражениях (2.17) и (2.21) присутствуют величины, характеризующие современную Вселенную (например, современное значение параметра Хаббла), конформные времена соответствующих эпох не зависят, разумеется, от того, в какое время мы живём. Чтобы увидеть это явно, вновь используем (2.12а) и перейдём к интегрированию по температуре T . Учтём, что $a(T) = a_{eq}T_{eq}/T$ и запишем уравнение Фридмана на интересующей нас стадии в виде

$$H^2(T) = \frac{8\pi}{3}G\rho_{rad}(T) \cdot \left(1 + \frac{T_{eq}}{T}\right),$$

где $\rho_{rad}(T) = (\pi^2/30) \cdot \hat{g}_{*,0} T^4$, $\hat{g}_{*,0} = 3.36$ (см. раздел I.4.4), и мы воспользовались соотношением $\rho_M(T) = \rho_{rad}(T)T_{eq}/T$ для плотности энергии нерелятивистской материи. Выполнив интегрирование, получим

$$\eta(T) = \frac{2 \left(\sqrt{1 + \frac{T_{eq}}{T}} - 1 \right)}{a_{eq} \sqrt{\frac{8\pi}{3}G \cdot \rho_{rad}(T_{eq})}} = \frac{2 \left(\sqrt{1 + \frac{T_{eq}}{T}} - 1 \right)}{a_{eq} T_{eq}^2 \sqrt{\frac{8\pi}{3}G \cdot \frac{\pi^2}{30} \hat{g}_{*,0}}} \quad (2.24)$$

В это выражение входят только величины, относящиеся к ранней Вселенной. Из него, в частности, видно, что в отсутствие экзотической релятивистской компоненты единственным параметром, от которого зависит конформное время при заданной температуре, является $\Omega_M/\Omega_{rad} \equiv T_{eq}/T_0$ (напомним, что речь идёт об эпохе, когда влияние тёмной энергии пренебрежимо мало). Разумеется, формула (2.24) эквивалентна формулам, приведённым выше.

▷ Задача 2. Показать, что при $T = T_r$ выражение (2.24) эквивалентно (2.17), (2.18).

2.2 Общее рассмотрение

2.2.1 Калибровка $h_{0i} = 0$

Рассмотрим метрику, включающую малые возмущения,

$$ds^2 = a^2(\eta) \gamma_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu , \quad (2.25)$$

где

$$\gamma_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}(x) .$$

В дальнейшем мы всюду будем считать, что $h_{\mu\nu}$ нетривиальным образом зависит от пространственных координат⁶. Тензор энергии-импульса также состоит из однородной фоновой части и малого возмущения (в дальнейшем фоновые тензоры энергии-импульса и тензор Эйнштейна мы будем обозначать чертой сверху),

$$T_\nu^\mu = \bar{T}_\nu^\mu(\eta) + \delta T_\nu^\mu(x) .$$

Мы всегда будем считать, что фоновая метрика $a^2 \eta_{\mu\nu}$ и фоновый тензор энергии-импульса \bar{T}_ν^μ удовлетворяют уравнениям Эйнштейна и уравнению ковариантного сохранения $\bar{\nabla}_\mu \bar{T}_\nu^\mu = 0$. В линейном порядке уравнения Эйнштейна имеют общую структуру

$$\delta G_\nu^\mu = 8\pi G \delta T_\nu^\mu , \quad (2.26)$$

где δG_ν^μ — линейная по $h_{\mu\nu}$ часть тензора Эйнштейна

$$G_\nu^\mu = R_\nu^\mu - \frac{1}{2} \delta_\nu^\mu R .$$

В этой главе мы найдём явный вид этих уравнений.

Удобно использовать соглашение, что индексы у величин, описывающих малые возмущения, поднимаются и опускаются с помощью метрики Минковского. В частности

$$h_\nu^\mu = \eta^{\mu\lambda} h_{\lambda\nu} , \quad h^{\mu\nu} = \eta^{\mu\lambda} \eta^{\nu\rho} h_{\lambda\rho} .$$

Для тензора, обратного к $\gamma_{\mu\nu}$, из условия $\gamma^{\mu\lambda} \gamma_{\lambda\nu} = \delta_\nu^\mu$ получим в линейном порядке по $h_{\mu\nu}$

$$\gamma^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} - h^{\mu\nu} .$$

В дальнейшем нам придётся использовать $(3+1)$ -разложение четырёхмерных тензоров, то есть отдельно выписывать пространственные и отдельно — временные индексы. Такая необходимость связана с тем, что фоновая метрика не инвариантна относительно преобразований Лоренца, но инвариантна относительно пространственных трансляций и поворотов. Для пространственных индексов мы будем использовать латинские буквы i, j, k, \dots . Ещё одно соглашение состоит в том, что перед записью $(3+1)$ -разложения все индексы мы будем опускать, и в явных формулах, выписываемых в рамках $(3+1)$ -разложения, все индексы будут нижними. При этом суммирование по повторяющимся пространственным индексам мы будем производить с евклидовой метрикой. Так, записанное в $(3+1)$ -форме выражение для h_μ^μ будет иметь вид

$$h_\mu^\mu = h_{00} - h_{ii} .$$

⁶Пространственно-однородные $h_{\mu\nu}$ соответствовали бы однородной и, вообще говоря, анизотропной космологической модели.

Общие выражения для компонент δG_ν^μ линеаризованного тензора Эйнштейна приведены в Приложении В. Мы пока их выписывать не будем, а перейдём к вопросу о фиксации калибровки.

В общей теории относительности имеется инвариантность относительно инфинитезимальных калибровочных преобразований (см. (I.A.94); калибровочно преобразованные величины отмечаем тильдой, поскольку штрих зарезервирован за производной по η)

$$g^{\mu\nu} \rightarrow \tilde{g}^{\mu\nu} = g^{\mu\nu} + \nabla^\mu \xi^\nu + \nabla^\nu \xi^\mu \equiv g^{\mu\nu} + g^{\mu\lambda} \nabla_\lambda \xi^\nu + g^{\nu\lambda} \nabla_\lambda \xi^\mu \quad (2.27)$$

где $\xi^\mu(x)$ — произвольные функции. Учтём, что

$$g^{\mu\nu} = \frac{1}{a^2} (\eta^{\mu\nu} - h^{\mu\nu}) \quad (2.28)$$

и запишем

$$\tilde{g}^{\mu\nu} = \frac{1}{a^2} (\eta^{\mu\nu} - \tilde{h}^{\mu\nu})$$

В результате из (2.27) получим линеаризованную форму калибровочных преобразований

$$\tilde{h}^{\mu\nu} = h^{\mu\nu} - \partial^\mu \xi^\nu - \partial^\nu \xi^\mu - 2\eta^{\mu\nu} \xi^\lambda \frac{\partial_\lambda a}{a} \quad (2.29)$$

В этом выражении $h^{\mu\nu}$ и ξ^μ нужно считать величинами одного порядка малости.

Калибровочная свобода (2.29) позволяет наложить четыре дополнительных условия на $h_{\mu\nu}$. Физически это означает фиксацию системы отсчёта. Воспользуемся частью калибровочной свободы, чтобы положить

$$h_{0i} = 0 . \quad (2.30)$$

В выбранной таким образом системе отсчёта собственное время покоящегося наблюдателя пропорционально координатному времени, $d\tau = a(\eta)[1+(1/2)h_{00}]d\eta$. Этот выбор калибровки не полностью фиксирует калибровочную свободу: остаётся ещё инвариантность относительно калибровочных преобразований, параметризуемых одной функцией координат и времени, поскольку для остаточных преобразований должно удовлетворяться

$$\partial_0 \xi_i + \partial_i \xi_0 = 0 . \quad (2.31)$$

Кроме того, остаётся инвариантность относительно не зависящих от времени преобразований⁷ с

$$\xi_i = \xi_i(\mathbf{x}) , \quad \xi_0 = 0 . \quad (2.32)$$

Остаточной калибровочной свободой мы воспользуемся в дальнейшем.

2.2.2 Линеаризованный тензор энергии-импульса идеальной жидкости

Займёмся теперь правой частью линеаризованных уравнений Эйнштейна. Для наших целей будет в основном достаточно рассматривать тензор энергии-импульса идеальной жидкости, см. раздел I.A.10,

$$T_\nu^\mu = (\hat{\rho} + \hat{p}) u^\mu u_\nu - \delta_\nu^\mu \hat{p} , \quad (2.33)$$

⁷Зависящие только от времени преобразования мы не рассматриваем, поскольку нас интересуют возмущения метрики, нетривиальным образом зависящие от пространственных координат.

где

$$\hat{p} = p + \delta p, \quad \hat{\rho} = \rho + \delta \rho$$

— давление и плотность энергии с учётом малых отклонений от невозмущённых (фоновых) значений; последние в дальнейшем для упрощения формул обозначаются как p и ρ . 4-скорость u^μ также содержит как фоновую часть, так и отклонения от неё. Невозмущённое значение отлично от нуля только для временной компоненты 4-скорости. С учётом того, что всегда выполняется

$$g_{\mu\nu} u^\mu u^\nu = 1, \quad (2.34)$$

ненулевые компоненты фоновой части 4-скорости \bar{u}^μ равны $\bar{u}^0 = a^{-1}$, $\bar{u}_0 = a$. Поэтому можно записать

$$u^0 = \frac{1}{a}(1 + \delta u^0) \quad (2.35)$$

$$u^i = \frac{1}{a}v^i, \quad (2.36)$$

причём δu^0 и v^i — величины первого порядка малости. Уравнение (2.34) с учётом членов первого порядка имеет вид

$$(1 + h_{00})(1 + \delta u^0)^2 = 1,$$

что даёт в линейном порядке

$$\delta u^0 = -\frac{1}{2}h_{00}.$$

Из определения (2.35) имеем также

$$u_0 = a^2(1 + h_{00})u^0 = a \left(1 + \frac{1}{2}h_{00}\right).$$

Пространственные компоненты v^i остаются произвольными. Отметим, что именно при данном в (2.36) определении скорость v^i является физической: по определению 4-скорости имеем

$$u^i = \frac{dx^i}{ds} \approx \frac{dx^i}{dt}$$

(последнее соотношение является точным в линейном порядке), а физической скоростью служит величина

$$v^i = \frac{\delta l^i}{\delta t} = \frac{a dx^i}{dt},$$

где $\delta l^i = adx_i$ — физическая длина. Используя приведённые формулы, имеем для тензора энергии импульса в первом порядке

$$\delta T_0^0 = \delta \rho \quad (2.37a)$$

$$\delta T_i^0 = -(\rho + p)v_i \quad (2.37b)$$

$$\delta T_j^i = -\delta_j^i \delta p, \quad (2.37c)$$

где по нашему соглашению $v_i = \delta_{ij}v^j$.

Отметим одно обстоятельство. Если среда не является идеальной жидкостью, то можно определить величины $\delta \rho$ и v_i соотношениями (2.37a) и (2.37b), а δp по

определению положить равным $\delta p = -(1/3)\delta T_i^i$. При этом в выражении для δT_j^i присутствует дополнительное бесследовое слагаемое Π_j^i , которое называют тензором анизотропных натяжений. В космологии таким свойством обладает, например, нейтринная компонента после закалки нейтрино. Мы отложим обсуждение возмущений в ситуациях, когда приближение идеальной жидкости не работает, до Главы 8, а здесь и в последующих главах ограничимся приближением идеальной жидкости.

В калибровке $h_{0i} = 0$ уравнения ковариантного сохранения тензора энергии-импульса в линейном порядке имеют вид

$$\delta\rho' + 3\frac{a'}{a}(\delta\rho + \delta p) + (\rho + p)\left(\partial_i v_i - \frac{1}{2}h'\right) = 0 \quad (2.38)$$

$$\partial_i \delta p + (\rho + p)\left(4\frac{a'}{a}v_i + \frac{1}{2}\partial_i h_{00}\right) + [v_i(\rho + p)]' = 0, \quad (2.39)$$

где $h = h_{ii}$. Их вывод приведён в Приложении B.

Здесь следует сделать важное замечание. В среде, где имеется несколько независимых, не взаимодействующих между собой компонент, законы сохранения (2.38) и (2.39) выполняются для каждой компоненты по отдельности. В то же время, в правую часть уравнений Эйнштейна входит полный тензор энергии-импульса, являющийся суммой тензоров энергии-импульса всех компонент среды. Таким образом, хотя ковариантное сохранение полного тензора энергии-импульса гарантировано уравнениями Эйнштейна, в многокомпонентной среде часть ковариантных законов сохранения (2.38), (2.39) представляет собой уравнения, независимые от уравнений Эйнштейна. В космологии мы имеем дело именно с такой ситуацией: например, до рекомбинации основными независимыми компонентами являются тёмная материя и барион-электрон-фотонная плазма (до рекомбинации последняя представляет собой единую компоненту⁸ из-за интенсивного рассеяния фотонов на электронах и кулоновского взаимодействия между электронами и барионами). Ещё одной независимой компонентой служат нейтрино.

2.2.3 Разложение по спиральностям

Фоновая метрика (2.1) инвариантна относительно трансляций сопутствующих координат x^i . Поэтому решения уравнений для возмущений удобно искать в Фурье-представлении

$$h_{\mu\nu}(\eta, \mathbf{x}) = \int d^3k e^{i\mathbf{kx}} h_{\mu\nu}(\mathbf{k}),$$

и аналогично для других величин, таких как $\delta\rho$, δp , v_i . В дальнейшем, если это не будет приводить к недоразумению, мы будем использовать одни и те же символы для величин в координатном и импульсном представлениях. При этом в уравнениях достаточно делать замену

$$\partial_i \longleftrightarrow ik_i.$$

С учётом этого мы часто не будем оговаривать, в каком представлении — импульсном или координатном — мы работаем. Поскольку рассматриваемые уравнения линейны, мы вправе изучать моды с разными пространственными импульсами по отдельности. Напомним, что \mathbf{k} имеет смысл конформного импульса, а физический импульс зависит от времени (краснеет) и равен $\mathbf{q}(\eta) = \mathbf{k}/a(\eta)$.

⁸Это — не вполне точное утверждение. Мы обсудим данный вопрос подробнее в дальнейшем.

Кроме того, фоновая метрика инвариантна относительно пространственных вращений. При фиксированном конформном импульсе \mathbf{k} остаётся инвариантность относительно вращений вокруг направления \mathbf{k} , то есть симметрия $SO(2)$. В данном контексте эту группу $SO(2)$ называют “малой группой”. Всякий трёхмерный тензор можно разложить на неприводимые представления по этой малой группе $SO(2)$, которые будут характеризоваться определёнными значениями спиральности (собственного значения оператора вращений на угол α , $\hat{L}_\alpha = -i\partial/\partial\alpha$). Нулевую спиральность будет иметь объект, не преобразующийся при вращениях вокруг вектора \mathbf{k} . Примерами таких объектов служат: трёхмерный скаляр; трёхмерный вектор, направленный вдоль вектора \mathbf{k} (то есть $v_i \propto k_i$); трёхмерный тензор типа $h_{ij} \propto k_i k_j$ или $h_{ij} \propto \delta_{ij}$. Единичную спиральность (вообще говоря, смесь спиральностей +1 и -1) имеет вектор, ортогональный \mathbf{k} , а симметричный поперечный бесследовый тензор h_{ij}^{TT} имеет двойную спиральность. Поперечность и бесследовость последнего означают, что

$$h_{ii}^{TT} = 0, \quad k_i h_{ij}^{TT} = k_j h_{ij}^{TT} = 0. \quad (2.40)$$

Обсудим эти свойства несколько подробнее. Пусть задан вектор \mathbf{k} . Пусть далее единичные вектора $\mathbf{e}^{(1)}$ и $\mathbf{e}^{(2)}$ ортогональны друг другу и вектору \mathbf{k} и образуют с ним правую тройку, аналогично реперным векторам \mathbf{i}_x , \mathbf{i}_y , \mathbf{i}_z при традиционном выборе ортогональной системы координат в трёхмерном евклидовом пространстве. Тогда при вращениях системы координат вокруг вектора \mathbf{k} против часовой стрелки на угол α выполняется

$$\begin{aligned} \mathbf{e}^{(1)}' &= \mathbf{e}^{(1)} \cos \alpha - \mathbf{e}^{(2)} \sin \alpha \\ \mathbf{e}^{(2)}' &= \mathbf{e}^{(2)} \cos \alpha + \mathbf{e}^{(1)} \sin \alpha. \end{aligned} \quad (2.41)$$

Поэтому компоненты векторов

$$\mathbf{e}^{(\pm)} = \mathbf{e}^{(1)} \pm i\mathbf{e}^{(2)}$$

преобразуются так:

$$\mathbf{e}^{(\pm)}' = e^{\pm i\alpha} \mathbf{e}^{(\pm)}.$$

Это и означает, что вектор $\mathbf{e}^{(+)}$ преобразуется по неприводимому представлению малой группы $SO(2)$ со спиральностью +1, а $\mathbf{e}^{(-)}$ имеет спиральность -1. Произвольный поперечный вектор является линейной комбинацией $\mathbf{e}^{(+)}$ и $\mathbf{e}^{(-)}$, то есть действительно представляет собой смесь векторов со спиральностями +1 и -1. Конечно, эти свойства хорошо известны из электродинамики, где вектора $\mathbf{e}^{(+)}$ и $\mathbf{e}^{(-)}$ являются векторами двух круговых поляризаций электромагнитной волны.

Из компонент векторов $\mathbf{e}^{(1)}$ и $\mathbf{e}^{(2)}$ построим два симметричных бесследовых тензора

$$\begin{aligned} e_{ij}^{(+)} &= \frac{1}{\sqrt{2}}(e_i^{(1)}e_j^{(1)} - e_i^{(2)}e_j^{(2)}) \\ e_{ij}^{(\times)} &= \frac{1}{\sqrt{2}}(e_i^{(1)}e_j^{(2)} + e_i^{(2)}e_j^{(1)}). \end{aligned} \quad (2.42)$$

Можно построить затем две линейные комбинации этих тензоров $e_{ij}^{(\pm 2)}$, которые преобразуются как

$$e_{ij}^{(\pm 2)}' = e^{\pm 2i\alpha} e_{ij}^{(\pm 2)}, \quad (2.43)$$

то есть имеют спиральности +2 и -2. Произвольный симметричный поперечный бесследовый тензор является линейной комбинацией e_{ij}^+ и e_{ij}^\times , то есть смесью тензоров со спиральностями +2 и -2.

▷ Задача 3. Доказать последние утверждения.

▷ Задача 4. Показать, что третья комбинация $(e_i^{(1)} e_j^{(1)} + e_i^{(2)} e_j^{(2)})$ имеет нулевую спиральность, то есть тривиально преобразуется при вращениях вокруг вектора \mathbf{k} . Выразить эту комбинацию через тензоры δ_{ij} и $k_i k_j$.

▷ Задача 5. Построить симметричные тензоры низших возможных рангов, имеющие спиральности ± 3 и ± 4 .

Операция умножения на ik_j (в координатном представлении — операция ∂_j) не изменяет спиральности. Поскольку в линеаризованных⁹ уравнениях Эйнштейна и ковариантного сохранения тензора энергии-импульса присутствует только эта операция (а также скалярные операции типа дифференцирования по времени), эти уравнения разбиваются на независимые уравнения для спиральных компонент космологических возмущений. В связи с этим говорят о тензорных (спиральность 2), векторных (спиральность 1) и скалярных (нулевая спиральность) возмущениях. Разложение возмущений метрики по спиральным компонентам в общем случае имеет вид

$$h_{00} = 2\Phi \quad (2.44)$$

$$h_{0i} = ik_i Z + Z_i^T \quad (2.45)$$

$$h_{ij} = -2\Psi\delta_{ij} - 2k_ik_jE + i(k_iW_j^T + k_jW_i^T) + h_{ij}^{TT}, \quad (2.46)$$

где Φ, Z, Ψ, E — скаляры (спиральность 0), Z_i^T, W_i^T — поперечные векторы ($k_iZ_i^T = k_iW_i^T = 0$, единичная спиральность), h_{ij}^{TT} — поперечный бесследовый тензор (двойная спиральность). При нашем выборе калибровки $h_{0i} = 0$ имеем

$$Z_i^T = 0, \quad Z = 0.$$

Запишем ещё спиральное разложение скорости

$$v_i(\eta, \mathbf{k}) = V_i^T(\eta, \mathbf{k}) + ik_iv(\eta, \mathbf{k}), \quad v_i(\eta, \mathbf{x}) = V_i^T(\eta, \mathbf{x}) + \partial_iv(\eta, \mathbf{x}), \quad (2.47)$$

где V_i^T — вектор, поперечный импульсу, а v — скаляр, который выступает в качестве потенциала скоростей. Из сказанного выше следует, что линеаризованные уравнения Эйнштейна и ковариантного сохранения тензора энергии-импульса разбиваются на независимые уравнения для тензорных мод h_{ij}^{TT} , векторных мод W_i^T, V_i^T и скалярных мод $\Phi, \Psi, E, v, \delta\rho$ и $\delta\rho$. Отметим, что в координатном представлении условие поперечности имеет вид

$$\partial_iW_i^T = 0, \quad \partial_iV_i^T = 0. \quad (2.48)$$

Сделаем простое замечание по поводу разложения тензора h_{ij} по спиральностям. Симметричный тензор h_{ij} содержит 6 независимых компонент. Его разложение (2.46) также содержит 6 независимых компонент: по одной из Ψ и E и по две из W_i^T и h_{ij}^{TT} (по числу знаков спиральности). Как и должно быть, разложение по спиральностям не уменьшает и не увеличивает количество независимых функций импульса (и времени). Это же замечание относится к разложению по спиральностям трёхмерного вектора, например, v_i .

⁹Существенно, что речь идёт именно о линейных уравнениях.

▷ Задача 6. Построить проекционные операторы, выделяющие из h_{ij} объекты определённой спиральности, то есть операторы $P_{ijkl}^{(\Psi)}$, $P_{ijkl}^{(TT)}$, и т.д., такие, что

$$\begin{aligned} P_{ijkl}^{(\Psi)} h_{kl} &= -2\Psi \delta_{ij}, \\ P_{ijkl}^{(TT)} h_{kl} &= h_{ij}^{TT}, \end{aligned}$$

и т.д. Проверить выполнение определяющего свойства проекционных операторов $P \cdot P = P$, а также ортогональность и полноту построенной системы проекторов.

В заключение раздела отметим, что для среды, не представляющей собой идеальную жидкость, необходимо ещё записать разложение по спиральностям для тензора анизотропных натяжений Π_j^i . Это сделано в Приложении В, см. (B.13b).

2.3 Уравнения в секторах с определённой спиральностью

В этом разделе мы выпишем окончательный вид линеаризованных уравнений Эйнштейна и ковариантных законов сохранения в секторах с определённой спиральностью, ограничиваясь случаем, когда космическая среда представляет собой идеальную жидкость. Обобщение этих уравнений с учётом эффектов неидеальности приведено в Приложении В. Напомним, что мы работаем в калибровке $h_{0i} = 0$; выражения для компонент линеаризованного тензора Эйнштейна в произвольной калибровке приведены для полноты в Приложении В.

2.3.1 Тензорные моды

Начнём с мод с двойной спиральностью, то есть тензорных мод. Как видно из (2.37), тензор энергии-импульса не имеет компонент с двойной спиральностью. Поэтому тензорные моды — чисто гравитационные; они соответствуют гравитационным волнам без источников¹⁰, распространяющимся в расширяющейся Вселенной (эта интерпретация, впрочем, довольно условна для волн с длинами, превышающими размер текущего горизонта, см. раздел 3.2).

Тензорные возмущения полностью описываются поперечным бесследовым тензором h_{ij}^{TT} . Для мод с $h_{00} = 0$, $h_{ij} = h_{ij}^{TT}$ выражения для линеаризованного тензора Эйнштейна в координатном представлении имеют следующий вид (см. Приложение В)

$$\begin{aligned} \delta G_{00} &= 0, & \delta G_i^0 &= 0, \\ \delta G_j^i &= \frac{1}{2a^2} \left(\partial_\eta^2 h_{ij}^{TT} + 2\frac{a'}{a} \partial_\eta h_{ij}^{TT} - \Delta h_{ij}^{TT} \right), \end{aligned} \quad (2.49)$$

¹⁰Это — специфика космологических возмущений в приближении идеальной жидкости. В общем случае тензор энергии-импульса может выступать источником гравитационных волн. Явление излучения гравитационных волн было действительно обнаружено, хотя и косвенно, по вековому уменьшению периода орбитального движения двойных радиопульсаров (PSR B1913+16, B1534+12, J0737-3039 и др.).

где

$$\Delta = \partial_i \partial_i .$$

Таким образом, имеем окончательное уравнение для тензорных мод

$$\partial_\eta^2 h_{ij}^{TT} + 2\frac{a'}{a} \partial_\eta h_{ij}^{TT} - \Delta h_{ij}^{TT} = 0 . \quad (2.50)$$

В дальнейшем нам понадобится также выражение для действия тензорных мод. Низший нетривиальный порядок для него — квадратичный по h_{ij} . В общем случае квадратичное действие можно получить, разлагая действие вокруг фонового решения до второго порядка теории возмущений. Мы, однако, воспользуемся следующим приёмом, который заметно упрощает вычисления. Напомним, что вариация полного действия имеет вид (см. (I.A.59), (I.A.81))

$$\delta S = \frac{1}{16\pi G} \int d^4x \sqrt{-g} \delta g_{\mu\nu} (G^{\mu\nu} - 8\pi G T^{\mu\nu})$$

Рассматривая вариацию метрики как вариацию $h_{\mu\nu}$, запишем для вариации действия вплоть до второго порядка малости, считая $h_{\mu\nu}, \delta h_{\mu\nu}$ величинами первого порядка:

$$\delta S = \frac{1}{16\pi G} \int d^4x a^6 \delta h_{\mu\nu} [(\bar{G}^{\mu\nu} - 8\pi G \bar{T}^{\mu\nu}) + (\delta G^{\mu\nu} - 8\pi G \delta T^{\mu\nu}) + O(h^2)] .$$

Здесь мы учли, что вплоть до членов первого порядка выполнено $\sqrt{-g} = a^4$ (мы рассматриваем только тензорные моды), и разложили $G^{\mu\nu}$ и $T^{\mu\nu}$ по возмущениям метрики, оставив лишь члены первого порядка. Выражение $\delta h_{\mu\nu} (\bar{G}^{\mu\nu} - 8\pi G \bar{T}^{\mu\nu})$ равно нулю (в общем случае член нулевого порядка по $h_{\mu\nu}$ в вариации действия всегда равен нулю, поскольку фоновая метрика удовлетворяет уравнениям Эйнштейна). Далее, для тензоров с верхними индексами имеем

$$\begin{aligned} \delta G^{\mu\nu} - 8\pi G \delta T^{\mu\nu} &= a^{-2} \eta^{\mu\lambda} (\delta G_\lambda^\nu - 8\pi G \delta T_\lambda^\nu) - a^{-2} h^{\mu\lambda} (\bar{G}_\lambda^\nu - 8\pi G \bar{T}_\lambda^\nu) \\ &= a^{-2} \eta^{\mu\lambda} \delta G_\lambda^\nu \end{aligned} \quad (2.51)$$

При получении последнего равенства мы опять воспользовались уравнениями движения для фоновой метрики, и учли, что в приближении идеальной жидкости $\delta T_\nu^\mu = 0$ для тензорных возмущений. Итак, в тензорном секторе

$$\delta S = -\frac{1}{16\pi G} \int d^4x a^4 \delta h_{ij}^{TT} [\delta G_j^i + O(h^2)] . \quad (2.52)$$

Слагаемое порядка $\delta h \cdot h$ должно получаться путём вариации искомого квадратичного действия. Отсюда следует, что квадратичное действие равно половине правой части (2.52), в которой δh_{ij}^{TT} заменено на h_{ij}^{TT} ,

$$\begin{aligned} S_{TT} &= -\frac{1}{32\pi G} \int d^4x a^4 h_{ij}^{TT} \delta G_j^i \\ &= -\frac{1}{64\pi G} \int d^4x a^2 h_{ij}^{TT} \left(\partial_\eta^2 h_{ij}^{TT} + 2\frac{a'}{a} \partial_\eta h_{ij}^{TT} - \Delta h_{ij}^{TT} \right) . \end{aligned}$$

Заметим, что в скобках здесь стоит выражение, равное левой части линеаризованного уравнения движения. Интегрируя по частям первое и последнее слагаемое, получаем окончательно

$$S_{TT} = \frac{1}{64\pi G} \int d^4x a^2 [(\partial_\eta h_{ij}^{TT})^2 - \partial_k h_{ij}^{TT} \partial_k h_{ij}^{TT}] \quad (2.53)$$

Это и есть квадратичное действие для тензорных мод.

Отметим, что такая процедура получения квадратичного действия из линеаризованного выражения для уравнений движения бывает полезна и в других задачах. Полученный с её помощью квадратичный лагранжиан может отличаться на полную производную от “правильного” выражения, получаемого путём разложения исходного лагранжиана до второго порядка включительно, однако такое отличие несущественно по крайней мере в теории возмущений¹¹.

Продолжая обсуждение тензорных мод, разложим (в импульсном представлении) тензор h_{ij}^{TT} по базисным для сектора с двойной спиральностью тензорам (2.42),

$$h_{ij}^{TT} = \sum_A e_{ij}^{(A)} h^{(A)}. \quad (2.54)$$

Здесь и далее в этом разделе

$$A = +, \times.$$

Из (2.50) получаем для каждого $h^{(A)}$ уравнение

$$\partial_\eta^2 h^{(A)} + 2\frac{a'}{a} \partial_\eta h^{(A)} - \Delta h^{(A)} = 0. \quad (2.55)$$

Действие (2.53) в терминах скалярных функций $h^{(A)}$ принимает вид

$$S_{TT} = \sum_A \frac{1}{64\pi G} \int d^3x d\eta a^2 [(\partial_\eta h^{(A)})^2 - \partial_k h^{(A)} \partial_k h^{(A)}]. \quad (2.56)$$

Оно описывает возмущения двух поляризаций, независимо эволюционирующие в расширяющейся Вселенной.

Отметим, что переход к фоновому пространству Минковского осуществляется заменой

$$a(\eta) \rightarrow 1,$$

при этом η и x имеют смысл обычного времени и пространственных координат. Уравнение (2.55) при этом сводится к уравнению

$$\square^{(4)} h^{(A)} = 0,$$

где $\square^{(4)}$ — четырёхмерный даламбертиан в пространстве Минковского, $\square^{(4)} = \eta^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu$. Последнее уравнение описывает распространение со скоростью света гравитационных волн двух возможных поляризаций. Тот факт, что источники гравитационных волн отсутствуют в уравнении (2.55), связан со специальным видом тензора энергии-импульса (2.37).

Замечательно, что действие (2.56) совпадает с точностью до общего множителя и наличия двух поляризаций с действием (I.2.41) для безмассового скалярного поля в расширяющейся Вселенной. Соответственно, уравнение (2.55) совпадает с уравнением (I.2.42). Аналогия между тензорными возмущениями и безмассовым скалярным полем нередко бывает весьма полезной.

¹¹На классическом уровне добавление к лагранжиану полной производной никогда не изменяет динамики; в квантовой теории бывают ситуации, когда полная производная существенна. Известный пример — θ -член в квантовой хромодинамике, см. раздел I.9.7.1.

2.3.2 Векторные моды

Для получения линеаризованных уравнений для векторных мод (единичная спиральность) необходимо положить

$$h_{ij} = \partial_i W_j^T + \partial_j W_i^T \quad (2.57)$$

$$v_i = V_i^T \quad (2.58)$$

$$h_{00} = 0 \quad (2.59)$$

$$\delta\rho = \delta p = 0, \quad (2.60)$$

причём выполняется условие поперечности (2.48). Из (2.37) следует, что единственной существенной ненулевой компонентой тензора энергии-импульса является

$$\delta T_i^0 = -(\rho + p) V_i^T.$$

Уравнение ковариантного сохранения (2.38) выполняется тождественно, а из уравнения (2.39) получаем

$$\partial_\eta [(\rho + p) V_i^T] + 4 \frac{a'}{a} (\rho + p) V_i^T = 0. \quad (2.61)$$

$(0i)$ -компоненты уравнений Эйнштейна даёт (см. Приложение B)

$$\partial_\eta \Delta W_i^T = 16\pi G a^2 (\rho + p) V_i^T. \quad (2.62)$$

(00) -компоненты уравнений Эйнштейна удовлетворяются тождественно, а (ij) -компоненты не дают ничего нового по сравнению с (2.61) и (2.62), см. задачу 2 Приложения B.

В соответствии с обсуждением в конце раздела 2.2.2, в случае многокомпонентной среды уравнение ковариантного сохранения (2.61) должно выполняться для каждой компоненты в отдельности, а в правой части уравнения Эйнштейна (2.62) фигурирует сумма вкладов всех компонент. Здесь, впрочем, это не слишком существенно: поскольку W_i^T не входит в уравнение (2.61), значение скорости V_i^T может быть найдено независимо для каждой из компонент среды (если оно известно в начальный момент времени), а после этого величина W_i^T определится из уравнения (2.62) как сумма вкладов, обусловленных каждой из компонент.

Отметим, что уравнение (2.62) имеет в качестве общего решения однородного уравнения произвольную функцию пространственных координат,

$$W_i^T = W_i^T(\mathbf{x}).$$

Однако это решение — чистая калибровка, от которой можно избавиться калибровочным преобразованием (2.29) с $\xi_i = W_i^T(\mathbf{x})$, $\xi_0 = 0$ (напомним, что такие преобразования совместны с калибровкой $h_{0i} = 0$, см. (2.32)). Таким образом, в отсутствие материи уравнение (2.62) не имеет нетривиальных решений. Это означает, в частности, что свободное гравитационное поле в пространстве Минковского не имеет распространяющихся мод с единичной спиральностью.

2.3.3 Скалярные моды: конформная ньютона калибровка

При обсуждении скалярных мод нам будет удобно воспользоваться остаточной калибровочной свободой с калибровочными функциями, удовлетворяющими соотношению (2.31). В соответствии с этим соотношением ξ_i является продольным вектором (если ξ_i зависит от времени),

$$\xi_i = -\partial_i \sigma(\eta, \mathbf{x}),$$

при этом $\xi_0 = \partial_\eta \sigma$. При таком калибровочном преобразовании имеем из (2.29)

$$\tilde{h}_{ij} = h_{ij} - 2\partial_i \partial_j \sigma - 2\frac{a'}{a} \delta_{ij} \sigma'.$$

Видно, что подбором σ можно избавиться от второго слагаемого в (2.46). В результате ненулевыми переменными в скалярном секторе будут $\delta\rho$, δr и

$$h_{00} = 2\Phi, \quad (2.63)$$

$$h_{ij} = -2\Psi \delta_{ij}, \quad (2.64)$$

$$v_i = \partial_i v. \quad (2.65)$$

Такая калибровка называется конформной ньютоновой. В ней метрика с учётом скалярных возмущений имеет вид

$$ds^2 = a^2(\eta) [(1 + 2\Phi) d\eta^2 - (1 + 2\Psi) d\mathbf{x}^2]. \quad (2.66)$$

Отсюда ясно происхождение названия калибровки: в ньютоновском пределе в фоновом пространстве Минковского Φ совпадает с ньютоновым гравитационным потенциалом, см. раздел I.A.8, а в расширяющейся Вселенной Φ конформно связано с возмущением 00-компоненты метрики.

Отметим, что величину v нельзя считать физическим потенциалом скоростей, поскольку в левой части (2.65) фигурирует физическая скорость, а в правой части стоит производная по конформным координатам. Физическим потенциалом скоростей в фиксированный момент времени служит величина

$$v_{phys} = av,$$

поскольку скорость выражается через неё как

$$v_i = \frac{\delta v_{phys}}{\delta l^i},$$

где $\delta l^i = adx^i$ — физический элемент длины.

В конформной ньютоновой калибровке компоненты линеаризованного тензора Эйнштейна равны (см. Приложение B)

$$\delta G_0^0 = \frac{2}{a^2} \left(-\Delta\Psi + 3\frac{a'}{a}\Psi' - 3\frac{a'^2}{a^2}\Phi \right) \quad (2.67)$$

$$\delta G_i^0 = \frac{2}{a^2} \left(-\partial_i \Psi' + \frac{a'}{a} \partial_i \Phi \right) \quad (2.68)$$

$$\begin{aligned} \delta G_j^i &= \frac{1}{a^2} \partial_i \partial_j (\Phi + \Psi) \\ &- \frac{2}{a^2} \delta_{ij} \left[-\Psi'' + \frac{1}{2} \Delta(\Phi + \Psi) + \frac{a'}{a} (\Phi' - 2\Psi') + 2\frac{a''}{a}\Phi - \frac{a'^2}{a^2}\Phi \right] \end{aligned} \quad (2.69)$$

В (ij) -компонентах тензора энергии-импульса (2.37) присутствует только структура δ_{ij} и нет продольного слагаемого, пропорционального $\partial_i \partial_j$ (иначе говоря, пропорционального $k_i k_j$ в импульсном представлении). Поскольку тензоры δ_{ij} и $k_i k_j$ независимы, из продольной части (ij) -компонент уравнений Эйнштейна следует, что первое слагаемое в правой части (2.69) равно нулю, то есть

$$\Psi = -\Phi . \quad (2.70)$$

После этого остальные уравнения Эйнштейна дают

$$\Delta \Phi - 3 \frac{a'}{a} \Phi' - 3 \frac{a'^2}{a^2} \Phi = 4\pi G a^2 \cdot \delta \rho_{tot} \quad (2.71)$$

$$\Phi' + \frac{a'}{a} \Phi = -4\pi G a^2 \cdot [(\rho + p)v]_{tot} \quad (2.72)$$

$$\Phi'' + 3 \frac{a'}{a} \Phi' + \left(2 \frac{a''}{a} - \frac{a'^2}{a^2} \right) \Phi = 4\pi G a^2 \cdot \delta p_{tot} \quad (2.73)$$

Уравнения ковариантного сохранения имеют вид

$$\delta \rho'_\lambda + 3 \frac{a'}{a} (\delta \rho_\lambda + \delta p_\lambda) + (\rho_\lambda + p_\lambda) (\Delta v_\lambda - 3 \Phi') = 0 \quad (2.74)$$

$$[(\rho_\lambda + p_\lambda)v_\lambda]' + 4 \frac{a'}{a} (\rho_\lambda + p_\lambda)v_\lambda + \delta p_\lambda + (\rho_\lambda + p_\lambda)\Phi = 0 , \quad (2.75)$$

где индекс λ обозначает тип материи (см. обсуждение ниже). Эти уравнения получаются из (2.38), (2.39) путём подстановки выражений (2.63), (2.64), (2.65) с использованием (2.70).

Система, состоящая из уравнений (2.71), (2.72), (2.73) и (2.74), (2.75) и является искомой системой уравнений для скалярных возмущений.

Сделаем по поводу этой системы несколько замечаний. Во-первых, простое соотношение (2.70) между гравитационными потенциалами Ψ и Φ справедливо лишь в приближении идеальной жидкости; соответствующее обобщение основной системы уравнений приведено в Приложении В и используется в Главе 8. Во-вторых, как мы уже подчёркивали, в случае многокомпонентной среды в правой части уравнений Эйнштейна (2.71), (2.72), (2.73) фигурирует сумма вкладов всех компонент, с чем и связано обозначение “tot”:

$$[(\rho + p)v]_{tot} = \sum_\lambda [(\rho_\lambda + p_\lambda)v_\lambda]$$

и т.д. В то же время, уравнения ковариантного сохранения (2.74), (2.75) справедливы для каждой компоненты λ по отдельности. В-третьих, не все уравнения системы (2.71) — (2.75) независимы из-за тождества Бьянки. Напомним, что таким же свойством обладает система уравнений Эйнштейна и ковариантных законов сохранения в случае однородной среды.

- ▷ Задача 7. Показать, что в случае однокомпонентной среды уравнения (2.74), (2.75) автоматически выполняются, если выполнены уравнения (2.71), (2.72), (2.73). Сформулировать и доказать аналог этого утверждения для многокомпонентной среды.

С другой стороны, полученная система уравнений не полна: в ней отсутствует информация о том, какая именно среда имеется во Вселенной. В рассматриваемом нами случае идеальной жидкости эту систему необходимо дополнить связью между давлением и плотностью энергии для каждой из компонент среды, вытекающей из уравнения состояния. В общем случае можно записать для фоновых величин

$$p_\lambda = w_\lambda \rho_\lambda \quad (2.76)$$

и для возмущений

$$\delta p_\lambda = u_{s,\lambda}^2 \delta \rho_\lambda ,$$

где $u_{s,\lambda}$ — скорость звука в компоненте среды λ . Вообще говоря, показатель w_λ может отличаться от $u_{s,\lambda}^2$. Кроме того, обе эти величины могут сами зависеть от плотности энергии ρ , а тем самым от времени; важным примером служит период незадолго до рекомбинации, когда сравнимые вклады в плотность энергии барион-фотонной плазмы вносят как фотоны, так и барионы, см. раздел 6.2.

Далее, в пределе статической Вселенной ($a' = a'' = \rho' = 0$) рассматриваемая система уравнений представляет собой релятивистское обобщение уравнений для гравитирующей идеальной жидкости (1.5) — (1.7), а в нерелятивистском пределе $p \ll \rho$ по-существу совпадает с этой системой. В ньютоновском пределе на фоне пространства Минковского уравнение (2.71) имеет в точности вид уравнения Пуассона для ньютона потенциала Φ . При этом соотношение (2.70) определяет пространственные компоненты метрики (2.66). Кроме того, при $p \ll \rho$ и для мод с $\lambda \ll H^{-1}$ рассматриваемая система сводится к системе (1.17), описывающей эволюцию возмущений в ньютоновском приближении на фоне однородной расширяющейся Вселенной.

▷ **Задача 8.** Убедиться в справедливости сделанных утверждений. Указание: при описании невозмущённой среды не забудьте перейти в (1.17) к сопутствующей системе отсчёта.

▷ **Задача 9.** Рассматривая асимптотику решения Шварцшильда, убедиться, что метрика вдали от гравитирующего тела может быть приведена к виду (2.66) с

$$\Phi = -\Psi = -G \frac{m}{r} .$$

Ещё одно замечание состоит в том, что в фоновом пространстве Минковского в отсутствие материи уравнения (2.71), (2.72), (2.73) не имеют нетривиальных решений, так что свободное гравитационное поле не имеет распространяющихся скалярных мод. В конце раздела 2.3.2 такой же вывод был сделан относительно векторных мод. Таким образом, мы воспроизвели хорошо известный результат о том, что единственными распространяющимися модами свободного гравитационного поля являются поперечные бесследовые гравитационные волны с двумя поляризациями $e_{ij}^{(+, \times)}$.

2.4 Режимы эволюции

В ближайших Главах мы используем полученные здесь уравнения, и в рамках теории горячего Большого взрыва рассмотрим эволюцию космологических возмущений

на радиационно-доминированной, пылевидной стадиях и современной стадии ускоренного расширения Вселенной. При таком рассмотрении начальные данные для эволюции возмущений нужно задавать “руками”. Мы отложим обсуждение первичных возмущений до раздела 5.4, а в ближайших главах будем считать начальные данные достаточно произвольными¹² (но совместными с используемым нами линейным приближением). Такая последовательность изложения связана с тем, что для количественной формулировки того, что собственно следует понимать под начальными данными, требуется знать некоторые свойства решений уравнений эволюции для космологических возмущений.

В литературе по космологии нередко используют представление о “функциях перехода” (transfer functions): если $h(t_i)$ — совокупность начальных данных, например, для скалярных возмущений, то для этих возмущений в момент времени t записывают

$$h(t) = T(t, t_i)h(t_i) . \quad (2.77)$$

Функция $T(t, t_i)$ — это и есть функция перехода. В линейном режиме в импульсном представлении T представляет собой просто функцию времени и конформного импульса \mathbf{k} ; в нелинейном режиме соотношение (2.77) нужно понимать в смысле отображения (вообще говоря, нелинейного и перемешивающего моды с разными импульсами). Мы, впрочем, представлением о функциях перехода пользоваться будем редко.

В линейном режиме эволюция космологических возмущений происходит независимо для каждого значения конформного импульса \mathbf{k} . Он постоянен во времени, а физический импульс $\mathbf{q} = \mathbf{k}/a(\eta)$ убывает. Решения уравнений эволюции ведут себя существенно по-разному в зависимости от соотношения между физическим импульсом q и параметром Хаббла $H = a'/a^2$. Мы будем подробно обсуждать два режима:

— Режим “за горизонтом”. Этот режим имеет место при

$$|\mathbf{q}|(\eta) \equiv q(\eta) \ll H(\eta) . \quad (2.78)$$

Последнее соотношение означает, что физическая длина волны превышает текущий хаббловский размер H^{-1} . В теории горячего Большого взрыва хаббловский размер совпадает по порядку величины с размером космологического горизонта, а на вакуумоподобной стадии — с размером горизонта де Ситтера. Отсюда и название режима.

— Режим “под горизонтом”. В этом режиме имеет место обратное неравенство

$$q(\eta) \gg H(\eta) . \quad (2.79)$$

В этом режиме физическая длина волны мала по сравнению с хаббловским размером.

Физическое различие между этими двумя режимами состоит в следующем. Рассмотрим волну с определенным импульсом — поскольку мы работаем в рамках линейной теории, о других волнах можно забыть. Для волны за горизонтом выполнено (2.78), и изменения метрики, плотности энергии и давления малы на масштабе космологического горизонта (см. рис. 2.1а), который, напомним, является максимальным размером причинно-связанной области Вселенной в теории горячего Большого взрыва. Вселенная оказывается разбитой на причинно-несвязанные области, в каждой из которых метрика, плотность энергии и давление практически постоянны в

¹²Единственное ограничение, которое мы наложим, состоит в требовании отсутствия падающей моды, см. ниже.

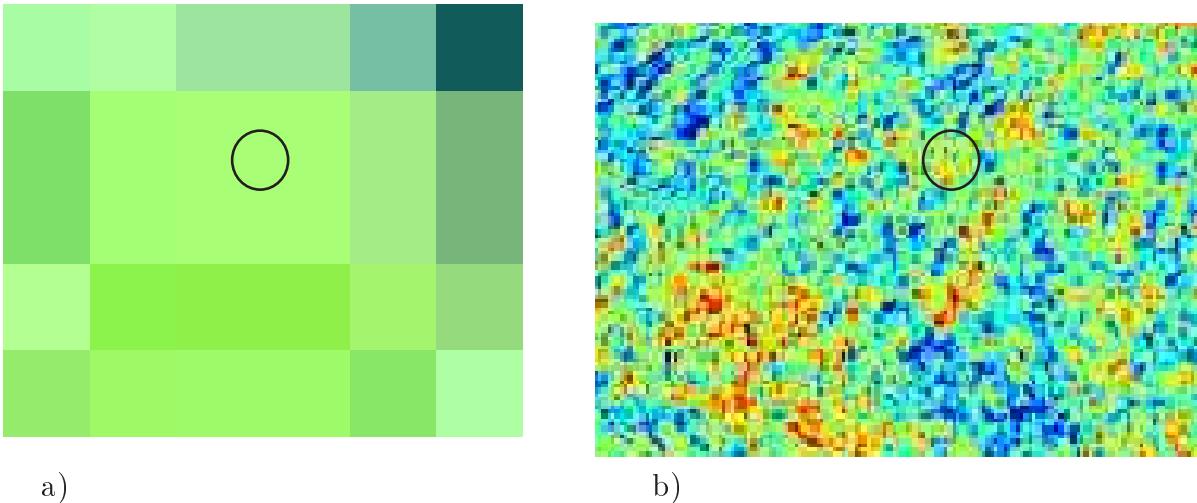


Рис. 2.1: Сопоставление характерных пространственных размеров космологических возмущений и размера горизонта. Цвет обозначает значение величины, характеризующей возмущения (например, $\delta\rho(\mathbf{x})$), горизонт изображен в виде окружности. а) Длины волн больше размера горизонта, в масштабах горизонта возмущения выглядят пространственно однородными; б) длины волн меньше размера горизонта, видны пространственные неоднородности.

пространстве. Эти области эволюционируют как независимые однородные (в случае тензорных мод, вообще говоря, анизотропные) Вселенные; ни о каких волнах плотности и гравитационных волнах речь идти не может. Отсутствуют и явления типа джинсовской неустойчивости¹³. Наоборот, для возмущений под горизонтом (рис. 2.1б) работают обычные представления о гравитационных волнах, звуковых волнах в среде, и т.д.

На радиационно-доминированной и пылевидной стадиях (и вообще, на стадиях замедленного расширения, например, при $p = w\rho$ с $w > -1/3$, см. раздел I.3.2.4) масштабный фактор растёт медленнее, чем t , а $H \propto 1/t$. Поэтому отношение

$$\frac{q}{H} \propto \frac{t}{a(t)}$$

растёт со временем. Следовательно, в эпоху горячего Большого взрыва¹⁴ моды сначала находятся за горизонтом, а в некоторый момент входят под горизонт, после чего реализуется режим (2.79); чем больше современная длина волны, тем позже она входит под горизонт. Это проиллюстрировано на рис. 2.2.

Отметим, что на нынешней стадии ускоренного расширения Вселенной отношение $q(t)/H(t)$ *убывает* со временем, так что самые длинные волны не входили и никогда (при постоянной во времени плотности тёмной энергии) не войдут под горизонт. Как следует из результата предлагаемой ниже задачи, максимальная современная длина волны, которая когда-либо находилась под горизонтом на стадии горячего

¹³Поскольку уравнения для эволюции возмущений локальны во времени, эти выводы не зависят от того, является ли хаббловский размер на самом деле максимальным размером причинно-связанной области или, как в инфляционной теории, причинно-связанные области на самом деле гораздо больше.

¹⁴На инфляционной стадии картина существенно иная, см. Главу 13.

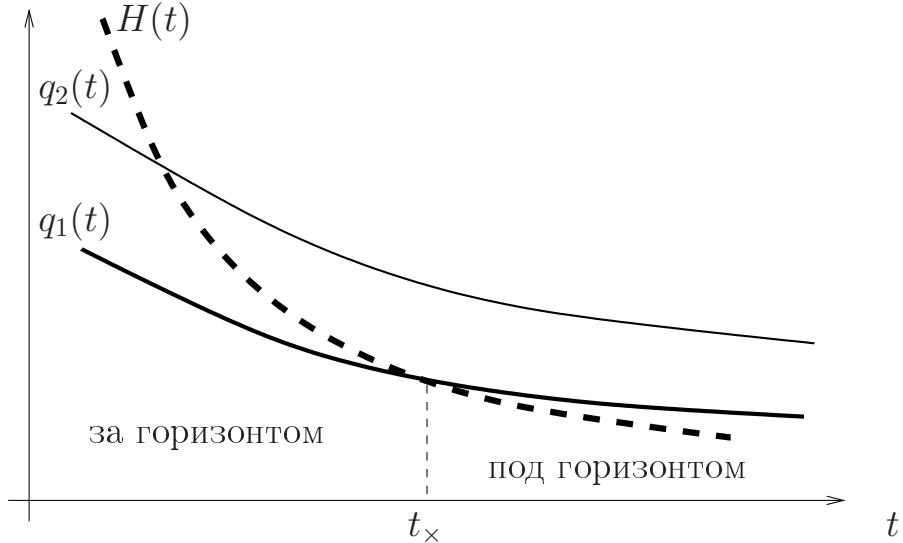


Рис. 2.2: Схематическое изображение зависимости физического импульса (сплошные линии) и параметра Хаббла (пунктирная линия) от времени в эпоху горячего Большого взрыва; t_x — момент входа волны под горизонт. Толстая и тонкая сплошные линии показывают эволюцию физического импульса для разных конформных импульсов k_1 и k_2 , причём $k_1 < k_2$.

Большого взрыва¹⁵, равна (при $\Omega_M = 0.24$, $\Omega_\Lambda = 0.76$)

$$\lambda_0^{(max)} = 32 \text{ Гпк} ;$$

она зашла под горизонт в эпоху перехода от замедленного к ускоренному расширению Вселенной, при $z = z_{acc} \approx 0.85$, см. раздел I.4.3. Как обычно, индекс 0 обозначает современные значения зависящих от времени величин. Соответствующий импульс составляет $q_0^{(min)} = 0.2 \text{ Гпк}^{-1}$, что даже меньше современного значения параметра Хаббла, $q_0^{(min)} = 0.8H_0$. Столь длинные волны мы рассматривать не будем.

▷ **Задача 10.** Считая плотность тёмной энергии не зависящей от времени, найти максимальную современную длину волны, которая когда-либо была под горизонтом в эпоху горячего Большого взрыва. Волны какой длины выходят за горизонт сегодня? Сделать численные оценки для $\Omega_M = 0.24$, $\Omega_\Lambda = 0.76$.

Возмущения с космологически интересными длинами волн действительно когда-то находились за горизонтом. Для волны, входящей под горизонт на радиационно-доминированной стадии при температуре T_x , в момент входа справедливо

$$q(T_x) \sim H(T_x) = \frac{T_x^2}{M_{Pl}^*} .$$

Длина этой волны сегодня составляет по порядку величины

$$\lambda_0 = \frac{a_0}{a(T_x)} \frac{2\pi}{q(T_x)} \sim \frac{2\pi M_{Pl}^*}{T_0 T_x} .$$

¹⁵Оговорка здесь связана с тем, что даже волны с современными длинами, сильно превышающими хаббловский размер H_0^{-1} , могли находиться под текущим горизонтом на стадии инфляции.

Для $T_{\times} \sim 1$ МэВ (при таких температурах начиналась эпоха нуклеосинтеза, и они заведомо были во Вселенной) получим отсюда

$$\lambda_0 \sim 1 \cdot 10^{21} \text{ см} \sim 0.3 \text{ кпк},$$

то есть меньше размера галактики. Для $T_{\times} \sim 100$ ГэВ соответствующая оценка имеет вид

$$\lambda_0 \sim 0.5 \cdot 10^{16} \text{ см},$$

то есть несколько больше размера солнечной системы. Таким образом, при не слишком сильном предположении о том, что во Вселенной реализовывались такие температуры, волны со всеми интересующими нас длинами действительно входили под горизонт на радиационно-доминированной стадии или позже.

Имеется простое соотношение между конформным импульсом волны k и конформным временем η_{\times} , при котором эта волна входит под горизонт. Условие входа волны под горизонт имеет вид

$$k \sim a(\eta_{\times})H(\eta_{\times}) = \frac{a'(\eta_{\times})}{a(\eta_{\times})}. \quad (2.80)$$

Для интересующих нас стадий эволюции справедливо $a(\eta)H(\eta) = a'/a \sim \eta^{-1}$, см. (2.6), (2.7). Поэтому время η_{\times} определяется из соотношения

$$k\eta_{\times} \simeq 1. \quad (2.81)$$

Разумеется, соотношение (2.81) несколько условно, поскольку вход волны под горизонт нельзя воспринимать как мгновенный процесс, однако оно удобно для наших целей.

Подчеркнём, что $k\eta$ является физической величиной, не зависящей от нормировки масштабного фактора,

$$k\eta(t) = \int_0^t dt \frac{k}{a(t)} = \int_0^t dt q(t).$$

Её наглядный смысл состоит в том, что она пропорциональна отношению физического размера горизонта в момент времени η и длины волны возмущения в этот момент,

$$\frac{l_H(\eta)}{\lambda(\eta)} = \frac{a(\eta)\eta}{a(\eta) \cdot (2\pi/k)} = \frac{k\eta}{2\pi}.$$

Условие пересечения горизонта (2.81) имеет поэтому вполне ясный физический смысл.

Поскольку масштабный фактор по-разному зависит от конформного времени η на радиационно-доминированной и пылевидной стадиях, для описания космологических возмущений существенно, на какой из этих стадий та или иная мода входит под горизонт. Волны с конформным импульсом меньше

$$k^{(eq)} = \frac{1}{\eta_{eq}}$$

входят под горизонт на пылевидной стадии, а волны с $k > k^{(eq)}$ — на радиационно-доминированной. Используя (2.23), найдём, что современный физический импульс волны с $k = k^{(eq)}$ составляет величину

$$q_0^{(eq)} = \frac{k^{(eq)}}{a_0} = \frac{1}{a_0 \eta_{eq}} \simeq 7.9 \cdot 10^{-3} \text{ Мпк}^{-1}. \quad (2.82)$$

Соответствующая современная длина волны равна

$$\lambda_0^{(eq)} = \frac{2\pi a_0}{k^{(eq)}} \simeq 790 \text{ Мпк}. \quad (2.83)$$

Мы будем подробно рассматривать моды с импульсами, удовлетворяющими либо $k \gg k^{(eq)}$, либо $k \ll k^{(eq)}$, поскольку в этих предельных случаях возможно аналитическое изучение эволюции. Их мы иногда будем называть для краткости РД-входящими модами и МД-входящими модами. Как видно из приведённых оценок, с точки зрения формирования галактик и их скоплений существенными являются моды с $k \gg k^{(eq)}$, то есть моды, входящие под горизонт глубоко на радиационно-доминированной стадии. В то же время, реликтовое излучение чувствительно к модам со всеми импульсами.

2.5 *Массивное скалярное поле как тёмная материя

В предыдущих разделах мы описывали материю, заполняющую Вселенную, феноменологически. Основными объектами при таком описании являются плотность энергии и давление, а разные типы материи различаются уравнениями состояния. Имеются, однако, случаи, когда возможность такого описания неочевидна. Один из них — случай эффективно безмассового скалярного поля, который мы аккуратно рассмотрим в разделе 13.2. В этом разделе мы обсудим другую возможность, а именно, теорию свободного скалярного поля достаточно большой массы, почти однородного в пространстве. Отметим сразу, что речь пойдёт о скалярных возмущениях, поскольку тензорные и векторные поляризации у скалярного поля отсутствуют. В качестве физических приложений здесь выступает, например, аксионное поле как кандидат на роль тёмной материи (см. раздел I.9.7.1), а также поле раздела 14.2 (после начала его когерентных осцилляций) как возможный источник первичных возмущений плотности.

Как мы знаем из раздела I.4.8.1, однородное скалярное поле с $t \gg H$ быстро осциллирует во времени и в среднем ведёт себя как нерелятивистское вещество: усреднённые по периоду осцилляций пространственные компоненты тензора энергии-импульса равны нулю, а усреднённая по периоду плотность энергии падает со временем как a^{-3} . На этом основании можно ожидать, что и малые неоднородные возмущения такого поля ведут себя так же, как возмущения нерелятивистской тёмной материи. Цель этого раздела — убедиться в этом прямым анализом малых неоднородностей скалярного поля и метрики. При этом по-существу единственным предположением о свойствах метрики, включая её возмущения, будет предположение о том, что в отсутствие скалярного поля метрика меняется во времени медленно по сравнению с характерным временем осцилляций поля t^{-1} . Это предположение выполнено, если других осциллирующих полей, обладающих заметной плотностью энергии, во Вселенной нет¹⁶. Помимо возмущений скалярного поля во Вселенной могут присутствовать возмущения других компонент среды (например, релятивистского вещества);

¹⁶ В действительности достаточно выполнения более слабого требования, чтобы другие осциллирующие поля, если они существуют, имели периоды осцилляций, сильно отличающиеся от периода осцилляций рассматриваемого поля. Кроме того, необходимо ещё предположить отсутствие кратных периодов.

никаких предположений относительно соотношений между различными типами возмущений нам делать не потребуется¹⁷.

Итак, рассмотрим скалярное поле с действием

$$S_\phi = \int d^4x \sqrt{-g} \left(\frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - \frac{m^2}{2} \phi^2 \right) .$$

В отличие от раздела I.4.8.1 мы обозначаем скалярное поле символом ϕ , а обозначение φ зарезервируем для возмущений этого поля над однородным фоном. Тензор энергии-импульса поля имеет вид

$$T_\nu^\mu = g^{\mu\lambda} \partial_\nu \phi \partial_\lambda \phi - \delta_\nu^\mu \left(\frac{1}{2} g^{\lambda\rho} \partial_\lambda \phi \partial_\rho \phi - \frac{m^2}{2} \phi^2 \right) , \quad (2.84)$$

а уравнение поля выглядит следующим образом:

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu (\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \partial_\nu \phi) + m^2 \phi = 0 . \quad (2.85)$$

Будем рассматривать малые неоднородные возмущения поля $\varphi(\mathbf{x}, \eta)$ над однородным фоном $\phi_c(\eta)$,

$$\phi(\mathbf{x}, \eta) = \phi_c(\eta) + \varphi(\mathbf{x}, \eta) . \quad (2.86)$$

Во всём этом разделе будем считать, что масса поля m велика как по сравнению с физическими импульсами возмущений, так и по сравнению с параметром Хаббла,

$$m \gg q \equiv \frac{k}{a} , \quad m \gg H . \quad (2.87)$$

Кроме того, ограничимся пока случаем, когда выполняется и ещё одно неравенство

$$m \gg \frac{q^2}{H} . \quad (2.88)$$

Все эти неравенства действительно выполняются в большинстве физически интересных моделей. Тем не менее, в конце раздела мы рассмотрим и случай, когда выполнения неравенства (2.88) не предполагается.

Прежде всего, запишем уравнение для фонового поля в однородной метрике:

$$\phi_c'' + 2 \frac{a'}{a} \phi_c' + a^2 m^2 \phi_c = 0 . \quad (2.89)$$

Как мы знаем из раздела I.4.8.1, приближенным решением этого уравнения в режиме (2.87) служит

$$\phi_c = u(\eta) \cdot \cos[mt(\eta)] , \quad (2.90)$$

где

$$u(\eta) = \frac{\text{const}}{a^{3/2}} \quad (2.91)$$

— медленно меняющаяся функция времени,

$$t(\eta) = \int d\eta a(\eta)$$

¹⁷За исключением, разумеется, общего предположения о малости космологических возмущений, то есть о применимости линейной теории.

— космологическое время, и мы произвольным образом выбрали фазу осцилляций.

Найдём теперь линеаризованное уравнение для возмущений скалярного поля с учётом возмущений метрики, а также линеаризованный тензор энергии-импульса возмущений скалярного поля. Мы будем использовать конформную ньютонову калибровку и предположим для простоты (хотя это не обязательно), что потенциалы Φ и Ψ связаны между собой соотношением (2.70), то есть отличные от нуля компоненты метрики имеют вид (см. (2.66))

$$\begin{aligned} g_{00} &= a^2(1+2\Phi), \quad g_{ij} = -a^2\delta_{ij}(1-2\Phi); \\ g^{00} &= a^{-2}(1-2\Phi), \quad g^{ij} = -a^{-2}\delta_{ij}(1+2\Phi). \end{aligned} \quad (2.92)$$

Прямой подстановкой (2.86) и (2.92) в уравнение поля (2.85) получаем уравнение для возмущений поля, которое мы запишем в импульсном представлении:

$$\varphi'' + 2\frac{a'}{a}\varphi' + k^2\varphi + m^2a^2\varphi - 4\phi'_c\Phi' + 2a^2m^2\phi_c\Phi = 0. \quad (2.93)$$

Выражение для тензора энергии-импульса возмущений также получается прямой подстановкой (2.86) и (2.92) в выражение (2.84). Его компоненты имеют вид

$$\delta T_0^0 \equiv \delta\rho_\varphi = -\frac{1}{a^2}(\phi'_c)^2\Phi + \frac{1}{a^2}\phi'_c\varphi' + m^2\phi_c\varphi \quad (2.94)$$

$$\delta T_i^0 = \frac{1}{a^2}\phi'_c\partial_i\varphi \quad (2.95)$$

$$\delta T_j^i = -\delta_j^i\delta p_\varphi,$$

где

$$\delta p_\varphi = -\frac{1}{a^2}(\phi'_c)^2\Phi + \frac{1}{a^2}\phi'_c\varphi' - m^2\phi_c\varphi. \quad (2.96)$$

Сравнивая эти выражения с (2.37), мы видим, что тензор энергии-импульса имеет стандартный для скалярных возмущений вид, причём в качестве величины $-(\rho+p)v$, входящей в уравнение (2.72), выступает

$$[-(\rho+p)v]_\varphi = \frac{1}{a^2}\phi'_c\varphi.$$

Идея дальнейшего анализа состоит в том, чтобы записать формальное разложение всех величин по m^{-1} и убедиться в том, что усреднённое по периоду осцилляций давление δp_φ , а значит δT_j^i , обращается в нуль в нулевом порядке по m^{-1} , а другие компоненты тензора энергии-импульса, будучи усреднёнными по периоду, в этом порядке в нуль не обращаются. При этом необходимо иметь в виду, что дифференцирование по η быстро осциллирующих функций добавляет одну степень большого параметра m ; например, для фонового поля имеем

$$\phi'_c = -mau \sin mt + \dots,$$

где многоточием обозначены поправки по m^{-1} .

Начнём с того, что фоновое поле ϕ_c (то есть амплитуду u) необходимо формально считать величиной порядка $O(m^{-1})$, тогда его плотность энергии

$$\rho_{\phi_c} = \frac{1}{2a^2}(\phi'_c)^2 + \frac{m^2}{2}\phi_c^2 \quad (2.97)$$

будет величиной порядка $O(m^0)$. Возмущения метрики Φ разложим на медленно меняющуюся и осциллирующую части $\bar{\Phi}$ и Φ_{osc} , соответственно:

$$\Phi = \bar{\Phi} + \Phi_{osc}, \quad (2.98)$$

при этом $\bar{\Phi}$ заведомо является величиной порядка $O(m^0)$ а Φ_{osc} , как мы увидим, необходимо считать величиной порядка $O(m^{-1})$. Действительно, в $\bar{\Phi}$ дают вклад, вообще говоря, все компоненты космической среды, а не только рассматриваемое скалярное поле, и наоборот, согласно сделанному в начале раздела предположению осциллирующая часть Φ_{osc} целиком обусловлена возмущениями скалярного поля. Итак,

$$\bar{\Phi} = O(m^0), \quad \Phi_{osc} = O(m^{-1}). \quad (2.99)$$

Отметим, что производные этих величин по времени имеют один и тот же порядок,

$$\bar{\Phi}' = O(m^0), \quad \Phi'_{osc} = O(m^0). \quad (2.100)$$

Наконец, в лидирующем, а также в сублидирующем порядке возмущение поля содержит только моды, осциллирующие с частотой m (в следующих порядках генерируются высшие гармоники с частотами $2m$, $3m$ и т.д.), и можно записать

$$\varphi = B(\eta, \mathbf{x}) \sin mt + A(\eta, \mathbf{x}) \cos mt, \quad (2.101)$$

где A и B зависят от пространственных координат и являются медленно меняющимися функциями конформного времени.

Для вычисления плотности энергии и давления возмущений скалярного поля в лидирующем (нулевом) порядке по m^{-1} необходимо учесть, что фоновое решение (2.90) является приближенным, то есть справедливым в лидирующем порядке по m^{-1} . С учётом следующего порядка фоновое поле имеет вид

$$\phi_c = u \cos mt + w \sin mt, \quad (2.102)$$

причём в соответствии со сказанным выше

$$u = O(m^{-1}), \quad w = O(m^{-2}). \quad (2.103)$$

Подставляя разложения (2.98) и (2.101) в выражения (2.94), (2.95) и (2.96), получим с учётом (2.103) выражения для компонент тензора энергии-импульса вплоть до порядка $O(m^0)$ (в силу малости A , см. (2.107), члены, содержащие mtA и wA , имеют более высокий порядок, и мы их не выписываем):

$$\begin{aligned} \delta\rho_\varphi &= -m^2 u^2 \bar{\Phi} \sin^2 mt + \frac{m}{a} u' B \cos^2 mt - \frac{m}{a} u B' \sin^2 mt \\ &\quad + m^2 w B + m^2 u A \end{aligned} \quad (2.104)$$

$$-[(\rho + p)v]_\varphi = -\frac{m}{a} u B \sin^2 mt \quad (2.105)$$

$$\begin{aligned} \delta p_\varphi &= -m^2 u^2 \bar{\Phi} \sin^2 mt + \frac{m}{a} u' B \cos^2 mt - \frac{m}{a} u B' \sin^2 mt \\ &\quad + m^2 w B \cos 2mt - m^2 u B \sin 2mt - m^2 u A \cos 2mt. \end{aligned} \quad (2.106)$$

Эти величины, наряду с возможными вкладами других типов материи, фигурируют в правых частях (2.71), (2.72) и (2.73). Учитывая (2.100), мы видим, что левая часть

уравнения (2.71) имеет порядок $O(m^0)$. Поскольку $u = O(m^{-1})$, последнее слагаемое в (2.104) будет иметь такой же порядок (а не выше), только если $A = O(m^{-1})$. В то же время, остальные слагаемые имеют порядок $O(m^0)$ при $B = O(m^0)$. Итак, мы заключаем, что самосогласованность процедуры разложения по m^{-1} требует, чтобы было выполнено

$$B = O(m^0), \quad A = O(m^{-1}). \quad (2.107)$$

Эти свойства обеспечивают и правильные (в смысле согласованности разложения по m^{-1}) свойства остальных компонент тензора энергии-импульса¹⁸.

Обратимся теперь к полевому уравнению (2.93). Лидирующим порядком для него служит $O(m^1)$. В этом порядке имеем

$$B' + \frac{3a'}{2a}B + t a u \bar{\Phi} = 0. \quad (2.108)$$

Теперь нетрудно убедиться, что усреднённое по периоду значение δp_φ действительно равно нулю до порядка $O(m^0)$ включительно. Усредняя (2.106) по периоду, получаем

$$\overline{\delta p_\varphi} = -\frac{1}{2} \frac{tu}{a} \left(B' - \frac{u'}{u} B + t a u \bar{\Phi} \right). \quad (2.109)$$

Из (2.91) следует, что это выражение с точностью до множителя совпадает с левой частью (2.108). Итак,

$$\overline{\delta p_\varphi} = O(m^{-1}).$$

Другие компоненты тензора энергии-импульса, наоборот, не обращаются в нуль в порядке $O(m^0)$ после усреднения по периоду. Например,

$$\overline{[(\rho + p)v]}_\varphi = \frac{1}{2} \frac{m}{a} u B.$$

Таким образом, с точностью до поправок, подавленных массой скалярного поля, его усреднённые по периоду осцилляции возмущения соответствуют среде с уравнением состояния $p = 0$. Поскольку знания уравнения состояния среды (вместе с начальными данными) достаточно для того, чтобы найти её эволюцию, осциллирующее скалярное поле с точки зрения космологических возмущений эквивалентно нерелятивистскому веществу. При этом для изучения эволюции возмущений на временных интервалах, превышающих m^{-1} , об осцилляциях поля и метрики можно забыть. Слабо неоднородное массивное скалярное поле ведёт себя в расширяющейся Вселенной так же, как холодная тёмная материя, то есть оно эффективно описывается уравнениями раздела 2.3.3 с $p = \delta p = 0$.

Нетривиальной проверкой всего подхода служит выполнение уравнений ковариантного сохранения для *усреднённого по периоду* тензора энергии-импульса возмущений, причём фоновое поле, фоновая метрика и возмущения метрики также считаются усредненными по периоду. Ковариантное сохранение тензора энергии-импульса *до усреднения* гарантированно выполняется при учёте полевых уравнений, однако это свойство может, вообще говоря, нарушаться при усреднении. Дело в том, что как фоновое поле ϕ_c , так и фоновая метрика сами осциллируют, а усреднённое значение произведения осциллирующих величин, вообще говоря, не равно произведению усреднённых значений. Убедимся, что в лидирующем порядке по m^{-1} уравнения ковариантного сохранения (2.74), (2.75) действительно выполняются для усреднённых компонент тензора энергии-импульса возмущений при учёте уравнений поля. Это будет окончательным доказательством эквивалентности рассматриваемого скалярного поля среде с уравнением состояния $p = 0$ в лидирующем порядке по m^{-1} (в более высоких порядках такая эквивалентность уже не имеет места).

¹⁸Отметим, что левая часть (2.73) имеет осциллирующую компоненту Φ''_{osc} порядка $O(m^1)$. Такой вклад есть и в δp_φ — это предпоследнее слагаемое в (2.106).

Для проверки выполнения уравнений ковариантного сохранения для усреднённого тензора энергии-импульса возмущений нам потребуются выражения для входящих в них величин в лидирующем и сублидирующем порядках по m^{-1} . Кроме того, в некоторых местах нам встретятся произведения быстро осциллирующих величин типа $\sin mt \cdot \sin 2mt$. Для нашего анализа будет достаточно ограничиться рассмотрением нулевой и первой гармоник, то есть функций либо вообще не осциллирующих, либо осциллирующих с частотой m . В связи с этим мы, не оговаривая это специально, в соответствующих местах будем использовать замены

$$\begin{aligned}\sin mt \cdot \sin 2mt &\rightarrow \frac{1}{2} \cos mt, & \cos mt \cdot \sin 2mt &\rightarrow \frac{1}{2} \sin mt, \\ \sin mt \cdot \cos 2mt &\rightarrow -\frac{1}{2} \sin mt, & \cos mt \cdot \cos 2mt &\rightarrow \frac{1}{2} \cos mt.\end{aligned}$$

Высшие гармоники существенны лишь в порядке, следующем за сублидирующем, и нам они не потребуются.

Прежде всего, необходимо учесть, что из-за осцилляций фонового поля ϕ_c фоновый масштабный фактор является осциллирующей величиной в сублидирующем порядке по m^{-1} . Поэтому запишем

$$a(\eta) = \bar{a}(\eta) + a_{osc}(\eta), \quad (2.110)$$

где \bar{a} не осциллирует и имеет порядок $O(m^0)$, а a_{osc} является величиной порядка $O(m^{-2})$. Последнее свойство следует из того соображения, что осциллирующая часть фоновой плотности энергии (2.97) в основном нетривиальном порядке имеет вид

$$\rho_{osc} = -\frac{1}{2\bar{a}} muu' \sin 2mt, \quad (2.111)$$

то есть является величиной порядка $O(m^{-1})$. Этот же порядок должно иметь a'_{osc} , что и приводит к $a_{osc}' = O(m^{-2})$. Подставляя (2.110) и (2.111) в уравнение Фридмана (2.3), получим в первом нетривиальном порядке

$$a'_{osc} = \pi G m \bar{a}^2 u^2 \sin 2mt,$$

где мы воспользовались (2.91). Отсюда, опять-таки в первом нетривиальном порядке, имеем

$$a_{osc} = -\frac{\pi}{2} G \bar{a} u^2 \cos 2mt.$$

Полезно ещё записать уравнение для функции $w(\eta)$, определяющей сублидирующий вклад в фоновое скалярное поле (2.102):

$$w' + \frac{3\bar{a}'}{2\bar{a}} w + \frac{1}{2m\bar{a}} \left(u'' + \frac{2\bar{a}'}{\bar{a}} u' \right) - \frac{3\pi}{4} G m \bar{a} u^3 = 0. \quad (2.112)$$

Это уравнение получается из (2.89) выделением слагаемых порядка $O(m^{-1})$ (уравнение (2.89) в старших порядках $O(m^1)$ и $O(m^0)$ не выписываем; мы уже знаем, что его решением является (2.90)).

В интересующем нас порядке разложения по m^{-1} нельзя пренебрегать и осциллирующим слагаемым в ньютоновом потенциале (2.98). В первом нетривиальном порядке оно связано с возмущениями скалярного поля соотношением, которое получается с использованием уравнения Эйнштейна (2.72). Выделяя в последнем осциллирующие слагаемые первого нетривиального порядка, получим

$$\Phi'_{osc} = 2\pi G m \bar{a} u B \cos 2mt,$$

что даёт в этом порядке

$$\Phi_{osc} = \pi G u B \sin 2mt. \quad (2.113)$$

Таким образом, Φ_{osc} действительно является величиной порядка $O(m^{-1})$. В этих порядках уравнение (2.71) не даёт ничего нового, см. задачу ниже.

Наконец, запишем уравнение Клейна–Гордона (2.93) в лидирующем и сублидирующем порядках по m^{-1} . В лидирующем порядке $O(m^1)$ оно, как мы уже отмечали, сводится к уравнению (2.108) для медленно меняющихся величин. В следующем порядке $O(m^0)$ получим, используя предыдущие формулы,

$$B'' + \frac{2\bar{a}'}{\bar{a}} B' + k^2 B - 2m\bar{a} A' - 3m\bar{a}' A + 4m\bar{a} u \bar{\Phi}' + 2m^2 \bar{a}^2 w \bar{\Phi} - \frac{3\pi}{2} G m^2 \bar{a}^2 u^2 B = 0. \quad (2.114)$$

▷ Задача 11. Показать, что в первом нетривиальном порядке по m^{-1} осциллирующая часть уравнения (2.71) сводится к уравнениям (2.113) и (2.108).

Теперь мы готовы рассмотреть уравнения сохранения усреднённого тензора энергии-импульса для возмущений. В лидирующем порядке выражения для усреднённых величин получаются усреднением (2.104), (2.105) и равны

$$\begin{aligned}\overline{\delta\rho}_\varphi &= m^2 wB + m^2 uA, \\ \overline{[(p+\rho)v]}_\varphi &= \frac{m}{2\bar{a}} uB, \\ \overline{\delta p}_\varphi &= 0.\end{aligned}$$

где мы воспользовались (2.108). Наша цель — проверить, что они удовлетворяют уравнениям (2.74), (2.75), в которых в качестве масштабного фактора, ньютона потенциала и фоновой плотности энергии выступают усреднённые величины \bar{a} , $\bar{\Phi}$ и $\bar{\rho}_{\phi_c}$, а фоновое давление скалярного поля равно нулю.

Начнём с уравнения (2.75). В лидирующем порядке имеем

$$\overline{(\rho+p)}_{\phi_c} = \frac{1}{2} m^2 u^2.$$

С учётом этого уравнение (2.75) для усреднённых величин приводится к виду

$$\left(\frac{u}{\bar{a}}B\right)' + 4\frac{\bar{a}'u}{\bar{a}^2}B + mu^2\bar{\Phi} = 0. \quad (2.115)$$

Используя тот факт, что (см. (2.91))

$$\frac{u'}{u} = -\frac{3\bar{a}'}{2\bar{a}}, \quad (2.116)$$

нетрудно убедиться, что уравнение (2.115) сводится к (2.108), то есть оно действительно выполняется при учёте уравнения Клейна–Гордона.

Уравнение (2.74) для усреднённых величин с использованием предыдущих формул и уравнений (2.112) и (2.108) можно привести к виду

$$2m^2\bar{a}^2w\bar{\Phi} + \left(\frac{u''}{u} + 2\frac{\bar{a}'u'}{\bar{a}u}\right)B - \frac{3\pi}{2}Gm^2\bar{a}^2u^2B - 2m\bar{a}A' - 3m\bar{a}'A + k^2B + 3m\bar{a}u\bar{\Phi}' = 0.$$

Оно эквивалентно (2.114). Проще всего убедиться в этом, продифференцировав (2.108) по η и исключив с помощью полученных уравнений B' и B'' из (2.114). Кроме того, необходимо воспользоваться соотношением (2.116) и его производной по η .

Итак, уравнение Клейна–Гордона для скалярного поля и его возмущений приводит к тем же уравнениям ковариантного сохранения усреднённого тензора энергии-импульса, какие имеют место для материи с уравнением состояния $p = 0$. Феноменологическое описание слабо неоднородного массивного скалярного поля как пылевидной материи является точным в главном порядке по m^{-1} , то есть в пределе $q/m \rightarrow 0$, $H/m \rightarrow 0$.

Приведённый выше анализ не работает, если не выполнено неравенство (2.88). Рассмотрим поэтому случай, когда

$$\frac{q^2}{H} \equiv \frac{k^2}{a^2 H} \gtrsim m. \quad (2.117)$$

Подчеркнём сразу, что речь идёт о чрезвычайно малых массах скалярного поля: к примеру, соотношение (2.117) будет выполнено в момент перехода с радиационно-доминированной на пылевидную стадию для волн с современной длиной $q_0^{-1} = 1$ Мпк, только если

$$\begin{aligned}m &\lesssim \frac{q_0^2 z_{eq}^2}{H_{eq}} \\ &\sim 0.3 \text{ пк}^{-1} \sim 2 \cdot 10^{-24} \text{ эВ},\end{aligned} \quad (2.118)$$

где для численной оценки мы воспользовались значениями $z_{eq} = 3.1 \cdot 10^3$, $H_{eq}^{-1} = 2t_{eq} = 3.6 \cdot 10^{12}$ с = $1.1 \cdot 10^{23}$ см. Тем не менее поля столь малой массы обсуждаются в литературе как кандидаты на роль тёмной материи, поскольку, как мы сейчас увидим, они приводят к интересным свойствам возмущений плотности.

Считая, что параметр Хаббла имеет порядок $O(m^0)$, мы видим из (2.117), что конформный импульс необходимо положить величиной порядка $O(m^{1/2})$, то есть

$$k^2 = O(m) .$$

Будем по-прежнему полагать, что $u = O(m^{-1})$, $w = O(m^{-2})$, $\Phi = O(m^0)$. Тогда из уравнения (2.71) видно, что требуется формально считать $\delta\rho = O(m)$. Для возмущений скалярного поля это свойство будет выполнено, если считать, что функции A и B , входящие в (2.101), имеют один и тот же порядок по m , то есть вместо (2.107) положить

$$B = O(m^0) , \quad A = O(m^0) . \quad (2.119)$$

Тогда в лидирующем порядке для возмущения плотности энергии скалярного поля будем иметь

$$\delta\rho_\varphi = m^2 u A , \quad (2.120)$$

а усреднённое по периоду возмущение давления в лидирующем порядке будет по-прежнему даваться формулой (2.109). Однако выражение в правой части теперь не равно нулю. Действительно, с учётом (2.119) уравнение поля (2.93) даёт два уравнения

$$\begin{aligned} B' + \frac{3a'}{2a} B + t a u \bar{\Phi} + \frac{k^2}{2ma} A &= 0 , \\ A' + \frac{3a'}{2a} A - \frac{k^2}{2ma} B &= 0 . \end{aligned}$$

Используя первое из этих уравнений, выражение (2.109) приведём к виду

$$\overline{\delta p_\varphi} = \frac{k^2}{4a^2} u A .$$

Это выражение имеет формально порядок $O(m^0)$, то есть давлением, вообще говоря, пренебрегать нельзя. В рассматриваемом случае малых масс скалярное поле к нерелятивистскому веществу не сводится.

Из последнего выражения и (2.120) получаем выражение для эффективной скорости звука

$$u_s^2 \equiv \frac{\delta p_\varphi}{\delta\rho_\varphi} = \frac{k^2}{4a^2 m^2} = \frac{q^2(\eta)}{4m^2} .$$

Она хотя и мала, но отлична от нуля. Важность этого обстоятельства можно проиллюстрировать следующим образом. Рассмотрим пылевидную стадию эволюции Вселенной и предположим, что осциллирующее поле ϕ составляет всю тёмную материю. Для упрощения пренебрежём расширением Вселенной (это пренебрежение в действительности незаконно, мы его делаем для прояснения сути дела). Тогда, как мы знаем из раздела 1.1, в системе имеет место джинсовская неустойчивость. В силу того, что скорость звука отлична от нуля, джинсовский импульс конечен,

$$q_J = (16\pi G \rho_\phi m^2)^{1/4} . \quad (2.121)$$

Отметим, что

$$\frac{q_J^2}{H} \sim m ,$$

то есть условие (2.88) перестаёт выполняться как раз на джинсовском масштабе. Возмущения плотности с длинами волн, меньшими джинсовской длины $\lambda_J = 2\pi/q_J$, не растут; это свойство имеет место и в расширяющейся Вселенной.

Таким образом, в теории с тёмной материей в форме сверхлёгкого осциллирующего скалярного поля имеется эффективное обрезание спектра скалярных возмущений на коротких длинах волн. По порядку величины масштаб, на котором происходит это обрезание, определяется джинсовским масштабом (2.121) на момент перехода от радиационно-доминированной к пылевидной стадии: мы увидим в дальнейшем, что рост возмущений происходит в основном на пылевидной стадии. Соответствующий современный импульс оценивается величиной

$$q_0 \sim z_{eq}^{-1} q_J(t_{eq}) \sim z_{eq}^{-1} (H_{eq} m)^{1/2} .$$

Из оценки (2.118) следует, что скалярное поле с массой $m \ll 10^{-23}$ эВ в качестве тёмной материи неприемлемо — в такой модели галактики не образуются. Наоборот, теория скалярного поля с массой $m \sim 10^{-22} - 10^{-23}$ эВ интересна тем, что обычные галактики в ней образуются так же, как в теории с холодной тёмной материией, но формируется меньше карликовых галактик и структур субгалактических размеров. В этом отношении указанная теория аналогична модели с тёплой тёмной материией, см. раздел 8.3.1.

В заключение этого раздела отметим одно обстоятельство, весьма существенное для моделей, в которых в качестве тёмной материи выступает почти однородное осциллирующее поле. Для согласия таких моделей с наблюдениями требуется, чтобы первичные неоднородности поля и возмущения плотности горячей плазмы на радиационно-доминированной стадии были скоррелированы. Точнее, требуется, чтобы основной модой возмущений была адиабатическая мода, см. раздел 5.1. Как мы увидим в разделе 14.4, в случае аксионного поля это требование удовлетворяется при определённом выборе параметров модели. Для других полей указанное требование нетривиально, и оно ограничивает класс моделей такого рода.

Глава 3

Эволюция векторных и тензорных мод

Наиболее прост анализ эволюции векторных и тензорных возмущений в приближении идеальной жидкости для космической среды. Мы начнём именно с него. Мы увидим, что скорости V_i^T векторных мод нерелятивистского вещества (холодной тёмной материи, а также барионов после рекомбинации) быстро убывают при расширении Вселенной, а для релятивистского вещества они постоянны во времени. Величины W_i^T , дающие вклад в возмущения метрики (2.57), убывают со временем на всех стадиях эволюции Вселенной. Из-за этого векторные моды не представляют, по-видимому, сколько-нибудь значительного интереса (кроме того, начальные значения векторных мод крайне малы или вообще равны нулю при инфляционном механизме генерации космологических возмущений). С другой стороны, тензорные моды представляют большой интерес, и на них мы остановимся довольно подробно. При этом мы встретимся с важными как для тензорных, так и для скалярных мод свойствами решений уравнений эволюции космологических возмущений; в этом смысле простой случай тензорных мод важен и с методической точки зрения. Подчеркнём, впрочем, что тензорные моды до сих пор не обнаружены.

3.1 Векторные моды

Напомним (см. раздел 1.2), что векторные моды соответствуют вихревым возмущениям, несущим угловой момент. Для них плотность энергии и давление остаются однородными, см. (2.60), а 3-скорость ортогональна волновому вектору \mathbf{k} . Напомним, что V_i^T , фигурирующие в (2.61) и (2.62), являются физическими, а не координатными скоростями.

Из уравнения (2.61) следует, что

$$(\rho + p)V_i^T = \frac{\text{const}}{a^4} \quad (3.1)$$

(здесь и далее const означает не зависящую от времени величину; в разных формулах эти величины, вообще говоря, разные). Для баротропной среды с $p \propto \rho$ это соотношение можно интерпретировать как сохранение углового момента в расширяющейся Вселенной, см. (1.22). В случае многокомпонентной среды соотношение (3.1) справедливо для каждой из компонент. Для релятивистского вещества $p \propto \rho \propto a^{-4}$,

так что

$$V_i^T = \text{const}.$$

Для нерелятивистского вещества $p = 0$, $\rho \propto a^{-3}$, и поэтому

$$V_i^T = \frac{\text{const}}{a}.$$

В любом случае скорости среды не растут, а в наиболее интересном случае они убывают.

Из (2.62) следует, что

$$\partial_\eta W_i^T = \frac{\text{const}}{a^2}.$$

С учётом (2.6), (2.7), (2.8) получаем, что возмущения метрики убывают как

$$\begin{aligned} \text{РД-стадия : } \quad W_i^T &= \frac{\text{const}}{a} \\ \text{МД-стадия : } \quad W_i^T &= \frac{\text{const}}{a^{3/2}} \\ \text{ЛД-стадия : } \quad W_i^T &= \frac{\text{const}}{a^3} \end{aligned}$$

Этим анализ векторных мод в приближении идеальной жидкости исчерпывается.

3.2 Тензорные моды: реликтовые гравитационные волны

Основным уравнением, определяющим эволюцию тензорных мод, является уравнение (2.55). Мы перепишем его в импульсном представлении, опуская индекс, относящийся к поляризации:

$$h'' + 2\frac{a'}{a}h' + k^2h = 0. \quad (3.2)$$

Для мод за и под горизонтом справедливо, соответственно, $k \ll a'/a$ и $k \gg a'/a$, см. (2.80). Из вида уравнения (3.2) ясно, что моды за и под горизонтом действительно ведут себя по-разному: в первом случае последнее слагаемое в левой части пренебрежимо мало, а во втором оно, наоборот, играет основную роль. Напомним, что на всех интересующих нас стадиях моды за и под горизонтом удовлетворяют неравенствам $k\eta \ll 1$ и $k\eta \gg 1$, соответственно, см. (2.81).

3.2.1 За горизонтом: константная и падающая моды

В режиме за горизонтом в уравнении (3.2) можно пренебречь слагаемым с конформным импульсом, и оно сводится к уравнению

$$h'' + 2\frac{a'}{a}h' = 0.$$

Одно из решений этого уравнения постоянно во времени,

$$h = h_{(i)} = \text{const}. \quad (3.3)$$

Его называют константной модой; индекс (i) относится к начальному значению амплитуды. Второе решение — это падающая мода¹

$$h(\eta) = \text{const} \cdot \int \frac{d\eta}{a^2(\eta)} . \quad (3.4)$$

Падающая мода убывает с ростом масштабного фактора точно так же, как векторная мода W_i^T , а именно, $h \propto a^{-1}, a^{-3/2}$ и a^{-3} на РД-, МД- и АД-стадиях, соответственно.

Если падающая мода не слишком велика на самых ранних стадиях эпохи горячего Большого взрыва, то она быстро становится пренебрежимо малой. Наоборот, если к моменту входа волны под горизонт падающая мода не пренебрежимо мала, то она была велика на ранних стадиях, то есть Вселенная была когда-то сильно неоднородной и анизотропной. *В дальнейшем мы всегда будем предполагать, если не оговорено противное, что падающими модами можно пренебречь к моменту входа космологических возмущений под горизонт*, что соответствует предположению о том, что Вселенная была однородна и изотропна на самых ранних стадиях эпохи горячего Большого взрыва. Это относится как к тензорным, так и к скалярным возмущениям. Поскольку линеаризованная теория линейна по начальным данным, только что сделанное предположение означает, что падающие моды мы вообще исключим из рассмотрения.

Сделанное предположение относится в действительности к классу особенностей начальных данных, закладываемых в теорию горячего Большого взрыва: *a priori* нет никаких оснований предполагать, что Вселенная была с хорошей степенью точности однородной и изотропной в самом своём начале. Мы будем подробно обсуждать эти особенности в Главе 11, а здесь отметим, что вопрос о пренебрежимости падающих мод должен в конечном итоге быть решён путём космологических наблюдений. Существующие наблюдательные данные (относящиеся, правда, только к скалярным возмущениям) оправдывают, в рамках точности этих данных, сделанное предположение. Вкратце дело сводится к следующему. Во-первых, те возмущения, которые вошли под горизонт после рекомбинации, действительно имели к моменту входа малые амплитуды падающих мод: в противном случае эти моды были бы велики на момент рекомбинации, что приводило бы к сильной анизотропии реликтового излучения. Во-вторых, отсутствие заметного вклада падающих мод в возмущения, вошедшие под горизонт до рекомбинации, приводит, как мы увидим, к вполне определённым фазам этих возмущений после входа под горизонт, что подтверждается измерениями анизотропии и поляризации реликтового излучения. Результаты, относящиеся к этому кругу вопросов, мы ещё будем обсуждать подробнее.

▷ *Задача 1. Рассмотрим волны, которые входят под горизонт после рекомбинации. Пусть амплитуды тензорных возмущений с такими длинами волн составляют на момент рекомбинации величину порядка*

$$h \sim 10^{-6} ,$$

что не запрещено наблюдениями. Предположим, что вклады константных и падающих мод в эту величину одинаковы. Какова будет амплитуда падающей моды на момент входа под горизонт для волны с современным импульсом $q_0 = (700 \text{ Мпк})^{-1}$?

¹Её иногда называют, наоборот, растущей модой, поскольку $h(\eta)$ растёт при уменьшении a , то есть при приближении к космологической сингулярности. Мы будем придерживаться термина “падающая мода” для решений за горизонтом, убывающих с ростом масштабного фактора.

▷ *Задача 2.* Пусть на момент входа под горизонт амплитуды падающих мод гравитационных волн с современными импульсами вблизи $(100 \text{ Мпк})^{-1}$ составляют величину порядка 10^{-6} . Рассматривая эволюцию назад во времени, оценить, при какой температуре Вселенная была сильно анизотропной.

3.2.2 Под горизонтом. Сшивка с константной модой

Под горизонтом, то есть при выполнении условия $k \gg a'/a$, для решения уравнения (3.2) можно воспользоваться приёмом, использованным в разделе I.2.3 для случая скалярного поля. Введём новую переменную

$$f(\eta) = a(\eta) \cdot h(\eta)$$

и запишем уравнение (3.2) в виде

$$f'' + k^2 f - \frac{a''}{a} f = 0. \quad (3.5)$$

Масштабный фактор зависит от η степенным образом, поэтому $a''/a = \text{const}/\eta^2$ с константой порядка единицы. Из того, что $k\eta \gg 1$, следует, что последним слагаемым в уравнении (3.5) можно пренебречь, и оно сводится к уравнению для осциллятора. В итоге получаем

$$h(\eta) = \frac{C}{a(\eta)} \cos(k\eta + \alpha), \quad (3.6)$$

где C — постоянная амплитуда, α — некоторая постоянная фаза. Значения этих параметров необходимо найти из сшивки с константной модой (3.3). Сделаем это сначала грубо. Сшивка происходит в момент η_{\times} , когда $k\eta_{\times} \sim 1$. В этот момент функция (3.6) оценивается как $h \sim Ca^{-1}(\eta_{\times})$; приравнивая её амплитуде $h_{(i)}$ константной моды, находим для моды под горизонтом

$$h(\eta) = h_{(i)} \frac{a(\eta_{\times})}{a(\eta)} \cos(k\eta + \alpha).$$

Итак, начиная с момента входа под горизонт тензорное возмущение представляет собой гравитационную волну с амплитудой, падающей как $a^{-1}(\eta)$. Если $h_{(i)}$ одинаковы для всех длин волн, то зависимость от импульса амплитуд h вошедших под горизонт мод определяется зависимостью масштабного фактора от конформного времени. Действительно, поскольку $\eta_{\times} \simeq k^{-1}$, эта зависимость от импульса соответствует зависимости от k величины $a(k^{-1})$: для РД-входящих мод (то есть мод с $k \gg k^{(eq)}$, см. раздел 2.4)

$$h(k) \propto h_{(i)} \frac{1}{k}, \quad k \gg k^{(eq)}, \quad (3.7)$$

а для МД-входящих мод

$$h(k) \propto h_{(i)} \frac{1}{k^2}, \quad k \ll k^{(eq)}. \quad (3.8)$$

Для уточнения этих оценок и нахождения фазы α необходимо решить уравнение (3.2) при $\eta \sim \eta_{\times}$. Для РД-входящих мод в это время справедливо $a'/a = \eta^{-1}$, и уравнение (3.2) сводится к уравнению Бесселя. Его решение, стремящееся к константе

$h_{(i)}$ при $\eta \rightarrow 0$ (ранние времена, мода за горизонтом) имеет вид

$$h(\eta) = h_{(i)} \frac{\sin k\eta}{k\eta} . \quad (3.9)$$

Отметим, что фаза в этом решении определена однозначно, что, конечно, связано со сделанным предположением об отсутствии падающей моды.

▷ Задача 3. Для РД-входящих мод найти решение уравнения (3.2), линейно-независимое от решения (3.9). Убедиться, что это решение соответствует падающей моде (3.4).

Решение (3.9) справедливо лишь при $\eta \sim \eta_\times$. Для того, чтобы найти $h(\eta)$ при последующих временах, запишем (3.9) в виде

$$h(\eta) = h_{(i)} \frac{a(\eta_\times)}{\eta_\times} \frac{\sin k\eta}{ka(\eta)} . \quad (3.10)$$

Здесь мы воспользовались тем, что отношение $a(\eta)/\eta$ не зависит от времени при $\eta \sim \eta_\times$. Это отношение найдём из (2.12b):

$$\frac{a(\eta_\times)}{\eta_\times} = a_0^2 H_0 \sqrt{\Omega_{rad}} \left(\frac{g_{*,0}}{g_*(\eta_\times)} \right)^{1/6} .$$

Поскольку известно, что амплитуда падает как a^{-1} при всех временах после входа под горизонт, в том числе на пылевидной стадии и на современной стадии ускоренного расширения, формула (3.10) даёт искомое выражение для РД-входящей волны под горизонтом. Например, на современной стадии

$$h(\eta_0) = h_{(i)} \frac{H_0 \sqrt{\Omega_{rad}}}{q_0} \left(\frac{g_{*,0}}{g_*(\eta_\times)} \right)^{1/6} \sin k\eta_0 , \quad (3.11)$$

где, как обычно, $q_0 = k/a_0$ — современный физический импульс.

Для МД-входящих мод пересечение горизонта происходит тогда, когда $a(\eta) \propto \eta^2$, и уравнение (3.2) вблизи $\eta = \eta_\times$ имеет вид

$$h'' + \frac{4}{\eta} h' + k^2 h = 0 \quad (3.12)$$

Это уравнение тоже сводится к уравнению Бесселя, решение которого с асимптотической $h(\eta \rightarrow 0) \rightarrow h_{(i)} = \text{const}$ имеет вид

$$\begin{aligned} h(\eta) &= h_{(i)} \cdot 3 \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{(k\eta)^{3/2}} J_{3/2}(k\eta) \\ &= -3h_{(i)} \cdot \frac{1}{(k\eta)^2} \left(\cos k\eta - \frac{\sin k\eta}{k\eta} \right) . \end{aligned}$$

При $k\eta \gg 1$ оно ведёт себя как

$$h(\eta) = -3h_{(i)} \frac{1}{(k\eta)^2} \cos k\eta , \quad (3.13)$$

что снова соответствует (3.6), а также (3.8). Фаза волны снова фиксирована (и отличается на $\pi/2$ от случая РД-входящих мод).

- ▷ Задача 4. То же, что в предыдущей задаче, но для $M\bar{D}$ -входящих мод.
- ▷ Задача 5. Найти выражение для $h(\eta)$ для $M\bar{D}$ -входящих мод при всех временах, в том числе на нынешней стадии ускоренного расширения. Указание: воспользоваться соотношением (2.13), справедливым для пылевидной стадии.
- ▷ Задача 6. Показать, что амплитуды волн, вычисленные согласно (3.10) и (3.13), совпадают по порядку величины в пределе $t_x \rightarrow t_{eq}$, то есть эти формулы дают одинаковую оценку для амплитуды гравитационных волн, входящих под горизонт недалеко по времени от периода перехода от радиационно-доминированной к пылевидной стадии.

Глава 4

Скалярные возмущения: результаты для однокомпонентных сред

В реальной Вселенной среда состоит из нескольких компонент — барионов, фотонов, нейтрино, тёмной материи. На относительно поздних стадиях космологической эволюции отдельные компоненты не испытывают никакого взаимодействия между собой, кроме гравитационного. До рекомбинации такими компонентами являются барион-электрон-фотонная плазма, тёмная материя и нейтрино, а после рекомбинации отщепляются и фотоны. Анализ эволюции возмущений в такой среде довольно сложен, поэтому мы начнём с более простых случаев однокомпонентных сред. Эти случаи представляют, тем не менее, непосредственный интерес: они описывают возмущения в той компоненте среды, которая доминирует на рассматриваемом этапе космологической эволюции. На радиационно-доминированной стадии “главными” являются возмущения плотности релятивистского вещества¹; наоборот, на пылевидной стадии доминируют возмущения нерелятивистской материи. Для однокомпонентной идеальной жидкости основными являются уравнения (2.71), (2.73), причём указание “tot” в них можно опустить. Уравнение (2.72) можно воспринимать как соотношение, определяющее потенциал скоростей v через найденный из решения уравнений (2.71), (2.73) гравитационный потенциал Φ , а уравнения (2.74), (2.75) в случае однокомпонентной среды являются следствиями (2.71), (2.72) и (2.73).

4.1 Общие уравнения

Запишем уравнения (2.71), (2.73) для случая однокомпонентной среды в импульсном представлении:

$$k^2\Phi + 3\frac{a'}{a}\Phi' + 3\frac{a'^2}{a^2}\Phi = -4\pi Ga^2 \delta\rho \quad (4.1)$$

$$\Phi'' + 3\frac{a'}{a}\Phi' + \left(2\frac{a''}{a} - \frac{a'^2}{a^2}\right)\Phi = 4\pi Ga^2 \delta p \quad (4.2)$$

В этом разделе мы рассмотрим среду с уравнением состояния для возмущений

$$\delta p = u_s^2 \delta\rho . \quad (4.3)$$

¹Особый случай — возмущения постоянной кривизны, о которых пойдёт речь в разделах 6.4 и 6.5.

где u_s — скорость звука в среде, которую мы будем пока считать произвольной.

Прибавляя к уравнению (4.2) уравнение (4.1), умноженное на u_s^2 , придём к уравнению (в импульсном представлении), содержащему только гравитационный потенциал,

$$\Phi'' + 3 \frac{a'}{a} (1 + u_s^2) \Phi' + \left[2 \frac{a''}{a} - \frac{a'^2}{a^2} (1 - 3u_s^2) \right] \Phi + u_s^2 k^2 \Phi = 0 \quad (4.4)$$

Поведение решений вновь, как и в случае тензорных возмущений, зависит от соотношения между физическим импульсом $q(\eta) = k/a(\eta)$ и параметром Хаббла $H(\eta)$. Следует, однако, сделать уточнение: существенную роль в эволюции гравитационного потенциала, как видно из (4.4), играет не только сам импульс, но и комбинация $u_s q$. А именно, при

$$u_s q = \frac{u_s k}{a} \ll H \quad (4.5)$$

последнее слагаемое в (4.4) пренебрежимо мало, а в противоположном случае оно важно. Условие (4.5) можно представить в виде

$$\lambda \gg u_s H^{-1},$$

где λ — физическая длина волны. Комбинацию $u_s H^{-1}(\eta)$ называют *звуковым горизонтом*; по порядку величины она равна расстоянию, которое проходит звук в среде за время жизни Вселенной на момент η .

Заметим, что с помощью уравнений (2.3) и (2.4) величина в квадратной скобке в (4.4) может быть выражена через фоновые давление и плотность энергии,

$$2 \frac{a''}{a} - \frac{a'^2}{a^2} (1 - 3u_s^2) = -8\pi G a^2 (p - u_s^2 \rho). \quad (4.6)$$

Будем считать, что темп расширения Вселенной определяется самой рассматриваемой средой (что заведомо справедливо для однокомпонентной среды), и что параметр w , введённый в (2.76), равен u_s^2 , то есть

$$p = u_s^2 \rho,$$

и

$$\frac{\delta p}{p} = \frac{\delta \rho}{\rho}. \quad (4.7)$$

Равенство $w = u_s^2$ в реальной Вселенной справедливо на большинстве стадий эпохи горячего Большого взрыва, за исключением переходных периодов от радиационно-доминированной к пылевидной стадии и от пылевидной стадии к современной стадии ускоренного расширения, а также периода незадолго до рекомбинации; при этом не только нарушается это равенство, но и появляется зависимость величин w и u_s^2 от времени (см. обсуждение в разделе 6.2).

При $w = u_s^2$ выражение (4.6) равно нулю, и уравнение (4.4) упрощается:

$$\Phi'' + 3 \frac{a'}{a} (1 + u_s^2) \Phi' + u_s^2 k^2 \Phi = 0. \quad (4.8)$$

Отсюда видно, что при выполнении неравенства (4.5), то есть для волн за звуковым горизонтом, снова, как и в разделе 3.2.1, имеется константное решение,

$$\Phi = \Phi_{(i)} = \text{const}, \quad (4.9)$$

и решение, которое растёт при $\eta \rightarrow 0$ и соответствует падающей моде. Согласно сделанному в разделе 3.2.1 предположению, падающая мода для реальных возмущений отсутствует, и (4.9) представляет собой начальное условие для скалярных возмущений в однокомпонентной среде. При этом возмущения плотности для мод за звуковым горизонтом определяются соотношением (4.1). Введём относительное возмущение

$$\delta \equiv \frac{\delta\rho}{\rho} . \quad (4.10)$$

Тогда из (4.1) и (4.9) получим, с учётом (2.3), что для мод за горизонтом δ также не зависит от времени,

$$\delta = \delta_{(i)} = -2\Phi_{(i)} . \quad (4.11)$$

Учитывая, что физическая скорость среды равна $\partial_i v$, из (2.72) можно заключить, что скорость среды мала для мод за горизонтом. Подчеркнём, что равенство (4.11) выполняется только тогда, когда $k \ll a'/a$, то есть для волн за обычным, а не звуковым горизонтом. Это обстоятельство особенно существенно для сред с малой скоростью звука, поскольку для таких сред звуковой горизонт имеет заметно меньший размер по сравнению с обычным горизонтом. Важным примером здесь служит нерелятивистское вещество (холодная тёмная материя, барионы после рекомбинации).

▷ *Задача 1. Найти связь между скоростью среды и значением $\Phi_{(i)}$ для мод за горизонтом. Выразить эту связь в терминах физических величин. Убедиться, что малость скорости по сравнению с $\Phi_{(i)}$ имеет место только при $q \ll H$, то есть тогда, когда мода находится за обычным, а не звуковым горизонтом.*

Поведение мод под горизонтом существенно зависит от уравнения состояния среды. В последующих двух разделах мы рассмотрим два наиболее важных примера эволюции скалярных возмущений в однокомпонентной среде.

4.2 Релятивистское вещество

Первый пример — возмущения плотности релятивистского вещества и связанные с ними возмущения метрики в радиационно-доминированной Вселенной. В этом случае $a \propto \eta$, $w = u_s^2 = 1/3$, и уравнение (4.8) приводится к виду

$$\Phi'' + \frac{4}{\eta}\Phi' + u_s^2 k^2 \Phi = 0 .$$

Такое уравнение нам уже встречалось (см. (3.12)); его решение с начальным условием (4.9) имеет вид

$$\begin{aligned} \Phi(\eta) &= \Phi_{(i)} \cdot 3\sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{(u_s k \eta)^{3/2}} J_{3/2}(u_s k \eta) \\ &= -3\Phi_{(i)} \cdot \frac{1}{(u_s k \eta)^2} \left[\cos(u_s k \eta) - \frac{\sin(u_s k \eta)}{u_s k \eta} \right] . \end{aligned} \quad (4.12)$$

После входа под звуковой горизонт (то есть при $u_s k \eta \gg 1$) оно описывает волну с падающей амплитудой и вполне определённой фазой

$$\Phi(\eta) = -3\Phi_{(i)} \frac{1}{(u_s k \eta)^2} \cos(u_s k \eta) . \quad (4.13)$$

При вычислении возмущений плотности энергии под горизонтом главную роль играет первое слагаемое в левой части (4.1), и мы получаем

$$\delta\rho_{rad}(\eta) = -\frac{1}{4\pi G}\frac{k^2}{a^2}\Phi(\eta).$$

Воспользуемся уравнением Фридмана (2.3), учтём, что на радиационно-доминированной стадии

$$H^2 = \frac{1}{\eta^2 a^2},$$

и подставим $u_s^2 = 1/3$. В результате получим из (4.13) окончательное выражение для относительного возмущения (4.10) под горизонтом

$$\delta_{rad}(\eta) = 6\Phi_{(i)} \cos(u_s k\eta) \quad (4.14)$$

$$= -3\delta_{rad,(i)} \cos(u_s k\eta), \quad (4.15)$$

где мы воспользовались (4.11). Видно, что возмущения плотности релятивистского вещества под горизонтом испытывают акустические осцилляции. Их амплитуда не растёт (но и не убывает) на стадии доминирования этого вещества. Из-за расширения Вселенной явления типа джинсовской неустойчивости в радиационно-доминированной Вселенной не происходит.

Подставляя решение (4.12) в уравнение (2.72), получим для возмущений скорости релятивистского вещества

$$kv = \frac{3\Phi_{(i)}}{u_s} \left(\frac{\sin(u_s k\eta)}{(u_s k\eta)^2} - \frac{\cos(u_s k\eta)}{u_s k\eta} - \frac{1}{2} \sin(u_s k\eta) \right).$$

Напомним (см. раздел 2.2.2), что $\mathbf{v} = \mathbf{kv}$ являются физическими скоростями. Как и ожидалось, для мод за горизонтом, то есть при $k\eta \ll 1$, скорости малы:

$$kv = -\frac{1}{2}\Phi_{(i)}k\eta \ll \Phi_{(i)}.$$

Для мод под горизонтом справедливо $k\eta \gg 1$, и мы получаем

$$kv = -\frac{3\Phi_{(i)}}{2u_s} \sin(u_s k\eta). \quad (4.16)$$

Таким образом, возмущения скорости релятивистского вещества подвержены акустическим осцилляциям, как и возмущения плотности. Из сравнения (4.14) с (4.16) видно, что, как и положено для акустических волн, фазы скорости и плотности сдвинуты друг относительно друга на $\pi/2$. Амплитуда возмущений скорости отличается от амплитуды возмущений плотности на фактор $1/(4u_s)$.

На самом деле факт осцилляций подгоризонтных мод в релятивистском веществе непосредственно следует из уравнения непрерывности (2.74) и уравнения Эйлера (2.75). Для однокомпонентной релятивистской среды с $v_s^2 = w = 1/3$ эти уравнения имеют вид

$$\begin{aligned} \delta' - \frac{4}{3}k^2 v &= 4\Phi', \\ v' + \frac{1}{4}\delta &= -\Phi. \end{aligned} \quad (4.17)$$

Под горизонтом гравитационный потенциал падает, поэтому система (4.17) приводит к уравнению свободного осциллятора с частотой $k/\sqrt{3}$; различие в амплитудах между потенциалом скоростей и контрастом плотности, $kv/\delta \sim \sqrt{3}/4$ и сдвиг на $\pi/2$ в фазах также видны из системы (4.17).

4.3 Нерелятивистское вещество

Для нерелятивистского вещества давление пренебрежимо мало, скорость звука можно положить равной нулю, и в уравнении (4.8) последнее слагаемое отсутствует во все. В этом смысле все моды всегда находятся за звуковым горизонтом. Продолжая считать, что в качестве начального данного выступает константная мода, получаем, что гравитационный потенциал не зависит от времени вовсе,

$$\Phi(\eta) = \Phi = \text{const} .$$

Из (4.1) следует, что возмущение плотности имеет вид

$$\delta\rho = -\frac{1}{4\pi G a^2} \left(k^2 + \frac{12}{\eta^2} \right) \Phi , \quad (4.18)$$

где мы учли, что на МД-стадии выполнено $a \propto \eta^2$. За горизонтом доминирует второе слагаемое в скобках, и $\delta\rho \propto a^{-3}$. Сама плотность энергии ρ также пропорциональна a^{-3} , поэтому относительные возмущения постоянны за горизонтом,

$$\delta = \delta_{(i)} = -2\Phi , \quad k\eta \ll 1 .$$

При получении последнего равенства мы воспользовались тем, что $H = \dot{a}/a^2 = 2/(a\eta)$ и учли уравнение Фридмана. Под горизонтом доминирует первое слагаемое в скобках в (4.18), и контраст плотности растёт со временем, причём довольно быстро:

$$\delta \propto a(\eta) . \quad (4.19)$$

Это — основной механизм роста возмущений плотности, который в расширяющейся Вселенной выполняет роль джинсовской неустойчивости.

Из (4.18) и уравнения Фридмана следует, что на пылевидной стадии глубоко под горизонтом

$$\delta = -\frac{2}{3} \frac{q^2(\eta)}{H^2(\eta)} \Phi = \frac{1}{3} \frac{q^2(\eta)}{H^2(\eta)} \delta_{(i)} = \frac{1}{3} \frac{a(\eta)}{a_x} \delta_{(i)} , \quad k\eta \gg 1 , \quad (4.20)$$

где обозначение x , как всегда, относится к моменту входа под горизонт, когда $q(\eta_x) = H(\eta_x)$. Видно, что моды с большими длинами вырастают слабее, что, конечно, связано с их более поздним входом под горизонт.

Приведённый здесь анализ почти² буквально работает для реальных возмущений холодной тёмной материи, входящих под горизонт на пылевидной стадии. Самые короткие из таких возмущений имеют современные размеры масштаба сотен мегапарсек, см. (2.83), и для них из (4.20) имеем сегодня

$$\delta_{CDM,0} = \frac{1}{3} (1 + z_{eq}) \delta_{CDM,(i)} , \quad (4.21)$$

²Оговорка здесь связана с тем, что начиная с $z \sim 2$ существенную роль в расширении Вселенной играет тёмная энергия, причём начиная с $z \approx 0.85$ Вселенная расширяется с ускорением, см. раздел I.4.3. Мы рассмотрим эволюцию возмущений нерелятивистского вещества на стадии экспоненциального расширения в разделе 4.4. Ещё одно неучтённое здесь обстоятельство состоит в том, что помимо тёмной материи на рассматриваемой здесь стадии нерелятивистскими являются и барионы, которые до рекомбинации находятся в равновесии с фотонами. Последний эффект довольно существенен, поскольку отношение плотностей массы барионов и тёмной материи составляет $\Omega_B/\Omega_{CDM} \approx 1/5$; он будет рассмотрен в разделе 7.1.

где $(1 + z_{eq}) \simeq 3000$ (в действительности оценка (4.21) несколько завышена из-за эффекта тёмной энергии). Начальные возмущения для обсуждаемых мод составляют величину порядка $\delta_{CDM,(i)} \simeq 3 \cdot 10^{-5}$ (см. разделы 5.4 и 6.1), поэтому современный контраст плотности на масштабах сотен мегапарсек и более мал, $\delta \lesssim 0.03$. Это согласуется с наблюдениями: современная Вселенная имеет высокую степень однородности на таких масштабах.

Для флуктуаций скорости получим из (2.72), полагая $\Phi(\eta) = \text{const}$,

$$kv = -\frac{\Phi}{3}k\eta . \quad (4.22)$$

Мы видим, что как и ожидалось, флуктуаций скорости малы для мод за горизонтом, $kv \ll \Phi_{(i)}$. Как и возмущения материи (4.19), флуктуации скорости растут на пылевидной стадии, однако рост происходит медленнее, $kv \propto \sqrt{a}$.

4.4 Возмущения плотности нерелятивистского вещества на Л-доминированной стадии

Современный состав Вселенной является простейшим примером многокомпонентной среды: темп расширения определяется в значительной степени плотностью тёмной энергии, а возмущения имеются в другой компоненте — нерелятивистском веществе. Рассмотрим в связи с этим поведение возмущений нерелятивистской материи на Л-доминированной стадии, для которой зависимость масштабного фактора от конформного времени даётся формулой (2.8). Считая Л-член постоянным (что справедливо для энергии вакуума), имеем $\delta\rho_L = \delta r_L = 0$. Соотношение (4.7) теперь не имеет места, и необходимо пользоваться непосредственно уравнением (4.2). С учётом (2.8) это уравнение на Л-доминированной стадии имеет вид

$$\Phi'' - \frac{3}{\eta}\Phi' + \frac{3}{\eta^2}\Phi = 0 \quad (4.23)$$

Решения этого уравнения ведут себя как

$$\Phi \propto \eta \propto \frac{1}{a} \quad \text{и} \quad \Phi \propto \eta^3 \propto \frac{1}{a^3} .$$

Воспользуемся теперь (4.1) для мод под горизонтом и учтём, что для пыли $\rho_M \propto a^{-3}$. Оставляя только первое решение для гравитационного потенциала (второе быстро падает), мы видим, что возмущения плотности не растут: для мод под горизонтом справедливо

$$\delta_M \propto a^3 \frac{k^2}{a^2} \Phi = \text{const} .$$

Таким образом, при переходе с пылевидной на Л-доминированную стадию рост возмущений прекращается. Если современное ускоренное расширение Вселенной действительно обусловлено ненулевой космологической постоянной, то процесс формирования структур из малых первичных возмущений близок к окончанию и больше никогда не начнётся вновь: структур заметно больших масштабов, чем мы наблюдаем сегодня, никогда не появится.

▷ Задача 2. Найти закон эволюции возмущений нерелятивистского вещества в гипотетической Вселенной, в которой доминирующей при расширении является отрицательная пространственная кривизна.

▷ Задача 3. Что происходит с флуктуациями скорости пыли и радиации в эпоху доминирования космологической постоянной?

Уравнение (4.23) справедливо глубоко на Λ -доминированной стадии, когда параметр Хаббла постоянен. Эта ситуация не является реалистической для нашей Вселенной, где всё ещё велика доля нерелятивистской материи в плотности энергии. В нашей Вселенной зависимость масштабного фактора от η соответствует соотношению (2.14). Уравнение для гравитационного потенциала по-прежнему имеет вид (4.2) с $\delta p = 0$. Решая это уравнение численно, можно найти поведение гравитационного потенциала в поздней Вселенной, $z \lesssim 2$. Удобно ввести следующее представление:

$$\Phi(z, \mathbf{k}) \equiv g(z) \Phi_{MD}(\mathbf{k}), \quad (4.24)$$

где $\Phi_{MD}(\mathbf{k})$ обозначает гравитационный потенциал глубоко на пылевидной стадии, когда он оставался постоянным и зависел только от импульса. Ясно, что функция $g(z)$ удовлетворяет тому же уравнению, что и $\Phi(z, \mathbf{k})$, то есть уравнению (4.2). При этом начальные данные для неё задаются глубоко на пылевидной стадии и имеют вид

$$g(z \rightarrow \infty) = 1, \quad \frac{dg}{dz}(z \rightarrow \infty) = 0. \quad (4.25)$$

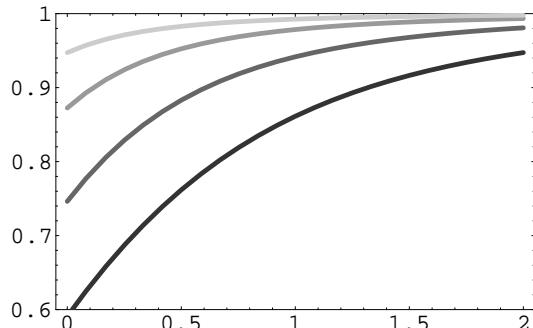


Рис. 4.1: Функция $g(z)$ для пространственно-плоских Вселенных с различными значениями космологической постоянной: $\Omega_\Lambda = 0.25, 0.5, 0.75, 0.9$; большим значениям соответствуют более тёмные линии, лежащие ниже.

В заключение раздела отметим, что если тёмная энергия не совпадает с космологической постоянной, а имеет уравнение состояния $p_{DE} = w_{DE}\rho_{DE}$ с, вообще говоря, зависящим от времени $w_{DE} \neq -1$, то в ней самой имеются неоднородности. В этом случае гравитационные потенциалы в поздней Вселенной будут отличаться от тех, что получаются в модели с космологической постоянной. В разрешённой области значений w_{DE} этот эффект мал, и мы его в этой книге не рассматриваем.

На рис. 4.1 представлены результаты численного интегрирования уравнения (4.2) с $\delta p = 0$ и начальными условиями (4.25) для нескольких значений параметра Ω_Λ . Видно, что для реалистических значений Ω_Λ функция $g(z)$ несильно отличается от единицы. Для $\Omega_\Lambda = 0.76$ получаем

$$g(0) \approx 0.74. \quad (4.26)$$

Глава 5

Первичные скалярные возмущения в реальной Вселенной

В среде, состоящей из нескольких компонент, гравитационное взаимодействие между ними существенным образом влияет на поведение каждой. Это в полной мере относится к нашей Вселенной. В связи с этим анализ реальных скалярных возмущений является довольно сложным. В этой Главе мы рассмотрим круг вопросов, относящихся к постановке начальных данных: какие величины адекватно характеризуют первичные скалярные возмущения во Вселенной, заполненной многокомпонентной средой, и какие типы этих возмущений в принципе могли бы в ней существовать. При этом, как и раньше, мы будем считать, что падающие моды отсутствуют. В конце Главы мы сформулируем современные представления о том, каковы на самом деле были первичные возмущения в нашей Вселенной, и в общих чертах обрисуем их дальнейшую эволюцию. Существенно более подробный анализ эволюции скалярных возмущений в реальной Вселенной мы проведём в последующих Главах.

Скалярные возмущения описываются основной системой уравнений (2.71) – (2.75), которую мы запишем ещё раз в импульсном представлении для дальнейших ссылок:

— линеаризованные уравнения Эйнштейна

$$k^2\Phi + 3\frac{a'}{a}\Phi' + 3\frac{a'^2}{a^2}\Phi = -4\pi Ga^2 \cdot \sum_{\lambda} \delta\rho_{\lambda}, \quad (5.1)$$

$$\Phi' + \frac{a'}{a}\Phi = -4\pi Ga^2 \cdot \sum_{\lambda} [(\rho + p)v]_{\lambda}, \quad (5.2)$$

$$\Phi'' + 3\frac{a'}{a}\Phi' + \left(2\frac{a''}{a} - \frac{a'^2}{a^2}\right)\Phi = 4\pi Ga^2 \cdot \sum_{\lambda} \delta p_{\lambda}; \quad (5.3)$$

— линеаризованные законы сохранения тензора энергии-импульса

$$\delta\rho'_{\lambda} + 3\frac{a'}{a}(\delta\rho_{\lambda} + \delta p_{\lambda}) - (\rho_{\lambda} + p_{\lambda})(k^2v_{\lambda} + 3\Phi') = 0, \quad (5.4)$$

$$[(\rho_{\lambda} + p_{\lambda})v_{\lambda}]' + 4\frac{a'}{a}(\rho_{\lambda} + p_{\lambda})v_{\lambda} + \delta p_{\lambda} + (\rho_{\lambda} + p_{\lambda})\Phi = 0. \quad (5.5)$$

Здесь λ нумерует компоненты среды. В дальнейшем мы будем использовать тот факт, что с хорошей точностью барион-фотонная компонента до рекомбинации представляет собой единую среду; для неё мы будем использовать обозначение $\lambda = B\gamma$. Обозначение $\lambda = CDM$ относится к тёмной материи и т.д. Напомним (см. Главу 2),

что не все уравнения выписанной системы независимы: для n -компонентной среды имеется $2n + 3$ уравнений на $2n + 1$ неизвестную.

В дальнейшем нам часто будет удобно использовать относительные возмущения плотности $\delta_\lambda = \delta\rho_\lambda/\rho_\lambda$ и записать для каждой компоненты

$$\delta\rho_\lambda = \rho_\lambda\delta_\lambda, \quad \delta p_\lambda = u_{s,\lambda}^2\delta\rho_\lambda = u_{s,\lambda}^2\rho_\lambda\delta_\lambda, \quad p_\lambda = w_\lambda\rho_\lambda.$$

В этих терминах линеаризованные законы сохранения (5.4) и (5.5) имеют вид

$$\delta'_\lambda + 3\frac{a'}{a}(u_{s,\lambda}^2 - w_\lambda)\delta_\lambda - (1 + w_\lambda)k^2v_\lambda = 3(1 + w_\lambda)\Phi' \quad (5.6)$$

$$[(1 + w_\lambda)v_\lambda]' + \frac{a'}{a}(1 - 3w_\lambda)(1 + w_\lambda)v_\lambda + u_{s,\lambda}^2\delta_\lambda = -(1 + w_\lambda)\Phi \quad (5.7)$$

Здесь мы воспользовались соотношением (2.5) и учли возможность того, что параметр w_λ может зависеть от времени, а квадрат скорости звука $u_{s,\lambda}^2 = \delta p_\lambda/\delta\rho_\lambda$ может не совпадать с параметром $w_\lambda = p_\lambda/\rho_\lambda$.

5.1 Адиабатическая мода и моды постоянной кривизны

Начальные условия для скалярных возмущений ставятся глубоко на радиационно-доминированной стадии космологической эволюции. При этом моды возмущений с интересующими нас импульсами находятся далеко за горизонтом. Для мод, представляющих интерес с точки зрения космологии, такая ситуация всё ещё имеет место при температурах, скажем, порядка 100 кэВ, см. раздел 2.4. Поэтому при обсуждении начальных данных для космологических возмущений барионы и холодную тёмную материю всегда можно считать нерелятивистскими, а нейтрино и тёмную материю — не взаимодействующими с барион-электрон-фотонной плазмой. В дальнейшем, говоря о модах за горизонтом, мы будем часто рассматривать формальный предел $\eta \rightarrow 0$, хотя в свете сказанного это физически соответствует далеко не самым ранним этапам эволюции Вселенной.

В предположении об отсутствии падающей моды возмущения за горизонтом, как мы уже видели и ещё увидим в дальнейшем, зависят от времени слабо¹. Считая, что космическая среда не содержит других компонент, кроме барион-электрон-фотонной плазмы, тёмной материи и нейтрино, её можно локально охарактеризовать четырьмя величинами: температурой (или плотностью энтропии s), плотностью барионного числа n_B , плотностью частиц тёмной материи n_{CDM} и плотностью лептонного числа n_L (при не слишком высоких температурах n_L совпадает с избытком нейтрино над антинейтрино²). Соответственно, для описания начальных данных для космологических возмущений необходимо задать эти четыре величины как функции координат в фиксированный момент времени (в конформной ньютоновской калибровке ньютонов потенциал выражается через эти четыре величины). Удобно разделить возможные начальные данные, и соответственно моды возмущений, на линейно независимые

¹Здесь и ниже мы несколько упрощаем ситуацию, не рассматривая относительного движения нейтринной и барион-фотонной компонент, см. конец раздела.

²С учётом нейтринных осцилляций эти избытки для всех типов нейтрино одинаковы к моменту закалки нейтрино, см. раздел I.7.2.

части: *адиабатическую моду и моды постоянной кривизны* (adiabatic mode and isocurvature modes). Разумеется, для осмысленности такого разделения важно, что речь идёт о линейной теории: решения линейных уравнений линейны по начальным данным.

Адиабатическая мода соответствует ситуации, когда главная на радиационно-доминированной стадии компонента — релятивистское вещество — имеет ненулевые возмущения плотности энергии, то есть температура среды зависит от точки пространства³. При этом состав космической среды является везде одинаковым. Это означает, что от точки пространства не зависят сохраняющиеся величины, характеризующие барионную асимметрию и плотность тёмной материи, n_B/s и n_{CDM}/s , см. раздел I.5.2. Если есть лептонная асимметрия, то не зависит от точки пространства и n_L/s . Итак, для адиабатической моды далеко за горизонтом (формально, при $\eta \rightarrow 0$)

$$\delta\left(\frac{n_B}{s}\right) = \delta\left(\frac{n_{CDM}}{s}\right) = \delta\left(\frac{n_L}{s}\right) = 0 .$$

Мы дадим несколько более общее определение адиабатической моды в разделе 5.2.

Наоборот, для барионной моды и CDM-моды постоянной кривизны глубоко на радиационно-доминированной стадии возмущения релятивистского вещества отсутствуют, а имеются неоднородности состава (для нейтринных мод постоянной кривизны такое определение требует уточнения; мы скажем о них несколько слов в конце раздела). В случае неоднородности барионного числа (при однородной плотности тёмной материи и плотности лептонного числа) говорят о барионной моде постоянной кривизны, и т.д. Поскольку фоновые значения n_B/s и n_{CDM}/s постоянны в пространстве и во времени, барионная и CDM-моды постоянной кривизны в формальном пределе $\eta \rightarrow 0$ характеризуются следующими свойствами:

$$\begin{aligned} \text{Барионная мода постоянной кривизны: } & \delta_B \neq 0 , \quad \delta_{CDM} = 0 , \quad \delta T = 0 , \\ \text{CDM мода постоянной кривизны: } & \delta_B = 0 , \quad \delta_{CDM} \neq 0 , \quad \delta T = 0 , \end{aligned}$$

где

$$\delta_B = \frac{\delta n_B}{n_B} = \frac{\delta \rho_B}{\rho_B} , \quad \delta_{CDM} = \frac{\delta n_{CDM}}{n_{CDM}} = \frac{\delta \rho_{CDM}}{\rho_{CDM}} .$$

Название “моды постоянной кривизны” связано с тем, что барионы и тёмная материя вносят малый (нулевой в формальном пределе $\eta \rightarrow 0$) вклад в плотность энергии на радиационно-доминированной стадии, поэтому генерируемые ими гравитационные потенциалы также малы. Такое наблюдение позволяет сформулировать общее определение мод постоянной кривизны в конформной ньютоновой калибровке, подходящее и для нейтринных мод: моды постоянной кривизны таковы, что за горизонтом в них отсутствуют гравитационные потенциалы. Калибровочно-инвариантное определение мы дадим в разделе 5.2.

Как мы увидим в Главе 6, адиабатическая мода и моды постоянной кривизны эволюционируют существенно по-разному. С этим связана возможность определения соответствующих вкладов в скалярные возмущения путём космологических наблюдений. Существующие наблюдательные данные согласуются с тем, что во Вселенной

³Такое определение не является калибровочно-инвариантным: всегда можно выбрать в качестве гиперповерхностей постоянного времени такие, на которых температура однородна. Такая калибровка, однако, не совпадает с конформной ньютоновой. Мы рассмотрим калибровочно-инвариантную характеристику адиабатической моды в разделе 5.2.

имелась только адиабатическая мода; вклад барионной моды и СДМ-моды постоянной кривизны ограничен на уровне нескольких процентов, см. раздел 5.4.

Адиабатическая мода наиболее естественна и с физической точки зрения. Если тёмная материя и барионная асимметрия образовались в разных областях текущего хаббловского размера в результате одних и тех же физических процессов (например, тех, которые мы обсуждали в Главах I.9 и I.11), то вполне естественно ожидать, что состав среды будет одинаков в разных частях, что и соответствует адиабатической моде. Это соображение заведомо применимо к механизмам генерации тёмной материи и барионной асимметрии, которые работают на стадии горячего Большого взрыва: до образования тёмной материи и барионной асимметрии космическая плазма находилась в состоянии термодинамического (в том числе химического) равновесия, среда была однокомпонентной, и в ней по определению присутствовала только адиабатическая мода; поскольку физические законы в различных частях Вселенной были одни и те же, постольку в них генерировались одни и те же значения n_B/s и n_{CDM}/s , то есть моды постоянной кривизны не возникали. Возможны, однако, и исключения. Например, в случае реализации механизма Аффлека–Дайна генерации барионной асимметрии (см. раздел I.11.6) начальные значения фигурирующего в нём скалярного поля могут быть, вообще говоря, разными в разных областях (скажем, благодаря эффектам, характерным для инфляционной стадии, см. Главу 14), так что барионная асимметрия n_B/s может быть неоднородной в пространстве. Другие примеры мы приведём в разделах 14.2.2 и 14.4. Обнаружение примеси какой-либо из мод постоянной кривизны было бы важнейшим открытием в космологии и физике частиц: оно свидетельствовало бы о том, что генерация тёмной материи и/или асимметрии между веществом и антивеществом (барионной или лептонной асимметрии) происходило на стадии эволюции Вселенной, предшествовавшей горячей стадии.

В заключение этого раздела обсудим вкратце возможность существования нейтринных мод постоянной кривизны. В принципе таких мод могло быть две [4]: для первой моды за горизонтом локальное нейтрино-фотонное отношение изменяется в пространстве, но возмущения этих компонент согласованы так, что не создают локальной кривизны. Эта мода получила название моды плотности нейтрино (neutrino density isocurvature mode). Для второй моды, получившей название моды скорости нейтрино (neutrino velocity isocurvature mode), играют роль возмущения потенциалов скоростей нейтрино и барион-фотонной компоненты. Они не совпадают между собой и изменяются в пространстве так, что суммарная скорость среды оказывается везде нулевой.

Нейтрино находятся в тепловом равновесии с барион-электрон-фотонной плазмой вплоть до температур порядка нескольких МэВ, см. Главу I.7. Поэтому если во Вселенной нет большой лептонной асимметрии, то начальные данные для возмущений нейтринной компоненты автоматически совпадают с начальными данными для фотонов, и амплитуды нейтринных мод постоянной кривизны равны нулю. Одна из нейтринных мод постоянной кривизны — мода плотности — могла бы в принципе быть заметной при значительной лептонной асимметрии Вселенной. Однако при вполне разумном предположении о том, что во Вселенной достигались температуры выше 100 ГэВ, можно ожидать, что лептонная асимметрия по порядку величины не должна превышать барионной, то есть

$$\frac{n_L}{s} \lesssim 10^{-9}. \quad (5.8)$$

Это следует из того обстоятельства, что при $T \gtrsim 100$ ГэВ лептонное число может

переходить в барионное и наоборот, см. раздел I.11.2.1. Отметим, что ограничение (5.8) может не выполняться в некоторых расширениях Стандартной модели физики частиц, например, в моделях со стерильными нейтрино. В любом случае, довольно сильные ограничения на лептонную асимметрию вытекают из сравнения теории и наблюдений, относящихся к первичному нуклеосинтезу, см. раздел I.7.2. Поэтому мода плотности нейтрино, если она вообще существует, скорее всего крайне мала. Ещё труднее представить себе генерацию моды скорости нейтрино. В этой книге мы нейтринные моды постоянной кривизны рассматривать не будем.

5.2 Адиабатическая мода за горизонтом

Как мы обсуждали в Главе 2.4, режим за горизонтом интуитивно соответствуют картине независимо расширяющихся однородных (в случае скалярных возмущений — изотропных) “вселенных” с несколько различающимися параметрами. В случае адиабатической моды состав среды в этих “вселенных” одинаков, они различаются только плотностью энергии и, соответственно, масштабным фактором. Эвристически это можно понимать так, что разные области Вселенной с размерами больше текущего горизонта эффективно начали эволюционировать в несколько разные моменты времени; некоторые области отстают, а некоторые опережают усреднённую эволюцию Вселенной⁴.

На основании этих соображений можно ожидать, что в случае адиабатической моды за горизонтом для каждой независимой компоненты среды выполняется

$$\delta\rho_\lambda = \rho'_\lambda \cdot \epsilon \quad (5.9)$$

$$\delta p_\lambda = p'_\lambda \cdot \epsilon, \quad (5.10)$$

где $\epsilon(\mathbf{x}, \eta)$ — единая для всех компонент функция времени, слабо меняющаяся в пространстве. Эвристическая, хотя и неточная интерпретация функции ϵ — это локальное конформное время задержки эволюции Вселенной в точке \mathbf{x} (в масштабах текущего горизонта ϵ практически постоянна, так что речь в действительности идёт не о точках, а об областях с размерами, превышающими текущий горизонт). Если во Вселенной имеется локальное термодинамическое равновесие для горячей компоненты, то температура меняется в пространстве, а вместе с ней меняются плотность энергии и давление. При фиксированном составе среды

$$\begin{aligned} \delta\rho_\lambda(\mathbf{x}, \eta) &= \frac{\partial\rho_\lambda}{\partial T} \delta T(\mathbf{x}, \eta) \\ \delta p_\lambda(\mathbf{x}, \eta) &= \frac{\partial p_\lambda}{\partial T} \delta T(\mathbf{x}, \eta), \end{aligned}$$

что как раз и соответствует (5.9), причём

$$\epsilon(\mathbf{x}, \eta) = \frac{\delta T(\mathbf{x}, \eta)}{T'} . \quad (5.11)$$

Подчеркнём, однако, что соотношения (5.9), (5.10) не опираются на предположение о термодинамическом равновесии для какой-либо компоненты среды; они, по существу, являются *определением* адиабатической моды в общем случае.

⁴Такая картина не является калибровочно-инвариантной, однако она верна на качественном уровне в конформной ньютоновской калибровке.

На первый взгляд далеко не очевидно, что подстановка (5.9), (5.10) совместна с основной системой уравнений (5.1) — (5.5), особенно с учётом того факта, что уравнения (5.4) и (5.5) должны выполняться для каждой компоненты среды по отдельности. В частности, нетривиальное обстоятельство состоит в том, что имеется всего две неизвестных функции ϵ и Φ , а уравнений ковариантного сохранения в принципе может быть много. Убедимся тем не менее в том, что подстановка (5.9), (5.10) действительно приводит к решению системы (5.1) — (5.5). Прежде всего, (5.5) можно рассматривать как уравнение, определяющее потенциал скоростей v_λ для каждой компоненты. В уравнение (5.4) он входит в комбинации $k^2 v_\lambda$. Нас интересует мода за горизонтом, что означает, что мы имеем право пренебречь импульсами и работать в формальном пределе $k \rightarrow 0$. Поэтому значения v_λ несущественны при решении уравнений (5.1), (5.3) и (5.4). Рассмотрим теперь уравнения сохранения (5.4), которые должны выполняться для каждой из компонент. Учитывая соотношение (2.5), которое также справедливо для каждой из компонент среды, получим, что для каждой из компонент закон сохранения (5.4) сводится в пределе $k \rightarrow 0$ к одному и тому же уравнению

$$\Phi' = - \left(\frac{a'}{a} \epsilon \right)',$$

откуда

$$\Phi = - \frac{a'}{a} \epsilon - \zeta, \quad (5.12)$$

где $\zeta(\mathbf{k})$ не зависит от времени, но зависит от конформного импульса \mathbf{k} . Из (5.9) и (2.5) следует, что ζ может быть представлена в виде

$$\zeta = -\Phi + \frac{\delta \rho_{tot}}{3(\rho_{tot} + p_{tot})}. \quad (5.13)$$

Итак, для адиабатической моды за горизонтом комбинация, определяемая равенством (5.13), не зависит от времени. Это — очень общее утверждение, справедливое независимо от конкретных характеристик среды. Важно отметить, что при изменении соотношений между различными компонентами (например, при переходе от радиационно-доминированной к пылевидной стадии) отдельные слагаемые в (5.13), вообще говоря, изменяются; постоянной остаётся только ζ .

▷ Задача 1. Используя основные уравнения (5.1) — (5.5), выразить производную по времени $\dot{\zeta} \equiv \partial \zeta / \partial t$ через гравитационный потенциал, параметр Хаббла, их производные по времени и физический импульс $q = k/a$. Указание: воспользоваться соотношением

$$\frac{\delta p_{tot}}{\delta \rho_{tot}} = \frac{p'_{tot}}{\rho'_{tot}},$$

справедливым для мод за горизонтом. Убедиться тем самым, что $\dot{\zeta}/\zeta$ мало по сравнению с темпом расширения Вселенной H при $q = k/a \ll H$.

Убедимся теперь в том, что единственная постоянная во времени величина $\zeta(\mathbf{k})$ целиком определяет константную моду адиабатических возмущений за горизонтом, а заодно решим уравнение (5.1). Мы снова используем формальный предел $k \rightarrow 0$ и пренебрежём членом с $k^2 \Phi$ в этом уравнении. Подставим в (5.1) выражения (5.9)

и (5.12) и преобразуем правую часть, воспользовавшись (2.5), а затем (2.3) и (2.4), чтобы выразить ρ'_{tot} через масштабный фактор и его производные:

$$4\pi Ga^2 \rho'_{tot} = 3 \frac{a'}{a} \left(\frac{a''}{a} - 2 \frac{a'^2}{a^2} \right) .$$

В результате (5.1) сводится к уравнению

$$\epsilon' + 2 \frac{a'}{a} \epsilon + \zeta = 0 .$$

Решением этого уравнения служит

$$\epsilon(\eta) = -\zeta \cdot \frac{1}{a^2(\eta)} \int_0^\eta d\tilde{\eta} a^2(\tilde{\eta}) . \quad (5.14)$$

Предел интегрирования здесь выбран так, что $\epsilon(\eta)$ стремится к нулю при $\eta \rightarrow 0$, а именно, $\epsilon \propto \eta$. Только в этом случае потенциал (5.12) конечен при $\eta \rightarrow 0$. Частное решение $\epsilon \propto a^{-2}$ соответствует падающей моде, которую мы договорились не рассматривать.

Уравнение (5.3) удовлетворяется после этого автоматически.

▷ Задача 2. Убедиться в справедливости последнего утверждения.

Итак, уравнения (5.1), (5.3) и (5.4) действительно удовлетворяются. Как мы уже отмечали, уравнения (5.5) определяют после этого потенциалы скоростей для каждой компоненты среды, которые также оказываются связанными с ζ , после чего (5.2) удовлетворяется автоматически. Таким образом, функция $\zeta(\mathbf{k})$ целиком определяет адиабатическую моду за горизонтом.

Для дальнейшего полезно заметить, что в общем случае величина

$$\zeta_\lambda = -\Phi + \frac{\delta\rho_\lambda}{3(\rho_\lambda + p_\lambda)} \quad (5.15)$$

для любой компоненты среды λ не зависит от времени для мод за горизонтом. Это следует из уравнения (5.4) в пределе $k \rightarrow 0$, если учесть, что $p'_\lambda = (\partial p_\lambda / \partial \rho_\lambda) \rho'_\lambda$, $\delta p_\lambda = (\partial p_\lambda / \partial \rho_\lambda) \delta \rho_\lambda$. Постоянство ζ_λ за горизонтом имеет место как для адиабатической моды, так и для мод постоянной кривизны.

Нередко вместо величины ζ , определённой формулой (5.13), используют величину

$$\mathcal{R} = -\Phi + \frac{a'}{a} v_{tot} , \quad (5.16)$$

где

$$v_{tot} = \frac{\sum(\rho_\lambda + p_\lambda)v_\lambda}{\sum(\rho_\lambda + p_\lambda)} \equiv \frac{[(\rho + p)v]_{tot}}{[\rho + p]_{tot}} . \quad (5.17)$$

Для адиабатической моды за горизонтом эти две величины одинаковы, поскольку из уравнений (5.1) и (5.2) следует

$$\zeta - \mathcal{R} = \frac{\delta\rho_{tot}}{3[\rho + p]_{tot}} - \frac{a'}{a} v_{tot} = -\frac{1}{12\pi Ga^2[\rho + p]_{tot}} k^2 \Phi ,$$

что пренебрежимо мало для моды за горизонтом (равно нулю в формальном пределе $k \rightarrow 0$).

В свете сказанного ясно, что наиболее естественно в качестве начального данного для адиабатической моды выбирать $\zeta_{(i)}(\mathbf{k})$ или, что то же самое, $\mathcal{R}_{(i)}(\mathbf{k})$. Следуя традиции, мы будем использовать $\mathcal{R}_{(i)}$, и индекс (i) опускать. Одна из задач наблюдательной космологии — определить значения начальных данных $\mathcal{R}(\mathbf{k})$ (а также начальных данных для возмущений постоянной кривизны, если таковые имеются). Известные на сегодняшний день свойства $\mathcal{R}(\mathbf{k})$ мы обсудим в разделе 5.4.

На радиационно-доминированной стадии “главными” являются неоднородности плотности релятивистского вещества. Для них при $\eta \rightarrow 0$ выполнено (см. (4.11))

$$\delta_{rad} = -2\Phi . \quad (5.18)$$

Такие же возмущения имеются в случае адиабатической моды в фотонной и нейтринной компонентах по отдельности,

$$\delta_\gamma = \delta_\nu = -2\Phi . \quad (5.19)$$

Из (5.13) следует тогда, что на радиационно-доминированной стадии ($p_{tot} = \rho_{tot}/3$)

$$\Phi = -\frac{2}{3}\zeta = -\frac{2}{3}\mathcal{R} . \quad (5.20)$$

Для нерелятивистского и релятивистского вещества справедливо

$$\rho'_M = -3\frac{a'}{a}\rho_M , \quad \rho'_{rad} = -4\frac{a'}{a}\rho_{rad} ,$$

поэтому из (5.9) следует, что в адиабатической моде за горизонтом имеется связь

$$\delta_{CDM} = \delta_B = \delta_M = \frac{3}{4}\delta_{rad} = \frac{3}{4}\delta_\gamma , \quad (5.21)$$

то есть на радиационно-доминированной стадии

$$\delta_{CDM} = \delta_B = \delta_M = \frac{3}{4}\delta_{rad} = \frac{3}{4}\delta_\gamma = -\frac{3}{2}\Phi = \mathcal{R} ; \quad (5.22)$$

здесь и далее индекс M относится к сумме вкладов барионов и холодной тёмной материи, то есть $\delta\rho_M = \delta\rho_B + \delta\rho_{CDM}$ и т. д. Эти соотношения определяют начальные данные для возмущений каждой компоненты среди в адиабатической моде. Отметим, что в терминах введённых формулой (5.15) переменных ζ_λ для адиабатической моды за горизонтом справедливы соотношения

$$\zeta_{CDM} = \zeta_B = \zeta_\gamma = \zeta_\nu = \zeta .$$

Эти соотношения можно было бы с самого начала считать определением адиабатической моды.

Наоборот, калибровочно-инвариантное определение мод постоянной кривизны — это

$$\zeta_{tot} = \mathcal{R} = 0 \quad \text{при} \quad \eta \rightarrow 0 .$$

Мы подробнее рассмотрим начальные данные для таких мод в разделе 5.3.

▷ *Задача 3.* Выражения (5.18), (5.20) и (5.22) справедливы в формальном пределе $\eta \rightarrow 0$. Считая, что во Вселенной имеется только тёмная материя и релятивистское вещество (“радиация”), найти выражения для δ_{rad} , δ_{CDM} , Φ , а также потенциалов скоростей v_{rad} и v_{CDM} в первом нетривиальном порядке по η . Выразить их через единственный параметр адиабатической моды $\mathcal{R} \equiv \mathcal{R}(\eta \rightarrow 0)$.

Обсудим физический смысл величин ζ и \mathcal{R} . В калибровке $h_{0i} = 0$ их определения, не зависящие от предположения о том, что среда представляет из себя идеальную жидкость, в действительности имеют вид

$$\zeta = \Psi + \frac{\delta\rho_{tot}}{3(\rho_{tot} + p_{tot})}, \quad (5.23)$$

$$\mathcal{R} = \Psi + \frac{a'}{a}v_{tot}, \quad (5.24)$$

где v_{tot} по-прежнему определено согласно (5.17). В случае идеальной жидкости $\Psi = -\Phi$, и мы возвращаемся к определениям (5.13), (5.16).

Перейдём в систему отсчёта, в которой полная плотность энергии среды в каждый момент времени постоянна в пространстве (то есть в систему, где гиперповерхности постоянного времени являются гиперповерхностями постоянной плотности энергии), причём такую, где условие $h_{0i} = 0$ по-прежнему выполняется. Физически последнее требование означает, что интервалы собственного времени элементов среды должны совпадать с интервалами конформного времени с точностью до нормировки, $d\tau = f(\eta, \mathbf{x}) d\eta$. Иначе говоря, направление вдоль координаты η всюду совпадает с нормалью к гиперповерхностям постоянной плотности энергии, которые мы собирались рассматривать. Переход от системы отсчёта, в которой выполняются условия конформной ньютоновой калибровки, к обсуждаемой системе отсчёта осуществляется заменой координат

$$\tilde{x}^\mu = x^\mu + \xi^\mu, \quad (5.25)$$

где $\xi^\mu(x^\nu)$ — малые параметры преобразования, удовлетворяющие соотношению (2.31). При такой замене $h^{\mu\nu}(x)$ переходит в $\tilde{h}^{\mu\nu}(x)$ согласно (2.29) (здесь существенно, что аргумент у $h^{\mu\nu}$ и $\tilde{h}^{\mu\nu}$ один и тот же, см. подробности в разделе I.A.6). Из закона преобразования тензора энергии-импульса следует, что в линейном порядке справедливо

$$(\rho + \tilde{\delta}\rho)(\tilde{x}) = (\rho + \delta\rho)(x),$$

откуда с учётом малости ξ следует закон калибровочного преобразования возмущений плотности энергии

$$\tilde{\delta\rho}(x) = \delta\rho(x) - \rho' \xi^0. \quad (5.26)$$

Отсюда видно, что переход в интересующую нас систему отсчёта с $\tilde{\delta\rho}_{tot} = 0$ осуществляет преобразование с

$$\xi^0 = \frac{\delta\rho_{tot}}{\rho'_{tot}}.$$

Сравнивая закон преобразования возмущений метрики (2.29) с разложением (2.46), мы видим, что рассматриваемое калибровочное преобразование генерирует ненулевые

вое $E(x)$ и, что для нас сейчас важнее, приводит к преобразованию $\Psi(x)$ вида

$$\begin{aligned}\widetilde{\Psi} &= \Psi - \frac{a'}{a} \xi^0 \\ &= \Psi + \frac{\delta\rho_{tot}}{3(\rho+p)_{tot}},\end{aligned}\tag{5.27}$$

где мы воспользовались законом сохранения (2.5). Мы видим, что $\zeta(x)$ совпадает с гравитационным потенциалом $\widetilde{\Psi}$, вычисленным на гиперповерхностях постоянной плотности. Найдём, наконец, *трёхмерный* скаляр кривизны для пространственной метрики

$$dl^2 = a^2(\delta_{ij} - h_{ij}) dx^i dx^j = [\delta_{ij}(1 + 2\widetilde{\Psi}) - \partial_i \partial_j E] dx^i dx^j$$

(знак перед h_{ij} соответствует здесь исходному определению (2.25)). В линейном порядке скаляр кривизны равен (сравни с (B.8))

$$R^{(3)} = -a^{-2} (\partial_i \partial_j h_{ij} - \Delta h) = -\frac{4}{a^2} \Delta \widetilde{\Psi}.$$

Таким образом, физический смысл величины ζ состоит в том, что она определяет пространственную кривизну гиперповерхностей постоянной плотности энергии:

$$\text{Гиперповерхности постоянного } \rho_{tot} : \quad R^{(3)} = -\frac{4}{a^2} \Delta \zeta. \tag{5.28}$$

Отметим, что эта интерпретация верна в общем случае, независимо от свойств эволюции возмущений (в том числе от того, находится ли соответствующая мода за или под горизонтом).

Величине ζ можно дать и несколько иную интерпретацию. Используя калибровочное преобразование (5.27), можно перейти в калибровку, где $\widetilde{\Psi} = 0$. В соответствующей системе отсчёта пространственная кривизна $R^{(3)}$ равна нулю. При этом каждая из сохраняющихся за горизонтом величин (5.15) равна

$$\text{Гиперповерхности } R^{(3)} = 0 : \quad \zeta_\lambda = \frac{\delta\rho_\lambda}{3(\rho_\lambda + p_\lambda)} = -\frac{\delta\rho_\lambda}{H\dot{\rho}_\lambda}, \tag{5.29}$$

а для релятивистской компоненты в тепловом равновесии можно записать ещё

$$\text{Гиперповерхности } R^{(3)} = 0 : \quad \zeta_{rad} = \frac{\delta s}{3s},$$

где $s \propto \rho_{rad}^{3/4}$ — плотность энтропии. Формула (5.29) с заменой ρ_λ на ρ_{tot} выполняется и для величины ζ . Отметим, что соотношение (5.29) имеет место для всех мод возмущений, включая моды постоянной кривизны.

Физический смысл величины \mathcal{R} состоит в том, что она пропорциональна кривизне пространственных гиперповерхностей сопутствующей системы отсчёта, см. задачу в конце раздела, то есть

$$\text{Гиперповерхности } v_{tot} = 0 : \quad R^{(3)} = -\frac{4}{a^2} \Delta \mathcal{R}. \tag{5.30}$$

Это — тоже общее свойство скалярных возмущений.

В соотношениях (5.28) и (5.30) уже не используется конформная ньютона калибровка, с которой мы начинали обсуждение. Это обстоятельство служит указанием на возможность построения калибровочно-инвариантных величин, которые сводятся к ζ и \mathcal{R} , определённым согласно (5.23) и (5.24), в калибровке $h_{0i} = 0$. В действительности ζ сама является такой величиной, а соответствующее обобщение величины \mathcal{R} построить несложно.

- ▷ **Задача 4.** Показать явным вычислением, что определённая согласно (5.23) величина ζ инвариантна относительно произвольных калибровочных преобразований, генерируемых общекоординатными преобразованиями (5.25).
- ▷ **Задача 5.** Показать, что определённая согласно (5.24) величина \mathcal{R} инвариантна относительно калибровочных преобразований, согласующихся с условием $h_{0i} = 0$. Построить обобщение этой величины, инвариантное относительно произвольных калибровочных преобразований и сводящееся к выражению (5.24) при $h_{0i} = 0$. Указание: учсть, что $u^i = a^{-1} v^i = a^{-1} \partial_i v$ являются компонентами 4-скорости.
- ▷ **Задача 6.** Рассмотрим сопутствующую систему отсчёта, в которой скорость среды v^i равна нулю, и кроме того $h_{0i} = 0$. Показать, что в этой системе отсчёта пространственная кривизна гиперповерхностей постоянного времени действительно даётся формулой (5.30).
- ▷ **Задача 7.** Убедиться, что свойство (5.28) выполняется независимо от того, справедливо ли равенство $h_{0i} = 0$ в системе отсчёта, где гиперповерхности постоянного времени совпадают с гиперповерхностями постоянной плотности энергии.

5.3 Начальные условия для мод постоянной кривизны

В разделе 5.2 мы видели, что для каждой компоненты космической среды λ калибровочно-инвариантная величина ζ_λ , определённая формулой (5.15), постоянна во времени за горизонтом. Моды постоянной кривизны по определению устроены так, что вклад двух или нескольких компонент среды в величину \mathcal{R} скомпенсирован, $\mathcal{R}(\eta \rightarrow 0) = 0$. То же самое можно сказать про величину ζ для всей среды, определённую соотношением (5.13). Поэтому естественным представляется рассмотрение не самих величин ζ_λ , а их попарных разностей. Традиционно при обсуждении начальных данных для мод постоянной кривизны для каждой пары компонент вводят величину

$$\mathcal{S}_{\lambda,\lambda'} \equiv 3(\zeta_\lambda - \zeta_{\lambda'}) = \frac{\delta_\lambda}{1+w_\lambda} - \frac{\delta_{\lambda'}}{1+w_{\lambda'}} .$$

Для удобства работают с набором пар (λ, γ) , где одной компонентой являются фононы: $\mathcal{S}_{CDM,\gamma}$, $\mathcal{S}_{B,\gamma}$ и т.д. Ясно, что этот выбор нисколько не ограничивает общности рассмотрения. Он удобен, поскольку фононы — безмассовые, и они всегда дают вклад в энтропию плазмы, в отличие, например, от нейтрино. Это позволяет работать с величинами $\mathcal{S}_{\lambda,\gamma}$ на всех стадиях эволюции Вселенной, а не только на радиационно-доминированной стадии. В дальнейшем символ γ в обозначении величин \mathcal{S}_λ мы будем

опускать. Таким образом, рассматриваемые в этой книге барионные и СДМ моды постоянной кривизны⁵ за горизонтом характеризуются отличными от нуля и не зависящими от времени значениями величин (напомним, что при интересующих нас температурах барионы и частицы тёмной материи являются нерелятивистскими)

$$\mathcal{S}_\lambda = \delta_\lambda - \frac{3}{4}\delta_\gamma, \quad \lambda = B, \text{ CDM}.$$

Именно эти величины представляют собой начальные данные эволюции мод постоянной кривизны.

С учётом того, что для возмущений плотности энтропии s справедливо соотношение

$$\frac{\delta s}{s} = \frac{\delta n_\gamma}{n_\gamma} = \frac{3}{4}\delta_\gamma,$$

величину \mathcal{S}_λ глубоко на радиационно-доминированной стадии можно представить в виде

$$\mathcal{S}_\lambda = \frac{\delta(n_\lambda/s)}{(n_\lambda/s)}, \quad \lambda = B, \text{ CDM}. \quad (5.31)$$

В конформной ньютоновой калибровке возмущения релятивистской компоненты отсутствуют на ранних временах (формально — в пределе $\eta \rightarrow 0$). Таким образом, вначале имеются только возмущения тёмной материи или барионов. В такой среде температура однородна в пространстве, а энтропия, приходящаяся на одну частицу тёмной материи или барион, неоднородна. В связи с этим данные моды называют ещё энтропийными.

5.4 Первичные спектры: данные наблюдений

В этом разделе мы сформулируем современные представления о свойствах первичных возмущений. Свойства первичных скалярных возмущений довольно известны из космологических наблюдений, о которых мы будем говорить в Главах 7, 9 и 10 этой книги. С другой стороны, тензорные возмущения до сих пор не обнаружены, и предположения об их свойствах базируются исключительно на теоретических представлениях. Как мы видели в разделе 3.1, векторные моды быстро убывают со временем и поэтому, скорее всего, несущественны; мы не будем их рассматривать.

Начнём со скалярных возмущений. Наблюдательные данные свидетельствуют о том, что они являются адиабатическими, причём падающая мода возмущений действительно отсутствует. На примесь возмущений постоянной кривизны имеются довольно сильные экспериментальные ограничения, о которых мы скажем ниже. Адиабатическую моду за горизонтом характеризуют начальным значением величины \mathcal{R} , введённой формулой (5.16), или, что то же самое, величины ζ , см. (5.13). Напомним, что эти величины не зависят от времени для мод за горизонтом. Наблюдения согласуются с представлением о том, что изначально величина \mathcal{R} представляла собой случайное гауссово поле, однородное и изотропное в пространстве (определение и свойства таких полей см. в Приложении С). Поэтому она полностью характеризуется двухточечным коррелятором, который в импульсном представлении имеет вид

⁵Как уже было сказано, нейтриноные моды постоянной кривизны мы рассматривать не будем.

(всюду в этой Главе мы будем рассматривать *начальные значения* соответствующих величин и, как правило, не будем использовать специальных обозначений для отражения этого факта)

$$\langle \mathcal{R}(\mathbf{k})\mathcal{R}(\mathbf{k}') \rangle = \frac{P_{\mathcal{R}}(k)}{(2\pi)^3} \delta(\mathbf{k} + \mathbf{k}'). \quad (5.32)$$

Таким образом, в случае гауссова случайного поля \mathcal{R} задача наблюдательной космологии состоит в том, чтобы определить одну скалярную функцию — спектр мощности $P_{\mathcal{R}}(k)$.

Остановимся, чтобы обсудить смысл усреднения в левой части (5.32). Обычно в теории случайных полей речь идёт об усреднении по ансамблю систем, в каждой из которых случайная величина принимает то или иное конкретное значение. В данном случае в качестве системы выступает вся Вселенная, так что в (5.32) имеется в виду усреднение по гипотетическому ансамблю Вселенных, во всех отношениях подобных нашей. Поскольку мы имеем дело с одной Вселенной, случайная величина (в данном случае $\mathcal{R}(\mathbf{k})$ или $\mathcal{R}(\mathbf{x})$) принимает в ней определённое значение, но какое именно — априори неизвестно. Тем не менее, свойства случайного поля можно изучать, измеряя, например, корреляторы $\langle \mathcal{R}(\mathbf{x})\mathcal{R}(\mathbf{x}') \rangle$ (точнее, связанные с ними величины) для большого количества пар точек \mathbf{x}, \mathbf{x}' , находящихся на одинаковом расстоянии друг от друга. Именно процедуры такого типа реализуются в наблюдательной космологии. Следует, однако, понимать, что в них всегда (по крайней мере в принципе) присутствует неустранимая статистическая неопределенность (космическая неопределенность, *cosmic variance*), связанная с тем, что мы имеем дело лишь с одной реализацией случайного поля. С примером такой неопределенности мы столкнёмся в Главе 9.

Продолжим обсуждение адиабатической моды скалярных возмущений. Удобно ввести величину

$$\mathcal{P}_{\mathcal{R}}(k) = \frac{k^3}{2\pi^2} P_{\mathcal{R}}(k). \quad (5.33)$$

Из (5.32) следует (см. также раздел C.2), что выражение для флюктуации случайного поля через $\mathcal{P}_{\mathcal{R}}$ имеет простой вид:

$$\langle \mathcal{R}^2(\mathbf{x}) \rangle = \int_0^\infty \frac{dk}{k} \mathcal{P}_{\mathcal{R}}(k). \quad (5.34)$$

Таким образом, $\mathcal{P}_{\mathcal{R}}(k)$ определяет вклад логарифмического интервала импульсов вблизи импульса k во флюктуацию поля. Спектр, для которого этот вклад не зависит от k , то есть $\mathcal{P}_{\mathcal{R}}(k) = \text{const}$, называют плоским спектром или спектром Гаррисона—Зельдовича. Отметим, что для величины $\mathcal{P}_{\mathcal{R}}$ часто используют обозначение

$$\Delta_{\mathcal{R}}^2(k) \equiv \mathcal{P}_{\mathcal{R}}(k).$$

Величина $\Delta_{\mathcal{R}}(k)$ характеризует амплитуду возмущений с характерным импульсом k , тогда как $\mathcal{P}_{\mathcal{R}}$ характеризует квадрат этой амплитуды.

Из наблюдений следует, что начальный спектр скалярных возмущений близок к плоскому. В такой ситуации удобно использовать степенную параметризацию, которую традиционно записывают следующим образом:

$$\mathcal{P}_{\mathcal{R}}(k) = A_{\mathcal{R}} \left(\frac{k}{k_*} \right)^{n_s - 1}. \quad (5.35)$$

Здесь k_* — некоторое фиксированное значение импульса, которое выбирают из соображений удобства (например, в обработке данных эксперимента WMAP по исследованию реликтового излучения принят выбор $k_*/a_0 = 0.002 \text{ Мпк}^{-1}$), величина $A_{\mathcal{R}} = \mathcal{P}_{\mathcal{R}}(k_*)$ — это мощность при $k = k_*$, а $(n_s - 1)$ — наклон спектра. Плоский спектр получается при $n_s = 1$; “красному” спектру (растущему в сторону больших длин волн) соответствует $n_s < 1$; наоборот, для “синего” спектра $n_s > 1$.

Вообще говоря, спектр мощности может не иметь простой степенной формы. Этую возможность учитывают, вводя ещё один параметр $\frac{dn_s}{d \ln k} \equiv \frac{dn_s}{d \ln k}(k_*)$ и записывая

$$\mathcal{P}_{\mathcal{R}}(k) = A_{\mathcal{R}} \left(\frac{k}{k_*} \right)^{n_s - 1 + \frac{dn_s}{d \ln k} \ln \frac{k}{k_*}}. \quad (5.36)$$

Параметр $dn_s/d \ln k$ определяет темп изменения наклона спектра для мод с импульсами вблизи $k = k_*$. Этот параметр в англоязычной литературе получил название *running index*. Современные значения⁶ параметров, дающие наилучшее описание совокупности данных наблюдательной космологии в *предположении об отсутствии тензорных возмущений и зависимости наклона n_s от импульса*, равны [2]

$$A_{\mathcal{R}} = (2.46 \pm 0.09) \cdot 10^{-9}, \quad n_s = 0.960 \pm 0.014 \quad (5.37)$$

при $k_*/a_0 = 0.002 \text{ Мпк}^{-1}$. Таким образом, начальная амплитуда скалярных возмущений составляет

$$\Delta_{\mathcal{R}} \simeq 5 \cdot 10^{-5}.$$

Кроме того, видно, что имеются указания на то, что спектр не является строго плоским. Эти указания, впрочем, становятся слабее при учёте возможности существования тензорных возмущений. Если отбросить предположение об отсутствии зависимости наклона от импульса, то из наблюдений получается следующее ограничение на эту зависимость [2]:

$$-0.07 < \frac{dn_s}{d \ln k} < 0.01 \quad (5.38)$$

на уровне достоверности 95%. При этом диапазон возможных значений $n_s(k_*)$ расширяется.

Заканчивая обсуждение адиабатических скалярных возмущений, напомним, что в конформной ньютоновой калибровке начальные значения всех остальных величин (контрастов плотности энергии, гравитационных потенциалов и потенциалов скоростей) линейным образом выражаются через \mathcal{R} . Поэтому эти начальные данные также представляют собой гауссовые случайные величины. В частности, спектр мощности для начальных значений гравитационного потенциала $P_{\Phi}(\mathbf{k})$ определяется соотношением, аналогичным (5.32),

$$\langle \Phi_{(i)}(\mathbf{k}) \Phi_{(i)}(\mathbf{k}') \rangle = \frac{P_{\Phi}(k)}{(2\pi)^3} \delta(\mathbf{k} + \mathbf{k}'). \quad (5.39)$$

Величина P_{Φ} определяется в полной аналогии с (5.33). При этом для мод за горизонтом на радиационно-доминированной и пылевидной стадиях справедливы формулы

⁶Здесь и далее в этой книге величина погрешности соответствует доверительному интервалу в 68%, если не оговорено особо.

(5.20) и (6.3), связывающие гравитационный потенциал с величиной \mathcal{R} . Итак, в приближении степенного начального спектра для гравитационного потенциала справедливо

$$\mathcal{P}_\Phi = A_\Phi \left(\frac{k}{k_*} \right)^{n_s - 1}, \quad (5.40)$$

где

$$A_\Phi = \frac{4}{9} A_{\mathcal{R}}$$

— нормировка мощности гравитационного потенциала глубоко под горизонтом на радиационно-доминированной стадии. Как следует из (5.37), на масштабе импульсов $k_*/a_0 = 0.002 \text{ Мпк}^{-1}$ мощность спектра начальных возмущений равна

$$A_\Phi = \mathcal{P}_\Phi(k_*) = 1.1 \cdot 10^{-9}. \quad (5.41)$$

В случае плоского спектра эта величина одинакова для всех импульсов.⁷

Перейдём теперь к обсуждению мод постоянной кривизны. Их начальные значения характеризуются величинами S_{CDM} и S_B , определёнными согласно (5.31) (нейтринные моды мы в этой книге не обсуждаем). По аналогии с (5.35) можно предполагать, что спектр этих мод, если они существуют, близок к плоскому. Именно такой спектр генерируется с помощью механизмов, которые мы обсуждаем в разделах 14.2 и 14.4. При таком спектре эти моды характеризуются мощностью A_S и наклоном. При этом нельзя исключить того, что мода постоянной кривизны коррелирует (или антикоррелирует) с адиабатической модой. Такая корреляция, например, в случае CDM-моды, означала бы, что отношение плотности числа частиц тёмной материи к плотности энтропии повышенено по отношению к среднему значению как раз там, где повышена температура. Антикорреляция соответствовала бы противоположной ситуации⁸. Мы приведём пример модели, в которой могут реализовываться указанные возможности, в разделе 14.2, а здесь введём параметр β , который характеризует корреляционные свойства, соотношением⁹

$$\beta = \frac{\mathcal{P}_{RS}}{\sqrt{\mathcal{P}_R \mathcal{P}_S}}$$

где \mathcal{P}_{RS} определяется по аналогии с (5.34),

$$\langle \mathcal{R}(\mathbf{x}) S(\mathbf{x}) \rangle = \int_0^\infty \frac{dk}{k} \mathcal{P}_{RS}(k).$$

Наблюдательные ограничения на примесь мод постоянной кривизны зависят от параметра β , то есть от корреляционных свойств мод. При $\beta = 0$ (отсутствие корреляций) и $\beta = 1$ (максимальная корреляция) ограничения на CDM-моду имеют вид [2]

$$\frac{\mathcal{P}_{S_{CDM}}}{\mathcal{P}_R} < 0.07, \quad \beta = 0, \quad \frac{\mathcal{P}_{S_{CDM}}}{\mathcal{P}_R} < 0.004, \quad \beta = 1,$$

⁷Отметим тот факт, что амплитуда спектра мощности $A_{\mathcal{R}}$ по порядку величины совпадает с барион-фотонным отношением η_B . Обсуждаемые в литературе модели генерации первичных возмущений и барионной асимметрии используют совершенно разные механизмы, так что этот факт выглядит ещё одним случайным совпадением между значениями разных космологических параметров.

⁸В литературе иногда используют противоположную терминологию: для того, что мы называем корреляцией, используют термин антикорреляция, и наоборот.

⁹В соответствии со сказанным в предыдущем примечании знак β иногда выбирают противоположным.

на 95% уровне достоверности. Ограничения на барионную моду постоянной кривизны, если их записать как ограничения на $\mathcal{P}_{S_B}/\mathcal{P}_R$, слабее из-за того, что плотность энергии барионов меньше плотности тёмной материи. Поэтому соответствующие ограничения в $(\Omega_{CDM}/\Omega_B)^2 \sim 20$ раз хуже.

Наконец, обсудим первичные тензорные возмущения. Согласно (2.54), они представляют собой сумму по поляризациям,

$$h_{ij}^{TT}(\eta, \mathbf{k}) = \sum_{A=+, \times} e_{ij}^{(A)} h^{(A)}(\eta, \mathbf{k}) . \quad (5.42)$$

По аналогии со скалярными возмущениями можно предположить, что $h_{(i)}^{(A)}$ являются гауссовыми случайными полями с двухточечным коррелятором

$$\langle h_{(i)}^{(A)}(\mathbf{k}) h_{(i)}^{(B)}(\mathbf{k}') \rangle = \frac{1}{2} \delta_{AB} \cdot \frac{P_T(k)}{(2\pi)^3} \delta(\mathbf{k} + \mathbf{k}') , \quad (5.43)$$

где угловые скобки, как всегда, подразумевают усреднение по большому ансамблю Вселенных. В отличие от скалярных возмущений, представление об $h_{(i)}^{(A)}$ как о гауссовых полях и предположение о форме спектра основаны только на теоретических предпочтениях, поскольку тензорные возмущения не обнаружены. Во многих инфляционных моделях предположение о гауссости выполняется, а первичный спектр реликтовых гравитационных волн с хорошей степенью точности степенной,

$$\mathcal{P}_T = A_T \left(\frac{k}{k_*} \right)^{n_T} , \quad (5.44)$$

причём показатель наклона n_T близок к нулю. Здесь величина $\mathcal{P}_T \equiv \Delta_T^2$ определена в полной аналогии с (5.33), так что

$$\sum_A \langle \left(h_{(i)}^{(A)}(\mathbf{x}) \right)^2 \rangle = \int_0^\infty \frac{dk}{k} \mathcal{P}_T(k) .$$

В качестве характеристики соотношения между тензорными и скалярными возмущениями принято использовать величину

$$r = \frac{A_T}{A_R} .$$

Наблюдательное ограничение на неё [2] составляет (95% уровень достоверности)

$$r < 0.2 . \quad (5.45)$$

Ожидается, что чувствительность экспериментов к тензорным возмущениям заметно повысится в ближайшем будущем благодаря работе инструментов, нацеленных на измерение поляризации реликтового излучения.

В этой книге мы оставляем в стороне важный вопрос о возможных отклонениях возмущений от гауссости. Эти отклонения могут в принципе иметь самый разнообразный характер, поэтому единого простого способа их параметризации не существует. Одна из многочисленных возможностей состоит в том, что гравитационный потенциал $\Phi_{(i)}$ адиабатических возмущений за горизонтом является *локальной в пространстве*, но нелинейной функцией гауссова (линейного) поля Φ_L . В этом случае, если ограничиться связью без производных¹⁰, в низшем нетривиальном порядке по Φ_L можно записать

$$\Phi_{(i)}(\mathbf{x}) = \Phi_L(\mathbf{x}) + f_{NL} \Phi_L(\mathbf{x}) \Phi_L(\mathbf{x}) , \quad (5.46)$$

¹⁰ Такое ограничение на самом деле ни на чём не основано, и в конкретных моделях связь между $\Phi_{(i)}$ и Φ_L вполне может иметь более сложную форму.

где f_{NL} — безразмерный параметр. Негауссость примерно такого типа возникает при генерации скалярных возмущений за счёт флуктуаций инфлатона (разделы 13.1, 13.2) или дополнительного скалярного поля (раздел 14.2.1). В этих случаях появление нелинейного члена в (5.46) обязано как нелинейности уравнений соответствующего скалярного поля, так и нелинейной связи между флуктуациями скалярного поля и гравитационным потенциалом. При генерации возмущений за счёт флуктуаций инфлатона параметр f_{NL} мал, $f_{NL} \lesssim 1$; в моделях с дополнительными скалярами он может быть гораздо больше.

Поскольку амплитуда скалярных возмущений сама по себе мала, $\Phi \sim 10^{-5}$, относительный вклад второго слагаемого в (5.46) по порядку величины оценивается как $10^{-5} f_{NL}$. Это означает, что значению $f_{NL} \sim 1$ соответствует очень малый эффект. Современное ограничение на негауссость, представимую в форме (5.46), имеет вид [2]

$$-9 < f_{NL} < 111$$

на 95% уровне достоверности. Подробное обсуждение вопроса о негауссости космологических возмущений см. в [5].

5.5 Эволюция адиабатических возмущений: беглый обзор

Предваряя более подробное рассмотрение, обсудим вкратце эволюцию адиабатических возмущений в реальной Вселенной и связанные с ними эффекты.

С точки зрения формирования структур наиболее важными являются возмущения тёмной материи. Они генерируют гравитационные потенциалы, в которые после рекомбинации “сваливается” обычное вещество. Эволюция возмущений тёмной материи на качественном уровне может быть описана на основе результатов разделов 1.2 и 4.3. Как мы знаем из раздела 4.3, длинноволновые возмущения, входящие под горизонт на пылевидной (МД) стадии, всё ещё находятся в линейном режиме. То же можно сказать о модах, входящих под горизонт незадолго до перехода на МД-стадию. Вселенная однородна на масштабе 100 Мпк и более, гравитационно связанных объектов с массой больше $10^{16} M_\odot$ не образуется (по поводу связи масштабов расстояний и масс см. раздел 1.3). Возмущения тёмной материи меньших длин волн входят под горизонт на радиационно-доминированной (РД) стадии. На этой стадии они логарифмически растут, $\delta_{CDM}(\eta) \propto \ln \eta / \eta_x$, где $\eta_x \simeq k^{-1}$ — время пересечения горизонта, см. раздел 1.2. После перехода на МД-стадию рост становится линейным по масштабному фактору, см. раздел 4.3, так что на этой стадии

$$\delta_{CDM}(\mathbf{k}, z) \simeq C \Phi_{(i)}(\mathbf{k}) \frac{1 + z_{eq}}{1 + z} \ln(0.2k\eta_{eq}), \quad (5.47)$$

где $\Phi_{(i)}$ — начальный гравитационный потенциал, однозначно определяющий начальную амплитуду адиабатических возмущений в конформной ньютоновой калибровке (по поводу численного множителя под логарифмом см. раздел 6.2.1). Константа C в этом выражении оказывается довольно большой, $|C| \simeq 27/2$. Это связано с усилением возмущений в период их входа под горизонт и в эпоху РД/МД-перехода, см. раздел 6.2.1. С учётом последнего обстоятельства возмущения с $k/a_0 \gtrsim (0.2a_0\eta_{eq})^{-1} \sim (20 \text{ Мпк})^{-1}$ не слишком малы в современную эпоху. Действительно, первичный гравитационный потенциал характеризуется амплитудой $\Delta_\Phi = \sqrt{\mathcal{P}_\Phi} \sim 3 \cdot 10^{-5}$, см. (5.41), и полагая для оценки значение логарифма в (5.47) единицей, мы получаем для этих мод $\delta_{CDM} \sim 1$. Упрощая ситуацию, можно сказать, что моды с $k/a_0 \sim (10 \text{ Мпк})^{-1}$ сейчас входят в нелинейный режим; им соответствуют современные длины волн $\lambda_0 \simeq a_0\pi/k \sim 30 \text{ Мпк}$ и массы формирующихся объектов порядка $10^{15} M_\odot$, см. раздел 1.3. Благодаря логарифмическому множителю в (5.47) моды с ещё меньшими

импульсами вошли в нелинейный режим и сколлапсировали раньше; так, интенсивное¹¹ формирование галактик с $M \sim (10^{11} - 10^{12}) M_\odot$ происходило начиная с $z \sim 4$. Итак, формула (5.47) приводит к представлению об иерархическом образовании структур: сначала формируются структуры меньшей массы, а более крупные структуры образуются в результате скучивания более мелких. Такая картина, как и количественные результаты о структурах, согласуется с наблюдательными данными.

С точки зрения свойств реликтового излучения большой интерес представляют возмущения барионов и фотонов в эпоху рекомбинации (последнего рассеяния фотонов): существовавшие тогда неоднородности барион-фотонной среды, её движение, а также гравитационные потенциалы приводят к анизотропии и поляризации реликтового излучения. Один (хотя и далеко не единственный) эффект состоит в том, что области с повышенной плотностью барионов и фотонов имеют повышенную температуру,

$$\frac{\delta T}{T}(\mathbf{x}) \propto \delta_{B\gamma}(\mathbf{x}).$$

Волна возмущений с конформным импульсом k , развивавшихся в эпоху рекомбинации $\eta = \eta_r$, видна сегодня под углом $\Delta\theta \propto (k\eta_0)^{-1}$. Действительно, $2\pi/k$ — это координатная длина волны, а $(\eta_0 - \eta_r) \approx \eta_0$ — это координатное расстояние, которое пролетел фотон с момента последнего рассеяния; их отношение и равно углу $\Delta\theta$. При разложении температуры реликтового излучения по сферическим гармоникам (см. разделы I.1.2.5 и 9.1) угловому масштабу $\Delta\theta$ соответствуют мультиполи с $l \propto (\Delta\theta)^{-1}$. Таким образом, можно сказать, сильно огрубляя ситуацию, что имеет место приближённое соответствие

$$C_l \longleftrightarrow \delta_{B\gamma}^2(k, \eta_r), \quad k \simeq \frac{l}{\eta_0}, \quad (5.48)$$

где C_l — угловые мультиполи, характеризующие анизотропию реликтового излучения (напомним, что C_l квадратичны по $\delta T/T$).

Длинноволновые возмущения, выходящие за горизонт после рекомбинации, не зависят от времени в эту эпоху и пропорциональны начальному гравитационному потенциалу (ср. с разделом 5.2),

$$\delta_{B\gamma}(\mathbf{k}) \propto \Phi(\mathbf{k}) \propto \Phi_{(i)}(\mathbf{k}).$$

В случае плоского начального спектра это приводит к почти плоскому спектру анизотропии при $l \lesssim \eta_0/\eta_r \simeq 50$ (C_l слабо зависит от l). С другой стороны, из раздела 4.2 мы знаем, что возмущения барион-фотонной компоненты осциллируют на РД-стадии,

$$\delta_{B\gamma} = \text{const} \cdot \cos \left(k \int u_s d\eta \right), \quad (5.49)$$

где $u_s \simeq 1/\sqrt{3}$ — скорость звука в барион-фотонной среде (она несколько уменьшается ближе к эпохе рекомбинации из-за эффектов, связанных с барионами). Подчеркнём, что фаза этих акустических осцилляций фиксирована; данное свойство обусловлено как тем, что мы рассматриваем адиабатические возмущения (в случае возмущений постоянной кривизны фаза другая), так и тем, что падающая мода отсутствует. Акустические осцилляции продолжаются и после перехода на МД-стадию.

¹¹Из-за того, что возмущения представляют собой случайное поле, некоторые галактики образуются раньше, см. Главу 7.

Из (5.49) следует, что в эпоху рекомбинации возмущения барионов и фотонов содержат вклад, осциллирующий как функция импульса,

$$\delta_{B\gamma}(\eta_r) = \text{const} \cdot \cos(kr_s) , \quad (5.50)$$

где $r_s = \int_0^{\eta_r} u_s d\eta$ — координатный размер звукового горизонта эпохи рекомбинации; $r_s \approx \eta_r/\sqrt{3}$. В соответствии с (5.48) это приводит к осцилляциям C_l как функции l . Период осцилляций C_l (расстояние между пиками) определяется полупериодом осцилляций $\delta_{B\gamma}$ по k и оценивается как

$$\Delta l \simeq \frac{\pi}{r_s} \eta_0 \simeq \sqrt{3} \pi \frac{\eta_0}{\eta_r} \simeq 300 .$$

На качественном уровне такая картина вполне согласуется с наблюдениями.

Осцилляции барион-фотонной компоненты (5.50), имевшиеся в эпоху рекомбинации, присутствуют в начальных данных для дальнейшей эволюции отщепившихся барионов. Поэтому они оставляют след и в распределении структур во Вселенной (здесь существенно, что Ω_B/Ω_{CDM} не слишком мало). Соответствующий эффект получил название барионных акустических осцилляций.

Отдельно следует сказать о нейтринной компоненте. На протяжении большей части космологической эволюции нейтрино имеют столь высокие скорости, что вылетают из гравитационных потенциалов и из-за этого не участвуют в формировании структур. В то же время, нейтрино вносят довольно заметный вклад в полную плотность энергии во Вселенной. Эти два обстоятельства приводят к тому, что за счёт нейтрино происходит некоторое подавление возмущений тёмной материи (и барионов после рекомбинации), особенно на сравнительно малых масштабах. Эффект зависит от масс нейтрино, и его используют для получения ограничений на эти массы.

Мы будем подробно рассматривать затронутые в этом разделе аспекты теории скалярных возмущений в последующих Главах, а здесь отметим, что количественные результаты, относящиеся как к структурам, так и к реликтовому излучению, существенным образом зависят от свойств первичных возмущений и от значений космологических параметров (таких как h , Ω_B , Ω_{CDM} , Ω_Λ , Ω_{curv} , уравнение состояния тёмной энергии и др.). Поэтому соответствующие наблюдательные данные представляют собой ценнейший источник космологической информации.

Глава 6

*Скалярные возмущения до рекомбинации

В этой Главе мы подробно рассмотрим эволюцию скалярных возмущений вплоть до эпохи рекомбинации. Нас здесь будут интересовать возмущения тёмной материи и барион-фотонной компоненты, а также гравитационные потенциалы; особенности, связанные с нейтринной компонентой, мы обсудим в разделе 8.4. Необходимость детального изучения возмущений во Вселенной периода рекомбинации связана с несколькими обстоятельствами. Во-первых, в этот период происходит последнее рассеяние фотонов, поэтому он важен в связи с измерениями свойств реликтового излучения. Во-вторых, возмущения тёмной материи и барионов в этот период и в более позднюю эпоху важны с точки зрения образования структур во Вселенной. Наконец, особенности поведения барионной компоненты в эпоху рекомбинации оставляют небольшой по величине, но весьма характерный (и обнаруженный экспериментально) след в распространённости структур во Вселенной. Эволюция тёмной материи и барионов в пострекомбинационной Вселенной рассмотрена в Главе 7.

Как мы уже видели, поведение возмущений с длинами волн, много большими размера текущего горизонта, вполне может быть описано аналитически. Иначе говоря, вопрос о том, какие начальные данные необходимо задать, чтобы полностью описать последующую эволюцию возмущений, имеет ясное аналитическое решение. С другой стороны, изучение дальнейшей эволюции требует, вообще говоря, привлечения численных методов. Хотя система уравнений, описывающая эволюцию возмущений до стадии образования структур, линейна, она довольно сложна и полному аналитическому изучению не поддаётся. Численное решение этой системы не представляет собой непреодолимой проблемы, хотя для учёта эффектов неидеальности необходимо решать громоздкую систему уравнений Больцмана. В этой книге мы ограничимся приближённым аналитическим рассмотрением, которое позволяет лучше понять физику, стоящую за тем или иным явлением. Мы будем опираться и на результаты численного анализа там, где это будет целесообразно.

Эволюция интересующих нас возмущений существенно зависит от их длины волны (точнее, сохраняющегося конформного импульса). В соответствии со сказанным в разделе 2.4, мы будем различать возмущения, входящие под горизонт на радиационно-доминированной и пылевидной стадиях (РД-входящие и МД-входящие). Анализическое рассмотрение промежуточной области длин волн, которая весьма важна с точки зрения изучения свойств реликтового излучения на угловых масштабах порядка нескольких градусов, затруднительно, и нам придётся ограничиться обсужде-

нием на качественном уровне. Поскольку переход от радиационно-доминированной стадии к пылевидной и эпоха рекомбинации разнесены несильно, $\eta_r/\eta_{eq} \approx 2.35$, мы не сможем рассматривать количественно и моды, входящие под горизонт между этими двумя эпохами. Наконец, нам придётся исключить из количественного рассмотрения и возмущения барион-фотонной компоненты, входящие под *звуковой* горизонт между η_{eq} и η_r . Напомним, что скорость звука в этой компоненте оценивается величиной $1/\sqrt{3}$ (мы уточним эту оценку ниже), так что наш анализ будет носить качественный характер для мод с импульсами в интервале $\sqrt{3}/\eta_{eq} \gtrsim k \gtrsim 1/\eta_r$.

Помимо всего прочего, космическая среда не является идеальной жидкостью. Эффекты неидеальности среды весьма существенны для барион-электрон-фотонной и нейтринной компонент; некоторые из них мы рассмотрим в Главе 8. Кроме того, частицы тёмной материи в интересующие нас эпохи могут, вообще говоря, иметь заметные скорости хаотического движения; в этом случае говорят о тёплой или горячей тёмной материи. В таком варианте эффекты неидеальности имеются и в компоненте тёмной материи. Мы рассмотрим этот вопрос в разделе 8.3.1. На протяжении же этой Главы тёмную материю мы будем считать холодной, то есть состоящей из частиц, которые перестают взаимодействовать между собой и с обычным веществом, будучи уже существенно нерелятивистскими. Для получения простых аналитических результатов в некоторых местах нам придётся считать, что плотность массы тёмной материи велика по сравнению с плотностью барионов,

$$\rho_{CDM} \gg \rho_B . \quad (6.1)$$

Это — неплохое приближение для реальной Вселенной, в которой $\Omega_B \simeq 0.04$, $\Omega_{CDM} \simeq 0.2$.

Повсюду в этой Главе мы будем рассматривать барион-электрон-фотонную компоненту до рекомбинации как единую среду, представляющую собой идеальную жидкость¹. Это возможно благодаря тому, что барионы, электроны и фотоны интенсивно взаимодействуют между собой. Такое приближение называют приближением тесной связи (*tight coupling*). Оно имеет, впрочем, свои пределы применимости, которые мы обсудим в разделе 8.5. Здесь мы анонсируем, что оно действительно работает для не слишком коротких волн, $k \gtrsim 30/\eta_r \simeq 1500/\eta_0$.

Для дальнейшего полезно отметить, что к периоду рекомбинации, а тем более в период перехода от радиационно-доминированной стадии к пылевидной и раньше, барион-фотонная компонента с неплохой точностью является релятивистской: отношение плотности энергии (массы) барионов к плотности энергии фотонов в эти периоды равно (см. раздел 6.2)

$$\frac{\rho_B}{\rho_\gamma}(t_r) \simeq 0.85 \quad \text{и} \quad \frac{\rho_B}{\rho_\gamma}(t_{eq}) = \frac{1 + z_r}{1 + z_{eq}} \frac{\rho_B}{\rho_\gamma}(t_r) \simeq 0.30 ,$$

соответственно, так что наибольший вклад в энергию барион-фотонной компоненты вносят фотоны. Мы будем продолжать обозначать величины, относящиеся к этой компоненте, символом $B\gamma$ и иногда пользоваться ультрарелятивистским приближением, то есть полагать $w_{B\gamma} = u_{s,B\gamma}^2 = 1/3$. В некоторых местах, однако, отличие уравнения состояния от ультрарелятивистского весьма существенно; в этих случаях (см. раздел 6.2) мы проведём более аккуратный анализ.

¹ С необходимыми уточнениями там, где это понадобится.

6.1 Длинноволновые адиабатические моды

Наиболее просто ведут себя адиабатические возмущения, входящие под горизонт на пылевидной стадии. Мы их называем МД-входящими; современный импульс таких мод заметно меньше критического значения $q_0^{(eq)}$, см. (2.82). Величина ζ (и \mathcal{R}) для МД-входящей моды остаётся постоянной на начальном этапе пылевидной стадии, пока мода всё ещё находится за горизонтом. В это время “главными” являются уже возмущения нерелятивистской материи, для которых справедливо (см. (4.11))

$$\delta_M = -2\Phi. \quad (6.2)$$

Из (5.13) с учётом $\rho_{tot} = \rho_M$, $p_{tot} = p_M = 0$ получаем связь между гравитационным потенциалом и ζ (или \mathcal{R}) для моды за горизонтом на пылевидной стадии

$$\Phi = -\frac{3}{5}\zeta = -\frac{3}{5}\mathcal{R} = \frac{9}{10}\Phi_{(i)}, \quad (6.3)$$

так что $\delta_M = 6\mathcal{R}/5$. Отметим, что для обсуждаемых мод гравитационный потенциал меняется при переходе с радиационно-доминированной на пылевидную стадию: Φ уменьшается в 9/10 раз. Пока адиабатическая мода находится за горизонтом, флуктуации плотности энергии фотонов удовлетворяют (5.21), то есть на МД-стадии

$$\delta_\gamma = \frac{8}{5}\mathcal{R} = -\frac{12}{5}\Phi_{(i)}. \quad (6.4)$$

Мы увидим в Главе 9, что соотношения (6.3) и (6.4) определяют вклад адиабатической скалярной моды (который является основным) в анизотропию реликтового излучения на больших угловых масштабах.

Эволюция возмущений плотности нерелятивистского вещества на пылевидной стадии происходит так, как обсуждалось в разделе 4.3: вклад релятивистских компонент в плотность энергии мал, малы и связанные с ними поправки². После входа под горизонт контраст плотности δ_{CDM} начинает расти как масштабный фактор, но рассматриваемые моды никогда не переходят в нелинейный режим.

Из уравнений (5.4), (5.5) и постоянства гравитационного потенциала также следует, что для загоризонтных мод на пылевидной стадии потенциалы скоростей равны нулю, $v = 0$.

6.2 Адиабатические моды, входящие под горизонт на радиационно-доминированной стадии

В этом разделе мы подробно рассмотрим моды, входящие под зеуковой горизонт на радиационно-доминированной стадии. Как мы уже отмечали, область импульсов $\sqrt{3}/\eta_{eq} \gtrsim k \gtrsim 1/\eta_r$ аналитически изучить трудно, и по её поводу мы ограничимся лишь общими замечаниями, которые сделаем в разделе 6.3.

Эволюция возмущений релятивистской компоненты на радиационно-доминированной стадии происходит так, как описано в разделе 4.2. В частности, мода с конформным импульсом k характеризуется гравитационным потенциалом (4.12), причём в качестве начального значения выступает (см. (5.20)) $\Phi_{(i)} = -\frac{2}{3}\zeta = -\frac{2}{3}\mathcal{R}$ (в

²Это во всяком случае верно для мод, входящих под горизонт после рекомбинации, а также для возмущений тёмной материи всех обсуждаемых здесь длин волн в приближении $\rho_{CDM} \gg \rho_B$.

далнейшем мы для определённости выражаем результаты через начальное значение гравитационного потенциала в конформной ньютоновой калибровке). Новое явление состоит в том, что этот потенциал индуцирует возмущения тёмной материи, которые под горизонтом логарифмически растут со временем. Именно благодаря этому эффекту во Вселенной имеются галактики и другие гравитационно связанные объекты: как мы видели в Главе 4, на радиационно-доминированной стадии возмущения плотности релятивистского вещества не растут, а при $\sqrt{\mathcal{R}} = 5 \cdot 10^{-5}$ одного роста на пылевидной стадии недостаточно для перехода в нелинейный режим эволюции. Результаты, относящиеся к эволюции рассматриваемых мод, проиллюстрированы на рис. 6.1.

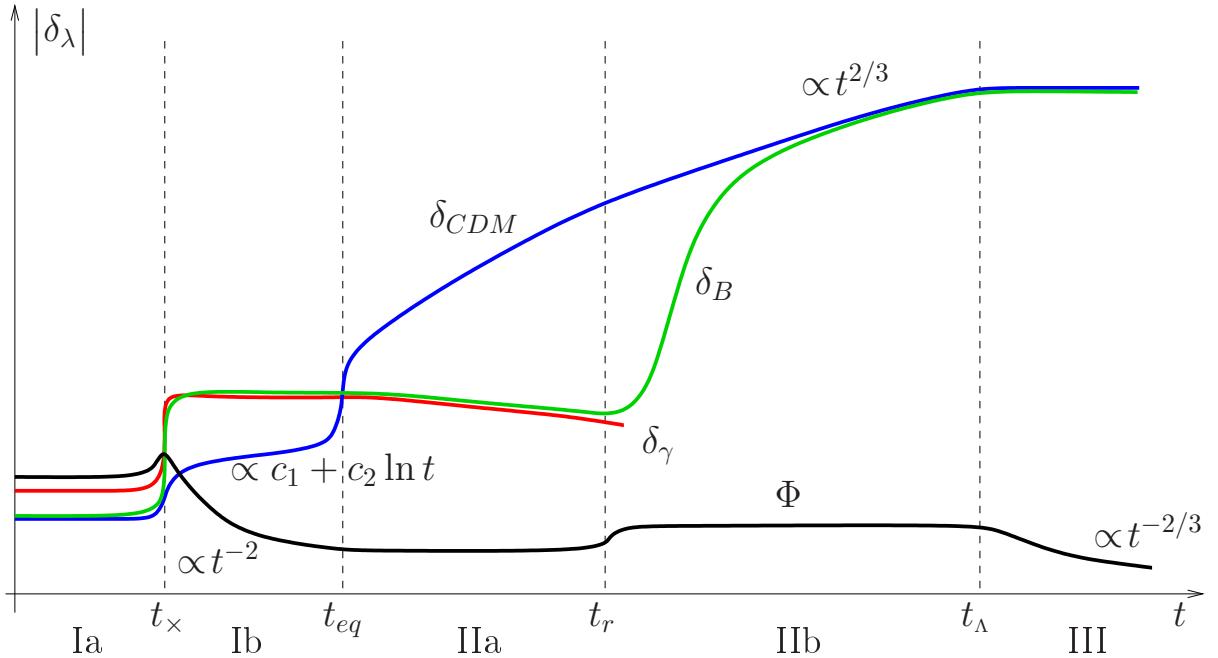


Рис. 6.1: Схематическое изображение эволюции линейных скалярных возмущений в адиабатической моде с фиксированным конформным импульсом k , входящих под горизонт на РД-стадии. Осцилляции не изображены. t_x — момент входа под горизонт. Поведение вблизи характерных времён ($t_x, t_{eq}, t_r, t_\Lambda$) показано условно. Масштаб по осям не соблюден. I: РД-стадия. Доминируют возмущения релятивистской компоненты (раздел 4.2). Ia: До входа под горизонт моды не эволюционируют, их значения удовлетворяют соотношениям (5.22). Ib: Вблизи входа под горизонт возмущение релятивистского вещества индуцирует логарифмически растущее возмущение CDM, формула (6.11). II: МД-стадия; доминируют возмущения CDM (раздел 4.3) с начальными данными для этой стадии, соответствующими формуле (6.11). IIa: возмущения барион-фотонной компоненты — звуковые волны — осциллируют согласно (6.36); кроме того, CDM-возмущения индуцируют возмущения барион-фотонной компоненты, формула (6.35). IIb: Барионы отщеплены; их возмущения догоняют возмущения CDM, формулы (7.19), (7.18). III: ЛД-стадия; рост возмущений прекращается (раздел 4.4).

После перехода на пылевидную стадию возмущения барион-фотонной компоненты продолжают осциллировать вплоть до эпохи рекомбинации. Это приводит к наблюдаемым следствиям, см. раздел 7.1.2 и Главы 9, 10. С точки зрения свойств реликтового излучения интерес представляет и ещё один эффект. А именно, гра-

витационный потенциал, созданный CDM-возмущениями на пылевидной стадии, в свою очередь индуцирует дополнительный вклад в возмущения барион-фотонной компоненты. Этот эффект существен между переходом от радиационно-доминированной к пылевидной стадии и периодом рекомбинации, и мы его рассмотрим в разделе 6.2.2.

Оба указанных эффекта индуцирования возмущений субдоминантной компоненты среди гравитационными потенциалами, порождёнными возмущениями главной компоненты, описываются, исходя из ковариантных законов сохранения (5.6) и (5.7), применённых к субдоминантной компоненте. В этих уравнениях неизвестные функции $\delta_\lambda(\eta)$ и $v_\lambda(\eta)$ относятся к субдоминантной компоненте среды, а потенциал Φ и зависимость масштабного фактора от времени определяются главной компонентой и считаются известными. Видно, что наличие гравитационного потенциала, как и следовало ожидать, приводит к индуцированию возмущений в субдоминантной компоненте. Субдоминантная материя “сваливается” в гравитационные ямы, образованные основной компонентой.

6.2.1 Возмущения тёмной материи

Переходя к подробному анализу, рассмотрим сначала адиабатическую моду на радиационно-доминированной стадии. Поведение возмущений доминирующей релятивистской компоненты даются формулами раздела 4.2. Изучим возмущения тёмной материи, индуцированные потенциалом (4.12). Положив $w = u_s^2 = 0$, приведём уравнения (5.6) и (5.7) к простому виду

$$\delta'_{CDM} - k^2 v_{CDM} = 3\Phi' \quad (6.5)$$

$$v'_{CDM} + \frac{1}{\eta} v_{CDM} = -\Phi \quad (6.6)$$

где мы использовали тот факт, что $a \propto \eta$ на радиационно-доминированной стадии, см. (2.6). Потенциал (4.12) довольно быстро падает при больших временах, поэтому при $u_s k \eta \gg 1$ (глубоко под звуковым горизонтом) система (6.5), (6.6) становится однородной,

$$\delta'_{CDM} - k^2 v_{CDM} = 0 \quad (6.7)$$

$$v'_{CDM} + \frac{1}{\eta} v_{CDM} = 0 \quad (6.8)$$

Решением (6.8) служит

$$v_{CDM} = \frac{c_1}{k^2 \eta},$$

где c_1 — безразмерная постоянная, а уравнение (6.7) даёт (ср. (1.27))

$$\delta_{CDM} = c_1 \ln k \eta + c_2,$$

Таким образом, как мы уже знаем из раздела 1.2, под горизонтом возмущения тёмной материи, вообще говоря, логарифмически растут на радиационно-доминированной стадии.

Заметим, однако, что при отсутствии источников в правых частях (6.5), (6.6) логарифмически растущей моды в δ_{CDM} не было бы. Действительно, эта мода расходилась бы при $\eta \rightarrow 0$ и была бы прямым аналогом падающей моды. В присутствии гравитационных потенциалов, порождённых возмущениями релятивистской

компоненты, картина иная: эти потенциалы действительно индуцируют моду, логарифмически растущую при $u_s k \eta \gg 1$ (здесь и далее в этой Главе, если не оговорено противное, u_s — это скорость звука в барион-фотонной компоненте). Для нахождения коэффициентов c_1 и c_2 решим сначала уравнение (6.6) с потенциалом, заданным формулой (4.12). Решение, конечное при $\eta \rightarrow 0$, имеет вид

$$v_{CDM} = -\frac{1}{\eta} \int_0^\eta d\tilde{\eta} \tilde{\eta} \Phi(\tilde{\eta}) ,$$

причём $v_{CDM} \rightarrow 0$ при $\eta \rightarrow 0$. После этого найдём решение уравнения (6.5),

$$\delta_{CDM}(\eta) = 3\Phi(\eta) + c - k^2 \int_0^\eta \frac{d\hat{\eta}}{\hat{\eta}} \int_0^{\hat{\eta}} d\tilde{\eta} \tilde{\eta} \Phi(\tilde{\eta}) .$$

где c — постоянная. Выразив её через начальные значения $\delta_{CDM,(i)}$ и $\Phi_{(i)}$ и поменяв порядок интегрирования, получим

$$\delta_{CDM}(\eta) = \delta_{CDM,(i)} + 3(\Phi(\eta) - \Phi_{(i)}) - k^2 \int_0^\eta d\tilde{\eta} \tilde{\eta} \Phi(\tilde{\eta}) \ln \frac{\eta}{\tilde{\eta}} .$$

При $u_s k \eta \gg 1$ потенциал (4.12) быстро убывает, интеграл сходится, и мы получаем в этом пределе

$$\delta_{CDM}(\eta) = \delta_{CDM,(i)} - 9\Phi_{(i)} \cdot \left[\ln(u_s k \eta) + \mathbf{C} - \frac{2}{3} \right] , \quad (6.9)$$

где $\mathbf{C} = 0.577\dots$ — постоянная Эйлера. Мы учли, что $u_s^2 = 1/3$ и воспользовались табличными интегралами

$$\sqrt{\frac{\pi}{2}} \int_0^\infty J_{3/2}(z) \frac{dz}{\sqrt{z}} = 1 , \quad \sqrt{\frac{\pi}{2}} \int_0^\infty J_{3/2}(z) \ln z \frac{dz}{\sqrt{z}} = 1 - \mathbf{C} . \quad (6.10)$$

Из (6.9) видно, что при больших $u_s k \eta$ главным эффектом является логарифмический рост возмущений плотности тёмной материи, при этом их начальное значение $\delta_{CDM,(i)}$ не слишком существенно. Вспоминая соотношения (5.22) и (5.20), имеем окончательно для адиабатической моды на радиационно-доминированной стадии

$$\delta_{CDM}(\eta) = -9\Phi_{(i)} \left(\ln \frac{k\eta}{\sqrt{3}} + \mathbf{C} - \frac{1}{2} \right) \quad (6.11)$$

Видно, что возмущения CDM-компоненты вырастают довольно сильно по сравнению с начальным значением $\delta_{CDM,(i)} = -(3/2)\Phi_{(i)}$.

Возмущения тёмной материи в свою очередь генерируют вклад в гравитационный потенциал. При больших $k\eta$ он определяется из (5.1), причём в пределе $u_s k \eta \gg 1$ производными по времени можно пренебречь. Обозначив дополнительный вклад Φ_{CDM} (поскольку он обусловлен возмущениями тёмной материи), имеем для него

$$\Phi_{CDM}(\eta) = -\frac{a^2(\eta)}{k^2} 4\pi G \rho_{CDM} \delta_{CDM}(\eta) . \quad (6.12)$$

На радиационно-доминированной стадии этот вклад мал по сравнению с (4.12) в силу малости ρ_{CDM} . Обусловленный возмущениями тёмной материи вклад в гравитационный потенциал становится главным при переходе на пылевидную стадию.

Для оценки возмущений плотности тёмной материи на пылевидной стадии (то есть на стадии, где она доминирует) вспомним (см. раздел 4.3), что на этой стадии значение гравитационного потенциала замораживается, а возмущения плотности растут как $a(\eta)$. Рост последних начинается, грубо говоря, со значения (6.11), взятого при $\eta = \eta_{eq}$. Более точная оценка имеет вид (вывод приведён ниже; численный множитель под знаком логарифма составляет предмет задачи 1, он уточнён в конце раздела, см. (6.26))

$$\delta_{CDM}(\eta) = -\frac{27}{2} \frac{a(\eta)}{a_{eq}} \Phi_{(i)} \ln(0.2k\eta_{eq}) \quad (6.13)$$

Отметим усиление этого выражения фактором $3/2$ по сравнению с оценкой, получившейся бы простой спивкой с (6.11) при $\eta = \eta_{eq}$. Из (6.12) следует, что гравитационный потенциал, соответствующий этим возмущениям, равен

$$\begin{aligned} \Phi_{CDM} &= \frac{27}{2} \Phi_{(i)} 4\pi G \rho_{CDM} \frac{a^2}{k^2} \frac{a}{a(\eta_{eq})} \ln(0.2k\eta_{eq}) \\ &= \frac{81}{4} \Phi_{(i)} \frac{H_0^2 a_0^2}{k^2} \Omega_{CDM} (1 + z_{eq}) \ln(0.2k\eta_{eq}) . \end{aligned} \quad (6.14)$$

Для некоторых приложений последнее выражение удобно преобразовать, воспользовавшись соотношением (2.15),

$$\Phi_{CDM} = \Phi_{(i)} \cdot 81 I^2 \frac{\Omega_{CDM}}{\Omega_M} (1 + z_{eq}) \frac{\ln(0.2k\eta_{eq})}{(k\eta_0)^2} . \quad (6.15)$$

Гравитационный потенциал (6.14) не зависит от времени, как и должно быть. Отметим, что приближение, в рамках которого получен результат (6.14), применимо лишь при $u_s k \eta_{eq} \gg 1$, при этом аргумент логарифма в (6.14) должен превышать единицу. Поэтому знак Φ_{CDM} на пылевидной стадии (как, впрочем, и на РД-стадии) совпадает со знаком $\Phi_{(i)}$.

Видно, что описанный механизм генерации возмущений тёмной материи на радиационно-доминированной стадии весьма эффективен: он приводит как к логарифмическому усилению, так и к увеличению численного фактора по сравнению с возмущениями, входящими под горизонт на пылевидной стадии.

Отметим, что формулы (6.13) и (6.14) работают не очень хорошо в эпоху рекомбинации. Это связано с тем обстоятельством, что переход на пылевидную стадию и эпоха рекомбинации разнесены несильно во времени, и режим, в котором Φ_{CDM} держится постоянным, а δ_{CDM} растёт как $a(\eta)$, к эпохе рекомбинации ещё не вполне устанавливается. Тем не менее, в дальнейшем мы будем пользоваться выражениями (6.13) и (6.14) для оценок.

Отметим ещё, что результат (6.13), (6.14) справедлив в пренебрежении вкладами барионов как в среднюю плотность энергии во Вселенной, так и в возмущения пылевидной материи, то есть в формальном пределе $\Omega_B/\Omega_{CDM} \rightarrow 0$. Влияние барионов проявляется по-разному до эпохи рекомбинации и после неё. Мы коротко рассмотрим это влияние в период до рекомбинации в конце этого раздела, а в разделе 7.1 мы остановимся на вопросе о том, как эволюционируют неоднородности барионов и тёмной материи после рекомбинации.

Для получения формулы (6.13) заметим, что потенциал (6.12) не очень быстро меняется со временем вблизи $\eta = \eta_{eq}$. Связанные с ним возмущения релятивистской

компоненты малы: из (5.5) следует, что соответствующий вклад в $\delta_{B\gamma}$ имеет порядок Φ_{CDM} , в то время как из (5.1) получаем

$$\delta_{tot} \sim \frac{k^2}{a^2 H^2} \Phi_{CDM} \gg \Phi_{CDM} .$$

Поэтому для вычисления δ_{CDM} генерацией возмущений в релятивистской компоненте можно пренебречь при $\eta \sim \eta_{eq}$. Для тёмной материи имеем уравнения (5.6), (5.7), то есть с учётом потенциала Φ_{CDM}

$$\delta'_{CDM} - k^2 v_{CDM} = 3\Phi'_{CDM} , \quad (6.16a)$$

$$v'_{CDM} + \frac{a'}{a} v_{CDM} = -\Phi_{CDM} . \quad (6.16b)$$

Учитывая, что $k^2 \Phi_{CDM} \gg \Phi''_{CDM}$, и воспользовавшись (6.12), получаем отсюда уравнение на δ_{CDM} :

$$\delta''_{CDM} + \frac{a'}{a} \delta'_{CDM} - 4\pi G \rho_{CDM} a^2 \delta_{CDM} = 0 . \quad (6.17)$$

Это уравнение справедливо как вблизи $\eta = \eta_{eq}$, так и при $\eta \gg \eta_{eq}$. При $\eta \ll \eta_{eq}$ его решение должно сшиваться с (6.11).

Уравнение (6.17) удобно решать, перейдя к переменной

$$x = \frac{a}{a_{eq}} .$$

В пренебрежении вкладом барионов в плотность энергии в момент $\eta = \eta_{eq}$ выполняется

$$\frac{8\pi}{3} G \rho_{CDM}(\eta_{eq}) = \frac{8\pi}{3} G \rho_{rad}(\eta_{eq}) = \frac{1}{2} H^2(\eta_{eq}) \equiv \frac{1}{2} H_{eq}^2 ,$$

поэтому при произвольных временах

$$4\pi G \rho_{CDM} = \frac{3}{4} H_{eq}^2 \frac{1}{x^3} , \quad 4\pi G \rho_{rad} = \frac{3}{4} H_{eq}^2 \frac{1}{x^4} .$$

Уравнения (2.3) и (2.4) можно теперь переписать в виде

$$\frac{a'^2}{a^2} = \frac{1}{2} H_{eq}^2 a_{eq}^2 \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} \right) , \quad \frac{a''}{a} = \frac{1}{4} H_{eq}^2 a_{eq}^2 \frac{1}{x} .$$

Используя эти соотношения, преобразуем уравнение (6.17):

$$x(1+x) \frac{d^2 \delta_{CDM}}{dx^2} + \left(1 + \frac{3}{2}x \right) \frac{d\delta_{CDM}}{dx} - \frac{3}{2} \delta_{CDM} = 0 . \quad (6.18)$$

Одно из решений этого уравнения равно, как легко убедиться,

$$\delta_{CDM}^{(1)} = C_1 \left(1 + \frac{3}{2}x \right) , \quad (6.19)$$

второе получается методом вариации постоянных и равно

$$\begin{aligned} \delta_{CDM}^{(2)} &= C_2 \left(1 + \frac{3}{2}x \right) \int_{\infty}^x \frac{d\tilde{x}}{\tilde{x} \sqrt{(1+\tilde{x})(1+3\tilde{x}/2)^2}} \\ &= C_2 \left(1 + \frac{3}{2}x \right) \left(\ln \frac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt{1+x}+1} + 6 \frac{\sqrt{1+x}}{2+3x} \right) . \end{aligned} \quad (6.20)$$

Из этих выражений имеем с логарифмической точностью при малых x

$$\delta_{CDM} = C_1 + C_2 \ln x = C_1 + C_2 \ln \frac{\eta}{\eta_{eq}} .$$

Сравнивая с (6.11) получаем, опять-таки с логарифмической точностью

$$C_2 = -9\Phi_{(i)}, \quad C_1 = -9\Phi_{(i)} \ln k\eta_{eq} .$$

При больших x вклад, пропорциональный C_2 мал, и δ_{CDM} равно

$$\delta_{CDM} = C_1 \cdot \frac{3}{2}x ,$$

что и приводит к (6.13) с логарифмической точностью.

▷ Задача 1. Показать, что с точностью до поправок порядка $(k\eta_{eq})^{-1}$, a_{eq}/a и Ω_B/Ω_{CDM} контраст плотности тёмной материи на пылевидной стадии даётся выражением

$$\begin{aligned} \delta_{CDM}(\eta) &= -\frac{27}{2} \frac{a(\eta)}{a_{eq}} \Phi_{(i)} \left[\ln(k\eta_{eq}) + \mathbf{C} - \frac{7}{2} + \ln \frac{2}{\sqrt{6} - \sqrt{3}} \right] \\ &= -\frac{27}{2} \frac{a(\eta)}{a_{eq}} \Phi_{(i)} \ln(0.15k\eta_{eq}) . \end{aligned} \quad (6.21)$$

Указание: воспользоваться результатами раздела 2.1.2. Поправки по параметру Ω_B/Ω_M изменяют коэффициент под логарифмом; это изменение учтено в (6.13).

Формулы (6.13) и (6.14) были получены в пренебрежении вкладом барионов в плотность энергии во Вселенной на МД-стадии. Убедимся, что наличие этого вклада приводит к уменьшению контраста плотности тёмной материи и соответствующего гравитационного потенциала по сравнению с (6.13) и (6.14), однако это уменьшение невелико. Повторяя рассуждения, приведённые после уравнения (6.17), приходим к уравнению

$$x(1+x) \frac{d^2\delta_{CDM}}{dx^2} + \left(1 + \frac{3}{2}x\right) \frac{d\delta_{CDM}}{dx} - \frac{3}{2} \frac{\Omega_{CDM}}{\Omega_M} \delta_{CDM} = 0 , \quad (6.22)$$

где по прежнему $x = a/a_{eq}$. Оно отличается от (6.18) наличием в последнем слагаемом дополнительного фактора Ω_{CDM}/Ω_M , появившегося из-за того, что при замене в (6.17) ρ_{CDM} из уравнения Фридмана мы учли вклад барионов в полную плотность энергии. Уравнение (6.22) можно решить аналитически. Переход к переменной $y = -x$ сводит это уравнение к уравнению на гипергеометрическую функцию ${}_2F_1$, см. [6]. Общим решением уравнения (6.22) является линейная комбинация следующих функций:

$$\begin{aligned} \delta_{CDM}^{(i)} &= \frac{1}{(1+x)^{r_i}} \cdot {}_2F_1 \left(r_i, r_i + \frac{1}{2}, 2r_i + \frac{1}{2}, \frac{1}{1+x} \right) , \quad i = 1, 2 , \\ r_{1,2} &= \frac{1}{4} \cdot \left(1 \mp \sqrt{1 + \frac{24\Omega_{CDM}}{\Omega_M}} \right) . \end{aligned} \quad (6.23)$$

Несложно убедиться, используя частное значение гипергеометрической функции (см. [6]), что при $\Omega_B = 0$ функции $(3/2)C_1\delta_{CDM}^{(1)}$ и $(-4/15)C_2\delta_{CDM}^{(2)}$ в точности переходят в выражения (6.19) и (6.20), соответственно. При конечном Ω_B в формальном пределе больших масштабных факторов, $x \rightarrow \infty$, ${}_2F_1$ обращается в единицу, так что

$$\delta_{CDM}^{(1,2)} \propto a^{\pm \frac{1}{4} \cdot \left(\sqrt{1 + \frac{24\Omega_{CDM}}{\Omega_M}} \mp 1 \right)} .$$

Это значит, что отсутствие растущих барионных мод приводит в рассматриваемой двухкомпонентной среде к подавлению темпа роста относительных возмущений тёмной материи, связанному с тем, что вклад

барионов в полную плотность энергии Вселенной увеличивает темп её расширения по сравнению с однокомпонентным случаем. При небольших Ω_B/Ω_M это подавление для растущей моды имеет вид

$$\delta_{CDM} \propto a^{1-\frac{3\Omega_B}{5\Omega_M}}. \quad (6.24)$$

Для измеренных значений (2.9) величин Ω_B и Ω_{CDM} поправка к показателю степени составляет около 10%. Отметим, что в реалистичной Вселенной обсуждаемая асимптотика не достигается, поскольку переход на пылевидную стадию и рекомбинация не столь далеки по времени друг от друга. Тем не менее, численно небольшой эффект подавления роста имеет место и в реалистичном случае. Отметим, что аналогичным образом учитывается влияние массивных нейтрино на эволюцию спектра материи, см. раздел 8.4.3.

Решение для растущей моды возмущений получим из условия сшивки решения (6.23) в пределе $x \rightarrow 0$ с (6.11). Для гипергеометрической функции вещественного аргумента при $z \rightarrow 0$ справедлива асимптотика [6]

$${}_2F_1(c, b, c+b; z \rightarrow 0) = \frac{\Gamma(c+b)}{\Gamma(c)\Gamma(b)} \cdot [2\psi(1) - \psi(c) - \psi(b) - \ln(1-z)],$$

где ψ — производная логарифма Г-функции. Поэтому в пределе $x \rightarrow 0$ имеем

$$\delta_{CDM}^{(i)} \rightarrow \frac{\Gamma(2r_i + \frac{1}{2})}{\Gamma(r_i)\Gamma(r_i + \frac{1}{2})} \left[-\ln x + 2\psi(1) - \psi(r_i) - \psi\left(r_i + \frac{1}{2}\right) \right].$$

Далее, при малых η имеет место соотношение

$$x = \frac{a(\eta)}{a_{eq}} = 2(\sqrt{2}-1) \frac{\eta}{\eta_{eq}}.$$

Отсюда в результате сшивки получим

$$\delta_{CDM}(a, \mathbf{k}) \simeq -9 \cdot \Phi_{(i)}(\mathbf{k}) \cdot \left(D_1 \cdot \delta_{CDM}^{(1)} + D_2 \cdot \delta_{CDM}^{(2)} \right), \quad (6.25)$$

где

$$D_1 = -\frac{\Gamma(r_1)\Gamma(r_1 + \frac{1}{2})}{\Gamma(2r_1 + \frac{1}{2})} \cdot \frac{\ln \frac{0.6a_{eq}}{a_x} + 2\psi(1) - \psi(r_2) - \psi(r_2 + \frac{1}{2})}{\psi(r_1) - \psi(r_2) + \psi(r_1 + \frac{1}{2}) - \psi(r_2 + \frac{1}{2})},$$

$$D_2 = D_1(r_1 \leftrightarrow r_2, B_1 \leftrightarrow B_2).$$

Здесь a_x обозначает величину масштабного фактора на момент входа волны конформного импульса k под горизонт. Для неё справедливо

$$a_x = \frac{a_{eq}^2 H_{eq}}{\sqrt{2}k} = \frac{2(\sqrt{2}-1)a_{eq}}{k\eta_{eq}}.$$

Линейно растущее решение содержится в $\delta_{CDM}^{(1)}$. Для него в линейном порядке по Ω_B/Ω_M получим

$$\delta_{CDM}(a) \approx -\frac{27}{2} \frac{a}{a_{eq}} \Phi_{(i)} \left[\left(1 - \frac{0.6\Omega_B}{\Omega_M} \right) \ln(k\eta_{eq}) + \left(1 - \frac{\Omega_B}{\Omega_M} \right) \left(\mathbf{C} - \frac{7}{2} + \ln \frac{2}{\sqrt{6} - \sqrt{3}} \right) \right]. \quad (6.26)$$

Видно, что в пределе $\Omega_B = 0$ из (6.26) восстанавливается решение (6.19), полученное в пренебрежении барионами. Для используемых нами величин космологических параметров, см. раздел 2.1.2, учёт барионов приводит к уменьшению амплитуды возмущений холодной тёмной материи (и, соответственно, гравитационных потенциалов) на 12%. Кроме того, на 25% увеличивается величина не зависящего от импульса вклада. Это приводит к заметному изменению численного коэффициента под знаком логарифма в (6.21): 0.15 заменяется на 0.2.

- ▷ Задача 2. Для нереалистичного выбора космологических параметров $\Omega_B = 2\Omega_{CDM}$ найти точное аналитическое решение уравнения (6.22) в элементарных функциях. Получить явное выражение для растущей моды и сравнить его с результатом линейного приближения (6.26).

6.2.2 Возмущения барион-фотонной компоненты

Рассмотрим теперь поведение барион-фотонной компоненты на пылевидной стадии, начиная от перехода с радиационно-доминированной стадии и заканчивая рекомбинацией, $\eta_{eq} \lesssim \eta \leq \eta_r$. Такой анализ важен, в частности, с точки зрения изучения свойств реликтового излучения. В связи с этим мы будем интересоваться относительными возмущениями плотности энергии фотонов $\delta_\gamma = \delta\rho_\gamma/\rho_\gamma$ и барионов $\delta_B = \delta\rho_B/\rho_B$ по отдельности. Для анализа существенно, что между окончанием радиационно-доминированной стадии и рекомбинацией ρ_B и ρ_γ имеют один и тот же порядок величины, см. ниже.

Благодаря интенсивному рассеянию фотонов на электронах и кулоновскому взаимодействию между барионами и электронами барион-фотонная плазма представляет собой единую среду в том смысле, что *скорости барионной и фотонной компонент одинаковы*. Это утверждение далеко не точное: во-первых, оно справедливо только до рекомбинации, а во-вторых, как мы уже упоминали в начале главы, скорости действительно одинаковы только в случае мод с достаточно большой длиной волны. Соотношение

$$v_\gamma = v_B \equiv v_{B\gamma} \quad (6.27)$$

является основным соотношением приближения тесной связи; оно уточняет, что нужно понимать под приближением идеальной жидкости для барион-фотонной компоненты. Мы обсудим пределы применимости этого приближения в разделе 8.5, а здесь просто будем им пользоваться.

В приближении тесной связи равенство (6.27) справедливо вне зависимости от того, какая мода возмущений рассматривается. Для адиабатической моды, кроме того, справедливы соотношения $\delta_B = 3\delta T/T$, $\delta_\gamma = 4\delta T/T$, так что

$$\delta_B = \frac{3}{4}\delta_\gamma . \quad (6.28)$$

На пылевидной стадии барион-фотонная компонента является субдоминантной, и для её описания мы снова воспользуемся уравнениями ковариантного сохранения, но теперь для барион-фотонной компоненты. Сумма тензоров энергии-импульса фотонов и барионов удовлетворяет, разумеется, законам ковариантного сохранения, то есть для барион-фотонной плазмы как целого справедливы уравнения (5.4) и (5.5), в которых $\delta\rho_\lambda = \delta\rho_\gamma + \delta\rho_B$, $\delta p_\lambda = \delta p_\gamma = (1/3)\delta\rho_\gamma$, а $v_\lambda \equiv v_{B\gamma}$ — общий потенциал скоростей. Полезно получить уравнения для δ_B и δ_γ по отдельности, не предполагая пока связи (6.28); мы ими воспользуемся для изучения барионной моды постоянной кривизны в разделе 6.5. Учтём для этого, что барионы на интересующих нас космологических этапах являются нерелятивистскими. Это означает, в частности, что перенос *энергии* от фотонов к барионам (и наоборот) отсутствует. Поэтому уравнение (5.4), представляющее собой ковариантный закон сохранения энергии, выполняется для барионов и фотонов по отдельности. В этом можно убедиться и рассматривая закон сохранения барионного числа.

▷ *Задача 3.* Рассмотрим барионный ток j_B^μ . В локально-лоренцевой системе отсчёта, где барионы покоятся, он равен $j_B^\mu = (n_B, 0, 0, 0)$. В произвольной системе отсчёта имеем

$$j_B^\mu = n_B u^\mu ,$$

где u^μ — 4-скорость. Ток удовлетворяет ковариантному закону сохранения

$$\nabla_\mu j_B^\mu = 0 . \quad (6.29)$$

(1) Показать, что из ковариантного закона сохранения (6.29) следует сохранение барионного числа (интеграл от n_B по бесконечной пространственно-подобной гиперповерхности не зависит от выбора этой гиперповерхности).

(2) Учитывая, что $\rho_B = m_p n_B$, $\delta\rho_B = m_p \delta n_B$ и $p_B = \delta p_B = 0$, показать, что линеаризованный закон сохранения (6.29) эквивалентен уравнению (5.4), записанному для барионной компоненты.

Из ковариантного закона сохранения (5.4) для всей барион-фотонной плазмы при учёте (6.27) и очевидных соотношений $\rho_{B\gamma} = \rho_B + \rho_\gamma$ и т.д следует тогда, что уравнение (5.4) выполняется и для фотонной компоненты.

Итак, уравнение (5.4), записанное по отдельности для барионов и фотонов, даёт

$$\delta'_B - k^2 v_{B\gamma} = 3\Phi' \quad (6.30)$$

$$\delta'_\gamma - \frac{4}{3}k^2 v_{B\gamma} = 4\Phi' . \quad (6.31)$$

Уравнение (5.5) справедливо для барион-фотонной компоненты в целом. Его удобно записать в терминах величин δ_γ и

$$R_B = \frac{3\rho_B}{4\rho_\gamma} .$$

Воспользуемся тем, что

$$\rho'_B = -3\frac{a'}{a}\rho_B , \quad \rho'_\gamma = -4\frac{a'}{a}\rho_\gamma$$

и подставим $p = p_\gamma = \rho_\gamma/3$. В результате уравнение (5.5) приобретает вид

$$v'_{B\gamma} + \frac{a'}{a} \frac{R_B}{1+R_B} v_{B\gamma} + \frac{3}{4} u_s^2 \delta_\gamma + \Phi = 0 , \quad (6.32)$$

где

$$u_s^2 = \frac{\delta p}{\delta \rho} = \frac{1}{3} \frac{\delta \rho_\gamma}{\delta \rho_\gamma + \delta \rho_B} = \frac{1}{3(1+R_B)} \quad (6.33)$$

— квадрат скорости звука в барион-фотонной плазме. Считая производные по η гравитационного потенциала Φ малыми по сравнению с k (что вполне оправдано для мод под горизонтом), исключим из (6.32) потенциал скоростей с помощью уравнения (6.31) и получим уравнение на δ_γ ,

$$\delta''_\gamma + 2\frac{a'}{a} \gamma_{B\gamma} \delta'_\gamma + k^2 u_s^2 \delta_\gamma = -\frac{4}{3} k^2 \Phi , \quad (6.34)$$

где

$$\gamma_{B\gamma} = \frac{R_B}{2(1+R_B)} .$$

Уравнения (6.30), (6.31) и (6.34) справедливы для всех мод возмущений.

Продолжим обсуждение адиабатической моды. Из (6.30) и (6.31) видно, что соотношение (6.28) действительно согласуется с уравнениями для барион-фотонных возмущений. Далее, в рассматриваемом случае пылевидной стадии в качестве источника в уравнении (6.34) выступает потенциал (6.15). В основном порядке по k частным решением уравнения (6.34) служит

$$\delta_\gamma = -\frac{4}{3u_s^2}\Phi_{CDM} = -4(1+R_B)\Phi_{CDM}. \quad (6.35)$$

В этом проявляется эффект индуцирования возмущений барион-фотонной компоненты гравитационным потенциалом, связанным с тёмной материйей. Этот вклад почти постоянен во времени, поскольку гравитационный потенциал (6.15) не зависит от времени вовсе.

▷ *Задача 4.* Оценить точность, с которой справедлива формула (6.35) для частного решения уравнения (6.34) при $\eta_{eq} < \eta < \eta_r$.

Решение однородного уравнения описывает осциллирующие возмущения плотности барион-фотонной компоненты, являющиеся продолжением осцилляций (4.14) после перехода на пылевидную стадию. Данное решение для мод под звуковым горизонтом найдём, избавляясь, как обычно, от члена с δ'_γ (ср. с задачей 6 в разделе I.2.4) и после этого пренебрегая производными медленно меняющихся параметров по сравнению с k (по-существу здесь используется ВКБ-приближение):

$$\delta_\gamma(\eta) = A \frac{1}{(3u_s^2)^{1/4}} \exp\left(-\int_0^\eta d\tilde{\eta} \gamma_{B\gamma} \frac{a'}{a}\right) \cos\left(k \int_0^\eta d\tilde{\eta} u_s\right), \quad (6.36)$$

где A — константа. Это решение справедливо и на радиационно-доминированной стадии, при этом вкладом барионов в возмущения плотности энергии можно на этой стадии пренебречь, то есть положить $\delta_\gamma = \delta_{B\gamma}$ и $u_s^2 = 1/3$. Сшивая его с (4.14) при $k^{-1} \ll \eta \ll \eta_{eq}$, найдём

$$A = 6\Phi_{(i)}, \quad (6.37)$$

при этом нижний предел интегрирования в аргументе косинуса нужно положить равным нулю. Полный контраст плотности энергии фотонов даётся суммой выражений (6.35) и (6.36). Учтём, наконец, что $R_B \propto a$. Интеграл в экспоненте в (6.36) легко вычисляется,

$$\exp\left(-\int_0^\eta d\tilde{\eta} \gamma_{B\gamma} \frac{a'}{a}\right) = \frac{1}{\sqrt{1+R_B(\eta)}}. \quad (6.38)$$

Используя (6.15), (6.33), мы получаем окончательное выражение для возмущений фотонов в приближении тесной связи:

$$\delta_\gamma = \Phi_{(i)} \cdot \left[-324 \cdot (1+R_B) I^2 \frac{\Omega_{CDM}}{\Omega_M} (1+z_{eq}) \frac{\ln(0.2k\eta_{eq})}{(k\eta_0)^2} + \frac{6}{(1+R_B)^{1/4}} \cos\left(k \int_0^\eta d\tilde{\eta} u_s\right) \right], \quad (6.39)$$

Подчеркнём ещё раз, что это выражение справедливо лишь при $k\eta_{eq} \gg 1$, при этом аргумент логарифма превышает единицу.

Выражение (6.39) содержит слагаемое, монотонно спадающее с увеличением импульса, и осциллирующее слагаемое с вполне определённой фазой. Это имеет прямое отношение к свойствам наблюдаемой анизотропии реликтового излучения, как мы увидим в Главе 9. Также будет существенно, что как следует из уравнения (6.31), на пылевидной стадии, когда гравитационные потенциалы остаются постоянными³, между потенциалом скоростей барион-фотонной среды и контрастом плотности фотонов по-прежнему имеется простая связь

$$kv_{B\gamma} = kv_\gamma = \frac{3}{4k}\delta'_\gamma . \quad (6.40)$$

Таким образом, как и на РД-стадии, потенциал скоростей осциллирует с той же частотой, что и контраст плотности фотонов, а фазы этих осцилляций сдвинуты на $\pi/2$.

Для дальнейшего полезно оценить значение величины R_B на момент последнего рассеяния фотонов, $z_r = 1060$. При этом необходимо учесть, что к этому времени часть барионов и электронов (25%, см. Главу I.8) уже связана в атомы гелия, так что эффективная плотность числа барионов в ионизированной барион-фотонной среде равна $0.75n_B$, где n_B — полная плотность числа барионов во Вселенной. Вспомним, что плотность энергии фотонов при температуре T равна (см. раздел I.5.1)

$$\rho_\gamma = \frac{\pi^2}{15} T^4 .$$

При интересующих нас температурах эффективная плотность энергии барионов даётся выражением

$$\rho_B = 0.75 \cdot m_p \eta_B n_\gamma = 0.75 \cdot m_p \eta_B \frac{2\zeta(3)}{\pi^2} T^3 ,$$

где η_B — барион-фотонное отношение, m_p — масса протона и $\zeta(3) = 1.20 \dots$. Отсюда

$$R_B = 0.75 \cdot \frac{3\rho_B}{4\rho_\gamma} = 0.75 \cdot \frac{45\zeta(3)}{2\pi^4} \eta_B \frac{m_p}{T} .$$

Замечательно, что величина $R_B(\eta_r)$ не слишком мала, но и не слишком велика: вспоминая значения массы протона $m_p = 0.938$ ГэВ и температуры рекомбинации $T_r \simeq 0.25$ эВ, получаем

$$R_B(\eta_r) \simeq 0.78 \cdot 10^9 \eta_B .$$

Измеренное значение барион-фотонного отношения равно $\eta_B \simeq 0.615 \cdot 10^{-9}$, так что

$$R_B(\eta_r) \simeq 0.48 . \quad (6.41)$$

Тот факт, что значение R_B оказалось порядка единицы, а не близким к нулю или большим, является следствием двух обстоятельств, которые выглядят как случайные совпадения: сравнимых между собой значений Ω_{CDM} и Ω_B и близости эпохи РД/МД-перехода и эпохи рекомбинации. Именно благодаря этим обстоятельствам

³На самом деле из-за близости моментов РД/МД-перехода и рекомбинации гравитационные потенциалы несколько изменяются в интересующую нас эпоху, однако при оценке потенциала скоростей в барион-фотонной среде этим явлением можно пренебречь.

влияние барионов на возмущения плотности (и, следовательно, на реликтовое излучение) вполне заметно, однако оно не настолько сильно, чтобы к периоду рекомбинации полностью погасить осциллирующую компоненту этих возмущений. Связанный с барионами фактор подавления осциллирующего слагаемого в (6.39) численно составляет около 0.9.

Зависимостью возмущений барион-фотонной компоненты (и, соответственно, свойств реликтового излучения) от η_B пользуются для определения барион-фотонного отношения из измерений анизотропии и поляризации реликтового излучения. Как мы уже говорили в книге [1], эти измерения хорошо согласуются с данными о первичном нуклеосинтезе.

6.3 Адиабатические моды с промежуточными импульсами

Формулы разделов 6.1 и 6.2 справедливы для длинноволновых мод с $k\eta_{eq} \ll 1$ и коротковолновых мод с $ku_s\eta_{eq} \gg 1$, соответственно. С точки зрения свойств реликтового излучения большой интерес представляет и область промежуточных длин волн. Для неё надёжное аналитическое описание отсутствует. Тем не менее, представление о поведении мод с промежуточными импульсами можно получить, считая формально, что эпохи МД/РД-перехода и рекомбинации далеко разнесены друг от друга, то есть $\eta_r \gg \eta_{eq}$, и рассматривая возмущения, входящие под звуковой горизонт в период между этими двумя эпохами. Для таких волн формально выполняется $\eta_{eq} \ll \eta_x \ll \eta_r$, где η_x — конформное время пересечения звукового горизонта.

В указанном приближении гравитационный потенциал при $\eta \gg \eta_{eq}$ даётся выражением (6.3), а контраст плотности фотонов по-прежнему описывается уравнением (6.34). Поскольку для адиабатических мод потенциалы скоростей при пересечении горизонта близки к нулю, то решением этого уравнения вновь будет сумма частного решения (6.35) и решения (6.36) однородного уравнения. Константа A в (6.36) определяется из условия спшивки на акустическом горизонте. Для рассматриваемых волн это условие выглядит следующим образом (см. (6.4)),

$$\delta_\gamma(\eta_x, \mathbf{k}) = -\frac{12}{5}\Phi_{(i)}(\mathbf{k}) ,$$

Отсюда получим

$$\frac{A}{(1 + R_B(\eta_x))^{1/4}} = \frac{6}{5}(1 + 3R_B(\eta_x))\Phi_{(i)} .$$

Итак, в рассматриваемом приближении контраст плотности фотонов для моды, пересекающей акустический горизонт в момент $\eta = \eta_x$, эволюционирует по закону

$$\begin{aligned} \delta_\gamma(\eta, \mathbf{k}) &= \frac{18}{5}\Phi_{(i)}(\mathbf{k}) \\ &\times \left[-(1 + R_B(\eta)) + \left(\frac{1}{3} + R_B(\eta_x)\right) \left(\frac{1 + R_B(\eta_x)}{1 + R_B(\eta)}\right)^{1/4} \cos\left(k \int_0^\eta d\tilde{\eta} u_s\right) \right] . \end{aligned} \quad (6.42)$$

Мы видим, что свойства рассматриваемых мод качественно совпадают со свойствами мод, входящих под горизонт глубоко на радиационно-доминированной стадии.

Разумеется, использованное только что приближение плохо работает для реальной Вселенной: величину $\eta_r/\eta_{eq} \simeq 2.3$ нельзя считать большим параметром. Однако вместе с результатами раздела 6.2 наше рассуждение показывает, что для всех мод, входящих под звуковой горизонт до эпохи рекомбинации, справедлива следующая качественная картина. Гравитационный потенциал незадолго до эпохи рекомбинации имеет вид

$$\Phi(\mathbf{k}, \eta) = F(k, \eta)\Phi_{(i)}(\mathbf{k}), \quad (6.43)$$

где $F(k, \eta)$ — функция, медленно меняющаяся со временем. Контраст плотности энергии фотонов содержит компоненту, медленно меняющуюся со временем, и осциллирующую часть. Для медленно меняющейся компоненты справедливо соотношение (6.35), а фаза осциллирующей части фиксирована. Таким образом, можно записать

$$\delta_\gamma(\mathbf{k}, \eta) = -4[1 + R_B(\eta)]\Phi(\mathbf{k}, \eta) + 4\Phi_{(i)}(\mathbf{k}) \cdot A(k, \eta) \cos\left(k \int_0^\eta u_s d\tilde{\eta}\right), \quad (6.44)$$

где $A(k, \eta)$ — ещё одна медленно меняющаяся функция времени (численный множитель 4 перед этой функцией выбран для удобства). При этом как $F(k, \eta)$, так и $A(k, \eta)$ положительны. Такое поведение приводит к характерной осцилляционной картине углового спектра анизотропии реликтового излучения, см. Главы 9 и 10. При фиксированном η функция $F(k, \eta)$ сильно зависит от импульса и при больших k падает как k^{-2} , см. (6.14). Функция $A(k, \eta)$ также довольно сильно зависит от импульса в промежуточной области импульсов, а при больших k она выходит на константу, см. (6.39).

Наконец, поскольку гравитационный потенциал медленно меняется со временем, для рассматриваемых мод скорость барион-фотонной среды приближённо удовлетворяет соотношению (6.40).

▷ *Задача 5.* Используя результаты этого и предыдущего разделов, оценить, во сколько раз изменяется функция $A(k, \eta_r)$ при изменении конформного импульса от $k \simeq 1/\eta_r$ до $k \sim 1/(u_s \eta_{eq})$. То же для функции $F(k, \eta_r)$.

6.4 CDM-моды постоянной кривизны

Сразу подчеркнём, что для мод постоянной кривизны *космическая среда существенно многокомпонентна*. Поэтому результаты исследования однокомпонентных сред, полученные в Главе 4, в большинстве своём напрямую неприменимы, в отличие от случая адиабатической моды, для которой целый ряд результатов прямо переносится из Главы 4.

Обсудим сначала поведение CDM моды постоянной кривизны за горизонтом. В этом режиме постоянные величины ζ_λ равны

$$\zeta_{CDM} = -\Phi + \frac{1}{3}\delta_{CDM} = \frac{1}{3}\delta_{CDM,(i)} \quad (6.45a)$$

$$\zeta_B = -\Phi + \frac{1}{3}\delta_B = 0, \quad \zeta_\gamma = -\Phi + \frac{1}{4}\delta_\gamma = 0, \quad \zeta_{rad} = -\Phi + \frac{1}{4}\delta_{rad} = 0, \quad (6.45b)$$

где мы учли, что при $\eta \rightarrow 0$ как гравитационный потенциал, так и возмущения барионов, фотонов и нейтрино в конформной ньютоновой калибровке равны нулю

(нейтрино для наших целей можно считать безмассовыми). Отметим, что из (6.45), в частности, следует равенство

$$\delta_{CDM,(i)} = \mathcal{S}_{CDM} = \text{const.} \quad (6.46)$$

Для нахождения гравитационного потенциала для мод за горизонтом воспользуемся уравнением (5.1) в пределе $k \rightarrow 0$. С учётом соотношений (6.45) это уравнение можно записать в виде

$$3\frac{a'}{a}\Phi' + 3\frac{a'^2}{a^2}\Phi + 4\pi Ga^2\rho_{rad} \cdot 4\Phi + 4\pi Ga^2\rho_M \cdot 3\Phi = -4\pi Ga^2\rho_{CDM}\delta_{CDM,(i)}. \quad (6.47)$$

Найдём решение этого уравнения на радиационно-доминированной стадии. Для этого пренебрежём последним слагаемым в левой части и учтём, что правая часть ведёт себя с ростом η как $a^2\rho_{CDM} \propto a^{-1} \propto \eta^{-1}$. Далее, оба коэффициента перед Φ в левой части ведут себя как $a^2\rho_{rad} \propto a'^2/a^2 \propto \eta^{-2}$. Отсюда следует, что Φ линейно растёт с η . Поэтому $\Phi' = \Phi/\eta = (a'/a)\Phi$, и уравнение (6.47) приводится к виду

$$\left(6\frac{a'^2}{a^2} + 16\pi Ga^2\rho_{rad}\right)\Phi = -4\pi Ga^2\rho_{CDM}\delta_{CDM,(i)}.$$

Наконец, учтём ещё уравнение Фридмана для радиационно-доминированной стадии и получим

$$\Phi = -\frac{1}{8}\frac{\rho_{CDM}}{\rho_{rad}}\delta_{CDM,(i)}, \quad \text{РД стадия.} \quad (6.48)$$

Аналогичное вычисление показывает, что для возмущений на пылевидной стадии, но всё ещё за горизонтом, гравитационный потенциал постоянен во времени:

$$\Phi = -\frac{1}{5}\frac{\rho_{CDM}}{\rho_M}\delta_{CDM,(i)}, \quad \text{МД стадия.} \quad (6.49)$$

Для возмущений, входящих под горизонт на пылевидной стадии, гравитационный потенциал держится постоянным, а после входа под горизонт δ_{CDM} растёт как a до тех пор, пока не начинает проявляться эффект тёмной энергии, см. раздел 4.3. Это — одна из немногих ситуаций, когда для описания моды постоянной кривизны можно пользоваться результатами Главы 4. Соотношение (6.49) вместе с равенством

$$\delta_\gamma = 4\Phi, \quad (6.50)$$

следующим из (6.45b), даёт гравитационный потенциал и возмущение фотонной компоненты в эпоху рекомбинации для мод, которые тогда всё ещё находятся за горизонтом. Эти величины, как мы увидим в Главе 9, имеют прямое отношение к возможному вкладу моды постоянной кривизны в анизотропию реликтового излучения.

Не меньший интерес представляют и более короткие волны. Как и в разделе 6.2, мы рассмотрим возмущения, которые входят под *звуковой* горизонт на радиационно-доминированной стадии. Нашей основной целью при этом является изучение поведения Φ и δ_γ вблизи эпохи рекомбинации.

Начнём с обсуждения радиационно-доминированной стадии. Как видно из (6.48), и как мы ещё увидим в дальнейшем, на радиационно-доминированной стадии гравитационный потенциал мал. Поэтому его влиянием на δ_{CDM} можно пренебречь, то есть в уравнениях (6.16) положить $\Phi = 0$. Тогда из этих уравнений следует,

что на радиационно-доминированной стадии δ_{CDM} держится постоянной и равной $\delta_{CDM,(i)}$. Потенциал Φ всё же отличен от нуля, и он генерирует возмущения в барион-фотонной компоненте. Для того, чтобы рассмотреть этот эффект, воспользуемся уравнениями (5.1) и (5.3). Пренебрежём в правой части уравнения (5.1) вкладом барионов, поскольку плотность их энергии мала на радиационно-доминированной стадии, $\rho_B \ll \rho_{B\gamma}$, а из (6.45) видно, что $\delta_B \sim \delta_{B\gamma}$. Тогда правая часть уравнения (5.1) будет содержать комбинацию $(\rho_{B\gamma}\delta_{B\gamma} + \rho_{CDM}\delta_{CDM,(i)})$. Правая часть уравнения (5.3) содержит величину $\delta p = (1/3)\rho_{B\gamma}\delta_{B\gamma}$. Комбинируя эти два уравнения, получим уравнение, не содержащее неизвестной величины $\delta_{B\gamma}$:

$$\Phi'' + \frac{3(1+u_s^2)}{\eta}\Phi' + u_s^2k^2\Phi = -\frac{4\pi}{3}Ga^2\rho_{CDM}\delta_{CDM,(i)}, \quad (6.51)$$

где мы учли, что на радиационно-доминированной стадии $a \propto \eta$. Для дальнейших оценок положим $u_s = 1/\sqrt{3}$. Величину, стоящую в правой части уравнения (6.51), запишем в виде

$$a^2\rho_{CDM} = \frac{C}{\eta}, \quad (6.52)$$

где C — константа. Неоднородное уравнение (6.51) имеет частное решение

$$\Phi = -\frac{4\pi}{3}G\frac{C}{ku_s}\left[\frac{2}{(ku_s\eta)^3} + \frac{1}{ku_s\eta}\right] \cdot \delta_{CDM,(i)}, \quad (6.53)$$

а общее решение однородного уравнения представляет собой линейную комбинацию функций $(ku_s\eta)^{-3/2}J_{3/2}(ku_s\eta)$ и $(ku_s\eta)^{-3/2}N_{3/2}(ku_s\eta)$, где $J_{3/2}$ и $N_{3/2}$ — функции Бесселя, ср. с (4.12). Нас интересует решение уравнения (6.51), для которого $\Phi \rightarrow 0$ при $\eta \rightarrow 0$. Оно представляет собой сумму решения (6.53) и решения с функцией Неймана и имеет вид

$$\Phi = -\frac{4\pi}{3}G\frac{C}{ku_s}\left[\frac{2}{(ku_s\eta)^3} + \frac{1}{ku_s\eta} - \frac{2\cos(ku_s\eta)}{(ku_s\eta)^3} - \frac{2\sin(ku_s\eta)}{(ku_s\eta)^2}\right] \cdot \delta_{CDM,(i)}, \quad (6.54)$$

где мы воспользовались явным видом функции $N_{3/2}$. Отметим, что в пределе $\eta \rightarrow 0$ это решение действительно переходит в (6.48).

После входа под звуковой горизонт, но всё ещё на радиационно-доминированной стадии, возмущения описываются асимптотикой решения (6.54) при $ku_s\eta \gg 1$,

$$\begin{aligned} \Phi &= -\frac{4\pi}{3}G\frac{C}{ku_s}\left[\frac{1}{ku_s\eta} - \frac{2\sin(ku_s\eta)}{(ku_s\eta)^2}\right] \cdot \delta_{CDM,(i)} \\ &= -\frac{4\pi Ga^2\rho_{CDM}}{k^2}\left(1 - \frac{2\sin(ku_s\eta)}{ku_s\eta}\right) \cdot \delta_{CDM,(i)} \equiv \Phi_{CDM}(\eta) + \Phi^{(osc)}(\eta), \end{aligned}$$

где мы вспомнили соотношение (6.52). Видно, что гравитационный потенциал содержит монотонно убывающую часть $\Phi_{CDM} \propto \eta^{-1}$ и осциллирующую часть $\Phi^{(osc)} \propto \sin(ku_s\eta)$, причём амплитуда осцилляций убывает как η^{-2} . Им соответствуют монотонная и осциллирующая части возмущений $\delta_{B\gamma}$ и, соответственно, $\delta_\gamma = \delta_{B\gamma}$. Осциллирующую часть найдём, например, из уравнения (5.3):

$$\delta_{B\gamma}^{(osc)} = \delta_\gamma^{(osc)} = -\frac{k^2\Phi^{(osc)}}{4\pi Ga^2\rho_{B\gamma}} = -2\frac{\rho_{CDM}}{\rho_{B\gamma}ku_s\eta}\sin(ku_s\eta)\delta_{CDM,(i)};$$

выражение для монотонной части нам сейчас не требуется. Видно, что осцилляции величины δ_γ происходят с постоянной амплитудой, то есть в соответствии с уравнением (6.34) с нулевой правой частью (и $R_B = 0$, поскольку речь идёт о радиационно-доминированной стадии). Для того, чтобы записать эту амплитуду в удобной форме, вспомним, что глубоко на радиационно-доминированной стадии $1/\eta = a_0 H_0 \sqrt{\Omega_{rad}}(1+z)$ и учтём, что $\Omega_M/\Omega_{rad} = 1 + z_{eq}$. Воспользовавшись (2.15), получим

$$\frac{\rho_{CDM}}{k\eta\rho_{rad}} = \frac{\Omega_{CDM}}{\Omega_M} \frac{2I}{k\eta_0} \sqrt{1+z_{eq}},$$

так что

$$\delta_\gamma^{(osc)} = -2\sqrt{3} \frac{\Omega_{CDM}}{\Omega_M} \frac{2I}{k\eta_0} \sqrt{1+z_{eq}} \cdot \sin(ku_s\eta) \cdot \delta_{CDM,(i)}. \quad (6.55)$$

Анализ перехода на пылевидную стадию во многом аналогичен проведённому в разделе 6.2. После перехода на пылевидную стадию δ_{CDM} растёт как a . Для возмущений тёмной материи на пылевидной стадии имеем

$$\delta_{CDM}(\eta) = \frac{3}{2} \frac{a(\eta)}{a_{eq}} \delta_{CDM,(i)}. \quad (6.56)$$

Численный коэффициент здесь получается следующим образом. Вблизи и после η_{eq} решение для δ_{CDM} даётся формулой (6.19). Решение (6.20), ведущее себя как $\ln\eta$ при $\eta \rightarrow 0$, для мод постоянной кривизны отсутствует. Из спивки (6.19) с $\delta_{CDM} = \delta_{CDM,(i)}$ при малых η и получается (6.56).

Монотонную часть гравитационного потенциала на пылевидной стадии найдём из (6.12),

$$\begin{aligned} \Phi_{CDM} &= -\frac{3}{2} \frac{a^2}{k^2} \frac{a}{a_{eq}} 4\pi G \rho_{CDM} \delta_{CDM,(i)} \\ &= -9I^2 \frac{\Omega_{CDM}}{\Omega_M} \frac{1}{(k\eta_0)^2} (1+z_{eq}) \cdot \delta_{CDM,(i)}. \end{aligned} \quad (6.57)$$

Как и должно быть, Φ_{CDM} не зависит от времени. Осциллирующая часть гравитационного потенциала мала при больших $ku_s\eta$, и её можно больше не учитывать. Для нахождения δ_γ воспользуемся уравнением (6.34). Осциллирующее решение однородного уравнения сошьём с (6.55), а в качестве частного решения вновь используем (6.35). В результате получим

$$\begin{aligned} \delta_\gamma = \delta_{CDM,(i)} \cdot & \left[36 \cdot (1+R_B) I^2 \frac{\Omega_{CDM}}{\Omega_M} \frac{1}{(k\eta_0)^2} (1+z_{eq}) \right. \\ & \left. - 4I\sqrt{3} \frac{\Omega_{CDM}}{\Omega_M} \frac{1}{k\eta_0} \frac{\sqrt{1+z_{eq}}}{(1+R_B)^{1/4}} \sin \left(k \int_0^\eta d\tilde{\eta} u_s \right) \right] \end{aligned} \quad (6.58)$$

Это выражение имеет существенные отличия от аналогичного выражения (6.39), справедливого для адиабатических возмущений. Во-первых, фаза осцилляций сдвинута на $\pi/2$. Во-вторых, амплитуда осцилляций как функция импульса падает как k^{-1} . Наконец, в монотонной части отсутствует логарифмический множитель.

Как и в случае адиабатической моды, область промежуточных импульсов аналитически описать трудно. Из уравнения (6.34) следует, что в этой области возмущения

фотонной компоненты содержат осциллирующую часть и компоненту, монотонно зависящую от времени. Однако в отличие от адиабатической моды, фаза осцилляций зависит от импульса, так что вместо (6.44) следует записать

$$\delta_\gamma(\mathbf{k}, \eta) = -4 [1 + R_B(\eta)] \Phi(\mathbf{k}, \eta) - 4 \delta_{CDM,(i)}(\mathbf{k}) \cdot A(k, \eta) \cdot \sin \left[k \int_0^\eta u_s d\tilde{\eta} + \varphi(k) \right]. \quad (6.59)$$

Нетривиальная зависимость фазы от импульса видна, например, из решения предлагаемой задачи.

▷ *Задача 6.* Считая формально, что $\eta_r \gg \eta_{eq}$, найти выражение для $\delta_\gamma(\mathbf{k}, \eta)$ для мод, входящих под звуковой горизонт между эпохой РД/МД-перехода и эпохой рекомбинации. В частности, показать, что в этом режиме фаза $\varphi(k)$, фигурирующая в (6.59), равна $(-\pi/2)$.

6.5 Барионные моды постоянной кривизны

Для обсуждения барионных мод постоянной кривизны барион-электрон-фотонную плазму уже недостаточно считать единой средой: необходимо рассматривать отдельно возмущения плотности энергии (массы) барионов $\delta\rho_B$ и фотонов $\delta\rho_\gamma$. В качестве начального условия для рассматриваемой моды фигурирует⁴

$$\mathcal{S}_B = \frac{\delta(n_B/s)}{(n_B/s)} = \delta_B - \frac{3}{4}\delta_\gamma. \quad (6.60)$$

В конформной ньютоновой калибровке в пределе $\eta \rightarrow 0$ имеем

$$\delta_{B,(i)} = \mathcal{S}_B \neq 0,$$

в то время как $\delta_{\gamma,(i)} = \delta_{CDM,(i)} = 0$.

Анализ барионной моды постоянной кривизны на радиационно-доминированной стадии, а также на пылевидной стадии за горизонтом дословно совпадает с анализом CDM моды постоянной кривизны, проведённым в разделе 6.4. В соответствующих местах раздела 6.4 достаточно просто сделать замену обозначений $CDM \longleftrightarrow B$. Это сводится к замене

$$\delta_{CDM,(i)} \longrightarrow \frac{\Omega_B}{\Omega_{CDM}} \delta_{B,(i)}. \quad (6.61)$$

Анализ перехода на пылевидную стадию мод, вошедших под горизонт на радиационно-доминированной стадии, нуждается, однако, в модификации. В отличие от возмущений тёмной материи, возмущения барионной компоненты не растут до рекомбинации из-за того, что барионы тесно связаны с фотонами, а барион-фотонная плазма имеет большое давление. Действительно, из уравнений (6.30), (6.31) имеем $\delta'_B = 3\delta'_\gamma/4$, и вместо аналога (6.56) получим, что вплоть до рекомбинации $\delta_B = \delta_{B,(i)}$ в силу малости δ_γ . В то же время, гравитационный потенциал, обусловленный возмущениями барионов, генерирует возмущения тёмной материи, которые к эпохе перехода с радиационно-доминированной на пылевидную стадию становятся порядка

⁴В силу локальной электронейтральности среды для фоновых и возмущённых плотностей числа барионов и электронов справедливо равенство $n_B = n_e$ и $\delta n_B = \delta n_e$ с точностью до близкого к единице фактора, учитывающего наличие нейтронов в ядрах гелия. Поэтому вклад электронов в плотность энергии пропорционален вкладу барионов, $\delta\rho_e = (m_e/m_p)\delta\rho_B$, и его отдельно рассматривать не нужно: достаточно включить его в $\delta\rho_B$.

$\delta_{CDM} \sim (\Omega_B/\Omega_{CDM})\delta_{B,(i)}$, а затем линейно растут с масштабным фактором. В результате на пылевидной стадии, но до рекомбинации, имеем

$$\delta_{CDM} = \frac{3}{2} \frac{a(\eta)}{a_{eq}} \frac{\Omega_B}{\Omega_{CDM}} \delta_{B,(i)} . \quad (6.62)$$

Для получения формулы (6.62) воспользуемся уравнениями (6.16) и учтём, что Φ определяется возмущениями барионной компоненты и тёмной материи, причём контраст плотности барионов не зависит от времени. Получим вместо (6.17) неоднородное уравнение

$$\delta''_{CDM} + \frac{a'}{a} \delta'_{CDM} - 4\pi G \rho_{CDM} a^2 \delta_{CDM} = 4\pi G \rho_B a^2 \delta_{B,(i)} .$$

Поскольку ρ_{CDM} и ρ_B одинаково зависят от времени, очевидным частным решением этого уравнения служит

$$\delta_{CDM} = -\frac{\Omega_B}{\Omega_{CDM}} \delta_{B,(i)} .$$

Нас, однако, интересует решение, стремящееся к нулю при $\eta \rightarrow 0$. Оно получается, если к указанному частному решению добавить решение (6.19) с $C_1 = (\Omega_B/\Omega_{CDM}) \cdot \delta_{B,(i)}$. Отсюда и следует формула (6.62).

Таким образом, возмущения тёмной материи после перехода на пылевидную стадию ведут себя так же, как в случае CDM моды постоянной кривизны, см. (6.56). Итак, с той точностью, с которой мы работаем, все известные нам результаты для барионной моды постоянной кривизны совпадают с результатами для CDM моды, если в формулах раздела 6.4 сделать замену (6.61). В действительности это утверждение носит весьма общий характер: в приближении идеальной жидкости барионная мода и CDM-мода постоянной кривизны ведут себя одинаково. Простое объяснение этого факта состоит в следующем. Воспользуемся линейностью полной системы уравнений для скалярных возмущений и рассмотрим моду постоянной кривизны, в которой отличны от нуля как $\delta_{CDM,(i)}$, так и $\delta_{B,(i)}$, причём между ними имеется соотношение

$$\delta_{CDM,(i)} = -\frac{\Omega_B}{\Omega_{CDM}} \delta_{B,(i)} . \quad (6.63)$$

Иначе говоря, начальные возмущения таковы, что $\delta\rho_M \equiv \delta\rho_{CDM} + \delta\rho_B = 0$. Начальные возмущения других компонент — фотонов и нейтрино — также отсутствуют. Глубоко под горизонтом отсутствуют и возмущения скоростей всех компонент. Из-за того, что полное возмущение плотности энергии равно нулю, гравитационные потенциалы не генерируются, а их отсутствие приводит к отсутствию генерации возмущений релятивистских компонент и скоростей. В результате возмущения в среде с рассматриваемыми начальными данными не эволюционируют вовсе. Этот вывод согласуется с системой уравнений (5.1)-(5.5): она имеет решение с не зависящими от времени $\delta_{CDM} = \delta_{CDM,(i)}$, $\delta_B = \delta_{B,(i)}$ и нулевыми значениями других возмущений, включая Φ , v_λ , δ_γ и др., если выполнено соотношение (6.63). Отсюда и следует, что барионная и CDM мода постоянной кривизны описываются одним и тем же решением уравнений для возмущений с точностью до замены (6.61).

Глава 7

*Формирование структур

В этой Главе мы обсудим теорию роста возмущений материи, основанную на известных нам линеаризованных уравнениях Эйнштейна и ковариантных законах сохранения. Рост линейных возмущений приводит в конечном итоге к формированию *протоструктур* — областей с относительными возмущениями плотности материи $\delta_M/\rho_M = \delta_M \sim 1$. Такие протоструктуры имелись в начале образования всех гравитационно связанных объектов во Вселенной, включая первые звёзды и квазары, галактики и скопления галактик¹. Для протоструктур с $\delta_M \gtrsim 1$ факт расширения Вселенной перестаёт быть существенным, дальнейшая эволюция по сути является развитием классической джинсовской неустойчивости в нелинейном режиме. Некоторые аспекты этого процесса рассмотрены в Приложении А. Детальное исследование вопросов формирования структур в нелинейном режиме выходит за рамки этой книги.

Замечательно, что использование лишь линейной теории эволюции возмущений оказывается достаточным для количественного ответа на многие интересные вопросы о крупномасштабной структуре современной Вселенной. В частности, оно позволяет оценить массовый спектр структур — среднее число гравитационно связанных объектов с данной массой в единице объёма. Этот массовый спектр различен при разных красных смещениях, поскольку процесс формирования структур начался сравнительно недавно и продолжается в современную эпоху.

Наряду с другими методами, космологические наблюдения, связанные со структурами, важны для изучения характеристик первичных скалярных возмущений, определения космологических параметров, в первую очередь Ω_M , Ω_Λ и Ω_{curv} , исследования свойств тёмной материи, а в перспективе и оценки масс нейтрино. Соответствующие примеры мы приведём в этой Главе, а также в Главе 8.

С точки зрения формирования структур основную роль играют возмущения тёмной материи и барионов. Мы рассмотрели в Главе 6 эволюцию этих возмущений вплоть до эпохи рекомбинации. Этую Главу мы начнём с того, что найдём спектр возмущений материи после рекомбинации.

¹Обеднённые материйей области пространства трансформировались в области пустот (*voids*), в современной Вселенной иногда достигающих размеров в несколько десятков мегапарсек.

7.1 Эволюция неоднородностей материи после рекомбинации: линейная стадия

7.1.1 Спектр мощности $P(k, z)$

Продолжим начатое в разделах 6.1 и 6.2 обсуждение эволюции скалярных возмущений в линейном режиме и рассмотрим эпоху после рекомбинации. Мы будем считать возмущения адиабатическими и сконцентрируемся на неоднородностях тёмной материи и барионов. В рамках линейной теории на интересующей нас стадии барионы, как и тёмную материю, можно считать взаимодействующими только гравитационно.

Начнём с мод, входящих под горизонт глубоко на пылевидной стадии. До входа под горизонт относительные возмущения плотности барионов и тёмной материи одинаковы в адиабатической моде; для рассматриваемых мод они продолжают оставаться одинаковыми и после входа под горизонт. Гравитационный потенциал в постrekомбинационную эпоху даётся выражением (4.24), причём между потенциалом на пылевидной стадии и начальным потенциалом справедливо соотношение (6.3). Таким образом, имеем

$$\Phi(z) = \frac{9}{10}g(z)\Phi_{(i)}.$$

Эволюция возмущений тёмной материи и барионов описывается формулой (4.18), так что после входа под горизонт контраст плотности имеет вид

$$\delta(z) = -\frac{k^2}{4\pi G a^2 \rho_M} \Phi(z) = -\frac{3}{5} \frac{k^2}{a_0^2 H_0^2 \Omega_M} \frac{g(z)}{1+z} \Phi_{(i)} \quad (7.1)$$

(в предыдущих Главах для возмущений барионов и тёмной материи мы использовали обозначение δ_M ; в дальнейшем в этой Главе индекс M мы будем опускать), где мы использовали соотношение $4\pi G \rho_M(z) = 4\pi G \rho_{M,0}(1+z)^3 = (3/2)H_0^2 \Omega_M(1+z)^3$. Как мы неоднократно отмечали, возмущения плотности материи после входа под горизонт растут как $a(z) \propto (1+z)^{-1}$ (с точностью до фактора $g(z)$, учитывающего влияние тёмной энергии и существенного лишь при $z \lesssim 1$, см. раздел 4.4).

Полезно рассмотреть спектр мощности $P(k, z)$ возмущений материи, определяемый стандартным образом:

$$\langle \delta(\mathbf{k}, z) \delta(\mathbf{k}', z) \rangle = \frac{P(k, z)}{(2\pi)^3} \delta(\mathbf{k} + \mathbf{k}') = \frac{k^3 \mathcal{P}(k, z)}{4\pi} \delta(\mathbf{k} + \mathbf{k}'). \quad (7.2)$$

Нас в этой Главе будет интересовать спектр мощности при сравнительно небольших z для мод, вошедших под горизонт к этому времени. Из (7.1) следует очевидное соотношение между этим спектром и спектром мощности начальных возмущений $P_\Phi(k)$ при малых k . Вспоминая связь $P_\Phi = 2\pi^2 \mathcal{P}_\Phi / k^3$, см. (5.33), запишем

$$P(k, z) = \frac{18\pi^2}{25} \frac{k}{a_0^4 H_0^4 \Omega_M^2} \frac{g^2(z)}{(1+z)^2} \mathcal{P}_\Phi, \quad k\eta_{eq} \ll 1. \quad (7.3)$$

Видно, что в области малых импульсов спектр мощности $P(k)$ линейно растёт с k , если начальный спектр — плоский (то есть если \mathcal{P}_Φ не зависит от k).

Такое поведение спектра продолжается вплоть до импульсов порядка η_{eq}^{-1} . При этих импульсах величина современного спектра мощности $P(k, z = 0)$ всё ещё может быть приближённо оценена с помощью формулы (7.3). Используя значения космологических параметров, приведённые в разделе 2.1.2, и значение (5.41) величины A_Φ , получаем в случае плоского первичного спектра численную оценку

$$P(k \sim \eta_{eq}^{-1}, z = 0) \sim 6 \cdot 10^4 \left(\frac{\text{Мпк}}{h} \right)^3, \quad (7.4)$$

где мы временно положили $a_0 = 1$.

Обратимся теперь к модам, входящим под горизонт глубоко на радиационно-доминированной стадии. Прежде всего необходимо найти начальные данные для рассматриваемого этапа эволюции, то есть значения контрастов плотности и скоростей барионов и тёмной материи сразу после рекомбинации, при $\eta = \eta_r$. Для барионной компоненты используем приближение тесной связи барионов с фотонами до рекомбинации и приближение мгновенного отщепления барионов от фотонов в эпоху последнего рассеяния. Тогда из (6.44) для контраста плотности и потенциала скоростей коротковолновых барионных возмущений сразу после эпохи последнего рассеяния будем иметь

$$\delta_B(\eta_r) = \frac{3}{4} \delta_\gamma(\eta_r) = -\frac{1}{u_s^2(\eta_r)} \Phi(\eta_r) + 3\Phi_{(i)} \cdot A(k, \eta_r) \cdot \cos(kr_s), \quad (7.5a)$$

$$kv_B(\eta_r) = \frac{3}{4k} \delta'_\gamma(\eta_r) = -3\Phi_{(i)} \cdot u_s(\eta_r) \cdot A(k, \eta_r) \cdot \sin(kr_s). \quad (7.5b)$$

где

$$u_s(\eta_r) = \frac{1}{\sqrt{3[1 + R_B(\eta_r)]}}$$

— скорость звука в барион-фотонной среде в эпоху рекомбинации и

$$r_s = \int_0^{\eta_r} u_s d\eta \quad (7.6)$$

— координатный размер акустического горизонта в эту эпоху. Здесь мы воспользовались соотношением (6.28) между возмущениями плотности барионов и фотонов и формулой (6.40) для потенциала скоростей. Для мод с $k\eta_{eq} \gg 1$ в приближении, использованном в разделе 6.2, гравитационный потенциал $\Phi(\eta_r) \equiv \Phi_{CDM}(\eta_r)$ даётся выражением (6.14) и

$$A(k, \eta_r) = \frac{3}{2(1 + R_B)^{1/4}}, \quad (7.7)$$

см. (6.39).

Выражения (7.5a) и (7.5b) служат начальными данными для эволюции возмущений барионной компоненты после рекомбинации. В качестве начального значения контраста плотности тёмной материи выступает

$$\delta_{CDM}(\eta_r) = -\frac{k^2}{4\pi G \rho_{CDM}(\eta_r) a^2(\eta_r)} \cdot \Phi(\eta_r), \quad (7.8)$$

см. (6.12). Потенциал скоростей тёмной материи в эпоху рекомбинации мы приведём ниже. При больших импульсах явное выражение для $\delta_{CDM}(\eta_r)$ в приближении

раздела 6.2 имеет вид

$$\delta_{CDM}(\eta_r) = -\frac{27}{2} \left(1 - \frac{0.6\Omega_B}{\Omega_M}\right) \left(\frac{a_r}{a_{eq}}\right)^{1-\frac{0.6\Omega_B}{\Omega_M}} \Phi_{(i)} \ln(0.2k\eta_{eq}) , \quad (7.9)$$

где мы учли поправки порядка Ω_B/Ω_M к формуле (6.13), рассмотренные в конце раздела 6.2. Выражения для этих поправок нельзя воспринимать буквально, поскольку они справедливы лишь в формальном пределе $\eta_r/\eta_{eq} \rightarrow \infty$; мы привели здесь эти поправки для того, чтобы проиллюстрировать некоторое подавление возмущений тёмной материи в эпоху рекомбинации по сравнению с гипотетическим случаем Вселенной с пренебрежимо малой плотностью барионов.

Пренебрежём плотностью энергии фотонов и нейтрино по сравнению с плотностью энергии тёмной материи и барионов и проведём анализ пылевидной стадии; учёт влияния тёмной энергии осуществляется, как всегда, введением функции подавления $g(z)$. Эволюцию возмущений тёмной материи и барионов после рекомбинации найдём, воспользовавшись ковариантными законами сохранения (5.6), (5.7) для свободного газа барионов после рекомбинации,

$$\delta'_B - k^2 v_B = 3\Phi' , \quad (7.10a)$$

$$v'_B + \frac{2}{\eta} v_B = -\Phi , \quad (7.10b)$$

и аналогичными уравнениями для тёмной материи,

$$\delta'_{CDM} - k^2 v_{CDM} = 3\Phi' , \quad (7.11a)$$

$$v'_{CDM} + \frac{2}{\eta} v_{CDM} = -\Phi , \quad (7.11b)$$

где мы воспользовались тем, что $a \propto \eta^2$ на пылевидной стадии. Уравнение (5.1) для гравитационного потенциала представим в виде

$$k^2\Phi = -4\pi G a^2 \rho_M \left(\frac{\Omega_{CDM}}{\Omega_M} \delta_{CDM} + \frac{\Omega_B}{\Omega_M} \delta_B \right) ,$$

где мы учли, что для мод под горизонтом главным в левой части (5.1) является слагаемое, пропорциональное k^2 . Последнее уравнение преобразуем, используя уравнение Фридмана на пылевидной стадии:

$$k^2\Phi = -\frac{6}{\eta^2} \left(\frac{\Omega_{CDM}}{\Omega_M} \delta_{CDM} + \frac{\Omega_B}{\Omega_M} \delta_B \right) . \quad (7.12)$$

Систему уравнений (7.10), (7.11), (7.12) нетрудно решить. Заметим прежде всего, что для рассматриваемых мод производными гравитационного потенциала в (7.10a) и (7.11a) можно пренебречь. Таким образом, скорости барионов и тёмной материи выражаются через возмущения плотности,

$$k^2 v_B = \delta'_B , \quad k^2 v_{CDM} = \delta'_{CDM} . \quad (7.13)$$

Второе из этих соотношений справедливо и в эпоху рекомбинации, так что для скорости тёмной материи в эту эпоху имеем

$$k^2 v_{CDM}(\eta_r) = \delta'_{CDM}(\eta_r) = \left(\frac{a'}{a} \delta_{CDM} \right) (\eta_r) = \frac{2}{\eta_r} \delta_{CDM}(\eta_r) . \quad (7.14)$$

Здесь мы учли, что после перехода на пылевидную стадию, в том числе в эпоху рекомбинации, контраст плотности тёмной материи растёт² как $a(\eta)$. Соотношение (7.14) даёт недостающее начальное данное для эволюции возмущений после рекомбинации.

Далее, комбинируя уравнения (7.10) и (7.11), получим однородное уравнение для величины

$$\Delta = \delta_{CDM} - \delta_B . \quad (7.15)$$

Оно имеет вид

$$\Delta'' + \frac{2}{\eta} \Delta' = 0 .$$

Его решением с описанными выше начальными данными служит

$$\Delta(\eta) = C_1 + \frac{C_2}{\eta} , \quad (7.16)$$

где

$$\begin{aligned} C_1 &= \delta_{CDM}(\eta_r) - \delta_B(\eta_r) + k^2 \eta_r [v_{CDM}(\eta_r) - v_B(\eta_r)] , \\ C_2 &= -k^2 \eta_r^2 [v_{CDM}(\eta_r) - v_B(\eta_r)] . \end{aligned}$$

Как следует из (7.16), разность $(\delta_{CDM} - \delta_B)$ стремится к константе на больших временах, в то время как сами контрасты плотности δ_{CDM} и δ_B растут как $a(\eta)$. Таким образом, через несколько хаббловских времён после рекомбинации контрасты плотности барионов и тёмной материи сравниваются и эволюционируют вместе: там, где повышена плотность тёмной материи, повышена и плотность барионов. Образно говоря, барионы сваливаются в гравитационные ямы, подготовленные тёмной материей.

Найдём теперь контраст плотности тёмной материи на поздних временах; контраст плотности барионов в этой асимптотике будет таким же. Для этого используем (7.11b) и второе из соотношений (7.13) и запишем уравнение

$$\delta_{CDM}'' + \frac{2}{\eta} \delta_{CDM}' = -k^2 \Phi ,$$

С учётом определения (7.15) будем иметь из (7.12)

$$k^2 \Phi = -\frac{6}{\eta^2} \delta_{CDM} + \frac{6}{\eta^2} \frac{\Omega_B}{\Omega_M} \Delta .$$

Из этих уравнений получим окончательное уравнение для δ_{CDM} :

$$\delta_{CDM}'' + \frac{2}{\eta} \delta_{CDM}' - \frac{6}{\eta^2} \delta_{CDM} = -\frac{6}{\eta^2} \Delta .$$

Используя явный вид (7.16) величины $\Delta(\eta)$, запишем общее решение последнего уравнения:

$$\delta_{CDM}(\eta) = \frac{\Omega_B}{\Omega_M} \Delta(\eta) + \alpha \eta^2 + \frac{\beta}{\eta^3} , \quad (7.17)$$

²Здесь мы используем приближение $\eta_r \gg \eta_{eq}$, а также пренебрегаем влиянием барионов на потенциал скоростей тёмной материи при $\eta_{eq} < \eta < \eta_r$. Соответствующие поправки к приведённым ниже формулам невелики.

где постоянные α и β определяются начальными условиями при $\eta = \eta_r$. Наиболее интересно значение константы α , поскольку именно оно определяет поведение решения при больших временах. Потребовав, чтобы выражение (7.17) при $\eta = \eta_r$ равнялось известному значению $\delta_{CDM}(\eta_r)$, а его производная была равна $k^2 v_{CDM}(\eta_r)$, получим после несложной выкладки

$$\alpha = \frac{\Omega_{CDM}}{\Omega_M} \left(\frac{3}{5\eta_r^2} \delta_{CDM}(\eta_r) + \frac{k^2}{5\eta_r} v_{CDM}(\eta_r) \right) + \frac{\Omega_B}{\Omega_M} \left(\frac{3}{5\eta_r^2} \delta_B(\eta_r) + \frac{k^2}{5\eta_r} v_B(\eta_r) \right)$$

Учитывая (7.14), найдём окончательно

$$\alpha = \frac{\Omega_{CDM}}{\Omega_M} \frac{1}{\eta_r^2} \delta_{CDM}(\eta_r) + \frac{\Omega_B}{\Omega_M} \frac{1}{\eta_r^2} \left(\frac{3}{5} \delta_B(\eta_r) + \frac{k\eta_r}{5} k v_B(\eta_r) \right) \quad (7.18)$$

Итак, при больших временах контрасты плотности барионов и тёмной материи одинаковы и равны

$$\delta_B = \delta_{CDM} \equiv \delta = \alpha \eta^2. \quad (7.19)$$

Как и следовало ожидать, они растут пропорционально $a(\eta)$.

Согласно (7.5) и (7.9) величина $\alpha(k)$, а вместе с ней и контрасты плотности при больших временах, содержит монотонно зависящий от импульса вклад и часть, осциллирующую с импульсом. Осциллирующая часть подавлена по параметру Ω_B/Ω_{CDM} . Мы её рассмотрим в разделе 7.1.2, а здесь сосредоточимся на главном, монотонном вкладе. Учитывая, что в силу (7.8) справедливо $\Phi_{CDM}(\eta_r) \sim (a_r^2 H_r^2/k^2) \delta_{CDM}(\eta_r) \ll \delta_{CDM}(\eta_r)$, и используя (7.5а), мы видим, что для рассматриваемых длин волн монотонная часть определяется исключительно возмущениями тёмной материи в эпоху рекомбинации:

$$\delta_{mon} = \frac{\Omega_{CDM}}{\Omega_M} \frac{1+z_r}{1+z} g(z) \cdot \delta_{CDM}(\eta_r), \quad (7.20)$$

где мы восстановили функцию $g(z)$, учитывающую подавление, связанное с тёмной энергией. В пределе больших импульсов имеем из (7.9) в нулевом и первом порядке по Ω_B/Ω_M :

$$\delta_{mon} = -F \left(z, \frac{\Omega_B}{\Omega_M} \right) \Phi_{(i)} \ln(0.2k\eta_{eq}) \quad (7.21)$$

где

$$F \left(z, \frac{\Omega_B}{\Omega_M} \right) = \frac{27}{2} \left[1 - \left(1.6 + 0.6 \ln \frac{1+z_{eq}}{1+z_r} \right) \frac{\Omega_B}{\Omega_M} \right] \frac{1+z_{eq}}{1+z} g(z) \quad (7.22)$$

Как видно, присутствие барионов заметно понижает монотонную часть возмущений по сравнению с гипотетическим случаем Вселенной без барионов (величина в квадратных скобках в (7.22) составляет около 0.7 вместо 1). Для коротковолновой части спектра получаем

$$P(k, z) = \frac{2\pi^2}{k^3} \mathcal{P}_\Phi F^2(z) \ln^2(0.2k\eta_{eq}), \quad k\eta_{eq} \gg 1. \quad (7.23)$$

При плоском спектре начальных возмущений спектр неоднородностей плотности в рассматриваемой области малых длин волн, $k\eta_{eq} \gg 1$, также близок к плоскому (то есть к спектру Гаррисона–Зельдовича), отличаясь от него лишь на логарифмический фактор. Это означает, что в пренебрежении логарифмической зависимостью спектр мощности возмущений материи $P(k, z)$ падает с ростом импульса как

$$P(k) \propto P_\Phi(k) \propto \frac{1}{k^3}, \quad k\eta_{eq} \gg 1.$$

Учитывая, что при $k\eta_{eq} \ll 1$ спектр мощности растёт с импульсом согласно (7.3), мы заключаем, что $P(k)$ должен иметь максимум при $k/a_0 \sim 1/(\eta_{eq}a_0) \sim 0.01 \text{ Мпк}^{-1}$ (численное значение параметра $a_0\eta_{eq}$ см. в разделе 2.1.2), при этом его современное значение в максимуме оценивается согласно (7.4). Это подтверждается численным расчётом и согласуется с наблюдениями, см. рис. 7.1 и 7.2.

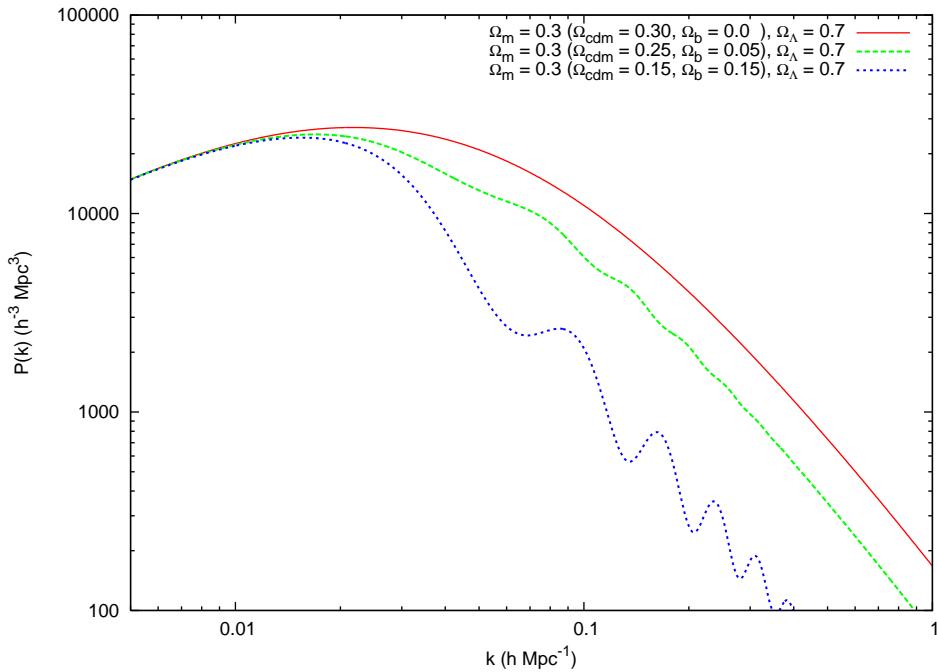


Рис. 7.1: Современный спектр возмущений материи $P(k)$, получаемый в линейной теории при различных значениях космологических параметров [7]. Используется нормировка $a_0 = 1$. По горизонтальной оси отложен импульс в единицах $h \text{ Мпк}^{-1}$, так что единице соответствует импульс около 0.7 Мпк^{-1} . Импульс η_{eq}^{-1} в этих единицах составляет около $0.011 (h \text{ Мпк}^{-1})$, см. раздел 2.1.2. Общее поведение соответствует $P(k) \propto k$ при $k\eta_{eq} \ll 1$ и $P(k) \propto k^{-3}$ при $k\eta_{eq} \gg 1$. В области больших импульсов мощность возмущений убывает при росте Ω_B/Ω_M . В области малых импульсов спектр зависит только от $\Omega_M = \Omega_{CDM} + \Omega_B$, а не от Ω_{CDM} и Ω_B по отдельности, в согласии с (7.3). С уменьшением доли барионов заметно падает амплитуда осциляций.

Сделаем по поводу рис. 7.1 и 7.2 следующее замечание. Для возмущений с достаточно высокими импульсами, $k/a_0 \gtrsim 0.1 \text{ Мпк}^{-1}$, весьма существенны эффекты нелинейности, а возмущения с $k/a_0 \gtrsim 1 \text{ Мпк}^{-1}$ вообще находятся сегодня на нелинейной стадии эволюции. В то же время, спектры, изображённые на рис. 7.1 и 7.2 — это современные спектры, которые *получились бы в полном пренебрежении эффектами нелинейности*, то есть спектры линейной теории. Поэтому изображённые спектры не отражают реальных свойств современных неоднородностей материи на небольших пространственных масштабах. В частности, они никак не учитывают коллапса неоднородностей, начинающегося при $\delta \sim 1$ и приводящего к образованию компактных структур, разрушение части более мелких объектов при образовании более крупных, и т.д. Тем не менее, такое представление весьма полезно. С теоретической точки зрения его удобство состоит в том, что оно позволяет отвлечься от сложных процессов, происходящих на нелинейной стадии эволюции возмущений. Кроме то-

го, возмущения $\delta(\mathbf{k})$ являются гауссовыми только в линейной теории; нелинейность приводит к негауссовости, и в этом случае говорить о спектре мощности не приходится. С точки зрения интерпретации наблюдательных данных важно, что имеется возможность единым образом представлять результаты, полученные для различных красных смещений. Разумеется, связанные с нелинейностью трудности остаются, поскольку необходимо связать измеренные реальные величины со спектром, имеющимся в формальной линейной теории. Однако подобного рода трудностей в любом случае нельзя избежать при сравнении наблюдений с теорией.

Спектр мощности $P(k, z)$ определяет пространственную корреляционную функцию возмущений материи в линеаризованной теории

$$\xi(\mathbf{y}) = \langle \delta(\mathbf{x}) \delta(\mathbf{x} + \mathbf{y}) \rangle \quad (7.24)$$

(для однородного случайного поля $\delta(\mathbf{x})$ этот коррелятор не зависит от \mathbf{x} ; зависимость от красного смещения здесь и далее опускаем). Запишем по определению

$$\xi(\mathbf{y}) = \int d^3k d^3k' \langle \delta(\mathbf{k}) \delta(\mathbf{k}') \rangle e^{i\mathbf{k}'\cdot\mathbf{x}} e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x}+\mathbf{y})} = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} P(k) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{y}}.$$

В силу изотропности случайного поля возмущений спектр мощности не зависит от направления вектора \mathbf{k} , а пространственный коррелятор — от направления вектора \mathbf{y} . После интегрирования по углам получим

$$\xi(y) = \int_0^\infty \frac{k^2 dk}{2\pi^2} \frac{\sin(ky)}{ky} P(k). \quad (7.25)$$

Интеграл здесь набирается³ при $ky \lesssim 1$, так что зависимость ξ от y определяется поведением спектра мощности при $k \lesssim y^{-1}$.

Найдём поведение корреляционной функции на больших расстояниях, $y \gg \eta_{eq}$. Учтём, что для реалистического случая масштабно-инвариантного спектра начальных возмущений при малых импульсах выполняется $P(k) \propto k$, см. (7.3), а при больших импульсах $P(k)$ убывает, см. (7.23). Возьмём интеграл (7.25) трижды по частям. Получим

$$\xi(y) = -\frac{1}{2\pi^2 y^4} \left\{ \frac{\partial^2}{\partial k^2} [k P(k)] \Big|_{k=0} + \int_0^\infty dk \cos(ky) \frac{\partial^3}{\partial k^3} [k P(k)] \right\}.$$

Интегральное слагаемое в скобках ведёт себя как y^{-2} , в чём можно убедиться, вновь интегрируя по частям. В результате в главном порядке по y^{-1} получим

$$\xi(y) = -\frac{1}{2\pi^2 y^4} \frac{\partial^2}{\partial k^2} [k P(k)] \Big|_{k=0} = -\frac{18}{25} \frac{1}{a_0^4 y^4} \frac{1}{H_0^4 \Omega_M^2} \frac{g^2(z)}{(1+z)^2} \mathcal{P}_\Phi, \quad y \gg \eta_{eq}, \quad (7.26)$$

где \mathcal{P}_Φ — начальный спектр при малых k . Отметим, что функция $\xi(y)$ отрицательна при больших y , то есть возмущения плотности *антикоррелируют* на больших расстояниях, а модуль корреляционной функции быстро убывает с ростом y , $|\xi| \propto y^{-4}$.

Оценим теперь корреляционную функцию на малых расстояниях, $y \ll \eta_{eq}$, используя (7.23). Интеграл (7.25) обрезается сверху при $k \sim y^{-1}$, и мы получаем при близком к плоскому начальном спектре

$$\xi(y) = \frac{1}{3} \mathcal{P}_\Phi F^2(z) \ln^3 \left(\frac{0.2 \eta_{eq}}{y} \right), \quad y \ll \eta_{eq}, \quad (7.27)$$

³Данное утверждение относится лишь к вкладу монотонной части спектра $P(k)$, см. раздел 7.1.2.

где $\mathcal{P}_\Phi = \mathcal{P}_\Phi(k \sim y^{-1})$. Это выражение справедливо в главном логарифмическом приближении, поправки к нему малы по параметру $\ln^{-1}(0.2 \eta_{eq}/y)$. В интересной области промежуточных расстояний $y \sim \eta_{eq}$ использовать (7.27) нельзя; в действительности эта область оказывается довольно большой, $10 \text{ Мпк} \lesssim a_0 y \lesssim 100 \text{ Мпк}$.

Корреляционная функция (7.27) убывает с ростом y , при этом она положительна. Знакопеременность корреляционной функции (7.24) является в действительности общим свойством возмущений материи, не зависящим от механизма их генерации и от их эволюции. Достаточно лишь того, чтобы поле возмущений $\delta(\mathbf{x})$ было однородным. Действительно, интеграл от полной плотности $\rho(\mathbf{x})$ по всему наблюдаемому объёму Вселенной по определению равен средней плотности в этом объёме, умноженной на объём, а потому

$$\int d^3y \delta(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = 0.$$

Отсюда следует, что

$$\int d^3y \xi(\mathbf{y}) = 0, \quad (7.28)$$

так что функция $\xi(\mathbf{y})$ действительно должна быть знакопеременной.

▷ **Задача 1.** Формально полагая логарифмический множитель в (7.27) величиной порядка единицы, убедиться в том, что:

- 1) выражения (7.26) и (7.27) для корреляционной функции с точностью до численного фактора совпадают при $y = \eta_{eq}$;
- 2) положительный вклад в интеграл в левой части (7.28), вычисленный с использованием (7.27), по порядку величины совпадает с модулем отрицательного вклада, найденного с помощью (7.26).

Вернёмся к спектру мощности возмущений материи $P(k, z)$. Его измерения в различных областях импульсов производятся несколькими методами. Упомянем о некоторых из них. Информацию об области самых малых импульсов (самых больших длин волн) получают в основном из анализа спектра анизотропии и поляризации реликтового излучения, см. подробности в Главах 9, 10. Между угловым масштабом θ и конформным импульсом k в большинстве случаев имеется соответствие $k\eta_0 \sim \pi/\theta$. Современные наблюдения позволяют измерять анизотропию и поляризацию на угловых масштабах от нескольких минут и выше, что соответствует импульсам $k/a_0 \sim 10^{-4} - 10^{-1} \text{ Мпк}^{-1}$, см. рис. 7.2. Важно, что анизотропия и поляризация реликтового излучения определяются спектром возмущений *глубоко на линейной стадии* их эволюции, а потому указанные измерения дают, по крайней мере в принципе, наиболее аккуратное определение спектра мощности возмущений на этих масштабах.

Спектр мощности на промежуточных масштабах импульсов, $k/a_0 \sim 0.01 - 0.3 \text{ Мпк}^{-1}$ определяют с помощью глубоких обзоров Вселенной, в которых измеряется положение на небесной сфере и красное смещение объектов определённого класса (галактик различных типов, квазаров). Одной из наблюдаемых является двухточечная корреляционная функция при данном красном смещении, составленная по каталогам таких объектов. Точнее, пусть $n_g(\mathbf{x})$ — плотность числа галактик при данном красном смещении, усреднённая по области с центром в точке \mathbf{x} , имеющей достаточно большой современный размер R (так что в этой области содержится много галактик, а возмущения плотности пространственного масштаба R находятся в режиме,

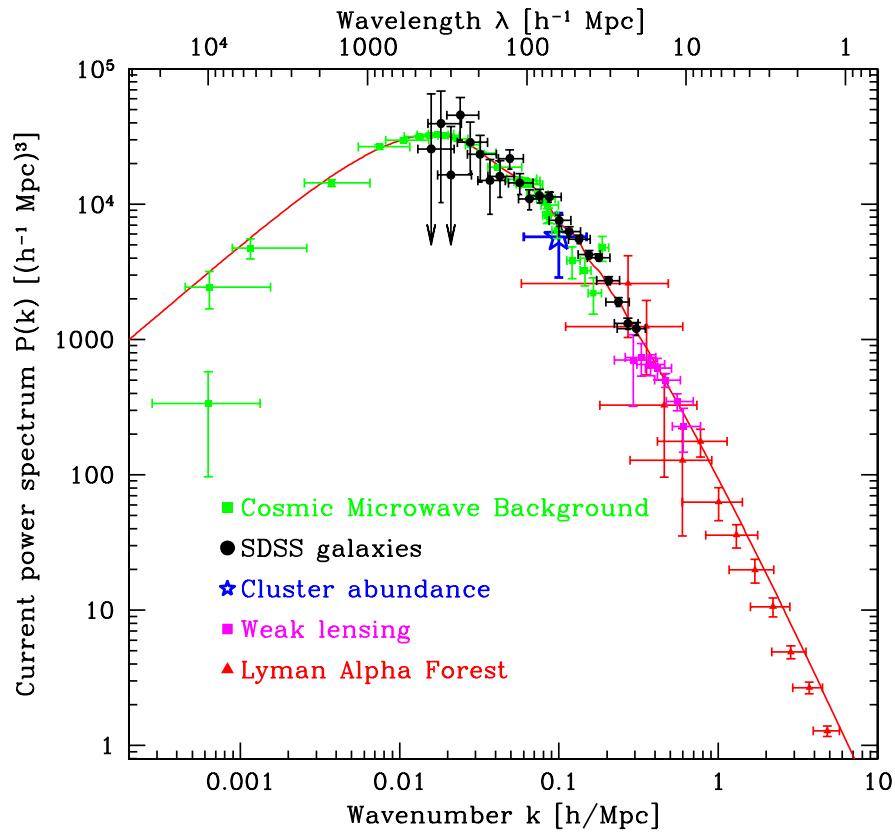


Рис. 7.2: Результаты определения современного спектра мощности возмущений материи [8].

близком к линейному; последние требования означают, что $R \gtrsim 10$ Мпк). Определим корреляционную функцию

$$\xi_g(\mathbf{y}) = \langle n_g(\mathbf{x}) n_g(\mathbf{x} + \mathbf{y}) \rangle , \quad (7.29)$$

где пока имеется в виду усреднение по ансамблю Вселенных; отсутствие зависимости ξ_g от \mathbf{x} связано с пространственной однородностью случайного поля $n_g(\mathbf{x})$. Чтобы эта корреляционная функция была хорошо определена, расстояние y должно быть достаточно большим,

$$a_0 y \gg R . \quad (7.30)$$

Будем считать, что плотность числа галактик пропорциональна плотности материи (также усреднённой по достаточно большому объёму):

$$n_g(\mathbf{x}) = \text{const} \cdot \rho_M(\mathbf{x}) = \text{const} \cdot \bar{\rho}_M \cdot [1 + \delta(\mathbf{x})] . \quad (7.31)$$

где константа зависит от красного смещения; для средней плотности мы временно ввели обозначение $\bar{\rho}_M$. Соотношение (7.29) — не вполне точное, однако оно неплохо выполняется при небольших z , когда значительная доля материи находится в галактиках (см. раздел 7.2.2); на природе и величине поправок к этому соотношению мы останавливаться не будем. Из (7.31) следует, что

$$\xi_g(\mathbf{y}) = \bar{n}_g^2 \cdot [1 + \xi(\mathbf{y})] , \quad (7.32)$$

где $\xi(y)$ — корреляционная функция возмущений материи (7.25), а \bar{n}_g — средняя плотность галактик. Измерения корреляционной функции (7.31) и позволяют с использованием (7.25) определить спектр $P(k, z)$. При этом соответствующая область импульсов $k \sim y^{-1}$ ограничена сверху в силу (7.30); в области же очень больших y (и, соответственно, очень малых k) корреляционная функция $\xi(y)$ мала, см. (7.26), и погрешности в измерении $\xi_g(y)$ велики. Отметим, что поскольку мы имеем дело с одной Вселенной, усреднение в (7.29) по ансамблю приходится заменять на усреднение по набору независимых областей размера R . При этом неизбежно возникает космическая неопределённость, о которой мы упоминали в разделе 5.4.

Другой способ получения информации о спектре мощности в промежуточной области импульсов состоит в изучении распространённости скоплений галактик при различных красных смещениях в области $z \lesssim 3$. Скопления — гравитационно связанные системы, самые крупные виртуализованные объекты во Вселенной, см. раздел I.1.3; мы увидим в разделе 7.2, что их количество при данном красном смещении z сравнительно простым образом связано с $P(k, z)$. Имеется несколько методов, позволяющих подсчитать скопления галактик во Вселенной. Так, центры скоплений богаты горячим газом, излучение от которого в рентгеновском диапазоне содержит информацию о количестве барионов и полной массе скопления. Данные рентгеновских телескопов позволяют создать карту таких источников. Кроме того, свободные электроны в структурах искажают реликтовое излучение (эффект Зельдовича–Сюняева), что также можно использовать для подсчёта скоплений⁴.

Ещё один способ определения распространённости структур состоит в исследовании гравитационного линзирования источников: ярких галактик, квазаров, а также реликтового излучения. Речь здесь в первую очередь идёт о так называемом *слабом линзировании* (*weak lensing*) — искажении наблюдаемой картины интенсивности излучения из-за отклонения света при распространении вблизи скопления галактик. Полный эффект набирается с учётом всех линз — локальных гравитационных потенциалов — вдоль луча зрения. В отличие от обычного, или сильного линзирования, при этом не создаётся множественное изображение объекта, как имеет место при линзировании удалённых ярких астрофизических источников скоплениями галактик, см. рис. I.1.7, I.1.8. Существенно, что данный метод чувствителен к полному гравитационному потенциальному, создаваемому совместно барионами и частицами тёмной материи. Характерный размер, на котором по гравитационному линзированию оценивается спектр мощности возмущений материи, определяется типичным расстоянием между скоплениями галактик и современным размером областей, из которых вещество собралось в скопления. Эти расстояния составляют от нескольких десятков до десятка мегапарсек.

Наконец, для определения спектра возмущений на самых малых масштабах, порядка нескольких мегапарсек и меньше, используют информацию о распространённости и размерах облаков нейтрального водорода во Вселенной при больших красных смещениях, вплоть до $z \sim 4$. Соответствующие размеры характерны для областей, из которых вещество собралось в современные галактики, в том числе не очень большие⁵. В отличие от современных галактик, исследуемые облака *только*

⁴При этом наблюдаются барионы, а не вся материя, включающая ещё и основную компоненту — тёмную материю. Считается, однако, что в больших объектах масса барионов составляет ту же часть полной массы, что и в среднем по Вселенной, то есть Ω_B/Ω_M . Это свойство действительно имеет место для крупных скоплений с массами $M = 10^{14} - 10^{15} M_\odot$.

⁵В перспективе, возможно, этот метод позволит исследовать масштабы, соответствующие совре-

выходили на нелинейный режим эволюции, откуда, вероятно, следует, что их приближённое описание может быть основано на линейной теории. Регистрируют облака по наблюдениям спектров далёких квазаров. Спектр излучения квазаров, хотя и содержит мощные линии излучения, в довольно широком диапазоне является непрерывным. Нейтральный водород, находящийся между квазаром и наблюдателем, поглощает излучение частот, соответствующих частотам перехода между уровнями в атоме водорода (наиболее сильно – на частоте линии Лайман- α (1216 Å)). Поэтому по положению провалов в спектре квазара можно определить красное смещение облака, а по ширине провалов – типичные скорости атомов водорода в облаке. Свет от одного квазара может пересекать несколько таких облаков, расположенных на большом удалении друг от друга. В результате в спектре образуется целая гребёнка из провалов, соответствующих поглощению излучения в облаках при различных красных смещениях. Эта гребёнка получила название *Лайман- α лес* (*Lymann- α forest*). По измерениям Лайман- α леса в оптических спектрах квазаров таким образом можно изучать облака нейтрального водорода в диапазоне красных смещений $\sim 2 - 4$. С перспективой аккуратного теоретического описания этих облаков связывают большие надежды на определение спектра $P(k, z)$ в области самых больших импульсов.

На рис. 7.2 приведены результаты измерения спектра мощности возмущений материи, полученные описанными здесь методами. Все они приведены к современному спектру $P(k, z = 0)$. Из рисунка видно как хорошее согласие между результатами, полученными разными методами, так и соответствие оценкам, сделанным выше в этом разделе. Измерения спектра $P(k)$ играют важную роль при определении значений космологических параметров и свойств первичных скалярных возмущений. Это наглядно видно, например, из рис. 7.1, где показана зависимость спектра от отношения Ω_B/Ω_{CDM} . Другой иллюстрацией служит рис. 8.5, где показана чувствительность спектра к вкладу нейтрино в полную плотность энергии; именно измерения спектра позволили поставить наиболее сильные ограничения сверху на сумму масс нейтрино, см. (8.106).

7.1.2 Барионные акустические осцилляции

Как мы уже отмечали, второе слагаемое в (7.18), а вместе с ним и функция $\delta(k)$, содержит осциллирующие с импульсом вклады, обусловленные соответствующими слагаемыми в (7.5). Причина такого поведения состоит в осцилляторной зависимости от времени возмущений барион-фотонной среды до рекомбинации, благодаря которой акустические волны с разными импульсами приходят к эпохе рекомбинации в разных фазах. Эти фазы возмущений плотности и скоростей, грубо говоря, замораживаются в эпоху рекомбинации, приводя к осцилляторной зависимости спектра возмущений от импульса. Соответствующий эффект получил название *барионных акустических осцилляций* (baryon acoustic oscillations, BAO).

Отметим, что явление осцилляций в спектре возмущений нерелятивистских барионов было обнаружено А.Д. Сахаровым [9], рассматривавшим развитие неоднородностей во Вселенной, изначально заполненной релятивистскими барионами. В такой среде также появляются акустические колебания, и после того, как из-за расширения Вселенной барионы становятся нерелятивистскими, эти колебания замораживаются в виде осцилляций возмущений барионов по импульсам. Осцилляции в спектре материи, вызванные барионами, нередко называют *сахаровскими осцилляциями*.

менным карликовым галактикам, имеющим массы $10^7 M_\odot$ и больше.

Обсудим барионные акустические осцилляции несколько подробнее. Как видно из (7.5), период осцилляций по импульсам составляет $2\pi/r_s$. Поэтому важно аккуратно оценить координатный размер акустического горизонта эпохи рекомбинации (7.6). Поступая так же, как в разделе 2.1.2, представим его в виде

$$r_s(\eta_r) = \frac{I_1[\Omega_{rad}/\Omega_M, R_B(\eta_r)]}{\sqrt{3}} \eta_r , \quad (7.33)$$

где

$$I_1 = \left[\int_{z_r}^{\infty} \frac{dz}{\sqrt{\left((1+z)^3 + \frac{\Omega_{rad}}{\Omega_M} (1+z)^4 \right) \left(1 + \frac{1+z_r}{1+z} R_B(\eta_r) \right)}} \right] \cdot \left[\int_{z_r}^{\infty} \frac{dz}{\sqrt{(1+z)^3 + \frac{\Omega_{rad}}{\Omega_M} (1+z)^4}} \right]^{-1}. \quad (7.34)$$

Используя полученную нами оценку $R_B(\eta_r) \simeq 0.48$, см. (6.41), и полагая $\Omega_M/\Omega_{rad} = 1 + z_{eq} = 3.1 \cdot 10^3$, имеем численно

$$I_1 \approx 0.91 . \quad (7.35)$$

Из оценки для $a_0\eta_r$, приведённой в (2.23), получим

$$a_0 r_s = \frac{I_1}{\sqrt{3}} a_0 \eta_r \simeq 155 \text{ Мпк} . \quad (7.36)$$

Эта величина и определяет период барионных акустических осцилляций.

Используя (7.5), (7.18) и (7.19), запишем для осциллирующего вклада

$$\delta_{osc}(z) = \frac{3\Omega_B}{5\Omega_M} \frac{1+z_r}{1+z} A(k, \eta_r) (3 \cos kr_s - k\eta_r u_s \sin kr_s) \cdot \Phi_{(i)} .$$

Здесь первое слагаемое в скобках обусловлено осцилляциями плотности, а второе — осцилляциями скорости барионов в эпоху рекомбинации. Для достаточно больших импульсов, таких, что

$$\frac{k}{a_0} > \frac{3}{u_s} \frac{1}{a_0 \eta_r} \simeq 0.02 \text{ Мпк}^{-1} , \quad (7.37)$$

вклад, обусловленный скоростью, доминирует. Как видно из рис. 7.1, именно область импульсов (7.37) представляет наибольший интерес с точки зрения осцилляций в спектре, поэтому мы будем пользоваться упрощенным выражением

$$\delta_{osc}(z) = -\frac{3\Omega_B}{5\Omega_M} \frac{1+z_r}{1+z} A(k, \eta_r) k\eta_r u_s \sin kr_s \cdot g(z) \cdot \Phi_{(i)} , \quad (7.38)$$

где мы восстановили функцию $g(z)$. Видно, что при не слишком больших k осциллирующий вклад мал по сравнению с монотонным вкладом (7.21); тем не менее, он приводит к наблюдаемым эффектам.

Чтобы найти осциллирующий с импульсом вклад в спектр мощности, учтём, что как монотонный, так и осциллирующий вклады в $\delta(k)$ пропорциональны начальному гравитационному потенциалу $\Phi_{(i)}(k)$,

$$\delta_{mon}(k) = T_{mon}(k) \Phi_{(i)}(k) , \quad \delta_{osc}(k) = T_{osc}(k) \sin kr_s \cdot \Phi_{(i)}(k) ,$$

где $T_{mon}(k)$ и $T_{osc}(k)$ — *передаточные функции*⁶ (transfer functions). Отсюда следует, что монотонный и осциллирующий вклады в $P(k)$ складываются когерентно, так что в низшем порядке по Ω_B/Ω_M мы можем записать

$$P(k, \eta) = |T_{mon}(k, \eta) + T_{osc}(k, \eta) \sin kr_s|^2 P_\Phi(k) = (T_{mon}^2 + 2T_{mon}T_{osc} \sin kr_s) P_\Phi(k). \quad (7.39)$$

Второе слагаемое здесь осциллирует как функция импульса. Поскольку T_{mon} и T_{osc} имеют один и тот же знак (см. (7.20) и (7.8), величина $A(k, \eta_r)$ положительна), максимумы и минимумы в $P(k)$ находятся при

$$\begin{aligned} \frac{k_{max}}{a_0} &= \frac{1}{r_s a_0} \left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n \right), \quad n = 0, 1, \dots, \\ &\approx 0.01, 0.05, 0.09 \text{ Мпк}^{-1} \end{aligned} \quad (7.40)$$

и

$$\frac{k_{min}}{a_0} = \frac{1}{r_s a_0} \left(\frac{3\pi}{2} + 2\pi n \right), \quad n = 0, 1, \dots, \quad (7.41)$$

соответственно (первым из значений в (7.40), (7.41) доверять нельзя, поскольку для них не выполнено неравенство (7.37)).

Эти осцилляции приводят к особенностям в корреляционной функции возмущений материи (7.24). В соответствии с (7.25) она будет суммой вкладов монотонного и осциллирующего слагаемых в (7.39),

$$\xi(y) = \xi_{mon}(y) + \xi_{BAO}(y),$$

где

$$\begin{aligned} \xi_{BAO}(y) &= \int \frac{k^2 dk}{2\pi^2} \frac{\sin ky}{ky} 2T_{mon}T_{osc} \sin kr_s P_\Phi \\ &= \int \frac{k^2 dk}{2\pi^2} \frac{\cos[(y - r_s)k] - \cos[(y + r_s)k]}{ky} T_{mon}T_{osc} P_\Phi. \end{aligned} \quad (7.42)$$

Если вклад монотонного слагаемого в интеграл (7.25) набирается при $k \lesssim y$, то при $y \approx r_s$ вклад в интеграл (7.42) даёт и область более высоких импульсов, поскольку первое слагаемое в числителе подынтегрального выражения осциллирует медленно. В этой области $T_{mon} \propto \ln k \eta_{eq}$, $T_{osc} \propto k$ и $P_\Phi \propto k^{-3}$, так что указанный вклад довольно большой. В результате $\xi_{BAO}(y)$, а вместе с ним и вся корреляционная функция $\xi(y)$ имеет пик в области $y \approx r_s$, см. рис. 7.3. Применение предыдущих формул для оценки высоты этого пика, т.е. значения $\xi_{BAO}(y = r_s)$, привело бы к формально расходящемуся интегралу вида $\int \ln k dk/k$; в действительности этот интеграл обрезается за счёт эффекта Силка (см. ниже).

Пик в корреляционной функции $\xi(y)$ при $y \approx r_s$ имеет простую физическую интерпретацию. Пусть изначально в небольшой области близи точки x имеется превышение плотности среды над средней плотностью. Для рассматриваемых адабатических возмущений превышение плотности имеется и в барион-фотонной компоненте, и в тёмной материи. Эволюция этих возмущений после пересечения горизонта

⁶Обычно осциллирующий с импульсом фактор также включают в определение передаточной функции $T_{osc}(k)$, однако нам будет удобнее обозначать за $T_{osc}(k)$ только амплитуду осциллирующего вклада.

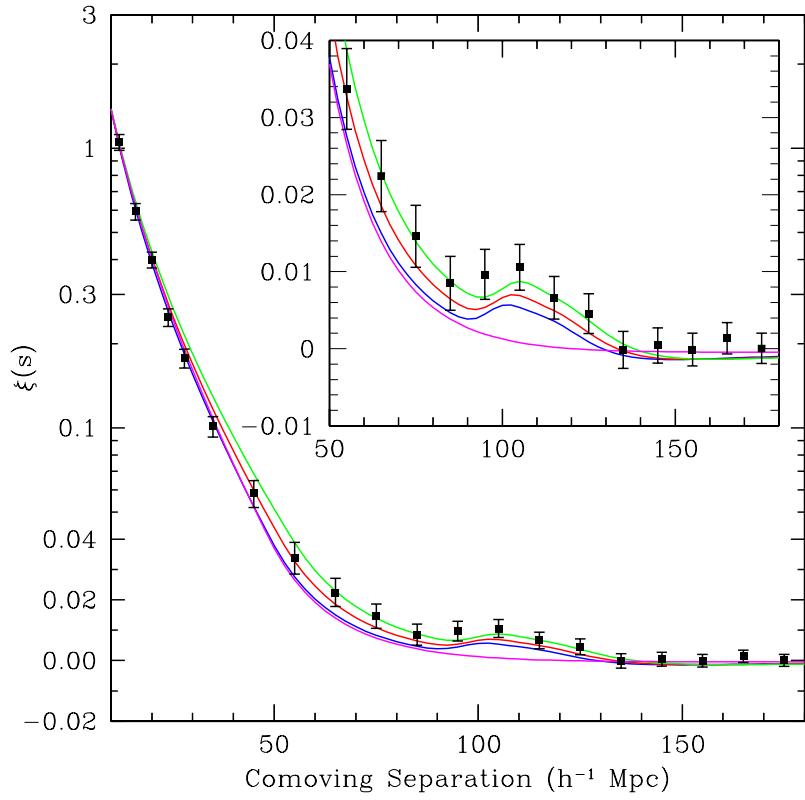


Рис. 7.3: Результаты измерения корреляционной функции $\xi(s)$ из анализа данных SDSS по распределению удалённых галактик [10]. Сплошные линии соответствуют предсказаниям различных космологических моделей. Зелёная, красная и синяя кривые соответствуют значениям параметра $\Omega_M h^2$, равным 0.12, 0.13 и 0.14, причём во всех случаях $\Omega_B h^2 = 0.024$, $n_s = 0.98$. Малиновая линия соответствует гипотетической Вселенной без барионов с $\Omega_M h^2 = 0.105$.

происходит по-разному. Неоднородность тёмной материи остаётся на том же месте, вблизи точки \mathbf{x} . Начальная неоднородность барион-фотонной среды приводит к появлению волны плотности, расходящейся от точки \mathbf{x} со скоростью звука. К эпохе рекомбинации эта волна уходит от точки \mathbf{x} на координатное расстояние r_s , в результате чего имеется превышение плотности материи как вблизи точки \mathbf{x} (тёмная материя), так и на расстоянии r_s от неё (барионы). Такая картина замораживается в эпоху рекомбинации, после которой волны в газе барионов не распространяются. Это и приводит к дополнительной корреляции между $\delta(\mathbf{x})$ и $\delta(\mathbf{x} + \mathbf{y})$ при $y \approx r_s$.

В соответствии с (7.32) особенность в корреляционной функции возмущений материи приводит к особенности в корреляционной функции галактик. Эта особенность была обнаружена при обработке данных обзора галактик SDSS, см. рис. 7.3. Впоследствии обработка данных обзоров 2dFGRS и SDSS позволила определить осциллирующую часть спектра $P(k)$, см. рис. 7.4, при этом рассматривались области с красными смещениями $z \simeq 0.2$ и $z \simeq 0.35$. Как видно из рис. 7.4, положения максимумов и минимумов в спектре вполне согласуются с (7.40) и (7.41).

Амплитуда осциллирующего вклада в $P(k)$ растёт с импульсом примерно как k (см. (7.38) и оценку (7.7)), в то время как монотонный вклад не сильно зависит от импульса (см. оценку (7.9)). Поэтому относительная величина осциллирующего вклада

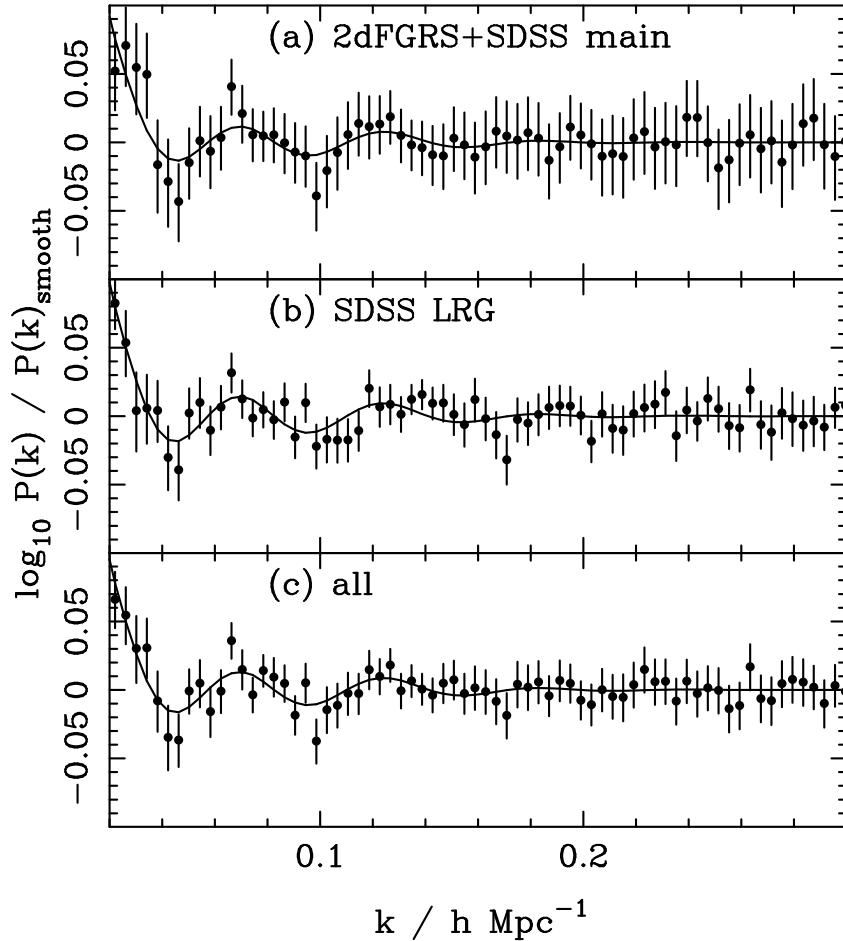


Рис. 7.4: Осциллирующий вклад в спектр мощности возмущений материи по данным анализа [11] различных каталогов галактик. Используется обозначение $P_{\text{smooth}} \equiv P_{\text{mon}}$. С учётом малости амплитуды осциллирующего вклада отложенная по оси ординат величина примерно равна половине отношения осциллирующего вклада к монотонному. Масштаб по оси абсцисс тот же, что на рис. 7.1, так что максимум с $k/a_0 \simeq 0.05 \text{ Мпк}^{-1}$ (см. (7.40)) расположен на рисунке вблизи значения 0.07.

возрастает с ростом импульса. Однако происходит это лишь при малых импульсах. Дело в том, что при достаточно больших импульсах,

$$k \gtrsim k_S \simeq a_0 \cdot 0.1 \text{ Мпк}^{-1},$$

акустические осцилляции в барион-фотонной компоненте замываются к моменту последнего рассеяния фотонов из-за так называемого эффекта Силка. Это — один из эффектов, связанных с неидеальностью барион-фотонной среды (конечностью длины свободного пробега фотона). Мы рассмотрим его в разделе 8.5.2, а здесь просто скажем, что этот эффект можно приближённо учесть умножением осциллирующего вклада δ_{osc} на фактор подавления $\exp(-k^2/k_S^2)$. Быстрое затухание осцилляций в спектре мощности при $k > k_S$ хорошо видно на рис. 7.4.

Наконец, оценим амплитуду барионных акустических осцилляций. Для этого используем выражение (7.38), оценку (7.7) и оценку (7.21), (7.22) причём в последней заменим логарифмический множитель на единицу⁷. Тогда из (7.39) следует, что от-

⁷ В действительности величина $0.2k_{max}\eta_{eq}$, стоящая под знаком логарифма, близка к единице в

ношение амплитуды (значения в максимуме) осциллирующей части спектра мощности к монотонной не зависит от времени и оценивается величиной

$$\frac{P_{osc}(k_{max})}{P_{mon}(k_{max})} = 2 \frac{T_{osc}(k_{max})}{T_{mon}(k_{max})} \sim \frac{2}{15} \frac{\Omega_B}{\Omega_{CDM}} \frac{1+z_r}{1+z_{eq}} \frac{u_s k_{max} \eta_r}{(1+R_B)^{1/4}} \cdot \exp\left(-\frac{k_{max}^2}{k_S^2}\right). \quad (7.43)$$

Подставляя численные значения входящих сюда величин, получим для высоты максимума с $n = 1$ оценку

$$\frac{P_{osc}(k_{max})}{P_{mon}(k_{max})} \sim 0.05. \quad (7.44)$$

Это на качественном уровне согласуется с результатами, представленными на рис. 7.4.

Измерение барионных акустических осцилляций при различных красных смещениях позволяет получить информацию о космологических параметрах. Действительно, положения максимумов и минимумов в спектре $P(k)$ определяются размером акустического горизонта r_s эпохи рекомбинации, а их проявления в наблюдательных данных, получаемых для определённого z , зависят от расстояния углового размера при этом красном смещении (его определение см. в разделе I.4.7) и от параметра Хаббла $H(z)$. Точнее, при усреднении по углам в импульсном пространстве существенный масштаб расстояний при фиксированном z определяется средним геометрическим от масштабов расстояний в трёх пространственных направлениях. Два из них связаны с измерениями углов, и им соответствует одинаковый масштаб — расстояние углового размера⁸ $D_a(\eta) = (\eta_0 - \eta) \cdot a(\eta)$. Третий связан с измерениями красных смещений, и поэтому он определяется величиной $H^{-1}(z)$. Таким образом, важный с точки зрения барионных акустических осцилляций масштаб расстояний при данном z равен $[D_a^2(z)/H(z)]^{1/3}$.

▷ Задача 2. Убедиться в справедливости последнего утверждения.

В работах по измерению барионных акустических осцилляций вводят пропорциональную указанной комбинации величину

$$D_V(z) = \left[\frac{z(1+z)^2 D_a^2(z)}{H(z)} \right]^{1/3}$$

и приводят результаты измерений в терминах отношения $a_0 r_s$ к этому масштабу расстояний. Итак, при усреднении результатов измерений по углам в импульсном пространстве измеряемой величиной является

$$\frac{a_0 r_s}{D_V(z)}. \quad (7.45)$$

Эта величина довольно сложным образом зависит от космологических параметров. В качестве примера на рис. 7.5 приведены графики функций (7.45) в трёх космологических моделях. Видно, что интерпретация самих измерений барионных

рассматриваемой области импульсов. Это означает, что используемое приближение работает для амплитуд плохо, и (7.44) нужно воспринимать как оценку по порядку величины. Подчеркнём, однако, что найденные нами положения максимумов и минимумов не обладают сильной неопределённостью, поскольку фаза осцилляций не зависит от приближений, использованных при получении выражения (7.9), см. также раздел 6.3.

⁸Здесь мы изменили обозначение по сравнению с используемым в разделе I.4.7.

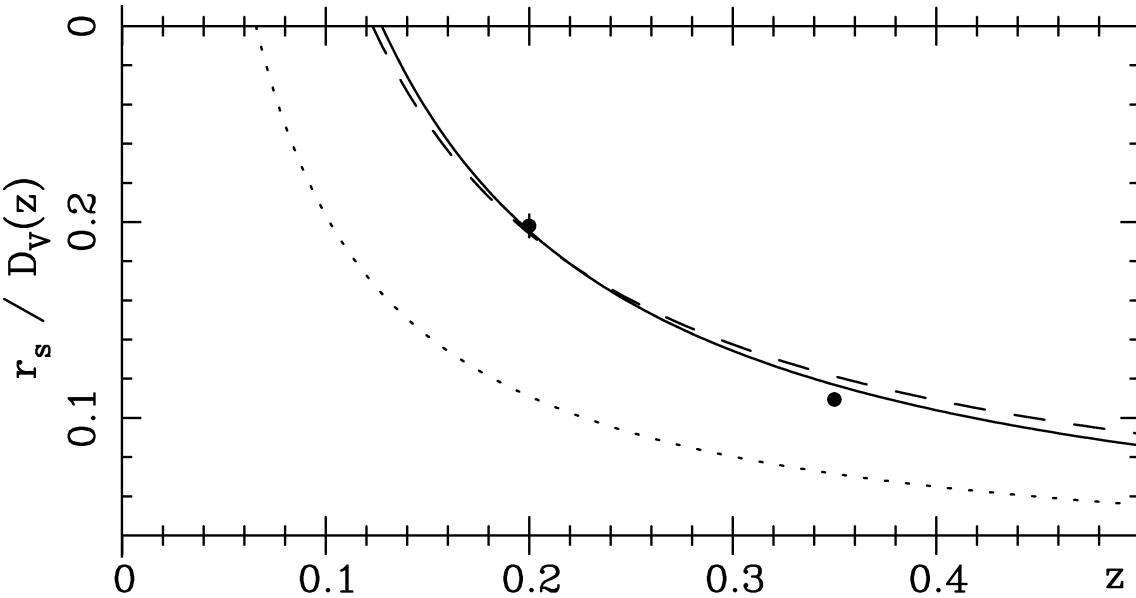


Рис. 7.5: Вырождение между космологическими параметрами при исследовании барионных акустических осцилляций [11]. Точки соответствуют результатам наблюдений. Кривые соответствуют предсказаниям в космологических моделях: пространственно плоских с $\Omega_M = 0.25$, $\Omega_\Lambda = 0.75$ (сплошная линия), $\Omega_M = 1.0$, $\Omega_\Lambda = 0$ (короткий пунктир) и с отрицательной пространственной кривизной $\Omega_M = 0.3$, $\Omega_\Lambda = 0$, $\Omega_{curv} = 0.7$ (длинный пунктир).

акустических осцилляций, как и других взятых по отдельности измерений, сталкивается с вырождением между параметрами.

Отметим ещё, что, как видно из (7.43), амплитуда осцилляций чувствительна к параметру $\Omega_B/[\Omega_{CDM}(1 + z_{eq})] \propto \Omega_B/(\Omega_{CDM}\Omega_M)$ (см. рис. 7.1), а при сравнительно больших импульсах — к значению импульса Силка k_S . Комбинирование измерений барионных акустических осцилляций с другими космологическими наблюдениями оказывается весьма полезным с точки зрения снятия вырождения между космологическими параметрами. Пример приведён на рис. 7.6.

7.2 Выход возмущений на нелинейную стадию

7.2.1 Предварительное обсуждение

Как следует из изложенных выше результатов, в модели с холодной тёмной материией⁹ контраст её плотности после входа под горизонт на РД-стадии хотя и слабо (логарифмически), но растёт с ростом импульса. Поэтому на нелинейную стадию раньше всего выходят возмущения наименьших пространственных размеров, рано входящие под горизонт, то есть первыми образуются объекты наименьшей массы. С точки зрения образования первых звёзд интерес представляют объекты с массой тёмной материи и барионов не менее $10^5 M_\odot$. Дело в том, что процесс образования первых звёзд начинается с коллапса тёмной материи и барионов, в результате которого образуется протогало. Водород и гелий, стремящиеся в центр этого протогало,

⁹ Особенности моделей с тёплой тёмной материей мы обсудим в разделе 8.3.1.

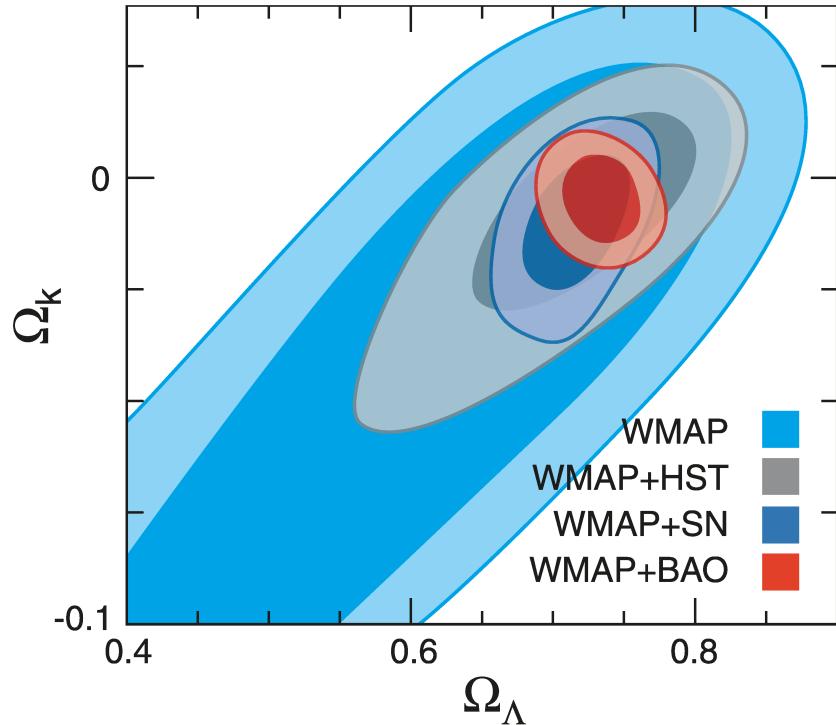


Рис. 7.6: Снятие вырождения между космологическими параметрами (в данном случае между пространственной кривизной и плотностью тёмной энергии) при расширении набора наблюдаемых [2]. Обозначение WMAP относится к наблюдениям реликтового излучения, HST и SN соответствуют добавлению различных каталогов удалённых сверхновых типа Ia, BAO — добавлению данных по барионным акустическим осцилляциям. Центральные (тёмные) области разрешены на уровне достоверности 68%. Добавление светлых “полос” соответствует расширению доверительного интервала до 95%.

разогреваются, а затем остывают за счёт испускания фотонов. Масштаб $M \sim 10^5 M_\odot$ определяется тем, что гравитационных сил в случае меньших масс недостаточно для противодействия давлению радиации: барионы “выдуваются” из гало, и звезда не образуется¹⁰. В случае $M \gtrsim 10^5 M_\odot$ этого не происходит, и образуются первые звёзды с массой порядка $100 M_\odot$.

Для грубой оценки красного смещения, при котором начали появляться первые звёзды, воспользуемся выражениями (7.21), (7.22) (обозначение “топ” в дальнейшем опускаем). Возмущения выходят на нелинейную стадию, довольно быстро завершающуюся образованием структур, при

$$\delta(k, z) \sim 1 . \quad (7.46)$$

Нас интересуют импульсы $k/a_0 \sim \pi/R \sim (3 \text{ кpc})^{-1}$, где мы воспользовались оценкой (1.29) для современного размера неоднородности, соответствующего массе $10^5 M_\odot$. Используем значение (5.41) в качестве оценки для начального гравитационного потенциала и значения величин z_{eq} и $a_0\eta_{eq}$, приведённые в разделе 2.1.2, и получим из

¹⁰Для процессов образования звёзд в последующие эпохи существенно наличие в среде элементов тяжелее гелия, синтезируемых при горении и взрывах первых звёзд. Именно поэтому во Вселенной имеются звёзды сравнительно небольших масс.

(7.21), (7.22), что соотношение (7.46) выполняется при

$$z_5 \simeq 7.5 , \quad (7.47)$$

где индекс 5 указывает на масштаб масс, $M \sim 10^5 M_\odot$. В действительности образование первых звёзд начинается несколько раньше. Это связано, в частности, с тем, что $\delta(\mathbf{x})$ представляет собой случайное поле. В некоторых областях пространства значения этого поля могут сильно превышать среднюю величину флюктуаций — в этих областях образование объектов происходит раньше. Мы более подробно рассмотрим этот и аналогичные вопросы в разделе 7.2.2. Итак, достаточно интенсивное образование первых звёзд начинает происходить при $z \sim 10$ и даже несколько раньше.

Замечательно, что такая картина имеет наблюдательные следствия. В эпоху образования первых звёзд происходит интенсивное излучение фотонов. Оно приводит к вторичной ионизации водорода во Вселенной. Это в свою очередь оказывается на анизотропии и поляризации реликтового излучения, см. Главы 9, 10. Из данных по реликтовому излучению следует оценка красного смещения z_{rei} , при котором произошла вторичная ионизация, $z_{rei} \simeq 10$. Это вполне согласуется с изложенными соображениями.

Структуры больших размеров образуются позже. Так, современный пространственный размер возмущений, из которых образуются галактики, имеет порядок $R \sim 1$ Мпк, см. раздел 1.3. В этом случае вместо (7.47) получим $z_{12} \simeq 2$. Таким образом, галактики начали образовываться в основном сравнительно недавно, при $z = 2 - 4$. Образование ещё более крупных структур — скоплений галактик — началось ещё позже, см. раздел 7.2.2.

Таким образом, в модели с холодной тёмной материией образование структур носит иерархический характер: большие структуры образуются в результате скучивания более мелких.

7.2.2 Распределение по массам

Образование структур — нелинейный процесс, и наиболее адекватным для его описания является численный анализ. Тем не менее, ответы на ряд вопросов, таких как распределение структур по массам и зависимость этого распределения от красного смещения, можно с неплохой точностью получить в рамках аналитического подхода, который называют формализмом Пресса–Шехтера. Описанию этого подхода и посвящён данный раздел.

Прежде всего, сформулируем результат, полученный в разделе А.2 для однородной сферы повышенной плотности во Вселенной, заполненной пылевидной материией: коллапс такой сферы завершается тогда, когда контраст плотности, вычисленный в рамках линеаризованной теории, становится равным

$$\delta_c = 1.686 . \quad (7.48)$$

Будем считать, что аналогичное утверждение справедливо и в реалистической ситуации: если *усреднённый* линейный контраст плотности в шаре современного радиуса R превышает δ_c , то этот шар испытывает коллапс и в полной нелинейной теории. Численный анализ показывает, что в случае гладкого начального распределения материи общего вида такое приближение работает неплохо.

В рассматриваемой ситуации естественно ввести сглаженный контраст плотности

$$\delta_R(\mathbf{x}, t) = \int d^3y \delta(\mathbf{x} + \mathbf{y}, t) W_R(\mathbf{y}) ,$$

где $W_R(\mathbf{y})$ — функция окна, существенно отличающаяся от нуля лишь при $|\mathbf{y}| \lesssim R/a_0$ и нормированная условием

$$\int d^3y W_R(\mathbf{y}) = 1 .$$

Отметим, что здесь мы используем сопутствующие координаты \mathbf{x} , \mathbf{y} , а величину R считаем *современным* размером облака. Конкретный вид функции окна не слишком важен, если соответствующим образом подбирать критическое значение δ_c (см. в связи с этим задачу 7 в разделе А.2). Как правило используют функцию

$$W_R(\mathbf{y}) = \frac{3}{4\pi} \frac{a_0^3}{R^3} \theta(R - a_0|\mathbf{y}|) .$$

Этот выбор продиктован аналогией с упомянутой выше задачей о коллапсе однородного шара; такому выбору и соответствует значение δ_c , приведённое в (7.48). При этом выборе выполняется обычное соотношение между размером R и массой формирующегося компактного объекта:

$$M(R) = \frac{4\pi}{3} R^3 \rho_{M,0} , \quad (7.49)$$

где $\rho_{M,0}$ — современная плотность барионов и тёмной материи.

Итак, в рамках рассматриваемого приближения условие коллапса к моменту времени t области размера R с центром в точке \mathbf{x} имеет вид

$$\delta_R(\mathbf{x}, t) \geq \delta_c . \quad (7.50)$$

Коллапс приводит к формированию гравитационно-связанной структуры. Дальнейшее внутреннее развитие таких структур происходит локально, и его мы рассматривать не будем. Повторим лишь, что на первых этапах коллапса действительно вполне адекватным приближением для описания процесса является коллапс пылевидного шара, рассмотренный нами в разделе А.2. В дальнейшем, на довольно поздних этапах, весьма существенным становится отсутствие сферической симметрии и влияние излучения.

Сделаем по поводу формулы (7.50) несколько замечаний. Во-первых, в соответствии со сказанным выше (см. также раздел А.2), фигурирующая в левой части (7.50) величина непосредственного физического смысла не имеет: величина $\delta_R(\mathbf{x}, t)$ *была бы* контрастом плотности материи, *если бы* линейная теория эволюции возмущений работала вплоть до момента времени t . В действительности контраст плотности в центре коллапсирующей области значительно превышает δ_c к моменту времени, когда $\delta_R(t) = \delta_c$; в случае однородного сферически-симметричного распределения материи плотность в это время обращается в бесконечность, см. раздел А.2. Удобство излагаемого формализма состоит в том, что для оценки распространённости объектов разных масс используются результаты, получаемые (на формальном уровне) в *линейной* теории. В дальнейшем в этом разделе мы будем понимать величины $\delta(\mathbf{x}, t)$, $\delta_R(\mathbf{x}, t)$ и т.д. именно в таком формальном смысле: они вычисляются в рамках линейной теории, а выводы полной, нелинейной теории формулируются в виде приближённых соотношений типа (7.50). При таком подходе вполне адекватным

является использование спектра мощности возмущений в линейной теории, обсуждавшегося в разделе 7.1.1.

Во-вторых, при выполнении условия (7.50) первоначальный размер коллапсирующей области может *превышать* R : условие (7.50) означает, что область размера R сколлапсировала, но не уточняет, что происходит с окружающей материей. Иначе говоря, соотношение (7.50) — это условие того, что ко времени t образовался компактный объект с массой

$$M \geq M(R), \quad (7.51)$$

где $M(R)$ задаётся формулой (7.49).

Далее, значение (7.48) получено в разделе A.2 в рамках модели Вселенной, заполненной пылевидной материей. В присутствии тёмной энергии величина δ_c зависит от времени. Эту зависимость можно найти, используя уравнение (A.38). Она довольно слабая, см. рис. 7.7, и мы ею будем пренебречь.

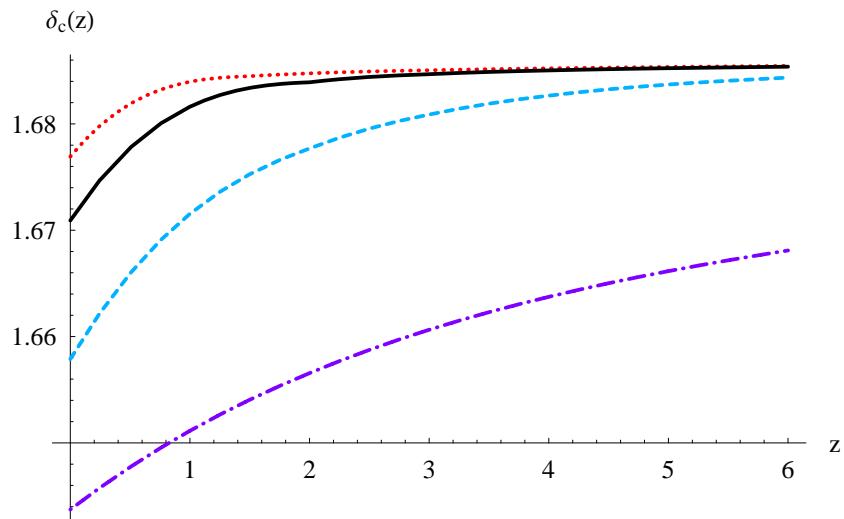


Рис. 7.7: Зависимость критического контраста плотности $\delta_c(z)$ от красного смещения в космологических моделях с различной реализацией стадии ускоренного расширения современной Вселенной [12]. Графики относятся к модели с космологической постоянной (сплошная линия), моделям с уравнением состояния $p = w\rho$, $w(z) = w_0 + w_1z/(1+z)^2$ ($w_0 = -1.3$, $w_1 = 4$ — пунктир, $w_0 = -1.3$, $w_1 = -2$ — короткий пунктир), и модели с законом Хаббла $H^2(z) = H_0^2 [\Omega_M (1+z)^3 + a_1 (1+z) + a_2 (1+z)^2 + (\Lambda - a_1 - a_2)]$, $a_1 = -4.16$, $a_2 = 1.67$, согласующимся с наблюдениями удалённых сверхновых типа Ia — штрих-пунктир.

Наконец, отметим, что в излагаемом подходе формирование структур на различных пространственных масштабах происходит *независимо* друг от друга. А именно, условие (7.50) реализации коллапса для облака материи большого пространственного размера на самом деле *не зависит* от того, как выглядит структура неоднородностей материи на малых пространственных масштабах внутри этой коллапсирующей области (в частности, неважно, есть ли там сколлапсировавшие густки материи и сколько их, или распределение материи действительно почти однородно).

Ясно, что определённые нами величины $\delta_R(\mathbf{x}, t)$ обладают теми же статистическими свойствами¹¹, что и исходные нестягенные величины $\delta(\mathbf{x}, t)$. Мы считаем,

¹¹При этом существенно, что $\delta(\mathbf{x}, t)$ является формальной величиной, вычисляемой в линеаризованной теории.

что $\delta(\mathbf{x}, t)$ — это гауссово случайное поле. Поэтому $\delta_R(\mathbf{x}, t)$ при фиксированном \mathbf{x} — это гауссова случайная величина. Фурье-образы $\delta(\mathbf{x}, t)$ и $\delta_R(\mathbf{x}, t)$ связаны следующим образом:

$$\delta_R(\mathbf{k}, t) = \delta(\mathbf{k}, t) \cdot \int d^3y W_R(\mathbf{y}) e^{i\mathbf{ky}} = \delta(\mathbf{k}, t) W_R(\mathbf{k}) = \frac{3j_1(kR/a_0)}{kR/a_0} \delta(\mathbf{k}, t). \quad (7.52)$$

Из формулы (7.52) видно (см. Приложение F), что основной вклад в $\delta_R(\mathbf{x}, t)$ дают возмущения с импульсами $k \lesssim a_0/R$.

Дисперсия σ_R случайной величины $\delta_R(\mathbf{x}, t)$ даётся соотношением

$$\begin{aligned} \sigma_R^2(t) \equiv \langle \delta_R^2(\mathbf{x}, t) \rangle &= \int d^3k d^3k' e^{i(\mathbf{k}+\mathbf{k}')\mathbf{x}} |W_R(\mathbf{k})|^2 \langle \delta(\mathbf{k}, t) \delta(\mathbf{k}', t) \rangle \\ &= \int_0^\infty \frac{dk}{k} \mathcal{P}(k, t) \frac{9j_1^2(kR/a_0)}{(kR/a_0)^2}, \end{aligned} \quad (7.53)$$

Отметим, что как сглаженный контраст плотности δ_R , так и его дисперсию σ_R можно рассматривать как функцию массы M формирующегося объекта; соответствие между массой и размером даётся формулой (7.49). В дальнейшем мы будем использовать как величину σ_R , так и величину σ_M . Между ними имеется очевидная связь: $\sigma_R = \sigma_M$ при $M = M(R)$. Удобство использования величины σ_M состоит в том, что масса материи в объёме координатного размера k^{-1} не зависит от красного смещения, поэтому вся зависимость σ_M от z связана с зависимостью от красного смещения спектра $P(k, z)$.

▷ Задача 3. Найти аналог формулы (7.53) для гауссовой функции окна.

Для физически интересного случая близкого к масштабно-инвариантному спектру первичных возмущений имеем при малых импульсах $P(k) \propto k$, а при больших $P(k) \propto k^{-3} \ln^2 k$, см. (7.3). Поэтому интеграл (7.53) сходится. Результат численного интегрирования в линейной теории представлен на рис. 7.8. Видно, что первые звёзды, соответствующие массам протогало $M \gtrsim 10^5 M_\odot$, интенсивно образуются при $z \sim 10$. Образование скоплений галактик активно происходит при $z \lesssim 2$. Кроме того, видно, что в современной Вселенной мало гравитационно связанных структур с массами, заметно превышающими $M \sim 10^{14} M_\odot$. Формирование таких объектов происходит в современной Вселенной. Как мы отмечали в Главе I.1, такие объекты (крупные скопления) на самом деле довольно рыхлые — контраст плотности материи в них невелик, порядка единицы. В действительности ещё более крупными объектами во Вселенной, процесс формирования которых начался совсем недавно, $z \lesssim 1$, являются так называемые *филаменты*. Это сильно вытянутые области повышенной концентрации материи, как правило связывающие скопления галактик. Считается, что именно в филаментах содержится около половины всех барионов и частиц тёмной материи. Формирование филаментов — сугубо несферический процесс, и мы его рассматривать не будем.

Приведём простую аналитическую оценку для интеграла (7.53), позволяющую найти зависимость σ_R от массы гало. Этот интеграл в основном насыщается при интегрировании по области импульсов $k \lesssim a_0/R$, что формально обусловлено убыванием сферической функции Бесселя j_1 при $k > a_0/R$ (см. подробнее приложение F.1). Физическая причина состоит в том, что большим импульсам соответствуют малые длины волн, так что вклады от мод с $k \gg a_0/R$ при усреднении по большому

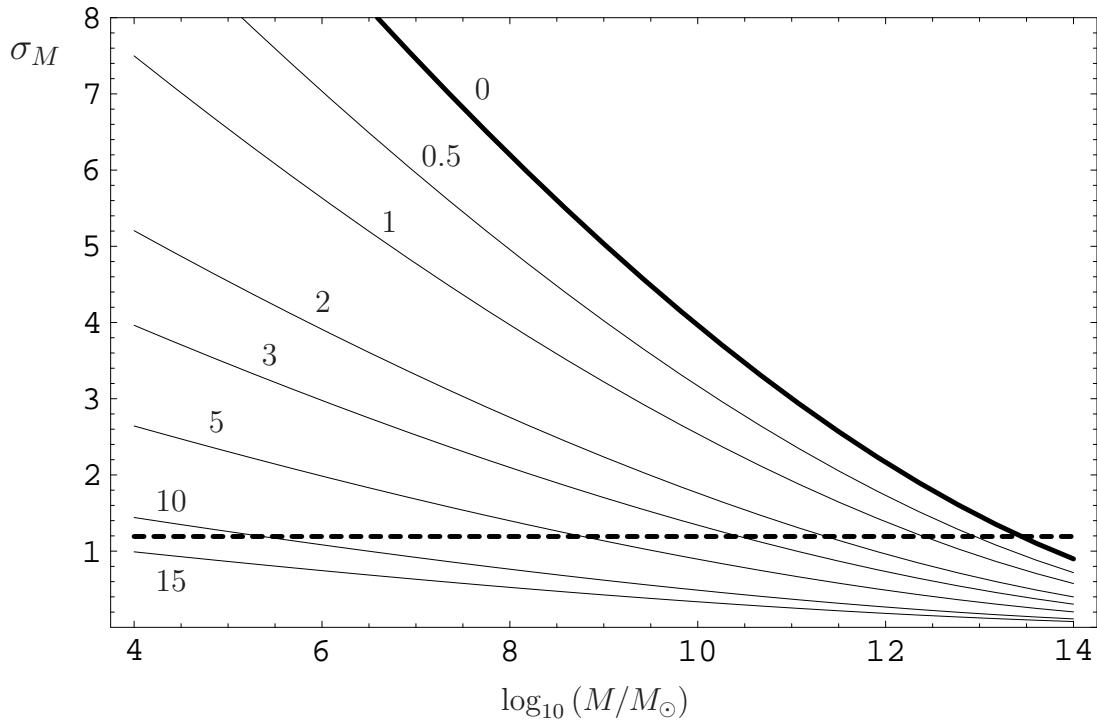


Рис. 7.8: Дисперсия σ_M усреднённого контраста плотности (вычисленного в линейной теории) в модели Λ CDM при значениях космологических параметров, приведенных в разделе 2.1.2, и разных красных смещениях (показаны цифрами около кривых). Толстая кривая характеризует современную эпоху; чем ниже лежит кривая, тем к более ранней эпохе она относится, в согласии с (7.57). Горизонтальная пунктирная прямая проведена на уровне $\sigma_M = \delta_c/\sqrt{2} \approx 1.192$: при этом значении обращается в единицу показатель экспоненты подавления дифференциального спектра структур (7.60). Область выше этой прямой соответствует активному образованию структур.

объёму $V \sim (R/a_0)^3$ частично сокращаются. Это соответствует общему представлению о том, что структура возмущений на малых масштабах несущественна для вопроса о формировании крупного гало. Как следует из оценок, приведённых в разделе 1.3, наиболее массивным структурам в современной Вселенной соответствуют пространственные масштабы R вплоть до нескольких десятков мегапарсек, так что для всех интересных случаев $R < a_0\eta_{eq}$, см. (2.23). Область интегрирования в (7.53) естественно разбить на три части: $k \lesssim \eta_{eq}^{-1}$, $\eta_{eq}^{-1} \lesssim k \leq a_0/R$, $k > a_0/R$. В первой области $\mathcal{P}(k)$ быстро растёт с k . Поскольку здесь $kR/a_0 \ll 1$, последний множитель в подынтегральном выражении равен единице, см. (F.8). Таким образом, интегрирование по этой области даёт вклад в σ_R^2 , не зависящий от величины M . Этот вклад мы аналитически найти не сможем, поскольку тут существенны моды с $k \sim \eta_{eq}^{-1}$, а аналитического выражения для спектра $\mathcal{P}(k)$ в этой области получить не удаётся. Величина этого вклада, однако, мала, поскольку рассматриваемая область интегрирования мала, а $\mathcal{P}(k)$ растёт с импульсом и при больших импульсах.

Основной вклад в интеграл даёт вторая область, $\eta_{eq}^{-1} \lesssim k \lesssim a_0/R$. С учётом того, что интеграл в (7.53) носит логарифмический характер (в него вносит вклад большая область значений переменной $\ln(kR/a_0)$), последний множитель в (7.53) по-прежнему можно считать равным единице. Воспользуемся для спектра мощности асимптотикой больших импульсов (7.21), $\mathcal{P}(k, z) = F^2(z)\mathcal{P}_\Phi(k)\ln^2(0.2k\eta_{eq})$. Тогда

обсуждаемый вклад насыщается на верхнем пределе, так что

$$\sigma_R^2(z) \simeq F^2(z) \mathcal{P}_\Phi \int_{\eta_{eq}^{-1}}^{a_0/R} \frac{dk}{k} \ln^2(0.2k\eta_{eq}) \simeq F^2(z) \mathcal{P}_\Phi \cdot \frac{1}{3} \ln^3(0.2a_0\eta_{eq}/R) . \quad (7.54)$$

Это и есть искомое выражение; оно справедливо в главном логарифмическом приближении по параметру $\ln(0.2a_0\eta_{eq}/R)$, который мы считаем большим. В этом приближении при близком к плоскому первичному спектре дисперсия σ_R падает с ростом размера R , а $\sigma_M^2(z)$ зависит от массы объекта, как $\ln^3(M^{-1})$. Поправки к формуле (7.54), формально подавленные по параметру $\ln(0.2a_0\eta_{eq}/R)$, на самом деле довольно велики, см. задачу 5. Численные оценки дают для области больших контрастов, $\sigma_M \gtrsim 1$, следующую зависимость:

$$\sigma_M^2(z) \propto \ln^{2.5}(M^{-1}) . \quad (7.55)$$

Такая зависимость неплохо согласуется с поведением, изображенным на рис. 7.8.

- ▷ Задача 4. Показать, что формула (7.54) действительно справедлива в главном логарифмическом приближении. Указание: использовать в качестве переменной интегрирования в (7.53) величину $\ln(0.2k\eta_{eq})$.
- ▷ Задача 5. Найти поправку порядка $\ln^2(R^{-1})$ к формуле (7.54). Указание: убедиться сначала, что поправка этого порядка целиком набирается из области $k \sim a_0/R$.

Мы видели, что при плоском спектре начальных возмущений вся зависимость от импульса в спектре мощности $P(k, z)$ в области $k/a \gg 0.01$ Мпк $^{-1}$ содержится в логарифмическом множителе в (7.21). Зависимость спектра от красного смещения определяется функцией

$$F(z) \propto \frac{g(z)}{1+z} ,$$

при этом функция $g(z)$ зависит от отношения Ω_M/Ω_Λ , но не очень сильно. Таким образом, спектр по-существу определяется единственным параметром — нормировкой амплитуды. По историческим причинам в качестве этого параметра выбирают $\sigma_8 \equiv \sigma_{R_8}(z=0)$, где $R_8 = 8 h^{-1}$ Мпк. Этот масштаб соответствует массе $M \simeq 2 \cdot 10^{14} M_\odot$. Отметим, что из рис. 7.8 видно, что такие моды ещё не вышли полностью на нелинейную стадию развития, а потому к ним неприменима оценка (7.55). Разумеется, величина σ_8 пропорциональна амплитуде первичных возмущений Δ_Φ (с коэффициентом пропорциональности, зависящим от космологических параметров). Поэтому значение σ_8 определяют как из наблюдений структур, так и из измерений реликтового излучения. Современные данные приводят к оценке [2]

$$\sigma_8 = 0.812 \pm 0.026 .$$

Эта оценка соответствует значению Δ_Φ , приведённому в разделе 5.4.

- ▷ Задача 6. Убедиться в справедливости последнего утверждения. Указание: при вычислении интеграла (7.54) воспользуйтесь численным приближением для спектра $P(k)$, представленным в конце этой Главы.

Воспользуемся значением σ_8 и численной оценкой интеграла (7.54) в области $\sigma_M \sim 1$, чтобы найти величину σ_M для масштабов, находящихся глубоко на нелинейной стадии, где имеет место поведение (7.55). Для современной Вселенной и масштаба масс крупных галактик $M = M_* \simeq 10^{12} M_\odot$ имеем из рис. 7.8 оценку $\sigma_{M_*}(0) \simeq 2.2$. Тогда из (7.55) получим приближённо для современных структур меньших масс:

$$\sigma_M(z=0) \simeq \sigma_{M_*} \frac{\ln^{1.25} \left[0.2a_0 \eta_{eq} \left(\frac{4\pi\rho_{M,0}}{3M} \right)^{1/3} \right]}{\ln^{1.25} \left[0.2a_0 \eta_{eq} \left(\frac{4\pi\rho_{M,0}}{3M_*} \right)^{1/3} \right]} \simeq 0.2 \sigma_8 \ln^{1.25} \left(\frac{2.3 \cdot 10^{15} M_\odot}{M} \right). \quad (7.56)$$

где мы в последнем равенстве перешли к традиционному параметру $\sigma_8 \simeq 0.4 \sigma_{M_*}$. Эта формула неплохо согласуется с численным ответом, изображённым на рис. 7.8. При красном смещении z дисперсия равна

$$\sigma_M(z) = \frac{g(z)}{g(0)} \frac{1}{1+z} \sigma_M(z=0). \quad (7.57)$$

Для облаков современного размера R и массы $M(R)$ нелинейная стадия наступает в среднем при $\sigma_R \sim 1$. Поскольку контраст $\delta_R(\mathbf{x}, t)$ — случайная величина, для облака в данной точке пространства это может произойти несколько раньше или несколько позже. Вероятность иметь для данного облака контраст плотности, превышающий значение δ_c , определяется интегралом вероятности

$$P(\delta_R > \delta_c) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\delta_c}^{\infty} \frac{d\delta}{\sigma_R} e^{-\frac{\delta^2}{2\sigma_R^2}} = \frac{1 - \text{erf}\left(\frac{\delta_c}{\sqrt{2}\sigma_R}\right)}{2}. \quad (7.58)$$

Эта вероятность определяет долю материи, содержащуюся в сколлапсировавших облаках с массой $M \geq M(R)$, см. (7.51). А именно, если обозначить за $dN(M)$ среднюю концентрацию структур с массой между M и $M + dM$, то для неё будет выполняться равенство

$$\frac{\int dV \int_{M(R)}^{\infty} M' dN(M')}{\int dV \rho_M} = 2P(\delta_R > \delta_c), \quad (7.59)$$

где интегрирование ведётся по большой области пространства, где заведомо много объектов массы M . Левая часть этого равенства представляет собой массовую долю материи, сконцентрированной в структурах с массой больше M .

Множитель 2 в правой части формулы (7.59) появляется из стремления получить физически правильный результат: в пределе $M \rightarrow 0$, $\sigma_R \rightarrow \infty$ все частицы соберутся в структуры. В то же время, по формуле (7.58) получаем в этом пределе $P = 1/2$. Интерпретация ответа проста: окрестность любой точки с равной вероятностью относится к области либо с повышенной, либо с пониженной плотностью. В рассматриваемом пределе материя в конечном итоге будет содержаться только в областях с изначально повышенной плотностью, а из областей с пониженной плотностью она полностью уйдёт. Чтобы получить в данном пределе этот ответ и добавляется указанный корректирующий фактор. Тот факт, что этот множитель пришлось добавить “руками”, обусловлен неприменимостью линейного приближения на завершающей стадии формирования структур, в рамках которого половина частиц, вначале содержащаяся в обеднённых областях, оказалась попросту неучтённой. Обсуждение на более формальном уровне см. в [14].

Из вывода формулы (7.59) ясно, что она не учитывает объекты сравнительно малой массы, находящиеся внутри объектов большей массы. Формально это видно из следующего соображения. Пусть радиус R_c таков, что вероятность $2P(\delta_{R_c} > \delta_c)$ близка к единице. Тогда уменьшение нижнего предела интегрирования по массам в (7.59) не должно ничего добавлять к значению интеграла. Поэтому использование формулы (7.59) привело бы к выводу, что объектов с массой меньше $M(R_c)$ не образуется вовсе. В соответствии с обсуждением в разделе 7.2.1 это неверно: объекты малой массы образуются первыми, и они вполне могут оказаться внутри больших структур, сколлапсировавших позже. Итак, $dN(M)$ в (7.59) нужно понимать как число *изолированных* гравитационно связанных структур с массами вблизи значения M в единице пространственного объёма.¹²

В качестве первого приложения формулы (7.59) оценим, в объектах какой массы содержится заметная доля всей материи в современную эпоху. Заметим, что $2P(\delta_R > \delta_c) \simeq 0.32$ при $\sigma_R = \delta_c$ и $2P(\delta_R > \delta_c) \simeq 0.05$ при $\sigma_R = 0.5\delta_c$. Приравнивая величину $\sigma_M(0)$, см. рис. 7.8, значениям δ_c и $0.5\delta_c$, и используя значение (7.48), получим в очевидных обозначениях

$$M_{32\%} \simeq 4 \cdot 10^{12} M_\odot, \quad M_{5\%} \simeq 3 \cdot 10^{14} M_\odot.$$

Первое из этих значений соответствует небольшой группе галактик (подобной Местной группе), а второе — довольно крупному скоплению. Таким образом, в галактиках, их группах, небольших и средних скоплениях сосредоточена весьма значительная доля материи (согласно нашей оценке — около 30%, а на самом деле немного меньше), в то время как доля материи, находящейся в крупных скоплениях галактик, сравнительно невелика и составляет несколько процентов. Несмотря на грубость наших приближений, полученные оценки весьма неплохо (с точностью до фактора 2) согласуются с наблюдениями, см., например, рис. 7.10.

- ▷ **Задача 7.** Используя результаты, приведённые на рис. 7.10, оценить долю материи в современной Вселенной, находящейся в скоплениях галактик с $M \geq 2 \cdot 10^{14} M_\odot$.
- ▷ **Задача 8.** Оценить значение красного смещения, при котором 5% материи собирается в протозвёздные гало с массой не менее $10^5 M_\odot$, уточнив тем самым оценку (7.47).

Продолжим обсуждение спектра масс структур во Вселенной, основываясь на формуле (7.59). Для средних величин ответ не зависит от выбора области интегрирования, так что в формуле (7.59) интегрирование по объёму V можно опустить. Получившееся выражение удобно проинтегрировать по массе объекта M , что даёт следующее выражение для дифференциальной концентрации структур с массой M :

$$\begin{aligned} \frac{dN(M)}{dM} &= -\frac{\rho_M}{M} \frac{d\sigma_R}{dM} \frac{1}{\sigma_R^2} \cdot \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_{\delta_c}^{\infty} d\delta \cdot \left(\frac{\delta^2}{\sigma_R^2} - 1 \right) \cdot e^{-\frac{\delta^2}{2\sigma_R^2}} \\ &= -\frac{2\delta_c}{\sqrt{2\pi}\sigma_M^2} \frac{\rho_M}{M^2} \frac{d\sigma_M}{d\ln M} \cdot e^{-\frac{\delta_c^2}{2\sigma_M^2}}. \end{aligned} \tag{7.60}$$

¹²Отметим, что в современных шаровидных структурах — скоплениях галактик — находится лишь каждая десятая галактика и не больше половины барионов. Остальные входят в более сложные несферические структуры, так что наше описание в действительности является весьма приближённым.

Формула (7.60) работает как для современной эпохи, так и при ненулевом красном смещении. В последнем случае помимо того, что σ_M зависит от z , от красного смещения зависит также $\rho_M(z) \propto (1+z)^3$. Величина $(dN/dM)(M, z)$ имеет при этом смысл числа объектов на единицу массы в единице физического пространственного объёма, а $(1+z)^{-3}dN/dM$ представляет собой дифференциальный спектр структур в сопутствующем объёме. В качестве иллюстрации последняя величина приведена на рис. 7.9. Кривые приближаются друг к другу, когда начинает выполняться усло-

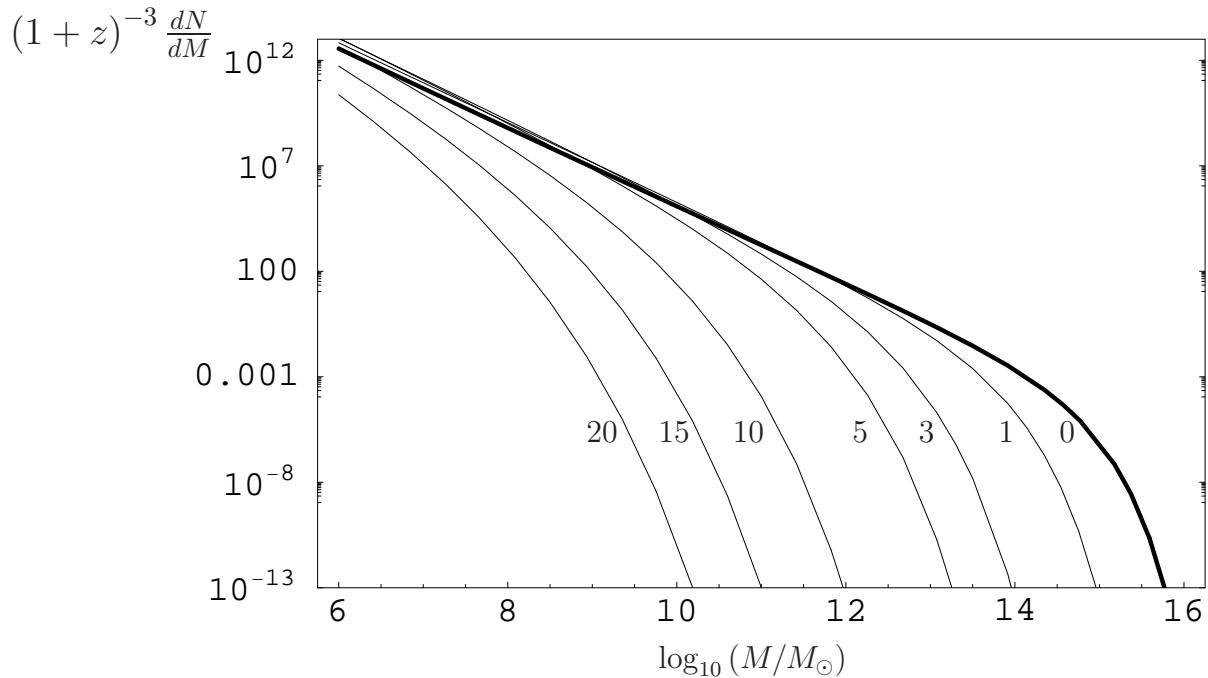


Рис. 7.9: Дифференциальный спектр концентрации структур в сопутствующем объёме как функция массы в модели Λ CDM (нормировка произвольна). Значения космологических параметров приведены в разделе 2.1.2. Приведены результаты для современной величины (толстая кривая) и для спектра в более ранние эпохи; значения красного смещения показаны цифрами около кривых.

вие $\sigma_M > \delta_c$. В этом случае экспоненциальный фактор в (7.60) близок к единице, и с точностью до логарифмов справедливо $dN/d\ln M \propto M^{-1}$. Таким образом, в логарифмических интервалах масс, отстоящих друг от друга на порядок величины, содержится на порядок же разное количество объектов: галактик с массой $10^9 M_\odot$ должно быть примерно в десять раз больше, чем галактик с массой $10^{10} M_\odot$. Иначе говоря, в разных логарифмических интервалах масс объектов (скажем, в интервалах $(10^8 - 10^9) M_\odot$ и $(10^{10} - 10^{11}) M_\odot$) содержится примерно одинаковое количество материи: с точностью до логарифмов справедливо $M dN/d\ln M \approx \text{const}$. Эти утверждения, естественно, не учитывают то обстоятельство что число галактик может изменяться на нелинейной стадии в результате их взаимодействия между собой. Зависимость от красного смещения соответствует $(1+z)^{-3}dN/dM \propto (1+z)$; в масштабе, выбранном на рис. 7.9, эта зависимость не видна. При больших массах, когда $\sigma_M \ll \delta_c$, имеет место экспоненциальное подавление, и кривые загибаются вниз. При больших z это происходит раньше, в соответствии с зависимостью $\sigma_M \propto (1+z)^{-1}$.

Формула (7.60) (и уточняющие её формулы, см. конец раздела) предсказывает

распространённость структур во Вселенной. Эти предсказания и их наблюдательные следствия зависят от мощности спектра (от величины σ_8) и от темпа расширения Вселенной в сравнительно недалёком прошлом (то есть от Ω_M , Ω_Λ и Ω_{curv}). Кроме того, распространённость структур малых масс зависит от типа тёмной материи (холодная она или тёплая, см. раздел 8.3.1) и от массы нейтрино, см. раздел 8.4. Одной из наблюдаемых величин является число объектов с массой, больше заданной, в определённом интервале красных смещений,

$$N(\text{масса} > M) = \int_{z_1}^{z_2} \frac{dz}{(1+z)H(z)} \cdot D_a^2(z)d\Omega \int_M^\infty dM' \frac{dN(M', z)}{dM'} . \quad (7.61)$$

Здесь $D_a(z)$ — расстояние углового размера, так что $D_a^2 d\Omega$ — физическая площадь участка сферы с телесным углом $d\Omega$; $(1+z)^{-1}H^{-1}(z)dz$ — физическое радиальное расстояние¹³ между источниками с красными смещениями z и $z + dz$. При этом зависимость от космологических параметров присутствует как в выражении элемента объёма через наблюдаемые величины, включающем в себя множитель $H^{-1}(z)D_a^2(z)$, так и в величине $\sigma_M(z)$. Пример сравнения теоретически предсказываемого числа скоплений галактик с результатами наблюдений представлен на рис. 7.10. На

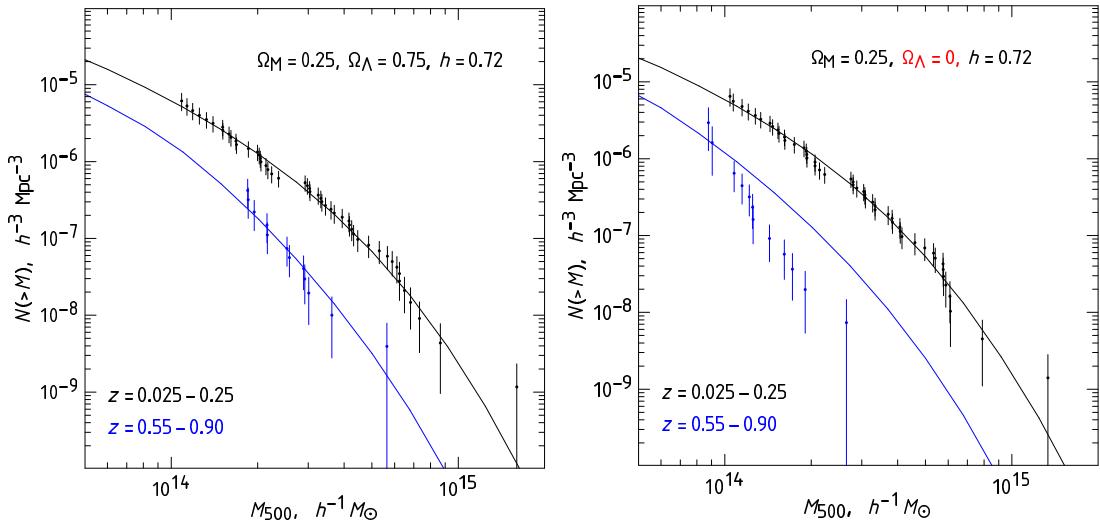


Рис. 7.10: Данные обработки результатов наблюдений крупных скоплений галактик рентгеновским телескопом CHANDRA в сравнении с теоретическими предсказаниями для разных значений космологических параметров [17]. Нижние кривые и соответствующие данные относятся к наблюдениям за более далёкими объектами, соответствующими большими красным смещениям.

рис. 7.11 представлены результаты обработки этих наблюдений и их сравнение с

¹³Последнее утверждение следует из того, что для двух фотонов, испущенных с физических расстояний l и $l + dl$ и приходящих к наблюдателю одновременно, справедливо $dl = |dt| = |da/\dot{a}| = (1+z)^{-1}H^{-1}(z)dz$. Отметим, что выражение (7.61) можно записать в виде

$$N(\text{масса} > M) = \int_{z_1}^{z_2} \frac{dz}{H(z)} \cdot r^2(z)d\Omega \int_M^\infty dM' \frac{1}{(1+z)^3} \frac{dN(M', z)}{dM'} ,$$

где $r(z)$ — координатное расстояние углового размера, см. I.4.7. При этом $r^2(z)H^{-1}(z)dzd\Omega$ представляет собой элемент координатного объёма, а $(1+z)^{-3}(dN/dM)dM$ — число объектов в единице координатного объёма. Последняя величина будет даваться формулой (7.60), если в ней считать ρ_M современной плотностью материи.

результатами, получаемыми из измерений анизотропии и поляризации реликтового излучения. Мы видим, что измерения распространённости структур дают важную

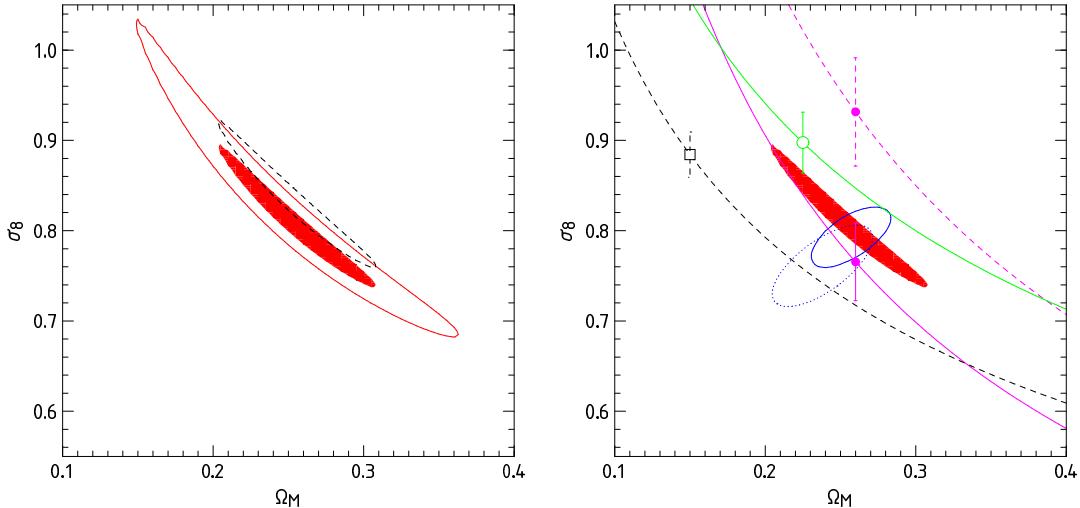


Рис. 7.11: Область разрешённых значений в пространстве параметров (σ_8, Ω_M) в модели Λ CDM по данным анализа [17] наблюдений скоплений галактик рентгеновским телескопом CHANDRA (слева) и сравнение с результатами анализа других данных (справа). Закрашенная область отвечает 68% доверительному интервалу из данных анализа CHANDRA (сплошная линия на левом рисунке ограничивает область, соответствующую 95%, пунктирная линия иллюстрирует величину систематической ошибки из-за неопределённости в оценке абсолютной шкалы масс скоплений). Линии на рисунке справа соответствуют 68% доверительным интервалам, следующим из результатов обработки 3-х и 5-летних данных эксперимента WMAP (эллиптические кривые: короткий пунктир и сплошная линия, соответственно). Остальные линии соответствуют более ранним данным по исследованию скоплений. Они показывают общее направление вырождения — области сильно вытянуты вдоль этих линий — и характерную ширину (точки на линиях с “усами” ошибок).

информацию о балансе энергии во Вселенной и о спектре скалярных возмущений. Данные наблюдений структур используют в комбинированном анализе для определения значений космологических параметров.

В заключение Главы приведём несколько формул, позволяющих с хорошей точностью проводить расчёты образования структур без полного численного моделирования этого процесса. Аналитическая формула для $P(k, z)$, хорошо приближающая реальный спектр и содержащая явную зависимость от космологических параметров, имеет вид [13]

$$\begin{aligned} P(k, z) &= \frac{9\mathcal{P}_\Phi k^{n_s}}{25} \frac{g^2(z)}{a(z) H^4(z) \Omega_M^2} T^2(K), \\ T(K) &\equiv \frac{\ln(1 + 2.34K)}{2.34K} (1 + 3.89K + (16.1K)^2 + (5.46K)^3 + (6.71K)^4)^{-1/4}, \\ K &\equiv \frac{k \exp(2\Omega_B)}{\Omega_M h^2} \text{ Мпк}. \end{aligned}$$

Далее, более аккуратное по сравнению с приведённым выше приближение, с учётом отклонений от сферической симметрии, даёт в качестве условия наступления коллапса требование [15]

$$\delta_R > \delta_c \cdot \sqrt{A} \cdot \left(1 + \frac{\beta}{(A\nu)^\gamma}\right),$$

где $\nu \equiv \delta_c^2/\sigma_R^2$, а значения параметров определяются из сравнения с результатами численного анализа и равны [16] $(A, \beta, \gamma) = (0.707, 0.47, 0.615)$. Обобщение выражения (7.60) для дифференциального спектра структур выглядит следующим образом [15, 16]

$$\frac{dN}{dM} = -B\sqrt{A} \cdot \left(1 + \frac{\beta}{(A\nu)^\gamma}\right) \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\rho_M}{M} e^{-A\nu^2/2} \frac{d\sigma_R}{dM} \frac{\delta_c}{\sigma_R^2},$$

где $B = 0.322$. Это значение параметра B можно воспринимать как результат фитирования данных полного численного моделирования образования структур во Вселенной.

Глава 8

*За рамками приближения идеальной жидкости

В проведённом нами в предыдущих главах рассмотрении мы использовали предположение, что для описания линейной стадии эволюции возмущений в ранней Вселенной достаточно приближения идеальной жидкости. Для большинства этапов эволюции и для многих компонент первичной плазмы это оправдано, однако существуют компоненты, для описания которых приближение идеальной жидкости неприменимо. Важными примерами служат нейтрино, которые при температурах ниже 1 МэВ не взаимодействуют ни между собой, ни с космической плазмой, а также фотоны после рекомбинации и в течение последних этапов этой эпохи, когда длина их свободного пробега может превышать длины волн космологически интересных возмущений. Как правило, неприменимость приближения идеальной жидкости (“неидеальность”) сопровождается подавлением возмущений соответствующими компонентами плазмы, и как следствие — гравитационных потенциалов. В ряде случаев это приводит к важным следствиям, в том числе доступным экспериментальной проверке. В этой Главе мы рассмотрим несколько таких случаев.

8.1 Функции распределения и уравнение Больцмана в искривлённом пространстве-времени

В дальнейшем мы будем интересоваться случаями, когда газ частиц можно считать разреженным: в любой данный момент времени частицы являются “мгновенно” свободными, а взаимодействие между ними сводится к локальным актам рассеяния частиц друг на друге, а также к взаимодействию с гравитационными полями, характерный пространственный размер которых заметно превышает расстояние между частицами. Такая картина применима для описания всех интересующих нас в этой книге процессов в ранней Вселенной (исключение, вообще говоря, составляют процессы фазовых переходов). В случае разреженной среды эволюция функций распределения описывается уравнением Больцмана в самосогласованном гравитационном поле.

Начнём с того, что найдём выражение для тензора энергии-импульса среды, состоящей из свободных частиц одного сорта. Ограничивааясь для определённости случаем массивных частиц, рассмотрим действие для системы N свободных частиц мас-

сы m в пространстве-времени с метрикой $g_{\mu\nu}(x)$,

$$S = -m \sum_{i=1}^N \int ds_{(i)} \equiv -m \sum_i \int ds_{(i)} \sqrt{g_{\mu\nu}(x_{(i)}) \frac{dx_{(i)}^\mu}{ds_{(i)}} \frac{dx_{(i)}^\nu}{ds_{(i)}}}, \quad (8.1)$$

где $s_{(i)}$ — интервалы вдоль траекторий каждой из N частиц, $x_{(i)} = x_{(i)}(s_{(i)})$ — координаты вдоль мировых линий. Для каждой частицы i можно определить её контравариантный 4-импульс $P_{(i)}^\mu$ как производную по собственному интервалу

$$P_{(i)}^\mu \equiv m \frac{dx_{(i)}^\mu}{ds_{(i)}}. \quad (8.2)$$

В дальнейшем нам также будет удобно использовать ковариантный импульс $P_{(i)\mu} = g_{\mu\nu} P_{(i)}^\nu$. Эволюция контравариантного импульса определяется уравнением геодезической (см. раздел I.A.7),

$$\frac{d^2 x_{(i)}^\mu}{ds_{(i)}^2} + \Gamma_{\rho\lambda}^\mu \frac{dx_{(i)}^\rho}{ds_{(i)}} \frac{dx_{(i)}^\lambda}{ds_{(i)}} = 0, \quad (8.3)$$

являющимся условием экстремума действия (8.1). Для производной ковариантного импульса по собственному интервалу будем иметь

$$\frac{dP_{(i)\mu}}{ds_{(i)}} = \frac{d(g_{\mu\nu} P_{(i)}^\nu)}{ds_{(i)}} = P_{(i)}^\nu \frac{dg_{\mu\nu}(x_{(i)})}{ds_{(i)}} + g_{\mu\nu} \frac{d^2 x_{(i)}^\nu}{ds_{(i)}^2}.$$

Выражая второе слагаемое из (8.3) и учитывая, что

$$\frac{dg_{\mu\nu}(x_{(i)})}{ds_{(i)}} = \frac{dx_{(i)}^\lambda}{ds_{(i)}} \partial_\lambda g_{\mu\nu} = \frac{P_{(i)}^\lambda}{m} \partial_\lambda g_{\mu\nu},$$

найдём

$$m \frac{dP_{(i)\mu}}{ds_{(i)}} = P_{(i)}^\nu P_{(i)}^\lambda \partial_\lambda g_{\mu\nu} - g_{\mu\nu} \Gamma_{\lambda\rho}^\nu P_{(i)}^\lambda P_{(i)}^\rho.$$

Наконец, используя ковариантное сохранение метрического тензора, получим уравнение для ковариантного импульса i -й частицы,

$$m \frac{dP_{(i)\mu}}{ds_{(i)}} = \Gamma_{\mu\lambda}^\rho P_{(i)}^\lambda P_{(i)\rho}. \quad (8.4)$$

Действие (8.1) можно переписать, введя формально интегрирование по 8-мерному фазовому объёму (x^μ, P_ν) :

$$S = -m \int d^4x d^4P \sum_i \int ds_{(i)} \delta[x - x_{(i)}(s_{(i)})] \delta[P - P_{(i)}(s_{(i)})], \quad (8.5)$$

где под P подразумевается ковариантный импульс P_μ . Несложно убедиться, что величина под знаком суммирования в (8.5) является скаляром относительно общекоординатных преобразований $x^\mu \rightarrow \tilde{x}^\mu(x)$. При этом существенно, что в ней фигурируют именно ковариантные импульсы $P_{(i)\mu}$. По определению, функцией распределения частиц в 8-мерном фазовом объёме назовём величину

$$F(x^\mu, P_\nu) = \langle \sum_i \int ds_{(i)} \delta[x - x_{(i)}(s_{(i)})] \delta[P - P_{(i)}(s_{(i)})] \rangle, \quad (8.6)$$

где угловые скобки обозначают усреднение по ансамблю. Выражение (8.6) является скаляром, и оно служит универсальным определением функции распределения как в случае массивных, так и в случае безмассовых частиц.

Тензор энергии-импульса системы получим, как обычно, варьируя действие системы (8.1) по метрике:

$$\begin{aligned} T^{\mu\nu} = -\frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S}{\delta g_{\mu\nu}} &= \sum_i \int \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{ds_{(i)} \cdot m \frac{dx_{(i)}^\mu}{ds_{(i)}} \frac{dx_{(i)}^\nu}{ds_{(i)}}}{\sqrt{g_{\lambda\rho}(x_{(i)}) \frac{dx_{(i)}^\lambda}{ds_{(i)}} \frac{dx_{(i)}^\rho}{ds_{(i)}}}} \delta(x - x_{(i)}(s)) \\ &= \sum_i \int \frac{ds_{(i)}}{\sqrt{-g}} \frac{P_{(i)}^\mu P_{(i)}^\nu}{m} \delta(x - x_{(i)}(s)). \end{aligned}$$

Наконец, вводя формально интегрирование по импульсу P_ν аналогично тому, как мы это делали для получения соотношения (8.5), усредняя по ансамблю и используя определение функции распределения (8.6), найдём

$$T^{\mu\nu} = \int \frac{d^4 P}{\sqrt{-g}} \frac{P^\mu P^\nu}{m} F(x^\lambda, P_\rho), \quad (8.7)$$

где, так же как и в (8.5), в мере интегрирования фигурирует ковариантный импульс. Поскольку функция распределения F — скаляр, а элемент объёма импульсного пространства $d^4 P / \sqrt{-g}$ также инвариантен относительно общекоординатных преобразований, то мы можем заключить, что интеграл в правой части (8.7) действительно является тензором.

Выражение для тензора энергии-импульса системы в виде интеграла (8.7) от функции распределения в 8-мерном фазовом пространстве не совсем удобно для дальнейшего. В частности, мы будем рассматривать системы *реальных* свободных частиц, для каждой из которых справедлив закон дисперсии

$$g^{\mu\nu} P_\mu P_\nu = m^2, \quad (8.8)$$

так что энергия частицы и её 3-мерный импульс не являются независимыми величинами. В этой связи удобно ввести зависящую от времени функцию распределения в 6-мерном фазовом объёме $f(x^0, x^i, P_j) \equiv f(x^\lambda, P_j)$ с помощью соотношения

$$F(x^\lambda, P_\rho) = f(x^\lambda, P_j) \theta(P_0) \delta(\sqrt{g^{\mu\nu} P_\mu P_\nu} - m), \quad (8.9)$$

где $\theta(P_0)$ — функция ступеньки. Отметим, что введённая таким образом функция f также является скаляром, поскольку скалярами являются F и δ -функция, а функция ступеньки — скаляр относительно физически интересных координатных преобразований, оставляющих энергии частиц положительными. Подставляя выражение (8.9) в (8.7) и произведя интегрирование по P_0 , получим окончательно

$$T^{\mu\nu}(x) = \int \frac{d^3 P_j}{\sqrt{-g}} \frac{P^\mu P^\nu}{P^0} f(x, \mathbf{P}). \quad (8.10)$$

Здесь и далее мы обозначаем элемент объёма как $d^3 P_j$, стремясь подчеркнуть, что в мере интегрирования по трёхмерному импульсному пространству фигурируют трёхмерные компоненты ковариантных импульсов. Во избежание недоразумений подчеркнём, что элемент объёма мы всегда считаем положительной величиной. Безразмерную функцию $f(x, \mathbf{P})$, входящую под знак интеграла (8.10) и определённую

согласно (8.9), мы будем в дальнейшем называть функцией распределения частиц. Ясно, что хотя в качестве примера мы рассматривали случай массивных частиц, выражение (8.10) не содержит массы, и оно применимо и в безмассовом случае.

- ▷ **Задача 1.** Убедиться явно, что величина (8.10) является тензором относительно подкласса общекоординатных преобразований, оставляющих знак энергии неизменным. Таким образом, величина $d^3 P_j / (P^0 \sqrt{-g})$ является инвариантным объёмом в импульсном пространстве.
- ▷ **Задача 2.** Получить формулу (8.10), для системы невзаимодействующих безмассовых частиц.

Физический смысл функции $f(x^\mu, P_j)$ можно пояснить следующим образом. Рассмотрим локально-лоренцеву систему координат в окрестности точки x^μ и гиперповерхность $x^0 = \text{const}$ в этой окрестности. Согласно определению (8.6) запишем

$$F(x^0; x^i, P_\nu) = \left\langle \sum_i \int ds_{(i)} \delta(x^0 - x_{(i)}^0(s_{(i)})) \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_{(i)}(s_{(i)})) \delta(P - P_{(i)}(s_{(i)})) \right\rangle.$$

Проинтегрируем по $ds_{(i)}$ с учётом определения (8.2) и получим

$$F(x^0; x^i, P_\nu) = \left\langle \sum_i \frac{m}{P_{(i)}^0} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_{(i)}) \delta(\mathbf{P} - \mathbf{P}_{(i)}) \delta(P^0 - P_{(i)}^0) \right\rangle,$$

где $\mathbf{x}_{(i)}$ и $P_{(i)\nu}$ — пространственная координата и ковариантный импульс i -й частицы в данный момент времени x^0 . С учётом равенства (8.8) и положительности $P_{(i)}^0$ последнее выражение приводится к виду

$$F(x^0; x^i, P_\nu) = \left\langle \sum_i \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_{(i)}) \delta(\mathbf{P} - \mathbf{P}_{(i)}) \theta(P_0) \delta(\sqrt{g^{\mu\nu} P_\mu P_\nu} - m) \right\rangle.$$

Сравнивая его с (8.9) мы видим, что в локально-лоренцевой системе в момент времени x^0 функция $f(x^0; \mathbf{x}, \mathbf{P})$ даётся выражением

$$f(x^0; \mathbf{x}, \mathbf{P}) = \left\langle \sum_i \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_{(i)}) \delta(\mathbf{P} - \mathbf{P}_{(i)}) \right\rangle,$$

то есть она представляет собой плотность числа частиц в шестимерном фазовом объёме (\mathbf{x}, \mathbf{P}) . Таким образом, функцию $f(x^\mu, P_j)$ можно с полным основанием считать функцией распределения.

Теперь выведем уравнение Больцмана, которое описывает эволюцию функции распределения. Начнём со случая, когда взаимодействие частиц полностью отсутствует, так что описываемая система — это газ бесстолкновительных частиц. Воспользуемся очевидным равенством

$$0 = \sum_i \int ds_{(i)} \cdot \frac{d}{ds_{(i)}} [m \delta(x - x_{(i)}(s_{(i)})) \cdot \delta(P - P_{(i)}(s_{(i)}))] .$$

Учтём, что

$$\frac{\partial}{\partial x_{(i)}^\mu} \delta(x - x_{(i)}) = -\frac{\partial}{\partial x^\mu} \delta(x - x_{(i)}) , \quad \frac{\partial}{\partial P_{(i)\mu}} \delta(P - P_{(i)}) = -\frac{\partial}{\partial P_\mu} \delta(P - P_{(i)})$$

и получим

$$0 = \sum_i \int ds_{(i)} \left[m \frac{dx_{(i)}^\mu}{ds_{(i)}} \cdot \delta(P - P_{(i)}(s_{(i)})) \cdot \frac{\partial}{\partial x^\mu} \delta(x - x_{(i)}(s_{(i)})) + m \frac{dP_{(i)\mu}}{ds_{(i)}} \cdot \delta(x - x_{(i)}(s_{(i)})) \frac{\partial}{\partial P_\mu} \delta(P - P_{(i)}(s_{(i)})) \right]. \quad (8.11)$$

Воспользовавшись определением (8.2) и уравнением геодезической (8.4), перепишем равенство (8.11) в следующем виде:

$$0 = \int \sum_i ds_{(i)} \left[\frac{\partial}{\partial x^\mu} \left(P_{(i)}^\mu \cdot \delta(x - x_{(i)}(s_{(i)})) \delta(P - P_{(i)}(s_{(i)})) \right) + \frac{\partial}{\partial P_\mu} \left(\Gamma_{\mu\rho}^\nu(x_{(i)}) P_{(i)\nu} P_{(i)}^\rho \cdot \delta(x - x_{(i)}(s_{(i)})) \delta(P - P_{(i)}(s_{(i)})) \right) \right]. \quad (8.12)$$

Поскольку в скобках стоят δ -функции по импульсам и координатам, импульсы и координаты частиц перед δ -функциями можно положить равными P_μ и x^μ , соответственно. После этого усредним получившееся выражение по ансамблю частиц, и в результате из (8.12) получим уравнение Больцмана для функции $F(x^\mu, P_\nu)$:

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu} (FP^\mu) + \frac{\partial}{\partial P_\mu} (F\Gamma_{\mu\rho}^\nu P^\rho P_\nu) = 0. \quad (8.13)$$

Это уравнение можно несколько упростить, произведя явно дифференцирование сомножителей, стоящих в скобках. Это даёт

$$P^\mu \frac{\partial F}{\partial x^\mu} + \Gamma_{\mu\rho}^\nu P^\rho P_\nu \frac{\partial F}{\partial P_\mu} + \left(\Gamma_{\nu\mu}^\rho g^{\mu\rho} P_\rho + \Gamma_{\rho\mu}^\nu g^{\mu\rho} P_\nu + \frac{\partial g^{\nu\mu}}{\partial x^\mu} P_\nu \right) F = 0. \quad (8.14)$$

Выражение в скобках, стоящее в левой части уравнения (8.14), тождественно обращается в нуль из-за равенства нулю ковариантной производной от метрического тензора, так что уравнение (8.13) приводится к виду

$$P^\mu \frac{\partial F}{\partial x^\mu} + \Gamma_{\mu\rho}^\nu P^\rho P_\nu \frac{\partial F}{\partial P_\mu} = 0. \quad (8.15)$$

Далее, используя определение (8.9), и интегрируя уравнение (8.15) по переменной P_0 , получим

$$\begin{aligned} & \int dP_0 \theta(P_0) \delta(\sqrt{g^{\mu\nu} P_\mu P_\nu} - m) \left(P^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} + \Gamma_{j\rho}^\nu P^\rho P_\nu \frac{\partial}{\partial P_j} \right) f(x^\lambda, P_i) \\ & + \int dP_0 \frac{\partial \theta(P_0)}{\partial P_0} f \Gamma_{0\rho}^\nu P_\nu P^\rho \delta(\sqrt{g^{\mu\nu} P_\mu P_\nu} - m) \\ & + \int dP_0 \theta(P_0) f \left(P^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} + \Gamma_{\mu\rho}^\nu P^\rho P_\nu \frac{\partial}{\partial P_\mu} \right) \delta(\sqrt{g^{\mu\nu} P_\mu P_\nu} - m) = 0. \end{aligned} \quad (8.16)$$

Поскольку производная от функции ступеньки пропорциональна δ -функции в нуле, для частиц, обладающих ненулевой энергией, второе слагаемое в (8.16) зануляется.

Для третьего слагаемого в (8.16), обозначая производную δ -функции по аргументу как δ' , получим

$$\int dP_0 \theta(P_0) \frac{f}{\sqrt{g^{\mu\nu} P_\mu P_\nu}} \cdot \left(\frac{1}{2} P^\mu P_\lambda P_\rho \partial_\mu g^{\lambda\rho} + \Gamma_{\mu\rho}^\nu P^\rho P_\nu P^\mu \right) \delta' \left(\sqrt{g^{\mu\nu} P_\mu P_\nu} - m \right).$$

Здесь выражение в скобках перед δ' тождественно равно нулю в силу ковариантного сохранения метрического тензора. Таким образом, только первое слагаемое в (8.16) даёт вклад, и после интегрирования по энергии мы приходим к уравнению Больцмана для функции распределения $f(x^\lambda, P_i)$:

$$P^\mu \frac{\partial f}{\partial x^\mu} + \Gamma_{j\rho}^\nu P^\rho P_\nu \frac{\partial f}{\partial P_j} = 0, \quad (8.17)$$

где P_0 выражается через вектор P_i с использованием уравнения (8.8).

В рассмотренном нами случае бесстолкновительной среды в правой части уравнения Больцмана (8.17) стоит нуль. Этот частный случай носит название уравнения Лиувилля: в локально-лоренцевой системе координат уравнение (8.17) принимает стандартный для уравнения Лиувилля вид,

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{u} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} = 0, \quad (8.18)$$

где $u^i = P^i/P^0$ имеет смысл скорости. В общем случае искривлённого пространства-времени левую часть уравнения (8.17) можно записать в виде

$$P^\mu \left[\frac{\partial f}{\partial x^\mu} + \Gamma_{j\mu}^\nu P_\nu \frac{\partial f}{\partial P_j} \right]. \quad (8.19)$$

Величина, стоящая в квадратных скобках, является ковариантным вектором относительно общекоординатных преобразований (см. ниже), так что полученное уравнение Лиувилля общековариантно.

В выражении (8.19) фигурирует суммирование по пространственному индексу j , поэтому его ковариантность не вполне очевидна. Чтобы убедиться в ковариантности, напомним, что при переходе в новую систему координат $x^\mu \rightarrow \tilde{x}^\mu(x^\lambda)$ ковариантные импульсы преобразуются по тензорному закону

$$P_\nu \rightarrow \tilde{P}_\nu = P_\lambda \frac{\partial x^\lambda}{\partial \tilde{x}^\nu}, \quad (8.20)$$

а функция f является скаляром, то есть

$$f(x, P) = f(\tilde{x}, \tilde{P}).$$

Тогда

$$\left(\frac{\partial}{\partial x^\mu} + \Gamma_{j\mu}^\nu P_\nu \frac{\partial}{\partial P_j} \right) f(x, P) = \left(\frac{\partial}{\partial x^\mu} + \Gamma_{j\mu}^\nu P_\nu \frac{\partial}{\partial \tilde{P}_j} \right) f(\tilde{x}, \tilde{P}) = \frac{\partial f}{\partial \tilde{x}^\lambda} \frac{\partial \tilde{x}^\lambda}{\partial x^\mu} + \frac{\partial f}{\partial \tilde{P}_j} \frac{\partial \tilde{P}_j}{\partial x^\mu} + \Gamma_{j\mu}^\nu P_\nu \frac{\partial f}{\partial \tilde{P}_k} \frac{\partial \tilde{P}_k}{\partial P_j}. \quad (8.21)$$

Из (8.20) следует, что

$$\frac{\partial \tilde{P}_k}{\partial P_j} = \frac{\partial x^j}{\partial \tilde{x}^k} + \frac{\partial P_0}{\partial P_j} \frac{\partial x^0}{\partial \tilde{x}^k}, \quad P_\lambda = \tilde{P}_\nu \frac{\partial \tilde{x}^\nu}{\partial x^\lambda}, \quad \frac{\partial \tilde{P}_k}{\partial x^\mu} = \frac{\partial}{\partial x^\mu} \left(P_\lambda \frac{\partial x^\lambda}{\partial \tilde{x}^k} \right) = P_\lambda \frac{\partial^2 x^\lambda}{\partial \tilde{x}^\nu \partial \tilde{x}^k} \frac{\partial \tilde{x}^\nu}{\partial x^\mu} + \frac{\partial P_0}{\partial x^\mu} \frac{\partial x^0}{\partial \tilde{x}^k},$$

причём из уравнения движения (8.8) имеем

$$\frac{\partial P_0}{\partial P_i} = -\frac{P^i}{P^0}, \quad P^\lambda \nabla_\mu P_\lambda = 0.$$

Поэтому

$$\frac{\partial P_0}{\partial x^\mu} = \Gamma_{\mu 0}^\nu P_\nu - \frac{P^i \nabla_\mu P_i}{P^0}.$$

Следовательно, правая часть (8.21) принимает вид

$$\frac{\partial f}{\partial \tilde{x}^\lambda} \frac{\partial \tilde{x}^\lambda}{\partial x^\mu} + \left[P_\lambda \frac{\partial^2 x^\lambda}{\partial \tilde{x}^\nu \partial \tilde{x}^\kappa} \frac{\partial \tilde{x}^\nu}{\partial x^\mu} + \left(\Gamma_{\mu 0}^\nu P_\nu - \frac{P^i \nabla_\mu P_i}{P^0} \right) \frac{\partial x^0}{\partial \tilde{x}^\kappa} + \Gamma_{j\mu}^\nu P_\nu \left(\frac{\partial x^j}{\partial \tilde{x}^\kappa} - \frac{P^j}{P^0} \frac{\partial x^0}{\partial \tilde{x}^\kappa} \right) \right] \frac{\partial f}{\partial \tilde{P}_k}. \quad (8.22)$$

В этом выражении слагаемые, содержащие P^0 в знаменателе, сокращаются, так что остаётся

$$\frac{\partial f}{\partial \tilde{x}^\lambda} \frac{\partial \tilde{x}^\lambda}{\partial x^\mu} + \left[\left(\frac{\partial^2 x^\nu}{\partial \tilde{x}^\kappa \partial \tilde{x}^\lambda} \frac{\partial \tilde{x}^\lambda}{\partial x^\mu} + \Gamma_{\lambda\mu}^\nu \frac{\partial x^\lambda}{\partial \tilde{x}^\kappa} \right) \frac{\partial \tilde{x}^\tau}{\partial x^\nu} \right] \tilde{P}_\tau \frac{\partial f}{\partial \tilde{P}_k}. \quad (8.23)$$

Наконец, из закона преобразования символов Кристоффеля при замене координат (I.A.16) следует, что величина в квадратных скобках в выражении (8.23) равна

$$\tilde{\Gamma}_{k\lambda}^\tau \frac{\partial \tilde{x}^\lambda}{\partial x^\mu},$$

где $\tilde{\Gamma}_{k\lambda}^\tau$ — символ Кристоффеля в новой системе координат. Поэтому для общей замены координат справедливо равенство

$$\left(\frac{\partial}{\partial x^\mu} + \Gamma_{j\mu}^\nu P_\nu \frac{\partial}{\partial \tilde{P}_j} \right) f(x, P) = \frac{\partial \tilde{x}^\lambda}{\partial x^\mu} \left(\frac{\partial}{\partial \tilde{x}^\lambda} + \tilde{\Gamma}_{j\lambda}^\nu P_\nu \frac{\partial}{\partial \tilde{P}_j} \right) f(\tilde{x}, \tilde{P}),$$

так что величина, заключённая в квадратные скобки в (8.19), при замене координат действительно преобразуется как ковариантный вектор, а потому уравнение Лиувилля (8.19) действительно общековариантно. Весь этот вывод приведён для того, чтобы продемонстрировать, что факт независимости функции f от P_0 , учтённый нами явно при записи уравнения Лиувилля (8.19) (частная производная по P_0 отсутствует), никак не ограничивает заключения об общековариантности этого уравнения.

▷ Задача 3. Убедиться, что любая функция от $P^2 \equiv P_\mu P^\mu$ служит формальным решением уравнения (8.15).

Уравнение (8.17) заведомо справедливо для бесстолкновительной среды тогда, когда метрика пространства-времени считается внешней. Оно остаётся справедливым и во многих интересных случаях, когда гравитационное поле создаётся самой средой. В этих случаях уравнение (8.17), дополненное уравнениями Эйнштейна для метрики, образует систему уравнений Власова. Помимо отсутствия столкновений частиц, для применимости данного приближения требуется, чтобы усреднённая сила, действующая на частицу, была много больше силы со стороны ближайших соседних частиц. Именно такая ситуация имеется в космологии по крайней мере на этапе линейного развития возмущений.

Как видно из (8.18), в бесстолкновительном случае уравнение (8.17) имеет смысл уравнения сохранения числа частиц в сопутствующем фазовом объёме. Эта интерпретация позволяет обобщить уравнение (8.17) на случай среды со столкновениями частиц. К выводу соответствующего уравнения — уравнения Больцмана — мы и переходим.

В нашем рассмотрении мы ограничимся случаем парных столкновений как наиболее интересных с точки зрения последующих приложений к процессам, происходившим в первичной плазме. Столкновения приводят к несохранению числа частиц в сопутствующем фазовом объёме. Этот процесс удобно рассматривать в локально-лоренцевой системе отсчёта. В качестве примера рассмотрим процессы рассеяния с двумя частицами в начальном и конечном состояниях,

$$1 + 2 \rightarrow 1' + 2' \quad (8.24)$$

причём частицы 1, 2, 1', 2', вообще говоря, различного сорта; обобщение на процессы с большим числом частиц в конечном состоянии не представляет труда. Среднее число столкновений dN в пространственной области $\mathbf{x} \pm d\mathbf{x}/2$ в течение времени $x^0 \pm dx^0/2$, таких что в столкновении участвуют частицы сортов 1 и 2 с импульсами $\mathbf{P}_1 \pm d\mathbf{P}_1/2$ и $\mathbf{P}_2 \pm d\mathbf{P}_2/2$, линейно по числу частиц каждого типа, а потому должно быть пропорционально соответствующим объёмам,

$$dN \propto d^4x d^3P_1 d^3P_2 f_1(x, \mathbf{P}_1) f_2(x, \mathbf{P}_2) .$$

Если интересоваться числом таких столкновений, в которых образующиеся частицы 1' и 2' имеют импульсы в заданных интервалах $\mathbf{P}_{1'} \pm d\mathbf{P}_{1'}/2$ и $\mathbf{P}_{2'} \pm d\mathbf{P}_{2'}/2$, то

$$dN \propto d^3P_{1'} d^3P_{2'} .$$

Окончательно,

$$dN = \left(\frac{|\mathcal{M}(\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2; \mathbf{P}_{1'}, \mathbf{P}_{2'})|^2}{P_1^0 P_2^0 P_{1'}^0 P_{2'}^0} d^3P_{1'} d^3P_{2'} \right) \cdot d^4x d^3P_1 d^3P_2 f_1(x, \mathbf{P}_1) f_2(x, \mathbf{P}_2) . \quad (8.25)$$

Введённая таким образом величина $|\mathcal{M}|^2$ определяется деталями взаимодействия. Видно, что она является лоренцевым скаляром. Кроме того, величина, стоящая в скобках в правой части формулы (8.25) имеет смысл вероятности перехода (8.24) в единицу времени в единичном объёме в состояние с импульсами $\mathbf{P}_{1'} \pm d\mathbf{P}_{1'}/2$ и $\mathbf{P}_{2'} \pm d\mathbf{P}_{2'}/2$, поэтому величина $|\mathcal{M}|^2$ пропорциональна квадрату амплитуды соответствующего перехода. В общем случае величина $|\mathcal{M}|^2$ может быть вычислена с использованием аппарата квантовой теории поля (см. подробнее [18, 19, 20, 21]). Между этой величиной и дифференциальным сечением рассеяния $d\sigma$ в телесный угол $d\Omega$ имеется следующая связь:

$$|\mathcal{M}|^2 = (P_1 + P_2)^2 \delta(P_1 + P_2 - P_{1'} - P_{2'}) \frac{d\sigma}{d\Omega} , \quad (8.26)$$

где $d\sigma/d\Omega$ — дифференциальное сечение в системе центра масс сталкивающихся частиц (впрочем, формула типа (8.26) справедлива в любой системе отсчета, см. ниже). Действительно, по определению дифференциального сечения рассеяния $d\sigma$ его произведение на поток налетающих частиц есть вероятность перехода в единицу времени в расчёте на одну частицу, с которой происходит столкновение. В локально-лоренцевой системе поток частиц равен произведению числа налетающих частиц на относительную скорость частиц $|\mathbf{u}| = |\mathbf{P}_1/P_1^0 - \mathbf{P}_2/P_2^0|$. Из (8.25) видно, что связь величины $|\mathcal{M}|^2$ с сечением даётся соотношением

$$d\sigma = \frac{|\mathcal{M}|^2}{|\mathbf{u}| P_1^0 P_2^0} \frac{d^3P_{1'} d^3P_{2'}}{P_{1'}^0 P_{2'}^0} . \quad (8.27)$$

Отсюда и следует соотношение (8.26) в системе центра масс: подставляя (8.26) в формулу (8.27) и производя интегрирование по импульсам, можно убедиться в том, что в результате получится тождество.

▷ Задача 4. Проверить последнее утверждение.

Кинематика процесса $2 \rightarrow 2$ полностью определяется лишь одной безразмерной переменной¹ θ — углом рассеяния частиц в плоскости реакции. Так, в системе центра масс сталкивающихся частиц имеем

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{2\pi} \frac{d\sigma}{d\cos\theta}, \quad (8.28)$$

причём

$$\cos\theta = \frac{\mathbf{P}_1 \cdot \mathbf{P}_{1'}}{|\mathbf{P}_1| |\mathbf{P}_{1'}|}. \quad (8.29)$$

В этой системе отсчёта $d\sigma/d\Omega$ есть функция переменных $s = (P_1 + P_2)^2 = (P_1^0 + P_2^0)^2$ и $\cos\theta$,

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{d\sigma}{d\Omega}(s, \cos\theta). \quad (8.30)$$

Для использования формулы (8.26) в произвольной системе отсчёта необходимо воспользоваться результатом для дифференциального сечения, полученным в системе центра масс, но в окончательный ответ подставить s и $\cos\theta$, выраженные через явно ковариантные величины. Так для случая, когда все четыре частицы имеют одинаковую массу (например, для рассеяния $e^+e^- \rightarrow e^+e^-$), в произвольной системе отсчёта будем иметь

$$s = (P_1 + P_2)_\mu (P_1 + P_2)_\nu g^{\mu\nu} \equiv (P_1 + P_2)^2, \quad (8.31)$$

$$\cos\theta = \frac{(P_1 - P_2)_\mu (P_{1'} - P_{2'})_\nu g^{\mu\nu}}{(P_1 - P_2)^2}. \quad (8.32)$$

Выражение (8.31) для скаляра s , называемого переменной Мандельстама, справедливо и для общего случая, когда все частицы имеют разные массы. Для обобщения на этот случай угла рассеяния (8.32), можно переписать его через скаляры — полный набор переменных Мандельстама s, t, u ,

$$t = (P_1 - P_{1'})^2, \quad u = (P_1 - P_{2'})^2.$$

Между этими переменными имеется линейная связь

$$s + t + u = m_1^2 + m_2^2 + m_{1'}^2 + m_{2'}^2.$$

Выражение для угла рассеяния, обобщающее (8.32), имеет вид

$$\cos\theta = \frac{u - t}{u + t}.$$

Таким образом, выражение $d\sigma/d\Omega$, стоящее в правой части (8.26), описано явно.

Интересуясь судьбой частиц сорта 1, проинтегрируем величину (8.25) по импульсам остальных частиц и получим для числа частиц сорта 1, выбывших за единицу времени из 6-мерного фазового объёма $d^3x d^3P$,

$$\Delta N_1^- = d^4x \frac{d^3P_1}{P_1^0} \int \frac{d^3P_2}{P_2^0} \frac{d^3P_{1'}}{P_{1'}^0} \frac{d^3P_{2'}}{P_{2'}^0} f_1(x, \mathbf{P}_1) f_2(x, \mathbf{P}_2) \cdot |\mathcal{M}(\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2; \mathbf{P}_{1'}, \mathbf{P}_{2'})|^2.$$

¹Здесь мы опускаем тонкости, возникающие, например, при рассеянии поляризованных частиц. Они будут для нас несущественны.

Аналогично для числа прибывающих частиц сорта 1 из-за процесса $1' + 2' \rightarrow 1 + 2$, обратного (8.24), получим

$$\Delta N_1^+ = d^4x \frac{d^3P_1}{P_1^0} \int \frac{d^3P_2}{P_2^0} \frac{d^3P_{1'}}{P_{1'}^0} \frac{d^3P_{2'}}{P_{2'}^0} f_{1'}(x, \mathbf{P}_{1'}) f_{2'}(x, \mathbf{P}_{2'}) |\mathcal{M}(\mathbf{P}_{1'}, \mathbf{P}_{2'}; \mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2)|^2.$$

Таким образом, в локально-лоренцевой системе отсчёта число частиц в единичном 6-мерном фазовом объёме изменяется за единицу времени на величину

$$\begin{aligned} \frac{(\Delta N_1^+ - \Delta N_1^-)}{d^4x d^3P_1} = & \\ \frac{1}{P_1^0} \int \frac{d^3P_2}{P_2^0} \frac{d^3P_{1'}}{P_{1'}^0} \frac{d^3P_{2'}}{P_{2'}^0} & [f_{1'}(x, \mathbf{P}_{1'}) f_{2'}(x, \mathbf{P}_{2'}) |\mathcal{M}(\mathbf{P}_{1'}, \mathbf{P}_{2'}; \mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2)|^2 \\ & - f_1(x, \mathbf{P}_1) f_2(x, \mathbf{P}_2) |\mathcal{M}(\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2; \mathbf{P}_{1'}, \mathbf{P}_{2'})|^2]. \end{aligned} \quad (8.33)$$

Величина (8.33) и появляется в правой части уравнения (8.18) с учётом столкновений частиц. Ковариантное обобщение формулы (8.33) состоит в очевидной замене лоренц-инвариантных величин, таких, как дифференциальные объёмы в пространстве импульсов, на величины, инвариантные относительно общекоординатных преобразований, сохраняющих знак энергии:

$$\frac{d^3P_i}{P^0} \rightarrow \frac{d^3P_i}{\sqrt{-g}P^0}, \dots,$$

и в обобщении связи (8.26), требующей дополнительного множителя, чтобы сделать δ -функцию инвариантной в искривлённом пространстве-времени,

$$|\mathcal{M}|^2 = (P_1 + P_2)^2 \sqrt{-g} \delta(P_1 + P_2 - P_{1'} - P_{2'}) \frac{d\sigma}{d\Omega}, \quad (8.34)$$

при этом $d\sigma/d\Omega$ по-прежнему вычисляется в локально-лоренцевой системе отсчёта. Окончательно, инвариантным обобщением правой части уравнения Больцмана в случае сталкивающихся частиц является величина (отсутствие множителя $1/P_1^0$ в выражении (8.35) по сравнению с (8.33) связано с тем, что в левой части уравнения (8.17) фигурирует не $\partial f/\partial x^0$, а $P^0(\partial f/\partial x^0)$, см. также (8.37))

$$\begin{aligned} \mathcal{C}(x, \mathbf{P}_1) = & \int \frac{d^3P_2}{\sqrt{-g}P_2^0} \frac{d^3P_{1'}}{\sqrt{-g}P_{1'}^0} \frac{d^3P_{2'}}{\sqrt{-g}P_{2'}^0} [f_{1'}(x, \mathbf{P}_{1'}) f_{2'}(x, \mathbf{P}_{2'}) |\mathcal{M}(\mathbf{P}_{1'}, \mathbf{P}_{2'}; \mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2)|^2 \\ & - f_1(x, \mathbf{P}_1) f_2(x, \mathbf{P}_2) |\mathcal{M}(\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2; \mathbf{P}_{1'}, \mathbf{P}_{2'})|^2], \end{aligned} \quad (8.35)$$

а для вычисления величин $|\mathcal{M}|^2$ используется формула (8.34). Отметим, что в общем случае следует просуммировать правую часть (8.35) по всем типам частиц $2, 1', 2'$ (а также учесть процессы распада и многочастичные процессы). Таким образом, с учётом парных столкновений уравнение Больцмана принимает вид

$$P^\mu \frac{\partial f}{\partial x^\mu} + \Gamma_{j\rho}^\nu P^\rho P_\nu \frac{\partial f}{\partial P_j} = \mathcal{C}(x^\lambda, P_i). \quad (8.36)$$

Правая часть уравнения Больцмана (8.36), описывающая бюджет числа частиц в столкновительных процессах, получила название *интеграла столкновений*.

Уравнение (8.36) можно записать в следующем виде:

$$\frac{\partial f}{\partial x^0} + \frac{P^i}{P^0} \frac{\partial f}{\partial x^i} + \frac{\Gamma_{j\rho}^\nu P^\rho P_\nu}{P^0} \frac{\partial f}{\partial P_j} = \frac{\mathcal{C}(x^\lambda, P_i)}{P^0}. \quad (8.37)$$

Для сокращения записи формул введём обозначение

$$\frac{dP_\mu}{dx^0} \equiv \frac{\Gamma_{\mu\rho}^\nu P^\rho P_\nu}{P^0} \quad (8.38)$$

Подчеркнём, что импульсы P_i , фигурирующие в (8.37), — это независимые аргументы функции распределения. Они не зависят от времени и не удовлетворяют никаким уравнениям, так что левую часть (8.38) следует воспринимать не как производную, а именно как обозначение для правой части. Оно мотивировано тем, что импульсы частиц удовлетворяют аналогичному соотношению, которое для них уже имеет смысл уравнения движения. Действительно, левую часть уравнения (8.4) можно записать в виде

$$m \frac{dP_{(i)\mu}}{ds_{(i)}} = m \frac{dx_{(i)}^0}{ds_{(i)}} \frac{dP_{(i)\mu}}{dx_{(i)}^0} = P_{(i)}^0 \frac{dP_{(i)\mu}}{dx_{(i)}^0},$$

откуда и следует запись уравнения (8.4) в виде, аналогичном (8.38). Отметим, что из определения (8.38) следует, что “производная” компоненты контравариантного импульса $P^i = g^{\mu i} P_\mu$ равна

$$\frac{dP^i}{dx^0} = - \frac{\Gamma_{\mu\nu}^i P^\mu P^\nu}{P^0}. \quad (8.39)$$

▷ Задача 5. Показать, что из определения (8.38) следует соотношение (8.39).

Введём ещё одно определение,

$$\frac{dx^\mu}{dx^0} \equiv \frac{P^\mu}{P^0}. \quad (8.40)$$

Его также следует воспринимать как обозначение для правой части; мотивировано оно также тем, что аналогичное соотношение имеет место для частиц. В итоге уравнение (8.36) запишется в виде

$$\frac{df}{dx^0} \equiv \frac{\partial f}{\partial x^0} + \frac{\partial f}{\partial x^i} \frac{dx^i}{dx^0} + \frac{\partial f}{\partial P_i} \frac{dP_i}{dx^0} = C[f], \quad (8.41)$$

где

$$C[f] = \frac{\mathcal{C}(x^\mu, P_i)}{P^0}.$$

Удобство такой записи уравнения (8.36) состоит в возможности замен переменных: в качестве аргументов функции распределения можно выбирать не координаты x^i и импульсы P_i , а произвольные функции от них, к тому же зависящие от времени,

$$y^i = y^i(x^0; x^j, P_k), \quad \kappa_i = \kappa_i(x^0; x^j, P_k). \quad (8.42)$$

При этом левая часть уравнения Больцмана (8.41) сохраняет свою форму.

▷ **Задача 6.** Показать, что функция распределения, рассматриваемая как функция переменных (8.42), удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial f(x^0, y^i, \kappa_j)}{\partial x^0} + \frac{\partial f(x^0, y^i, \kappa_j)}{\partial y^i} \frac{dy^i}{dx^0} + \frac{\partial f(x^0, y^i, \kappa_j)}{\partial \kappa_i} \frac{d\kappa_i}{dx^0} = C[f] ,$$

где “производная”, например, от κ_i по определению равна

$$\frac{d\kappa_i}{dx^0} = \frac{\partial \kappa_i}{\partial x^0} + \frac{\partial \kappa_i}{\partial x^j} \frac{dx^j}{dx^0} + \frac{\partial \kappa_i}{\partial P_j} \frac{dP_j}{dx^0} , \quad (8.43)$$

при этом “производные” от x^i и P_i определены соотношениями (8.38), (8.40).

Уравнение (8.37) (или, что то же самое, (8.41)) справедливо в любой системе отсчёта. В то же время во многих случаях функции распределения и интегралы столкновений удобно вычислять в локально-лоренцевой системе отсчёта, где метрика принимает вид метрики Минковского. Переход в эту систему осуществляется с помощью набора тетрад e_μ^α , см. Приложение С. По нижнему индексу тетрады являются ковариантными векторами относительно общековариантных замен координат x^μ , а по верхнему индексу — лоренцевыми векторами, причём справедливы равенства

$$\eta^{\alpha\beta} = g^{\mu\nu} e_\mu^\alpha e_\nu^\beta , \quad g_{\mu\nu} = \eta_{\alpha\beta} e_\mu^\alpha e_\nu^\beta . \quad (8.44)$$

Перевод вектора P^μ в локально-лоренцеву систему осуществляется преобразованием

$$p^\alpha = e_\mu^\alpha P^\mu , \quad (8.45)$$

при этом лоренцев вектор p^α имеет смысл физического импульса в мгновенно-лоренцевой системе отсчёта. Из (8.8) и (8.44) следует, что физический импульс удовлетворяет стандартному для плоского пространства соотношению $\eta_{\alpha\beta} p^\alpha p^\beta = m^2$.

В расширяющейся Вселенной все физические импульсы краснеют, и этот факт удобно учесть, используя вместо импульса \mathbf{p} конформно-растянутый импульс

$$\boldsymbol{\kappa} = a \mathbf{p} . \quad (8.46)$$

В однородном случае импульс \mathbf{p} совпадал бы с физическим импульсом (импульсом в сопутствующей локально-лоренцевой системе координат), а импульс $\boldsymbol{\kappa}$ — с конформным,² как мы определяли их в книге [1] (см., например, разделы I.2.3, I.2.4). В случае однородной бесстолкновительной среды функция распределения, рассматриваемая как функция конформного импульса, явно от времени не зависит, $f = f(\boldsymbol{\kappa})$ (см. раздел I.2.5; для однородного случая никакой зависимости от координаты x нет).

Учитывая, что функцию распределения f удобно считать функцией переменных $(x, \boldsymbol{\kappa})$ уравнение (8.37) можно формально записать в виде

$$\frac{\partial f}{\partial x^0} + \frac{d\boldsymbol{\kappa}}{dx^0} \cdot \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\kappa}} + \frac{d\mathbf{x}}{dx^0} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} = C[f] , \quad (8.47)$$

где $dx^i/dx^0 \equiv P^i/P^0$, а величина $d\boldsymbol{\kappa}/dx^0$ вычисляется с помощью (8.43). Для дальнейшего анализа процессов в ранней Вселенной, как правило, нам будет удобно использовать запись уравнения Больцмана именно в виде (8.47).

²Мы здесь изменили обозначения по сравнению с книгой [1].

Стоит отметить, что при выводе уравнения Больцмана мы считали частицы по-существу классическими. Учёт квантовости приводит к некоторой модификации выражения для интеграла столкновений, существенной в ситуациях, когда проявляется различие между статистиками Бозе–Эйнштейна и Ферми–Дирака. Так, более аккуратная запись интеграла столкновений для процессов с участием фермионов требует учёта блокировки Паули: функция распределения фермионов не может превысить единицы (точнее, $1/(2\pi)^3$ в нашей нормировке). Обратный эффект усиления имеет место для бозонов. Приведём модифицированное выражение для интеграла столкновений (8.35), опустив аргументы у функций под знаком интеграла:

$$C(x, \mathbf{P}_1) = \int \frac{d^3 P_2}{\sqrt{-g} P_2^0} \frac{d^3 P_{1'}^-}{\sqrt{-g} P_{1'}^0} \frac{d^3 P_{2'}^-}{\sqrt{-g} P_{2'}^0} \left(|\mathcal{M}_{1'2' \rightarrow 12}|^2 f_{1'} f_{2'} \left(1 \pm \frac{(2\pi)^3 f_{1'}}{g_{1'}} \right) \left(1 \pm \frac{(2\pi)^3 f_{2'}}{g_{2'}} \right) \right. \\ \left. - |\mathcal{M}_{12 \rightarrow 1'2'}|^2 f_{12} \left(1 \pm \frac{(2\pi)^3 f_1}{g_1} \right) \left(1 \pm \frac{(2\pi)^3 f_2}{g_2} \right) \right). \quad (8.48)$$

Здесь g_i обозначает число спиновых степеней свободы соответствующей частицы; верхние и нижние знаки в скобках относятся к бозонам и фермионам, соответственно.

8.2 Общие уравнения для скалярных возмущений

В дальнейшем нам будет удобно использовать величину κ , введённую согласно (8.46), (8.45). В калибровке $g_{0i} = 0$ один из четырёх векторов тетрады можно направить вдоль временного направления, а три других выбрать чисто пространственными, $e_k^0 = e_0^k = 0$. В этом случае выполняется соотношение

$$\kappa^2 \equiv \kappa^i \kappa^i = -a^2 g_{ij} P^i P^j. \quad (8.49)$$

Из него, в частности, видно, что связь между P_i и κ существенно зависит от выбора метрики. Здесь мы ограничимся рассмотрением скалярных возмущений (случай тензорных возмущений рассмотрен в конце раздела 8.4.3). В используемой нами конформной ньютоновой калибровке (2.66) имеем

$$g_{00} = a^2 (1 + 2\Phi), \quad g_{ij} = -a^2 (1 + 2\Psi) \cdot \delta_{ij}, \quad (8.50)$$

поэтому тетрады диагональны, $e_j^i \propto \delta_j^i$, и 3-вектор κ^i сонаправлен вектору P^i . В дальнейшем мы не будем различать трехмерные вектора с верхним и нижним индексом там, где это не будет приводить к недоразумениям; например, мы будем считать, что $\kappa_i = \kappa^i$. Из (8.49) и (8.8) будем иметь³

$$P^\mu = \left((1 - \Phi) \frac{\sqrt{\kappa^2 + m^2 a^2}}{a^2}, (1 - \Psi) \frac{\kappa}{a^2} \right), \quad (8.51a)$$

$$P_\mu = \left((1 + \Phi) \sqrt{\kappa^2 + m^2 a^2}, -(1 + \Psi) \kappa \right). \quad (8.51b)$$

Эволюция функции распределения частиц $f_\lambda = f_\lambda(\kappa; \eta, \mathbf{x})$ определяется уравнением Больцмана (8.47). Явный вид линеаризованной левой части этого уравнения будет приведён ниже.

В используемом нами приближении, описанном в начале раздела 8.1, при вычислении интеграла столкновений (8.35) метрику можно считать статической, однородной и конформно-плоской. Напомним, что величина $C[f]$, входящая в правую часть

³Из результатов раздела I.2.5 следует, что в однородной Вселенной импульсы массивных невзаимодействующих частиц $P^i = m dx^i/ds$ падают как a^{-2} , физические импульсы $p^i = m (adx^i)/ds$ падают как a^{-1} , а конформные импульсы остаются постоянными во времени. Это, разумеется, согласуется с выражением (8.51a).

уравнения (8.47), отличается от инвариантной величины (8.35) на фактор $1/P^0$. При его вычислении следует пользоваться формулой (8.51а). Для дальнейшего удобно ввести единичный 3-вектор n^i , сонаправленный 3-импульсу κ^i , так что

$$\kappa \equiv \mathbf{n} \cdot \kappa, \quad \kappa^2 = \kappa^2, \quad x^{i'} \equiv \frac{dx^i}{d\eta} = \frac{P^i}{P^0} = \frac{\kappa \cdot n_i}{\sqrt{\kappa^2 + m^2 a^2}} \cdot (1 + \Phi - \Psi) \quad (8.52)$$

(в соответствии с принятым соглашением мы считаем, что $n_i = n^i$). Как мы ранее выделяли вклады неоднородных возмущений в плотность энергии и давление идеальной жидкости, так и теперь выделим в функции распределения пространственно-неоднородные возмущения, $\delta f_\lambda(\kappa; \eta, \mathbf{x})$, определив их равенством

$$f_\lambda = f_\lambda^{(0)} \cdot (1 + \delta f_\lambda), \quad (8.53)$$

где $f_\lambda^{(0)}$ — однородная и изотропная функция распределения для соответствующей компоненты; например, для компоненты, находящейся в термодинамическом равновесии с частицами первичной плазмы, $f_\lambda^{(0)}(\kappa)$ — функция распределения Бозе–Эйнштейна или функция распределения Ферми–Дирака, в зависимости от статистики частиц. Тогда, подставляя (8.53) в уравнение Больцмана (8.47), получим для малых возмущений в линейном приближении:

$$\kappa' \cdot \frac{\partial \ln f_\lambda^{(0)}}{\partial \kappa} + (\ln f_\lambda^{(0)})' \cdot \delta f_\lambda + \delta f'_\lambda + \frac{\kappa \cdot \mathbf{n}}{\sqrt{\kappa^2 + m^2 a^2}} \cdot \frac{\partial \delta f_\lambda}{\partial \mathbf{x}} = \frac{C^{(1)}[f]}{f_\lambda^{(0)}},$$

где штрих, как всегда, обозначает производную по конформному времени (разумеется, \mathbf{x}' и κ' нужно воспринимать так, как изложено в конце раздела 8.1). Здесь $C^{(1)}[f]$ — линейная по δf часть интеграла столкновений, и мы учли, что в пределе однородной среды “производная по времени” импульса κ равна нулю, так что κ' является величиной первого порядка малости, см. также (8.56). Во многих интересных случаях однородная функция распределения не зависит от времени, $f^{(0)} = f^{(0)}(\kappa)$, а интеграл столкновений равен нулю в отсутствие возмущений, $C[f^{(0)}] = 0$. В этих случаях уравнение Больцмана для малых возмущений имеет более простой вид

$$\kappa' \cdot \frac{\partial \ln f_\lambda^{(0)}}{\partial \kappa} + \delta f'_\lambda + \frac{\kappa \cdot \mathbf{n}}{\sqrt{\kappa^2 + m^2 a^2}} \cdot \frac{\partial \delta f_\lambda}{\partial \mathbf{x}} = \frac{C[f]}{f_\lambda^{(0)}}. \quad (8.54)$$

Именно этот вид мы будем использовать в дальнейшем, если не оговорено противное.

Чтобы найти величину κ' , воспользуемся связью (8.51а) и соотношением (8.39), в котором в качестве x^0 выступает конформное время η . Символы Кристоффеля (B.12) в конформной ньютоновой калибровке (2.63), (2.64) имеют вид

$$\begin{aligned} \Gamma_{00}^0 &= \frac{a'}{a} + \Phi', \quad \Gamma_{0i}^0 = \Gamma_{00}^i = \partial_i \Phi, \quad \Gamma_{0j}^i = \left(\frac{a'}{a} + \Psi' \right) \delta_{ij}, \\ \Gamma_{ij}^0 &= \left(\frac{a'}{a} - 2 \frac{a'}{a} \Phi + 2 \frac{a'}{a} \Psi + \Psi' \right) \delta_{ij}, \quad \Gamma_{jk}^i = (\delta_{ik} \partial_j \Psi + \delta_{ij} \partial_k \Psi - \delta_{jk} \partial_i \Psi). \end{aligned}$$

В результате для “производной” импульса P^i по конформному времени получим

$$\frac{dP^i}{d\eta} = -2(aH + \Psi') \cdot P^i - \partial_i \Phi \cdot P^0 - \frac{1}{P^0} (2\delta_{ij} P^k P^j \partial_k \Psi - \delta_{jk} P^j P^k \cdot \partial_i \Psi). \quad (8.55)$$

Подставляя в формулу (8.55) величины P^0 и P^i , выраженные через переменную κ с использованием (8.51a), получим в линейном порядке по возмущениям

$$\kappa' = -\kappa\Psi' - \sqrt{\kappa^2 + m^2a^2} \cdot \mathbf{n} \frac{\partial\Phi}{\partial\mathbf{x}} . \quad (8.56)$$

Наконец, подставляя в (8.54) выражение (8.56), для неоднородных возмущений получим уравнение Больцмана следующего вида:

$$-\left(\Psi' + \frac{\sqrt{\kappa^2 + m^2a^2}}{\kappa} \cdot \mathbf{n} \frac{\partial\Phi}{\partial\mathbf{x}}\right) \cdot \frac{\partial \ln f_\lambda^{(0)}}{\partial \ln \kappa} + \delta f'_\lambda + \frac{\kappa}{\sqrt{\kappa^2 + m^2a^2}} \cdot \mathbf{n} \frac{\partial \delta f_\lambda}{\partial \mathbf{x}} = \frac{C[f]}{f_\lambda^{(0)}} . \quad (8.57)$$

Для получения полной системы уравнений для скалярных возмущений требуется найти линеаризованное выражение для тензора энергии-импульса (8.10). При этом в линейном порядке по флуктуациям имеем из (8.50) и (8.51b)

$$\frac{d^3 P_i}{\sqrt{-g}} = \frac{\kappa^2 d\kappa}{a^4} d\mathbf{n} \cdot (1 - \Phi) ,$$

где $d\mathbf{n}$ — элемент телесного угла в импульсном пространстве. Отметим, что в выражении для инвариантного фазового объёма, стоящего под знаком интеграла в (8.10), множитель $(1 - \Phi)$ сокращается, как и должно быть. В пространственных компонентах тензора энергии-импульса выделим диагональную часть, по аналогии с идеальной жидкостью называемую давлением p , и бесследовый тензор анизотропных натяжений Π_{ij} . Это разложение имеет вид

$$T_j^i = -\delta_j^i \cdot p - \Pi_j^i , \quad \Pi_i^i = 0 ,$$

а разложение Π_{ij} по спиральностям приведено в (B.13b).

В первом порядке по возмущениям получим

$$\delta T_0^0 \equiv \delta\rho = \frac{1}{a^4} \int \kappa^2 d\kappa d\mathbf{n} \sqrt{\kappa^2 + m^2a^2} \cdot f_\lambda^{(0)}(\kappa) \cdot \delta f_\lambda , \quad (8.58a)$$

$$\delta T_i^0 \equiv -(\rho + p) \cdot v_i = -\frac{1}{a^4} \int \kappa^3 d\kappa d\mathbf{n} n_i \cdot f_\lambda^{(0)}(\kappa) \cdot \delta f_\lambda , \quad (8.58b)$$

$$\delta p = \frac{1}{3a^4} \int \frac{\kappa^4 d\kappa d\mathbf{n}}{\sqrt{\kappa^2 + m^2a^2}} \cdot f_\lambda^{(0)}(\kappa) \cdot \delta f_\lambda , \quad (8.58c)$$

$$\Pi_j^i = \frac{1}{a^4} \int \frac{\kappa^4 d\kappa d\mathbf{n}}{\sqrt{\kappa^2 + m^2a^2}} \frac{(n^i n_j - \frac{1}{3}\delta_j^i)}{f_\lambda^{(0)}(\kappa)} \cdot f_\lambda^{(0)}(\kappa) \cdot \delta f_\lambda . \quad (8.58d)$$

Особенностью неидеальной среды является отличие от нуля тензора анизотропных натяжений. Он даёт вклад как в линеаризованный закон ковариантного сохранения тензора энергии-импульса, так и в уравнения Эйнштейна, см. Приложение B. В частности, используя выражения для компонент линеаризованного тензора Эйнштейна (2.67), (2.68), (2.69), получим следующие уравнения Эйнштейна в скалярном секторе (см. также Приложение B):

$$-\Delta\Psi + 3\frac{a'}{a}\Psi' - 3\frac{a'^2}{a^2}\Phi = 4\pi Ga^2 \cdot \delta\rho_{tot} , \quad (8.59a)$$

$$-\Psi' + \frac{a'}{a}\Phi = -4\pi Ga^2 \cdot [(\rho + p)v]_{tot} , \quad (8.59b)$$

$$\Psi'' - \frac{1}{3}\Delta(\Phi + \Psi) + \frac{a'}{a}(2\Psi' - \Phi') - 2\frac{a''}{a}\Phi + \frac{a'^2}{a^2}\Phi = -4\pi Ga^2 \cdot \delta p_{tot} , \quad (8.59c)$$

$$\Delta(\Phi + \Psi) = -12\pi Ga^2 \cdot [(\rho + p)\pi]_{tot} , \quad (8.59d)$$

где мы учли, что в скалярном секторе тензор анизотропных напряжений удобно записать в виде

$$\Pi_{ij} = (p + \rho) \left(-\frac{1}{2} \delta_{ij} + \frac{3}{2} \frac{\partial_i \partial_j}{\Delta} \right) \pi .$$

Уравнения (8.59a), (8.59b) обобщают уравнения (2.71) и (2.72), а уравнения (8.59c) и (8.59d) получаются вместо одного уравнения (2.73), когда присутствует нетривиальный тензор анизотропных напряжений. Из-за него перестаёт выполняться связь (2.70) между потенциалами Φ и Ψ , что усложняет анализ эволюции возмущений. Для записи уравнения (8.59d) по аналогии с “полным” потенциалом скоростей v мы ввели “полный” потенциал анизотропных напряжений,

$$[(\rho + p) \pi]_{tot} = \sum_{\lambda} [(\rho_{\lambda} + p_{\lambda}) \pi_{\lambda}] ,$$

где суммирование идёт по всем компонентам среды. Уравнения ковариантного сохранения (5.4) и (5.5) для каждой из компонент обобщаются следующим образом (см. Приложение B):

$$\delta \rho'_{\lambda} + 3 \frac{a'}{a} (\delta \rho_{\lambda} + \delta p_{\lambda}) - (\rho_{\lambda} + p_{\lambda}) (k^2 v_{\lambda} - 3 \Psi') = 0 , \quad (8.60)$$

$$[(\rho_{\lambda} + p_{\lambda}) v_{\lambda}]' + 4 \frac{a'}{a} (\rho_{\lambda} + p_{\lambda}) v_{\lambda} + \delta p_{\lambda} + (\rho_{\lambda} + p_{\lambda}) (\pi_{\lambda} + \Phi) = 0 . \quad (8.61)$$

В заключение этого раздела сделаем общее замечание. Приближение идеальной жидкости неприменимо, вообще говоря, для компонент среды, вышедших из теплового равновесия. Однако в ряде случаев его по-прежнему можно формально использовать и в этой ситуации — это возможно тогда, когда интегралы (8.58) по-прежнему с хорошей степенью точности выглядят как компоненты возмущённого тензора энергии-импульса идеальной жидкости. Здесь наблюдается аналогия с тем, что для описания однородных компонент, отщепившихся от плазмы, часто можно продолжать использовать функции распределения по импульсам, совпадающие с равновесными функциями распределения (иногда с температурой, отличной от температуры плазмы, см. Главу I.5). Такова, например, ситуация с холодной тёмной материи: из (8.58) видно, что если не интересоваться возмущениями очень малых длин волн, то все интегралы кроме (8.58a) подавлены массой частиц тёмной материи, тёмная материя после отщепления от барион-фотонной компоненты описывается эффективным уравнением состояния $p = 0$, и формальное использование приближения идеальной жидкости даст правильный результат. На самом деле это довольно общая ситуация: рассматривая неоднородности любой отщепившейся от первичной плазмы компоненты, нередко можно найти интервал физически интересных длин волн, для которых формальное использование приближения идеальной жидкости даёт правильный ответ.

8.3 Тёплая тёмная материя

8.3.1 Подавление роста возмущений

В качестве простого примера применения изложенного выше формализма рассмотрим возмущения в бесстолкновительной среде, то есть в среде, состоящей из частиц,

испытывающих только гравитационные взаимодействия. Они подвержены процессу, известному как *затухание Ландау*⁴; в англоязычной литературе чаще используется термин *free streaming*. Суть явления проста: свободное перемещение частиц в пространстве естественным образом приводит к замыванию неоднородностей в пространственном распределении этих частиц. Действительно, поток частиц из перенаселённой области больше, чем из недоселённой, и при свободном распространении происходит уравнивающее степень населённости перемешивание. Это кинематический эффект, характерным пространственным масштабом для которого служит длина распространения частиц за характерное для системы время, которым в случае расширяющейся Вселенной является хаббловское время; возмущения всех пространственных масштабов меньше этой длины замываются. В первую очередь речь идёт о неоднородностях плотности самой бесстолкновительной компоненты, однако, как следствие, происходит и подавление гравитационных возмущений.

Ясно, что эффект затухания является наиболее существенным для лёгких частиц, отщепившихся от плазмы релятивистскими. Среди частиц Стандартной модели таковыми являются фотоны после рекомбинации и нейтрино, которые перестают взаимодействовать с космической плазмой при температуре порядка нескольких МэВ. Эффекты, связанные со свободным распространением этих частиц, будут рассмотрены в последующих разделах, а в этом мы сосредоточимся на более простом случае тёмной материи.

Итак, в этом разделе мы рассмотрим особенности эволюции неоднородностей в однокомпонентной среде, состоящей из бесстолкновительных частиц. При этом мы будем считать, что именно данная среда обеспечивает главный вклад в плотность энергии во Вселенной. Такая ситуация реализуется на стадии доминирования тёмной материи. Напомним (см. раздел I.9.1), что в принципе тёмная материя может быть горячей, холодной и тёплой. Частицы холодной тёмной материи перестают взаимодействовать с обычным веществом, будучи нерелятивистскими, а частицы горячей и тёплой тёмной материи отщепляются релятивистскими. Отличие тёплой тёмной материи от горячей состоит в том, что частицы тёплой тёмной материи являются нерелятивистскими к моменту перехода от радиационно-доминированной к пылевидной стадии, а частицы горячей тёмной материи остаются релятивистскими к этому моменту. Как мы обсудим в этом разделе, эффект затухания Ландау, с одной стороны, несущественен для холодной тёмной материи, а с другой стороны исключает возможность того, что горячая тёмная материя является основной фракцией небарионного тёмного вещества, и накладывает серьёзные ограничения на модели с тёплой тёмной материй.

В отличие от предыдущих глав мы не будем пренебречь скоростями частиц тёмной материи, а будем характеризовать среду функцией распределения частиц по скоростям и координатам $f(x^0, \mathbf{x}, \mathbf{u})$ (это в данном случае несколько удобнее, чем использование функции распределения по импульсам). Наша ближайшая задача — выяснить, возмущения какого пространственного размера нарастают в такой среде благодаря явлению гравитационной неустойчивости, а для каких размеров эффект затухания приводит к подавлению роста возмущений. Для её решения мы применим

⁴Затухание Ландау изначально было описано как коллективный эффект подавления возмущений в электромагнитной плазме, когда возмущения в среде заряженных частиц оказываются “несовпадающими по фазе” с вызванными ими возмущениями электрического поля. В случае с космической средой возмущения материи оказываются расфазированными с вызванными ими возмущениями метрики.

ニュートンов подход, аналогичный подходу Главы 1.

Напомним, что в случае идеальной жидкости существенным масштабом является джинсовская длина волны λ_J (см. Главу 1): возмущения больших длин волн растут, в то время как возмущения меньших длин волн осцилируют, поскольку гравитационное притяжение компенсируется давлением газа. В расширяющейся Вселенной джинсовская длина в однокомпонентной среде определяется текущим размером звукового горизонта $u_s/\sqrt{4\pi G\rho} \sim u_s(t)/H(t)$ (см. раздел 1.2). По аналогии с джинсовскими импульсом (1.11) и длиной волны (1.12), для бесстолкновительной среды естественно ввести⁵ соответствующие конформный импульс k_{fs} и физическую длину волны λ_{fs} , используя вместо скорости звука усредненную некоторым образом скорость частиц среды $u(t)$,

$$k_{fs}(t) = \left(\frac{4\pi G\rho(t) a^2(t)}{u^2(t)} \right)^{1/2} = \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{H(t) a(t)}{u(t)}, \quad \lambda_{fs}(t) = 2\pi \frac{a(t)}{k_{fs}(t)} = 2\pi \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{u(t)}{H(t)}, \quad (8.62)$$

где ρ — плотность энергии среды. Вторые равенства в (8.62) отражают тот факт, что мы считаем, что рассматриваемая среда является доминирующей с точки зрения космологического расширения. Мы сейчас убедимся, что k_{fs} и λ_{fs} действительно определяют масштаб, начиная с которого затухание Ландау играет существенную роль. Отметим, что $\lambda_{fs} \sim u H^{-1}$ по порядку величины совпадает с длиной пробега частиц за хаббловское время, о чём мы уже упоминали. Отметим ещё, что пока частицы остаются релятивистскими, λ_{fs} по порядку величины совпадает с размером горизонта, так что все возмущения под горизонтом будут испытывать подавление. В связи с последним обстоятельством нетривиальным является случай, когда частицы среды — нерелятивистские; именно его мы и будем рассматривать в дальнейшем.

Подчеркнём, что величина $\lambda_{fs}(t)$, фигурирующая в (8.62), является текущей физической длиной волны, а $k_{fs}(t)$ — соответствующий конформный импульс. Современные длины волн, рост которых был подавлен в момент времени t , определяются соотношением

$$\lambda_0 < \frac{2\pi a_0}{k_{fs}(t)} = (1+z)\lambda_{fs}(t),$$

где красное смещение z соответствует моменту t .

Чтобы получить выражения (8.62) рассмотрим, как в разделе 1.1, случай фонового пространства Минковского и запишем систему уравнений, описывающую динамику гравитирующего газа бесстолкновительных частиц. Подчеркнём еще раз, что мы ограничиваемся случаем однокомпонентной среды. В ньютоновском приближении гравитационный потенциал Φ удовлетворяет уравнению Пуассона

$$\Delta\Phi = 4\pi G\rho, \quad (8.63)$$

а локальная пространственная плотность энергии нерелятивистских частиц массы m определяется через интеграл по скоростям от функции распределения частиц,

$$\rho(x) = m \int d^3u f(x, \mathbf{u}). \quad (8.64)$$

Функция распределения удовлетворяет уравнению Власова (8.17) с очевидными изменениями, связанными с тем, что мы используем функцию распределения по скоростям, а не по импульсам. В случае нерелятивистских частиц и возмущений на фоне

⁵Обозначение связано с английским термином “free streaming”.

пространства Минковского имеем

$$x^0 = t, \quad \frac{P^i}{P^0} = u^i, \quad \frac{\Gamma_{j\rho}^\nu P^\rho P_\nu}{P^0} = -m \frac{\partial \Phi}{\partial x^j}.$$

Здесь последнее равенство можно получить, как используя разложение метрики около метрики Минковского, так и обнаружив, что левая часть этого соотношения играет роль силы в уравнении движения для частиц (см. (8.4)). Таким образом, уравнение Власова имеет вид

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{u} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} - \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{x}} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}} = 0, \quad (8.65)$$

где самосогласованный гравитационный потенциал определяется уравнением (8.63).

Следуя логике раздела 1.1, рассмотрим, как в системе (8.63), (8.64), (8.65) развиваются возмущения на фоне статического пространственно-однородного распределения

$$\rho = m \int d^3u f^{(0)}(\mathbf{u}) = \text{const}, \quad (8.66)$$

при этом будем считать, что фоновый гравитационный потенциал отсутствует. Как и в Главе 1 рассматриваемый фон не является решением уравнений (8.63), (8.64), (8.65), однако это несущественно для исследования вопроса о том, начиная с каких длин волн возможен быстрый рост неоднородностей материи (см. также конец раздела).

Для неоднородностей, определённых согласно⁶

$$\delta f(x, \mathbf{u}) = f(x, \mathbf{u}) - f^{(0)}(\mathbf{u}), \quad \delta \Phi(x) = \Phi,$$

получим в линейном порядке следующую систему:

$$\begin{aligned} \Delta \Phi &= 4\pi Gm \int d^3u \delta f, \\ \frac{\partial \delta f}{\partial t} + \mathbf{u} \frac{\partial \delta f}{\partial \mathbf{x}} &= \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{x}} \cdot \frac{\partial f^{(0)}}{\partial \mathbf{u}}. \end{aligned}$$

Отметим, что второе из этих уравнений является нерелятивистским пределом уравнения (8.57), в котором к тому же следует положить $a = 1$. Переядём теперь к Фурье-образам по переменным t и \mathbf{x} ,

$$\Phi \rightarrow \Phi(\omega, \mathbf{q}) \cdot e^{-i\omega t + i\mathbf{q}\mathbf{x}}, \quad \delta f \rightarrow \delta f(\omega, \mathbf{q}, \mathbf{u}) \cdot e^{-i\omega t + i\mathbf{q}\mathbf{x}}.$$

Физический смысл величин \mathbf{q} и ω состоит в том, что \mathbf{q} является импульсом распространяющейся в среде волны, а ω — частотой этой волны. В терминах Фурье-образов получим

$$-q^2 \Phi = 4\pi Gm \int d^3u \delta f, \quad (8.67a)$$

$$(-\omega + \mathbf{q}\mathbf{u}) \delta f = \mathbf{q} \frac{\partial f^{(0)}}{\partial \mathbf{u}} \Phi. \quad (8.67b)$$

⁶Функция δf связана с введённой в (8.53) функцией δf соотношением $\delta f = \delta f \cdot f^{(0)}$.

Выражая величину δf из (8.67b), и подставляя её в (8.67a), найдём уравнение дисперсии:

$$q^2 = 4\pi Gm \int d^3u \frac{1}{\omega - \mathbf{q}\mathbf{u}} \left(\mathbf{q} \frac{\partial f^{(0)}}{\partial \mathbf{u}} \right). \quad (8.68)$$

С учётом того, что при свёртывании с любой чётной по \mathbf{u} функцией интеграл от $\partial f^{(0)}/\partial \mathbf{u}$ по фазовому объёму зануляется, уравнение (8.68) принимает окончательный вид

$$1 = \frac{4\pi Gm}{q^2} \int d^3u \frac{(\mathbf{q}\mathbf{u})}{\omega^2 - (\mathbf{q}\mathbf{u})^2} \left(\mathbf{q} \frac{\partial f^{(0)}}{\partial \mathbf{u}} \right). \quad (8.69)$$

Рассмотрим сначала волны с большими длинами. Из (8.69) найдём при $q \rightarrow 0$

$$\omega^2 = \frac{4\pi Gm}{q^2} \int d^3u (\mathbf{q}\mathbf{u}) \left(\mathbf{q} \frac{\partial f^{(0)}}{\partial \mathbf{u}} \right) = -4\pi G\rho,$$

где для получения последнего равенства мы взяли интеграл по частям. Таким образом, в длинноволновом пределе частота является мнимой, так что в газе бесстолкновительных частиц неоднородности больших длин волн испытывают экспоненциальный рост. Это явление вполне аналогично джинсовской неустойчивости идеальной жидкости на фоне пространства Минковского, рассмотренной в разделе 1.1.

Величину критического импульса $q_{fs} = |\mathbf{q}_{fs}|$, начиная с которого роста не происходит, найдём из уравнения (8.69), положив $\omega = 0$,

$$q_{fs}^2 = -4\pi Gm \int d^3u \frac{1}{\mathbf{q}_{fs}\mathbf{u}} \left(\mathbf{q}_{fs} \frac{\partial f^{(0)}}{\partial \mathbf{u}} \right).$$

Поскольку в интересном нам изотропном случае невозмущённая функция распределения зависит лишь от модуля скорости $u \equiv |\mathbf{u}|$, это уравнение можно записать в виде

$$q_{fs}^2 = -4\pi Gm \int d^3u \frac{1}{u} \frac{\partial f^{(0)}}{\partial u} = -4\pi Gm \int_0^\infty 4\pi u du \frac{\partial f^{(0)}}{\partial u}.$$

Проинтегрировав по частям, получим

$$q_{fs}^2 = 4\pi Gm \int_0^\infty 4\pi du f^{(0)} = 4\pi Gm \int d^3u \frac{f^{(0)}}{u^2},$$

откуда имеем окончательно

$$q_{fs} = \sqrt{4\pi G\rho \cdot \langle \frac{1}{u^2} \rangle}, \quad (8.70)$$

где

$$\langle \frac{1}{u^2} \rangle = \frac{\int d^3u \frac{f^{(0)}}{u^2}}{\int d^3u f^{(0)}}.$$

Именно в этом смысле следует понимать усреднённую скорость $u(t)$, входящую в выражения (8.62). Для физически интересных функций распределения имеем $\langle 1/u^2 \rangle \simeq 1/\langle u^2 \rangle$; в дальнейших оценках мы, как правило, не будем уточнять, о каком именно усреднении идёт речь. Подчеркнём, что всюду в приведённом анализе фигурировали физические импульсы, связанные с конформными импульсами \mathbf{k} обычным соотношением $\mathbf{q} = \mathbf{k}a$, отсюда и дополнительный множитель a в первом из соотношений (8.62).

В расширяющейся Вселенной, доминированной нерелятивистской материей, значение импульса (8.70) также является критическим в том смысле, что возмущения с меньшим импульсом (большей длиной волны) растут, а рост возмущений с большим импульсом подавлен. Отличие от рассмотренного случая фонового пространства Минковского состоит в том, что возмущения с $q < q_{fs}$ растут степенным образом, как $a(t) \propto t^{2/3}$, а не экспоненциально. Мы приведём соответствующий анализ в конце раздела.

Обсудим два предельных случая в рамках рассматриваемого нами однокомпонентного сценария. Первый из них — это случай холодной тёмной материи. По определению холодной тёмной материи, её частицы перестают взаимодействовать с обычным веществом, будучи нерелятивистскими. Поэтому их распределение по скоростям в последующем характеризуется функцией распределения Максвелла–Больцмана с эффективной температурой T_{eff} . Для этого случая найдём

$$\text{CDM} : \quad q_{fs} = \left(4\pi G \rho \frac{m}{T_{eff}} \right)^{1/2}, \quad (8.71)$$

причём эффективная температура убывает с течением времени как (см. раздел I.2.5)

$$\text{CDM} : \quad T_{eff} \propto \frac{1}{a^2}.$$

С учётом поведения $\rho \propto a^{-3}$ отсюда следует, что критический конформный импульс растёт со временем,

$$k_{fs} = aq_{fs} \propto a^{1/2} \propto t^{1/3}, \quad (8.72)$$

так что в каждый последующий момент времени за счёт джинсовской нестабильности начинают расти возмущения всё меньших и меньших сопутствующих длин волн.

Как мы знаем, быстрый рост возмущений плотности начинается с момента t_{eq} перехода от радиационно-доминированной к пылевидной стадии. Поэтому особый интерес представляют значения критического импульса и критической длины волны в тот момент. Из (8.71) для холодной тёмной материи получим

$$\lambda_{fs}(t_{eq}) \simeq 2\pi H_{eq}^{-1} \left(\frac{T_{eff}(t_{eq})}{m} \right)^{1/2}.$$

Эффективную температуру грубо оценим следующим образом

$$T_{eff}(t_{eq}) \simeq T_d \left(\frac{a_d}{a_{eq}} \right)^2 \simeq \frac{T_{eq}^2}{T_d},$$

где обозначение d относится к моменту нарушения кинетического равновесия между частицами тёмной материи и обычными частицами (отщепление от плазмы, decoupling). Для значения современной длины волны имеем отсюда

$$\lambda_0 = (1 + z_{eq})\lambda_{fs}(t_{eq}) \simeq 2\pi(1 + z_{eq})H_{eq}^{-1} \left(\frac{T_{eq}^2}{mT_d} \right)^{1/2} \sim \left(\frac{1 \Gamma_{\text{эВ}}^2}{mT_d} \right)^{1/2} \text{Мпк}, \quad (8.73)$$

где мы учли, что $z_{eq} = 3.1 \cdot 10^3$, $T_{eq} = (1 + z_{eq})T_0 \simeq 0.73 \text{ эВ}$ и $2\pi(1 + z_{eq})H_{eq}^{-1} \simeq 670 \text{ Мпк}$, см. раздел I.4.4. Видно, что в случае холодной тёмной материи эффект затухания

Ландау несущественен для большинства интересных для космологии масштабов; например, для слабовзаимодействующих массивных частиц (WIMPs, см. раздел I.9.3) с характерными значениями $t \sim 100$ ГэВ, $T_d \sim 10$ МэВ (см. ниже) масштаб (8.73) составляет величину порядка 1 пк, что весьма мало с точки зрения космологии. Отметим, впрочем, что в литературе ведутся дискуссии на тему о возможном существовании первичных компактных облаков холодной тёмной материи и способах их регистрации, например, с помощью микролинзирования. В спектре таких объектов должно наблюдаться обрезание при малых массах за счёт затухания Ландау.

Во многих моделях с холодной тёмной материи более существенным является другой эффект. Будем для определённости говорить о нейтралино в суперсимметричных расширениях Стандартной модели (см. раздел I.9.6.1). Нейтралино после закалки их концентрации довольно долго остаются в кинетическом равновесии с плазмой: частота столкновений настолько велика, что достаточна для изменения импульса нейтралино за характерное хаббловское время. Темп изменения импульса характеризуется величиной

$$\Gamma_p = n \cdot \sigma_N \cdot \frac{T}{M_N}, \quad (8.74)$$

где M_N — масса нейтралино, $n \propto g_* T^3$ — плотность частиц плазмы, рассеивающихся на нейтралино с сечением σ_N . При низких температурах сечение падает как квадрат температуры, $\sigma_N \propto T^2$. Определив массовый параметр M равенством $\sigma_N = T^2/M^4$, получим следующую оценку для температуры выхода нейтралино из кинетического равновесия,

$$T_d \sim \left(\frac{M^4 M_N}{\sqrt{g_*} M_{Pl}} \right)^{1/4} \simeq 5 \text{ МэВ} \cdot \left(\frac{M_N}{100 \text{ ГэВ}} \right)^{1/4} \cdot \frac{M}{100 \text{ ГэВ}},$$

где для оценки числа релятивистских степеней свободы в плазме мы считаем, что $T_d \ll \Lambda_{QCD}$. Итак, отщепление происходит на радиационно-доминированной стадии, и вероятнее всего ещё до отщепления нейтринной компоненты.

До момента отщепления η_d обычные частицы и нейтралино представляют собой единую среду с ультрарелятивистским уравнением состояния. Возмущения плотности такой среды, вошедшие под горизонт до этого момента, осциллируют с постоянной амплитудой, см. раздел 4.2, в то время как возмущения отщепившейся тёмной материи испытывали бы логарифмический рост. Этим нейтралино отличается от рано отщепившейся тёмной материи, которую мы рассматривали, явно это не оговаривая, в разделе 6.2. Относительное подавление испытывают возмущения с $k > k_d \simeq \eta_d^{-1}$. Воспользовавшись (2.12б) и учтя сохранение энтропии, $g_* a^3 T^3 = \text{const}$, получим для современной длины волны

$$\lambda_{d,0} = 2\pi \frac{a_0}{k_d} \simeq 2\pi \left(\frac{g_{*,0}}{g_*(T_d)} \right)^{1/6} \frac{1}{H_0 \sqrt{\Omega_{rad}}} \frac{T_0}{T_d} \simeq 60 \text{ пк} \cdot \frac{10 \text{ МэВ}}{T_d}, \quad (8.75)$$

что вполне может быть больше, чем даёт оценка (8.73).

- ▷ Задача 7. Найти характерные скорости слабовзаимодействующих массивных частиц с $t \sim 100$ ГэВ, $T_d \sim 10$ МэВ при $z = 100$. Какое расстояние эти частицы пролетают за хаббловское время?
- ▷ Задача 8. Найти массу облака частиц холодной тёмной материи с $t \sim 100$ ГэВ, $T_d \sim 10$ МэВ, отвечающую масштабу затухания Ландау во время $t = t_{eq}$. То же для масштаба (8.75).
- ▷ Задача 9. В (нереалистической) Вселенной без тёмной материи оценить λ_{fs} для барионов сразу после рекомбинации. Найти массу барионов в шаре размера λ_{fs} . Считать барион-фотонное отношение таким же, как в реальной Вселенной. Полученный ответ параметрически будет совпадать с джинсовской массой в барионной Вселенной, полученной нами в разделе 1. Отметим, что физические процессы, определяющие характерные масштабы λ_{fs} и λ_J совершенно различны. Первый масштаб соответствует бесстолкновительному случаю, а второй определяется давлением в среде. Случайно ли отмеченное совпадение?

Обратимся теперь ко второму предельному случаю, когда тёмная материя является тёплой. Для определённости будем считать частицы тёмной материи фермионами, а их спектр в то время, когда они перестают взаимодействовать между собой и с обычным веществом — тепловым. Поскольку эти частицы отщепляются будучи релятивистскими, их распределение по импульсам сохраняет в последующие времена форму ультракрэлятивистского распределения Ферми–Дирака (см. раздел I.2.5), и на поздних стадиях, когда частицы тёмной материи уже являются нерелятивистскими, их распределение по скоростям имеет вид

$$f^{(0)}(t) \propto \frac{1}{e^{mu/T_{eff}(t)} + 1}. \quad (8.76)$$

Входящая в (8.70) величина среднего от обратного квадрата скорости равна

$$\langle \frac{1}{u^2} \rangle = \frac{2 \ln 2}{3\zeta(3)} \left(\frac{m}{T_{eff}} \right)^2 = 0.38 \left(\frac{m}{T_{eff}} \right)^2 \quad (8.77)$$

▷ Задача 10. Получить формулу (8.77). Найти её аналог для распределения Бозе–Эйнштейна.

Воспользуемся законом сохранения энтропии плазмы, состоящей из обычных частиц, $g_*(T) T^3(t) a^3(t) = \text{const}$, и запишем (ср. с разделом I.7.2)

$$T_{eff}(t) = \left(\frac{g_*(T)}{g_*(T_d)} \right)^{1/3} T(t), \quad (8.78)$$

где T_d — температура отщепления частиц тёмной материи. Напомним (см. раздел I.4.4), что при температуре ниже сотен кэВ (ниже массы электрона) эффективное число степеней свободы равно $g_*(T < m_e) = 43/11 = 3.9$. Используя приведённые выражения, получим из (8.70) критическую длину волны для тёплой тёмной материи в виде

$$\lambda_{fs}(t) = 0.45 \cdot 2\pi H^{-1}(t) \frac{T(t)}{m} \left(\frac{100}{g_*(T_d)} \right)^{1/3}.$$

Так же, как в случае холодной тёмной материи, сопутствующая критическая длина волны λ_{fs}/a падает со временем на пылевидной стадии как $t^{-1/3}$ (конформный импульс растёт как $t^{1/3}$, ср. с (8.72)).

Нас снова будет интересовать момент перехода от радиационно-доминированной к пылевидной стадии. Современное значение соответствующей критической длины волны составляет

$$\begin{aligned} \lambda_0 = (1 + z_{eq}) \lambda_{fs}(t_{eq}) &= 0.45 \cdot 2\pi (1 + z_{eq}) H^{-1}(t_{eq}) \frac{T_{eq}}{m} \left(\frac{100}{g_*(T_d)} \right)^{1/3} \\ &\simeq 220 \text{ кпк} \cdot \left(\frac{100}{g_*(T_d)} \right)^{1/3} \left(\frac{1 \text{ кэВ}}{m} \right). \end{aligned} \quad (8.79)$$

Подчеркнём, что эта оценка относится к возмущениям, испытывающим подавление на пылевидной стадии.

Мы видели в Главе 7, что довольно существенный рост возмущений холодной тёмной материи происходит ещё на радиационно-доминированной стадии. Поэтому

приведённый выше анализ нужно дополнить обсуждением вопроса о том, как ведут себя возмущения тёплой тёмной материи на РД-стадии. Нам потребуется различать возмущения, входящие под горизонт при температурах $T_{eff} > m$ и $T_{eff} < m$. Они имеют импульсы $k > k_{nr}$ и $k < k_{nr}$, соответственно, где $k_{nr} \sim \eta_{nr}^{-1}$, а η_{nr} — конформное время, при котором частицы тёмной материи становятся нерелятивистскими, $T_{eff}(\eta_{nr}) \simeq m$. Для его оценки вновь воспользуемся сохранением энтропии, учтём, что для интересных значений m эффективное число степеней свободы при $T \sim m$ совпадает с современным, и получим из (2.12b)

$$\begin{aligned} a_0 k_{nr}^{-1} \simeq a_0 \eta_{nr} &\simeq \left(\frac{g_{*,0}}{g_*(T_d)} \right)^{1/3} \frac{1}{H_0 \sqrt{\Omega_{rad}}} \frac{T_0}{m} \\ &\simeq 100 \text{ кпк} \cdot \frac{1 \text{ кэВ}}{m}, \end{aligned} \quad (8.80)$$

где мы учли, что в реалистических моделях отщепление частиц тёплой тёмной материи происходит при $T_d \gg m$. Возмущения с $k > k_{nr}$ входят под горизонт, когда частицы тёмной материи все ещё являются релятивистскими. Мы отложим рассмотрение этой ситуации до раздела 8.4.1, а здесь анонсируем, что такие возмущения падают как $\delta_{DM} \propto (k\eta)^{-1}$ вплоть до $\eta \simeq \eta_{nr}$. Поэтому волны с современной длиной меньше $\lambda_{nr} = 2\pi a_0 / k_{nr}$ испытывают подавление ещё до того, как частицы тёмной материи станут нерелятивистскими.

При $\eta > \eta_{nr}$ подавление тоже имеет место, и связано оно с эффектом свободного перемешивания для газа невзаимодействующих нерелятивистских частиц. Этот эффект существенен для глубоко подгоризонтных мод. В этом случае гравитационные потенциалы малы на РД-стадии, и уравнение (8.57) с нулевым интегралом столкновений сводится к простому уравнению для возмущения функции распределения тёмной материи:

$$\delta f' + \frac{i\kappa\mathbf{k}}{ma(\eta)} \delta f = 0,$$

где мы перешли в импульсное представление по координате \mathbf{x} . Решение этого уравнения имеет вид

$$\delta f(\eta) = \exp \left(-\frac{i\kappa\mathbf{k}}{m} \int_{\eta_x}^{\eta} \frac{d\tilde{\eta}}{a(\tilde{\eta})} \right) \cdot \delta f(\eta_x), \quad (8.81)$$

причём для мод с $k < k_{nr}$ обозначение η_x относится к времени входа под горизонт, а для мод с $k > k_{nr}$ следует положить $\eta_x \sim \eta_{nr}$. Из (8.81) видно, что при достаточно больших k возмущение δf быстро осциллирует как функция импульса κ . В этом случае выражения (8.58) для компонент тензора энергии-импульса представляют собой интегралы от быстроосциллирующих функций, и поэтому они подавлены. Итак, к РД/МД переходу возмущения тёплой тёмной материи испытывают подавление при выполнении условия

$$\frac{\kappa k}{m} \int_{\eta_x}^{\eta_{eq}} \frac{d\eta}{a(\eta)} \gg 1, \quad (8.82)$$

где κ — характерный конформный импульс частицы тёмной материи. Для теплового спектра (8.76) характерный импульс оценивается из соотношения $\kappa/a \sim T_{eff}$ (напомним, что aT_{eff} не зависит от времени), и условие (8.82) приводится к виду

$$\frac{T_{eff}ak}{m} \int_{\eta_x}^{\eta_{eq}} \frac{d\eta}{a(\eta)} = \frac{T_{eff}k\eta}{m} \ln \frac{\eta_{eq}}{\eta_x} = k\eta_{nr} \ln \frac{k}{k^{(eq)}} \gg 1,$$

где $k^{(eq)}$ — импульс волны, входящей под горизонт при $\eta = \eta_{eq}$, см. раздел 2.4. Мы видим, что именно рассмотренный эффект определяет наибольшие длины волн, для которых имеется подавление: минимальный импульс таких волн определяется соотношением

$$k_{min}^{-1} = k_{nr}^{-1} \ln \frac{k_{min}}{k^{(eq)}} .$$

Для $m = 1$ кэВ значение $a_0 k_{min}^{-1}$ по порядку величины равно 500 кпк, а соответствующая длина волны составляет $\lambda_{max} = 2\pi a_0 k_{min}^{-1} \sim 3$ Мпк.

▷ **Задача 11.** Оценить максимальную длину волны, для которой существенен описанный эффект свободного перемешивания на РД-стадии в модели с холодной тёмной материией. Убедиться, что в случае холодной тёмной материи с $m \sim 100$ ГэВ, $T_d \sim 10$ МэВ этот эффект приводит к подавлению возмущений с длинами волн, значительно меньшими (8.75).

Из приведённого анализа следует, что масса частиц тёплой тёмной материи не может быть существенно меньше 1 кэВ. Например, если масса частиц тёмной материи составляла бы несколько десятков эВ, то возмущения на современных масштабах меньше или порядка нескольких Мпк были бы подавлены. Первичные возмущения такого размера соответствуют галактикам, и их подавление противоречило бы наблюдательным данным. Отметим, что это соображение тем более справедливо для горячей тёмной материи, частицы которой имели бы массы меньше или порядка 1 эВ (именно в этом случае они оставались бы релятивистскими в эпоху перехода от радиационно-доминированной к пылевидной стадии, что является определяющим свойством горячей тёмной материи); горячая компонента тёмной материи не может быть доминирующей.

С другой стороны, тёплая тёмная материя с массами частиц заметно выше десятка кэВ не испытывает эффекта затухания Ландау на масштабах больше или порядка 100 кпк — масштаба первичных возмущений, из которых образуются карликовые галактики. Поэтому такая тёмная материя с точки зрения образования галактик ведёт себя как холодная.

Отдельный интерес представляет случай тёплой тёмной материи, состоящей из частиц с $m \sim 1 - 10$ кэВ. Они могут составлять всю тёмную материю, и с точки зрения объяснения ряда наблюдений, возможно, оказываются даже несколько предпочтительнее более традиционной холодной тёмной материи. Рост возмущений на пылевидной стадии происходит почти так же, как в случае холодной тёмной материи, однако несколько подавлены флуктуации на сравнительно малых, но всё же интересных с точки зрения космологии масштабах. Подавление линейного спектра возмущений $P(k)$ в модели с тёплой тёмной материией проиллюстрировано на рис. 8.1. Для определённости выбран случай начальной функции распределения вида (8.76) с $g_*(T_d) = g_{*,MSSM} = 228.75$ (число степеней свободы в Минимальной суперсимметричной стандартной модели), нормированной так, что полная плотность массы тёмной материи равна $\rho_{DM} = \Omega_{DM} \rho_c$,

$$f^{(0)}(u) = \frac{\rho_{DM}}{6\pi \zeta(3) m T_{0,eff}^3} \frac{1}{e^{mu/T_{0,eff}} + 1} . \quad (8.83)$$

Видно, что при $m = 1 - 10$ кэВ возмущения с длинами волн, соответствующими массам структур $M \lesssim 10^9 - 10^7 M_\odot$, действительно заметно подавлены, в то время

как в области больших длин волн отличие от модели с холодной тёмной материей невелико. Соответственно, в модели с тёплой тёмной материей образуется меньше структур сравнительно небольшой массы, см. рис. 8.2.

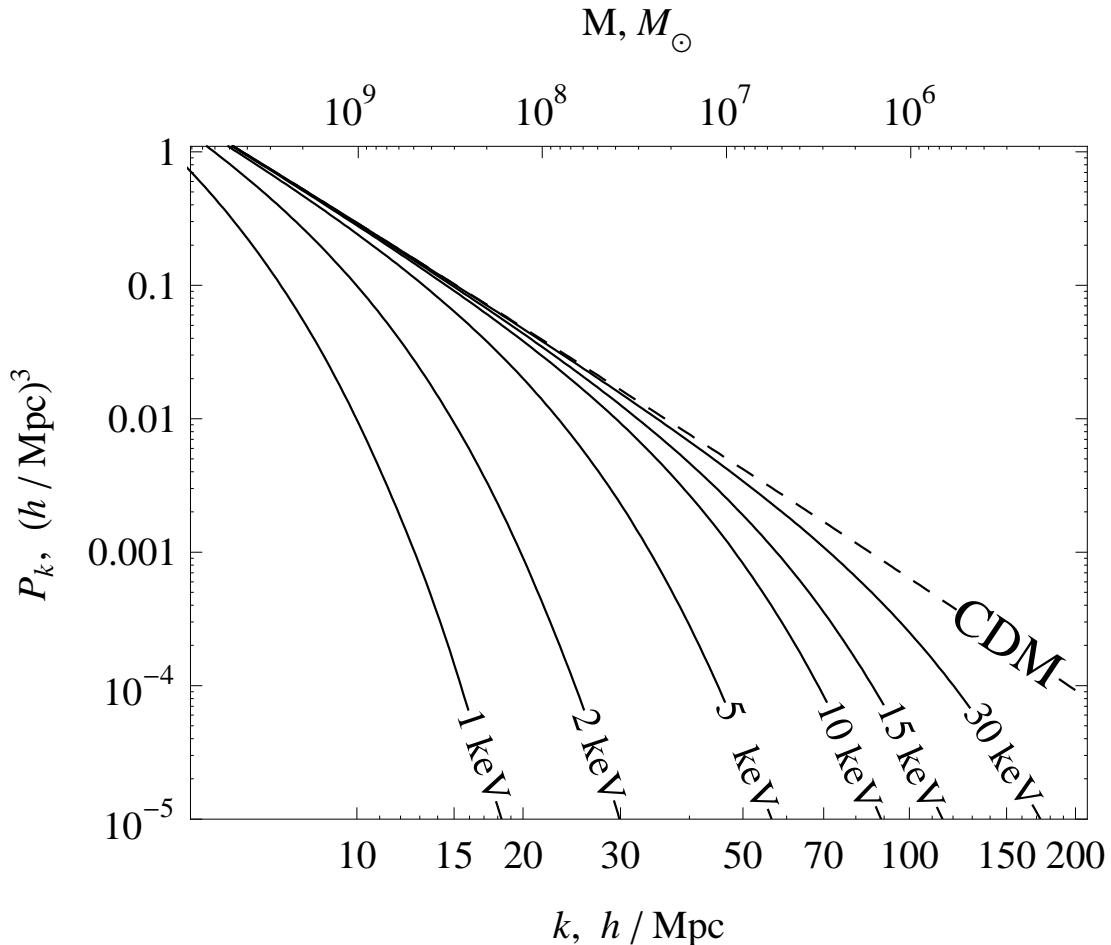


Рис. 8.1: Современный спектр мощности линейной теории в модели с холодной тёмной материей (пунктир) и моделях с тёплой тёмной материей с функцией распределения (8.83) при реалистичных значениях космологических параметров [22]; числа на линиях обозначают массы частиц тёмной материи.

К достоинствам тёплой тёмной материи относят, во-первых, подавление образования карликовых галактик. Это — объекты с массами порядка $(10^7 - 10^9) \cdot M_\odot$. Вблизи Млечного Пути число обнаруженных карликовых галактик-спутников примерно на порядок меньше, чем ожидается из численных расчётов развития структур во Вселенной, заполненной холодной тёмной материей [23, 24]. Аналогичная ситуация имеет место для одиночных карликовых галактик в области размера 8 Мпк вокруг нашей Галактики [25, 26]. Подавление возмущений с современными длинами волн, соответствующими карликовым галактикам, которое имеет место в модели с тёплой тёмной материей, возможно, лучше соответствует наблюдательным данным. Во-вторых, в расчётах гало галактик в модели с холодной тёмной материей наблюдается сильный рост плотности материи ρ_M при приближении к центру гало: $\rho_M \propto r^{-(1-1.5)}$ при $r \rightarrow 0$, что не подтверждается имеющимися результатами наблюдений. И здесь есть надежда, что в модели с тёплой тёмной материи за счёт подавления возмущений на малых масштабах эта проблема найдёт своё решение. Наконец, в модели с холодной тёмной материей есть проблемы с формированием спиральных галактик: в результате быстрого коллапса теряется существенная часть углового момента первичного облака частиц, так что в численных расчётах наблюдается образование только относительно небольших дисков. В модели с тёплой тёмной материи формирование диска идёт медленнее, и потери оказываются меньше, так что большие диски тоже, возможно, формируются. Отметим, что количественное исследование этих вопросов в модели с тёплой тёмной материи представляет собой трудную и в значительной мере нерешённую задачу.

Оговоримся: у модели с тёплой тёмной материей также есть проблемы. Так, наблюдения за расположеннымми на космологических расстояниях ($z \sim 3$) облаками водорода, возможные благодаря регистрации

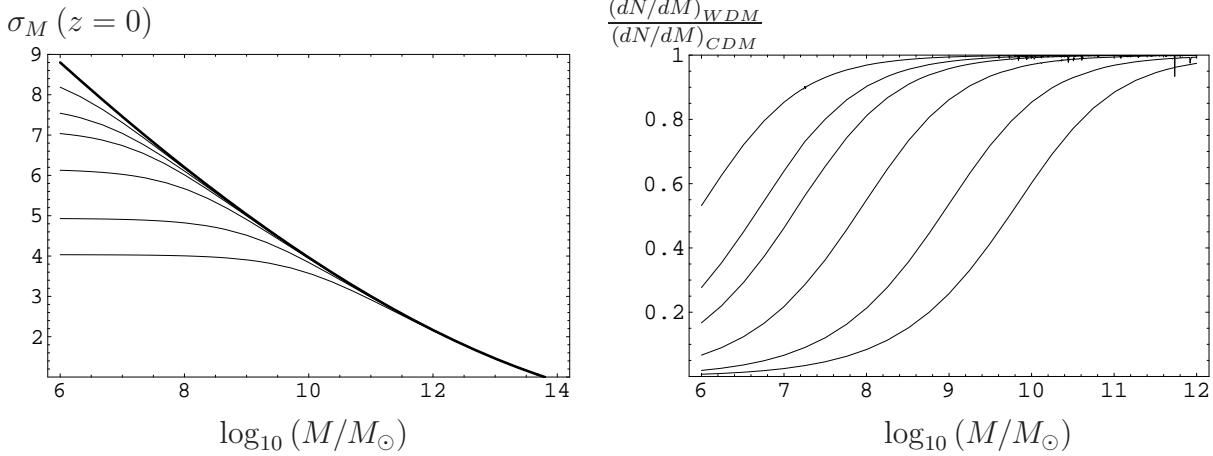


Рис. 8.2: Слева: современная дисперсия линейного контраста плотности материи δ_M , усреднённого по шару, заключающего массу M (см. подробности в разделе 7.2) в модели с холдной тёмной материей (толстая линия) и моделях с тёплой тёмной материей. Справа: отношение дифференциальных массовых спектров структур в современную эпоху в моделях с тёплой тёмной материей к спектру в модели с холдной тёмной материей. На обоих графиках линии соответствуют моделям со спектрами, представленными на рис. 8.1: чем ниже линия, тем меньше масса.

Лайман- α леса водородных линий поглощения в излучении далёких квазаров, показывает, что в ту эпоху спектр возмущений на малых масштабах вовсе не так уж мал и вполне согласуется с предсказаниями модели с холдной тёмной материей [27]. Здесь получается некоторая нестыковка: наблюдения карликовых галактик относятся почти к тем же пространственным масштабам. Если оба наблюдения (и карликовых галактик в нашей ближней окрестности, и водородных облаков при $z \sim 3$) и их интерпретации верны, это означало бы заметную эволюцию спектра возмущений на малых масштабах в позднюю эпоху, между $z \sim 3$ и $z \sim 0$, что не ожидается ни в модели с холдной, ни в модели с тёплой тёмной материей.

У тёплой тёмной материи есть и другие специфические проблемы. Например, из-за подавления возмущений на малых масштабах запаздывает эпоха формирования первичных звёзд. Излучение первичных звёзд приводит ко вторичной ионизации вещества во Вселенной. Эта поздняя ионизация несколько искалила первичную картину реликтового излучения, см. разделы 9.2.3 и 10.3.2. Из наблюдений последнего можно оценить, при каких красных смещениях z_{rei} наступила вторичная ионизация во Вселенной. Имеющиеся оценки дают несколько большую величину z_{rei} , чем ожидается в модели с тёплой тёмной материи. Среди обсуждаемых решений этой проблемы назовём рождение энергичных фотонов в позднюю эпоху в распадах долгоживущих, но нестабильных частиц самой тёмной материи. Интересно, что такой механизм может работать для модели, где частицами тёплой тёмной материи являются лёгкие стерильные нейтрино с массами $m_s \sim 1 - 10$ кэВ. В результате смешивания с активными нейтрино возможен распад стерильного нейтрино в активное и фотон с энергиями порядка $m_s/2$; эти фотонны и могут стоять за относительно ранней для этой модели вторичной ионизацией Вселенной.

В качестве частиц тёплой тёмной материи могут выступать гравитино, стерильные нейтрино, а также ешё более экзотические кандидаты. При этом предположение о тепловом распределении этих частиц по импульсам в момент закалки вполне может не выполняться. Действительно, для интересных масс $m \sim 1 - 10$ кэВ плотность числа частиц тёмной материи в момент закалки существенно меньше равновесной, в противном случае (см. раздел I.9.6.3) современная плотность их массы была бы слишком велика (если не брать в расчёт возможность очень большого значения эффективного числа степеней свободы в момент закалки, $g_*(T_f) \sim 10^3 - 10^4$). Это указывает на нетепловой механизм генерации тёплой тёмной материи, а такой механизм вполне может приводить к нетепловому спектру. В связи с этим в конкретных моделях генерации тёплой тёмной материи оценки типа (8.79) справедливы лишь по порядку величины.

▷ Задача 12. Оценить значение эффективного числа степеней свободы $g_*(T_f)$ в момент закалки частиц тёмной материи с массой $m = 1$ кэВ, считая,

что непосредственно перед закалкой они находились в тепловом равновесии с космической плазмой при температуре T_f . Частицы тёмной материи считать фермионами, для численной оценки положить $\Omega_{DM} = 0.2$.

В заключение этого раздела убедимся, что и в расширяющейся Вселенной условие роста возмущений имеет вид

$$k \lesssim k_{fs}(t),$$

где $k_{fs}(t)$ — текущее значение критического конформного импульса (8.62). Кроме того, мы покажем, что при выполнении этого условия рост возмущений происходит так же, как в случае пылевидной идеальной жидкости, $\delta\rho/\rho(t) \propto a(t)$. Тем самым мы подкрепим предыдущее обсуждение в этом разделе, а заодно дадим аккуратное обоснование того, что результаты предыдущих глав, где холодная тёмная материя рассматривалась как идеальная жидкость с уравнением состояния $p = 0$, справедливы для бесстолкновительной системы частиц достаточно большой массы, которая идеальной жидкостью, строго говоря, не является.

Воспользуемся ньютоновым подходом, аналогичным приведённому в разделе 1.2. Как и прежде, мы будем считать частицы бесстолкновительной среды нерелятивистскими. Вернёмся к системе уравнений (8.63)-(8.65), однако на этот раз будем интересоваться другим фоновым решением, соответствующим однородной расширяющейся Вселенной (ср.(1.14)):

$$\bar{\Phi} = \frac{2}{3}\pi G\mathbf{x}^2\rho(t), \quad (8.84a)$$

$$f = f^{(0)}(u), \quad (8.84b)$$

$$\mathbf{U} = (\mathbf{u} - \mathbf{x}H(t))a(t), \quad (8.84c)$$

где $H = \dot{a}/a$, и функции $\rho(t)$ и $H(t)$ удовлетворяют уравнению непрерывности

$$\frac{d\rho}{dt} + 3H\rho = 0 \quad (8.85)$$

и уравнению Фридмана

$$H^2 = \frac{8\pi}{3}G\rho,$$

из которых имеем полезное в дальнейшем равенство

$$\frac{dH}{dt} + H^2 + \frac{4\pi G}{3}\rho = 0. \quad (8.86)$$

Напомним, что в ньютоновом подходе фоновое пространство-время является плоским, так что в (8.84c) фигурирует физическая скорость частицы \mathbf{u} относительно статической системы координат в этом плоском пространстве, а $\mathbf{x}H$ — скорость среды в точке \mathbf{x} . При этом \mathbf{U} имеет смысл конформной скорости частицы в системе отсчёта, связанной со средой, а физическая скорость частицы в этой системе равна $\mathbf{U}/a(t)$. В соответствии с тем, что в общей теории относительности конформные скорости нерелятивистских частиц в однородной Вселенной остаются постоянными, однородная функция распределения $f^{(0)}(U)$ не зависит от времени. Самосогласованность всего подхода подтверждается тем, что нестатический фон (8.84) в действительности является решением системы (8.63)-(8.65).

▷ Задача 13. Убедиться в справедливости последнего утверждения.

Для дальнейшего удобно перейти от переменной \mathbf{x} к конформной переменной $\mathbf{y} \equiv \mathbf{x}/a$, что даёт в линейном порядке по малым неоднородностям $\delta\phi = \Phi$ и $\delta\mathbf{f}$ уравнения

$$\Delta\Phi = \frac{4\pi Gm}{a} \int d^3U \delta\mathbf{f}, \quad (8.87a)$$

$$\frac{\partial\delta\mathbf{f}}{\partial t} + \frac{\mathbf{U}}{a^2} \frac{\partial\delta\mathbf{f}}{\partial\mathbf{y}} = \frac{\partial f^{(0)}}{\partial\mathbf{U}} \frac{\partial\Phi}{\partial\mathbf{y}}, \quad (8.87b)$$

где Δ — лапласиан в координатах y^i .

▷ Задача 14. Получить систему уравнений (8.87). Указание: весьма полезным будет при этом равенство (8.86).

Переходя к Фурье-образам по переменной \mathbf{y} , $\Phi \rightarrow \Phi(t) e^{i\mathbf{k}\mathbf{y}}$, $\delta f \rightarrow \delta f(t, \mathbf{U}) e^{i\mathbf{k}\mathbf{y}}$, получим для них уравнения

$$-\mathbf{k}^2 \Phi = \frac{4\pi Gm}{a} \int d^3 U \delta f \equiv 4\pi Ga^2 \delta \rho, \quad (8.88a)$$

$$\frac{\partial \delta f}{\partial t} + i \frac{\mathbf{k}\mathbf{U}}{a^2} \delta f = i \mathbf{k} \frac{\partial f^{(0)}}{\partial \mathbf{U}} \Phi \equiv \frac{i \mathbf{k}\mathbf{U}}{U} \frac{\partial f^{(0)}}{\partial U} \Phi. \quad (8.88b)$$

При записи (8.88a) мы воспользовались тем, что плотность массы связана с функцией распределения по конформным скоростям соотношением

$$(\rho + \delta \rho)(t) = m \int d^3 u f(t, \mathbf{U}) = \frac{m}{a^3(t)} \int d^3 U f(t, \mathbf{U}),$$

а в (8.88b) мы учли, что невозмущённая функция распределения зависит только от модуля скорости. Вектор \mathbf{k} имеет смысл конформного импульса волны, распространяющейся в среде.

Будем сначала решать систему (8.88) в длинноволновом пределе, $k \equiv |\mathbf{k}| \rightarrow 0$, разлагая искомую функцию δf в ряд по $\mathbf{k}\mathbf{U}$. Нас будет интересовать решение уравнения (8.88b), нетривиально зависящее от $\Phi(t)$ (по поводу общего решения см. ниже). Это решение имеет вид

$$\delta f = i \frac{\mathbf{k}\mathbf{U}}{U} \frac{\partial f^{(0)}}{\partial U} \int_{t_*}^t dt' \Phi(t') + \frac{(\mathbf{k}\mathbf{U})^2}{U} \frac{\partial f^{(0)}}{\partial U} \int_{t_*}^t dt' \frac{1}{a^2(t')} \int_{t_*}^{t'} dt'' \Phi(t''), \quad (8.89)$$

где t_* — момент времени, начиная с которого справедливо длинноволновое приближение, и мы ограничились двумя первыми членами разложения, а также воспользовались тем, что невозмущённая функция распределения $f^{(0)}$ не зависит от времени. Из полученного решения найдём возмущение плотности массы. Первый член в (8.89) вклада не даёт, а с учётом второго получаем

$$\begin{aligned} \delta \rho &= \frac{m}{a^3} \int d^3 U \delta f = \frac{m}{a^3} \int d^3 U \frac{(\mathbf{k}\mathbf{u})^2}{u} \frac{\partial f^{(0)}}{\partial u} \int_{t_*}^t dt' \frac{1}{a^2(t')} \int_{t_*}^{t'} dt'' \Phi(t'') \\ &= -\rho \mathbf{k}^2 \int_{t_*}^t dt' \frac{1}{a^2(t')} \int_{t_*}^{t'} dt'' \Phi(t''), \end{aligned} \quad (8.90)$$

где в интеграле по скоростям после интегрирования по углам мы выполнили интегрирование по частям. Поделив последнее соотношение на ρ , дифференцируя дважды по времени и воспользовавшись уравнением (8.88a), получим уравнение на возмущение плотности

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + 2H \frac{\partial}{\partial t} - 4\pi G \rho \right) \delta = 0, \quad (8.91)$$

где, как всегда, $\delta = \delta \rho / \rho$. Как мы видим, для длинноволновых мод уравнение на относительную флуктуацию δ совпадает с аналогичным уравнением (1.23), полученным в приближении идеальной жидкости. В том же приближении данное уравнение для относительных возмущений тёмной материи получается и в полном эйнштейновском формализме, см. (6.17). Напомним, что это уравнение имеет решение $\delta(t) \propto a(t)$, описывающее рост возмущений плотности на пылевидной стадии.

Область применимости длинноволнового приближения можно найти, потребовав, чтобы в разложении (8.89) последующие члены были меньше предыдущих. Мы знаем (см. разделы 1.2 и 4.3), что на пылевидной стадии ньютона потенциал Φ не зависит от времени. С учётом того, что масштабный фактор ведёт себя как $a \propto t^{2/3}$, мы видим, что интегралы в (8.89) набираются на верхнем пределе, и второй член разложения подавлен по сравнению с первым множителем порядка $kU/a^2(t)$. Отсюда следует, что длинноволновое приближение применимо при

$$k \ll \frac{H(t)a(t)}{u(t)} \sim k_{fs}, \quad (8.92)$$

где $u(t) \equiv U/a(t)$, то есть k_{fs} даётся формулой (8.62). Последнее обстоятельство подтверждает применимость предыдущего рассмотрения к случаю расширяющейся Вселенной: флуктуации бесстолкновительной материи с конформными импульсами меньше k_{fs} ведут себя так же, как флуктуации идеальной жидкости с пылевидным уравнением состояния.

Рассмотрим для полноты решение однородного уравнения (8.88b) в длинноволновом пределе,

$$\delta f = \exp \left(3i \cdot \mathbf{k}\mathbf{U} \cdot t^{-1/3} \right) c(\mathbf{U}, \mathbf{k}),$$

где c — произвольная функция, и мы положили $a(t) = t^{2/3}$. Повторяя приведённую выше выкладку, получим, что пределе $k \rightarrow 0$ уравнение (8.91) модифицируется тем, что вместо нуля в правой части появляется

$$\text{const} \cdot \frac{1}{a^4(t)} \int d^3 u \exp \left(3i \cdot \mathbf{k}\mathbf{U} \cdot t^{-1/3} \right) (\mathbf{k}\mathbf{U})^2 c(\mathbf{U}, \mathbf{k}).$$

При больших временах и $k \ll k_{fs}$ этот вклад несущественен для растущей моды возмущений, поскольку он ведёт себя как a^{-4} , в то время как каждый член в левой части уравнения (8.91) пропорционален a^{-2} . Таким образом, выражение (8.90) действительно представляет собой главный вклад в δf в случае длинноволновых мод.

В случае коротковолновых возмущений, обратном к (8.92), воспользуемся общим решением уравнения (8.88b),

$$\delta f(t, \mathbf{U}) = \delta f(\mathbf{U}, \mathbf{k}, t_i) e^{-i\mathbf{k}\mathbf{U}(s-s_i)} + \int_{s_i}^s ds' a^2(s') e^{-i\mathbf{k}\mathbf{U}(s-s')} i\mathbf{k} \frac{\partial f^{(0)}}{\partial \mathbf{U}} \Phi(s') , \quad (8.93)$$

где t_i — начальный момент времени, в который функция распределения предполагается известной, а

$$s = \int \frac{dt}{a^2(t)} = -3 \frac{t}{a^2(t)} = -\frac{2}{a^2 H} \propto -\frac{1}{t^{1/3}} .$$

Нас интересуют большие импульсы, такие что

$$kUs \sim \frac{kU}{a^2 H} \sim \frac{k}{k_{fs}} \gg 1 \quad (8.94)$$

Будем рассматривать времена, заметно отличающиеся от начального времени t_i , для которых выполняется $(s_i - s)kU \gg 1$. Тогда интеграл с быстро осциллирующей экспонентой во втором слагаемом набирается на верхнем пределе и равен

$$\delta f_{(2)} = \frac{a^2(t)}{U} \frac{\partial f^{(0)}}{\partial U} \Phi(t) . \quad (8.95)$$

Соответствующий вклад в возмущение плотности имеет вид

$$m\Phi \frac{1}{a} \int 4\pi dU f^{(0)} = \langle \frac{1}{u^2} \rangle \Phi \rho .$$

Связанный с ним вклад в уравнение (8.88a) мал по сравнению с левой частью этого уравнения, поэтому гравитационный потенциал определяется первым членом в (8.93) и равен

$$\Phi = -\frac{4\pi G}{a\mathbf{k}^2} \int d^3U \delta f(\mathbf{U}, \mathbf{k}, s_i) e^{-i\mathbf{k}\mathbf{U}(s-s_i)} . \quad (8.96)$$

Из-за быстро осциллирующего множителя под интегралом он экспоненциально убывает с ростом $|s - s_i|$, так что вклад в ньютонах потенциал частиц со скоростями, удовлетворяющими (8.94), затухает за время $\Delta t \sim (kU/a^2)^{-1} \ll H^{-1}$ от начального момента t_i . Отметим, что всё наше рассуждение неприменимо к медленным частицам, для которых (8.94) не выполняется, однако доля таких частиц в рассматриваемой ситуации по предположению мала.

Возмущения плотности также даются интегралом с быстро осциллирующим множителем,

$$\delta = \frac{\int d^3U \delta f(t_i, \mathbf{U}) e^{-i\mathbf{k}\mathbf{U}(s-s_i)}}{\int d^3U f^{(0)}(U)} ,$$

поэтому они также замываются. Всё это находится в полном соответствии с предыдущим рассмотрением возмущений над плоским фоном.

8.3.2 Ограничения на массу частиц из фазовой плотности

В этом разделе мы отвлечёмся от основной линии изложения и обсудим независимый от анализа распространённости структур способ получения ограничений на массу частиц тёплой тёмной материи. Он основан на следующем соображении. Пусть начальная функция распределения частиц тёмной материи была пространственно-однородной и равной $f_i(\kappa)$, где κ — конформный импульс (малые неоднородности начальной функции распределения в этом разделе для нас несущественны; в связи с этим индекс (0) у начальной функции распределения опускаем). Эта функция определяет число частиц в фазовом объёме $d^3\kappa d^3x$, то есть она является начальной фазовой плотностью. В процессе эволюции фазовая плотность становится неоднородной в пространстве; например, она разная в галактиках и в пустотах. Из теоремы Лиувилля следует, что фазовая плотность бесстолкновительного набора частиц

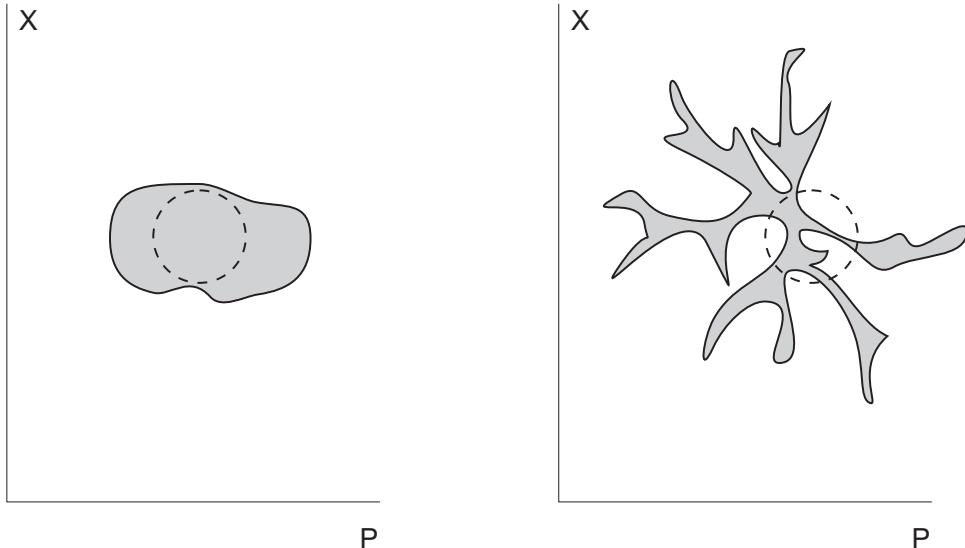


Рис. 8.3: Если в начале (левый рисунок) частицы занимали некоторую конечную область в фазовом пространстве, то в процессе эволюции объём этой области не изменяется (правый рисунок). Однако усреднённая (скажем, по объёму, обозначенному кружком) фазовая плотность меняется со временем, уменьшаясь в наиболее заселённых областях.

с течением времени не меняется, меняются лишь области фазового пространства, занимаемые соответствующими частицами. Это точное утверждение справедливо, однако, лишь на микроскопическом уровне. В реальности интерес представляет фазовая плотность, усреднённая по большим (по микроскопическим меркам) областям фазового объёма. Такая усреднённая (coarse grained) фазовая плотность, для которой в этом разделе мы сохраняем обозначение $f(\kappa, \mathbf{x})$, вообще говоря, уменьшается в областях фазового пространства, где она велика, и наоборот, нарастает в малозаселённых областях, см. рис. 8.3. Таким образом, имеет место неравенство

$$f(\kappa, \mathbf{x}, t) \leq \max_\kappa f_i(\kappa) . \quad (8.97)$$

Это свойство имеет место и в расширяющейся Вселенной (здесь существенно, что элемент фазового объёма $d^3Pd^3l = (d^3\kappa/a^3)(a^3d^3x)$ не зависит от времени), и в присутствии крупномасштабных (опять-таки по микроскопическим меркам) гравитационных полей. В частности, усреднённая фазовая плотность частиц тёмной материи в сформировавшихся объектах должна удовлетворять неравенству (8.97). В дальнейшем в этом разделе мы будем полагать $a_0 = 1$, так что $\kappa = \mathbf{P}$ — это современный импульс частицы тёмной материи, $f(\mathbf{P}, \mathbf{x}, t_0)$ — современная фазовая плотность, а $f_i(\mathbf{P})$ совпадает с современной фазовой плотностью среды в (нереалистической) однородной Вселенной.

С другой стороны, наблюдательные данные позволяют оценить для ряда галактик величину

$$Q = \frac{\rho}{\langle v_{||}^2 \rangle^{3/2}} ,$$

где ρ — плотность массы в центральной области (определенная по гравитационному потенциалу), $\langle v_{||}^2 \rangle$ — усреднённый квадрат скорости звёзд вдоль направления наблюдения в этой же области. Интерес, как мы сейчас увидим, представляют наибольшие

измеренные значения величины Q . Они относятся к карликовым галактикам и составляют [28]

$$Q \equiv \mathcal{Q} \cdot 1 \frac{M_\odot/\text{пк}^3}{(\text{км}/\text{с})^3} = (5 \cdot 10^{-3} - 2 \cdot 10^{-2}) \frac{M_\odot/\text{пк}^3}{(\text{км}/\text{с})^3}. \quad (8.98)$$

Основную массу в карликовых галактиках обеспечивает тёмная материя, так что $\rho = \rho_{DM} = mn$, где n — плотность числа частиц тёмной материи. Для этих объектов хорошо работает приближение сферической симметрии, поэтому $\langle v_{||}^2 \rangle = (1/3)\langle v^2 \rangle$. Далее, для них оправдано предположение о том, что дисперсии скоростей звёзд и частиц тёмной материи совпадают (и определяются из теоремы вириала). Таким образом, имеем

$$Q \simeq 3^{3/2} \frac{\rho_{DM}}{\langle v_{DM}^2 \rangle^{3/2}} = 3^{3/2} m^4 \frac{n}{\langle P^2 \rangle^{3/2}}.$$

Отношение $n/\langle P^2 \rangle^{3/2}$ оценивает фазовую плотность частиц тёмной материи в галактике — количество частиц, отнесённое к произведению занимаемых объёмов обычного и импульсного пространства. Итак, для галактики можно записать

$$f(\mathbf{P}, \mathbf{x}) \simeq \frac{Q}{3^{3/2} m^4}.$$

Неравенство (8.97) даёт теперь ограничение на массу частиц тёмной материи (ограничение типа Тримэйна–Ганна):

$$m^4 \gtrsim \frac{Q}{3^{3/2} \max f_i}. \quad (8.99)$$

Конкретный вид этого ограничения зависит от начальной функции распределения $f_i(P)$ (перенесённой в современную эпоху), то есть от механизма генерации тёмной материи, и в целом ряде случаев является вполне содержательным. Отметим, что в случае, когда f_i достигает максимального значения, разрешенного для фермионов принципом Паули, $f_i = g_x/(2\pi)^3$ (g_x — число спиновых состояний частиц тёмной материи), это ограничение по-существу совпадает с ограничением, обсуждавшимся в разделе I.9.1. Многие механизмы генерации приводят к меньшим значениям начальных функций распределения, и ограничения из (8.99) оказываются сильнее приведённых в I.9.1.

Рассмотрим для примера фермионную тёмную материю с начальной функцией распределения тепловой формы (8.83). В этом случае ограничение (8.99) даёт

$$m^3 \gtrsim \frac{12\pi}{3^{3/2}} T_{0,eff}^3 \frac{Q}{\Omega_{DM} \rho_c},$$

и с учётом (8.78) имеем численно

$$m \gtrsim 6 \text{ кэВ} \cdot \left(\frac{0.2}{\Omega_{DM}} \right)^{1/3} \left(\frac{\mathcal{Q}}{5 \cdot 10^{-3}} \right)^{1/3} \left(\frac{g_*(T_d)}{43/4} \right)^{1/3}, \quad (8.100)$$

где величина \mathcal{Q} определена (8.98), и в качестве характерного значения эффективного числа степеней свободы мы выбрали величину g_* непосредственно перед отщеплением нейтрино.

Ограничение (8.100) работает почти буквально для тёмной материи, состоящей из стерильных нейтрино ν_s , если их рождение в ранней Вселенной происходит за

счёт нерезонансных переходов обычных нейтрино ν . Такие переходы возможны при небольшом $(\nu - \nu_s)$ -смешивании, и происходят они незадолго до отщепления нейтрино. Поэтому все множители в правой части (8.100) близки к единице, и ограничение имеет вид [29, 30] $m_{\nu_s} \gtrsim 6$ кэВ. Похожие ограничения имеются и на массы других частиц — кандидатов на роль тёплой тёмной материи, например, гравитино, см. [22].

Отметим, что ограничения на уровне, сравнимом с (8.100), и даже несколько более сильные, получаются и из изучения структур уже упоминавшимся методом Лайман- α леса, см. например, [31]. Подчеркнём в этой связи, что ограничения, рассмотренные в этом разделе, носят весьма консервативный характер, поскольку они не учитывают то обстоятельство, что максимум усреднённой функции распределения в действительности *убывает* в процессе эволюции. В будущем, по мере развития представлений о формировании структур в моделях с тёплой тёмной материей, эти ограничения будут усиливаться, а в перспективе, возможно, обрисованный здесь подход позволит получить не просто ограничение, а оценку для массы частиц тёмной материи, если она действительно тёплая.

В заключение раздела упомянем, что при нерезонансном механизме рождения стерильных нейтрино в ранней Вселенной космологически существенными являются лишь два параметра модели — масса стерильного нейтрино и угол $(\nu_s - \nu)$ -смешивания. Одна из их комбинаций определяется из значения современной плотности тёмной материи, так что неизвестной остаётся только масса m . С ней однозначно связано время жизни стерильного нейтрино, каналом распада которого является $\nu_s \rightarrow \nu\gamma$. Такие распады тёмной материи в современной Вселенной должны были бы приводить к появлению диффузного γ -фона, который мог бы быть наблюдаем с помощью рентгеновских телескопов. Отсутствие этого эффекта даёт ограничение *сверху*, $m_{\nu_s} < 4$ кэВ [32]. Совместно с ограничением (8.100) это представляет собой серьёзную трудность для данного простого механизма генерации стерильных нейтрино как тёмной материи.

8.4 Особенности эволюции нейтринной компоненты

Нейтрино дают заметный вклад в полную плотность энергии на всех стадиях эпохи горячего Большого взрыва. Поэтому они довольно существенно влияют на эволюцию космологических возмущений. Отщепление нейтрино от барион-электрон-фотонной плазмы происходит при температурах порядка 2 – 3 МэВ, см. раздел I.7.1, так что эффекты, связанные с затуханием Ландау, проявляются для нейтрино в полной мере.

Напомним (см. раздел I.7.2 и формулу (8.78)), что до аннигиляции e^+e^- пар температура нейтрино T_ν совпадает с температурой фотонов, а после становится меньше, и в приближении мгновенного отщепления нейтрино она связана с температурой фотонов T соотношением

$$T_\nu(t) = \left(\frac{4}{11}\right)^{1/3} T(t). \quad (8.101)$$

При этом однородная часть функции распределения нейтрино $f_\nu^{(0)}$ с хорошей точностью совпадает с распределением Ферми–Дирака. Плотность числа нейтрино падает как a^{-3} и в современную эпоху равна

$$n_{\nu,0} = 112 \text{ см}^{-3} \quad (8.102)$$

для каждого из трёх типов активных нейтрино.

Как показывают детальные исследования, приближение мгновенного отщепления нейтрино, приводящее к соотношениям (8.101) и (8.102), оказывается весьма неплохим. В действительности в период e^+e^- -аннигиляции электронные нейтрино из высокоэнергичной части спектра ещё продолжают взаимодействовать с электронами и позитронами. В результате небольшая часть энергии переходит в “подогрев” нейтрино,

их спектр в высоконергичной части несколько искажается и начинает (правда, весьма слабо) отличаться от теплового. Фотоны при этом подогреваются чуть меньше, чем в приближении мгновенного отщепления. Есть и другие, более тонкие поправки. Суммарно эти эффекты учитывают так: вклад нейтрино в полную плотность энергии записывают стандартным образом, используя величину (8.101) в качестве температуры нейтрино, а поправки учитывают в эффективном числе типов нейтрино N_ν , которому пропорционален вклад нейтринной компоненты в тензор энергии-импульса, и которое оказывается равным $N_\nu \simeq 3.046$. Как видим, приближение мгновенного отщепления, для которого $N_\nu = 3$, действительно хорошо работает. Отметим, что другим источником, который мог искажить спектр реликтовых нейтрино и изменить их эффективное число, является возможная лептонная асимметрия Вселенной, приводящая к ненулевым химическим потенциалам нейтрино, что обсуждалось нами в Главах I.6 и I.1. В этой ситуации (в особенности если есть относительно легкие стерильные нейтрино) осцилляции нейтрино в первичной плазме в эпоху их отщепления могут существенно искажить нейтринные спектры и изменить соотношение между количеством нейтрино разных массовых состояний. Впрочем, пока никаких экспериментальных указаний на заметную лептонную асимметрию Вселенной не обнаружено.

На радиационно-доминированной стадии после отщепления нейтрино и завершения e^+e^- -аннигиляции выполняется

$$\rho_\nu = \rho \cdot R_\nu ,$$

где

$$R_\nu \equiv \frac{\rho_\nu}{\rho} = \frac{\rho_\nu}{\rho_\nu + \rho_\gamma} = \frac{1}{1 + \frac{8}{7N_\nu} \left(\frac{T_\gamma}{T_\nu} \right)^4} , \quad (8.103)$$

где N_ν — эффективное число поколений нейтрино. Для случая активных нейтрино Стандартной модели $N_\nu \simeq 3.05$ (см. выше), поэтому численно доля отщепившихся нейтрино в полной плотности энергии на радиационно-доминированной стадии действительно довольно велика и составляет около 40%, точнее

$$R_\nu \simeq 0.41 . \quad (8.104)$$

Несколько меньший вклад дают нейтрино на пылевидной стадии. Напомним, что из данных экспериментов по нейтринным осцилляциям следует, что по крайней мере два из трёх типов нейтрино должны быть массивными, причём для их масс справедлива следующая оценка (см. Приложение I.B):

$$m_1 \geq m_{sol} \simeq 0.009 \text{ эВ} , \quad m_2 \geq m_{atm} \simeq 0.05 \text{ эВ} . \quad (8.105)$$

Третье нейтрино может иметь очень маленькую массу и даже вообще быть безмассовым (в последнем случае неравенства (8.105) насыщаются на границе). С другой стороны, не исключено, что массы нейтрино заметно превышают 0.05 эВ; в этом случае все три нейтрино должны быть почти вырождены по массам. Космологическое ограничение на сумму масс нейтрино, источник которого мы будем обсуждать в разделе 8.4.3, составляет

$$\sum m_{\nu_i} < 0.2 - 1.0 \text{ эВ} , \quad (8.106)$$

в зависимости от того, какие космологические параметры считаются фиксированными. Вспоминая, что критическая плотность для современной Вселенной равна $5.6 \cdot 10^{-6} \text{ ГэВ} \cdot \text{см}^{-3}$, а $\Omega_M = 0.24$, найдём с использованием (8.102):

$$\begin{aligned} \Omega_\nu &= \frac{n_{\nu 0} \sum m_{\nu_i}}{\rho_c} = 0.001 - 0.02 , \\ \frac{\Omega_\nu}{\Omega_M} &= 0.005 - 0.08 , \end{aligned} \quad (8.107)$$

где левые границы интервалов соответствуют нейтрино с массами $(0, m_{sol}, m_{atm})$, а правые — вырожденным нейтрино с суммой их масс, равной 1 эВ.

Нейтрино становятся нерелятивистскими при красном смещении $z = z_{nr}$, когда выполнено условие (численный коэффициент здесь несколько условен и выбран исходя из того, что средняя энергия ультрарелятивистского фермиона при температуре T равна $3.15T$):

$$m_\nu \simeq 3.15 T_\nu(z) = 3.15 T_{\nu,0} \cdot (1 + z_{nr}) = 3.15 \left(\frac{4}{11} \right)^{1/3} T_0 \cdot (1 + z_{nr}) , \quad (8.108)$$

что для масс m_{sol} и m_{atm} даёт красные смещения

$$z_{1,nr} = 16 \quad \text{и} \quad z_{2,nr} = 94 .$$

Максимально разрешенная масса нейтрино, соответствующая ограничению (8.106), составляет 0.33 эВ; нейтрино с такой массой становятся нерелятивистскими при

$$z_{nr,max} \simeq 630 . \quad (8.109)$$

Все эти красные смещения соответствуют пылевидной стадии. Таким образом, нейтрино Стандартной модели дают вклад в *горячую компоненту* тёмной материи.

8.4.1 Ранние стадии эволюции возмущений: релятивистские нейтрино

Начнём с описания эволюции возмущений в раннюю эпоху, когда нейтрино являются ультрарелятивистскими (эффективно — безмассовыми) и не взаимодействуют ни с плазмой, ни между собой. В этом случае вклады в однородную часть тензора энергии-импульса обусловлены плотностью энергии ρ_ν и давлением $p_\nu = \rho_\nu/3$ однородного нейтринного газа. Вклады, обусловленные флуктуациями, имеют вид (8.58):

$$\delta\rho_\nu(\eta, \mathbf{x}) = 3\delta p_\nu(\mathbf{x}) = \frac{1}{a^4} \int \kappa^3 d\kappa d\mathbf{n} f_\nu^{(0)}(\kappa) \cdot \delta f_\nu(\boldsymbol{\kappa}; \eta, \mathbf{x}) , \quad (8.110a)$$

$$\delta T_i^0(\eta, \mathbf{x}) = -(\rho + p)v_i(\eta, \mathbf{x}) = -\frac{1}{a^4} \int \kappa^3 d\kappa d\mathbf{n} n_i f_\nu^{(0)}(\kappa) \cdot \delta f_\nu(\boldsymbol{\kappa}; \eta, \mathbf{x}) , \quad (8.110b)$$

$$\Pi_j^i(\eta, \mathbf{x}) = \frac{1}{a^4} \int \kappa^3 d\kappa d\mathbf{n} \cdot \left(n_i n_j - \frac{1}{3} \delta_{ij} \right) \cdot f_\nu^{(0)}(\kappa) \cdot \delta f_\nu(\boldsymbol{\kappa}; \eta, \mathbf{x}) , \quad (8.110c)$$

где $\boldsymbol{\kappa}$ — по-прежнему конформный импульс частицы, и $\mathbf{n} = \boldsymbol{\kappa}/\kappa$. Эволюция возмущений нейтринной компоненты определяется уравнением Больцмана (8.57) с нулевым интегралом столкновений, которое в релятивистском случае принимает вид

$$-\left(\Psi' + \mathbf{n} \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{x}} \right) \cdot \frac{\partial \ln f_\nu^{(0)}}{\partial \ln \kappa} + \delta f'_\nu + \mathbf{n} \frac{\partial \delta f_\nu}{\partial \mathbf{x}} = 0 . \quad (8.111)$$

Это уравнение полезно переписать, перейдя в импульсное представление по переменной \mathbf{x} ,

$$\delta f(\boldsymbol{\kappa}, \mathbf{x}, \eta) \rightarrow \delta f(\boldsymbol{\kappa}, \mathbf{k}, \eta) e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}} , \quad \Phi(\mathbf{x}, \eta) \rightarrow \Phi(\mathbf{k}, \eta) e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}} , \quad \text{и т.д. .}$$

Как обычно, вектор \mathbf{k} имеет смысл конформного импульса волны возмущения, распространяющейся в среде. Уравнение (8.111) в импульсном представлении имеет вид

$$-(\Psi' + i\mathbf{k}\mathbf{n}\Phi) \cdot \frac{\partial \ln f_\nu^{(0)}}{\partial \ln \kappa} + \delta f'_\nu + i\mathbf{k}\mathbf{n}\delta f_\nu = 0 . \quad (8.112)$$

Отметим, что в уравнении (8.111) гравитационные потенциалы обусловлены не только возмущениями нейтрино, но и возмущениями других компонент космической среды; нейтрино взаимодействуют с другими частицами за счёт гравитационных сил.

Однородная часть линейного уравнения (8.111) не зависит от κ , а неоднородная часть зависит от κ только через функцию $f_\nu^{(0)}(\kappa)$, явно не зависящую от времени. Таким образом, зависимость от κ в неоднородной части уравнения (8.111) раз и навсегда фиксирована видом функции $f_\nu^{(0)}$ — распределением Ферми–Дирака с температурой T_ν . По этой причине в ультрарелятивистском случае возмущения нейтрино можно описывать как локальные возмущения эффективной температуры нейтрино,

$$f_\nu \propto \frac{1}{e^{\frac{\kappa}{a(T_\nu + \delta T_\nu)}} + 1} , \quad \delta T_\nu = \delta T_\nu(\mathbf{n}; \eta, \mathbf{x}) .$$

Из этой формулы следует, что связь величины δT_ν с δf_ν в используемых нами обозначениях (8.53) имеет вид:

$$\delta f_\nu(\kappa; \eta, \mathbf{x}) = -\frac{\partial \ln f_\nu^{(0)}}{\partial \ln \kappa} \cdot \frac{\delta T_\nu(\mathbf{n}; \eta, \mathbf{x})}{T_\nu} .$$

Мы здесь не будем использовать “температурный” формализм, поскольку, в отличие от фотонов, непосредственно измерить анизотропию реликтового нейтринного излучения не представляется возможным.

Рассмотрим сначала моды за горизонтом на радиационно-доминированной стадии, иначе говоря, обсудим начальные условия эволюции скалярных возмущений. В своём рассмотрении мы ограничимся случаем адиабатических возмущений. Как мы знаем из раздела 5.2, для адиабатической моды за горизонтом выполняется

$$\delta_\nu = \delta_\gamma = -2\Phi , \quad (8.113)$$

при этом возмущения плотности энергии не зависят от времени и пропорциональны также постоянным во времени возмущениям метрики. Связь между возмущениями плотности энергии и метрики найдёт из уравнений Эйнштейна в скалярном секторе (8.59). Предварительно заметим, что из уравнения (8.59b) в случае не зависящих от времени потенциалов, $\Psi' = \Phi' = 0$, следуют выражения для скоростей нейтринной и фотонной компонент,

$$v_\nu = v_\gamma = -\frac{1}{2}\eta\Phi . \quad (8.114)$$

Здесь мы использовали тот факт, что на радиационно-доминированной стадии справедливы соотношения $2\pi G(\rho + p) = H^2$, $aH = \eta^{-1}$. Равенство $v_\nu = -\frac{1}{2}\eta\Phi$ можно получить и из уравнения Власова (8.112). Для этого разложим возмущение функции распределения δf_ν по $(\mathbf{k}\mathbf{n})$:

$$\delta f_\nu = \delta f_{\nu 0} + \mathbf{k}\mathbf{n}\delta f_{\nu 1} + (\mathbf{k}\mathbf{n})^2\delta f_{\nu 2} + \dots$$

Для адиабатической моды возмущений выполняется

$$\delta f_{\nu 1}, \delta f_{\nu 2}, \dots \rightarrow 0 \quad \text{при } \eta \rightarrow 0 , \quad (8.115)$$

а $\delta f_{\nu 0}$ стремится в этом пределе к константе, не зависящей от κ . Действительно, в случае адиабатических возмущений свойства среды одинаковы во всех областях

пространства и совпадают со свойствами невозмущённой среды с точностью до локальной задержки ϵ , см. (5.9), (5.10). Иными словами, на поверхностях постоянной плотности энергии возмущения всех компонент среды вообще отсутствуют в пределе $\eta \rightarrow 0$, а отличными от нуля являются лишь возмущения метрики⁷. Поэтому в любой калибровке начальная функция распределения (в данном случае речь идёт о нейтрино) во всех точках пространства пропорциональна $f_\nu^{(0)}$ с коэффициентом пропорциональности, не зависящим от κ (но зависящим от \mathbf{x}). Отсюда и следуют соотношения (8.115).

Для начальных данных (8.115) решение уравнения (8.112) при малых η нетрудно найти явно. В первом неисчезающем порядке по η получим

$$\delta f_{\nu 1} = -i \left(\delta f_{\nu 0} - \Phi \frac{\partial \ln f_\nu^{(0)}}{\partial \ln \kappa} \right) \eta, \quad \delta f_{\nu 2} = -\frac{1}{2} \left(\delta f_{\nu 0} - \Phi \frac{\partial \ln f_\nu^{(0)}}{\partial \ln \kappa} \right) \eta^2.$$

Интегралы, входящие в (8.110b) и (8.110c) теперь можно вычислить с использованием соотношений

$$\langle n_i n_j \rangle = \frac{1}{3} \delta_{ij}, \quad \langle n_i n_j n_l n_m \rangle = \frac{1}{15} (\delta_{ij} \delta_{lm} + \delta_{il} \delta_{jm} + \delta_{im} \delta_{jl}),$$

где скобки обозначают усреднение по углам. В результате получим

$$-(\rho_\nu + p_\nu) v_{\nu i} = \frac{ik_i}{3} (\delta \rho_\nu + 4\Phi \rho_\nu) \eta \quad (8.116)$$

$$\Pi_{ij} = -\frac{1}{15} \left(k_i k_j - \frac{1}{3} \delta_{ij} \right) (\delta \rho_\nu + 4\Phi \rho_\nu) \eta^2 \quad (8.117)$$

Первое из этих равенств действительно сводится к (8.114) с учётом (8.113). Кроме того, используем определение потенциала анизотропных напряжений π (см. Приложение B): в скалярном секторе

$$\Pi_{ij} = (p + \rho) \left(-\frac{1}{2} \delta_{ij} + \frac{3}{2} \frac{\partial_i \partial_j}{\Delta} \right) \pi.$$

Начальное условие для потенциала анизотропных напряжений получим из (8.117):

$$\pi_\nu = -\frac{1}{15} k^2 \eta^2 \Phi. \quad (8.118)$$

Теперь мы наконец можем найти начальное условие для гравитационного потенциала Ψ . Используем для этого уравнение (8.59d). На радиационно-доминированной стадии после отщепления нейтрино выполняется

$$\rho_\nu + p_\nu = \frac{4}{3} \rho_\nu = \frac{4}{3} \rho \cdot R_\nu,$$

где параметр R_ν определён в (8.103). Выражая из уравнения Фридмана полную плотность энергии ρ через параметр Хаббла, получим из (8.59d) уравнение на потенциалы, генерируемые возмущениями нейтринной компоненты,

$$\Delta(\Phi + \Psi) = -6a^2 H^2 R_\nu \pi_\nu = -\frac{6}{\eta^2} R_\nu \pi_\nu.$$

⁷Отметим, что мы здесь используем очевидное обобщение определения адиабатической моды на случай среды, не являющейся идеальной жидкостью.

Подставляя в это уравнение начальное условие для потенциала анизотропных напряжений (8.118), найдём нетривиальную связь между амплитудами гравитационных потенциалов для адиабатической моды за горизонтом:

$$\Psi = - \left(1 + \frac{2}{5} R_\nu \right) \Phi .$$

С учётом (8.104) это даёт небольшое различие в абсолютной величине гравитационных потенциалов,

$$\Psi = -1.164 \Phi .$$

Данный эффект приводит к ряду экспериментальных следствий; в частности, “анизотропия” нейтрино влияет на картину анизотропии реликтового излучения, причём уже имеются первые экспериментальные свидетельства этого явления [33].

▷ *Задача 15. Найти начальные условия для адиабатических возмущений, входящих под горизонт на пылевидной стадии до эпохи рекомбинации.*

Перейдём теперь к обсуждению поведения возмущений нейтринной компоненты под горизонтом. Начнём с радиационно-доминированной стадии. На этой стадии гравитационные потенциалы для мод под горизонтом убывают со временем (см., например, (4.13); мы сейчас убедимся, что и потенциал Ψ уменьшается со временем), поэтому уравнение Власова (8.112) сводится к однородному уравнению Лиувилля. Решение последнего описывает распространение волн без искажений,

$$\delta f_\nu = \delta f_\nu(\boldsymbol{\kappa}; \mathbf{k}) \cdot e^{-i\eta \mathbf{k}\mathbf{n}} = \delta f_\nu(\boldsymbol{\kappa}; \mathbf{k}) \cdot e^{-ik\eta \cos \theta} , \quad (8.119)$$

где θ — угол между векторами \mathbf{k} и $\boldsymbol{\kappa}$. С учётом того, что $\rho_\nu, p_\nu \propto a^{-4}$, получим после интегрирования по углам в (8.110), что при $k\eta \gg 1$ возмущения плотности энергии, а также потенциалы скоростей и анизотропных напряжений убывают со временем:

$$\delta_\nu \propto \frac{\sin k\eta}{k\eta} , \quad v_\nu \propto \frac{\cos k\eta}{k\eta} , \quad \pi_\nu \propto \frac{\sin k\eta}{k\eta} .$$

Этим возмущения нейтринной компоненты отличаются от возмущений идеальной жидкости, состоящей из релятивистских частиц: в последнем случае возмущения плотности энергии на радиационно-доминированной стадии постоянны по амplitude. Так проявляется эффект затухания Ландау на радиационно-доминированной стадии.

Теперь мы можем аккуратно обосновать возможность отбросить гравитационные потенциалы в уравнении (8.112). Из найденного только что решения видно, что вклады нейтринной компоненты в правые части уравнений Эйнштейна (8.59) падают как $a^{-2}\eta^{-1} \propto \eta^{-3}$. Поэтому потенциал Φ определяется возмущениями барион-электрон-фотонной компоненты и его амплитуда падает как η^{-2} , а потенциал Ψ с течением времени становится равным Φ . Их вклады в уравнение (8.112) действительно пренебрежимо малы при $k\eta \gg 1$.

Рассмотрим наконец поведение нейтринных возмущений под горизонтом на пылевидной стадии, всё еще считая нейтрино релятивистскими. В этом случае во Вселенной имеются постоянные во времени гравитационные потенциалы, обусловленные возмущениями нерелятивистской материи. Поэтому решение уравнения (8.112) имеет вид

$$\delta f_\nu = \Phi \cdot \frac{\partial \ln f_\nu^{(0)}}{\partial \ln \kappa} + \text{const} \cdot e^{-i\mathbf{k}\mathbf{n}\eta} .$$

Соответственно, относительное возмущение плотности энергии имеет часть, пропорциональную постоянному гравитационному потенциалу:

$$\delta_\nu = -4\Phi + \text{const} \cdot \frac{\sin(k\eta)}{k\eta}. \quad (8.120)$$

С течением времени δ_ν асимптотически приближается к (-4Φ) , что отвечает стационарной равновесной ситуации, когда давление релятивистской компоненты полностью компенсирует гравитационный потенциал. Таким образом, и на пылевидной стадии неоднородности в релятивистской нейтринной компоненте подавлены по сравнению с другими неоднородностями: возмущения холдной тёмной материи, как и возмущения барионов после рекомбинации, на этой стадии растут линейно с масштабным фактором.

Отметим, что в нашем рассмотрении пылевидной стадии мы пренебрегали влиянием нейтринной компоненты на эволюцию самих гравитационных потенциалов и, как следствие, на эволюцию возмущений остальных компонент среды. Мы обсудим это влияние позже, а здесь скажем, что обратное влияние этих эффектов на саму нейтринную компоненту количественно невелико, а потому при приближенном рассмотрении эволюции нейтринной компоненты можно считать гравитационные потенциалы и остальные компоненты среды не зависящими от динамики нейтрино.

В заключение этого раздела опишем эффективный метод, позволяющий изучать решения уравнения Власова аналитически на качественном (а иногда и количественном) уровне и, главное, решать это уравнение вместе с уравнениями Эйнштейна численно. Переходя в импульсное пространство, введём следующую величину, характеризующую анизотропные свойства возмущений,

$$F_\nu(\mathbf{n}; \eta, \mathbf{k}) = \frac{4\pi}{\rho_\nu a^4} \int \kappa^3 d\kappa f_\nu^{(0)}(\kappa) \cdot \delta f_\nu(\boldsymbol{\kappa}; \eta, \mathbf{x}) \cdot e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}} d^3\mathbf{x}, \quad (8.121)$$

где \mathbf{n} — по-прежнему единичный вектор в направлении $\boldsymbol{\kappa}$. Умножив уравнение (8.112) на $f_\nu^{(0)}$ и проинтегрировав результат по переменной κ с весом κ^3 , получим уравнение на функцию $F_\nu(\mathbf{k}, \mathbf{n}, \eta)$:

$$4(\Psi' + i\mathbf{k}\mathbf{n}\Phi) + F'_\nu + i\mathbf{k}\mathbf{n}F_\nu = 0. \quad (8.122)$$

Формальное решение этого уравнения можно записать в виде:

$$F_\nu(\mathbf{n}; \eta, \mathbf{k}) = e^{-i\mathbf{k}\mathbf{n}\eta} F_\nu(\mathbf{n}; 0, \mathbf{k}) - 4 \int_0^\eta e^{-i\mathbf{k}\mathbf{n}(\eta-\eta')} (i\mathbf{k}\mathbf{n}\Phi + \Psi') d\eta' \quad (8.123)$$

Отметим, что в пренебрежении гравитационными потенциалами уравнение (8.122) становится однородным, и его решением является первое слагаемое в (8.123), ср. с (8.119). Первое слагаемое под знаком интеграла в (8.123) можно проинтегрировать по частям, что даёт

$$F_\nu(\mathbf{n}; \eta, \mathbf{k}) = e^{-i\mathbf{k}\mathbf{n}\eta} [F_\nu(\mathbf{n}; 0, \mathbf{k}) + 4\Phi(0)] - 4\Phi(\eta) + 4 \int_0^\eta e^{-i\mathbf{k}\mathbf{n}(\eta-\eta')} (\Phi' - \Psi') d\eta'. \quad (8.124)$$

Из такого представления решения уравнения (8.122) видно, что для не зависящих от времени гравитационных потенциалов F_ν эффективно (в смысле интегралов по \mathbf{n} с гладкими функциями) стремится к (-4Φ) при больших временах, ср. с (8.120).

Величину $F_\nu(\mathbf{n}; \eta, \mathbf{k})$ удобно разложить в ряд по полиномам Лежандра по переменной $\mathbf{k}\mathbf{n}/k = \cos\theta$. Запишем

$$F_\nu(\mathbf{n}; \eta, \mathbf{k}) = \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) (-i)^l \cdot F_{\nu,l}(\eta, \mathbf{k}) \cdot P_l\left(\frac{\mathbf{k}\mathbf{n}}{k}\right). \quad (8.125)$$

Выбор числовых коэффициентов в разложении (8.125) обусловлен нормировкой полиномов Лежандра, см. (F.32). Кроме того, полезно иметь в виду явный вид первых полиномов Лежандра (F.26), (F.27), а также рекуррентные соотношения (F.24) и (F.25). Интерес представляют, в частности, относительная флюктуация

плотности энергии нейтрино δ_ν , потенциал скоростей v_ν и потенциал анизотропных напряжений π_ν . Получим для них из (8.110)

$$\begin{aligned}\delta_\nu &= \frac{1}{4\pi} \int d\mathbf{n} F_\nu = \frac{2\pi}{4\pi} \int_{-1}^1 dx P_0(x) F_\nu = F_{\nu,0}, \\ v_\nu &= -i \frac{3}{16\pi} \int d\mathbf{n} \frac{\mathbf{k}\mathbf{n}}{k^2} F_\nu = -i \frac{6\pi}{16\pi k} \int_{-1}^1 dx P_1(x) F_\nu = -\frac{3}{4k} F_{\nu,1}, \\ \pi_\nu &= \frac{3}{16\pi} \int d\mathbf{n} \left(\left(\frac{\mathbf{k}\mathbf{n}}{k} \right)^2 - \frac{1}{3} \right) F_\nu = \frac{6\pi}{16\pi} \int_{-1}^1 dx \frac{2}{3} P_2(x) F_\nu = -\frac{1}{2} F_{\nu,2}.\end{aligned}$$

Наконец, разложение (8.121), (8.125) подставим в уравнение Власова для линейных возмущений (8.122). Отметим, что из этого уравнения видно, что эволюция функции F_ν зависит не от полного вектора \mathbf{n} , а от его проекции на вектор \mathbf{k} , что обусловлено однородностью и изотропностью фонового решения. Именно поэтому использование представления через полиномы Лежандра (8.125) оказывается удобным, поскольку оно “проходит” через уравнение (8.122), превращая его в систему линейных уравнений первого порядка по конформному времени для моментов $F_{\nu,l}(k, \eta)$. Чтобы получить эту систему, предварительно запишем уравнение Власова (8.122) в следующем виде (при этом используются формулы (F.26), (F.27)):

$$4(\Psi' \cdot P_0(\cos \theta) + ik\Phi P_1(\cos \theta)) + F'_\nu + ikP_1(\cos \theta) \cdot F_\nu = 0.$$

Подставляя в это уравнение разложение (8.125) и переразлагая последнее слагаемое по полиномам Лежандра с использованием рекуррентного соотношения (F.25), получим из условия зануления коэффициентов при каждом полиноме Лежандра следующую цепочку уравнений:

$$\delta'_\nu = \frac{4}{3} k^2 v_\nu - 4\Psi', \quad (8.126a)$$

$$v'_\nu = -\Phi - \frac{1}{4} \delta_\nu - \pi_\nu, \quad (8.126b)$$

$$\pi'_\nu = \frac{4}{15} k^2 v_\nu + \frac{3}{10} k F_{\nu,3}, \quad (8.126c)$$

$$F'_{\nu,l} = k \cdot \left(\frac{l}{2l+1} F_{\nu,l-1} - \frac{l+1}{2l+1} F_{\nu,l+1} \right), \quad l = 3, 4, \dots \quad (8.126d)$$

Отметим, что первые два уравнения цепочки, (8.126a) и (8.126b), сводятся к уравнению непрерывности (8.60) и уравнению Эйлера (8.61), где для нейтринной компоненты следует положить $p_\nu = \rho_\nu/3$.

► Задача 16. Получить цепочку уравнений (8.126).

Из цепочки (8.126) вполне очевидны выражения (8.116) и (8.117) для нейтринных возмущений глубоко под горизонтом, а также поведение высших мультиполей в этом режиме: $F_{\nu,l}(\eta) \propto \eta^l$ при $\eta \rightarrow 0$. Обсудим динамику мультиполей $F_{\nu,l}$ после захода под горизонт, анализируя качественно цепочку уравнений (8.126). Амплитуды старших мультиполей в первые моменты времени начинают расти в силу перераспределения интенсивности от младших мультиполей, чьи амплитуды, наоборот, начинают падать. На этой “волне интенсивностей” амплитуда старших мультиполей вначале растёт, а потом падает, поскольку интенсивность переходит к ещё более старшим мультиполям. Для $l > 1$ начальный рост амплитуд старших мультиполей за счёт младших явно виден, если посмотреть на линейную по $k\eta$ эволюцию системы (8.126) с обозначенными нами выше начальными условиями, когда отличен от нуля только самый низший мультиполь (монополь). В этом режиме переход интенсивности обеспечивается тем, что производная старшего мультиполя определяется величиной младшего, $F'_{\nu,l+1} \sim F_{\nu,l}$. В дальнейшем перераспределение интенсивности по мультиполям нарушает иерархию между ними, заложенную начальными условиями на горизонте, $F_{\nu,l}/F_{\nu,l-1} \propto k\eta$. Кроме того, оно приводит к сильному подавлению низших мультиполей, в частности к подавлению флуктуаций плотности нейтрино и скорости нейтринной компоненты. Последний эффект существен с точки зрения поведения нейтринной компоненты в период, когда нейтрино становятся нерелятивистскими.

Роль старших мультиполей как “паразитирующих” на младших можно увидеть на примере монополя δ_ν (относительной флуктуации плотности энергии), который входит только в два первых уравнения полной цепочки для нейтринных мультиполей (8.126). Продифференцировав уравнение (8.126a) по конформному времени и подставив в полученный результат выражение для производной скорости (8.126b), получим уравнение второго порядка на монополь:

$$\delta''_\nu + \frac{k^2}{3} \delta_\nu = -\frac{4k^2}{3} \pi_\nu - \frac{4}{3} k^2 \Phi - 4\Psi''. \quad (8.127)$$

Без учёта вклада потенциала анизотропных напряжений уравнение на монополь полностью совпадало бы с аналогичным уравнением для фотонной компоненты в дорекомбинационную эпоху. Поэтому без учёта этого вклада монополь δ_ν начал бы осциллировать с частотой $k/\sqrt{3}$ и постоянной амплитудой. Потенциал анизотропных напряжений в правой части уравнения (8.127) играет роль “вязкости”: через него уравнение на

δ_ν связано с остальными уравнениями цепочки (8.126), так что интенсивность уходит в старшие мультиполи и амплитуда монополя падает.

Рассмотрим более аккуратно, что происходит с мульти полями после захода под горизонт. Закон эволюции мод $F_{\nu,l}$ можно найти, воспользовавшись формальным решением (8.124). В это решение следует подставить разложение по полиномам Лежандра (8.125) и аналогичное разложение для плоской волны, имеющее вид (см. (F.34))

$$e^{-i\mathbf{k}\mathbf{n}\eta} = \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1)(-i)^l \cdot j_l(k\eta) \cdot P_l\left(\frac{\mathbf{k}\mathbf{n}}{k}\right), \quad (8.128)$$

где j_l — сферические функции Бесселя. Приравнивая в полученном соотношении коэффициенты при одинаковых полиномах Лежандра слева и справа от знака равенства, и учитывая описанные только что начальные условия, получим формальное решение для мультиполей

$$F_{\nu,l}(\eta, \mathbf{k}) = (-2\Phi_{(i)}\delta_{l,0} + 4\Phi_{(i)})j_l(k\eta) - 4\Phi(\eta)\delta_{l,0} + 4 \int_0^\eta d\eta' (\Phi' - \Psi') j_l[k(\eta - \eta')]. \quad (8.129)$$

Из найденного нами формального решения⁸ в пренебрежении потенциалами $\Phi(\eta)$ и $\Psi(\eta)$ на поздних временах видно, что мультиполи (за исключением монополя, $l = 0$) ведут себя с ростом конформного времени как

$$F_{\nu,l} \propto j_l(k\eta). \quad (8.130)$$

Как мы и отмечали, сразу после входа под горизонт для старших мультиполей наблюдается рост. Амплитуда l -го мультиполя достигает максимального значения в момент $\eta \sim l/k$, а потом падает как $1/(k\eta)$. Утверждение про падение амплитуд мультиполей справедливо как на радиационно-доминированной, так и на пылевидной стадии, пока нейтрино остаются релятивистскими.

Точное решение системы (8.126) даёт более сложную зависимость от времени, в особенности на радиационно-доминированной стадии, когда есть влияние нейтрино на гравитационные потенциалы. Качественное поведение, однако, остаётся тем же: на радиационно-доминированной стадии гравитационные потенциалы падают со временем, поэтому их вклад не спасает функции $F_{\nu,l}$ от падения.

8.4.2 Нерелятивистские нейтрино

Перейдём к рассмотрению достаточно поздних стадий космологической эволюции, на которых нейтрино являются нерелятивистскими. Как мы отмечали в начале нашего обсуждения, такая ситуация имеет место на пылевидной стадии начиная с $z = z_{nr}$ и продолжает иметь место сегодня. Поскольку $z_{nr} < z_r$, при $z < z_{nr}$ возмущения барионов и тёмной материи эволюционируют вместе; величины, относящиеся к этой компоненте будем помечать индексом DB (обозначение M мы в этом разделе зарезервируем для суммы вкладов всех нерелятивистских частиц, включая нейтрино).

В соответствии с (8.107) нерелятивистские нейтрино не являются доминирующей компонентой на пылевидной стадии. Поэтому рассмотрение раздела 8.3.1 к ним неприменимо в той части, которая касается вычисления гравитационных потенциалов. Наоборот, в пренебрежении вкладами нейтрино (которое справедливо постольку, поскольку $\Omega_\nu \ll \Omega_M$) гравитационные потенциалы определяются доминирующей компонентой — тёмной материей и барионами. На пылевидной стадии имеем в этом приближении $\Psi = \Phi$, причём Φ не зависит от времени для мод под горизонтом. В длинноволновом приближении формула (8.90) остаётся справедливой, если под $\delta\rho$ и ρ иметь в виду соответствующие величины для нейтринной компоненты. Учитывая зависимость $a \propto t^{2/3}$, получим из (8.90) относительное возмущение

$$\delta_\nu = -\mathbf{k}^2 \Phi \int_{t_*}^t dt' \frac{t' - t_*}{a^2(t')} = -\frac{3}{2} \mathbf{k}^2 \Phi \frac{t^2}{a^2(t)} \quad \text{при } t \gg t_*. \quad (8.131)$$

⁸Решение (8.129) является, вообще говоря, неявным, поскольку в гравитационные потенциалы Φ и Ψ даёт вклад в том числе и нейтринная компонента. Тем не менее, это не мешает установить общие свойства мультиполей.

Используя уравнения Эйнштейна нулевого и первого порядка по возмущениям для доминирующей пылевидной материи, получим отсюда, что при больших временах

$$\delta_\nu = \delta_{DB} , \quad (8.131)$$

то есть нейтринные возмущения в конечном итоге догоняют возмущения тёмной материи и барионов. Напомним, что аналогичный результат мы получили в разделе 7.1.1 для газа барионов, рассматривая последний как идеальную жидкость с уравнением состояния $p = 0$. Разумеется, в полученном соотношении для нерелятивистских нейтрино нет ничего удивительного, поскольку при рассмотрении длинноволновых мод скоростями нейтрино можно пренебречь, а в этом приближении нейтринная среда неотличима от жидкости с $p = 0$.

Отметим, что в нерелятивистском пределе энергия покоя частиц существенно превышает их кинетическую энергию, и величины π_ν и δp_ν оказываются сильно подавлены по сравнению с $\delta\rho_\nu$. Это видно непосредственно из общих формул (8.58). Из-за отсутствия потенциала анизотропных напряжений гравитационные потенциалы совпадают по величине, $\Phi + \Psi = 0$.

Буквально повторяя рассуждение, приводящее к (8.92), мы заключаем, что характерный конформный импульс, выше которого возмущения нейтринной компоненты испытывают затухание Ландау в момент времени t , даётся формулой

$$k_{fs} \sim \frac{H(t)a(t)}{u_\nu(t)} , \quad (8.132)$$

где $u_\nu(t)$ — характерная скорость нейтрино. Для последней будем использовать оценку, следующую из (8.77),

$$u_\nu = 1.6 \frac{T_\nu}{m_\nu} = 1.6 \left(\frac{4}{11} \right)^{1/3} \frac{T_0}{m_\nu} (1 + z(t)) .$$

Численно, для скорости нейтрино получим

$$u_\nu(z) \simeq 0.27 \cdot 10^{-3} (1 + z) \cdot \left(\frac{1 \text{ эВ}}{m_\nu} \right) , \quad (8.133)$$

а для соответствующих конформных импульсов и физических длин волн (8.62) будем иметь

$$\frac{k_{fs}(z)}{a_0} = 1.1 \cdot \frac{\sqrt{\Omega_\Lambda + (1+z)^3 \Omega_M}}{(1+z)^2} \left(\frac{m_\nu}{1 \text{ эВ}} \right) \left(\frac{h}{0.73} \right) \text{Мпк}^{-1} , \quad (8.134)$$

$$\lambda_{fs}(z) = 5.7 \cdot \frac{1+z}{\sqrt{\Omega_\Lambda + (1+z)^3 \Omega_M}} \left(\frac{1 \text{ эВ}}{m_\nu} \right) \left(\frac{0.73}{h} \right) \text{Мпк} . \quad (8.135)$$

Здесь для параметра Хаббла мы воспользовались известным представлением $H^2(z) = H_0^2 \cdot [\Omega_\Lambda + (1+z)^3 \Omega_M]$. Из (8.134) видно, что возмущения сравнительно малых, но всё же космологически интересных масштабов испытывают затухание Ландау до сих пор. Например, для нейтрино с массами 0.3 эВ соответствующая длина волны — около 20 Мпк. Более реалистичная оценка длин волн, для которых возмущения нейтринной компоненты сегодня подавлены, получится при учёте того, что для достижения асимптотики (8.131) требуется несколько хаббловских времён. Полагая для

оценки $z = 1$ в формуле (8.134), получим современную длину волны $\lambda_0 \simeq 45$ Мпк. Неоднородности нейтринной компоненты меньшего масштаба сегодня сильно подавлены.

Сделаем замечание по поводу величины скорости (8.133). Сравнение её с типичными скоростями объектов в структурах (звёзд — в галактиках, галактик — в скоплениях) показывает, что в компактные объекты нейтрино начинают собираться довольно поздно. Так, для типичной крупной галактики скорости объектов составляют порядка $\sim 10^{-3}$, так что нейтрино с массами в доли эВ только в современную эпоху могут начать задерживаться там.

▷ Задача 17. Оценить давление и потенциал анизотропных напряжений нейтринной компоненты в режиме, когда нейтрино являются нерелятивистскими и выполняется соотношение $k \gg k_{fs}$. Указание: воспользоваться общими формулами (8.58), а для вычисления π_ν использовать высшие члены разложения (8.89).

Убедимся в том, что возмущения нейтринной компоненты действительно подавлены за счёт затухания Ландау при $k \gg k_{fs}$. Для этого воспользуемся общим решением уравнения Лиувилля (8.87б) с внешним потенциалом Φ , не зависящим от времени. Это решение имеет вид (8.93), причём начальное значение δf_ν нужно положить равным нулю, поскольку возмущения нейтринной компоненты малы, пока нейтрино являются релятивистскими. В коротковолновом пределе работает формула (8.95), из которой получаем

$$\delta_\nu = \frac{\int d^3U \delta f_\nu}{\int d^3U f_\nu^{(0)}} = -a^2 \langle \frac{1}{U^2} \rangle \Phi = \langle \frac{1}{u_\nu^2} \rangle \Phi .$$

Для сравнения с относительным возмущением плотности энергии доминирующей пылевидной материи δ_{DB} выразим гравитационный потенциал через эту величину. Для мод под горизонтом имеем

$$-\Phi = \frac{1}{k^2} \cdot 4\pi G a^2 \rho_{DB} \delta_{DB} \sim \frac{a^2 H^2}{k^2} \delta_{DB} .$$

Поэтому относительные возмущения нейтрино действительно малы:

$$\frac{\delta_\nu}{\delta_{DB}} \sim \frac{H^2 a^2}{k^2 u_\nu^2} \sim \left(\frac{k_{fs}}{k} \right)^2 .$$

Кроме того, из приведённого вычисления видно, что δ_ν начинает приближаться к δ_{DB} при приближении k к k_{fs} , что ещё раз подтверждает оценку (8.132).

Обсудим вкратце, как модифицируется подход с нейтринными мультипольями для нерелятивистских или слаборелятивистских нейтрино. Поскольку подынтегральные выражения в формулах (8.58) для компонент тензора энергии-импульса в случае массивных нейтрино зависят не только от конформного импульса, но и от времени (через масштабный фактор $a = a(\eta)$), явно взять интегралы по модулю импульса не представляется возможным, и вместо представления (8.121), (8.125) пользуются разложением по полиномам Лежандра с коэффициентами, зависящими от модуля конформного импульса,

$$\delta f_\nu(\kappa, \mathbf{n}; \eta, \mathbf{k}) = \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) (-i)^l \cdot F_{\nu,l}(\kappa; \eta, \mathbf{k}) \cdot P_l\left(\frac{\mathbf{k}\mathbf{n}}{k}\right) . \quad (8.136)$$

В результате для величин, характеризующих неоднородности, имеем

$$\delta \rho_\nu = \frac{4\pi}{a^4} \int \kappa^2 \sqrt{\kappa^2 + m_\nu^2 a^2} \cdot d\kappa f_\nu^{(0)}(\kappa) \cdot F_{\nu,0} , \quad (8.137a)$$

$$\delta p_\nu = \frac{4\pi}{3a^4} \int \frac{\kappa^4 d\kappa}{\sqrt{\kappa^2 + m_\nu^2 a^2}} d\kappa f_\nu^{(0)}(\kappa) \cdot F_{\nu,0} , \quad (8.137b)$$

$$(\rho_\nu + p_\nu) \cdot v_\nu = -\frac{4\pi}{a^4 k} \int \kappa^3 d\kappa f_\nu^{(0)}(\kappa) \cdot F_{\nu,1} , \quad (8.137c)$$

$$(\rho_\nu + p_\nu) \cdot \pi_\nu = -\frac{8\pi}{3a^4} \int \frac{\kappa^4 d\kappa}{\sqrt{\kappa^2 + m_\nu^2 a^2}} f_\nu^{(0)}(\kappa) \cdot F_{\nu,2} . \quad (8.137d)$$

Наконец, подставив разложение (8.136) в уравнение Больцмана (8.57) с $C[f_\nu] \equiv 0$ и сделав преобразование Фурье по пространственной координате \mathbf{x} , получим цепочку уравнений

$$F'_{\nu,0} = -\frac{\kappa k}{\sqrt{\kappa^2 + m_\nu^2 a^2}} F_{\nu,1} + \frac{\partial \ln f_\nu^{(0)}}{\partial \ln \kappa} \Psi', \quad (8.138a)$$

$$F'_{\nu,1} = \frac{\kappa k}{3\sqrt{\kappa^2 + m_\nu^2 a^2}} (F_{\nu,0} - 2F_{\nu,2}) - \frac{k}{3\kappa} \sqrt{\kappa^2 + m_\nu^2 a^2} \cdot \frac{\partial \ln f_\nu^{(0)}}{\partial \ln \kappa} \Phi, \quad (8.138b)$$

$$F'_{\nu,l} = \frac{\kappa k}{(2l+1)\sqrt{\kappa^2 + m_\nu^2 a^2}} (lF_{\nu,l-1} - (l+1)F_{\nu,l+1}), \quad l = 2, 3, \dots \quad (8.138c)$$

Решив уравнения (8.138), следует подставить найденные выражения для $F_{\nu,l}(\mathbf{k}, \eta; \kappa)$, $l = 0, 1, 2$ в формулы (8.137). Вклад возмущений нейтрино компоненты в правую часть уравнений Эйнштейна получается путём вычисления интегралов по модулю конформного импульса κ .

▷ Задача 18. Получить формулы (8.137) и уравнения (8.138).

▷ Задача 19. Найти начальные условия для мод $F_{\nu,l}$.

Отметим, что на практике в случае массивных нейтрино цепочку уравнений для $F_{\nu,l}$, $l = 2, 3, \dots$ можно оборвать, положив для некоторого большого момента $l = l'$ в качестве приближённого решения,

$$F_{\nu,l'+1} \simeq (2l'+1) \frac{\sqrt{\kappa^2 + m_\nu^2 a^2}}{\kappa k \eta} F_{\nu,l'} - F_{\nu,l'-1},$$

подсказываемого рекуррентным соотношением для сферических функций Бесселя (F.3). Это приближение хорошо работает для старших мультиплей, поскольку коэффициенты при старших полиномах Лежандра в разложении (8.136) быстро падают, как только нейтрино становятся нерелятивистскими. На практике и для безмассовых нейтрино соответствующую цепочку уравнений обрывают таким же образом, однако для достижения хорошей точности требуется выбирать довольно большой максимальный момент l' .

8.4.3 Влияние нейтрино на возмущения материи. Космологические ограничения на массы нейтрино

Особенности космологии массивных нейтрино используются при поиске наблюдательных указаний на ненулевые массы нейтрино. Пока это приводит лишь к ограничениям сверху на массы нейтрино, однако уже сегодня эти ограничения сильнее, чем аналогичные ограничения из прямых измерений в лабораторных экспериментах.

Проведём сравнение двух моделей, в одной из которых нейтрино безмассовые, а в другой имеют массы. Для определённости мы будем рассматривать (как мы это и делали в этой главе) случай пространственно-плоской Вселенной, и фиксируем в двух рассматриваемых моделях современное значение параметра Хаббла и величины $\Omega_M = \Omega_{DB} + \Omega_\nu$ и Ω_Λ , при этом количество типов нейтрино в обеих моделях будем считать одинаковым. Параметр Ω_ν однозначно связан с суммой масс нейтрино, но не зависит от иерархии этих масс. Поэтому для второй модели дополнительным параметром является масса тех нейтрино, которые вносят основной вклад в Ω_ν . Пусть $N_{\nu,m}$ — число типов таких нейтрино (если нейтрино имеют массы заметно больше $m_{atm} \simeq 0.05$ эВ, то все три нейтрино вырождены по массам и $N_{\nu,m} = 3$; в случае обратной иерархии масс два нейтрино имеют массы $m_1 \approx m_2 \approx m_{atm}$, а третью гораздо легче, и $N_{\nu,m} = 2$; при прямой иерархии одно нейтрино имеет массу m_{atm} , второе — массу m_{sol} , а третью ещё легче, и в этом случае $N_{\nu,m} = 1$; подробнее об иерархии нейтриинных масс см. приложение I.C). Существенная для дальнейшего масса наиболее тяжелых нейтрино связана с Ω_ν соотношением

$$\Omega_\nu = \frac{N_{\nu,m} m_\nu n_{\nu,0}}{\rho_c},$$

откуда получаем

$$m_\nu = 25 \text{ эВ} \cdot \left(\frac{h}{0.73} \right)^2 \cdot \left(\frac{2}{N_{\nu,m}} \right) \cdot \Omega_\nu . \quad (8.139)$$

Наша ближайшая задача — найти зависимость современной амплитуды возмущений тёмной материи и барионов от Ω_ν и $N_{\nu,m}$ при $\Omega_\nu \ll \Omega_M$. Отметим, что при известном Ω_ν , а следовательно известном $\Omega_{DB} = \Omega_M - \Omega_\nu$, соотношение между Ω_{CDM} и Ω_B несущественно для наших целей: оно проявляется только до эпохи рекомбинации и сразу после неё, а связанные с этим периодом эффекты слабо влияют на результат. Фиксация именно Ω_M представляется оправданной, поскольку эта величина может быть независимо измерена, например путём наблюдений удалённых сверхновых типа Ia. Из этих наблюдений определяется темп расширения Вселенной при разных z , поэтому их результаты чувствительны в основном именно к Ω_M , а не к Ω_{DB} и Ω_ν по отдельности.

Будем рассматривать моды возмущений, для которых затухание Ландау работает до сих пор (изучение мод с большими длинами на полукаличественном уровне проводится аналогично). Для таких мод возмущения нейтринной компоненты пренебрежимо малы, и эффект от нейтрино сводится к их влиянию на возмущения материи. Будем для определённости изучать современное значение величины δ_{DB} или, что то же самое, $\delta_M = \delta_{DB}/\rho_M$.

Одно (но не единственное, см. ниже) отличие между двумя моделями связано с влиянием нейтрино на *темп роста* возмущений материи. В полной аналогии с тем, как перед рекомбинацией барионы влияют на рост возмущений тёмной материи, нерелятивистские массивные нейтрино замедляют рост δ_{DM} (пока массивные нейтрино являются релятивистскими, различия между двумя моделями нет). В эпоху, когда тёмная энергия пренебрежимо мала, этот эффект описывается формулой (6.24), где вместо Ω_B и Ω_{CDM} фигурируют Ω_ν и Ω_M , соответственно. С учётом тёмной энергии рост происходит по закону

$$\delta_{DB} \propto (ag(\eta))^{1-\frac{3}{5}\frac{\Omega_\nu}{\Omega_M}} , \quad (8.140)$$

где мы использовали введённую в разделе 4.4 функцию $g(\eta)$; её современное значение равно $g(\eta_0) \approx 0.74$.

▷ *Задача 20.* Убедиться в справедливости соотношения (8.140).

Рассмотренный эффект различает две модели при $z \lesssim z_{nr}$, см. (8.108). Итак, в современную эпоху относительные возмущения δ_{DB} различаются в двух моделях множителем

$$\left(\frac{a(z_{nr})}{a_0 g(\eta_0)} \right)^{\frac{3}{5}\frac{\Omega_\nu}{\Omega_M}} = \left(\frac{1}{(1+z_{nr})g(\eta_0)} \right)^{\frac{3}{5}\frac{\Omega_\nu}{\Omega_M}} ,$$

где мы учли, что нейтрино становятся нерелятивистскими задолго до того, как начинает проявляться космологическая постоянная, так что $g(\eta_{nr}) = 1$.

Второе отличие связано с тем, что нейтрино влияет на момент перехода от радиационно-доминированной к пылевидной стадии. При фиксированном Ω_M в модели с массивными нейтрино Ω_{DB} меньше. В эпоху перехода на пылевидную стадию все нейтрино в обеих моделях являются релятивистскими и не дают вклада в пылевидную компоненту, однако в модели с массивными нейтрино нерелятивистских частиц — холодной тёмной материи и барионов — меньше, а потому выход на пылевидную

стадию произошёл позже. В модели с массивными нейтрино будем иметь следующую оценку для соответствующего красного смещения:

$$1 + z_{eq} \equiv \frac{a_0}{a_{eq}} = \frac{\Omega_{CDM} + \Omega_B}{\Omega_{rad}} = \frac{\Omega_M - \Omega_\nu}{\Omega_{rad}} = \left(1 - \frac{\Omega_\nu}{\Omega_M}\right) \cdot \frac{\Omega_M}{\Omega_{rad}}.$$

Из неё следует, что отношение масштабных факторов в эпоху перехода в двух моделях равно

$$\frac{a_{eq}^{\Omega_\nu \neq 0}}{a_{eq}^{\Omega_\nu = 0}} = \left(1 - \frac{\Omega_\nu}{\Omega_M}\right)^{-1}.$$

Здесь и далее обозначение $\Omega_\nu = 0$ и $\Omega_\nu \neq 0$ относится к модели с безмассовыми и модели с массивными нейтрино, соответственно. Поскольку на пылевидной стадии δ_{DB} растёт линейно с масштабным фактором (с точностью до уже рассмотренного эффекта подавления роста при $z > z_{nr}$), задержка перехода на пылевидную стадию в модели с массивными нейтрино приводит к подавлению в ней величины δ_{DB} множителем $(1 - \Omega_\nu/\Omega_M)$. Таким образом, имеем

$$\frac{\delta_{DB}^{\Omega_\nu \neq 0}}{\delta_{DB}^{\Omega_\nu = 0}} = \left(1 - \frac{\Omega_\nu}{\Omega_M}\right) \left(\frac{1}{(1 + z_{nr})g(\eta_0)}\right)^{\frac{3}{5}\frac{\Omega_\nu}{\Omega_M}}. \quad (8.141)$$

Наконец, третье отличие между двумя моделями состоит в том, что в массивном случае нейтрино не дают вклад в полную амплитуду возмущений материи, но дают вклад в полную плотность массы. Для массивного случая имеем

$$\delta_M^{\Omega_\nu \neq 0} = \delta_{DB}^{\Omega_\nu \neq 0} \frac{\Omega_{DB}}{\Omega_M} = \delta_{DB}^{\Omega_\nu \neq 0} \left(1 - \frac{\Omega_\nu}{\Omega_M}\right). \quad (8.142)$$

В безмассовом случае этого эффекта нет.

Собирая вместе формулы (8.141) и (8.142), найдём, что в современную эпоху

$$\frac{\delta_M^{\Omega_\nu \neq 0}}{\delta_M^{\Omega_\nu = 0}} = \left(1 - \frac{\Omega_\nu}{\Omega_M}\right)^2 \left(\frac{1}{(1 + z_{nr})g(\eta_0)}\right)^{\frac{3}{5}\frac{\Omega_\nu}{\Omega_M}}. \quad (8.143)$$

Красное смещение, отвечающее моменту, когда нейтрино становятся нерелятивистскими, можно из формулы (8.108) выразить через массу нейтрино,

$$1 + z_{nr} \simeq 1.9 \cdot 10^3 \frac{m_\nu}{1 \text{ эВ}},$$

а для массы нейтрино воспользоваться формулой (8.139). Тогда оценка (8.143) примет вид:

$$\frac{\delta_M^{\Omega_\nu \neq 0}(a_0)}{\delta_M^{\Omega_\nu = 0}(a_0)} = \left(1 - \frac{\Omega_\nu}{\Omega_M}\right)^2 \left(4.3 \cdot 10^4 \cdot \left(\frac{h}{0.71}\right)^2 \cdot \left(\frac{2}{N_{\nu,m}}\right) \cdot \Omega_\nu \cdot g(a_0)\right)^{-\frac{3}{5}\frac{\Omega_\nu}{\Omega_M}}. \quad (8.144)$$

При малых Ω_ν/Ω_M можно использовать линейное по Ω_ν/Ω_M приближение к оценке (8.144), причём для реалистичных значений остальных космологических параметров (от которых в линейном разложении зависимость логарифмическая) неплохим численным приближением является

$$\frac{\delta_M^{\Omega_\nu \neq 0}(a_0)}{\delta_M^{\Omega_\nu = 0}(a_0)} \simeq 1 - 4 \frac{\Omega_\nu}{\Omega_M}. \quad (8.145)$$

(Непосредственно из (8.144) при малых Ω_ν/Ω_M следует несколько другой численный коэффициент $\simeq 4.5$, однако более аккуратный анализ приводит к коэффициенту, приведённому нами.) Видно, что поправка, связанная с массивными нейтрино, довольно велика, особенно если говорить о спектре мощности возмущений материи $P(k) \propto \delta_M^2$. Для него она составляет от десятков процентов до нескольких процентов, в зависимости от иерархии масс: вклад больше для случая вырожденных нейтрино с $m_\nu \gg m_{atm}$, и существенно меньше для “предельно лёгкого” сектора нейтрино с двумя массами m_{atm}, m_{sol} и третьей почти нулевой. Различия спектров мощности возмущений материи в моделях с разными массами нейтрино проиллюстрированы на рис. 8.4.

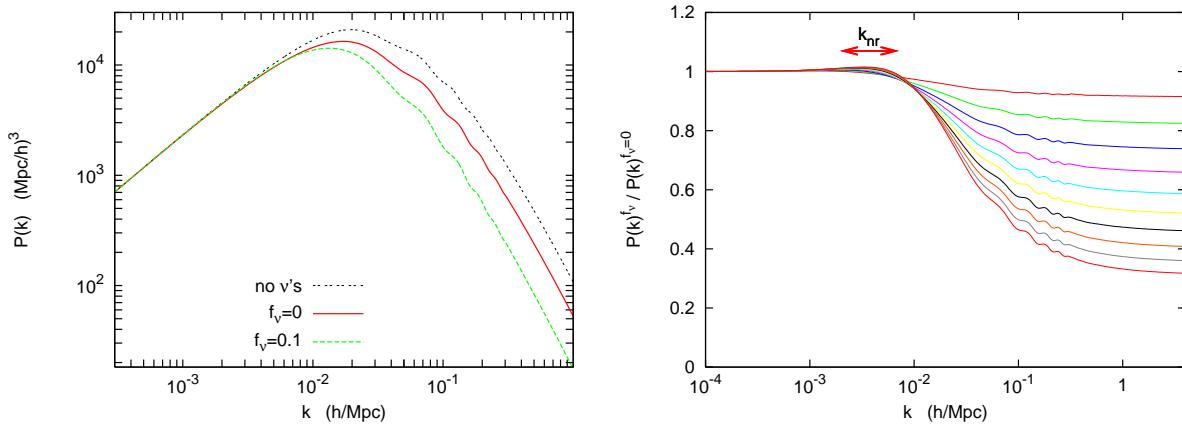


Рис. 8.4: Подавление возмущений материи на мелких масштабах за счёт влияния нейтринной компоненты в современной Вселенной с $h = 0.7$, $\Omega_\Lambda = 0.7$, $\Omega_M = 0.3$ и с плоским спектром начальных возмущений $n_s = 1$ [34]. На левом графике приведены спектры мощности $P(k) \propto \delta_M^2$ в модели без нейтрино (“ $\text{no } \nu\text{'s}$ ”), в модели с тремя безмассовыми нейтрино ($f_\nu \equiv \Omega_\nu/\Omega_M = 0$) и в модели с тремя вырожденными массивными нейтрино с $\Omega_\nu = 0.1\Omega_M$ ($f_\nu = 0.1$); спектры нормированы одинаково. На правом графике приведены отношения спектров мощностей возмущений в моделях с тремя вырожденными массивными нейтрино ($P(k)^{f_\nu}$) к спектру мощности в модели с тремя безмассовыми нейтрино ($P(k)^{f_\nu=0}$); сверху вниз линии последовательно относятся к моделям с $f_\nu = 0.01, 0.02, \dots, 0.1$.

▷ Задача 21. Провести рассмотрение, аналогичное приведённому выше, для слу-
чая пространственно плоской Вселенной, в которой фиксирована величи-
на Ω_{DB} , а не Ω_M .

Найденное подавление возмущений материи в коротковолновой области спектра влияет на картину анизотропии реликтового излучения. Более существенно подавление возмущений сказывается на распространённости во Вселенной структур на малых и средних пространственных масштабах. Анализ каталогов галактик позволяет оценить мощность спектра возмущений на этих масштабах, см. рис. 8.5, слева. Этот анализ исключает случай активных нейтрино с массами, превышающими ~ 1 эВ. Данные по анизотропии реликтового излучения не столь чувствительны к массам нейтрино, см. рис. 8.5, справа. Комбинированный анализ двух наборов данных (по реликтовому излучению и по структурам) позволяет ограничить сверху сумму масс нейтрино на уровне 1 эВ, см. рис. 8.5, справа.

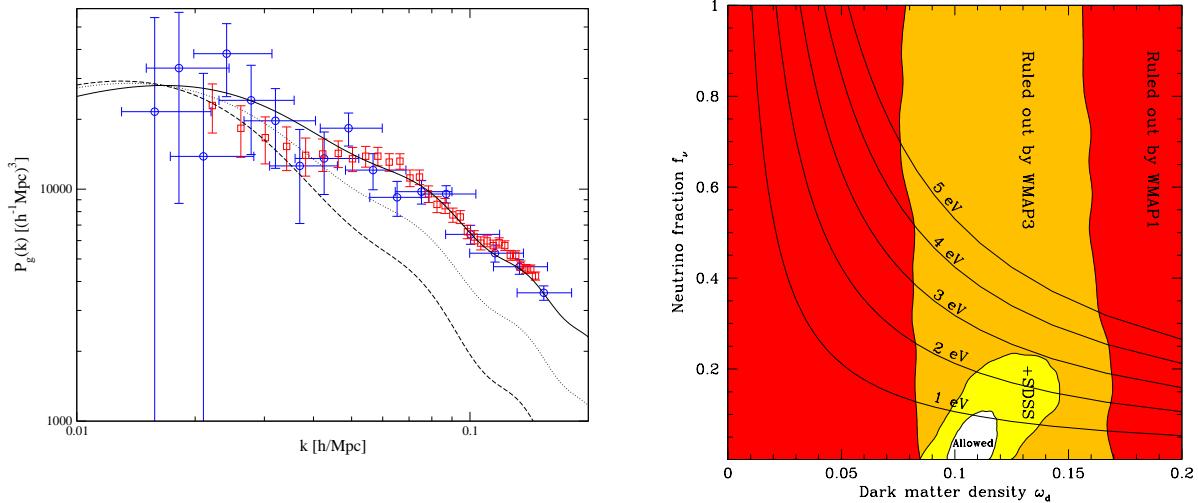


Рис. 8.5: Слева: сравнение предсказаний спектра возмущений материи в моделях с массивными нейтрино с оценками мощности возмущений, следующими из анализа распространения структур по данным двух каталогов SDSS (кружки) и 2dFGRS (квадратики) [35]. Сплошная линия соответствует космологической модели с суммой масс нейтрино $\sum m_\nu = 0.28$ эВ, короткий и длинный пунктиры соответствуют моделям с $\sum m_\nu = 1.5$ эВ и $\sum m_\nu = 3$ эВ. Величины остальных космологических параметров близки к принятым нами значениям. Спектр нормирован на импульсе $k = 0.017h/\text{Мпк}$. Видно, что в области больших импульсов спектр возмущений в моделях с более тяжёлыми нейтрино идёт заметно ниже экспериментальных точек. Справа: Космологические ограничения на параметры нейтринного сектора из анализа данных по анизотропии реликтового излучения (статистика одного года и трёх лет работы эксперимента WMAP) и из совместного анализа с данными каталога структур SDSS [36]. Представлены области, исключённые на уровне достоверности 95%.

Отметим, что имеется несколько, вообще говоря, независимых методов исследования структур на малых угловых масштабах, и они дают похожие оценки сверху на сумму масс нейтрино, приводящие к ограничению (8.106). Наличие нескольких методов повышает надёжность результата, поскольку снижает роль систематических неопределённостей. В перспективе космологическими методами можно будет обнаружить массы нейтрино и, возможно, выяснить, какова иерархия этих масс. Для последнего потребуется независимо оценить величины Ω_ν и k_{nr} . Отличить модель со сравнительно тяжёлыми вырожденными нейтрино от моделей с сильной иерархией (прямой или обратной) возможно будет уже в ближайшие годы. Перспективы отличить прямую иерархию от обратной представляются менее определёнными, однако уже сегодня обсуждаются проекты изучения скоплений галактик, обещающие продвинуться в область масс нейтрино $m_\nu \sim 0.03$ эВ.

Отметим, что тензор анизотропных напряжений нейтриинных возмущений является источником гравитационных волн, т.е. даёт вклад в правую часть уравнения для тензорных мод (B.15). К сожалению, этот источник довольно слаб — амплитуда вызванных флюктуациями нейтрино гравитационных волн ненаблюдаема для экспериментов близкого будущего.

▷ Задача 22. Оценить амплитуду гравитационных волн, источником которых

служит тензор анизотропных напряжений нейтринных флуктуаций.

Рассмотрим влияние нейтринной компоненты на эволюцию первичных гравитационных волн во Вселенной. Мы не будем интересоваться генерацией гравитационных волн неоднородностями нейтринной компоненты: этот эффект, как мы только что отметили, мал. Нас здесь интересуют реликтовые гравитационные волны, которые могли образоваться, например, в результате усиления вакуумных флуктуаций на стадии инфляции, см. раздел 13.3. Влияние нейтрино связано с тензором анизотропных напряжений, который отличен от нуля после отщепления нейтрино; для барион-электрон-фотонной плазмы до рекомбинации такого эффекта нет. Поскольку тензор анизотропных напряжений быстро убывает со временем после того, как нейтрино становятся нерелятивистскими, интерес представляет случай релятивистских нейтрино. Его мы и рассмотрим, положив массу нейтрино равной нулю в последующих формулах. Наш анализ мы проведём для тех тензорных мод, которые входят под горизонт на радиационно-доминированной стадии после отщепления нейтрино.

Поскольку мы интересуемся тензорными возмущениями, запишем метрику в виде

$$g_{00} = a^2, \quad g_{ij} = -a^2 (\delta_{ij} - h_{ij}), \quad (8.146)$$

где $h_{ij} = h_{ij}^{TT}$ — поперечный бесследовый 3-тензор. Нам требуется вычислить вклад нейтрино в тензор энергии-импульса (8.10). Все рассуждения и вычисления можно было бы провести по аналогии с приведёнными в разделе 8.2. Здесь для разнообразия мы немного отклонимся от этой схемы, чтобы продемонстрировать эквивалентность нескольких различных подходов к описанию эволюции неоднородностей.

Введём единичный 3-вектор n_i , противоположно направленный ковариантному вектору P_i , и обозначим модуль последнего κ , так что $P_i \equiv -n_i \kappa$. Тогда для контравариантного импульса нейтрино в линейном порядке по возмущениям метрики будем иметь

$$P^i = g^{ij} P_j = \frac{\kappa}{a^2} (n_i + n_j h_{ij}), \quad P^0 = \sqrt{-\frac{g^{ij}}{a^2} P_i P_j} = \frac{\kappa}{a^2} \left(1 + \frac{1}{2} n_i n_j h_{ij} \right)$$

Функция распределения нейтрино $f_\nu = f_\nu(\eta, x^i, P_j)$ удовлетворяет уравнению Больцмана (8.37) с нулевым интегралом столкновений, причём

$$\frac{P^i}{P^0} = n_i + n_j h_{ij} - \frac{1}{2} n_i n_k n_l h_{kl}.$$

Подставляя явные выражения для символов Кристоффеля, и имея в виду дальнейший линейный анализ возмущений, получим для уравнения Больцмана

$$f'_\nu + \left(n_i + n_j h_{ij} - \frac{1}{2} n_i n_m n_l h_{ml} \right) \frac{\partial f_\nu}{\partial x^i} + \frac{1}{2} \kappa n_m n_i \partial_j h_{im} \frac{\partial f_\nu}{\partial P_j} = 0. \quad (8.147)$$

Ненулевой тензор анизотропных напряжений нейтрино возникает после их отщепления от плазмы. Сразу после отщепления в момент η_d функция распределения нейтрино по импульсу имеет форму функции распределения Ферми-Дирака f_0 с импульсом $\sqrt{-g^{ij}(\eta_d, \mathbf{x}) P_i P_j}$,

$$f_\nu(\eta_d, x^i, P_j) \equiv f_0(x^i, P_j).$$

Поэтому естественно для функции распределения нейтрино в более поздние времена воспользоваться следующим представлением:

$$f_\nu = f_0(x^i, P_j) + \delta f(\eta, x^i, P_j), \quad (8.148)$$

при этом мы будем интересоваться временами $\eta > \eta_d$, и по определению

$$\delta f(\eta_d, x^i, P_j) = 0. \quad (8.149)$$

При нашем выборе представления для функции распределения нейтрино (8.148) влияние гравитационных возмущений есть и в функции f_0 (через тензор $g^{ij}(\eta_d, \mathbf{x})$) и в индуцированном возмущении δf . Последнее можно найти, решив соответствующее уравнение Больцмана. А именно, подставляя разложение (8.148) в уравнение Больцмана (8.147), и переходя к Фурье-образам по пространственным координатам, получим уравнение для возмущений δf , обусловленных гравитационными волнами:

$$\delta f' + i \mathbf{k} \cdot \mathbf{n} \delta f - \frac{i}{2} \kappa \frac{\partial f_0}{\partial \kappa} \mathbf{k} \cdot \mathbf{n} \cdot (h_{jm}(\eta) - h_{jm}(\eta_d)) = 0. \quad (8.150)$$

Вклад, пропорциональный $h_{jk}(\eta_d)$, обеспечивает выполнение начального условия (8.149) и возникает в линейном порядке по возмущениям из пространственной производной от f_0 , входящей в уравнение (8.147). Решением уравнения (8.150) является функция

$$\delta f = \frac{i}{2} \frac{\partial f_0}{\partial \kappa} \mathbf{n} \mathbf{k} n_i n_j \int_{\eta_d}^{\eta} d\eta' \cdot (h_{ij}(\eta') - h_{ij}(\eta_d)) e^{i \mathbf{n} \mathbf{k} \cdot (\eta' - \eta)}.$$

Отсюда видно, что присутствие гравитационных волн действительно даёт дополнительный вклад в возмущения нейтринной компоненты. Аналогичный эффект имеется и для фотонной компоненты после рекомбинации.

Итак, теперь нам известна функция распределения нейтрино $f_\nu = f_0 + \delta f$. Её следует подставить в формулу для пространственных компонент тензора энергии-импульса (8.10) и выделить из него бесследовую часть — тензор анизотропных напряжений (см. (B.13b))

$$\Pi_j^i = -T_j^i + \frac{1}{3} \delta_j^i T_m^l \delta_l^m = \int \frac{d^3 P_m}{\sqrt{-g}} \frac{-P^i P_j + \frac{1}{3} \delta_j^i P_l P^l}{P^0} f_\nu(\eta, x^i, P_j). \quad (8.151)$$

Нас интересуют линейные по гравитационным возмущениям вклады в поперечную часть тензора анизотропных напряжений Π_{ij}^{TT} , являющуюся источником в уравнении для гравитационных волн (B.15). На самом деле, поскольку вычисляемый нами вклад линеен по гравитационным волнам, полученный результат будет поперечным естественным образом.

Вклад в Π_j^j дают и возмущение δf , и функция f_0 , поскольку она зависит от величины $\sqrt{-g^{ij}(\eta_d, \mathbf{x}) P_i P_j}$. Кроме того, в выражении (8.151), величины P^i и P^0 также зависят от h_{ij} . Для выбранной параметризации импульсов нейтрино мера интегрирования не зависит от h_{ij} в линейном порядке,

$$\int \frac{d^3 P_m}{\sqrt{-g}} = \frac{1}{a^4} \int d\kappa d\mathbf{n} \kappa^2,$$

а линейный порядок по h_{ij} для подынтегрального выражения в (8.151) имеет вид

$$\left(n_i n_j - \frac{1}{3} \delta_{ij} \right) \left(\delta f + \kappa \frac{\partial f_0}{\partial \kappa} \frac{1}{2} n_l n_m h_{lm}(\eta_d) \right) \quad (8.152a)$$

$$+ \left(n_j n_k h_{ik}(\eta) - \frac{1}{2} \left(n_i n_j + \frac{1}{3} \delta_{ij} \right) n_l n_m h_{lm}(\eta) \right) f_0. \quad (8.152b)$$

Рассмотрим вначале вклад возмущений δf (первое слагаемое в (8.152a)):

$$\Pi_{ij}^{(1)} = \frac{i}{2} \frac{1}{2a^4} \int_0^\infty d\kappa \cdot \kappa^3 \cdot \kappa \frac{\partial f_0}{\partial \kappa} \int d\mathbf{n} \left(n_i n_j - \frac{1}{3} \delta_{ij} \right) n_l n_m (i \mathbf{n} \mathbf{k}) \int_{\eta_d}^{\eta} d\eta' (h_{lm}(\eta') - h_{lm}(\eta_d)) \cdot e^{i \mathbf{n} \mathbf{k} \cdot (\eta' - \eta)}.$$

Интеграл по конформному времени удобно преобразовать, воспользовавшись интегрированием по частям,

$$\begin{aligned} i \mathbf{n} \mathbf{k} \int_{\eta_d}^{\eta} d\eta' e^{i \mathbf{n} \mathbf{k} \cdot (\eta' - \eta)} (h_{lm}(\eta') - h_{lm}(\eta_d)) &= \int_{\eta_*}^{\eta} d\eta' \cdot (h_{lm}(\eta') - h_{lm}(\eta_d)) \frac{d}{d\eta'} e^{i \mathbf{n} \mathbf{k} \cdot (\eta' - \eta)} \\ &= - \int_{\eta_d}^{\eta} d\eta' e^{i \mathbf{n} \mathbf{k} \cdot (\eta' - \eta)} h'_{lm}(\eta') + h_{lm}(\eta) - h_{lm}(\eta_d). \end{aligned} \quad (8.153)$$

Видно, что последнее слагаемое здесь сокращается под интегралом для Π_{ij} со вкладом в (8.152a), пропорциональным $\partial f_0 / \partial \kappa$. В оставшемся выражении произведём интегрирование по частям по переменной κ :

$$\int d\kappa \cdot \kappa^4 \cdot \frac{\partial f_0}{\partial \kappa} = -4 \int d\kappa \cdot \kappa^3 \cdot f_0 = -\frac{1}{\pi} \rho_\nu.$$

Теперь рассмотрим второе слагаемое в (8.153). В выражении для Π_j^j оно сокращается с аналогичным вкладом от (8.152b) после интегрирования по углам,

$$-\frac{\rho_\nu}{2\pi a^4} \int d\mathbf{n} h_{lm} n_l n_m \cdot \left(n_i n_j - \frac{1}{3} \delta_{ij} \right) + \frac{\rho_\nu}{4\pi a^4} \int d\mathbf{n} \left(n_j n_l h_{il} - \frac{1}{2} \left(n_i n_j + \frac{1}{3} \delta_{ij} \right) h_{lm} n_l n_m \right) = 0.$$

В оставшемся единственном интегральном вкладе в (8.153) произведём интегрирование по азимутальному углу, и выразив зенитный угол θ через новую переменную $\xi = \cos \theta$, получим явно поперечный тензор анизотропных напряжений нейтрино, индуцированный гравитационными возмущениями,

$$\Pi_j^{TT} = -\frac{\rho_\nu}{4a^4} \int_{-1}^1 d\xi (1 - \xi^2)^2 \int_{\eta_d}^{\eta} d\eta' e^{i \xi \mathbf{k} \cdot (\eta - \eta')} h'_{ij}(\eta'). \quad (8.154)$$

Это выражение следует подставить в правую часть уравнения (B.15).

▷ Задача 23. Получить формулу (8.154), следуя стандартной схеме, изложенной в разделе 8.2.

Взяв интеграл по ξ ,

$$S(y) \equiv \frac{1}{16} \int_{-1}^1 d\xi (1 - \xi^2)^2 e^{i\xi y} = -\frac{1}{y^2} \left(\frac{\sin y}{y} + \frac{3 \cos y}{y^2} - \frac{3 \sin y}{y^3} \right) ,$$

получим уравнение для гравитационных волн

$$\frac{\partial^2 h_{ij}}{\partial y^2} + \frac{2}{a} \frac{da}{dy} \frac{\partial h_{ij}}{\partial y} + h_{ij} = 24 R_\nu(y) \left(\frac{1}{a} \frac{da}{dy} \right)^2 \int_{y_d}^y dy' \cdot S(y - y') \frac{\partial h_{ij}(y')}{\partial y'} , \quad (8.155)$$

где мы перешли к переменной $y = k\eta$ (при этом $y_d \equiv k\eta_d$), воспользовались уравнением Фридмана на радиационно-доминированной стадии и использовали величину $R_\nu = \rho_\nu(y)/\rho_{rad}(y)$, учитывающую долю энергии радиационной компоненты, приходящейся в момент конформного времени η на нейтрино. Из (8.155) видно, что свободно распространяющиеся нейтрино приводят к появлению дополнительного эффекта “вязкости” для гравитационных волн. Его интегральная природа обусловлена тем, что тензор анизотропных напряжений нейтрино представляет собой результат воздействия гравитационных волн за всё предшествующее время, когда нейтрино свободно распространялось по Вселенной. Поскольку до входа под горизонт амплитуда гравитационных волн оставалась постоянной, в качестве начального условия для интегро-дифференциального уравнения (8.155) необходимо положить

$$\frac{\partial h_{ij}(y_d)}{\partial y} = 0 . \quad (8.156)$$

Отметим, что уравнение (8.155) не перемешивает гравитационные волны разной поляризации.

На радиационно-доминированной стадии после отщепления нейтрино, с учётом $a(\eta) \propto \eta$, $\eta_{eq} \gg \eta \gg \eta_d$ уравнение (8.155) принимает вид

$$\frac{d^2 h_{ij}}{dy^2} + \frac{2}{y} \frac{dh_{ij}}{dy} + h_{ij} = 24 \frac{R_\nu}{y^2} \int_{y_d}^y dy' \cdot S(y - y') \frac{dh_{ij}(y')}{dy'} . \quad (8.157)$$

Наконец, ясно, что интегрирование в правой части уравнения (8.157) можно распространить на нижнем пределе до нуля, поскольку начальные условия накладываются далеко за горизонтом.

Численное решение уравнения (8.157) устроено так [37]: до входа под горизонт моды следуют закону

$$h_{jk} = h_{jk(i)} \cdot \frac{\sin y}{y} ,$$

т.е. не замечают правую часть уравнения (8.157). При $y \sim 1$ в результате влияния нейтрино происходит перестройка мод. При больших y , отвечающих малым длинам волн, правая часть уравнения (8.157) вносит пренебрежимо малый вклад, так что глубоко под горизонтом ($y \rightarrow \infty$) решение уравнения (8.157) с начальным условием (8.156) приближается к

$$h_{jk} \longrightarrow h_{jk(i)} \cdot A \cdot \frac{\sin(y + \alpha)}{y} ,$$

т.е. отличается лишь амплитудой и сдвигом фазы от решения однородного уравнения гравитационных волн (3.9). Для констант A и α имеются приближённые выражения [38]

$$\alpha \simeq 0 , \quad A \simeq 1 - \frac{5}{9} R_{\nu,0} \simeq 0.8 .$$

Таким образом, амплитуда гравитационных волн, вошедших под горизонт на радиационно-доминированной стадии, оказывается подавленной примерно на 20% благодаря эффектам, связанным с нейтрино. Это приводит в конечном счёте к 36%-му подавлению вклада тензорных мод в измеряемые наблюдаемые, в частности, в анизотропию и в поляризацию реликтового излучения, о которых пойдёт речь в Главах 9 и 10. Подавление испытывают возмущения с современными длинами волн $\lambda = 2\pi/k$ (мы здесь полагаем $a_0 = 1$), такими что

$$1 \text{ кпк} \sim 2\pi\eta_d \lesssim \lambda \lesssim 2\pi\eta_{eq} \sim 800 \text{ Мпк} ,$$

что в разложении анизотропии реликтового излучения отвечает мультипольям с

$$l \gtrsim l_{H,0}/\eta_{eq} \sim 100 .$$

Гравитационные волны, входящие под горизонт в эпоху доминирования материи, также подавлены, однако не так сильно, как более коротковолновые моды, а именно, меньше чем на 10%.

► Задача 24. Записать уравнение для системы гравитационных волн и безмассовых нейтрино в эпоху доминирования материи. Найти аналитическое решение для h_{ij} в пределе малых длин волн.

Отметим здесь, что аналогичный вклад фотонов, вообще говоря, также приводит к подавлению тензорных мод. Происходит это уже на пылевидной стадии после рекомбинации, а потому эффект численно мал из-за малости вклада фотонов в полную плотность энергии. Кроме того, тензор анизотропных напряжений фотонов после рекомбинации подавляет лишь узкий интервал мод с современными длинами волн $\lambda = 2\pi/k \sim 1$ Гпк: это моды, входящие под горизонт незадолго после рекомбинации, пока вклад фотонов в полную плотность энергии ещё сколько-нибудь заметен. Амплитуда этих мод уменьшается на $\sim 5\%$, так что эффект для наблюдаемых величин, в частности, мультиполей анизотропии реликтового излучения, оказывается невелик.

8.5 Неидеальность барион-фотонной среды в эпоху рекомбинации

В этом разделе мы обсудим подавление возмущений в барион-фотонной плазме в эпоху рекомбинации и перед этой эпохой. Это подавление — дополнительное к тем эффектам, что мы рассматривали в разделе 6.2 в рамках приближения идеальной жидкости для барион-фотонной плазмы. Обсуждаемые здесь явления сказываются, в частности, на анизотропии и поляризации реликтового излучения, а также на барионных акустических осцилляциях. Именно под этим углом зрения мы и будем их рассматривать.

Как мы обсуждали в Главе I.6, в рассматриваемую эпоху фотоны взаимодействуют в основном с электронами. Комптоновское рассеяние фотонов на барионах при низких энергиях подавлено отношением квадратов масс электрона и протона, $m_e^2/m_p^2 \sim 10^{-6}$, а потому несущественно. В то же время, за счёт кулоновского взаимодействия электроны и протоны тесно связаны в плазме и ведут себя как единая среда.

Прежде всего, в такой среде ещё до рекомбинации имеет место обсуждавшееся в разделе 8.4 затухание Ландау. Оно подавляет возмущения с длинами волн меньше длины свободного пробега фотона λ_γ — на таких масштабах фотоны ведут себя как безмассовые нейтрино, рассмотренные в разделе 8.4. Отметим, что затухание Ландау имеется и для электрон-барионной компоненты плазмы. Ясно, однако, что поскольку барионы, тесно связанные с электронами, существенно нерелятивистские, связанный с последним эффектом масштаб расстояний мал (см. задачу 9); он не представляет для нас интереса.

Длина свободного пробега фотона в момент времени η оценивается величиной

$$\lambda_\gamma \sim \frac{1}{\sigma_T n_e(\eta)},$$

где

$$\sigma_T = 0.67 \cdot 10^{-24} \text{ см}^2 \quad (8.158)$$

— томсоновское сечение рассеяния фотона на свободном покоящемся электроне, n_e — плотность числа свободных электронов. Плотности чисел свободных электронов и протонов совпадают, и последняя перед рекомбинацией составляет примерно 75% от плотности всех барионов: остальные барионы (и электроны) содержатся в атомах гелия, образовавшихся во Вселенной несколько ранее (см. Главы I.6 и I.8). Таким образом, до начала рекомбинации для плотности свободных электронов справедливо

$$n_e(z) = 0.75 \frac{\rho_B(z)}{m_p} = 8.4 \cdot 10^{-6} \Omega_B h^2 \cdot (1+z)^3 \text{ см}^{-3}. \quad (8.159)$$

Отсюда имеем оценку для длины свободного пробега фотона до рекомбинации

$$\lambda_\gamma \sim 6 \cdot 10^4 \cdot \frac{1}{\Omega_B h^2 (1+z)^3} \text{ Мпк}.$$

К началу рекомбинации плотность числа свободных электронов составляет

$$n_e(\eta < \eta_r) \simeq 230 \text{ см}^{-3}, \quad (8.160)$$

а для современных длин волн, которые испытывают затухание Ландау к эпохе рекомбинации, получим

$$\lambda_0 \lesssim (1+z_r) \cdot \lambda_\gamma(\eta < \eta_r) \simeq 2.3 \text{ Мпк}. \quad (8.161)$$

Видно, что затухание Ландау существенно лишь для весьма коротких волн, так что его влияние на реликтовое излучение проявляется лишь на недоступных современным наблюдениям угловых масштабах.

Для барион-электрон-фотонной компоненты, однако, существует новый эффект. К эпохе рекомбинации обмен энергией между фотонной и электрон-барионной компонентами плазмы за счёт комптоновского рассеяния $e\gamma \rightarrow e\gamma$ становится недостаточным для поддержания равновесия. Напомним (см. Главу I.6), что доля энергии, передаваемая в единичном акте рассеяния, мала. Поэтому на масштабах, заметно больших длины свободного пробега в эпоху рекомбинации, фотон хотя и испытывает некоторое количество столкновений, но почти не изменяет своей энергии, а значит сглаживает флуктуации температуры. Это явление, приводящее к увеличению пространственного масштаба замывания неоднородностей по сравнению с длиной свободного пробега фотона, называют эффектом Силка (*Silk damping* в англоязычной литературе). Подчеркнём, что эффект Силка имеет место для барион-электрон-фотонной компоненты, а для тёмной материи он отсутствует. Поэтому он не разрушает гравитационные потенциалы (6.3), (6.15), созданные тёмной материей. Не влияет он и на неосциллирующие вклады в контраст плотности фотонов (первые слагаемые в (6.39), (6.44)), поскольку они обусловлены гравитационными потенциалами тёмной материи. Из-за эффекта Силка замываются лишь *осцилляции* в δ_γ (вторые вклады в (6.39), (6.44)). Мы это явно увидим в разделе 8.5.2.

8.5.1 Толщина сферы последнего рассеяния

Прежде чем перейти к количественному описанию эффекта Силка, отметим, что в эпоху рекомбинации имеет место ещё один эффект, который тоже приводит к замыванию анизотропии реликтового излучения. Речь идёт о неодновременности отщепления фотонов: как мы видели в Главе I.6, рекомбинация — быстрый процесс, однако его завершение всё же требует конечного времени. Иными словами, в эпоху последнего рассеяния фотоны имеют конечную оптическую толщину, в общем случае определяемую формулой

$$\tau(\eta, \eta') = \int_{\eta'}^{\eta} \frac{dt}{\lambda_\gamma(t)}.$$

Это выражение для интересного нам случая рассеяния на нерелятивистских электронах принимает вид

$$\tau(\eta, \eta') = \int_{\eta'}^{\eta} d\tilde{\eta} \cdot a(\tilde{\eta}) \cdot \sigma_T \cdot n_e(\tilde{\eta}). \quad (8.162)$$

Значение величины $e^{-\tau(\eta, \eta')}$ даёт долю фотонов, испытавших рассеяние в момент η' и не рассеявшимся следующий раз к моменту η . Соответственно, доля фотонов, испытавших рассеяние в момент η' и рассеявшимся ещё раз в промежутке времени $(\eta, \eta + d\eta)$ равна $\tilde{V}(\eta, \eta') d\eta$, где

$$\tilde{V}(\eta, \eta') = \frac{d\tau}{d\eta} \cdot e^{-\tau}.$$

Применительно к наблюдениям реликтового излучения интерес представляет несколько другая величина. Действительно, поскольку все фотоны регистрируются в единственный момент времени $\eta = \eta_0$ (в современную эпоху), то больший интерес представляет то, в какой момент времени в прошлом они испытали рассеяние в последний раз. Итак, определим функцию прозрачности

$$V(\eta_0, \eta) = \frac{d\tau}{d\eta} \cdot e^{-\tau(\eta_0, \eta)} \equiv \tau' \cdot e^{-\tau}. \quad (8.163)$$

Величина $V(\eta_0, \eta) d\eta$ определяет долю фотонов, зарегистрированных в момент η_0 и испытавших последнее рассеяние в промежутке конформного времени $(\eta, \eta + d\eta)$. Из (8.163) следует, что

$$\int_0^{\eta_0} d\eta V(\eta_0, \eta) = 1,$$

в соответствии с тем, что полная вероятность последнего рассеяния зарегистрированного фотона равна единице. Функция $V(\eta_0, \eta)$ достигает максимума в эпоху рекомбинации в момент $\eta = \eta_*$, определяемый условием $\tau''(\eta_*) = \tau'^2(\eta_*)$. Ясно, что этот момент имеет место после начала рекомбинации, но до полного отщепления фотонов от плазмы: в более ранний период значение $\tau(\eta_0, \eta)$ велико (фотоны интенсивно рассеиваются на электронах), и функция прозрачности экспоненциально мала; в более поздние моменты времени величина τ' близка к нулю (рассеяние фотонов отсутствует), так что $V(\eta_0, \eta)$ опять мала.

Как следует из результатов раздела I.6.2, в приближении термодинамического равновесия плотность числа электронов в эпоху рекомбинации падает как $n_e \propto e^{-\frac{\Delta_H}{2T}}$, где $\Delta_H = 13.6$ эВ — энергия связи электрона в атоме водорода на основном $1s$ -уровне. В действительности электрон-барион-фотонная среда в эпоху рекомбинации в термодинамическом равновесии *не находится*: имеет место приближенное кинетическое равновесие, а химическое равновесие отсутствует. В этих условиях выражение для плотности числа электронов имеет вид

$$n_e = F(T) \cdot e^{-\frac{\Delta_H}{4T}}, \quad (8.164)$$

где $F(T)$ — медленно меняющаяся функция температуры. Путь к получению формулы (8.164) и вид функции $F(T)$ мы обсудим в конце раздела. Плотность свободных электронов экспоненциально падает, однако это падение замедлено по сравнению с равновесным случаем.

Для показателя экспоненты в (8.163) имеем

$$\tau(\eta_0, \eta) = \int_{\eta}^{\eta_0} d\eta' n_e(\eta') \sigma_T = \int_t^{t_0} dt n_e(\eta) \sigma_T.$$

Это — интеграл от экспоненциально быстро меняющейся функции; он набирается на нижнем пределе, и переходя к интегрированию по $x = 1/T$, мы получаем

$$\tau(\eta_0, \eta) = n_e(\eta) \cdot \sigma_T \cdot \frac{4T}{\Delta_H H}.$$

Таким образом, для функции прозрачности имеем

$$V(\eta_0, \eta) = an_e(\eta) \cdot \sigma_T \cdot \exp\left(-n_e(\eta) \cdot \sigma_T \cdot \frac{4T}{\Delta_H H}\right) = a \frac{\Delta_H H}{4T} \exp(-y + \ln y) , \quad (8.165)$$

где

$$y = n_e(\eta) \cdot \sigma_T \cdot \frac{4T}{\Delta_H H} .$$

Функция (8.165) имеет максимум при $y = y_* = 1$, что соответствует плотности числа электронов

$$n_e(\eta_*) = \frac{\Delta_H H}{4T \sigma_T} . \quad (8.166)$$

В эпоху рекомбинации параметр Хаббла составляет

$$\begin{aligned} H(T_r) &= 100 \frac{\text{км}}{\text{с} \cdot \text{Мпк}} \cdot h \sqrt{\Omega_M(1+z_r)^3 + \Omega_{rad}(1+z_r)^4} \\ &\simeq 4.8 \text{ Мпк}^{-1} , \end{aligned} \quad (8.167)$$

Отсюда численно получаем

$$n_e(\eta_*) \simeq 32 \text{ см}^{-3} . \quad (8.168)$$

Это заметно меньше, чем плотность числа электронов непосредственно перед рекомбинацией, см. (8.160). Фотоны испытывают последнее рассеяние тогда, когда плотность числа электронов уже заметно снизилась благодаря процессу рекомбинации.

В соответствии с (8.165), функция прозрачности имеет довольно резкий максимум. Приближая функцию прозрачности вблизи η_* гауссианом, получим в терминах красного смещения z

$$V(0, z) = V(0, z_*) e^{-\frac{(z-z_*)^2}{2\Delta z^2}} ,$$

где

$$\frac{1}{\Delta z} = \left| \frac{\partial y}{\partial z} \right|_{y=y_*=1} = \frac{\Delta_H}{4T_r z_r}$$

Таким образом, полуширина функции прозрачности равна

$$\Delta z = \frac{4T_r}{\Delta_H} \cdot z_r \simeq 78 ,$$

или в терминах конформного времени

$$\frac{\Delta \eta_r}{\eta_r} = \frac{2T_r}{\Delta_H} \simeq 0.04 \quad (8.169)$$

(поскольку рекомбинация происходит на пылевидной стадии, когда $z \propto a^{-1} \propto \eta^{-2}$). Соответствующий временной интервал найдём, воспользовавшись соотношением $|\Delta z/z| = H\Delta t$:

$$\Delta t = \frac{4T_r}{\Delta_H H(t_r)} \simeq 0.07H^{-1}(t_r) .$$

Отсюда получим современное значение полной толщины сферы последнего рассеяния $2\Delta t(1+z_r) \simeq 33$ Мпк. Как мы увидим в разделе 9.3, конечность толщины сферы последнего рассеяния приводит к замыванию анизотропии реликтового излучения на малых угловых масштабах, $\Delta\theta \lesssim \pi\Delta\eta_r/\eta_0$. Отметим, что малость толщины сферы

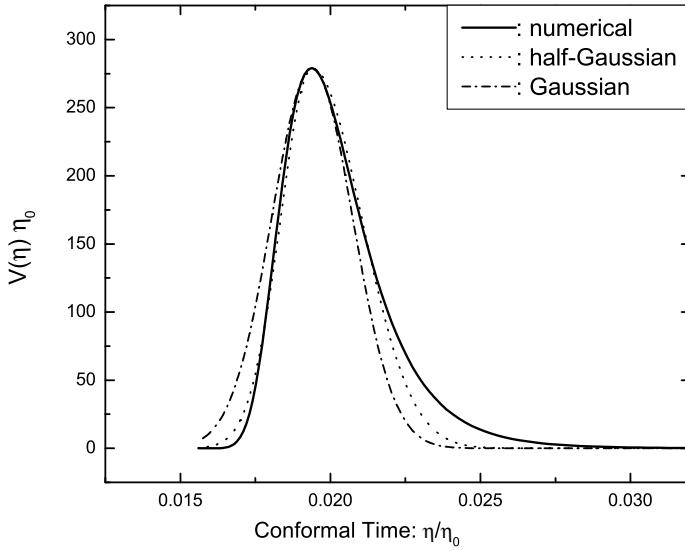


Рис. 8.6: Функция прозрачности для реликтовых фотонов в эпоху рекомбинации [39].

последнего рассеяния по сравнению с хаббловским размером H^{-1} связана с малостью того же параметра T_r/Δ_H , что определяет продолжительность эпохи рекомбинации. Отчётливая структура спектра анизотропии реликтового излучения на не слишком малых угловых масштабах обеспечивается, в частности, тем, что рекомбинация — это быстрый процесс.

Численное решение системы уравнений Больцмана для электромагнитной плазмы в эпоху рекомбинации даёт для функции прозрачности форму, представленную на рис. 8.6. Видно, что функция прозрачности в действительности может быть приближена асимметричным гауссианом

$$V(\eta) = V(\eta_*) \cdot e^{-\frac{(\eta-\eta_*)^2}{2\Delta\eta^2}}, \quad (8.170)$$

причём для $\Omega_\Lambda = 0.73$, $\Omega_B = 0.044$ максимум соответствует $V(\eta_*) \cdot \eta_0 = 279$,

$$\Delta\eta = \Delta\eta_1 \cdot \theta(\eta_* - \eta) + \Delta\eta_2 \cdot \theta(\eta - \eta_*) , \quad \Delta\eta_1 = 0.00110 \eta_0 , \quad \Delta\eta_2 = 0.00176 \eta_0 ,$$

где $\theta(x)$ — функция ступеньки. Отметим, что оценка (8.169) качественно согласуется с приведёнными численными значениями при учёте того, что $\eta_0/\eta_r \simeq 50$, см. раздел 2.1.2.

Обсудим, каким образом получается формула (8.164) для плотности свободных электронов в эпоху рекомбинации. Мы будем использовать обозначения $1s$, $2s$, $2p$ для атомов водорода на соответствующих уровнях энергии, n_{1s} , n_{2s} , n_{2p} — плотности чисел этих атомов.

При интересующих нас температурах имеет место *кинетическое* равновесие между фотонами, электронами, а также протонами. В этом мы убедились в разделе I.6.3. *Химическое* равновесие в среде, однако, отсутствует. Процесс рекомбинации затягивается, концентрация $1s$ -атомов ниже равновесной, а концентрация свободных электронов, наоборот, выше равновесной. Мы увидим, что температура последнего рассеяния фотонов составляет $T_r = 0.25$ эВ, и дальнейшие оценки будем проводить именно для этой температуры.

Указанием на отсутствие химического равновесия служит тот факт, что в среде мало тепловых фотонов с энергиями $\omega > \Delta_H$, способных ионизировать атомы водорода с основного уровня. Плотность числа тепловых фотонов с энергией выше заданной энергии ω равна (здесь и далее до конца этого раздела обозначение eq указывает на то, что речь идёт о тепловых, равновесных фотонах)

$$n_\gamma^{eq}(\omega) = \int_\omega^\infty F_\gamma^{eq}(\omega') d\omega' , \quad (8.171)$$

где

$$F_\gamma^{eq}(\omega) = 8\pi\omega^2 f_{\text{пл}}(\omega)$$

а $f_{\text{пл}}(\omega)$ — планковская функция распределения (мы учли, что фотон имеет две поляризации). При $\omega \gg T$ имеем

$$F_\gamma^{eq}(\omega) = \frac{\omega^2}{\pi^2} e^{-\omega/T} , \quad (8.172)$$

так что

$$n_\gamma^{eq}(\omega) = \frac{\omega^2 T}{\pi^2} e^{-\omega/T} .$$

Для $\omega = \Delta_H$ и $T = T_r = 0.25$ эВ эта плотность составляет $n_\gamma^{eq}(\Delta_H) \sim 10^{-9}$ см⁻³. Столь малого числа тепловых фотонов, способных ионизировать основное состояние водорода, недостаточно для поддержания химического равновесия. Мы убедимся в конце раздела, что в среде имеется гораздо больше *нетепловых* фотонов с $\omega > \Delta_H$, что и будет окончательным доказательством отсутствия равновесия для реакции рекомбинации на основной уровень.

Равновесие отсутствует и для реакций перехода на основной уровень 1s с возбуждённых уровней водорода. Мы в этом убедимся в дальнейшем. С другой стороны, термодинамическое (в том числе химическое) равновесие имеется между фотонами, свободными электронами, протонами и атомами водорода *на возбуждённых уровнях*. Действительно, плотность числа фотонов, способных ионизировать, например, 2s- и 2p-уровни, равна $n_\gamma^{eq}(\Delta_{2s}) \sim 10^8$ см⁻³, где $\Delta_{2s} = \Delta_H/4$ — энергия связи 2s- или 2p-уровня. Это гораздо больше концентрации барийонов, что и свидетельствует в пользу термодинамического равновесия: даже если бы все электроны и протоны рекомбинировали на 2s- и 2p-уровни, спектр фотонов в области $\omega \sim \Delta_{2s}$ остался бы практически прежним, тепловым. Мы ещё будем уточнять условия, при которых выполняется сделанное утверждение о частичном термодинамическом равновесии, см. задачу 26.

Итак, в системе имеется равновесие по отношению ко всем реакциям, кроме реакций образования и разрушения 1s-атомов водорода. При этом если бы 1s-атомы не образовывались вовсе, концентрации возбуждённых атомов были бы малы, так что практически все электроны и протоны находились бы в свободном состоянии при $T = T_r = 0.25$ эВ.

▷ Задача 25. Убедиться в справедливости последнего утверждения. Указание: воспользоваться уравнением Саха, записанным без учета 1s-атомов.

Из последнего замечания следует, что электроны в основном находятся либо в свободном состоянии, либо в 1s-атомах. Поэтому ключевыми процессами являются образование и разрушение 1s-атомов. В дальнейшем мы будем учитывать только 1s-, 2s- и 2p-уровни, а существованием более высоко возбуждённых уровней будем пренебрегать. Это в действительности неплохое приближение: заселённость, скажем, 3s-уровня по сравнению с 2s в условиях равновесия равна

$$\frac{n_{3s}}{n_{2s}} = e^{-(\Delta_{2s} - \Delta_{3s})/T} \sim 10^{-3} . \quad (8.173)$$

Здесь учтено, что $\Delta_{3s} = \Delta_H/9$.

В нашем приближении 1s-атомы могут образовываться и разрушаться в реакциях



Подчеркнём, что переход $2s \rightarrow 1s$ — это двухфотонный процесс, в то время как переход из континуума и переход $2p \rightarrow 1s$ происходят путём излучения одного фотона (первая линия серии Лаймана, Лайман- α).

Начнём с переходов из континуума (8.174). Они в действительности оказываются несущественными. При $n_{1s} \gtrsim n_e$ фотон, испущенный в процессе $e + p \rightarrow 1s + \gamma$, ионизирует “соседний” 1s-атом до того, как потеряет свою энергию в столкновениях с электронами. Действительно, сечение ионизации 1s-атома вблизи порога равно [18]

$$\sigma_{1s} = \frac{2^9 \pi^2}{3e^4} \frac{1}{\alpha m_e^2} = 6.3 \cdot 10^{-18} \text{ см}^2 .$$

Оно значительно превышает томсоновское сечение упругого рассеяния на покоящемся электроне. Мы убедимся в конце раздела, что покраснение фотонов из-за расширения Вселенной также несущественно в

случае (8.174). Таким образом, процессы (8.174) фактически не изменяют число свободных электронов и $1s$ -атомов.

Рассмотрим теперь процессы (8.175). В отличие от рекомбинации свободных электрона и протона, в прямом процессе образуется два фотона, и попадание их в среду не приводит к обратной реакции. Прямой процесс $2s \rightarrow 1s + 2\gamma$ имеет ширину [40]

$$\Gamma_{2s} \approx 8.2 \text{ c}^{-1}.$$

Она достаточно мала, так что прямой процесс является медленным в том смысле, что $2s$ -атом с большой вероятностью ионизируется тепловым фотоном, чем испытает этот переход, см. задачу 26. Это означает, что переходы $2s \rightarrow 1s$ малосущественны с точки зрения концентрации $2s$ -атомов, и в системе действительно имеется частичное термодинамическое равновесие, о котором мы говорили выше.

- ▷ Задача 26. Показать, что при $T > 2500 \text{ K}$ вероятность того, что $2s$ -атом ионизируется в реакции $2s + \gamma^{th} \rightarrow e + p$, превышает вероятность его перехода в $1s$ -состояние в процессе $2s \rightarrow 1s + 2\gamma$. Здесь γ^{th} обозначает тепловой фотон. Указание: использовать значение сечения ионизации вблизи порога

$$\sigma_{2s} = \frac{2^{16}\pi^2}{3e^8} \frac{1}{am_e^2} = \frac{2^7}{e^4} \sigma_{1s} \approx 2.34 \sigma_{1s}.$$

Отметим, что температура 2500 K ниже температуры $T_r = 0.25 \text{ эВ} \approx 3000 \text{ K}$, при которой фотоны испытывают последнее рассеяние. Отметим также, что характерные для рассматриваемых процессов масштабы времён $t \lesssim \Gamma_{2s}^{-1}$ весьма малы по сравнению с временем изменения параметров среды, связанного с расширением Вселенной, так что процессы $e + p \leftrightarrow 2s + \gamma$ действительно находятся в равновесии.

Поскольку $2s$ -атомы находятся в равновесии с электронами и протонами, для них справедливо соотношение Саха (ср. с разделом I.6.1)

$$n_e n_p = n_e^2 = n_{2s} \cdot \left(\frac{m_e T}{2\pi} \right)^{3/2} \cdot e^{-\frac{\Delta_{2s}}{T}}, \quad (8.177)$$

Темп перехода электронов на $1s$ -уровень по каналу $2s \rightarrow 1s$ определяется количеством $2s$ атомов и темпом $2s$ - $1s$ -переходов:

$$\left(\frac{dn_e}{dt} \right)_{2s \rightarrow 1s} = -\Gamma_{2s} n_{2s}. \quad (8.178)$$

Здесь мы пренебрегли обратным процессом, переводящим $1s$ -атом в $2s$ -состояние за счёт поглощения двух фотонов. Обоснование этому дано в конце раздела.

Обсудим, наконец, процессы (8.176). Так же, как и в случае рекомбинации свободных электронов и протонов, излученный в прямом процессе фотон, как правило, быстро поглощается "соседним" $1s$ -атомом в обратном процессе, и никакого изменения в среде эффективно не происходит. Однако для процессов (8.176) существенно покраснение фотонов, связанное с расширением Вселенной. Дело в том, что в среде имеется довольно много фотонов Лайман- α линии. Часть из них всё же выбывает из области линии благодаря покраснению и не принимает участие в обратном процессе $1s + \gamma \rightarrow 2p$. В результате число $1s$ -атомов растёт, а число свободных электронов и протонов убывает. Этот эффект мы обсудим количественно в конце раздела, а здесь скажем, что он приводит к оценке эффективной скорости убывания свободных электронов, численно близкой к (8.178). Таким образом, убывание электронов даётся уравнением

$$\frac{dn_e}{dt} = -\Gamma_{eff}(T) n_{2s}, \quad (8.179)$$

причём $\Gamma_{eff}(T)$ не очень сильно зависит от температуры, см. (8.186), и $\Gamma_{eff}(T_r) \simeq 1.85 \Gamma_{2s}$.

Используя (8.177), запишем (8.179) в виде уравнения на плотность свободных электронов:

$$\frac{dn_e}{dt} = -\Gamma_{eff} \cdot \left(\frac{2\pi}{T m_e} \right)^{3/2} \cdot e^{\frac{\Delta_{2s}}{T}} \cdot n_e^2.$$

Пренебрегая изменением со временем предэкспоненциального множителя и переходя к переменной $1/T$ согласно $\dot{T}/T = -H$, получим отсюда

$$\frac{1}{n_e} = \frac{\Gamma_{eff} T}{\Delta_{2s} H} \cdot \left(\frac{2\pi}{T m_e} \right)^{3/2} \cdot e^{\frac{\Delta_{2s}}{T}} + \text{const}.$$

Первое слагаемое здесь быстро растёт со временем, так что константа интегрирования несущественна при $t \sim t_r$. Вспоминая, что $\Delta_{2s} = \Delta_H/4$, получим окончательно

$$n_e(T) = \frac{\Delta_H H}{4\Gamma_{eff} T} \cdot \left(\frac{T m_e}{2\pi} \right)^{3/2} \cdot e^{-\frac{\Delta_H}{4T}}, \quad (8.180)$$

что и дает формулу (8.164). Из результата задачи 26 следует, что формула (8.180) действительно работает в интересующей нас области температур, а точнее, при $T > 2500 \text{ K} = 0.21 \text{ эВ}$. Отметим, что из этой формулы и (8.166) следует уравнение на температуру последнего рассеяния

$$\left(\frac{T_* m_e}{2\pi} \right)^{3/2} \cdot e^{-\frac{\Delta_H}{4T_*}} = \frac{\Gamma_{eff}}{\sigma_T} .$$

Видно, что T_* слабо зависит от космологических параметров; эта зависимость имеется только в Γ_{eff} . Численно получаем отсюда

$$T_* = 0.25 \text{ эВ} .$$

Всюду в этой книге под температурой рекомбинации мы имеем в виду именно эту температуру, то есть полагаем

$$T_r \equiv T_* .$$

Численное значение этой температуры практически не отличается от полученного в результате равновесного анализа в разделе I.6.2. Это — результат случайного совпадения.

- ▷ **Задача 27.** Показать, что неравновесная плотность свободных электронов (8.180) превышает равновесную плотность на всей стадии окончания рекомбинации, когда $n_e/n_B \ll 1$ (но при $T > 2500 \text{ K}$, когда справедлив наш анализ).

Рассмотрим для полноты вклад процессов (8.176) в темп роста концентрации $1s$ -атомов. Он обусловлен покраснением фотонов при расширении Вселенной. Изменение плотности числа Лайман- α фотонов, рожденных в прямой реакции и участвующих в обратных процессах, определяется числом фотонов, перемещающихся в область спектра ниже линии Лайман- α в единицу времени, то есть пересекающих нижнюю границу соответствующей области энергий. Оно равно

$$\frac{dn_\gamma(\omega_*)}{dt} = F_\gamma(\omega_*) \frac{d\omega}{dt}(\omega_*) = -\omega_* H F_\gamma(\omega_*) , \quad (8.181)$$

где $n_\gamma(\omega)$ — плотность числа фотонов с энергией больше ω , $F_\gamma(\omega) = dn(\omega)/d\omega$ — спектральная плотность (равновесные значения именно этих величин фигурируют в (8.171)), а ω_* — нижняя граница линии Лайман- α ; мы вскоре увидим, что точное значение величины ω_* несущественно. Фотоны с энергией ниже ω_* не могут перевести $1s$ -состояние в $2p$, поэтому эффективный рост числа $1s$ -атомов (и убывание числа свободных электронов) даются выражениями

$$\frac{dn_{1s}}{dt} = -\frac{dn_e}{dt} = -\frac{dn_\gamma(\omega_*)}{dt} .$$

Поскольку Вселенная расширяется медленно, фотонов из области линии Лайман- α выбывает мало, прямой и обратный процессы с хорошей точностью находятся в равновесии. Таким образом, функцию $F_\gamma(\omega)$ можно вычислить, считая, что скорости прямого и обратного процессов совпадают:

$$\Gamma_{2p}\varphi(\omega)n_{2p}d\omega = C(\omega)\varphi(\omega)F_\gamma(\omega)n_{1s}d\omega . \quad (8.182)$$

Левая часть этой формулы — это число фотонов в интервале $(\omega, \omega + d\omega)$, излучающихся в единицу времени в единице объёма в процессе распада $2p \rightarrow 1s + \gamma$; Γ_{2p} — ширина $2p$ -уровня, $\varphi(\omega)$ — форма линии Лайман- α . Правая часть — скорость захвата фотонов $1s$ -атомами. Мы учли, что она пропорциональна спектральной плотности фотонов и плотности $1s$ -атомов, так что коэффициент C зависит только от ω . Он равен

$$C(\omega) = \frac{\pi^2 \Gamma_{2p}}{\omega^2} . \quad (8.183)$$

Отметим, что $A(\omega) = \Gamma_{2p}\varphi(\omega)$ и $B(\omega) = C(\omega)\varphi(\omega)/\omega$ представляют собой не что иное как известные из теории излучения коэффициенты Эйнштейна, а равенство (8.183) — это соотношение Эйнштейна, см. [18].

- ▷ **Задача 28.** Вывести соотношение (8.183). Указание: можно, например, воспользоваться тем, что равенство (8.182) имеет место в условиях термодинамического равновесия, и рассмотреть случай низких температур, $T \ll \omega$.

Из равенств (8.182), (8.183) следует, что

$$F_\gamma(\omega) = \frac{\omega^2}{\pi^2} \frac{n_{2p}}{n_{1s}} . \quad (8.184)$$

Это — гладкая функция ω , поэтому можно положить в (8.181) $\omega_* = \Delta_H - \Delta_{2p} = 3\Delta_H/4$. Кроме того, к времени последнего рассеяния большинство протонов находится в $1s$ -атомах водорода, так что $n_{1s} \approx n_B$. В итоге мы получаем, что убыль свободных электронов, вызванная реакций (8.176), даётся выражением

$$\left(\frac{dn_e}{dt} \right)_{2p \rightarrow 1s} = -\frac{H}{n_B \pi^2} \left(\frac{3\Delta_H}{4} \right)^3 n_{2p} . \quad (8.185)$$

Наконец, в условиях частичного термодинамического равновесия имеем $n_{2p} = 3n_{2s}$. Суммируя вклад (8.185) с вкладом (8.178), мы и получаем формулу (8.179) с

$$\Gamma_{eff} = \Gamma_{2s} + 3 \frac{H}{n_B \pi^2} \left(\frac{3\Delta_H}{4} \right)^3 \quad (8.186)$$

При $T = T_r = 0.25$ эВ и $n_B = 0.75 \cdot 6.15 \cdot 10^{-10} n_\gamma$ второе слагаемое здесь равно 7.1 с^{-1} , так что $\Gamma_{eff}(T_r) = 14.3 \text{ с}^{-1} = 1.85\Gamma_{1s}$. К концу рекомбинации около 54% электронов попадают на $1s$ -уровень в результате переходов $2s \rightarrow 1s$, а 46% — за счёт Лайман- α реакций.

Явление, аналогичное только что рассмотренному, имеется и в случае реакций (8.174). В этом случае вместо равенства (8.182) имеем

$$A(\omega)n_e^2 = \sigma_I(\omega)F_\gamma(\omega)n_{1s}. \quad (8.187)$$

Скорость прямой реакции рекомбинации протона и электрона пропорциональна $n_p n_e = n_e^2$, что и отражено в левой части (8.187), а скорость обратной — спектральной плотности фотонов с энергией ω (разумеется, $\omega \geq \Delta_H$), числу $1s$ -атомов и сечению ионизации σ_I . Воспользуемся тем, что в термодинамическом равновесии скорости прямой и обратной реакций совпадают, и запишем уравнение для коэффициента $A(\omega)$ (уравнение детального баланса),

$$A(\omega)(n_e^{eq})^2 = \sigma_I(\omega)F_\gamma^{eq}(\omega)n_{1s}^{eq}.$$

Найдя отсюда $A(\omega)$, подставим его в (8.187) и получим спектральную плотность с $\omega \geq \Delta_H$

$$F_\gamma(\omega) = \frac{n_e^2 n_{1s}^{eq}}{(n_e^{eq})^2 n_{1s}} F_\gamma^{eq}(\omega). \quad (8.188)$$

Выбывание фотонов из области энергий $\omega > \Delta_H$ даётся формулой (8.181), но с $\omega_* = \Delta_H$; это же выражение даёт убыль свободных электронов, обусловленную процессами (8.174). Отношение данного вклада к вкладу Лайман- α процессов даётся отношением (8.188) и (8.184) (с точностью до отношения энергий фотонов $\Delta_H/(\Delta_H - \Delta_{2p}) = 4/3$),

$$\frac{(dn_e/dt)_{ep \rightarrow 1s}}{(dn_e/dt)_{2p \rightarrow 1s}} \simeq \frac{F_\gamma^{eq}(\Delta_H) n_{1s}^{eq}}{(n_e^{eq})^2} \frac{\pi^2}{\Delta_H^2} \left(\frac{T m_e}{2\pi} \right)^{3/2} \cdot e^{-\frac{\Delta_H}{4T}}$$

где для величины $n_{2p} = 3n_{2s}$ мы использовали соотношение (8.177) и опустили численный множитель порядка единицы. Используем формулу (8.172) для равновесной спектральной плотности фотонов, формулу (1.6.26) для равновесной концентрации электронов и положим $n_{1s} \approx n_B$. Получим окончательно

$$\frac{(dn_e/dt)_{ep \rightarrow 1s}}{(dn_e/dt)_{2p \rightarrow 1s}} \simeq e^{-\frac{\Delta_H}{4T}}.$$

Малость этой величины означает, что вклад процессов (8.174) в образование $1s$ -атомов и исчезновение свободных электронов пренебрежимо мал.

Отметим, что в нашей ситуации с затянутым процессом рекомбинации плотность числа свободных электронов n_e заметно превышает равновесное значение n_e^{eq} , а число $1s$ -атомов, наоборот, меньше равновесного. Поэтому в соответствии с (8.188) спектральная плотность фотонов с $\omega \geq \Delta_H$ заметно превышает равновесную, как мы и говорили ранее.

Наконец, обоснуем наше пренебрежение процессом, обратным к $2s \rightarrow 1s + 2\gamma$. Этот обратный процесс идёт путём поглощения двух тепловых фотонов. Его скорость пропорциональна плотности числа $1s$ -атомов, а в тепловом равновесии она должна совпадать со скоростью прямого процесса (8.178). Отсюда сразу получаем

$$\left(\frac{dn_e}{dt} \right)_{1s \rightarrow 2s} = \Gamma_{2s} n_{2s}^{eq} \frac{n_{1s}}{n_{1s}^{eq}} = \Gamma_{2s} n_{1s} e^{-(\Delta_H - \Delta_{2s})/T}.$$

Этим процессом можно пренебречь по сравнению с прямым, если его темп мал по сравнению с темпом (8.178), то есть при

$$n_{1s} e^{-(\Delta_H - \Delta_{2s})/T} \ll n_{2s} \quad (8.189)$$

Величину n_{2s} найдём из (8.177), (8.180), а величину n_{1s} оценим как $n_{1s} \approx n_B = \eta_B n_\gamma$. Подставив численные значения, нетрудно убедиться, что соотношение (8.189) действительно выполняется.

▷ Задача 29. Провести намеченную только что численную оценку.

Отметим, что излучаемые на заключительной стадии рекомбинации фотоны не успевают войти в равновесие. Поскольку эти фотоны имеют высокие энергии, они попадают в виновскую область спектра. В результате в области высоких частот спектр реликтового излучения несколько отличается от планковского, однако это искажение весьма мало. Подробности см., например, в [41].

8.5.2 Эффект Силка

Обратимся теперь к эффекту Силка. Для первоначальной оценки его пространственного масштаба будем считать, что при интересующих нас температурах фотон при рассеянии на электроне меняет своё направление случайным образом, а энергию не меняет. Тогда осцилляции фотонной компоненты замываются на масштабах, меньших чем расстояние, на которое фотон диффундирует за характерное время эволюции — до начала рекомбинации это хаббловское время. В таком приближении “случайного блуждания” масштаб Силка λ_S оценивается как среднее геометрическое длины свободного пробега фотона λ_γ и размера горизонта l_H (или хаббловского времени $t_H \sim H^{-1}$): число столкновений фотона с электронами за хаббловское время оценивается как t_H/λ_γ , а расстояние между столкновениями — порядка λ_γ , так что фотон за хаббловское время диффундирует на расстояние

$$\lambda_S \sim \lambda_\gamma \sqrt{\frac{t_H}{\lambda_\gamma}} = \sqrt{\lambda_\gamma \cdot l_H} .$$

Отсюда имеем

$$\lambda_S(\eta) \sim \sqrt{\frac{1}{\sigma_T \cdot n_e(\eta) \cdot H(\eta)}} . \quad (8.190)$$

Используя значения (8.160) и (8.167), получаем, что непосредственно перед рекомбинацией масштаб Силка по порядку величины равен $\lambda_S(\eta < \eta_r) \sim 0.02$ Мпк, а соответствующий современный размер оценивается как

$$(1 + z_r)\lambda_S(\eta < \eta_r) \sim 22 \text{ Мпк} . \quad (8.191)$$

В дальнейшем в этом разделе мы увидим, что эта оценка занижена примерно в 1.5 раза.

В действительности эффект Силка работает вплоть до времён $\eta \approx \eta_*$, при которых фотоны рассеиваются в последний раз. К этому времени плотность свободных электронов заметно падает, и несмотря на малую длительность периода рекомбинации пространственный масштаб диффузии фотонов успевает несколько вырасти. Аналитическую оценку последнего эффекта сделать довольно трудно; несколько условно мы будем полагать, что в конечном итоге эффект Силка приводит к замыванию возмущений с современными длинами волн

$$\lambda \lesssim \lambda_{S,0} \simeq 50 \text{ Мпк} . \quad (8.192)$$

Соображения в пользу справедливости этой оценки мы приведём ниже, см. (8.211). Соответствующий импульс равен

$$\frac{k_S}{a_0} = \frac{2\pi}{\lambda_{S,0}} \simeq 0.1 \text{ Мпк}^{-1} . \quad (8.193)$$

Итак, осцилляции фотонной компоненты с современными длинами волн меньше $\lambda_{S,0}$ подавлены к концу эпохи рекомбинации.

Аккуратный учёт эффекта Силка требует решения уравнения Больцмана для компонент среды в эпоху рекомбинации совместно с уравнениями Эйнштейна. Важным отличием от случая безмассовых нейтрино, рассмотренного в разделе 8.4, является необходимость учёта взаимодействия фотонов с электронами. Оно приводит к

появлению в правой части уравнения Больцмана для фотонов нетривиального интеграла столкновений (8.35). В лидирующем порядке по электромагнитной константе связи α квадрат амплитуды рассеяния после усреднения по поляризациям фотона⁹ имеет в системе покоя электрона (rest frame) следующий вид (см. [18] и (8.26)):

$$|\mathcal{M}|^2 = \frac{\alpha^2}{2} \left(\frac{\omega'_{rf}}{\omega_{rf}} + \frac{\omega_{rf}}{\omega'_{rf}} - \sin^2 \theta_{rf} \right) \delta(P_{\gamma,rf} + P_{e,rf} - P'_{\gamma,rf} - P'_{e,rf}) , \quad (8.194)$$

где θ_{rf} — угол рассеяния фотона, ω_{rf} и ω'_{rf} — частоты начального и конечного фотонов, соответственно; остальные обозначения стандартны. Переход в лабораторную систему, относительно которой начальные электрон и фотон имеют 3-импульсы \mathbf{P}_e и \mathbf{P}_γ соответственно, осуществляется с помощью лоренцева буста с γ -фактором $\gamma = (1 - \mathbf{P}_e^2/m_e^2)^{-1/2}$. При этом частоты фотонов в двух системах связаны преобразованием Лоренца

$$\omega_{rf} = \left(\omega - \mathbf{P}_\gamma \frac{\mathbf{P}_e}{m_e} \right) \gamma . \quad (8.195)$$

В интересных для нас случаях электроны существенно нерелятивистские, и их можно рассматривать в приближении идеальной жидкости, имеющей плотность n_e и скорость \mathbf{v}_e . Эти параметры связаны с функцией распределения, входящей в интеграл столкновений Больцмана (8.35),

$$n_e = \int d^3 P_e f_e(\mathbf{P}_e) , \quad \mathbf{v}_e = \frac{1}{m_e n_e} \int d^3 P_e \mathbf{P}_e f_e(\mathbf{P}_e) .$$

Видно, что для вычисления линейных по \mathbf{v}_e вкладов в интеграл столкновений достаточно ограничиться линейными поправками по скоростям электронов в выражении для квадрата матричного элемента $|\mathcal{M}|^2$. Подставляя (8.195) в (8.194), получим в линейном порядке по \mathbf{v}_e :

$$|\mathcal{M}|^2 \propto 1 + \cos^2 \theta - 2(1 - \cos \theta) \cos \theta \cdot \left(\frac{\mathbf{P}_\gamma}{\omega} + \frac{\mathbf{P}'_\gamma}{\omega'} \right) \mathbf{v}_e . \quad (8.196)$$

▷ Задача 30. Получить формулу (8.196).

Аналогично следует разложить в ряд по \mathbf{v}_e и другие величины, фигурирующие в интеграле столкновений (8.35), в частности,

$$\frac{1}{P_e^0 \cdot P_e^{0'}} = \frac{1}{m_e^2} \left(1 - \frac{(\mathbf{P}_\gamma - \mathbf{P}'_\gamma) \mathbf{v}_e}{m_e} - \frac{(\mathbf{P}_\gamma - \mathbf{P}'_\gamma)^2}{2m_e^2} \right) . \quad (8.197)$$

Подставляя (8.196) и (8.197) в выражение для интеграла столкновений Больцмана (8.35), произведём интегрирование по начальным и конечным импульсам электронов. При этом половина интегралов по пространственным импульсам снимается

⁹Вообще говоря, как при рекомбинации, так и при последующем распространении реликтовых фотонов большой интерес представляют поляризационные эффекты, которые мы будем рассматривать в Главе 10. Здесь мы интересуемся физикой процессов, приводящих к подавлению возмущений фотонов. Поляризационные эффекты не слишком существенны для протекания этих процессов, и их учёт приводит лишь к изменению некоторых численных коэффициентов на множители порядка единицы, на что будет указано в соответствующем месте.

пространственной δ -функцией, входящей множителем в (8.194), а вторая половина приводит к появлению выражений, сводящихся к n_e и v_e . В результате получим для интеграла столкновений в нулевом и первом порядке по скорости электронов:

$$\begin{aligned} C[f_\gamma] &= \frac{3}{4}(1+\Phi)an_e\sigma_T \cdot \int \frac{d\Omega'}{4\pi} \int \frac{\omega'd\omega'}{\omega} \\ &\times \left[\left(1 + \cos^2\theta + 2(1 - \cos\theta)\cos\theta \cdot \left(\frac{\mathbf{v}_e\mathbf{P}_\gamma}{\omega} + \frac{\mathbf{v}_e\mathbf{P}'_\gamma}{\omega'} \right) \right) \delta(\omega - \omega') \right. \\ &\left. + (1 + \cos^2\theta)(\mathbf{v}_e\mathbf{P}'_\gamma - \mathbf{v}_e\mathbf{P}_\gamma) \frac{\partial\delta(\omega - \omega')}{\partial\omega'} \right] [f_\gamma(x, \mathbf{P}'_\gamma) - f_\gamma(x, \mathbf{P}_\gamma)] . \end{aligned}$$

Видно, что равенство квадратов матричных элементов прямых и обратных процессов комптоновского рассеяния приводит к зависимости результата от *разности* функций распределения фотонов до и после рассеяния: учтено как выбывание фотонов в результате рассеяния, так и их появление.

После интегрирования по частоте излучаемого фотона получим для интеграла столкновений в линейном порядке по скорости электронов:

$$C[f_\gamma] = -(1+\Phi)\tau'f_\gamma - \tau'\mathbf{n}\mathbf{v}_e\kappa \frac{\partial f_\gamma}{\partial\kappa} \quad (8.198a)$$

$$+ \frac{3}{16\pi}(1+\Phi)\tau' \int d\mathbf{n}' f_\gamma(\kappa, \mathbf{n}') \left(1 + (\mathbf{n}\mathbf{n}')^2 \right) . \quad (8.198b)$$

Здесь мы для краткости заменили произведение $an_e\sigma_T$ на величину τ' , пользуясь определением (8.162), и перешли к конформной частоте фотона κ . В интеграле столкновений (8.198) первые два вклада (8.198a) учитывают выбывание фотонов (данной энергии, распространяющихся в данном направлении) в результате рассеяния на электронах, а вклад (8.198b) описывает появление фотонов в результате комптоновского рассеяния фотонов всех энергий (изменением частоты фотона в этом процессе можно пренебречь при интересующих нас температурах, изменяется только направление распространения фотона). Выделив в полной функции распределения фотонов пространственно-однородную и неоднородную части $f_\gamma^{(0)}$ и δf_γ согласно (8.53), получим из (8.57) уравнение Больцмана в линейном порядке по неоднородностям:

$$\begin{aligned} \delta f'_\gamma + \mathbf{n} \frac{\partial \delta f_\gamma}{\partial \mathbf{x}} - \left(\Psi' + \mathbf{n} \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{x}} \right) \cdot \frac{\partial \ln f_\gamma^{(0)}}{\partial \ln \kappa} &= -\tau' \delta f_\gamma - \tau' \mathbf{n} \mathbf{v}_e \kappa \frac{\partial \delta f_\gamma}{\partial \kappa} \\ - \tau' \mathbf{n} \mathbf{v}_e \delta f_\gamma \kappa \frac{\partial \ln f_\gamma}{\partial \kappa} + \frac{3}{16\pi} \tau' \int d\mathbf{n}' \delta f_\gamma(\kappa, \mathbf{n}') \left(1 + (\mathbf{n}\mathbf{n}')^2 \right) . \end{aligned} \quad (8.199)$$

▷ *Задача 31.* Найти явный вид уравнения Больцмана для фотонов в пренебрежении скалярными потенциалами, но с учётом тензорных возмущений метрики.

Для описания динамики фотонов, отщепляющихся от электрон-барионной компоненты, нам будет достаточно рассмотреть модификацию соответствующих уравнений непрерывности и Эйлера, учитывающую комптоновское рассеяние. Формальный способ, позволяющий получить эту модификацию, состоит в разложении уравнения

Больцмана (8.199) по мультиполям, что подробно было проведено нами для случая нейтрино в разделе 8.4.1. Поэтому для фотонов мы приведём только ответ:

$$\delta'_\gamma - \frac{4k^2}{3}v_\gamma + 4\Psi' = 0, \quad (8.200a)$$

$$v'_\gamma + \frac{1}{4}\delta_\gamma + \pi_\gamma + \Phi = -(v_\gamma - v_B)\frac{\tau'}{k}, \quad (8.200b)$$

$$\pi'_\gamma - \frac{4}{15}k^2v_\gamma + \frac{3}{10}kF_{\gamma,3} = -\frac{9}{10}\tau'\pi_\gamma, \quad (8.200c)$$

$$F'_{\gamma,l} - \frac{l}{2l+1}F_{\gamma,l-1} + \frac{l+1}{2l+1}F_{\gamma,l+1} = -F_{\gamma,l}\frac{\tau'}{k}, \quad l = 3, 4, \dots, \quad (8.200d)$$

где мы учли, что $v_e = v_B$. Решение системы уравнений (8.200) совместно с аналогичными уравнениями для барионов позволяет определить поведение возмущений в любой момент времени.

▷ *Задача 32. Вывести систему уравнений (8.200) из уравнения Больцмана (8.199).*

Слагаемые в правых частях уравнений (8.200) возникли из-за взаимодействия фотонов с электронами: именно за счёт него фотоны не могут свободно распространяться в плазме. Полезно сравнить уравнения (8.200a) и (8.200b) с уравнениями (5.6), (5.7) для фотонов; в последних следует положить $u_s^2 = w = 1/3$. Из этого сравнения видно, что модификации подверглось только уравнение Эйлера, уравнение же непрерывности осталось прежним. Соответствующая модификация уравнения Эйлера для барионов (уравнения (5.7) с $u_s^2 = \omega = 0$) имеет вид

$$v'_B + H a v_B + \Phi = -(v_B - v_\gamma)\frac{\tau'}{k R_B}, \quad (8.201)$$

где (см. раздел 6.2)

$$R_B \equiv \frac{3\rho_B}{4\rho_\gamma}.$$

Как и в случае фотонов, уравнение непрерывности для барионов не модифицируется и имеет прежний вид (5.6) с $u_s = w = 0$. При сравнении этого уравнения с уравнением (8.200a) видно, что выполняется условие адиабатичности возмущений в барион-фотонной плазме, $3\delta'_\gamma = 4\delta'_B$.

Теперь мы можем обобщить уравнения (6.32) и (6.34), полученные в приближении тесной связи. Мы будем рассматривать моды, длина волн которых превышает длину свободного пробега фотона, то есть

$$k \ll \tau'; \quad (8.202)$$

для более коротких волн доминирующим эффектом является затухание Ландау. Оценка (8.191) показывает, что речь идёт о модах, входящих под горизонт на радиационно-доминированной стадии. Такие моды содержат осциллирующую часть (6.36); именно ей мы и будем интересоваться. В связи с этим пренебрежём влиянием гравитационных потенциалов. Для упрощения формул пренебрежём и вкладами в уравнения, пропорциональными параметру Хаббла — их эффект учтён в затухающем множителе в (6.36). В рамках сделанных приближений рассмотрим уравнения (8.200) и (8.201), при этом будем интересоваться линейными поправками по k/τ' . Из

уравнений (8.200b) и (8.201) получим для разности скоростей фотонной и барионной компонент:

$$v_\gamma - v_B = -\frac{R_B}{4(1+R_B)} \frac{1}{\tau'} \cdot \delta_\gamma \quad (8.203)$$

(здесь мы пренебрегли вкладом потенциала анизотропных натяжений фотонов π_γ , который, как видно из (8.200c), в лидирующем порядке равен нулю, а потому вклада в (8.203) не даёт). Умножая уравнение (8.201) на R_B и складывая результат с (8.200b), получим

$$v'_\gamma + R_B v'_B + \frac{1}{4} \delta_\gamma + \pi_\gamma = 0.$$

Комбинируя это уравнение с продифференцированным по конформному времени уравнением (8.203), найдём, как модифицируется в линейном порядке по k/τ' уравнение Эйлера для фотонов:

$$(1+R_B) v'_\gamma + \frac{1}{4} \delta_\gamma + \frac{R_B^2}{1+R_B} \frac{1}{4\tau'} \delta'_\gamma + \pi_\gamma = 0. \quad (8.204)$$

Здесь мы пренебрегли производными R_B и τ' по времени по сравнению с производными относительного возмущения плотности энергии фотонов δ_γ (это законно, поскольку мы интересуемся модами глубоко под горизонтом, а до рекомбинации $(\ln R_B)' \sim (\ln \tau')' \sim 1/(Ha) \ll k$). Из уравнения (8.204) выразим производную скорости и подставим её в уравнение непрерывности (8.200a), продифференцированное по конформному времени. В результате получим:

$$\delta''_\gamma + \frac{R_B^2}{3(1+R_B)} \frac{k^2}{\tau'} \delta'_\gamma + \frac{k^2}{3(1+R_B)} \delta_\gamma + \frac{4k^2}{3(1+R_B)} \pi_\gamma = 0. \quad (8.205)$$

Наконец, для потенциала анизотропных натяжений фотона подставим приближённое выражение

$$\pi_\gamma \simeq \frac{8}{9} \cdot \frac{k^2}{3\tau'} \cdot v_\gamma. \quad (8.206)$$

Такая связь между π_γ и v_γ следует в линейном порядке по k/τ' из уравнения (8.200c) (вкладом старшего мультиполя $F_{\gamma,3}$ можно пренебречь: из (8.200) видно, что в линейном порядке по k/τ' между мультипольями существует иерархия $F_{\gamma,l}/F_{\gamma,l-1} \simeq k/(2\tau')$).

Подставляя (8.206) в (8.205) и выражая скорость фотонов v_γ из уравнения непрерывности (8.200a), получим окончательно уравнение на относительную флуктуацию плотности энергии фотонов:

$$\delta''_\gamma + \frac{k^2}{3(1+R_B)\tau'} \left(\frac{8}{9} + \frac{R_B^2}{1+R_B} \right) \delta'_\gamma + k^2 u_s^2 \delta_\gamma = 0, \quad (8.207)$$

где, как и в разделе 6.2, скорость звука даётся выражением $u_s^2 = [3(1+R_B)]^{-1}$. Второе слагаемое в уравнении (8.207) пропорционально δ'_γ ; оно и определяет скорость затухания амплитуды акустических колебаний в плазме. Решая это уравнение в ВКБ-приближении, найдём, что

$$\delta_\gamma(\eta) = \frac{A}{(1+R_B)^{1/4}} \exp \left(-\frac{k^2}{k_S^2(\eta)} \right) \cos \left(k \int^\eta d\tilde{\eta} u_s \right), \quad (8.208)$$

где мы восстановили затухающий множитель, присутствующий в (6.36); для адиабатической моды возмущений амплитуда A даётся формулой (6.37). Конформный импульс Силка здесь даётся выражением

$$\frac{1}{k_S^2(\eta)} = \frac{1}{6} \int_0^\eta \frac{d\eta'}{(1+R_B)\tau'} \left(\frac{8}{9} + \frac{R_B^2}{1+R_B} \right) . \quad (8.209)$$

Определённая таким образом величина k_S с точностью до численного множителя порядка единицы соответствует оценке (8.190). Действительно, до начала рекомбинации, пока доля свободных электронов близка к единице, в каждый фиксированный момент времени $\eta < \eta_r$ можно оценить интеграл (8.209) как $1/k_S^2 \sim \eta/\tau'$, так что возмущения с импульсами $k \gtrsim \sqrt{\tau'/\eta}$ испытывают экспоненциальное подавление. С учётом того, что на пылевидной стадии выполнено $H = 2/(a\eta)$, и, кроме того, что $\tau' = a\sigma_T n_e$, физический импульс Силка оценивается величиной $q_S = k_S/a \sim \sqrt{H\sigma_T n_e}$, в согласии с (8.190).

Отметим, что учёт поляризационных эффектов модифицирует систему уравнений (8.200). Применительно к нашим вычислениям это приводит к незначительным изменениям численных коэффициентов. А именно, в формулах (8.206), (8.207) и (8.209) вместо множителя $8/9$ будет стоять $16/15$. Таким образом, эффект подавления будет несколько усилен.

Для оценки импульса Силка к началу рекомбинации учтём, что $\tau' = a(\eta)n_e(\eta)\sigma_T \propto \eta^{-4}$. Интеграл в (8.209) набирается на верхнем пределе, а R_B невелико, см. (6.41), так что его зависимость от времени не слишком существенна. Пренебрегая этой зависимостью, получим с учётом сделанного только что замечания

$$\frac{1}{k_S^2(\eta_r)} = \frac{1}{30} \frac{\eta_r}{a(\eta_r)n_e(\eta < \eta_r)\sigma_T(1+R_B)} \left(\frac{16}{15} + \frac{R_B^2}{1+R_B} \right) .$$

Физический импульс Силка определяется соотношением

$$\frac{a^2(\eta_r)}{k_S^2(\eta_r)} = \frac{1}{15} \frac{1}{H(\eta_r)n_e(\eta < \eta_r)\sigma_T(1+R_B)} \left(\frac{16}{15} + \frac{R_B^2}{1+R_B} \right) . \quad (8.210)$$

Оно уточняет оценку (8.190). Используя (6.41), получим, что соответствующее значение длины волны $\lambda_S(\eta_r) = 2\pi/q_S(\eta_r)$ численно больше приведённого в (8.191) примерно в 1.5 раза. Подчеркнём, что величина (8.210) представляет собой масштаб Силка непосредственно *перед* началом рекомбинации.

Приближение, в рамках которого была получена формула (8.208), перестаёт работать в эпоху рекомбинации. Как мы отмечали в разделе 8.5.1, в эпоху рекомбинации плотность числа свободных электронов быстро падает, поэтому быстро меняется и длина свободного пробега фотона, то есть параметр τ' . Ясно, что при этом перестают выполняться условия применимости ВКБ-приближения. Более того, перестаёт быть справедливым само уравнение (8.207), полученное в приближении медленного изменения величины τ' . Наконец, при уменьшении плотности числа электронов перестаёт выполняться и неравенство (8.202) — фотоны перестают быть сколько-нибудь тесно связанными с барионами. Всё это приводит к серьёznм трудностям в аналитическом описании влияния эффекта Силка на возмущения фотонов и барионов в эпоху рекомбинации. Влияние это, однако, весьма существенно. Чтобы увидеть это, оценим вклад эпохи рекомбинации в интеграл (8.209), положив в нём $\eta = \eta_r$ (примерно

в это время фотоны рассеиваются в последний раз). В эпоху рекомбинации плотность свободных электронов n_e падает согласно (8.164). Экспоненциально убывает и величина $\tau'(\eta) = a\sigma_T n_e(\eta)$. Переходя к переменной интегрирования $1/T$, получим

$$\frac{1}{k_S^2(\eta_*)} = \frac{1}{k_S^2(\eta_r)} + \Delta \left(\frac{1}{k_S^2} \right), \quad (8.211)$$

где

$$\Delta \left(\frac{1}{k_S^2} \right) \simeq \frac{1}{6} \frac{1}{a^2 H \sigma_T n_e(\eta_*) (1 + R_B)} \frac{4T_r}{\Delta_H} \left(\frac{16}{15} + \frac{R_B^2}{1 + R_B} \right)$$

— вклад эпохи рекомбинации. Отношение второго слагаемого в (8.211) к первому составляет

$$\frac{10T_r}{\Delta_H} \frac{n_e(\eta < \eta_r)}{n_e(\eta_*)} \simeq 1.3,$$

где мы воспользовались численными значениями (8.160) и (8.168). Таким образом, величина $1/k_S^2$ заметно увеличивается за время рекомбинации (согласно нашей оценке, примерно в 2.3 раза, что означает увеличение длины волны $\lambda_S = 2\pi/k_S$ примерно в полтора раза). Это соответствует оценке, приведённой в (8.192).

Итак, мы приходим к следующей картине. Для волн в барион-фотонной среде с длинами, меньшими длины свободного пробега фотона к эпохе рекомбинации, основным эффектом является затухание Ландау. Соответствующая область современных длин волн — это $\lambda_0 \lesssim 2$ Мпк, см. (8.161). Волны с современными длинами 2 Мпк $\lesssim \lambda_0 \lesssim 50$ Мпк испытывают эффект Силка вплоть до рекомбинации включительно, и в грубом приближении осцилляции фотонной компоненты в эпоху последнего рассеяния даются формулой (8.208), в которой следует положить $k_S \simeq a_0 \cdot 0.1$ Мпк $^{-1}$. Возмущения с $\lambda_0 \gg 50$ Мпк вовсе не испытывают подавления, и для них справедлива формула (6.36).

Глава 9

*Температура реликтового излучения

После рекомбинации, происходившей в ранней Вселенной при температуре $T \simeq 0.25$ эВ Вселенная становится прозрачной, или более точно, почти прозрачной для фотонов первичной плазмы. Эти фотоны сохранились во Вселенной до наших дней и наблюдаются в виде реликтового излучения (в англоязычной литературе используется термин *cosmic microwave background, CMB*). Измерение характеристик реликтового излучения позволяет получить важнейшую информацию о Вселенной в эпоху рекомбинации. Кроме того, на распространение реликтовых фотонов после рекомбинации влияло расширение Вселенной и процессы, связанные с образованием структур. Поэтому реликтовое излучение содержит ценную информацию и о более поздних этапах развития Вселенной.

Форма энергетического спектра реликтового излучения с высокой степенью точности совпадает с формой планковского спектра. Это утверждение — следствие анализа результатов многочисленных наблюдений реликтового излучения на различных частотах, см. раздел I.1.2.5. Небольшие вариации интенсивности излучения *в зависимости от направления прихода* — это вариации температуры, единственной характеристики планковского спектра. Средняя температура реликтовых фотонов составляет (см. раздел I.1.2.5),

$$T_0 = 2.725 \pm 0.001 \text{ K} . \quad (9.1)$$

Наибольшая угловая вариация температуры $\delta T/T \sim 10^{-3}$ имеет ярко выраженный дипольный характер и объясняется движением Земли. Более мелкая структура вариаций имеет амплитуду $\delta T/T \sim 10^{-5}$, и именно за ней стоит весьма нетривиальная физика. Помимо угловой зависимости *температуры* реликтового излучения, значительный интерес представляет и его *поляризация*, которая также зависит от направления прихода реликтовых фотонов. Вопросам, связанным с анизотропией температуры реликтового излучения, посвящена эта глава. Поляризацию реликтового излучения мы рассмотрим в Главе 10.

В разделах этой и следующей Глав, посвященных особенностям анизотропии и поляризации на тех или иных угловых масштабах, мы будем как правило считать, что скалярные возмущения находятся в адиабатической mode. Особенности возможных вкладов мод постоянной кривизны в анизотропию температуры мы рассмотрим в разделе 9.5.

9.1 Анизотропия температуры реликтового излучения

Результаты измерений интенсивности реликтового излучения в различных направлениях на небесной сфере представляют в виде зависимости температуры фотонного газа T_0 от направления \mathbf{n} . Введём отклонение температуры $T_0(\mathbf{n})$ от среднего значения (9.1),

$$\delta T_0(\mathbf{n}) \equiv T_0(\mathbf{n}) - T_0.$$

Относительную флуктуацию температуры удобно разложить в ряд по сферическим гармоникам $Y_{lm}(\mathbf{n})$, образующим на сфере полную систему (см. подробности, например, в [42] и в разделе F.2),

$$\frac{\delta T_0(\mathbf{n})}{T_0} = \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=-l}^{m=l} a_{lm} Y_{lm}(\mathbf{n}). \quad (9.2)$$

Коэффициенты разложения a_{lm} удовлетворяют условию

$$a_{l,m}^* = (-1)^m a_{l,-m}, \quad (9.3)$$

следующему из вещественности температуры и соотношения $Y_{l,m}^* = (-1)^{-m} Y_{l,-m}$. Из ортонормированности системы сферических гармоник имеем интегральное представление для коэффициентов a_{lm} :

$$a_{l,m} = \int d\mathbf{n} \frac{\delta T_0(\mathbf{n})}{T_0} Y_{lm}^*(\mathbf{n}), \quad (9.4)$$

где интегрирование ведётся по сфере единичного радиуса. Величина $\delta T(\mathbf{n})$ экспериментально измеряется, после чего определяются коэффициенты a_{lm} по формуле (9.4), и именно они используются при последующем анализе. Из асимптотики сферических гармоник (F.40), справедливой при $l \gg 1$, следует, что гармоники Y_{lm} отвечают характерным угловым масштабам $\sim \pi/l$, так что величина соответствующих коэффициентов a_{lm} даёт представление об амплитуде флуктуаций углового размера $\sim \pi/l$.

Наблюдаемая на Земле дипольная компонента с $l = 1$ в основном обусловлена движением Земли относительно системы координат, связанной с реликтовым излучением. Поэтому на практике дипольную компоненту не используют в дальнейшем анализе: из анизотропии $\delta T_0(\mathbf{n})$ вычитают дипольный вклад

$$\delta T_{dipole} = 3.346 \pm 0.017 \text{ мК}, \quad (9.5)$$

а полученный результат представляют в виде разложения (9.2), где суммирование по l начинается с $l = 2$. Начиная с $l = 2$ коэффициенты C_l не зависят от движения наблюдателя.

Движение наблюдателя со скоростью $v \ll 1$ относительно системы, в которой покоятся газ фотонов, характеризуемый планковским спектром с температурой T_0 , приводит к анизотропии наблюдаемой температуры из-за допплеровского сдвига частоты фотона,

$$T_0(\theta) = T_0 \frac{\sqrt{1-v^2}}{1-v \cos \theta} = T_0 \cdot \left(1 + v \cos \theta + \frac{v^2}{2} \cos 2\theta + \dots \right), \quad (9.6)$$

где θ — угол между направлением движения наблюдателя и лучом зрения. Для солнечной системы $v = 369 \pm 2$ км/с в направлении созвездия Гидры, и в галактических координатах направление движения даётся вектором $(263.86^\circ \pm 0.04^\circ, 48.24^\circ \pm 0.10^\circ)$. Именно по величине дипольной компоненты измеряется эта скорость.

Для изотропной Вселенной и случайного поля флюктуаций температуры коэффициенты a_{lm} не должны быть скоррелированы между собой при различных l и m . Это утверждение относится к гипотетическому случаю усреднения результатов измерения флюктуаций температуры по ансамблю Вселенных, подобных нашей по всем космологическим параметрам. Для такого ансамбля должно выполняться соотношение

$$\langle a_{lm} a_{l'm'}^* \rangle \propto \delta_{ll'} \delta_{mm'} ,$$

причём соответствующий коэффициент пропорциональности должен определяться только величиной углового момента l , но не его проекцией m , то есть

$$\langle a_{lm} a_{l'm'}^* \rangle = C_l \cdot \delta_{ll'} \delta_{mm'} . \quad (9.7)$$

Из космологических наблюдений, среди которых наблюдения реликтового излучения играют важнейшую роль, следует, что спектр первичных возмущений с хорошей степенью точности является гауссовым. В линейном режиме эволюции гауссовость сохраняется. Как мы увидим ниже, коэффициенты a_{lm} линейным образом выражаются через начальные возмущения (например, \mathcal{R} в случае адиабатической моды), поэтому они также являются гауссовыми случайными величинами, см. Приложение С. Таким образом, коэффициенты C_l полностью определяют свойства анизотропии реликтового излучения.

В действительности мы имеем дело лишь с одной Вселенной. И хотя мы мысленно можем представить себе несколько подобных нашей Вселенных, набор реальных экспериментальных данных — коэффициентов a_{lm} — всего один, и убедиться явно в справедливости формулы (9.7) невозможно. Для старших мультиполей, когда имеется большое число гармоник с разными $m = -l, \dots, l$, можно проверить, насколько статистические свойства имеющегося одного набора a_{lm} согласуются с гипотезой (9.7) и гауссовым характером флюктуаций температуры. На сегодняшний день это согласие в целом вполне удовлетворительное.

В предположении, что гипотеза (9.7) справедлива, набор коэффициентов C_l можно приблизённо найти усреднением по m квадратов модулей измеренных коэффициентов разложения a_{lm} ,

$$C_l = \frac{1}{2l+1} \sum_{m=-l}^{m=l} |a_{lm}|^2 . \quad (9.8)$$

При этом относительная статистическая погрешность в определении C_l оценивается как¹ $1/\sqrt{l+1/2}$. Именно величины (9.8), полученные с использованием формулы (9.4), в предположении о гауссовости флюктуаций температуры несут всю содержательную информацию о физике, стоящей за анизотропией реликтового излучения. Имеющаяся статистическая неопределённость, однако, позволяет ожидать, что теоретические предсказания коэффициентов C_l вполне могут отличаться от экспериментальных значений (9.8) на относительную величину порядка $1/\sqrt{l+1/2}$, и это не будет свидетельствовать о несправедливости теории. Как мы уже говорили, от

¹ Из определения (9.8) и из того, что средние от величин a_{lm} равны нулю, следует, что случайная величина C_l распределена по закону χ^2_{2l+1} , а потому её вариация равна $(\delta C_l)^2 = 2C_l^2 / (2l+1)$.

этой “космической неопределённости” нельзя избавиться в принципе; она не позволяет, вообще говоря, фиксировать со сколь угодно высокой точностью численные значения космологических параметров.

Отметим, что в литературе идёт оживлённая дискуссия на тему о том, насколько справедливы предположения об изотропии пространства и гауссовой флюктуаций. Имеющиеся на сегодня данные по малым мультипольям, возможно, указывают на наличие выделенной оси, скоррелированной с осью вращения Галактики, а также на скоррелированность гармоник с разными l и на заметное отличие величин C_l с близкими l . В литературе есть утверждения, что даже с учётом космической неопределённости некоторые из перечисленных особенностей не согласуются со свойством (9.7) и представлениями стандартной изотропной космологической модели на уровне достоверности выше 99% [43]. В то же время, анализ первичных экспериментальных данных довольно сложен, поскольку он связан с вычитанием вкладов многочисленных астрофизических источников, включая нашу Галактику. Поэтому обсуждаемые в литературе особенности анизотропии реликтового излучения могут быть вызваны систематическими погрешностями. В дальнейшем мы будем считать формулы (9.7) и (9.8) справедливыми для нашей Вселенной.

Коэффициенты C_l определяют двухточечную корреляционную функцию флюктуаций температуры $\langle \delta T_0(\mathbf{n}_1) \delta T_0(\mathbf{n}_2) \rangle$. В случае гауссовых флюктуаций через эту двухточечную функцию выражаются все остальные корреляционные функции. С учётом определения (9.2) получим для двухточечной функции

$$\langle \delta T_0(\mathbf{n}_1) \delta T_0(\mathbf{n}_2) \rangle = T_0^2 \cdot \sum_l C_l \sum_m Y_{lm}(\mathbf{n}_1) Y_{lm}^*(\mathbf{n}_2) = T_0^2 \cdot \sum_l \frac{2l+1}{4\pi} C_l \cdot P_l(\mathbf{n}_1 \mathbf{n}_2), \quad (9.9)$$

где P_l — полиномы Лежандра, и для записи второго равенства мы воспользовались теоремой сложения сферических функций.

▷ *Задача 1. Используя определения (F.38), (F.28), убедиться в справедливости представления (9.9).*

Для дисперсии флюктуаций температуры получим из (9.9)

$$\langle \delta T_0^2(\mathbf{n}) \rangle = T_0^2 \cdot \sum_l \frac{2l+1}{4\pi} C_l \approx T_0^2 \cdot \int d \ln l \cdot \frac{(l+1)l}{2\pi} C_l, \quad (9.10)$$

где последнее равенство приближённо справедливо для больших l . Таким образом, величина

$$\mathcal{D}_l \equiv T_0^2 \frac{l(l+1)}{2\pi} C_l \quad (9.11)$$

определяет квадрат амплитуды флюктуаций на логарифмическом интервале гармоник. Именно эту величину обычно представляют на графиках.

Результаты современных измерений анизотропии реликтового излучения приведены на рис. 9.1. Представлены данные трёх экспериментов: WMAP, BOOMERANG и ACBAR [44]. Для первого эксперимента (Wilkinson Microwave Anisotropy Probe [45]) представлены результаты обработки данных [46], полученных после пятилетнего наблюдения реликтового излучения со спутника. С угловым разрешением в несколько десятых градуса была исследована вся небесная сфера, что позволило с хорошей точностью определить амплитуды гармоник с $l \lesssim 700$. Распределение на небесной сфере тёплых и холодных областей реликтового излучения приведено на рисунке I.1.5. В эксперименте BOOMERANG (Balloon Observations Of Millimetric Extragalactic Radiation ANd Geophysics) использовались данные наблюдений реликтового излучения с аэростата, описавшего несколько круговых орбит в Антарктиде [47]. В этом эксперименте исследовалась лишь часть неба, зато с лучшим, чем

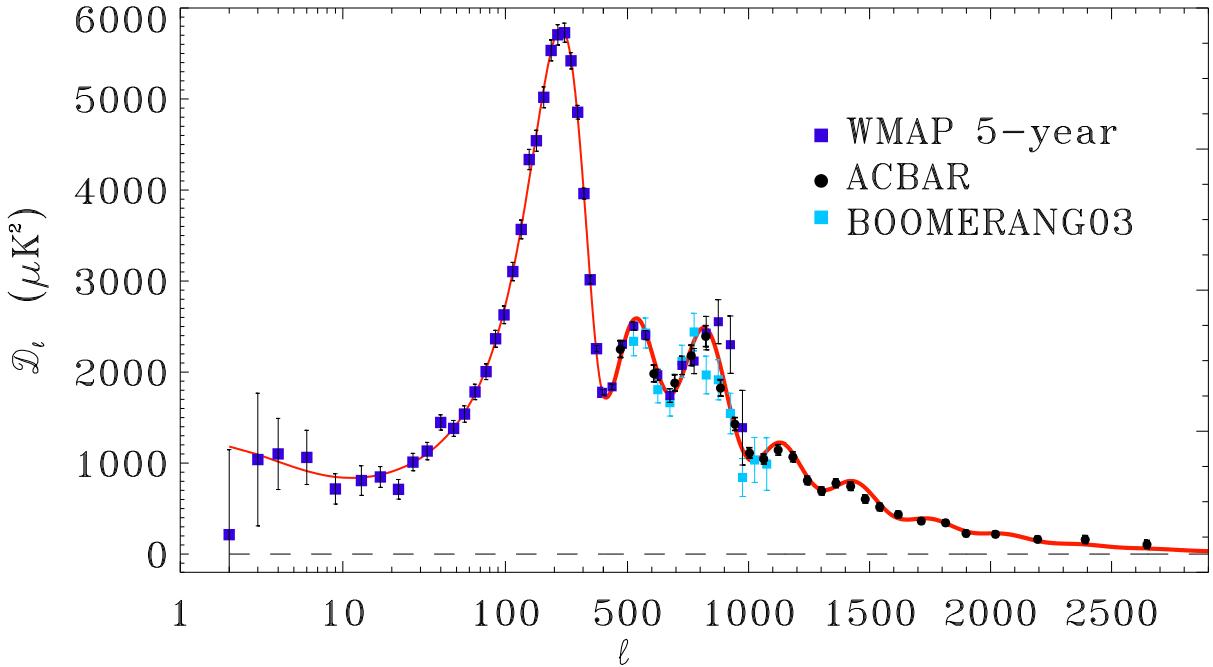


Рис. 9.1: Результаты измерения анизотропии реликтового излучения экспериментами WMAP, BOOMERANG и ACBAR [44]. Экспериментальные точки соответствуют величинам, усреднённым по небольшим интервалам угловых моментов.

у WMAP, угловым разрешением, что позволило изучить мультиполи с $l \lesssim 1000$. В эксперименте ACBAR (Arcminute Cosmology Bolometer Array Receiver) использовались данные наземного радиотелескопа, расположенного на Южном полюсе [48]. Площадь небесной сферы, доступная исследованию в таких условиях, также была ограничена и составила около 600 квадратных градусов, однако угловое разрешение было равно $5'$, что позволило изучить анизотропию реликтового излучения на очень малых угловых масштабах, $l \sim 500 - 2500$.

Экспериментальные данные, приведённые на рис. 9.1, явно свидетельствуют:

- 1) о наличии анизотропии реликтового излучения на уровне $\delta T_0/T_0 \sim 10^{-5}$;
- 2) о наличии осцилляционной картины в спектре C_l с максимумами при $l \sim 200, 500, 800, 1100, 1400$;
- 3) о падении величины анизотропии с ростом l начиная с $l \sim 500$;
- 4) о быстром затухании осцилляций в спектре C_l с ростом l при $l \gtrsim 1000$.

В рамках космологической модели Λ CDM все эти особенности находят своё объяснение, если предположить, что первичные скалярные возмущения были адиабатическими, имели спектр, близкий к плоскому, а их амплитуда на момент рекомбинации составляла величину порядка 10^{-5} . При этом наблюдаемые осцилляции в C_l как функции l связаны со звуковыми волнами в барион-фотонной среде эпохи рекомбинации. По-существу, речь идёт о явлении, аналогичном сахаровским осцилляциям (см. начало раздела 7.1.2). В дальнейшем мы обсудим вопрос об осцилляциях в угловом спектре гораздо подробнее.

Явным указанием на связь осцилляционной картины с эпохой рекомбинации является то обстоятельство, что угловой масштаб первого осцилляционного пика $\sim \pi/200$ по порядку величины совпадает с угловым размером горизонта на момент рекомбинации ~ 0.02 в пространственно плоской Вселенной (см. раздел 2.1.2). Затухание осцилляций при $l \gtrsim 1000$ отвечает замыванию возмущений в первичной

барион-фотонной плазме на малых пространственных масштабах, обусловленному эффектом Силка в эпоху рекомбинации, и конечной толщине сферы последнего рассеяния — немгновенности отщепления фотонов (см. раздел 8.5). Отметим, что на этих и особенно на ещё меньших угловых масштабах наблюдаемая анизотропия дополнительно сглажена в результате слабого линзирования фотонов, вызванного гравитационными потенциалами на масштабах галактик и их скоплений.

Приведённая на рис. 9.1 кривая линия соответствует лучшему фиту представленных экспериментальных данных параметрами пространственно-плоской Λ CDM-модели. Более тонкая часть линии полностью определяется результатами измерений WMAP, а более толстая часть, в особенности область больших l , фиксируется данными ACBAR. Отметим хорошее согласие между результатами различных экспериментов, имеющее место для промежуточных $l \sim 500 - 800$.

Обсудим более подробно, как спектр анизотропии связан с возмущениями в барион-фотонной плазме в эпоху рекомбинации и деталями распространения фотонов по Вселенной в более поздние эпохи.

9.2 Анизотропия температуры в приближении мгновенного отщепления фотонов

В этом разделе мы обсудим форму спектра анизотропии реликтового излучения на больших и промежуточных угловых масштабах, исходя из идеализированного представления о мгновенности отщепления фотонов. В этом подходе фотоны первичной плазмы описываются в рамках приближения идеальной жидкости вплоть до отщепления от электронов и барионов в самом конце эпохи рекомбинации. Став свободными, фотоны движутся в пострекомбинационной Вселенной по геодезическим. В этом разделе, там, где это не оговорено, мы будем пренебрегать взаимодействиями фотонов после их отщепления, например, с облаками ионизованного газа.

9.2.1 Общий формализм

Несколько упростить дальнейшие вычисления можно, заметив, что светоподобные геодезические, по которым распространяются фотоны в расширяющейся Вселенной, инвариантны относительно масштабных преобразований. Действительно, пусть $x^\mu(s)$ — мировая линия фотона, где s — параметр вдоль траектории. Действие для безмассовых частиц имеет вид (см. раздел I.A.7)

$$-\frac{1}{2} \int ds \frac{dx^\mu}{ds} \frac{dx^\nu}{ds} g_{\mu\nu}(x) .$$

Оно инвариантно относительно масштабных преобразований $g_{\mu\nu} \rightarrow a^2 g_{\mu\nu}$, $ds \rightarrow a^2 ds$. Поэтому геодезические $x^\mu(s)$, вычисленные в конформных координатах, совпадают с геодезическими $x^\mu(\lambda)$ в пространстве-времени с метрикой $\gamma_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}/a^2(\eta)$, которая не содержит масштабного фактора, см. (2.25). В дальнейшем мы будем работать с метрикой $\gamma_{\mu\nu}$, при этом в качестве координат, времени, импульсов и частот будут выступать соответствующие конформные величины. Мы это не всегда будем оговаривать.

Траектория фотона является решением уравнения геодезических

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\lambda^2} + \gamma_{\nu\rho}^\mu \frac{dx^\nu}{d\lambda} \frac{dx^\rho}{d\lambda} = 0 , \quad (9.12)$$

где $\gamma_{\nu\rho}^\mu$ — символы Кристоффеля, вычисленные по метрике $\gamma_{\mu\nu}$. Импульс фотона определяется, как обычно, по формуле

$$P^\mu = \frac{dx^\mu}{d\lambda}. \quad (9.13)$$

Хотя импульс (9.13) есть функция параметра вдоль траектории, удобно рассматривать его как функцию конформного времени вдоль траектории $\eta = x^0(\lambda)$. Тогда можно записать

$$\frac{dP^\mu}{d\lambda} = \frac{dx^0}{d\lambda} \cdot \frac{dP^\mu}{d\eta} = P^0 \cdot \frac{dP^\mu}{d\eta}.$$

Подставляя это выражение в уравнение (9.12) вместо $d^2x^0/d\lambda^2$, получим уравнение для нулевой компоненты импульса фотона,

$$\frac{dP^0}{d\eta} + \gamma_{\nu\rho}^0 \frac{P^\nu}{P^0} \frac{P^\rho}{P^0} P^0 = 0. \quad (9.14)$$

В качестве важного примера рассмотрим случай скалярных возмущений метрики в пространственно-плоской Вселенной (ср. (2.63), (2.64))

$$\delta\gamma_{00} = 2\Phi, \quad \delta\gamma_{ij} = -2\Psi\delta_{ij}.$$

Подставляя в уравнение (9.14) линеаризованные выражения (B.6) для символов Кристоффеля $\gamma_{00}^0 = \Phi'$, $\gamma_{oi}^0 = \partial_i\Phi$, $\gamma_{ij}^0 = \Psi'\delta_{ij}$, получим в линейном порядке по возмущениям метрики

$$\frac{dP^0}{d\eta} + P^0 \cdot \left(\Phi' + \Psi' \frac{P^i}{P^0} \frac{P^j}{P^0} \delta_{ij} + 2 \frac{P^i}{P^0} \partial_i \Phi \right) = 0. \quad (9.15)$$

Как следует из уравнения (9.12), в нулевом порядке по возмущениям $P^0 = \text{const}$, $P^i = \text{const}$, и величина $n_i = n^i = P^i/P^0$ есть единичный 3-вектор вдоль направления движения фотона. Это позволяет представить уравнение (9.15) в следующем виде:

$$\frac{dP^0}{d\eta} = (\Phi' - \Psi') P^0 - 2(\Phi' + \mathbf{n}\nabla\Phi) P^0. \quad (9.16)$$

Выражение во вторых скобках в правой части уравнения (9.16) представляет собой полную производную вдоль траектории фотона. Это следует из цепочки равенств

$$\frac{d\Phi(\eta, \mathbf{x}(\eta))}{d\eta} = \Phi' + \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \eta} \nabla \Phi = \Phi' + \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \eta} / \partial \lambda \nabla \Phi = \Phi' + \frac{\mathbf{P}}{P^0} \nabla \Phi = \Phi' + \mathbf{n} \nabla \Phi.$$

Поэтому можно проинтегрировать уравнение (9.16) и получить в линейном порядке по возмущениям метрики

$$\frac{P^0(\eta'') - P^0(\eta')}{P^0(\eta')} = \int_{\eta'}^{\eta''} (\Phi' - \Psi') d\eta - 2[\Phi(\eta'') - \Phi(\eta')], \quad (9.17)$$

где интеграл берётся вдоль траектории фотона.

Рассмотрим фотон, испущенный космической плазмой в точке \mathbf{x} . Пусть частота в системе отсчёта, где элемент среды покоятся, равна Ω . В интересующей нас системе, которая соответствует конформной ньютоновой калибровке, этот элемент среды движется с 4-скоростью U^μ (всюду речь идёт о конформных величинах). Для

случая скалярных возмущений в линейном порядке по возмущениям метрики имеем (см. раздел 2.2.2) $U^0 = 1 - \Phi$, $U^i \equiv v^i$, где v^i — 3-вектор скорости элемента жидкости. Для компонент с нижними индексами запишем

$$U_0 = 1 + \Phi, \quad U_i = -v^i. \quad (9.18)$$

Найдём связь между компонентой импульса P^0 в указанной системе и частотой Ω . В системе покоя элемента среды можно в момент испускания фотона выбрать метрику равной метрике Минковского, $\tilde{\gamma}_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$; здесь тильда отмечает величины в системе покоя элемента среды. Тогда будет выполнено соотношение $\Omega = \tilde{P}^0$. При указанном выборе метрики 4-скорость среды в сопутствующей системе в момент испускания фотона равна $\tilde{U}_\mu = (1, 0, 0, 0)$, так что $\Omega = \tilde{U}_0 \tilde{P}^0$. Это выражение можно записать в ковариантной форме, справедливой в произвольной системе отсчёта,

$$\Omega = U_\mu P^\mu, \quad (9.19)$$

причём U_μ — скорость элемента среды в выбранной системе, а P^μ — импульс фотона. В частности, правую часть формулы (9.19) можно вычислять в интересной для нас системе отсчёта, соответствующей конформной ньютоновой калибровке.

Подставляя в (9.19) выражение для скоростей (9.18), получим в линейном порядке по флуктуациям метрики

$$\Omega(\eta') = [1 + \Phi(\eta') - \mathbf{n}\mathbf{v}(\eta')] P^0(\eta'),$$

где η' — момент испускания фотона. Такую же формулу можно записать для частоты фотона, зарегистрированной наблюдателем в момент η'' , при этом $\Omega(\eta'')$ будет измеренной частотой, а \mathbf{v} — скоростью наблюдателя в конформно-ニュтоновой системе отсчёта. Тогда для относительной разности частот фотона, испущенного в направлении \mathbf{n} в момент времени η' и поглощённого затем в момент времени η'' , получим из (9.17)

$$\frac{\Omega(\mathbf{n}, \eta'') - \Omega(\mathbf{n}, \eta')}{\Omega(\mathbf{n}, \eta')} = \int_{\eta'}^{\eta''} (\Phi' - \Psi') d\eta + \Phi(\eta') - \Phi(\eta'') + \mathbf{n}\mathbf{v}(\eta') - \mathbf{n}\mathbf{v}(\eta''). \quad (9.20)$$

Итак, относительный сдвиг конформной частоты оказался пропорциональным самой частоте, поэтому форма спектра фотонов после отщепления остаётся неизменной. Отсюда следует, что в расширяющейся Вселенной физический спектр фотонов — планковский с температурой $T \propto 1/a$, но температура фотонов зависит от направления; формула для относительного изменения температуры фотонов имеет такой же вид, как и (9.20). Необходимо ещё учесть, что в момент рекомбинации имелись флуктуации температуры (частоты фотонов), обусловленные флуктуациями плотности энергии в первичной барион-фотонной плазме $\delta_\gamma \equiv \delta\rho_\gamma/\rho_\gamma = 4\delta\omega/\omega = 4\delta T/T$. Таким образом, окончательное выражение для флуктуаций измеряемой температуры реликтового излучения имеет вид

$$\frac{\delta T}{T}(\mathbf{n}, \eta_0) = \frac{1}{4} \delta_\gamma(\eta_r) + (\Phi(\eta_r) - \Phi(\eta_0)) \quad (9.21a)$$

$$+ \int_{\eta_r}^{\eta_0} (\Phi' - \Psi') d\eta \quad (9.21b)$$

$$+ \mathbf{n}\mathbf{v}(\eta_r) - \mathbf{n}\mathbf{v}(\eta_0). \quad (9.21c)$$

Вклад (9.21a) называют эффектом Сакса–Вольфа. Второе слагаемое в нём — это изменение частоты фотона вследствие изменения гравитационного потенциала Φ между точками испускания и поглощения фотона. От монопольной компоненты анизотропии, пропорциональной $\Phi(\eta_0)$, всегда можно избавиться, переопределив температуру однородной компоненты. Она не является локальной физической наблюдаемой, и в дальнейшем мы будем считать её равной нулю.

Вклад (9.21b) также обусловлен изменением частоты фотона из-за гравитационных потенциалов, на этот раз изменяющихся со временем. Учитывается изменение гравитационных потенциалов вдоль траектории фотона: если фотон пересекает область с отрицательным гравитационным потенциалом, растущим по абсолютной величине, то вначале он “падает” в меньшую гравитационную яму, чем та, из которой ему приходится “выбираться” после пересечения этой области. Фотон “потрудился”, и его частота из-за этого уменьшилась. Это явление получило название интегрального эффекта Сакса–Вольфа.

Наконец, первый вклад в (9.21c) обусловлен эффектом Допплера: свободные электроны конца эпохи рекомбинации, на которых происходило последнее рассеяние реликтовых фотонов, движутся относительно конформно-ニュтонаевой системы отсчёта со скоростью $\mathbf{v}(\eta_r)$. Второе слагаемое в (9.21c) учитывает аналогичное по физике влияние на наблюдаемую анизотропию: появление дипольной компоненты из-за движения наблюдателя со скоростью $\mathbf{v}(\eta_0)$ относительно реликтового излучения. Как мы уже упоминали, этот вклад вычитается при анализе данных по анизотропии, как не содержащий космологически интересной информации.

С учётом сказанного, в дальнейшем мы будем использовать выражение

$$\frac{\delta T}{T}(\mathbf{n}, \eta_0) = \frac{1}{4} \delta_\gamma(\eta_r) + \Phi(\eta_r) \quad (9.22a)$$

$$+ \int_{\eta_r}^{\eta_0} (\Phi' - \Psi') d\eta \quad (9.22b)$$

$$+ \mathbf{n} \mathbf{v}(\eta_r) . \quad (9.22c)$$

Подчеркнём ещё раз, что в этой формуле величины, взятые в момент η_r , относятся к точке испускания фотона, \mathbf{n} — направление движения фотона, а интеграл берётся вдоль мировой линии фотона.

Формула (9.22) не учитывает одного важного обстоятельства. В реалистической ситуации у реликтового фотона есть ненулевая вероятность рассеяться на ионизованном газе в эпоху образования первых звёзд $z \sim 10$. Это рассеяние приводит к некоторому замыванию анизотропии. Мы пока не будем учитывать этот эффект, он будет рассмотрен в разделе 9.2.3.

Для тензорных возмущений метрики h_{ij}^{TT} можно провести те же рассуждения, что и для скалярных возмущений. В этом случае ненулевые символы Кристоффеля в линейном порядке равны $\gamma_{ij}^0 = -h'_{ij}/2$ (индекс TT временно опускаем). Подставляя их в уравнение (9.14), получим уравнение на нулевую компоненту 4-импульса фотона

$$\frac{dP^0}{d\eta} - \frac{1}{2} P^0 h'_{ij} n_i n_j = 0 .$$

В линейном порядке по возмущениям множитель P^0 во втором слагаемом не зависит от времени, поэтому для временной компоненты импульса получим

$$\frac{P^0(\eta'') - P^0(\eta')}{P^0(\eta')} = \frac{1}{2} \int_{\eta'}^{\eta''} d\eta n_i h'_{ij} n_j . \quad (9.23)$$

Для тензорных возмущений $U^0 = 1$, $U^i = 0$, поэтому измеряемая частота фотона совпадает с $P^0(\eta'')$. Итак, нетривиальная тензорная структура существенно ограничивает возможные виды вкладов в анизотропию реликтового излучения: как мы видим, только интегральный эффект Сакса–Вольфа получает своё “тензорное обобщение”, давая для флуктуации температуры

$$\frac{\delta T}{T}(\mathbf{n}, \eta_0) = \frac{1}{2} \int_{\eta_r}^{\eta_0} d\eta n_i h_{ij}^{TT'} n_j , \quad (9.24)$$

где интеграл вновь берётся вдоль траектории фотона. Поскольку амплитуда гравитационных волн падает после входа под горизонт (см. (3.6)), наибольший эффект следует ожидать от возмущений больших длин волн, вошедших под горизонт после эпохи рекомбинации или незадолго перед ней, подробнее см. в разделе 9.2.2. Соответственно, ожидается, что тензорные возмущения могут давать вклад в анизотропию на больших угловых масштабах. Из измерений анизотропии температуры реликтового излучения на больших угловых масштабах и получены современные ограничения на амплитуду тензорных возмущений, которые приведены в разделе 5.4. Следует сказать, что обнаружить тензорные возмущения путём измерений анизотропии температуры трудно, поскольку, во-первых, эта анизотропия определяется суммой вкладов скалярных и тензорных возмущений, и во-вторых, извлечение космологической информации из младших мультиполей ограничено космической неопределенностью. Наиболее перспективными с точки зрения возможного обнаружения реликтовых гравитационных волн являются измерения поляризации реликтового излучения. Мы рассмотрим этот вопрос в Главе 10.

- ▷ *Задача 2. Не опираясь на вычисления, пояснить, почему нет “тензорных обобщений” других эффектов, приводящих к флуктуациям температуры в скалярном случае.*
- ▷ *Задача 3. Получить выражение для относительной флуктуации температуры в случае векторных возмущений.*

Вернёмся ко вкладам скалярных возмущений в анизотропию температуры. Прежде чем вычислять спектр анизотропии C_l , обсудим некоторые особенности интегрального эффекта Сакса–Вольфа. Общее замечание состоит в следующем. Если члены (9.22a), (9.22c) берутся в момент последнего рассеяния фотонов, когда для возмущений заведомо работает линейное приближение, то слагаемое (9.22b), соответствующее интегральному эффекту Сакса–Вольфа, содержит вклад и от поздних времён, когда линейное приближение может быть неприменимо. Мы увидим, однако, что поздний интегральный эффект Сакса–Вольфа проявляется лишь на сравнительно больших угловых масштабах. Эти угловые масштабы соответствуют большим пространственным размерам скалярных возмущений, а для них линейное приближение справедливо вплоть до современной эпохи. Таким образом, рассматриваемые в этом разделе эффекты целиком лежат в области применимости линеаризованной теории.

На пылевидной стадии гравитационные потенциалы держатся постоянными в линейном режиме, $\Phi' = \Psi' = 0$, и интегральный эффект Сакса–Вольфа отсутствует. Некоторый вклад набирается на самом раннем этапе, поскольку в эпоху рекомбинации доля релятивистского вещества в полной плотности энергии ещё заметна, а потому гравитационные потенциалы ещё несколько изменяются со временем, быстро

замораживаясь. Имеется и другой вклад, который набирается в позднюю эпоху, когда в плотности энергии во Вселенной начинает проявляться вклад тёмной энергии, и гравитационные потенциалы начинают убывать. Наличие “позднего” интегрального эффекта Сакса–Вольфа приводит к увеличению анизотропии $\delta T/T$ на больших угловых масштабах, см. раздел 9.2.2.

Измерение интегрального эффекта Сакса–Вольфа совместно с изучением крупномасштабных структур в современной Вселенной интересно с точки зрения определения закона эволюции масштабного фактора в эпоху $z \sim 0.5$, что существенно для измерения параметров тёмной энергии. Пока наблюдательные данные совместны с представлением о тёмной энергии как о космологической постоянной, однако это утверждение справедливо с не слишком высокой точностью. Отметим, что чувствительность самого по себе интегрального эффекта Сакса–Вольфа к моделям тёмной энергии не очень высока. Существенно более перспективным представляется анализ корреляций анизотропии реликтового излучения на больших масштабах со структурами в современной Вселенной: в местах, где имеются структуры, имеются и сравнительно большие гравитационные потенциалы, а значит в направлениях на эти структуры интегральный эффект Сакса–Вольфа должен проявляться особенно сильно. Указания на такие корреляции действительно имеются [49, 50].

Отсутствие интегрального эффекта Сакса–Вольфа при $z \gtrsim 1$ (а это согласуется с наблюдениями, см. например [51, 52, 53]) служит подтверждением того факта, что $\Psi' = \Phi' = 0$ при $z \gtrsim 1$, а значит с момента рекомбинации и до $z \sim 1$ Вселенная действительно была на пылевидной стадии эволюции. Замечательно, что этот факт можно использовать как источник ограничений на обобщения Стандартной модели физики частиц. Так, отсутствие вклада в анизотропию на больших угловых масштабах ограничивает область параметров моделей с долгоживущими реликтовыми частицами, распадающимися в релятивистские частицы (фотоны и/или нейтрино) с временем жизни $\tau \gtrsim 10^{13}$ с: рождающиеся релятивистские частицы несколько изменяют темп расширения Вселенной после эпохи рекомбинации, тем самым вызывая изменение гравитационных потенциалов со временем, а значит приводя к интегральному эффекту Сакса–Вольфа. С другой стороны, увеличение доли релятивистского вещества на момент рекомбинации за счёт распадов гипотетических частиц (в случае $\tau \lesssim 10^{13}$ с) вызвало бы отсрочку замораживания гравитационных потенциалов и появление дополнительного вклада в “ранний” интегральный эффект Сакса–Вольфа [54].

Теперь зайдёмся вычислением коэффициентов C_l . Нас будет здесь интересовать вклад скалярных возмущений; вклад тензорных возмущений мы рассмотрим в разделе 9.2.2. Выберем систему отсчёта с центром в точке наблюдения и обозначим за **n** 3-вектор в *направлении наблюдения*. Для дальнейшего удобно ввести специальное обозначение для современной относительной флуктуации температуры

$$\Theta_0(\mathbf{n}) \equiv \frac{\delta T}{T}(-\mathbf{n}; \eta_0). \quad (9.25)$$

Изменением знака перед вектором **n** мы учли тот факт, что при выводе основной формулы (9.22) мы считали вектор **n** сонаправленным импульсу фотона. Как следует из (9.8) и (9.4) и теоремы сложения сферических функций (см. (9.9)), для коэффициентов C_l справедливо интегральное представление через полиномы Лежандра

$$C_l = \frac{1}{4\pi} \int d\mathbf{n}' d\mathbf{n}'' \Theta_0(\mathbf{n}') \Theta_0(\mathbf{n}'') P_l(\mathbf{n}' \mathbf{n}''). \quad (9.26)$$

Для дальнейшего анализа полезно привести это выражение к более явному виду. Как мы видели в предыдущих главах, при исследовании космологических возмущений удобно работать с их Фурье-образами. Чтобы учесть этот факт, заметим, что в правой части (9.22) фигурируют величины в точках $\mathbf{x} = (\eta_0 - \tilde{\eta}) \mathbf{n}$, где $\tilde{\eta}$ — либо время рекомбинации (в (9.22a), (9.22c)), либо промежуточное время (в (9.22b)). Поэтому в терминах Фурье-образов возмущений величина $\Theta_0(\mathbf{n})$ представляет собой интеграл по импульсам от выражения, в которое направление импульса входит в комбинации $\mathbf{k}\mathbf{n}$. Удобно использовать разложение по полиномам Лежандра² и записать

$$\Theta_0(\mathbf{n}) = \sum_l i^l \cdot (2l + 1) \int d^3k \tilde{\Theta}_l(\mathbf{k}) \cdot P_l\left(\frac{\mathbf{k}\mathbf{n}}{k}\right). \quad (9.27)$$

Из этого выражения следует, что в мультиполиях $\tilde{\Theta}_l(\mathbf{k})$ содержится информация о вкладе возмущений с длиной волны $2\pi/k$ в анизотропию температуры на угловом масштабе порядка π/l .

Выделим теперь зависимость от первоначального спектра возмущений, представив $\tilde{\Theta}_l(\mathbf{k})$ в виде

$$\tilde{\Theta}_l(\mathbf{k}) = \Theta_l(k) \cdot \Phi_{(i)}(\mathbf{k}). \quad (9.28)$$

Здесь мы для определённости считаем, что возмущения находятся в адиабатической mode, и параметризуем их начальные значения величиной гравитационного потенциала $\Phi_{(i)} = -2\mathcal{R}/3$, см. (6.3). Для мод постоянной кривизны в формуле (9.28) нужно вместо $\Phi_{(i)}$ использовать $\delta_{CDM,(i)} = \mathcal{S}_{CDM}$ или $\delta_{B,(i)} = \mathcal{S}_B$. При записи (9.28) мы учли, что вся нетривиальная зависимость от направления импульса содержится в $\Phi_{(i)}(\mathbf{k})$, что согласуется с (9.22). Представление (9.28) удобно, поскольку позволяет отделить друг от друга эффекты, обусловленные различной физикой: генерацией первичных возмущений и последующей эволюцией.

В используемом нами предположении, что начальные возмущения представляют собой гауссово случайное поле, любые n -точечные корреляторы начального спектра $\Phi_{(i)}(\mathbf{k})$ выражаются через двухточечный коррелятор (5.39). Подставляя (9.27), (9.28) в (9.26) и учитывая (5.39), получим

$$\begin{aligned} C_l &= \frac{1}{4\pi} \int \frac{k^2 dk}{(2\pi)^3} P_\Phi(k) \sum_{l', l''} (-i)^{l'} (-i)^{l''} (2l' + 1) (2l'' + 1) \Theta_{l'}(k) \Theta_{l''}(k) \\ &\times \int d\mathbf{n}' \int d\mathbf{n}'' \int d\mathbf{n}_k P_{l'}(\mathbf{n}_k \mathbf{n}'') P_{l''}(-\mathbf{n}_k \mathbf{n}') P_l(\mathbf{n}'' \mathbf{n}'), \end{aligned}$$

где $\mathbf{n}_k \equiv \mathbf{k}/k$. Интегралы по угловым переменным снимаются с использованием интегрального варианта теоремы сложения для полиномов Лежандра

$$\int d\mathbf{n}'' P_l(\mathbf{n} \mathbf{n}'') P_{l'}(\mathbf{n}' \mathbf{n}'') = \delta_{ll'} \frac{4\pi}{2l + 1} P_l(\mathbf{n} \mathbf{n}').$$

В результате приходим к интегральной связи между коэффициентами асимметрии C_l , спектром начальных возмущений $P_\Phi(k)$ и величинами $\Theta_l(k)$:

$$C_l = 4\pi \int \frac{dk}{k} \cdot \mathcal{P}_\Phi(k) \cdot \Theta_l^2(k), \quad (9.29)$$

²Здесь мы пользуемся тем фактом, что полиномы Лежандра образуют полную систему функций на отрезке $[-1, 1]$.

где, как обычно, $\mathcal{P}_\Phi(k) = k^3 P_\Phi(k)/(2\pi^2) = 4\mathcal{P}_R/9$. Формула (9.29) показывает, что амплитуда l -й гармоники определяется как начальным спектром, так и величиной мультиполя Θ_l с тем же номером гармоники. Свойства мультиполей Θ_l различны в разных областях значений l , то есть на разных угловых масштабах. Поэтому мы рассмотрим большие, промежуточные и малые угловые масштабы по отдельности.

9.2.2 Большие угловые масштабы

В качестве первого приложения формулы (9.29) рассмотрим, в какие гармоники дают вклад адиабатические возмущения с длинами волн больше размера горизонта на момент рекомбинации, то есть с импульсами $k\eta_r < 1$. Мы проверим в конце этого раздела, что главным для таких длин волн является вклад (9.22а) — эффект Сакса–Вольфа. Как следует из (5.21) и (6.2), для этих длин волн выполняется

$$\frac{1}{4}\delta_\gamma = \frac{\delta T}{T}(\eta_r) = -\frac{2}{3}\Phi, \quad (9.30)$$

поэтому два слагаемых в (9.22а) дают вместе

$$\frac{\delta T}{T}(\mathbf{n}, \eta_0) = \frac{1}{3}\Phi = \frac{3}{10}\Phi_{(i)}, \quad (9.31)$$

где мы вспомнили соотношение (6.3). Отметим, что между двумя вкладами в эффект Сакса–Вольфа, $\delta_\gamma/4$ и Φ , произошло частичное сокращение.

Итак, для интересующих нас здесь возмущений главный эффект выражается формулой

$$\Theta_0(\mathbf{n}) = \frac{1}{3}\Phi[\eta_r, (\eta_0 - \eta_r)\mathbf{n}] = \frac{1}{3}\int d^3k \Phi(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}\mathbf{n}\cdot(\eta_0 - \eta_r)}. \quad (9.32)$$

Для плоской волны справедливо представление (F.34) в виде ряда по полиномам Лежандра с коэффициентами, определяемыми сферическими функциями Бесселя. Подставляя его в (9.32) и сравнивая результат с разложением (9.27), получим

$$\tilde{\Theta}_l(\mathbf{k}) = \frac{1}{3}\Phi(\mathbf{k}) j_l[(\eta_0 - \eta)r] = \frac{3}{10}\Phi_{(i)}(\mathbf{k}) j_l[(\eta_0 - \eta)r], \quad (9.33)$$

или для не зависящих от начального спектра величин:

$$\Theta_l(k) = \frac{3}{10}j_l[(\eta_0 - \eta)r] \approx \frac{3}{10}j_l(k\eta_0). \quad (9.34)$$

Поскольку сферические функции Бесселя $j_l(x)$ близки к нулю при $x < l$ и убывают при $x \gg l$ (см. Приложение F), то как следует из (9.34), (9.29), по крайней мере для интересного случая степенного спектра начальных возмущений основной вклад возмущений с длинами волн $2\pi/k$ приходится на угловые гармоники $l \sim k\eta_0$. Такую “адресность” вкладов неоднородностей фиксированных длин волн можно пояснить следующим образом. При обсуждении сравнительно небольших угловых масштабов, то есть мультиполей с $l \gg 1$, кривизной сферы последнего рассеяния можно пренебречь. В этом случае разложение вклада Сакса–Вольфа по сферическим гармоникам представляет собой по-существу Фурье-разложение величины $[\delta_\gamma/4 + \Phi](\eta_r)$ в плоскости $\eta = \eta_r$, ортогональной лучу наблюдения. Модуль соответствующего двумерного “импульса” при этом равен $k_{eff} = l/(\eta_0 - \eta_r)$. Это ясно хотя бы из того факта, что сфера последнего рассеяния имеет координатный размер $(\eta_0 - \eta_r)$, и лапласиан на

ней, равный k_{eff}^2 в “Фурье-представлении”, имеет вид $l(l+1)/(\eta_0 - \eta_r)^2 \simeq l^2/(\eta_0 - \eta_r)^2$ в разложении по сферическим гармоникам. Конечность площади сферы последнего рассеяния проявляется в том, что “импульс” k_{eff} принимает дискретные значения. С другой стороны, ясно, что возмущения с импульсом \mathbf{k} дают вклад в “Фурье-гармонику” с $k_{eff} = l/(\eta_0 - \eta_r)$ только при подходящем значении проекции импульса \mathbf{k} на плоскость, ортогональную лучу наблюдения, то есть при $k \sin \theta \approx k_{eff}$, где θ — угол между направлением импульса волны и лучом наблюдения, см. рис. 9.2. Отсюда

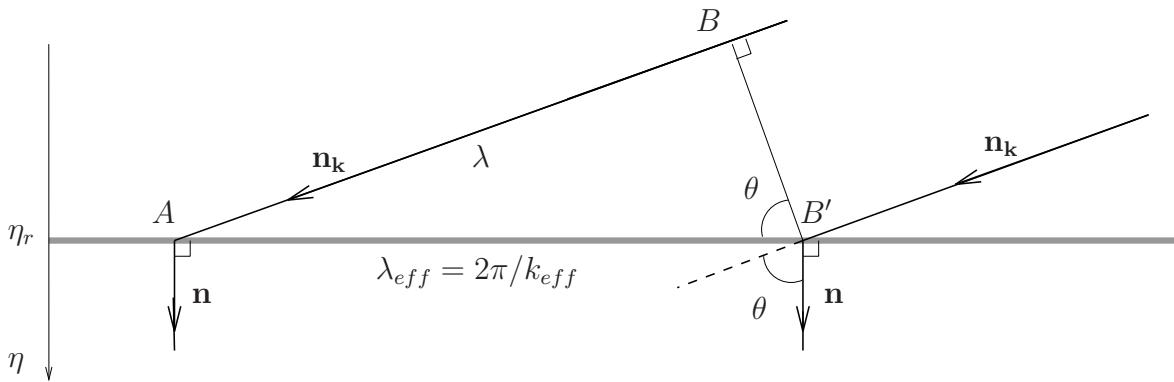


Рис. 9.2: Схематическая иллюстрация вклада моды с длиной волны $\lambda = 2\pi/k$, распространяющейся в направлении $\mathbf{n}_k \equiv \mathbf{k}/k$, в угловые гармоники $l \simeq (\eta_0 - \eta_r) k_{eff}$. От сферы последнего рассеяния (серая линия) фотоны движутся к наблюдателю вдоль направления \mathbf{n} , с которым волновой вектор \mathbf{k} образует угол θ . В плоскостях, перпендикулярных направлению \mathbf{n}_k , фаза волны одна и та же. В частности, фаза одна и та же в точках B и B' . Если точка B лежит на расстоянии λ от точки A , то фазы в точках A , B и B' равны между собой. При выполнении условия $\lambda/\sin \theta = \lambda_{eff}$ мода с импульсом k и направлением \mathbf{n}_k даёт вклад в “Фурье-гармонику” с $k_{eff} = 2\pi/\lambda_{eff}$.

и следует, что в эффект Сакса–Вольфа дают вклад возмущения с конформными импульсами $k > l/(\eta_0 - \eta_r) \approx l/\eta_0$. При этом осциллирующий характер выражения в правой части (9.34) связан с тем, что $k \sin \theta$ может не совпадать с дискретным “импульсом” k_{eff} , то есть проекция волны возмущения на плоскость, ортогональную лучу наблюдения, может оказаться не в фазе с “Фурье-гармоникой”, соответствующей “импульсу” k_{eff} . Это же соображение переносится на вклад от эффекта Допплера.

Из (9.34) видно, что в случае эффекта Сакса–Вольфа мультиполи l в основном насыщаются вкладами от неоднородностей с импульсами $k \sim l/\eta_0$ и векторами \mathbf{k} , составляющими большие углы с лучом наблюдения. Возмущения с импульсами $k \sim l/\eta_0$ дают некоторые вклады и в младшие гармоники, то есть в анизотропию на больших угловых масштабах. Эти вклады приходят от Фурье-мод с волновыми векторами, почти параллельными лучу наблюдения. В целом такое поведение согласуется с интуитивно понятным представлением о том, что возмущения фиксированной длины волны могут оказывать влияние на угловые неоднородности более крупных масштабов, но не влияют на неоднородности более мелкие.

Подставляя выражение (9.34) в (9.29), получим для квадрата амплитуды угловых гармоник

$$C_l = \frac{36\pi}{100} \int \frac{dk}{k} \mathcal{P}_\Phi(k) \cdot j_l^2(k\eta_0) . \quad (9.35)$$

Эта формула работает лишь при небольших l , то есть для больших угловых масштабов. Действительно, выражение (9.32) справедливо лишь для мод с $k\eta_r < 1$. Для того, чтобы выражение (9.35) было верно, необходимо, чтобы именно такие моды вносили основной вклад в интеграл в его правой части. Для плоского или почти плоского начального спектра, $\mathcal{P}_\Phi(k) \approx \text{const}$, интеграл в (9.35) набирается при $k \sim l/\eta_0$. Потребовав, чтобы характерный импульс l/η_0 удовлетворял соотношению $(l/\eta_0)\eta_r < 1$, и воспользовавшись (2.20), найдём, что формула (9.35) справедлива при

$$l < \frac{\eta_0}{\eta_r} \simeq 50 .$$

▷ Задача 4. Получить выражение (9.35) непосредственно из формулы (9.26).

Выберем в качестве начального спектра скалярных возмущений степенное приближение (5.40). Тогда получим из (9.35)

$$C_l = \frac{36\pi A_\Phi}{100(k_*\eta_0)^{n_s-1}} \int_0^\infty d\xi \cdot \xi^{n_s-2} \cdot j_l^2(\xi) = \frac{9A_\Phi\pi^2}{400(k_*\eta_0)^{n_s-1}} \cdot \frac{2^{n_s}\Gamma(3-n_s)\Gamma(l+\frac{n_s-1}{2})}{\Gamma^2(\frac{3}{2}-\frac{n_s-1}{2})\Gamma(l+2-\frac{n_s-1}{2})} . \quad (9.36)$$

Величина анизотропии реликтового излучения на больших угловых масштабах фиксирует начальную амплитуду возмущений A_Φ . Изменение коэффициентов C_l с l позволяет определить наклон спектра первичных возмущений n_s .

Видно, что коэффициенты C_l падают с ростом l как

$$C_l \propto \frac{1}{(l+1-\frac{n_s-1}{2})(l-\frac{n_s-1}{2})} \cdot \frac{\Gamma(l+\frac{n_s-1}{2})}{\Gamma(l-\frac{n_s-1}{2})} \propto l^{n_s-3} ,$$

т.е. степенным образом с показателем степени, отличающимся на 2 от показателя для спектра первичных возмущений. Чем синее спектр, тем больше анизотропия на малых угловых масштабах. Это в действительности общий результат, справедливый для всех мультиполей: при n_s близких к единице зависимость спектра C_l от наклона в основном соответствует соотношению

$$C_l(n_s) = \left(\frac{l}{k_*\eta_0} \right)^{n_s-1} \cdot C_l(n_s=1) , \quad (9.37)$$

см. также задачу 6.

Для случая масштабно-инвариантного спектра первичных возмущений получаем плоский спектр анизотропии реликтового излучения,

$$C_l = \frac{18\pi}{100} \frac{A_\Phi}{l(l+1)} . \quad (9.38)$$

Из сравнения (9.38) с (9.11) мы видим, что в этом случае величина \mathcal{D}_l является постоянной для рассматриваемого вклада эффекта Сакса–Вольфа, что проиллюстрировано на рис. 9.3. Для этого раздела существенна левая часть рисунка, где $l \lesssim 50$. Видно, что в этой области \mathcal{D}_l действительно почти не зависят от l . Из сравнения этого поведения с данными, приведёнными на рис. 9.1, можно заключить, что спектр первичных возмущений во Вселенной действительно близок к масштабно-инвариантному.

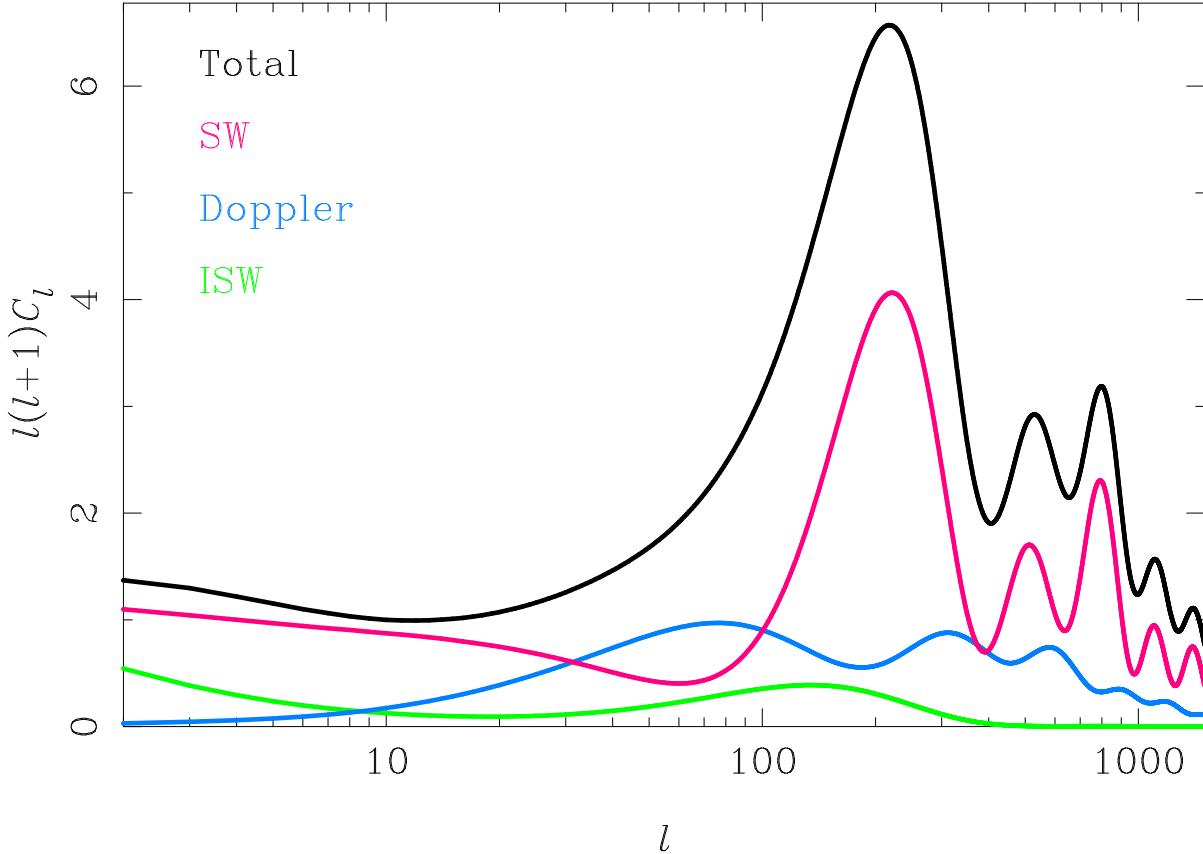


Рис. 9.3: Вклады различных эффектов в анизотропию реликтового излучения [55] для случая адиабатических возмущений в пространственно-плоской модели Λ CDM с $\Omega_\Lambda = 0.75$, $\Omega_B h^2 = 0.023$, $\Omega_{CDM} h^2 = 0.111$, $h = 0.73$; спектр первичных возмущений масштабно-инвариантный, $n_s = 1$.

Продолжая обсуждение масштабно-инвариантного спектра, проиллюстрированного на рис. 9.3, следует отметить, что для величин \mathcal{D}_l наблюдаются отклонения от плоского спектра в областях $l \sim 2 - 4$ и $l \gtrsim 50$. Помимо вклада мод с длинами волн порядка размера горизонта на момент рекомбинации, имеется ещё два источника отклонений. На поведение анизотропии при малых l оказывает влияние “поздний” интегральный эффект Сакса–Вольфа, связанный с эволюцией гравитационных потенциалов в современную эпоху перехода на стадию доминирования тёмной энергии. На поведение анизотропии при $l \gtrsim 50$ оказывает влияние тот факт, что моменты рекомбинации и перехода с радиационно-доминированной стадии на пылевидную довольно близки, что важно с точки зрения эволюции соответствующих мод. Таким образом, анизотропия на различных угловых масштабах чувствительна к моментам смены эпох во Вселенной.

Указание на существование анизотропии реликтового излучения было впервые получено в эксперименте “Реликт” [56]. Первое надёжное измерение анизотропии реликтового излучения было выполнено в наблюдениях, сделанных со спутника COBE (COsmic Background Explorer satellite [57]). Угловое разрешение данного эксперимента было довольно плохим по современным представлениям и позволяло исследовать анизотропию только для гармоник с $l \lesssim 20$. Эти наблюдения, однако, позволили увидеть, что спектр анизотропии согласуется с масштабно-инвариантным поведени-

ем (9.38). Была определена квадрупольная компонента

$$\langle Q^2 \rangle = T_0^2 \frac{5}{4\pi} C_2 ,$$

см. первую из формул (9.10). В случае плоского спектра через неё можно выразить остальные мультиполи,

$$C_l = \frac{4\pi \langle Q^2 \rangle}{5T_0^2} \frac{6}{(l+1)l} .$$

Измерения COBE дали $\langle Q^2 \rangle = (18 \mu\text{K})^2$. Отсюда найдём, что для $l \lesssim 50$

$$\mathcal{D}_l \simeq 780 \mu\text{K}^2 ,$$

в хорошем согласии с современными экспериментальными данными, см. рис. 9.1. Из (9.38) теперь следует оценка $A_\Phi = 100\mathcal{D}_l/(9T_0^2) \simeq 1.16 \cdot 10^{-9}$. С учётом соотношения $A_\Phi = 4A_R/9$ это означает, что спектр мощности величины \mathcal{R} на масштабе, близком к размеру современного горизонта, равен $A_R \simeq 2.6 \cdot 10^{-9}$. Современное значение этой величины, получаемое фитированием совокупности данных наблюдательной космологии, а также измеренное значение наклона n_s приведены в (5.37).

Убедимся теперь, что интегральный эффект Сакса–Вольфа и допплеровский вклад от загоризонтных на момент рекомбинации мод действительно подавлены (для первого эффекта это верно при $l \gtrsim 4$). Начнём с эффекта Допплера. Как следует из (9.22c), соответствующий вклад в анизотропию пропорционален скорости $\mathbf{v} \equiv \mathbf{v}_{B\gamma}$ барион–фотонной компоненты, а нам известно, что скорости для загоризонтных мод малы (см. раздел 6.1). Поэтому допплеровским вкладом в анизотропию реликтового излучения действительно можно пренебречь. Малость допплеровского вклада в низшие гармоники проиллюстрирована на рис. 9.3.

Малость позднего интегрального эффекта Сакса–Вольфа при $l \gtrsim 4$ связана с тем, что он появляется поздно, когда становится существенной тёмная энергия. При этом характерная длина траектории фотона сравнима с современным размером горизонта. Поэтому заметный вклад в интеграл (9.22b) дают возмущения с современными длинами волн порядка этого размера, то есть $k\eta_0 \sim 1$, а вклады более коротких волн усредняются при интегрировании по траектории фотона практически до нуля. Волнам с $k\eta_0 \sim 1$ соответствуют мультиполи с $l \sim 1$, так что поздний интегральный эффект Сакса–Вольфа существует лишь при малых l .

Найдём вклад позднего интегрального эффекта Сакса–Вольфа в коэффициенты $\Theta_l(k)$ в явном виде. С этой целью пренебрежём малым различием между гравитационными потенциалами Φ и $(-\Psi)$ и перейдём в правой части формулы (9.22b) к импульсному представлению:

$$\Theta_0^{ISW}(\mathbf{n}) = 2 \int_{\eta_r}^{\eta_0} d\eta \int d^3k \Phi'(\eta, \mathbf{k}) e^{i\mathbf{kn}(\eta_0 - \eta)} . \quad (9.39)$$

В этом разделе мы рассматриваем возмущения больших длин волн, поэтому для гравитационного потенциала можно воспользоваться известной нам параметризацией (4.24),

$$\Phi(\eta, \mathbf{k}) = g(\eta) \cdot \frac{9}{10} \Phi_{(i)}(\mathbf{k}) . \quad (9.40)$$

Напомним (см. раздел 4.4), что функция $g(\eta)$ не зависит от импульса³. Подставим (9.40) в (9.39) и используем разложение (F.34) для осциллирующей экспоненты. Из сравнения полученного таким образом результата с представлением (9.27), (9.28) найдём вклад Фурье-мод с импульсом k в мультиполи l :

$$\Theta_l^{ISW}(k) = \frac{9}{5} \int_{\eta_r}^{\eta_0} d\eta g'(\eta) j_l[(\eta_0 - \eta) k] . \quad (9.41)$$

Фактически интегрирование в (9.41) происходит по интервалу времени, соответствующему красным смещениям $z \lesssim 1$.

Интеграл (9.41) не удаётся взять аналитически, поэтому мы воспользуемся приближённым анализом. Прежде всего обратим внимание на то, что поскольку интеграл набирается при η , не сильно отличающемся от η_0 , то по сравнению со вкладом (9.34) обычного эффекта Сакса–Вольфа мода с определённой длиной волны будет давать основной вклад в *другие*, младшие мультиполи. Это существенно, поскольку позволяет вычислять этот вклад отдельно от обычного вклада Сакса–Вольфа: интерференционные эффекты очень малы.

Воспользуемся приближённой формулой (F.20), справедливой при $l \gtrsim 5$:

$$\int k^2 dk f(k) j_l(k\eta) j_l(k\eta') \approx \frac{\pi}{2\eta^2} f\left(\frac{l + \frac{1}{2}}{\eta}\right) \cdot \delta(\eta - \eta') , \quad (9.42)$$

где $f(k)$ — произвольная гладкая функция. Подставляя (9.41) в (9.29) и используя (9.42) для снятия интеграла по импульсам и одного интеграла по конформному времени, получим приближённо

$$C_l^{ISW} \approx 4 \cdot \frac{81}{100} \int_{\eta_r}^{\eta_0} d\eta \left(\frac{g'(\eta)}{\eta_0 - \eta} \right)^2 P_\Phi\left(\frac{l + \frac{1}{2}}{\eta_0 - \eta}\right) .$$

Для степенного спектра (5.40), введя безразмерную переменную интегрирования $\xi = \eta/\eta_0$, получим

$$C_l^{ISW} \approx 8\pi^2 \cdot \frac{81}{100} \frac{A_\Phi}{(k_*\eta_0)^{n_s-1}} \cdot \left(l + \frac{1}{2}\right)^{n_s-4} \cdot \int_{\eta_r/\eta_0}^1 d\xi \cdot (1-\xi)^{2-n_s} \left(\frac{\partial g}{\partial \xi}\right)^2 . \quad (9.43)$$

Интеграл в (9.43) набирается при $\xi \sim 1$ и не зависит от l . Таким образом, с ростом l коэффициенты C_l ведут себя как $C_l \propto l^{n_s-4}$. Для плоского спектра имеем

$$C_l^{ISW} \approx 8\pi^2 \cdot \frac{81}{100} \frac{A_\Phi}{\left(l + \frac{1}{2}\right)^3} \int_{\eta_r/\eta_0}^1 d\xi \cdot (1-\xi) \left(\frac{\partial g}{\partial \xi}\right)^2 . \quad (9.44)$$

Мы видим, что вклад позднего интегрального эффекта Сакса–Вольфа в коэффициент \mathcal{D}_l падает с ростом l , что проиллюстрировано на рис. 9.3. В разделе 4.4 были представлены численные решения для функции $g = g(z)$ в моделях с космологической постоянной в качестве тёмной энергии. Используя решение с $\Omega_\Lambda = 0.76$, можно взять интеграл в (9.44) численно,

$$\int_{\eta_r/\eta_0}^1 d\xi \cdot (1-\xi) \left(\frac{\partial g}{\partial \xi}\right)^2 \approx 1.9 \cdot 10^{-2} ,$$

и получить приближённый ответ для вклада позднего интегрального эффекта Сакса–Вольфа в амплитуды угловых гармоник,

$$C_l^{ISW} \approx 1.2 \cdot \frac{A_\Phi}{\left(l + \frac{1}{2}\right)^3} . \quad (9.45)$$

▷ Задача 5. Найти численно коэффициенты C_l , не используя приближение (9.42). Сравнить полученный результат с приближённым результатом (9.45).

³Мы, здесь ограничиваемся случаем, когда тёмная энергия представляет собой космологическую постоянную, то есть $w_{DE} = -1$. В более общем случае тёмная энергия даёт дополнительный вклад в возмущения плотности энергии и давления, и поведение гравитационных потенциалов зависит от импульса моды. С учётом имеющихся ограничений на w_{DE} этот эффект весьма мал.

Сравнивая полученный результат (9.45) с (9.38), приходим к следующей численной оценке для отношения вкладов в C_l от обычного и позднего интегрального эффектов Сакса–Вольфа:

$$\frac{C_l^{SW}}{C_l^{ISW}} \approx 0.47 \cdot \frac{(l + \frac{1}{2})^3}{l(l+1)}.$$

Мы видим, что для младших, и только для младших мультиполей вклады численно одного порядка, что согласуется с точным расчётом, представленным на рис. 9.3. Из рис. 9.3 видно также, что при $l \lesssim 50$ вклады в анизотропию реликтового излучения от обычного и интегрального эффектов Сакса–Вольфа действительно складываются некогерентно.

Как видно из приближённой формулы (9.43), рассматриваемый эффект слабо чувствителен к деталям эволюции Вселенной в переходную эпоху, поскольку он является интегральным по g' . Отсюда можно ожидать, что анализ младших мультиполей C_l в лучшем случае позволит определить лишь одну характеристику тёмной энергии, Ω_Λ . Как мы отмечали, гораздо более перспективным с точки зрения изучения свойств тёмной энергии является метод, основанный на корреляциях анизотропии реликтового излучения со структурами.

Для полноты обсуждения анизотропии на больших угловых масштабах найдём вклад в (9.24) от тензорных возмущений, входящих под горизонт после эпохи рекомбинации. В общем случае для тензорных возмущений запишем

$$h_{ij}^{TT}(\eta, \mathbf{k}) = \sum_{A=+, \times} e_{ij}^{(A)} h^{(A)}(\eta, \mathbf{k}) \quad (9.46a)$$

$$h^{(A)}(\eta, \mathbf{k}) = \mathfrak{h}(k, \eta) \cdot h_{(i)}^{(A)}(\mathbf{k}), \quad (9.46b)$$

где индекс (A) обозначает поляризацию гравитационной волны, $h_{(i)}^{(A)}$ — начальная амплитуда, \mathfrak{h} — функция перехода. Напомним (см. раздел 3.2), что для мод, входящих под горизонт на пылевидной стадии, справедливо⁴

$$\mathfrak{h}(k, \eta) = \frac{3j_1(k\eta)}{k\eta}. \quad (9.47)$$

Как и в разделе 5.4, мы будем считать $h_{(i)}^{(A)}$ гауссовыми случайными величинами с двухточечным коррелятором (5.43) и степенным спектром мощности (5.44), причём показатель наклона n_T будем считать близким к нулю.

Обратим внимание, что в (9.24) стоит частная производная по конформному времени. Подставляя (9.46a) в (9.24) и делая Фурье-преобразование по пространственным координатам, получим:

$$\Theta_0(\mathbf{n}) = \frac{1}{2} \int d^3k \int_{\eta_r}^{\eta_0} d\eta e^{i(\eta_0 - \eta)k\mathbf{n}\mathbf{n}_k} \sum_A \frac{\partial h^{(A)}}{\partial \eta} \cdot n_i n_m e_{im}^{(A)}(\mathbf{n}_k), \quad (9.48)$$

где по-прежнему $\mathbf{n}_k \equiv \mathbf{k}/k$. Осциллирующую экспоненту в (9.48) представим в виде ряда (F.34) по полиномам Лежандра, после чего запишем для относительных флуктуаций температуры:

$$\begin{aligned} \Theta_0(\mathbf{n}) &= \frac{1}{2} \int d^3k \sum_{A=+, \times} n_p n_q e_{pq}^{(A)}(\mathbf{n}_k) \cdot h_{(i)}^{(A)}(\mathbf{k}) \\ &\times \sum_{l'=0}^{\infty} (2l' + 1) i^{l'} \cdot P_{l'}(\mathbf{n}\mathbf{n}_k) \cdot \int_{\eta_r}^{\eta_0} d\eta \frac{\partial \mathfrak{h}(k, \eta)}{\partial \eta} j_{l'}[(\eta_0 - \eta)k]. \end{aligned}$$

⁴Мы не рассматриваем здесь влияние современной стадии ускоренного расширения Вселенной на вклад гравитационных волн в анизотропию реликтового излучения. Это влияние сводится к небольшому дополнительному подавлению.

Коэффициенты C_l теперь можно представить в виде

$$C_l = \frac{1}{2l+1} \int d^3k \sum_{m=-l}^l < |a_{lm}(\mathbf{k})|^2 >, \quad (9.49)$$

где имеется в виду, что одно интегрирование по импульсам в конце вычисления снимается с помощью δ -функции в (5.43), и

$$\begin{aligned} a_{lm}(\mathbf{k}) = & \frac{1}{2} \int d\mathbf{n} Y_{lm}^*(\mathbf{n}) \sum_{A=+, \times} n_p n_q e_{pq}^{(A)}(\mathbf{n}_k) \cdot h_{(i)}^{(A)}(\mathbf{k}) \\ & \times \sum_{l'=0}^{\infty} (2l'+1) i^{l'} \cdot P_{l'}(\mathbf{n}\mathbf{n}_k) \cdot \int_{\eta_r}^{\eta_0} d\eta \frac{\partial \mathfrak{h}(k, \eta)}{\partial \eta} j_{l'}[(\eta_0 - \eta)k]. \end{aligned} \quad (9.50)$$

Подынтегральное выражение в (9.49) не зависит от направления импульса \mathbf{k} , поэтому его можно вычислять в любой системе координат. Удобно это сделать в сферической системе (θ, ϕ) с осью, направленной вдоль вектора \mathbf{n}_k . В ней для свёрток с тензорами поляризаций имеем

$$n_l n_m e_{lm}^{(+)}(\mathbf{n}_k) = \sin^2 \theta \cdot \cos 2\phi, \quad n_l n_m e_{lm}^{(\times)}(\mathbf{n}_k) = \sin^2 \theta \cdot \sin 2\phi. \quad (9.51)$$

Как мы видим, подынтегральное выражение в (9.50) явно зависит от азимутального угла ϕ , а потому и коэффициенты a_{lm} будут весьма нетривиальными:

$$\begin{aligned} a_{l,\pm 2}(\mathbf{k}) = & \pi i^l \cdot \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi} \frac{(l+2)!}{(l-2)!}} \left(h_{(i)}^{(+)}(\mathbf{k}) \mp i h_{(i)}^{(\times)}(\mathbf{k}) \right) \int_{\eta_r}^{\eta_0} d\eta \frac{\partial \mathfrak{h}}{\partial \eta} \\ & \times \left(\frac{j_{l-2}[(\eta_0 - \eta)k]}{(2l-1)(2l+1)} + \frac{2j_l[(\eta_0 - \eta)k]}{(2l-1)(2l+3)} + \frac{j_{l+2}[(\eta_0 - \eta)k]}{(2l+1)(2l+3)} \right), \end{aligned} \quad (9.52)$$

остальные коэффициенты равны нулю. Рекуррентное соотношение (F.4) для сферических функций Бесселя показывает, что сумма в скобках (9.52) равна

$$\frac{j_l[(\eta_0 - \eta)k]}{(\eta_0 - \eta)^2 k^2}. \quad (9.53)$$

Таким образом, имеем окончательно

$$C_l = \frac{9\pi}{2} \frac{(l+2)!}{(l-2)!} \int \frac{dk}{k} \mathcal{P}_T(k) \cdot \left(\int_{\eta_r}^{\eta_0} d\eta \frac{\partial \mathfrak{h}(k, \eta)}{\partial \eta} \frac{j_l[(\eta_0 - \eta)k]}{(\eta_0 - \eta)^2 k^2} \right)^2. \quad (9.54)$$

Исходя из полученной формулы (9.54), обсудим вопрос о поведении мультиполей C_l с изменением l . Для мод, входящих под горизонт после эпохи рекомбинации и соответствующих $l \lesssim 50$, производная $\partial \mathfrak{h}/\partial \eta$ мала при $\eta = \eta_r$ и становится величиной порядка единицы позже, при $\eta \sim k^{-1}$. Поэтому подынтегральное выражение в скобках в (9.54) заметно отлично от нуля, когда $k(\eta_0 - \eta) \sim l$ и в то же время $k\eta \sim 1$. При этом $j_l[(\eta_0 - \eta)k] \sim l^{-1}$, так что весь интеграл ведёт себя как l^{-3} . Факториальный множитель в (9.54) растёт как l^4 . Для случая масштабно-инвариантного спектра, $\mathcal{P}_T \approx \text{const}$, оставшийся интеграл по конформному импульсу k не приводит к дополнительной зависимости от l по сравнению с уже упомянутыми. В результате получаем, что с ростом l величины C_l падают как l^{-2} . Таким образом, величины

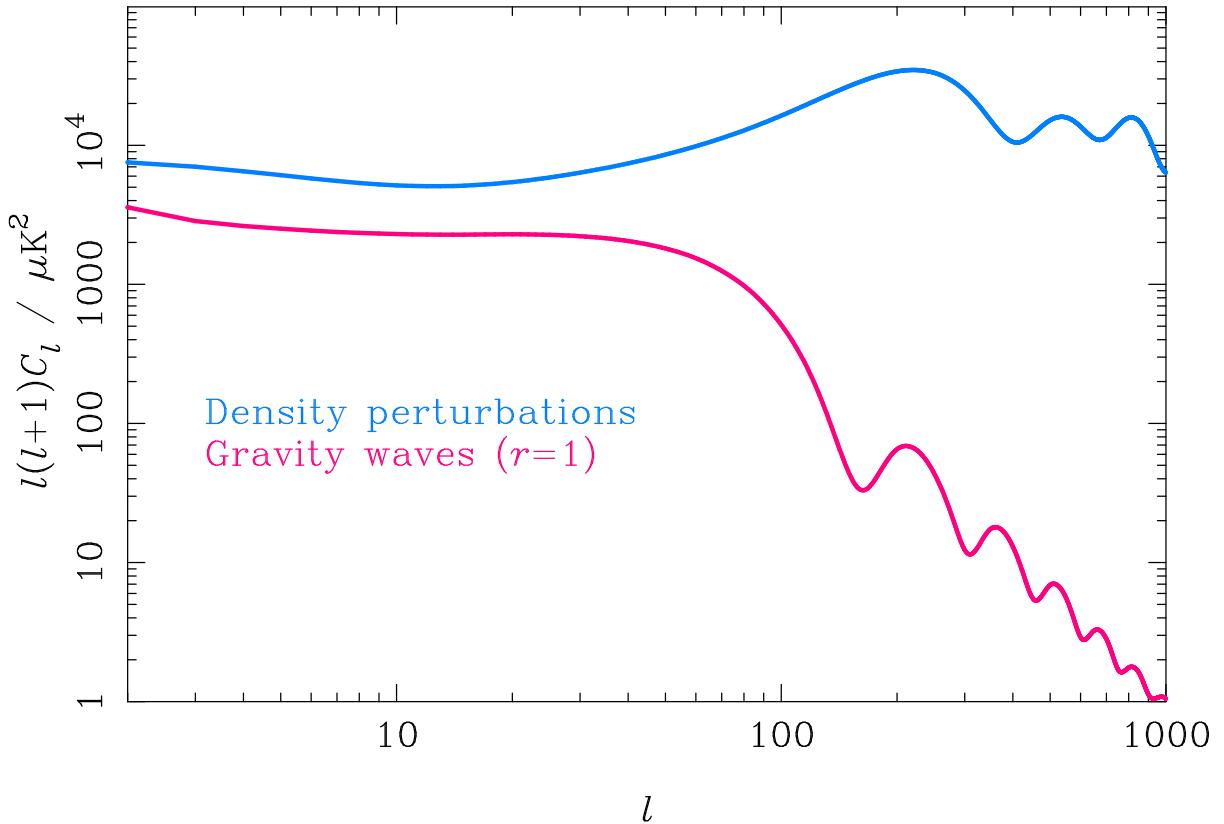


Рис. 9.4: Вклад скалярных и тензорных возмущений в спектр анизотропии реликтового излучения [55]. В качестве начальных возмущений для иллюстрации взяты масштабно-инвариантные спектры, $n_s = 1$, $n_T = 0$, с одинаковой амплитудой, $\mathcal{P}_R = \mathcal{P}_T$, т.е. $r = 1$ (см. раздел 5.4). Такое значение r , разумеется, нереалистично.

$\mathcal{D}_l \propto l^2 C_l$ приблизительно одинаковы в интервале $2 \lesssim l < 50$, как и в случае вклада обычного эффекта Сакса–Вольфа от скалярных возмущений. Это поведение проиллюстрировано на рис. 9.4. При $l \gtrsim 100$ вклад от гравитационных волн быстро затухает с ростом l , поскольку он набирается за счёт мод, вошедших под горизонт задолго до рекомбинации, чьи амплитуды успели заметно упасть. Заметим, впрочем, что в случае существенно более синего спектра гравитационных волн, то есть при большом положительном n_T , вклад коротких волн в анизотропию был бы усилен, что увеличивало бы величины старших гармоник C_l .

Найдём приближённо величины C_l при $l \gg 1$. Из сказанного выше ясно, что с точки зрения интеграла в скобках в (9.54) величина η/η_0 является малым параметром. Воспользуемся для функции $j_l[k(\eta_0 - \eta)]$ асимптотическим представлением (F.15), которое мы запишем в виде

$$j_l[k(\eta_0 - \eta)] = \frac{1}{l\sqrt{u(u^2 - 1)^{1/4}}} \cos \left\{ \left(l + \frac{1}{2} \right) \phi \left[u \left(1 - \frac{\eta}{\eta_0} \right) \right] \right\}, \quad (9.55)$$

где

$$u = \frac{k\eta_0}{l + 1/2}, \quad \phi(x) = \sqrt{x^2 - 1} - \arccos \left(\frac{1}{x} \right) - \frac{\pi}{4}. \quad (9.56)$$

При записи медленно меняющегося множителя в (9.55) мы пренебрегли отличием $(l + 1/2)$ от l и учли, что $\eta/\eta_0 \ll 1$. Пренебрегать отношением η/η_0 в аргументе косинуса нельзя, поскольку фаза содержит большой множитель $(l + 1/2)$. Иначе говоря, комбинация $(l + 1/2) \cdot u \cdot (\eta/\eta_0) \equiv k\eta$ является величиной порядка единицы, и это приводит к заметной зависимости фазы от η . В то же время, следующий член разложения фазы по η мал, $(l + 1/2) \cdot u^2 \cdot (\eta/\eta_0)^2 \equiv (k\eta)^2/(l + 1/2) = O(l^{-1})$. Поэтому для фазы можно записать

$$\left(l + \frac{1}{2} \right) \phi \left[u \left(1 - \frac{\eta}{\eta_0} \right) \right] = \left(l + \frac{1}{2} \right) \phi(u) - l \frac{\eta}{\eta_0} u \phi'(u) + O \left(\frac{1}{l} \right),$$

причём $u\phi'(u) = \sqrt{u^2 - 1}$. Таким образом, для сферической функции Бесселя имеем

$$j_l[k(\eta_0 - \eta)] = \frac{1}{l\sqrt{u}(u^2 - 1)^{1/4}} \left\{ \cos \left[\left(l + \frac{1}{2} \right) \phi(u) \right] \cos \left(l \frac{\eta}{\eta_0} \sqrt{u^2 - 1} \right) + \sin \left[\left(l + \frac{1}{2} \right) \phi(u) \right] \sin \left(l \frac{\eta}{\eta_0} \sqrt{u^2 - 1} \right) \right\}, \quad (9.57)$$

и интеграл в скобках в (9.54) приводится к виду

$$\frac{1}{l^3 u^{5/2} (u^2 - 1)^{1/4}} \left\{ \cos \left[\left(l + \frac{1}{2} \right) \phi(u) \right] I_c + \sin \left[\left(l + \frac{1}{2} \right) \phi(u) \right] I_s \right\},$$

где

$$I_c = \int_{\eta_r}^{\infty} d\eta \frac{\partial \mathfrak{h}(k, \eta)}{\partial \eta} \cos \left(l \frac{\eta}{\eta_0} \sqrt{u^2 - 1} \right) \quad (9.58a)$$

$$I_s = \int_{\eta_r}^{\infty} d\eta \frac{\partial \mathfrak{h}(k, \eta)}{\partial \eta} \sin \left(l \frac{\eta}{\eta_0} \sqrt{u^2 - 1} \right). \quad (9.58b)$$

Здесь мы распространяли интегрирование до бесконечности, учитывая, что $ul \gg 1$. Далее, при интегрировании в (9.54) по k (иначе говоря, по u) быстро осциллирующие функции усредняются,

$$\cos^2 \left[\left(l + \frac{1}{2} \right) \phi(u) \right] \rightarrow \frac{1}{2}, \quad \sin^2 \left[\left(l + \frac{1}{2} \right) \phi(u) \right] \rightarrow \frac{1}{2}, \quad \cos \left[\left(l + \frac{1}{2} \right) \phi(u) \right] \cdot \sin \left[\left(l + \frac{1}{2} \right) \phi(u) \right] \rightarrow 0, \quad (9.59)$$

и в итоге мы получаем при $l \gg 1$ для степенного начального спектра

$$C_l = \frac{\pi A_T}{4} \frac{1}{(\eta_0 k_*)^{n_T} l^{2-n_T}} \int_1^{\infty} \frac{du}{u^{6-n_T} \sqrt{u^2 - 1}} (I_c^2 + I_s^2), \quad (9.60)$$

где мы учли, что интегрирование по k ведётся по области $k\eta_0 > l$. Отметим, что это представление справедливо как для МД-входящих, так и для РД-входящих мод; необходимо только, чтобы было выполнено условие $l \gg 1$. Поправки к формуле (9.60) имеют порядок l^{-1} .

Для интересующей нас сейчас области $l \ll \eta_0/\eta_r$ нижний предел интегрирования в (9.58) можно положить равным нулю. Используя (9.47) мы обнаруживаем, что в этой области интегралы I_c и I_s не зависят от l и спектр ведёт себя как $l(l+1)C_l \propto l^{n_T}$. В случае масштабно-инвариантного первичного спектра, $n_T = 0$, спектр анизотропии также является плоским при $l \lesssim 50$, как мы и обсуждали выше. В действительности интегралы (9.58) можно взять аналитически,

$$I_c = \int_0^{\infty} d\zeta \frac{\partial}{\partial \zeta} \left[\frac{3j_1(\zeta)}{\zeta} \right] \cos \left(\zeta \frac{\sqrt{u^2 - 1}}{u} \right) = \frac{1}{2} - \frac{3}{2u^2} - \frac{3\sqrt{u^2 - 1}}{4u^3} \ln \frac{u - \sqrt{u^2 - 1}}{u + \sqrt{u^2 - 1}},$$

$$I_s = \int_0^{\infty} d\zeta \frac{\partial}{\partial \zeta} \left[\frac{3j_1(\zeta)}{\zeta} \right] \sin \left(\zeta \frac{\sqrt{u^2 - 1}}{u} \right) = -\frac{3\pi}{4} \frac{\sqrt{u^2 - 1}}{u^3}.$$

После этого значение интеграла (9.60) нетрудно найти численно, и в рассматриваемой области мультиполей $1 \ll C_l \lesssim 50$ получить для случая масштабно-инвариантного спектра

$$l(l+1)C_l \simeq 0.39A_T.$$

Численно для отношения вкладов Сакса–Вольфа и тензорных возмущений получим $C_l^{SW}/C_l^T \simeq 1.46A_\Phi/A_T = 3.28A_R/A_T = 3.28/r$. Это согласуется с полным численным расчётом, представленным на рис. 9.4.

В области $l > \eta_0/\eta_r \sim 50$ наряду с общим убыванием величины $\mathcal{D}_l = T_0^2 l(l+1)C_l/(2\pi)$, о котором мы говорили выше, имеют место осцилляции C_l , как это видно из рис. 9.4. Причина этого состоит в осциллирующем характере интегралов (9.58). Мы не будем здесь рассматривать это явление; оно в определённом смысле аналогично осцилляциям вкладов в C_l от скалярных возмущений, которые мы подробно обсудим в разделе 9.2.3. Поведению вкладов тензорных возмущений при больших l посвящена задача 9.

9.2.3 Промежуточные угловые масштабы

Рассмотрим теперь вклад адиабатических возмущений с длинами волн меньше, но не сильно меньше, размера горизонта на момент рекомбинации, то есть волн с импульсами $k\eta_r \gtrsim 1$. В данном случае “не сильно меньше” означает, что используемое нами в этом разделе приближение идеальной жидкости для барион-фотонной среды

действительно выполняется. Это ограничивает рассматриваемую область угловых гармоник:

$$l \lesssim 1000 .$$

Полученные в этом разделе результаты имеют, тем не менее, прямое отношение и к малым угловым масштабам, $l \gtrsim 1000$: эффекты неидеальности приводят к снижению мультиполей C_l и затуханию осцилляций, но мало влияют на такие особенности спектра, как положения пиков. Область малых углов мы обсудим в разделе 9.3.

Для изучаемых в этом разделе возмущений особенно существенны два масштаба импульсов, $r_s^{-1}(\eta_r)$ и $r_s^{-1}(\eta_{eq})$, где

$$r_s(\eta) = \int_0^\eta \frac{d\eta}{\sqrt{3(1 + R_B(\eta))}}$$

— звуковой горизонт на момент времени η . Эти два масштаба характеризуют волны, входящие под звуковой горизонт в эпоху рекомбинации и в эпоху перехода с радиационно-доминированной на пылевидную стадию. Как мы уже видели и ещё увидим в дальнейшем, им соответствуют мультиполи $l^{(r)} = \eta_0 r_s^{-1}(\eta_r)$ и $l^{(eq)} = \eta_0 r_s^{-1}(\eta_{eq})$. Для дальнейшего полезно аккуратно оценить их значения; особенно важно сделать это для $l^{(r)}$.

Величину $r_s(\eta_r)$ мы уже вычисляли в разделе 7.1.2; для неё справедливы выражение (7.33) и численная оценка (7.36). Отсюда получаем для характерного номера гармоники

$$l^{(r)} = r_s^{-1}(\eta_r) \eta_0 = \frac{\sqrt{3}\eta_0}{I_1 \eta_r} , \quad (9.61)$$

где отношение η_0/η_r даётся формулой (2.19), а I_1 определён в (7.34). Отметим, что $l^{(r)}$ обратно пропорционально современному угловому размеру акустического горизонта эпохи рекомбинации. Численно, при принятых нами значениях космологических параметров⁵,

$$l^{(r)} = 94 . \quad (9.62)$$

Столь же точной оценки $l^{(eq)}$ мы проводить не будем, хотя бы потому, что переход с радиационно-доминированной на пылевидную стадию — это длительный процесс, занимающий время порядка хаббловского. Для нас будет достаточно положить $r_s(\eta_{eq}) \simeq \eta_{eq}/\sqrt{3}$, что справедливо с точностью около 10%. Соответственно, для характерной величины мультиполя имеем

$$l^{(eq)} \simeq \frac{\sqrt{3}\eta_0}{\eta_{eq}} \sim 200 ,$$

где мы воспользовались (2.22) для численной оценки.

Итак, рассмотрим моды, вошедшие под звуковой горизонт до эпохи рекомбинации, которым соответствуют угловые гармоники с

$$l \gg l^{(r)} . \quad (9.63)$$

Наши результаты на качественном уровне будут справедливы и для мультиполей в области $\eta_0/\eta_r \lesssim l \lesssim l^{(r)}$, то есть $50 \lesssim l \lesssim 100$, однако аналитически эту область изучить трудно: приближения, использованные в разделах 6.1 и 6.2, для соответствующих мод не работают. Таким образом, наши оценки будут иметь лишь качественный

⁵Это же значение получается для космологических параметров, приведённых в сноске 2 Главы 2.

характер для области первого пика. В то же время, иметь простое аналитическое описание, пусть применимое и не во всей интересной области, полезно, поскольку это позволяет лучше понять зависимость главных особенностей спектра анизотропии от космологических параметров.

Обсудим по отдельности три вклада в анизотропию, фигурирующие в (9.22). При этом мы пока не будем принимать во внимание интерференцию между этими вкладами. Вклад в анизотропию от обычного эффекта Сакса–Вольфа (9.22а), как всегда, определяется суммой контраста плотности и гравитационного потенциала. Для этой суммы на пылевидной стадии в предрекомбинационную эпоху будем иметь (см. (6.43) и (6.44))

$$\frac{1}{4}\delta_\gamma(\eta) + \Phi(\eta) = \left[A(k, \eta) \cos\left(k \int_0^\eta \frac{d\eta'}{\sqrt{3(1+R_B(\eta'))}}\right) - B(k, \eta) \right] \cdot \Phi_{(i)}, \quad (9.64)$$

где $A(k, \eta)$ и

$$B(k, \eta) = R_B(\eta)F(k, \eta) \quad (9.65)$$

— положительные функции, медленно меняющиеся со временем. Выражения для них при больших k имеют вид (см. (6.15), (6.39))

$$A = \frac{3}{2} \frac{1}{[1+R_B(\eta_r)]^{1/4}} \quad (9.66)$$

$$B(k, \eta) = 81I^2R_B(\eta) \frac{\Omega_{CDM}}{\Omega_M} (1+z_{eq}) \frac{\ln(0.2k\eta_{eq})}{(k\eta_0)^2}. \quad (9.67)$$

Напомним, что первое слагаемое в (9.64) связано с акустическими осцилляциями в барион-фотонной плазме, начавшимися ещё на радиационно-доминированной стадии, а второе обусловлено гравитационным потенциалом тёмной материи и равно $(-R_B\Phi)$. Отметим, что в результате частичного сокращения между неосциллирующей частью $\delta_\gamma/4$ (см. (6.35)) и Φ второе слагаемое оказалось пропорциональным плотности барионов, точнее, величине $R_B = 3\rho_B/(4\rho_\gamma)$.

Как видно, величина, ответственная за обычный эффект Сакса–Вольфа, осциллирует со временем над медленно меняющимся отрицательным средним значением $-B\Phi_{(i)} = -R_B\Phi$ (здесь и далее при обсуждении знаков мы для определённости считаем $\Phi_{(i)}$ положительным); при этом важно, что фаза осцилляций фиксирована: осцилляции первого слагаемого в (9.64) начинаются с максимума для всех волн. Именно эти осцилляции и приводят к пикам во вкладе обычного эффекта Сакса–Вольфа в анизотропию температуры, показанным на рис. 9.3. Действительно, в приближении мгновенной рекомбинации вклад от эффекта Сакса–Вольфа определяется значением функции (9.64) в момент $\eta = \eta_r$. Поскольку частота осцилляций зависит от импульса моды, значение этой функции при $\eta = \eta_r$ осциллирует с изменением импульса,

$$\frac{1}{4}\delta_\gamma(\eta_r) + \Phi(\eta_r) = \{A \cos[kr_s(\eta_r)] - B(k)\} \Phi_{(i)}, \quad (9.68)$$

где $A = A(\eta_r)$, $B(k) = B(k, \eta_r)$. Как мы уже отмечали, имеет место приближённое соответствие между номерами гармоник и импульсами, $l \leftrightarrow k\eta_0$, поэтому осцилляционное поведение по импульсам приводит к осцилляционному поведению спектра анизотропии: величины C_l осциллируют с l . Забегая вперёд, скажем, что осцилляции имеются и в допплеровском вкладе (9.22с), а также в полной сумме всех вкладов в анизотропию, см. рис. 9.3.

Выражение для вклада обычного эффекта Сакса–Вольфа в угловые гармоники $\tilde{\Theta}_l(\mathbf{k})$ аналогично выражению (9.33) и имеет вид

$$\tilde{\Theta}_l^{SW}(\mathbf{k}) = \left(\Phi(\eta_r) + \frac{1}{4} \delta_\gamma(\eta_r) \right) j_l [k(\eta_0 - \eta_r)] . \quad (9.69)$$

Поскольку вклад эффекта Сакса–Вольфа в коэффициенты C_l (без учёта интерференции с другими вкладами) определяется квадратом величины (9.69), положение *максимумов* в гармониках C_l определяется положением *как максимумов, так и минимумов* косинуса в выражении (9.68). Эти максимумы и минимумы находятся при значениях $k \simeq \pi n/r_s$, где $n = 1, 2, \dots$. Соответственно, эффект Сакса–Вольфа даёт пики в спектре анизотропии вблизи мультиполей $l_n^{SW} \sim n\pi l^{(r)}$, подробности см. ниже. Таким образом, положение акустических пиков в спектре анизотропии вполне соответствует ожидаемому соотношению $\pi/l_n^{SW} \sim \Delta\theta_s/n$, где

$$\Delta\theta_s = \frac{I_1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\eta_r}{\eta_0}$$

— угол, под которым сегодня виден звуковой горизонт эпохи рекомбинации.

Как видно из рис.9.3, на фоне общего понижения спектра с ростом l пики с нечётными n при небольших n имеют тенденцию быть более высокими по сравнению с пиками с чётными n . За это ответственен неосциллирующий вклад в (9.68): при нечётных n как осциллирующий, так и неосциллирующий вклады отрицательны, и они интерферируют конструктивно, а при чётных n , наоборот, интерференция между этими вкладами — деструктивная. Чтобы убедиться в том, что этот эффект действительно существенен, воспользуемся грубой оценкой (6.42). Она даёт для промежуточной области импульсов $A(\eta_r) \sim [1/3 + R_B(\eta_\times)]$, $B \sim R_B(\eta_r)$, так что эти коэффициенты имеют один и тот же порядок величины. Разумеется, оценке (6.42) на количественном уровне доверять нельзя, однако она показывает, что при промежуточных импульсах действительно имеется интерференция между двумя сравнимыми по величине вкладами. Наиболее сильно указанный эффект проявляется для первых пиков, а затем он быстро сходит на нет из-за зависимости $B(k) \propto k^{-2}$.

Рассмотрим подробнее вопрос о положении максимумов и минимумов вклада в анизотропию от эффекта Сакса–Вольфа без учёта интерференции с другими вкладами. В соответствии с (9.29), (9.68) и (9.69) запишем

$$C_l = 4\pi \int \frac{dk}{k} \mathcal{P}_\Phi(k) \cdot [A \cos kr_s - B(k)]^2 j_l^2 [k(\eta_0 - \eta_r)] , \quad (9.70)$$

где $r_s = r_s(\eta_r)$. Мы увидим, что интеграл по импульсам в (9.70) набирается из области размером по крайней мере порядка $\Delta k \sim 1/r_s$, так что $\eta_0 \Delta k \gg l^{1/3}$. С другой стороны, при $k\eta_0 \gtrsim l$ сферическая функция Бесселя осциллирует с периодом не более $l^{1/3}$, а при $k\eta_0 < l$ она близка к нулю, см. Приложение F. Поэтому область импульсов $k < l/\eta_0$ не вносит вклада в интеграл, а в оставшейся области можно воспользоваться асимптотической формулой (F.15) и усреднить квадрат быстроосциллирующего косинуса, положив его равным 1/2. В результате получим, например, в случае плоского первичного спектра

$$C_l^{SW} = 2\pi A_\Phi \int_{l/\eta_0}^\infty \frac{dk}{k} \cdot \frac{1}{k\eta_0 \sqrt{k^2 \eta_0^2 - l^2}} (A \cos kr_s - B)^2 , \quad (9.71)$$

где мы пренебрегли поправками порядка $1/l$ и η_r/η_0 . Получим после очевидных преобразований

$$C_l^{SW} = \frac{2\pi}{l^2} A_\Phi \left\{ \frac{1}{2} c_1 A^2(l) + \frac{8}{15} c_2 B^2(l) + \int_1^\infty \frac{du}{u^2 \sqrt{u^2 - 1}} \left[\frac{1}{2} A^2 \cos \left(2 \frac{l r_s}{\eta_0} u \right) - 2AB \cos \left(\frac{l r_s}{\eta_0} u \right) \right] \right\} , \quad (9.72)$$

где $A(l) = A(k = l/\eta_0)$, $B(l) = B(k = l/\eta_0)$, $u = k\eta_0/l$, и константы c_1 и c_2 по порядку величины равны единице (они определяются зависимостью от k функций $A(k, \eta_r)$ и $B(k, \eta_r)$; в соответствии с (9.66) и (9.67)

при больших l справедливо $c_1 = c_2 = 1$). Первые два вклада здесь монотонно спадают при увеличении l , а третий, интегральный, приводит к осцилляционному поведению мультиполей C_l^{SW} . Для оценки последнего эффекта будем рассматривать величину lr_s/η_0 в качестве большого параметра, то есть считать, что

$$\frac{lr_s}{\eta_0} = \frac{l}{l^{(r)}} \gg 1. \quad (9.73)$$

Тогда интегралы от осциллирующих функций в (9.72) набираются в малой области значений u вблизи единицы. Размер этой области составляет величину порядка $\Delta u \sim l^{(r)}/l$, что как раз и соответствует $\Delta k \sim 1/r_s$. В этой области множитель u^{-2} можно положить равным единице и считать, что $\sqrt{u^2 - 1} \simeq \sqrt{2}\sqrt{u - 1}$, так что мы приходим к табличному интегралу

$$\int_1^\infty \frac{du}{\sqrt{u-1}} \cos \alpha u = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \cos \left(\alpha + \frac{\pi}{4} \right).$$

Таким образом, интересующий нас осциллирующий интеграл оценивается как

$$\begin{aligned} & \int_1^\infty \frac{du}{u^2 \sqrt{u^2 - 1}} \left[\frac{1}{2} A^2 \cos \left(2 \frac{l}{l^{(r)}} u \right) - 2AB \cos \left(\frac{l}{l^{(r)}} u \right) \right] \\ & \simeq \sqrt{\frac{\pi l^{(r)}}{2l}} \left[\frac{1}{2\sqrt{2}} A^2(l) \cos \left(2 \frac{l}{l^{(r)}} + \frac{\pi}{4} \right) - 2 A(l) B(l) \cos \left(\frac{l}{l^{(r)}} + \frac{\pi}{4} \right) \right]. \end{aligned} \quad (9.74)$$

Видно, во-первых, что осцилляции затухают с ростом l по сравнению с монотонным вкладом, хотя и не очень быстро. Во-вторых, первое слагаемое имеет максимумы при

$$l_n^{SW} = \left(\frac{7\pi}{8} + \pi(n-1) \right) l^{(r)}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (9.75)$$

а второе — при

$$l = \left(\frac{3\pi}{4} + 2\pi n' \right) l^{(r)}, \quad n' = 1, 2, \dots$$

причём второе слагаемое убывает при больших l как l^{-2} , а первое выходит на константу, см. (9.66) и (9.67). При нечётных n оба слагаемых имеют максимумы недалеко друг от друга, а максимумы первого слагаемого с чётным n находятся недалеко от минимумов второго. Поэтому мультиполи C_l имеют пики вблизи $l = l_n^{SW}$, причём при нечётных n эти пики усилены за счёт второго слагаемого, а при чётных n они, наоборот, подавлены. В этом и проявляется интерференция между двумя вкладами в (9.68), о которой мы говорили выше.

Приближение (9.73) в области первого пика выполняется плохо, к тому же на форму первого пика влияет сильная зависимость от импульса функции $B(k, \eta_r)$. Тем не менее, можно сделать качественный вывод о том, что положение первого пика находится где-то между $3\pi l^{(r)}/4 \simeq 220$ и $7\pi l^{(r)}/8 \simeq 260$. Этот вывод подкрепляется численными расчётами, см. рис. 9.3. При достаточно больших l доминирует первый вклад в (9.74), и положения пиков должны соответствовать формуле (9.75), то есть численно

$$l_n^{SW} \simeq 260 + 295n.$$

Это и наблюдается как в численных расчётах, так и в экспериментальных данных.

Отметим, что область близких к единице значений переменной u , доминирующую в интеграле (9.74), соответствует области импульсов k , близких к l/η_0 . Это означает, что основной вклад в осцилляционную картину дают моды с импульсами, почти ортогональными лучу наблюдения. Точнее, интеграл в (9.74) набирается из области $(u-1) \sim l^{(r)}/l \ll 1$, что соответствует $\mathbf{n}_k \mathbf{n} = \cos \theta \sim l^{(r)}/l \ll 1$, где θ — угол между импульсом и направлением наблюдения \mathbf{n} .

Перейдём теперь к обсуждению допплеровского вклада (9.22c). Для рассматриваемых в этом разделе мод потенциал скоростей определяется по контрасту плотности фотонов, $kv_B = 3/(4k) \cdot \delta'_\gamma$, см. (6.40). Используя формулу (6.44) и пренебрегая темпом изменения величин $A(\eta)$ и $R_B F(\eta)$ по сравнению с частотой осцилляций, получим для потенциала скоростей мод с $k > k_s^{(eq)}$

$$kv_B(\eta) = -3u_s \Phi_{(i)} A(k, \eta) \cdot \sin \left(k \int_0^\eta \frac{d\eta'}{\sqrt{3(1 + R_B(\eta'))}} \right), \quad (9.76)$$

где $3u_s = \sqrt{3}/[1 + R_B(\eta_R)]$. Осцилляции в потенциале скоростей также имеют фиксированную фазу: для всех мод они начинаются с нулевого значения.

Проведя вычисление, аналогичное тому, что мы провели в разделе 9.2.2, получим для допплеровского вклада в угловые гармоники

$$\tilde{\Theta}_l^D(\mathbf{k}) = -kv_B(\eta_r) \cdot j'_l[k(\eta_0 - \eta_r)] \quad (9.77)$$

где мы учли соглашение (9.25), касающееся знака вектора \mathbf{n} ; штрих здесь обозначает производную сферической функции Бесселя по своему аргументу. Поскольку фаза осцилляций (9.76) сдвинута на $\pi/2$ по отношению к фазе в (9.64), максимумы вклада от эффекта Допплера в C_l сдвинуты по отношению к максимумам вклада от эффекта Сакса–Вольфа. В отличие от (9.64), осцилляции (9.76) происходят вокруг нулевого центрального значения, поэтому вклад от эффекта Допплера немодулирован.

Рассматривая для определённости случай плоского первичного спектра и поступая так же, как при получении формулы (9.71), запишем для допплеровского вклада в C_l без учёта интерференции с другими вкладами

$$C_l^D = 2\pi[3u_s(\eta_r)]^2 A_\Phi \int_l^\infty \frac{dk}{k} \cdot \frac{\sqrt{k^2\eta_0^2 - l^2}}{(k\eta_0)^3} A^2 \sin^2[kr_s(\eta_r)],$$

Мы здесь воспользовались асимптотической формулой (F.21) для производной сферической функции Бесселя. Формула, аналогичная (9.72), теперь имеет вид

$$C_l^D = \frac{2\pi}{l^2} A_\Phi \left\{ \frac{3u_s^2}{2} c_3 A^2 - \int_1^\infty \frac{du \sqrt{u^2 - 1}}{u^4} \frac{(3u_s)^2}{2} A^2 \cos\left(2\frac{lr_s}{\eta_0} u\right) \right\}, \quad (9.78)$$

где c_3 по порядку величины равна единице, причём $c_3 = 1$ при больших l . Рассматривая по-прежнему режим (9.73), мы видим, что из-за малости подынтегрального выражения во втором слагаемом в (9.78) при l близком к единице осциллирующий вклад мал по параметру $l^{(r)}/l$. Чтобы вычислить этот осциллирующий вклад, проинтегрируем его по частям, считая $A \approx \text{const}$, и в главном порядке по $l^{(r)}/l$ получим

$$\begin{aligned} - \int_1^\infty \frac{du \sqrt{u^2 - 1}}{u^4} \frac{(3u_s)^2}{2} A^2 \cos\left(2\frac{lr_s}{\eta_0} u\right) &\simeq \frac{(3u_s)^2}{2} A^2 \frac{l^{(r)}}{2l} \int_1^\infty \frac{du}{u^3 \sqrt{u^2 - 1}} \sin\left(2\frac{l}{l^{(r)}} u\right) \\ &\simeq \frac{(3u_s)^2 l^{(r)}}{2l} \frac{A^2}{4} \sqrt{\frac{\pi l^{(r)}}{l}} \cos\left(2\frac{l}{l^{(r)}} - \frac{\pi}{4}\right). \end{aligned}$$

По сравнению с первым членом в (9.74) амплитуда осцилляций подавлена множителем $(3u_s)^2 l^{(r)} / (2l) \simeq 1.0 \cdot (l^{(r)}/l)$, который мал уже в области первых пиков. Положения пиков от эффекта Допплера сдвинуты относительно (9.75):

$$l^D \simeq \left(\frac{\pi}{8} + \pi n\right) l^{(r)} \simeq 35 + 295n.$$

Такая картина вполне согласуется с численными расчётами, приведёнными на рис. 9.3.

Замечательно, что амплитуды изначальных вкладов от эффекта Допплера и эффекта Сакса–Вольфа, (9.76) и (9.64), по порядку величины одинаковы (допплеровский вклад даже усилен фактором $3u_s \simeq 2$). Тем не менее, основную роль в формировании осцилляционной картины мультиполей играет вклад от эффекта Сакса–Вольфа. Это связано с тем обстоятельством, что допплеровский вклад моды с импульсом \mathbf{k} пропорционален проекции скорости \mathbf{v} на направление наблюдения, то есть величине $\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}_k = \cos\theta$, где θ — угол между направлением импульса и лучом наблюдения. Из-за этого вся величина допплеровского вклада несколько подавлена. Что не менее важно, пики от эффекта Допплера в спектре C_l существенно более низкие по сравнению с пиками от эффекта Сакса–Вольфа. Причина состоит в том, что в случае эффекта Сакса–Вольфа доминируют моды с импульсами, почти ортогональными лучу наблюдения, а во вкладе от эффекта Допплера такие моды не

участвуют. В случае допплеровского вклада интеграл для мультиполя C_l набирается из сравнительно широкой области импульсов, разных по величине и направленных под разными углами к лучу наблюдения, и осцилляции в спектре оказываются замытыми.

- ▷ **Задача 6.** Показать, что при $(n_s - 1) \ll 1$ зависимость от n_s вкладов от эффектов Сакса–Вольфа и Допплера в C_l действительно соответствует формуле (9.37).
- ▷ **Задача 7.** Показать, что в случае первичного спектра (5.36) со слабой зависимостью наклона от импульса, $dn_s/d\ln k \ll 1$, аналог формулы (9.37) имеет вид

$$C_l[n_s(k)] = \left(\frac{l}{k_*\eta_0} \right)^{n_s-1 + \frac{dn_s}{d\ln k} \ln \frac{l}{k_*\eta_0}} \cdot C_l(n_s = 1). \quad (9.79)$$

Обратимся теперь к раннему интегральному эффекту Сакса–Вольфа (9.22b). Как видно из рис. 9.3, единственный интересный вклад, обусловленный этим эффектом, находится на область первого акустического пика. Причина этого аналогична причине, по которой поздний интегральный эффект Сакса–Вольфа даёт вклад только в низшие мультиполи. А именно, ранний интегральный эффект Сакса–Вольфа имеет место сразу после рекомбинации, когда Вселенная ещё не вполне вышла на пылевидную стадию. В это время возмущения с $k\eta_r \ll 1$ ещё не эволюционируют, а вклады мод с $k\eta_r \gg 1$ усредняются до малых значений при интегрировании вдоль траектории фотона. Поэтому в ранний интегральный эффект Сакса–Вольфа дают вклады возмущения с $k\eta_r \sim 1$, что как раз соответствует первому акустическому пику. Рассматриваемый вклад в C_l мал по параметру

$$\left[\frac{\rho_{rad}}{\rho_M}(\eta_r) \right]^2 = \left(\frac{1+z_r}{1+z_{eq}} \right)^2 \simeq 0.12.$$

Действительно, амплитуда раннего интегрального эффекта Сакса–Вольфа отлична от нуля постольку, поскольку $\rho_{rad} \neq 0$. Иными словами, она пропорциональна $\rho_{rad}/\rho_M(\eta_r)$, а вклад в C_l пропорционален квадрату этой амплитуды.

Необходимо отметить, что полная анизотропия температуры выражается через интеграл по импульсам от величины $|\tilde{\Theta}_l^{SW}(\mathbf{k}) + \tilde{\Theta}_l^{ISW}(\mathbf{k}) + \tilde{\Theta}_l^D(\mathbf{k})|^2$. Поэтому, вообще говоря, имеется и интерференция между вкладами. Интерференция между вкладами от эффекта Сакса–Вольфа и эффекта Допплера весьма мала. Действительно, из (9.69) и (9.77) следует, что соответствующее слагаемое в C_l даётся интегралом по импульсам от медленно меняющейся функции с функцией $j_l[k(\eta_0 - \eta_r)] \cdot j'_l[k(\eta_0 - \eta_r)]$. Последняя быстро осциллирует вблизи нулевого значения при интересующих нас импульсах, и поэтому указанный интеграл мал по параметру $(k\eta_0)^{-1} \sim l^{-1}$. С другой стороны, в области первого пика существенна интерференция интегрального эффекта Сакса–Вольфа как с обычным эффектом Сакса–Вольфа, так и с эффектом Допплера. Грубо говоря, поскольку ранний интегральный эффект Сакса–Вольфа набирается при $\eta \sim \eta_r$, его вклад в угловые мультиполи можно оценить как

$$\begin{aligned} \tilde{\Theta}_l^{ISW}(\mathbf{k}) &= 2 \int_{\eta_r}^{\eta_0} \Phi' d\eta j_l[k(\eta_0 - \eta)] \sim 2 j_l[k(\eta_0 - \eta_r)] \int_{\eta_r}^{\eta_0} \Phi' d\eta \\ &\sim 2(\Phi_{MD} - \Phi(\eta_r)) j_l[k(\eta_0 - \eta_r)], \end{aligned}$$

где Φ_{MD} — значение гравитационного потенциала для данной моды на пылевидной стадии. Из сравнения этого выражения с (9.69) видно, что интегральный и обычный эффекты Сакса–Вольфа пропорциональны друг другу, и в области первого пика оба имеют отрицательный знак (поскольку гравитационный потенциал Φ уменьшается со временем на интересующей нас стадии). Отсюда и следует, что имеется конструктивная интерференция между рассматриваемыми вкладами.

Наметим способ более аккуратного анализа раннего интегрального эффекта Сакса–Вольфа. Для этого воспользуемся формулой (9.57) и запишем в введённых в разделе 9.2.2 обозначениях

$$\hat{\Theta}_l^{ISW}(\mathbf{k}) = \frac{1}{l\sqrt{u}(u^2 - 1)^{1/4}} \left\{ \cos \left[\left(l + \frac{1}{2} \right) \phi(u) \right] I_c^{ISW} + \sin \left[\left(l + \frac{1}{2} \right) \phi(u) \right] I_s^{ISW} \right\}, \quad (9.80)$$

где

$$\begin{aligned} I_c^{ISW} &= 2 \int_{\eta_r}^{\eta_0} d\eta \Phi' \cos \left(l \frac{\eta}{\eta_0} \sqrt{u^2 - 1} \right) \\ I_s^{ISW} &= 2 \int_{\eta_r}^{\eta_0} d\eta \Phi' \sin \left(l \frac{\eta}{\eta_0} \sqrt{u^2 - 1} \right). \end{aligned}$$

Видно, что быстроосциллирующие слагаемые с I_c^{ISW} и I_s^{ISW} в (9.80) имеют те же фазы, что и $j_l[k(\eta_0 - \eta_r)]$ и $j'_l[k(\eta_0 - \eta_r)]$, соответственно. Поэтому вклад с I_c^{ISW} интерферирует с обычным эффектом Сакса–Вольфа, а вклад с I_s^{ISW} — с вкладом от эффекта Допплера. Обсуждавшиеся выше свойства интегрального эффекта Сакса–Вольфа — его конструктивную интерференцию с обычным в области первого пика и убывание с ростом l — можно увидеть, исходя из приведённых формул.

- ▷ Задача 8. Исходя из формулы (9.80) показать, что в области первого пика действительно имеет место конструктивная интерференция интегрального и обычного эффектов Сакса–Вольфа. На этой же основе убедиться, что интегральный эффект Сакса–Вольфа убывает с ростом l при $l \gg l^{(r)}$.
- ▷ Задача 9. Найти вклад тензорных возмущений в мультиполи C_l при $l > \eta_0/\eta_{eq} \sim 100$, считая, что первичные возмущения — гауссовые с плоским спектром. Найти как монотонно убывающую, так и осциллирующую части этого вклада. Указания: воспользоваться формулами (3.10), (9.58) и (9.60). Использовать соотношения раздела 2.1.2 для нахождения связи между масштабным фактором и конформным временем на РД и МД стадиях. Учесть, что интегралы в (9.58) набираются на нижнем пределе.

В реальной Вселенной есть ещё один процесс, существенный для формирования картины анизотропии на средних и малых угловых масштабах. Это — рассеяние фотонов в пострекомбинационной Вселенной. Сразу после рекомбинации прозрачность Вселенной для фотонов весьма высока (см. подробнее раздел I.6.4). Однако впоследствии водород во Вселенной вновь ионизируется, и прозрачность падает. Это происходит в эпоху рождения первых звёзд: охлаждение барионов, необходимое для образования этих компактных объектов, идёт за счёт испускания ультрафиолетового излучения, которое и ионизирует водород. Ожидается, что такая вторичная ионизация Вселенной происходила на этапе с характерным красным смещением $z = z_{rei} \sim 10$. Часть реликтовых фотонов перерассеивалась на свободных электронах, вновь появившихся во Вселенной. Вообще говоря, вероятность перерассеяния фотона равна $(1 - e^{-\tau})$, где $\tau = \sigma_T \int dt \cdot n_e$ — оптическая толщина; n_e — плотность свободных электронов, интегрирование ведётся вдоль траектории фотона. Поскольку с точки зрения анизотропии реликтового излучения эта эпоха соответствует очень большим

угловым масштабам, где анализ анизотропии ограничен космической неопределенностью, детали вторичной ионизации Вселенной нам будут несущественны: при исследовании влияния вторичной ионизации на спектр анизотропии можно использовать приближение мгновенной и повсеместной ионизации. Для реликтовых фотонов это приближение означает, что в эпоху красного смещения $z = z_{rei}$ появляется ненулевая вероятность перерассеяться без изменения частоты⁶, но со случайным изменением направления. Вероятность “пережить” эту эпоху без рассеяния параметризуют величиной $e^{-\tau_{rei}}$, где параметр τ_{rei} имеет смысл оптической толщины фотона во вторично ионизованной Вселенной. В указанном приближении два параметра — оптическая толщина τ_{rei} и красное смещение z_{rei} — полностью характеризуют искажение спектра анизотропии реликтового излучения в рассматриваемую эпоху.

Влияние вторичной ионизации на анизотропию можно учесть, исходя из следующих простых соображений. При $z = z_{rei}$ рассеяние в данном месте во Вселенной испытывают фотоны, которые были испущены в эпоху рекомбинации со сферы координатного размера $(\eta_{rei} - \eta_r) \simeq \eta_{rei}$. Поскольку изменение направления движения фотона — случайное, фотоны, прилетающие к нам с данного направления, собираются со всей этой сферы. Из-за этого на угловых масштабах меньше $\Delta\theta_{rei} = \eta_{rei}/\eta_0$ вклад рассеянных фотонов в анизотропию замывается, и остаётся лишь вклад фотонов, не испытавших рассеяния. Анизотропия на угловых масштабах больше $\Delta\theta_{rei}$ сохраняется целиком, поскольку с точки зрения этих масштабов области Вселенной эпохи рекомбинации с координатным размером η_{rei} представляют собой единое целое. Вообще говоря, дополнительным эффектом является движение барион-электронной среды в эпоху вторичной ионизации, которое, как обычно, характеризуется скоростью возмущений этой среды $\mathbf{v}_B(\eta_{rei})$. Оно приводит к эффекту Допплера для рассеянных фотонов, вполне аналогичному эффекту Допплера эпохи рекомбинации. На самом деле доплеровский вклад эпохи вторичной ионизации сильно подавлен. Для длинноволновых мод подавление связано с тем, что они находятся за горизонтом в эту эпоху, и их скорости малы. Для коротковолновых мод подавление возникает при учёте конечности толщины сферы перерассеяния.

Из этих соображений сразу запишем

$$\Theta_0(\mathbf{n}) = \Theta_0^{(0)}(\mathbf{n}), \quad l > l_{rei} \quad (9.81a)$$

$$\Theta_0(\mathbf{n}) = e^{-\tau_{rei}} \Theta_0^{(0)}(\mathbf{n}), \quad l < l_{rei}, \quad (9.81b)$$

где $\Theta_0^{(0)}(\mathbf{n})$ — анизотропия без учёта вторичной ионизации и

$$l_{rei} = \frac{\pi}{\Delta\theta_{rei}} = \frac{\pi\eta_0}{\eta_{rei}}, \quad (9.82)$$

Таким образом, можно считать, что весь эффект вторичной ионизации сводится к подавлению мультиполей C_l с $l > l_{rei}$ фактором $e^{-2\tau_{rei}}$.

На несколько более формальном уровне результат (9.81) получается следующим образом. Во-первых, учёт факта выбывания фотонов из-за рассеяния в эпоху вторичной ионизации приводит к уменьшению имевшегося вклада в наблюдаемую анизотропию (ранним интегральным эффектом Сакса-Вольфа для простоты пренебрегаем, его нетрудно учесть в приведённом рассуждении):

$$\frac{\delta T}{T}(\mathbf{n}, \eta_0) = e^{-\tau_{rei}} \cdot \left(\frac{1}{4} \delta_\gamma(\eta_r) + \Phi(\eta_r) + \mathbf{n} \mathbf{v}(\eta_r) \right). \quad (9.83)$$

⁶Поскольку частота и число фотонов не изменяются, спектр реликтовых фотонов по-прежнему остаётся планковским.

Этот вклад обусловлен фотонами, которым удалось избежать рассеяния в эпоху вторичной ионизации. Вторых, $(1 - e^{-\tau_{rei}})$ -часть фотонов перерассеивается. В приближении изотропного рассеяния (что вполне подходит для оценки) соответствующий дополнительный вклад в анизотропию температуры можно представить как

$$\Delta \frac{\delta T}{T}(\mathbf{n}, \eta_0) = (1 - e^{-\tau_{rei}}) \cdot \left(\frac{1}{4} \delta_\gamma(\eta_{rei}) + \Phi(\eta_{rei}) + \mathbf{n} \mathbf{v}_B(\eta_{rei}) \right). \quad (9.84)$$

Заметим здесь, что в излагаемом подходе имеется как бы два источника современной анизотропии реликтовых фотонов: сфера последнего рассеяния в эпоху рекомбинации, дающая вклад (9.83), и сфера перерассеяния в эпоху вторичной ионизации, обеспечивающая вклад (9.84).

Из формулы (9.21) следует, что вплоть до начала вторичной ионизации, в пренебрежении вкладом раннего интегрального эффекта Сакса–Вольфа, справедливо следующее равенство:

$$\frac{1}{4} \delta_\gamma(\eta < \eta_{rei}) + \Phi(\eta < \eta_{rei}) = \frac{1}{4} \delta_\gamma(\mathbf{n}', \eta_r) + \Phi(\mathbf{n}', \eta_r) + \mathbf{n}' \mathbf{v}(\mathbf{n}', \eta_r). \quad (9.85)$$

Оно показывает, как анизотропия в данном направлении \mathbf{n}' связана с анизотропией на сфере последнего рассеяния (мы специально вернули вектор \mathbf{n}' в обозначения функций, чтобы напомнить, что точки испускания и рассеяния лежат на одной траектории фотона и поэтому их взаимное пространственное положение параметризуется только временной переменной η). После рассеяния в момент $\eta = \eta_{rei}$ величина, определяющая вклад эффекта Сакса–Вольфа для современного наблюдателя, получается (в приближении изотропного рассеяния) из усреднения правой части формулы (9.85) по всем направлениям \mathbf{n}' . Для вклада в (9.84) загоризонтных на тот момент мод, $k(\eta_{rei} - \eta_r) \simeq k\eta_{rei} \lesssim 1$, это даёт приближённо

$$\frac{1}{4} \delta_\gamma(\eta_{rei}) + \Phi(\eta_{rei}) \approx \frac{1}{4} \delta_\gamma(\eta_r) + \Phi(\eta_r), \quad (9.86)$$

а для подгоризонтных мод полностью замывает анизотропию, так что $(\frac{1}{4} \delta_\gamma(\eta_{rei}) + \Phi(\eta_{rei})) \approx 0$. Для вклада в анизотропию мод, удовлетворяющих условию $k\eta_{rei} \lesssim 1$, получим для анизотропии в данном направлении \mathbf{n} , подставляя (9.86) в (9.84) и прибавляя (9.83),

$$\Theta_0(\mathbf{n}) = \frac{1}{4} \delta_\gamma(\eta_r) + \Phi(\eta_r) - (1 - e^{-\tau_{rei}}) \mathbf{n} \mathbf{v}_B(\eta_{rei}).$$

Для столь длинноволновых возмущений изначальный допплеровский вклад $\mathbf{n} \mathbf{v}(\eta_r)$ мал, и мы им пренебрегли. Для коротковолновых мод, $k\eta_{rei} \gtrsim 1$, будем иметь

$$\Theta_0(\mathbf{n}) = e^{-\tau_{rei}} \cdot \left(\frac{1}{4} \delta_\gamma(\eta_r) + \Phi(\eta_r) - \mathbf{n} \mathbf{v}(\eta_r) \right) \quad (9.87)$$

$$- (1 - e^{-\tau_{rei}}) \mathbf{n} \mathbf{v}_B(\eta_{rei}). \quad (9.88)$$

В пренебрежении допплеровским вкладом эпохи реионизации отсюда и следуют формулы (9.81).

Пока мы рассматриваем параметры τ_{rei} и z_{rei} как независимые. При этом параметр τ_{rei} определяет фактор подавления $e^{-2\tau_{rei}}$ мультиполей C_l , а параметр z_{rei} определяет значение l_{rei} , выше которого это подавление имеет место. Для численной оценки l_{rei} воспользуемся оценкой (9.82), вспомним соотношение (2.15) и учтём, что вторичная ионизация происходит глубоко на пылевидной стадии, так что

$$\eta_{rei} = \frac{2}{a_0 H_0 \sqrt{1 + z_{rei}}}.$$

Получим

$$l_{rei} \simeq \pi \sqrt{1 + z_{rei}} I(\Omega_M) \simeq 9.0, \quad (9.89)$$

где для численной оценки мы положили $z_{rei} = 10$ и воспользовались значением (2.16). Таким образом, вторичная ионизация существенна для всех мультиполей, кроме самых низших. Это проиллюстрировано на рис. 9.5.

В действительности параметры z_{rei} и τ_{rei} нельзя считать вполне независимыми, поскольку в реальной Вселенной концентрация водорода конечна, а значит конечна и максимально возможная концентрация свободных электронов. Из измерений анизотропии реликтового излучения независимо и точно определить величину z_{rei}

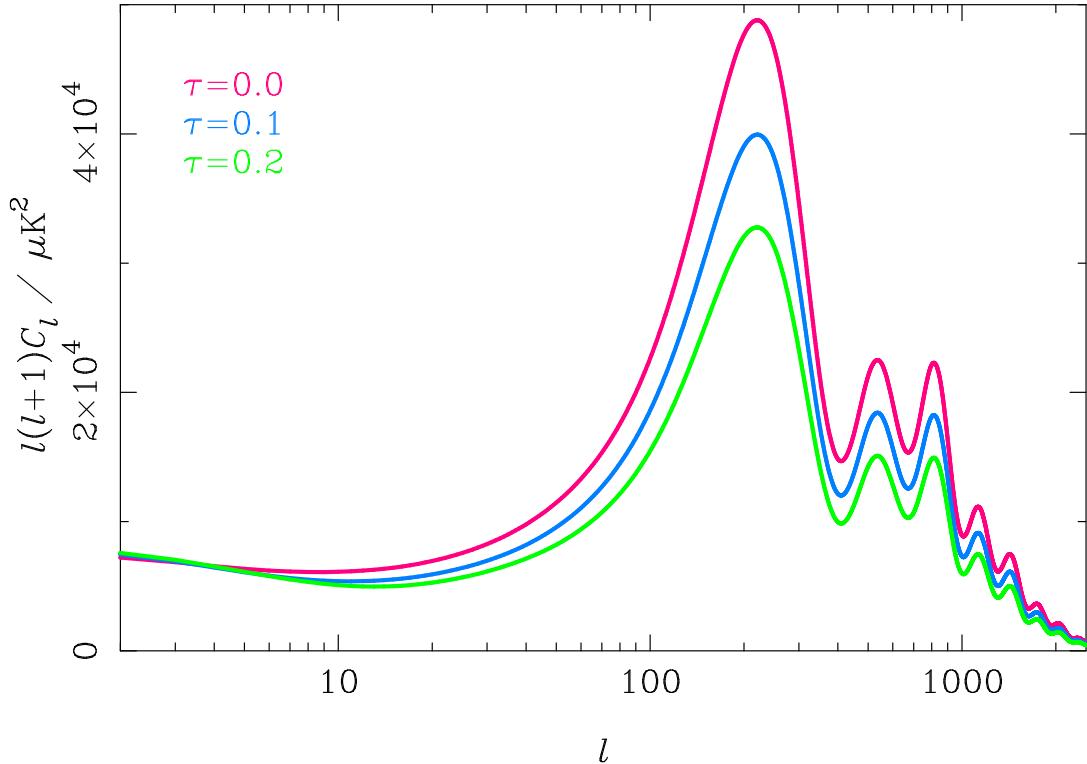


Рис. 9.5: Численный расчёт влияния вторичной ионизации Вселенной на спектр анизотропии реликтового излучения [55].

трудно, в особенности при учёте космической неопределенности, присутствующей при малых l . Поэтому на практике считают, что при $z = z_{rei}$ водород становится полностью ионизированным. Это даёт связь между оптической толщиной и z_{rei} , которая выражается соотношением

$$\tau_{rei} = \sigma_T \int_{t_{rei}}^{t_0} dt \cdot 0.75 n_B(t) , \quad (9.90)$$

где мы учли, что примерно четверть барионов находится в атомах гелия, которые не ионизированы. Именно в предположении о такой связи выполнены расчёты, результат которых приведён на рис. 9.5.

Интеграл в (9.90) нетрудно вычислить явно, учитывая, что он набирается на нижнем пределе, то есть при $z \sim z_{rei}$, когда параметр Хаббла равен $H = H_0 \sqrt{\Omega_M(1+z)^3}$. А именно,

$$\tau_{rei} = \sigma_T \int_0^{z_{rei}} \frac{dz}{1+z} 0.75 \eta_B n_{\gamma,0} (1+z)^3 \frac{1}{H(z)} = 0.5 \frac{\eta_B \sigma_T n_{\gamma,0}}{H_0 \sqrt{\Omega_M}} (1+z_{rei})^{3/2} . \quad (9.91)$$

Учитывая, что $\sigma_T = 0.67 \cdot 10^{-24} \text{ см}^2$, получаем отсюда при $h = 0.73$ и $\Omega_M = 0.24$ численную оценку

$$\tau_{rei} = 2.2 \cdot 10^{-3} (1+z_{rei})^{3/2} , \quad (9.92)$$

что при $z_{rei} = 10$ даёт $\tau_{rei} \simeq 0.08$. Извлечённая из наблюдательных данных оптическая толща равна [2] $\tau_{rei} = 0.084 \pm 0.016$, что соответствует⁷ $z_{rei} = 10.8 \pm 1.4$.

⁷В [2] используются значения $\Omega_M = 0.27$ и $h = 0.71$.

Отметим, что, строго говоря, выражение (9.90) представляет собой верхнюю границу для параметра τ_{rei} при фиксированном z_{rei} ; иными словами, измерение τ_{rei} и использование затем соотношения (9.92) даёт оценку снизу для z_{rei} . Тем не менее, эта оценка даёт хорошее представление о том, когда происходила вторичная ионизация во Вселенной.

Замечательно, что оптическая толщина оказалась не настолько большой, чтобы анизотропия реликтового излучения была полностью замыта, но и не настолько малой, чтобы эффектом вторичной ионизации можно было пренебречь. Это — одно из многих численных совпадений, встречающихся в космологии.

9.3 Малые угловые масштабы

Для описания спектра анизотропии температуры реликтового излучения на малых угловых масштабах, $l \gtrsim 1000$, использованное нами в предыдущих разделах этой главы приближение мгновенного отщепления фотонов становится неприменимым. Есть четыре важных эффекта, которые следует учитывать при описании мелкомасштабной анизотропии. Два из них связаны с процессами в барион-фотонной плазме в конце эпохи рекомбинации.

Первый эффект, приводящий к подавлению *акустических осцилляций* в барион-фотонной среде, — это эффект Силка. Мы рассматриваем его в разделе 8.5.2. Суть эффекта в следующем. В эпоху рекомбинации температура плазмы и концентрация частиц в ней уже настолько малы, что в электрон-фотонном взаимодействии число фотонов сохраняется, а при единичном перерассеянии энергия фотона почти не изменяется. Таким образом, фотоны могут распространяться на довольно большие расстояния, сохраняя свою энергию. Тем самым акустические колебания на меньших масштабах замываются незадолго до полного отщепления фотонов от плазмы. Соответствующий фактор подавления осцилляций с импульсом k грубо оценивается как e^{-k^2/k_S^2} , где $k_S \equiv k_S(\eta_r) \sim a_0 \cdot 0.1 \text{ Мпк}^{-1}$, см. (8.193). Вклады в C_l , пропорциональные *квадратам* осциллирующих слагаемых в δ_γ и v_γ (например, первые члены в каждой из строк в (9.72)), подавлены как e^{-2k^2/k_S^2} , так что их подавление имеет место уже при

$$l \gtrsim l_S = \frac{k_S \eta_0}{\sqrt{2}} \sim 1000. \quad (9.93)$$

Таким образом, эффект Силка приводит к быстрому затуханию вкладов звуковых волн в спектр C_l начиная с $l \sim 1000$.

Сделаем по поводу этого эффекта следующие замечания. Во-первых, как видно из (8.208), эффект Силка можно приблизённо учесть в формулах для анизотропии, содержащихся в разделе 9.2.3, включив в них дополнительный экспоненциальный фактор $e^{-\frac{k^2}{k_S^2}}$ перед осциллирующими вкладами в скалярные возмущения. Главный эффект от этого состоит в том, что в формулах (9.72) и (9.78) величину A нужно заменить на $A e^{-\frac{l^2}{2k_S^2}}$ (предэкспоненциальный множитель тоже изменится). Во-вторых, на самом деле некоторое подавление имеет место и для меньших мультиполей по сравнению с (9.93), поскольку моды с импульсами больше или порядка k_S дают вклад и в низшие мультиполи. Наконец, рассмотренное подавление испытывают только осциллирующие вклады в скалярные возмущения, а для медленно меняющегося со временем второго вклада в (9.64) такого подавления нет. Последний вклад, впрочем,

сам по себе убывает как $B(k) \propto k^{-2}$, так что убывает и весь спектр C_l , см. Рис. 9.1.

- ▷ **Задача 10.** Оценить поправки к формулам (9.72) и (9.78) при $l \ll l_S$ в главном порядке по l/l_S . Указание: там, где это необходимо, ограничиться главным логарифмическим приближением.
- ▷ **Задача 11.** В рамках описанного выше приближения найти выражения для вкладов в C_l от эффекта Сакса–Вольфа и эффекта Допплера с учётом эффекта Силка при $l \gg l_S$, включая зависимость предэкспоненты от l/l_S . Указание: учесть, что интегралы типа (9.74) набираются при $(u - 1) \sim l^{(r)}/l$.

Второй эффект состоит в том, что фотоны отщепляются неодновременно: сфера последнего рассеяния имеет ненулевую толщину $2\Delta z_r \simeq 155$ (см. раздел 8.5.1). Это приводит к подавлению анизотропии и особенно к замыванию осцилляций в спектре на малых угловых масштабах. Приближённо эффект конечности толщины сферы последнего рассеяния можно описать следующим образом. Неодновременность отщепления означает некоторую неопределённость в задании времени последнего рассеяния фотона η_i . Это можно учесть, сглаживая выражения, включающие функции $\Phi(\eta_i)$, $\delta_\gamma(\eta_i)$, $v_\gamma(\eta_i)$, с функцией прозрачности (8.163). Последнюю можно приближённо считать гауссианом по η_i с центром в $\eta_i = \eta_r$ и дисперсией $\Delta\eta_r$. Рассмотрим, например, вклад в анизотропию от эффекта Сакса–Вольфа. Из-за конечности толщины сферы последнего рассеяния вклад волны с импульсом \mathbf{k} в анизотропию в направлении \mathbf{n} будет пропорционален

$$\Theta(\mathbf{n}, \mathbf{k}) = \int d\eta_i N e^{-\frac{(\eta_i - \eta_r)^2}{2\Delta\eta_r^2}} e^{i\mathbf{k}\mathbf{n}(\eta_0 - \eta_i)} \{A \cos[kr_s + ku_s(\eta_i - \eta_r)] - B\} ,$$

где N нормирует гауссиан на единицу, $r_s = r_s(\eta_r)$, а медленно меняющиеся функции A и B — те же, что в (9.68), причём можно положить $A = A(\eta_r)$, $B = B(\eta_r)$. Выполнив интегрирование, получим

$$\Theta(\mathbf{n}, \mathbf{k}) = e^{i\mathbf{k}\mathbf{n}(\eta_0 - \eta_r)} \left\{ \frac{A}{2} \left[e^{-\frac{\Delta\eta_r^2}{2}(\mathbf{k}\mathbf{n} - ku_s)^2} e^{ikr_s} + e^{-\frac{\Delta\eta_r^2}{2}(\mathbf{k}\mathbf{n} + ku_s)^2} e^{-ikr_s} \right] - B e^{-\frac{\Delta\eta_r^2}{2}(\mathbf{k}\mathbf{n})^2} \right\} .$$

Видно, что конечность толщины сферы последнего рассеяния приводит, вообще говоря, к экспоненциальному подавлению вкладов. В то же время, подавление зависит от направления распространения волны. В частности, в последнем слагаемом оно отсутствует для волн, распространяющихся в направлении, ортогональном лучу наблюдения. Это и понятно: вклад в возмущения, пропорциональный $B(\eta)$, слабо зависит от времени, и волны, ортогональные лучу наблюдения, выглядят одинаково вдоль луча зрения внутри сферы толщиной $\Delta\eta_r$. В первом и втором членах подавление тоже отсутствует тогда, когда фаза волны не меняется вдоль луча наблюдения, однако это достигается за счёт компенсации пространственного набега фазы временным и происходит для волн, распространяющихся под определённым углом к лучу наблюдения. Из-за этих эффектов некоторые волны дают вклады в C_l , не подавленные экспоненциально, и в итоге подавление неосциллирующих слагаемых в C_l оказывается степенным, и притом довольно слабым. В то же время, осциллирующие вклады (9.74) набираются из области $\mathbf{n}_k \mathbf{n} \sim l^{(r)}/l \ll 1$, поэтому осцилляции мультиполей C_l подавлены экспоненциальным фактором

$$C_l^{(osc)} \propto e^{-(ku_s \Delta\eta_r)^2} = e^{-\frac{l^2}{\Delta l^2}} , \quad (9.94)$$

где

$$\Delta l = \frac{\eta_0}{u_s \Delta \eta_r} = \sqrt{3[1 + R_B(\eta_r)]} \frac{\eta_0}{\eta_r} \frac{\eta_r}{\Delta \eta_r} \simeq 2800 ,$$

и мы воспользовались (8.169) для численной оценки. Таким образом, особенно сильное подавление, связанное с конечностью толщины сферы последнего рассеяния, испытывают осцилляции в угловом спектре при $l \gtrsim 2800$. Это подавление — дополнительное к подавлению за счёт эффекта Силка.

Влияние конечности толщины сферы последнего рассеяния на неосциллирующую часть спектра C_l можно учесть, вновь используя подход, основанный на формуле (9.57). Рассмотрим, например, вклад эффекта Сакса–Вольфа. Учёт рассматриваемого явления приводит к следующей модификации формулы (9.69):

$$\tilde{\Theta}_l^{SW}(\mathbf{k}) = \Phi_{(i)} \int d\eta_i N e^{-\frac{(\eta_i - \eta_r)^2}{2\Delta\eta_r^2}} \{A \cos [kr_s + ku_s(\eta_i - \eta_r)] - B\} j_l[k(\eta_0 - \eta_i)] .$$

Используем формулу (9.57), с $\eta = \eta_i$, проинтегрируем по η_i и запишем, например, для вклада, пропорционального B , выражение

$$\tilde{\Theta}_l^{SW,B}(\mathbf{k}) = -\Phi_{(i)} B \cdot \frac{1}{l\sqrt{u}(u^2 - 1)^{1/4}} e^{-\frac{l^2}{l_*^2}(u^2 - 1)} \cos \left[\left(l + \frac{1}{2}\right) \phi(u) - l \frac{\eta_r}{\eta_0} \sqrt{u^2 - 1} \right] ,$$

где $u = k\eta_0/l$ и

$$l_* = \frac{\eta_0}{\Delta\eta_r} \sim 1350 .$$

Для соответствующего вклада в C_l после усреднения быстрых осцилляций согласно (9.59) получим, например в случае плоского начального спектра,

$$C_l^{SW,B} = \frac{2\pi A_\Phi}{l^2} \int_1^\infty \frac{du}{u} B^2 e^{-\frac{l^2}{l_*^2}(u^2 - 1)} \frac{1}{u\sqrt{u^2 - 1}} .$$

При $l \gg l_*$ интеграл здесь набирается в области, близкой к $u = 1$, и мы получаем

$$C_l^{SW,B} = \frac{\pi^{3/2} A_\Phi}{l^2} \frac{l_*}{l} B^2 (k = l/\eta_0) .$$

Таким образом, учёт конечности толщины сферы последнего рассеяния приводит к подавлению мультиплей первой степенью малого параметра l_*/l . Аналогично обстоит дело и с неосциллирующей частью вклада в C_l , пропорционального A^2 .

▷ Задача 12. При $l \gg l_*$ найти неосциллирующую часть вклада эффекта Сакса–Вольфа в C_l , пропорционального A^2 , с учётом конечности толщины сферы последнего рассеяния.

▷ Задача 13. Показать, что осциллирующая часть вклада эффекта Сакса–Вольфа в C_l подавлена при $l \gtrsim l_*$ фактором, указанным в (9.94).

Наконец, имеют место ещё два эффекта, приводящих к замыванию акустических пиков в спектре анизотропии. Они связаны с влиянием структур в поздней Вселенной, $z \lesssim 1$, на распространение реликтовых фотонов.

Во-первых, имеет место слабое линзирование: структуры — галактики, скопления галактик — создают локальные гравитационные потенциалы, которые отклоняют фотонов на небольшие углы. Ясно, что для анизотропии на больших угловых масштабах отклонение фотонов локальными гравитационными потенциалами несущественно, поскольку отклонений на большие углы в результате не происходит. Однако начиная с некоторого углового масштаба слабое линзирование приводит к таким искажениям, что они попросту замывают акустические пики, см. рис. 9.6. При этом формируется вторичная анизотропия. Исследование слабого линзирования реликтового излучения позволяет получить интересную информацию о локальной распространённости структур в поздней Вселенной, а также проследить общую динамику развития структур в эпоху $z \lesssim 1$.

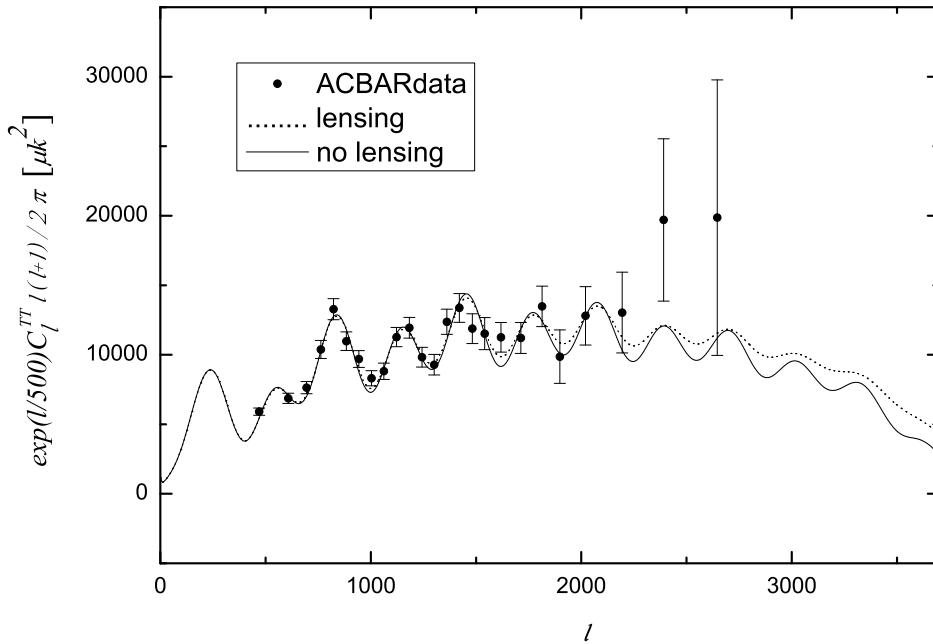


Рис. 9.6: Влияние слабого линзирования на спектр анизотропии реликтового излучения [58]. Показаны данные эксперимента ACBAR. Следует обратить внимание на специфический выбор изображённой величины, характеризующей анизотропию. При таком выборе старшие пики искусственно усилены, так что экспоненциальное падение спектра при больших l из-за эффекта Силка скомпенсировано.

Во-вторых, структуры — в особенности скопления галактик — содержат горячий ионизированный газ. Для фотонов, пересекающих на своём пути такие облака, повышается вероятность рассеяния. Такие фотоны принимают участие в формировании *вторичной анизотропии*. При рассеянии на облаках горячего газа, как правило, фотонами несколько подогреваются. При этом несколько искажается планковский спектр реликтового излучения в соответствующих направлениях: фотонов со сравнительно высокими частотами становится больше, а с низкими частотами — меньше. Таким образом, на небесной сфере искажения планковского спектра реликтового излучения должны коррелировать с расположением структур. Это действительно наблюдается. Явление перерассеяния на облаках горячего газа получило название эффекта Зельдовича–Сюняева. Среди прочего, оно используется для того, чтобы проследить за развитием структур в поздней Вселенной.

9.4 Зависимость спектра анизотропии от космологических параметров

Рассмотрим вкратце, как те или иные космологические параметры влияют на спектр C_l . Важность этого вопроса связана с тем, что именно спектр анизотропии реликтового излучения является одним из основных источников количественной информации о космологических параметрах. Более того, для целого ряда параметров это на

сегодняшний день самый точный источник.

Среди космологических параметров можно выделить те, которые характеризуют первичные возмущения, и те, которые относятся к составу и эволюции Вселенной, её пространственной кривизне, вторичной ионизации. В первую группу входят амплитуда и наклон спектра адиабатических возмущений $A_{\mathcal{R}}$ (или $A_{\Phi} = (4/9)A_{\mathcal{R}}$) и n_s , амплитуда тензорных возмущений A_T , а также более тонкие характеристики, например, зависимость наклона скалярного спектра от импульса, параметризованная величиной $dn_s/d\ln k$, наклон тензорного спектра n_T и т.д. Зависимость углового спектра анизотропии от этих параметров довольно проста: амплитуды $A_{\mathcal{R}}$ и A_T определяют общий уровень вкладов скалярных и тензорных возмущений в спектр C_l , поскольку $C_l \propto A_{\mathcal{R}}, A_T$, а зависимость от наклонов и $dn_s/d\ln k$ в целом соответствует формуле (9.79). Кроме того, важен поиск негауссовойности первичных возмущений и примеси мод постоянной кривизны. Именно эта группа представляет основной интерес с точки зрения выяснения механизма генерации первичных возмущений, то есть с точки зрения теории самой ранней Вселенной.

В рамках модели Λ CDM вторую группу составляют параметр Хаббла H_0 , величины Ω_B , Ω_{CDM} , Ω_{Λ} , Ω_{curv} , Ω_{ν} , подчинённые условию $\Omega_B + \Omega_{CDM} + \Omega_{\Lambda} + \Omega_{curv} + \Omega_{\nu} = 1$ (с точностью до вклада фотонов в современную плотность энергии; отметим, что вместо Ω_{ν} в качестве параметра как правило используют сумму масс нейтрино), а также оптическая толщина τ_{rei} . Несомненный интерес представляет и возможность того, что тёмная энергия не является космологической постоянной, а характеризуется эффективным уравнением состояния $p_{\Lambda} = w_{\Lambda}\rho_{\Lambda}$, где w_{Λ} отличается от -1 и, вообще говоря, зависит от времени⁸.

Столь большой набор параметров трудно определить с высокой точностью на основе только измерений анизотропии температуры реликтового излучения. Действительно, как мы увидим в этом разделе, характеристики спектра C_l испытывают приближённое вырождение по параметрам. С примером такого вырождения мы уже сталкивались в разделе I.4.6 при обсуждении результатов измерений расстояний до удалённых стандартных свеч — сверхновых типа Ia; в случае со спектром анизотропии реликтового излучения возникает похожая ситуация. Снять вырождение позволяет полный анализ всей совокупности данных наблюдательной космологии. На протяжении обеих частей этой книги мы используем значения космологических параметров, полученные как раз в результате такого полного анализа. Подробности и оригинальные ссылки можно найти в [3].

Разумеется, аккуратный анализ зависимости спектра анизотропии от космологических параметров и извлечение значений этих параметров из наблюдательных данных проводятся численными методами. Соответствующие программы можно найти, например, в [59]. В то же время, полезно иметь представление об этой зависимости на качественном уровне. К такому качественному рассмотрению мы и переходим.

Мы начнём наше обсуждение с общей нормировки спектра. Как мы видели в разделе 9.2.2, область низших мультиполей наиболее чувствительна к амплитудам $A_{\mathcal{R}}$ и A_T , и приближённо вырождена по этим двум параметрам. В то же время, тензорные

⁸Отметим, что красное смещение эпохи рекомбинации z_r фиксировано: оно практически не зависит от космологических параметров, см. конец раздела 8.5.1. Если не рассматривать возможности существования новых лёгких частиц, то и значение величины $\Omega_{rad}h^2$, определённой в разделе 2.1.2, также можно считать известным. Отметим, впрочем, что результаты измерений анизотропии реликтового излучения используются и для получения информации об Ω_{rad} , иначе говоря, об эффективном числе релятивистских степеней свободы в эпохи, близкие к периоду рекомбинации.

возмущения дают малый вклад в промежуточной области спектра, см. рис. 9.4, так что при фиксированных остальных параметрах общее соотношение между двумя областями позволяло бы определить A_R и A_T по отдельности. Однако общая нормировка промежуточной области зависит от параметра τ_{rei} , см. рис. 9.5, и от наклона скалярного спектра n_s : избыток мощности в области малых мультиполей может быть обусловлен как вкладом тензорных возмущений, так и “красным” скалярным спектром, $n_s < 1$, см. (9.37). Вырождение по τ_{rei} и по n_s позволяют отчасти снять измерения поляризации реликтового излучения, измерения анизотропии на малых угловых масштабах ($l \gtrsim 1000$) и другие наблюдательные данные. В частности, мощность на малых угловых масштабах заметно уменьшается в случае “красного” спектра. Однако и здесь есть вырождение, поскольку подавление области больших l может быть связано с величиной l_S , которая характеризует влияние эффекта Силка и сама зависит от космологических параметров. Таким образом, несмотря на высокую точность измерений спектра C_l ограничение на амплитуду тензорных возмущений сегодня не выглядит особенно впечатляющим, см. (5.45), а амплитуда A_R и наклон n_s известны с точностью около 4% и 1.5%, соответственно, см. (5.37).

Положения пиков в спектре C_l весьма чувствительны к пространственной кривизне и плотности тёмной энергии. С точностью до некоторой неопределённости, связанной с величинами η_r и R_B , звуковой горизонт эпохи рекомбинации представляет собой “стандартную линейку”, которая видна под тем или иным углом в зависимости от кривизны пространства и от того, какое расстояние пролетели реликтовые фотоны с эпохи рекомбинации. Этот вопрос мы обсуждали в разделе I.4.6. Здесь подчеркнём ещё раз, что кривизна пространства и тёмная энергия приводят к одному и тому же эффекту⁹: при фиксированных остальных параметрах отрицательная кривизна уменьшает этот угол, положительная тёмная энергия делает то же самое, увеличивая η_0 , см. (2.15). Это свойство проиллюстрировано на рис. 9.7. Данное вырождение, впрочем, снимается измерениями расстояний до сверхновых типа Ia (см. рис. I.4.6) и/или барионных акустических осцилляций, см. рис. 7.6. Значение плотности тёмной энергии известно сегодня с неплохой точностью, $\Omega_\Lambda = 0.726 \pm 0.015$ [2], а на пространственную кривизну имеется сильное наблюдательное ограничение

$$-0.0175 < \Omega_{curv} < 0.0085 .$$

В этой книге мы считаем $\Omega_{curv} = 0$.

В действительности звуковой горизонт эпохи рекомбинации r_s , см. (7.6), определяющий положения пиков при заданной Ω_Λ , зависит от параметров $\Omega_M h^2$ и $\Omega_B h^2$. Зависимость от $\Omega_M h^2$ связана в основном с тем, что η_r зависит от $\Omega_{rad}/\Omega_M \propto 1/(\Omega_M h^2)$ в соответствии с (2.17). Зависимость от $\Omega_B h^2$ возникает из-за наличия заметной поправки к скорости звука, пропорциональной $R_B \propto \rho_B$. Таким образом, положения пиков, как и другие характеристики спектра анизотропии, определяются довольно сложной комбинацией космологических параметров.

Обсудим вкратце такое свойство спектра C_l , как усиление нечётных пиков и подавление чётных на фоне общего понижения спектра с ростом l . Как мы обсуждали в разделе 9.2.3, оно связано со вторым, неосциллирующим слагаемым в (9.64). В соответствии с (9.65), это слагаемое сильно зависит от плотности барионов и плотности тёмной материи. В частности, основная зависимость от плотности барионов,

⁹Приближённое вырождение между Ω_{curv} и Ω_Λ сохраняется и при учёте раннего интегрального эффекта Сакса–Вольфа: он имеется и в присутствии тёмной энергии, и при ненулевой пространственной кривизне, см. рис. 9.7.

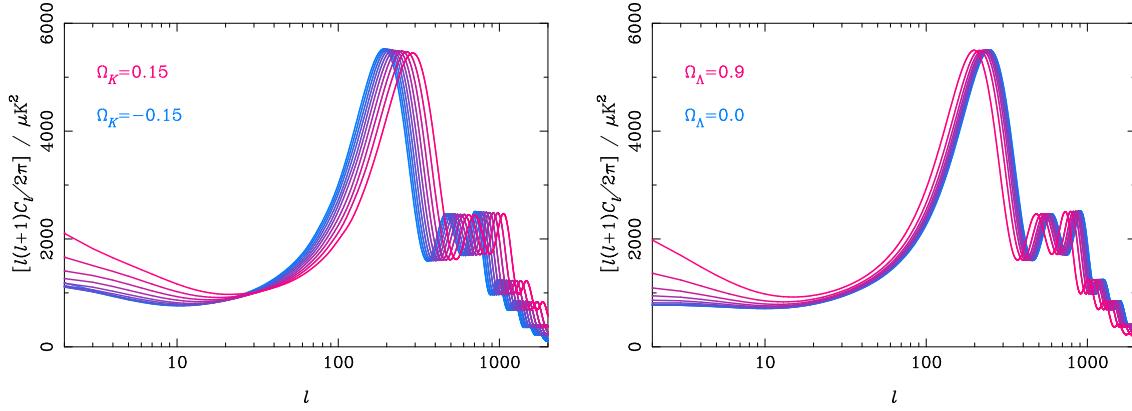


Рис. 9.7: Влияние пространственной кривизны (слева) и космологической постоянной (справа) на спектр анизотропии реликтового излучения [55].

то есть от $\Omega_B h^2$, содержится в величине $R_B \propto \rho_B$, так что рассматриваемый эффект усиливается с ростом $\Omega_B h^2$. Это проиллюстрировано на рис. 9.8. Отметим, что особенно сильно зависимость от плотности барионов проявляется в области первого пика. Это связано с тем обстоятельством, что в соответствующей области импульсов функция $B(k, \eta_r)$, пропорциональная R_B , велика и быстро меняется с импульсом, так что именно она в значительной мере определяет угловой спектр вблизи первого пика.

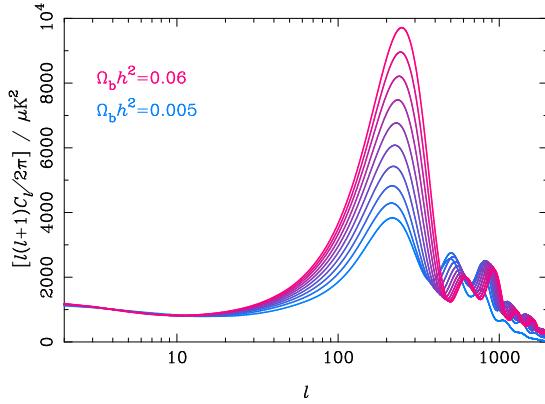


Рис. 9.8: Влияние плотности барионов на спектр анизотропии реликтового излучения [55].

Отметим наконец, что от величины $\Omega_M h^2$, то есть от плотности тёмной материи, сильно зависит вклад в анизотропию от раннего интегрального эффекта Сакса–Вольфа, проявляющийся в области первого пика. Это, как мы обсуждали в разделе 9.2.3, связано с прямой зависимостью от $\Omega_M h^2$ закона эволюции Вселенной после эпохи рекомбинации.

Итак, в угловом спектре анизотропии реликтового излучения C_l закодирована информация как о свойствах первичных космологических возмущений, так и о параметрах, характеризующих состав Вселенной и её сравнительно позднюю эволюцию. Например, среди всех космологических наблюдаемых именно анизотропия реликтового излучения обладает наибольшей чувствительностью к параметрам Ω_B и Ω_M , см. рис. 9.9. Другие примеры мы приводим на протяжении всей книги. Достоинством этого источника космологической информации является то, что соответствующий

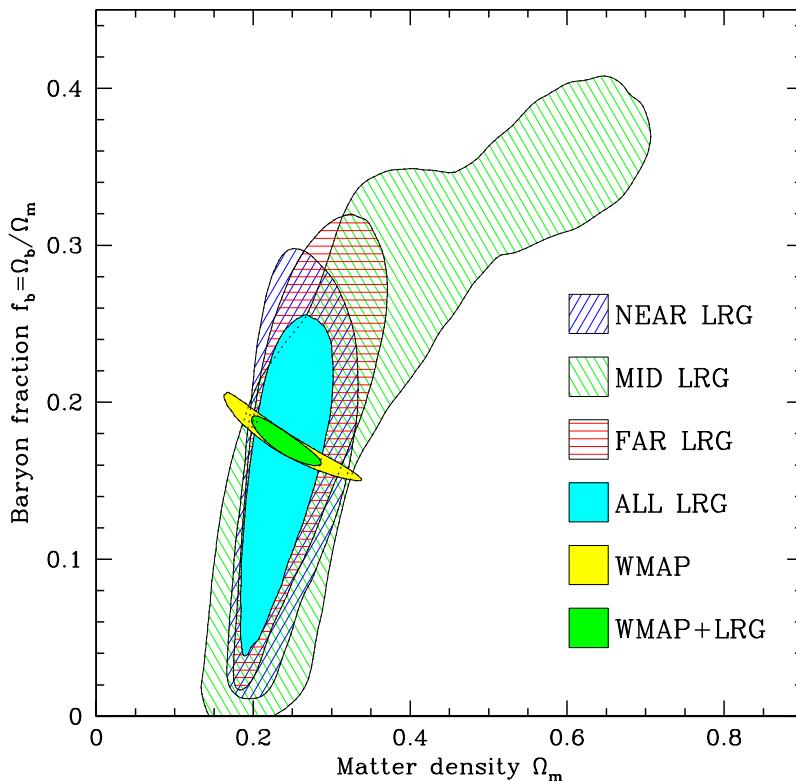


Рис. 9.9: Области в пространстве параметров $(\Omega_M, \Omega_B/\Omega_M)$, разрешённые на уровне достоверности 95% из анализа данных по распространённости структур (LRG) и данных эксперимента WMAP по анизотропии реликтового излучения [36].

теоретический анализ в основном может быть проведён в рамках линейного приближения, а потому он имеет высокую степень надёжности. В то же время, спектр C_l характеризуется приближённым вырождением по параметрам, что подчёркивает роль других результатов наблюдательной космологии, некоторые из которых мы рассматриваем в этой книге.

9.5 Анизотропия температуры в случае мод постоянной кривизны

В этой книге мы в основном рассматриваем адиабатические возмущения, поскольку именно они играют основную роль для нашей Вселенной. В то же время, как мы говорили в разделе 5.1, наличие даже небольшой примеси той или иной моды постоянной кривизны имело бы весьма важное значение для космологии, поэтому изучение возможных вкладов таких мод в анизотропию реликтового излучения представляет несомненный интерес.

Как мы видели в разделе 6.5, барионная мода постоянной кривизны практически неотличима от CDM моды. Поэтому для определённости мы будем говорить о CDM моде постоянной кривизны¹⁰. Как мы видели в разделе 6.4, она сильно отличается от

¹⁰Нейтринные моды постоянной кривизны мы в этой книге не рассматриваем.

адиабатической моды. При малых k , соответствующих низким мультипольям, мода постоянной кривизны, как и адиабатическая мода, постоянна во времени, см. (6.49) и (6.50). Для таких волн выполняется соотношение (см. (6.50))

$$\frac{1}{4}\delta_\gamma = \Phi . \quad (9.95)$$

Физически это означает, что для мод постоянной кривизны области гравитационных ям, $\Phi < 0$, за горизонтом *обеднены* фотонами, в противоположность случаю адиабатических мод. Из (9.95) получим, что эффект Сакса–Вольфа для мод постоянной кривизны, загоризонтных в эпоху рекомбинации, даёт следующий вклад в анизотропию реликтового излучения:

$$\Theta_0(\mathbf{n}) = \frac{1}{4}\delta(\eta_r) + \Phi(\eta_r) = 2\Phi(\eta_r) ,$$

где $\Phi(\eta_r)$ выражается через начальное данное \mathcal{S} согласно (6.49) и (6.46). С другой стороны, в отличие от адиабатической моды, возмущения более коротких длин волн, входящие под звуковой горизонт на радиационно-доминированной стадии, падают с импульсом, см. (6.58). Поэтому наличие примеси моды постоянной кривизны нарушило бы общее соотношение между анизотропией на малых и промежуточных l , с одной стороны, и анизотропией на больших l — с другой.

Далее, для моды постоянной кривизны под звуковым горизонтом справедливы соотношения (см. (6.59)),

$$\frac{1}{4}\delta_\gamma(\eta_r) + \Phi(\eta_r) = -R_B(\eta_r)\Phi - A(k, \eta) \cdot \delta_{CDM(i)} \cdot \sin[kr_s + \varphi(k)] \quad (9.96a)$$

$$kv_B = \frac{3}{4k}\delta'_\gamma = -3u_s A(k, \eta) \cdot \delta_{CDM(i)} \cdot \cos[kr_s + \varphi(k)] . \quad (9.96b)$$

При этом для больших k выполняется (см. (6.58))

$$\varphi = 0 , \quad A(k, \eta_r) = \frac{I\sqrt{3}}{(1+R_B)^{1/4}} \frac{\sqrt{1+z_{eq}}}{k\eta_0} , \quad \Phi = -9I^2 \frac{1+z_{eq}}{(k\eta_0)^2} \delta_{CDM(i)} , \quad (9.97)$$

где мы для упрощения формул положили $\Omega_{CDM}/\Omega_M = 1$. Существенно, что коэффициент пропорциональности между Φ и $\delta_{CDM(i)}$ отрицателен. Видно, что фазы осцилляций величин (9.96) сдвинуты по отношению к адиабатической моде; при больших k этот сдвиг составляет $\pi/2$. В последнем режиме вклад Сакса–Вольфа и диплоровский вклад как бы “меняются местами” по сравнению со случаем адиабатических возмущений. Соответственно, при больших l пики от эффекта Сакса–Вольфа находятся при $l \simeq 35 + 295n$, а пики от эффекта Допплера — при $l \simeq 260 + 295n$. Далее, первый и второй вклады в (9.96a) имеют разные относительные знаки, так что усиленными являются чётные пики, а нечётные, наоборот, подавлены, опять-таки в противоположность адиабатической моде. Наконец, оба вклада в (9.96a) падают с ростом k при больших импульсах, поэтому спектр C_l быстро затухает в области больших l .

Предсказываемая для моды постоянной кривизны картина акустических пиков представлена на рис. 9.10. Видно, что она *качественно* отличается от наблюдаемой в современной Вселенной, см. рис. 9.1. Наоборот, предсказания для адиабатических мод, представленные на том же рис. 9.1, находятся в хорошем качественном и количественном согласии с наблюдениями. Современные данные указывают на то, что доля

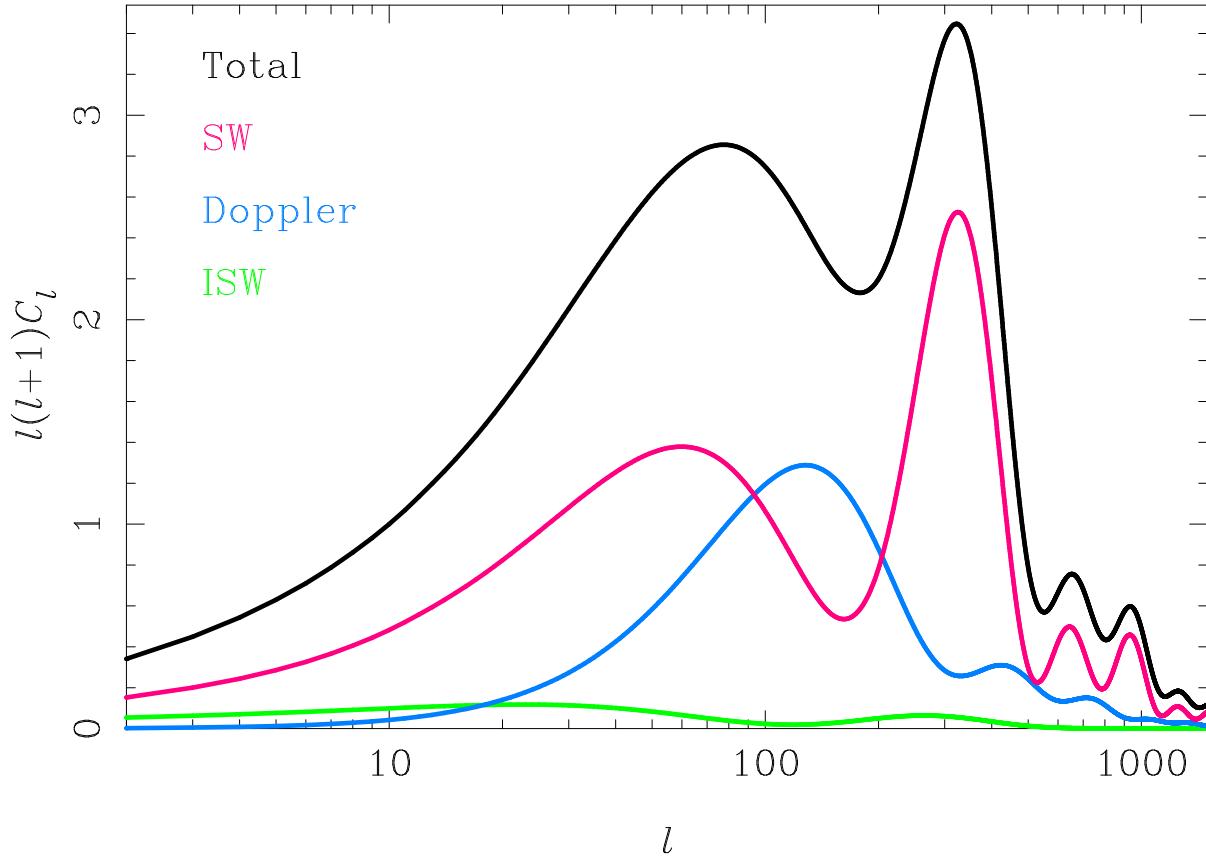


Рис. 9.10: Картина анизотропии реликтового излучения в модели с возмущениями постоянной кривизны [55]. Спектр первичных возмущений выбран плоским.

мод постоянной кривизны в спектре первичных возмущений не должна превышать нескольких процентов. Соответствующие ограничения приведены в разделе 5.4; они получаются в основном именно из анализа анизотропии реликтового излучения.

Глава 10

*Поляризация реликтового излучения

Электромагнитное излучение помимо интенсивности и направления распространения характеризуется поляризацией. Степень поляризации волны зависит от механизма её формирования и условий распространения. Реликтовое излучение поляризовано.

В этой главе мы вначале обсудим процессы, приводящие к поляризации реликтового излучения и введём формализм, используемый для описания поляризации. Затем мы рассмотрим генерацию поляризации скалярными и тензорными возмущениями и в рамках приближения, аналогичного приближению мгновенного отщепления фотонов, получим аналитические оценки для соответствующих наблюдаемых. Мы также представим современные (на момент написания книги) данные по измерению поляризации реликтового излучения и кратко обсудим связь космологических параметров с величинами, характеризующими поляризацию.

10.1 Источники поляризации

В конце эпохи рекомбинации происходит замораживание процессов комптоновского рассеяния фотонов на свободных электронах. Комптоновское рассеяние и приводит к появлению линейной поляризации. Она обусловлена тем, что дифференциальное сечение комптоновского рассеяния на покоящихся электронах зависит от поляризации начального и конечного фотона [18]:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{3\sigma_T}{8\pi} \cdot \left| \boldsymbol{\epsilon}'^* \boldsymbol{\epsilon} \right|^2, \quad (10.1)$$

где σ_T — томсоновское сечение, а $\boldsymbol{\epsilon}'$ и $\boldsymbol{\epsilon}$ — единичные 3-вектора поляризации падающего и вылетающего фотона, соответственно. Эта формула имеет следующую интерпретацию. Направления движения налетающего и рассеянного фотона \mathbf{n}' и \mathbf{n} определяют плоскость рассеяния, в которой лежат оба этих вектора, см. рис. 10.1. Сечение рассеяния фотона с вектором поляризации $\boldsymbol{\epsilon}'_{\perp}$, перпендикулярным плоскости рассеяния, равно $3\sigma_T/8\pi$, при этом вектор поляризации рассеянного фотона продолжает оставаться перпендикулярным плоскости рассеяния. Фотон с вектором поляризации $\boldsymbol{\epsilon}'_{||}$, лежащим в плоскости рассеяния, рассеивается с меньшим сечением $(3\sigma_T/8\pi) \cdot \cos^2 \theta$, где θ — угол рассеяния (угол между векторами \mathbf{n}' и \mathbf{n}), а вектор поляризации рассеянного фотона лежит в плоскости рассеяния.

Здесь полезно сделать следующее замечание. Напомним, что направление вектора поляризации электромагнитной волны совпадает с направлением вектора

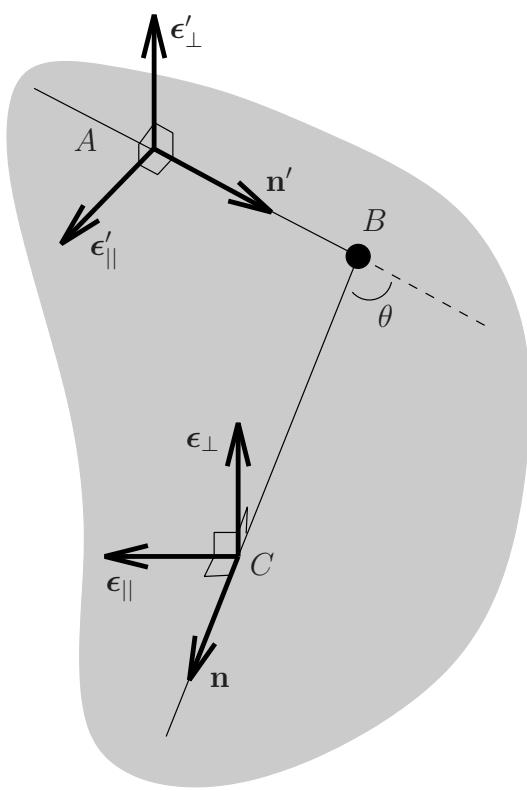


Рис. 10.1: Схематическое изображение рассеяния фотона (траектория движения $A B C$) на электроне (B).

электрического поля волны \mathbf{E} , а интенсивность излучения (число фотонов) пропорциональна \mathbf{E}^2 . Отсюда и из предыдущего рассуждения сразу следует, что в терминах рассеяния электромагнитных волн электрическое поле рассеянной волны \mathbf{E} пропорционально проекции поля падающей волны \mathbf{E}' на плоскость, перпендикулярную вектору \mathbf{n} ,

$$\mathbf{E} = \text{const} \cdot [\mathbf{E}' - \mathbf{n} \cdot (\mathbf{n}\mathbf{E}')]. \quad (10.2)$$

Это соотношение нам будет полезно в дальнейшем.

Рассмотрим теперь неполяризованное электромагнитное излучение, приходящее с направления \mathbf{n}' и рассеянное в направлении \mathbf{n} . Из сказанного выше ясно, что рассеянное излучение будет обладать частичной линейной поляризацией в направлении, перпендикулярном плоскости рассеяния. Если интенсивность излучения, приходящего с разных направлений \mathbf{n}' , различна, то наблюдатель, регистрирующий фотонны, летящие в направлении \mathbf{n} , увидит частично поляризованное излучение. Так и

происходит в космологической ситуации: перед самым последним рассеянием поток фотонов, падающих на рассеивающий электрон, анизотропен, поскольку во Вселенной эпохи последнего рассеяния имеются неоднородности плотности и метрики, а также отличные от нуля скорости барион-фотонной среды, приводящие к эффекту Допплера. Ясно при этом, что наблюдаемая поляризация является линейной, а степень поляризации не может превышать величины $\delta T/T$.

Отметим в связи с изложенным несколько моментов. Во-первых, поток фотонов на рассеивающий электрон анизотропен в той мере, в какой среда неоднородна на масштабе порядка длины свободного пробега фотона. Поэтому образование поляризации реликтового излучения целиком обусловлено *неидеальностью барион-фотонной среды* (отсутствием тесной связи фотонов с электронами) в том смысле, что в пределе нулевой длины свободного пробега фотона эффект пропадает. Во-вторых, координатная длина свободного пробега фотона в интересующую нас эпоху оценивается толщиной сферы последнего рассеяния $\Delta\eta_r$. На таком расстоянии возмущения с малыми конформными импульсами k меняются слабо. Если интересоваться модами возмущений, дающими вклад в мультиполи с $l \sim 50$, то есть модами с $k \sim \eta_r^{-1}$, то их вклад в поляризацию будет подавлен фактором $\Delta\eta_r/\eta_r$, и грубая оценка для степени поляризации будет иметь вид $(\Delta\eta_r/\eta_r) \cdot (\delta T/T) \sim 1 \mu\text{K}/T_0$. Такой порядок величины степени поляризации и соответствует наблюдениям.

В-третьих, электромагнитное излучение, испытывающее рассеяние в последний раз, само является поляризованным из-за предыдущих процессов рассеяния. Мы этим обстоятельством будем пренебрегать для полу количественных оценок, то есть будем считать, что перед самым последним рассеянием излучение не поляризовано,

а вся поляризация приобретается в последнем процессе рассеяния. Такое приближение оправдывается тем, что длина свободного пробега фотона быстро растёт при расширении Вселенной в эпоху последнего рассеяния, между предыдущими процессами рассеяния фотон пролетает меньшие расстояния, чем между последующими, так что и приобретаемая в них поляризация сравнительно мала. Подчеркнём, однако, что в отличие от анизотропии температуры, где аналогичное приближение мгновенного отщепления оправдывается в области малых и промежуточных мультиполей малостью параметров $\Delta\eta_r \cdot k \sim l \cdot (\Delta\eta_r/\eta_0)$ и k_S/k , в случае поляризации наше приближение не обосновано малостью каких-либо параметров, и поправки к нему составляют заметную величину (десятак процентов или даже несколько больше) во всех областях углового спектра.

В-четвёртых, источником поляризации служат как скалярные, так и тензорные возмущения (если последние имеются). При этом, как мы увидим в дальнейшем, вклады скалярных и тензорных возмущений существенно различаются, так что эти два вклада можно разделить. С этим обстоятельством связана надежда обнаружения первичных тензорных возмущений — реликтовых гравитационных волн — путём измерения поляризации реликтового излучения.

В-пятых, поскольку источники поляризации и анизотропии температуры одни и те же — это скалярные и тензорные возмущения, — то картины температуры и поляризации на небесной сфере должны быть соответствующим образом скоррелированы. Эту корреляцию мы обсудим в данной Главе.

Далее, так же, как и в случае анизотропии температуры, на поляризацию оказывают влияние эффект Силка и конечность толщины сферы последнего рассеяния. Эти эффекты приводят к замыванию поляризации на малых угловых масштабах. Их рассмотрение во многом аналогично проведённому в разделе 9.3, и мы его в этой книге приводить не будем. Таким образом, результаты этой Главы, относящиеся к абсолютной величине поляризации, будут справедливы для мультиполей с $l \lesssim 1000$.

Наконец, помимо первичной поляризации, образованной в эпоху рекомбинации, имеет место вторичная поляризация, обусловленная перерассеянием реликтовых фотонов на свободных электронах в эпоху вторичной ионизации, сопровождающей появление первых звёзд. Величина этой вторичной поляризации пропорциональна вероятности перерассеяния, в нашем рассмотрении параметризуемой величиной оптической толщины τ_{rei} . Поскольку вторичная ионизация образуется при $z \sim 10$, возникающая картина вторичной поляризации имеет ярко выраженный крупномасштабный характер. Измерения поляризации реликтового излучения даже более чувствительны к параметру τ_{rei} , чем измерения анизотропии, где есть трудности с вырождением по космологическим параметрам. Вторичная поляризация возникает и из-за гравитационного линзирования реликтового излучения на структурах во Вселенной.¹

¹ В действительности, имеются механизмы, искажающие поляризацию реликтового излучения. Так, например, поляризация искажается при распространении света через облака ионизованного газа в областях с магнитным полем, например, в галактиках. Это явление получило название вращение Фарадея плоскости поляризации. Влияние фарадеевского вращения, однако, можно учесть, производя наблюдения в разных частотных диапазонах, поскольку угол поворота плоскости поляризации зависит от энергии фотона. Мы здесь не будем обсуждать этот и подобные механизмы, искажающие картину поляризации реликтового излучения.

10.2 Тензор поляризации. E - и B -моды

Рассмотрим, какими величинами характеризуется поляризация электромагнитного излучения, распространяющегося в направлении \mathbf{n} . Пусть \mathbf{s} — единичный вектор в плоскости, перпендикулярной вектору \mathbf{n} . Наблюдатель с поляриметром, ориентированным вдоль вектора \mathbf{s} , измеряет интенсивность излучения $I(\mathbf{s})$ (в случае релитковых фотонов — температуру $T(\mathbf{s})$). Она пропорциональна усредненному по периоду волны квадрату проекции электрического поля на направление \mathbf{s} , то есть величине $\langle |\mathbf{E} \cdot \mathbf{s}|^2 \rangle = s_a \langle E_a E_b^* \rangle s_b$, где E_a с $a = 1, 2$ — компоненты электрического поля в плоскости, ортогональной вектору \mathbf{n} , и s_a — компоненты вектора \mathbf{s} ; считаем, что базисные вектора в этой плоскости образуют вместе с вектором \mathbf{n} , как обычно, правую тройку. Таким образом, поляризационные свойства излучения в общем случае характеризуются эрмитовым тензором

$$I_{ab} = \langle E_a E_b^* \rangle ,$$

так что $I(\mathbf{s}) \propto s_a I_{ab} s_b$. Полная интенсивность излучения $I = \langle E_a E_a^* \rangle = \langle |E_1|^2 \rangle + \langle |E_2|^2 \rangle$ является не имеющим непосредственного отношения к поляризации инвариантом. Введём безразмерный тензор поляризации

$$P_{ab} = \frac{I_{ab}}{I} .$$

Это — эрмитов тензор с единичным следом, поэтому он характеризуется тремя вещественными параметрами. Для неполяризованного излучения $P_{ab} = \delta_{ab}/2$ и $\det P_{ab} = 1/4$, а для полностью линейно поляризованного излучения $P_{ab} = E_a E_b^*$, где \mathbf{E} — фиксированный двумерный вектор, так что $\det P_{ab} = 0$. В общем случае справедливо $0 \leq \det P_{ab} \leq 1/4$, так что можно ввести инвариантную скалярную величину — степень поляризации излучения — посредством равенства

$$\mathcal{P} = \sqrt{1 - 4 \cdot \det P} ,$$

Она изменяется от нуля (неполяризованное излучение) до единицы (полностью поляризованное излучение).

Для волны с круговой поляризацией $E_2 = \pm i E_1$, так что $P_{11} = P_{22} = 1/2$, при этом $P_{12} = -P_{21} = \pm i$ является чисто мнимой величиной. Наоборот, для линейно поляризованного излучения вектор электрического поля можно выбрать действительным, при этом тензор P_{ab} — действительный и симметричный. Именно этот случай мы и будем рассматривать в дальнейшем. Итак, в интересующем нас случае линейной поляризации поляризационные свойства излучения характеризуются действительным симметричным тензором P_{ab} , след которого равен единице. Он определяется двумя независимыми параметрами.

Пусть $s_a^{(1)}$ и $s_a^{(2)}$ — ортонормированная пара собственных векторов матрицы P_{ab} . С учётом того, что след P_{ab} равен единице, этот тензор имеет вид

$$P_{ab} = \lambda_p s_a^{(1)} s_b^{(1)} + (1 - \lambda_p) s_a^{(2)} s_b^{(2)} ,$$

где $0 \leq \lambda_p \leq 1$. При этом $\mathcal{P} = |1 - 2\lambda_p|$. Таким образом, в общем случае частично поляризованную волну можно представить в виде некогерентной суммы двух волн с интенсивностями $I \propto \lambda_p$ и $I \propto (1 - \lambda_p)$, соответственно, линейно поляризованных во взаимно ортогональных направлениях $\mathbf{s}^{(1)}$ и $\mathbf{s}^{(2)}$.

Частично поляризованное излучение можно разложить и по-другому: на полностью неполяризованную (n) и полностью поляризованную (p) части. Например, при $\lambda_p < 1/2$ можно записать

$$I_{ab} = \left[\lambda_p \delta_{ab} + (1 - 2\lambda_p) s_a^{(2)} s_b^{(2)} \right] \cdot I \equiv \frac{1}{2} \delta_{ab} \cdot I^{(n)} + E_a^{(p)} E_b^{(p)},$$

где $\mathbf{E}^{(p)}$ — фиксированный двумерный вектор. При этом интенсивности неполяризованной и поляризованной частей равны $(1 - \mathcal{P}) I$ и $\mathcal{P} I$, соответственно, а направление поляризации совпадает с направлением вектора $\mathbf{E}^{(p)} \propto \mathbf{s}^{(2)}$. Последнее соображение позволяет представлять наблюдательные данные в виде чёрточек на сфере, чьё направление соответствует направлению поляризации $\mathbf{E}^{(p)}$ реликтового излучения. Один из вариантов такого представления показан на рис. 10.2, где приведены

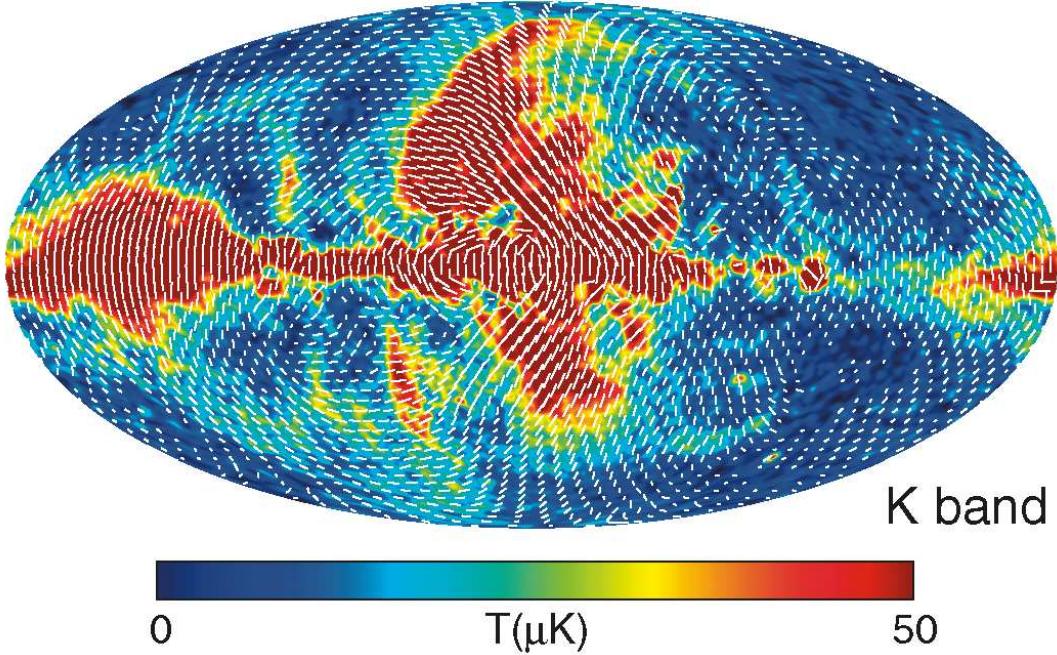


Рис. 10.2: Карта поляризации реликтового излучения: результат анализа данных пяти лет наблюдений эксперимента WMAP [46]. Цветом показана степень поляризации $\mathcal{P} \cdot T_0$, белыми чёрточками показано направление поляризации.

данные пяти лет наблюдений эксперимента WMAP [46].

Отметим, что в картах такого типа, вообще говоря, имеются особые точки. Обсуждение их классификации и свойств см. в [41].

В оптике поляризацию света принято описывать с помощью параметров Стокса U, Q, V . Их связь с матрицей P_{ab} даётся соотношением

$$P_{ab} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1+Q & U-iV \\ U+iV & 1-Q \end{pmatrix},$$

При этом $\mathcal{P} = \sqrt{U^2 + V^2 + Q^2}$. Отличие от нуля хотя бы одного из параметров Стокса указывает на (частичную) поляризацию излучения. Для волны с круговой поляризацией $Q = U = 0, V \neq 0$. Наоборот, для излучения с линейной поляризацией $V = 0$. Отметим, что в силу вещественности генераторов вращений пространства последнее свойство не зависит от выбора системы координат: величины V^2 и $Q^2 + U^2$ инвариантны по-отдельности.

▷ Задача 1. Докажите сделанное утверждение. Указание: воспользуйтесь разделением поляризационного тензора на симметричную и антисимметричную части.

В случае линейной поляризации

$$Q = \frac{\langle E_1^2 \rangle - \langle E_2^2 \rangle}{I}, \quad U = \frac{2\langle E_1 E_2 \rangle}{I}, \quad V = 0. \quad (10.3)$$

Величина Q соответствует линейной поляризации вдоль одной из осей координат. Величина U соответствует линейной поляризации, направленной под углом $\pi/4$ к координатным осям. Действительно, если в плоскости, перпендикулярной направлению распространения электромагнитной волны, ввести ортогональные системы координат (x, y) и (x', y') , повернутые друг относительно друга на 45° , и обозначить за I_x интенсивность излучения, измеренного поляриметром с ориентацией вдоль оси x , то

$$Q = \frac{I_x - I_y}{I}, \quad U = \frac{I_{x'} - I_{y'}}{I}.$$

Ясно, что сами величины Q и U не являются инвариантами, а зависят от выбора системы координат. Инвариантной относительной локальных вращений является степень поляризации $\mathcal{P} = \sqrt{Q^2 + U^2}$. Отношение $U/Q \equiv \tan 2\alpha$ определяет угол α наклона плоскости поляризации в данной координатной системе.

Вместо тензора P_{ab} часто бывает удобно использовать бесследовый тензор

$$\mathcal{P}_{ab} = P_{ab} - \frac{1}{2}g_{ab} = \frac{1}{\langle E_a E^a \rangle} \left(\langle E_a E_b \rangle - \frac{1}{2}\langle E_c E^c \rangle g_{ab} \right). \quad (10.4)$$

Здесь мы учли тот факт, что нас интересует тензор поляризации на небесной сфере (считаем, как всегда, что она имеет единичный радиус), и ввели метрику g_{ab} на этой сфере. Тензор \mathcal{P}_{ab} равен нулю для неполяризованного излучения. Выражение для степени поляризации имеет вид $\mathcal{P} = \sqrt{-4\det \mathcal{P}_a^b}$.

Параметры Стокса U и Q неудобны для наших целей, поскольку они представляют собой координатно-зависимые величины. Координатно-независимой является величина \mathcal{P} ; у симметричного бесследового тензора \mathcal{P}_{ab} других алгебраических инвариантов нет. В то же время, заданный на сфере тензор \mathcal{P}_{ab} можно представить через скалярный и псевдоскалярный потенциалы \mathcal{P}_E и \mathcal{P}_B :

$$\mathcal{P}_{ab} = -\{\nabla_a \nabla_b\} \mathcal{P}_E - \{\epsilon_a^c \nabla_b \nabla_c\} \mathcal{P}_B, \quad (10.5)$$

где ∇_a — ковариантная производная на сфере, ϵ_{ab} — антисимметричный тензор (включающий множитель \sqrt{g} , см. раздел I.A.1), фигурные скобки означают выделение симметричной и бесследовой части соответствующего тензора:

$$\{\nabla_a \nabla_b\} = \frac{1}{2}(\nabla_a \nabla_b + \nabla_b \nabla_a - g_{ab} \Delta), \quad \{\epsilon_a^c \nabla_b \nabla_c\} = \frac{1}{2}(\epsilon_a^c \nabla_b \nabla_c + \epsilon_b^c \nabla_a \nabla_c).$$

Здесь $\Delta = g_{ab} \nabla^a \nabla^b$ — лапласиан на сфере. Обратное преобразование имеет вид

$$-\Delta(\Delta + 2) \mathcal{P}_E = 2\{\nabla^a \nabla^b\} \mathcal{P}_{ab}, \quad (10.6a)$$

$$-\Delta(\Delta + 2) \mathcal{P}_B = 2\{\epsilon_a^c \nabla^a \nabla^b\} \mathcal{P}_{ab}. \quad (10.6b)$$

Знаки в определении потенциалов (10.5) выбраны в соответствии с традицией; этот выбор обусловлен стремлением иметь положительный знак в соотношениях (10.7) и (10.8) для Фурье-образов.

▷ Задача 2. Получить формулы обратных преобразований (10.6).

Соотношения (10.5) и (10.6) связывают две функции на сфере, U и Q , параметризующие тензор \mathcal{P}_{ab} в фиксированной системе координат, с двумя функциями \mathcal{P}_E и \mathcal{P}_B , инвариантными относительно координатных преобразований. В космологическом контексте важность разделения поляризации на E -моду ($\mathcal{P}_E \neq 0, \mathcal{P}_B = 0$) и B -моду ($\mathcal{P}_E = 0, \mathcal{P}_B \neq 0$) связана с тем, что скалярные возмущения генерируют только E -моду (с точностью до эффектов линзирования), а тензорные возмущения — как E -, так и B -моду, см. разделы 10.3.2 и 10.3.3.

Проиллюстрируем возможность представления симметричного бесследового тензора в виде (10.5), взяв в качестве многообразия, на котором он задан, не сферу, а плоскость. Перейдём в Фурье-представление на этой плоскости, $\mathcal{P}_{ab} = \mathcal{P}_{ab}(q_c)$. При фиксированном импульсе q_c можно определить два линейно-независимых вектора q_c и $\epsilon_{cd}q_d$ и разложить любой тензор по их билинейным комбинациям,

$$\mathcal{P}_{ab} = q_a q_b \mathcal{P}_1 + \epsilon_{ac} q_b q_c \mathcal{P}_2 + \epsilon_{bc} q_a q_c \mathcal{P}_3 + \epsilon_{ac} \epsilon_{bd} q_c q_d \mathcal{P}_4 .$$

Симметричность \mathcal{P}_{ab} накладывает ограничение

$$\mathcal{P}_2 = \mathcal{P}_3 \equiv \mathcal{P}_B/2 , \quad (10.7)$$

а равенство нулю следа даёт

$$\mathcal{P}_1 = -\mathcal{P}_4 \equiv \mathcal{P}_E/2 . \quad (10.8)$$

При этом тензор \mathcal{P}_{ab} имеет в точности вид (10.5) с очевидной заменой ∇_a на $i q_a$, что и требовалось. Отметим, что при этом

$$q_a \mathcal{P}_{ab} = -\frac{q^2}{2} (q_b \mathcal{P}_E + \epsilon_{bc} q_c \mathcal{P}_B) ,$$

то есть величины \mathcal{P}_E и \mathcal{P}_B определяют разложение дивергенции тензора поляризации на градиентную и вихревую части, соответственно. Отсюда и взялись названия: моды, приводящие к появлению градиентной части, называют E -модами, по аналогии с электрическим полем, а моды, приводящие к появлению вихревой части, называют B -модами, по аналогии с магнитным полем.

Смысъ E - и B -мод проиллюстрирован на рис. 10.3. Рассмотрим область вблизи максимума или минимума потенциала \mathcal{P}_E (левый рисунок) или \mathcal{P}_B (правый рисунок), считая потенциал симметричным относительно вращений вокруг положения экстремума (точка экстремума обозначена кружком). Поляризационные свойства представим, как на рис. 10.2: чёрточки показывают направление поляризации. Расположение чёрточек вдоль (поперёк) радиуса соответствует отрицательному (положительному) значению E -моды; эта ситуация изображена на левом рисунке. На правом рисунке расположение чёрточек соответствует случаю B -моды: поворот чёрточек по (против) часовой стрелки соответствует убыванию (росту) потенциала \mathcal{P}_B . Зеркальное отражение чёрточек относительно любой оси, проходящей через точку максимума, не изменяет расположение чёрточек на левом рисунке (чётная E -мода) и меняет расположение чёрточек на правом рисунке на противоположное (нечётная B -мода). Разумеется, в реалистическом случае на небесной сфере наблюдается некоторая суперпозиция обеих этих мод, а полный поляризационный потенциал содержит как скалярную, так и псевдоскалярную части.

Для потенциалов E - и B -мод на сфере удобно использовать то же разложение по сферическим гармоникам, что мы уже использовали для анизотропии температуры,

$$\mathcal{P}_E(\mathbf{n}) = \sqrt{2} \sum_{lm} \sqrt{\frac{(l-2)!}{(l+2)!}} a_{lm}^E Y_{lm}(\mathbf{n}) , \quad \mathcal{P}_B(\mathbf{n}) = \sqrt{2} \sum_{lm} \sqrt{\frac{(l-2)!}{(l+2)!}} a_{lm}^B Y_{lm}(\mathbf{n}) . \quad (10.9)$$

Выбор нормировки станет ясен ниже. Компоненты тензора поляризации определяются вторыми производными от потенциалов, по этой причине в тензор анизотропии

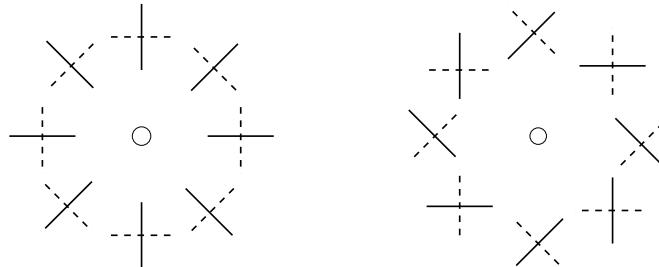


Рис. 10.3: Связь E - и B -мод (левый и правый рисунок, соответственно) с естественным представлением поляризации на сфере. Случай отрицательных (положительных) E - и B -мод соответствуют сплошным (пунктирным) чёрточкам.

не вносят вклад монопольная и дипольная компоненты потенциалов. Используем соотношения (10.6) и вспомним, что сферические гармоники Y_{lm} являются собственными функциями лапласиана на сфере с собственными значениями $[-l(l+1)]$, так что $\Delta(\Delta+2)Y_{lm} = [(l+2)!/(l-2)!]Y_{lm}$. Тогда получим из (10.6)

$$a_{lm}^E = -\sqrt{\frac{2(l-2)!}{(l+2)!}} \int d\mathbf{n} Y_{lm}^*(\mathbf{n}) \{\nabla^a \nabla^b\} \mathcal{P}_{ab}(\mathbf{n}) = -\int d\mathbf{n} Y_{lm}^{(E)ab*}(\mathbf{n}) \mathcal{P}_{ab}(\mathbf{n}), \quad (10.10)$$

$$a_{lm}^B = -\sqrt{\frac{2(l-2)!}{(l+2)!}} \int d\mathbf{n} Y_{lm}^*(\mathbf{n}) \{\epsilon_b^c \nabla^a \nabla^b\} \mathcal{P}_{ac}(\mathbf{n}) = -\int d\mathbf{n} Y_{lm}^{(B)ab*}(\mathbf{n}) \mathcal{P}_{ab}(\mathbf{n}), \quad (10.11)$$

где мы проинтегрировали по частям и ввели обозначения

$$\begin{aligned} Y_{lm,ab}^{(E)} &= \sqrt{\frac{2(l-2)!}{(l+2)!}} \left(\nabla_a \nabla_b Y_{lm} - \frac{1}{2} g_{ab} \nabla^c \nabla_c Y_{lm} \right), \\ Y_{lm,ab}^{(B)} &= \sqrt{\frac{(l-2)!}{2(l+2)!}} (\nabla_a \nabla_c Y_{lm} \epsilon_b^c + \nabla_c \nabla_b Y_{lm} \epsilon_a^c). \end{aligned}$$

Формулы (10.10), (10.11) позволяют вычислить коэффициенты $a_{lm}^{E,B}$ исходя из компонент поляризационного тензора. При полном пространственном отражении

$$a_{lm}^E \rightarrow (-1)^l a_{lm}^E, \quad a_{lm}^E \rightarrow -(-1)^l a_{lm}^B.$$

▷ Задача 3. Убедиться, что функции $Y_{lm,ab}^{(X)}$, $X = E, B$ образуют полную ортонормированную систему для симметричных бесследовых тензоров второго ранга на сфере, так что разложение \mathcal{P}_{ab} имеет вид

$$\mathcal{P}_{ab}(\mathbf{n}) = -\sum_{l=2}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \left(a_{lm}^E Y_{lm,ab}^{(E)}(\mathbf{n}) + a_{lm}^B Y_{lm,ab}^{(B)}(\mathbf{n}) \right).$$

Этот результат даёт альтернативное определение коэффициентов $a_{lm}^{E,B}$, которое эквивалентно (10.9). Указание: используя свойства сферических функций Y_{lm} , приведённые в разделе F.2, покажите, что справедливы формулы

$$\int d\mathbf{n} Y_{lm,ab}^{(X)*}(\mathbf{n}) Y_{l'm'}^{(X')ab}(\mathbf{n}) = \delta_{XX'} \delta_{ll'} \delta_{mm'},$$

и

$$\sum_{lm} Y_{lm,ab}^{(X)*}(\theta, \phi) Y_{lm}^{(X')ab}(\theta', \phi') = \delta_{XX'} \cdot \delta(\phi - \phi') \delta(\cos \theta - \cos \theta').$$

При обсуждении поляризации реликтового излучения традиционно используют сферическую систему координат. Метрика на сфере при этом имеет стандартный вид

$$ds^2 = g_{ab} dx^a dx^b = d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2. \quad (10.12)$$

Это ортогональная, но не ортонормированная система, и в ней тензор линейной поляризации (10.4) выражается через параметры Стокса следующим образом:

$$\mathcal{P}_{ab}(\mathbf{n}) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} Q(\mathbf{n}) & -U(\mathbf{n}) \sin \theta \\ -U(\mathbf{n}) \sin \theta & -Q(\mathbf{n}) \sin^2 \theta \end{pmatrix}. \quad (10.13)$$

В этой системе координат можно выписать явный вид введённых нами базисных функций $Y_{lm}^{(E)ab}$ и $Y_{lm}^{(B)ab}$. Введя вспомогательные функции

$$W_{lm}(\mathbf{n}) \equiv \left(\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} - \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{m^2}{\sin^2 \theta} \right) Y_{lm}(\mathbf{n}) = \left(2 \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + l(l+1) \right) Y_{lm}(\mathbf{n}), \quad (10.14)$$

$$X_{lm}(\mathbf{n}) \equiv \frac{2im}{\sin \theta} \left(\frac{\partial}{\partial \theta} - \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \right) Y_{lm}(\mathbf{n}), \quad (10.15)$$

получим

$$Y_{lm,ab}^{(E)}(\mathbf{n}) = \sqrt{\frac{(l-2)!}{2(l+2)!}} \begin{pmatrix} W_{lm}(\mathbf{n}) & X_{lm}(\mathbf{n}) \sin \theta \\ X_{lm}(\mathbf{n}) \sin \theta & -W_{lm}(\mathbf{n}) \sin^2 \theta \end{pmatrix}, \quad (10.16)$$

$$Y_{lm,ab}^{(B)}(\mathbf{n}) = \sqrt{\frac{(l-2)!}{2(l+2)!}} \begin{pmatrix} -X_{lm}(\mathbf{n}) & W_{lm}(\mathbf{n}) \sin \theta \\ W_{lm}(\mathbf{n}) \sin \theta & X_{lm}(\mathbf{n}) \sin^2 \theta \end{pmatrix}. \quad (10.17)$$

▷ Задача 4. Исходя из определения сферической функции $Y_{lm}(\mathbf{n})$ (см., например, Приложение F), доказать второе равенство в (10.14).

Для описания поляризации реликтового излучения вместо тензоров $Y_{lm,ab}^{(E)}$, $Y_{lm,ab}^{(B)}$, можно использовать тензоры

$$\pm_2 Y_{lm,ab} = Y_{lm,ab}^{(E)} \mp i Y_{lm,ab}^{(B)} = \sqrt{2} \cdot \pm_2 Y_{lm} \cdot \begin{pmatrix} 1 & \mp i \sin \theta \\ \mp i \sin \theta & -\sin^2 \theta \end{pmatrix}, \quad (10.18)$$

где

$$\pm_2 Y_{lm}(\mathbf{n}) = \sqrt{\frac{(l-2)!}{(l+2)!}} (W_{lm}(\mathbf{n}) \pm i X_{lm}(\mathbf{n})). \quad (10.19)$$

Тензоры (10.18) замечательны тем, что при вращении на угол α ортогонального базиса в касательной к сфере плоскости они преобразуются следующим образом:

$${}_s Y_{lm,ab} \rightarrow e^{is\alpha} \cdot {}_s Y_{lm,ab}, \quad s = \pm 2.$$

Значит, функции ${}_s Y_{lm,ab}$ имеют спиральность s , ср. с разделом 2.2.3. Иными словами, из компонент поляризационного тензора \mathcal{P}_{ab} можно составить величины спиральности ± 2 , спроектировав его в касательной плоскости на вектора с определённой спиральностью $\mathbf{e}^{(\pm)} = \mathbf{e}^{(1)} \pm i \mathbf{e}^{(2)}$:

$$\pm_2 \mathcal{P} \equiv \mathcal{P}_{ab} e^{(\pm)a} e^{(\pm)b} = Q \pm i U.$$

Отметим, что функции ${}_s Y_{lm}(\mathbf{n})$, фигурирующие в правой части (10.18), называют сферическими функциями спиральности (или спина) ± 2 . Они удовлетворяют соотношениям полноты и ортогональности

$$\int d\mathbf{n} {}_s Y_{l'm'}^*(\mathbf{n}) \cdot {}_s Y_{lm}(\mathbf{n}) = \delta_{ll'} \delta_{mm'}, \quad (10.20)$$

$$\sum_{lm} {}_s Y_{lm}^*(\theta', \phi') \cdot {}_s Y_{lm}(\theta, \phi) = \delta(\phi - \phi') \cdot \delta(\cos \theta - \cos \theta') \quad (10.21)$$

(нет суммирования по s). Кроме того, при комплексном сопряжении справедливо

$${}_s Y_{l,m}^* = (-1)^{m+2} \cdot {}_{-s} Y_{l,-m},$$

а при пространственном отражении

$${}_s Y_{lm} \rightarrow (-1)^l \cdot {}_{-s} Y_{lm}.$$

▷ Задача 5. Убедиться в справедливости формул (10.18), (10.20) и (10.21).

В полной аналогии с анизотропией температуры, характеризуемой спектром гармоник $C_l \equiv C_l^{TT}$, введём спектры двух мод поляризации и всевозможные смешанные корреляторы $\langle a_{lm}^E a_{l'm'}^{E*} \rangle$, $\langle a_{lm}^B a_{l'm'}^{B*} \rangle$, $\langle a_{lm}^E a_{l'm'}^{T*} \rangle$ и т.д. Здесь коэффициенты a_{lm}^T определяются флуктуациями температуры; их мы рассматривали в Главе 9, не вводя надстрочного индекса T . Для гауссовых случайных флуктуаций выполняется соотношение

$$\langle a_{lm}^X a_{l'm'}^{Y*} \rangle = C_l^{XY} \delta_{ll'} \delta_{mm'} ,$$

где $X, Y = T, E, B$, и угловые скобки означают усреднение по большому ансамблю Вселенных. Отсюда имеем

$$C_l^{XY} = \frac{1}{2l+1} \sum_m \langle a_{lm}^X a_{lm}^{Y*} \rangle . \quad (10.22)$$

Всего таких корреляторов шесть, однако в силу сохранения чётности смешанные корреляторы C_l^{TB} и C_l^{EB} равны нулю, что согласуется с результатами наблюдений [60]. Таким образом, из данных по наблюдению реликтового излучения можно в принципе извлечь четыре спектра C_l^{TT} , C_l^{TE} , C_l^{EE} и C_l^{BB} . Как мы убедимся в следующем разделе, скалярные возмущения, будучи по природе своей чётными относительно пространственных отражений, сами по себе не приводят к появлению B -мод и дают вклад только в спектры C_l^{EE} и C_l^{TE} . С другой стороны, тензорные возмущения дают вклад как в E -моды, так и в B -моды, что открывает возможность поиска тензорных возмущений. Обнаружение тензорных возмущений является, пожалуй, главной задачей, на решение которой направлены исследования поляризации реликтового излучения.

▷ Задача 6. Показать, что добавление к лагранжиану электромагнитного поля нарушающего P - и CP -симметрии и Лоренц-инвариантность слагаемого $\Delta\mathcal{L} = n_\mu A_\nu \epsilon^{\mu\nu\lambda\rho} F_{\lambda\rho}$, где n_μ — пространственно-подобный вектор, приводит к вращению плоскости поляризации в вакууме. Показать, что это приводит к локальному смешиванию параметров Стокса. Найти поправки к спектрам C_l^{XY} , вызванные этим смешиванием.

Поляризация реликтового излучения, как и анизотропия температуры, определяется неоднородностями в барион-фотонной плазме эпохи рекомбинации. По этой причине неудивительно, что поведение спектров поляризации C_l^{EE} , C_l^{BB} , C_l^{TE} оказывается связанным с поведением спектра C_l^{TT} , что продемонстрировано на рис. 10.4. Далее в этой главе мы будем рассматривать физику, стоящую за особенностями этих спектров, а здесь лишь перечислим основные моменты. Поведение поляризационного спектра имеет ярко выраженный осцилляционный характер. При этом для случая скалярных мод максимумы в C_l^{TT} соответствуют минимумам в C_l^{EE} и наоборот. Как мы покажем ниже, это связано с тем, что поляризация в основном определяется *возмущениями скорости* барион-фотонной среды в эпоху рекомбинации, которые находились в противофазе с осцилляциями плотности, дающей, как мы видели в главе 9, основной вклад в спектр анизотропии реликтового излучения C_l^{TT} . Смешанный спектр C_l^{TE} определяется сразу двумя этими вкладами, а на рисунке 10.4 отложен модуль величин C_l^{TE} , поэтому он “скачет” в два раза чаще: модуль резко

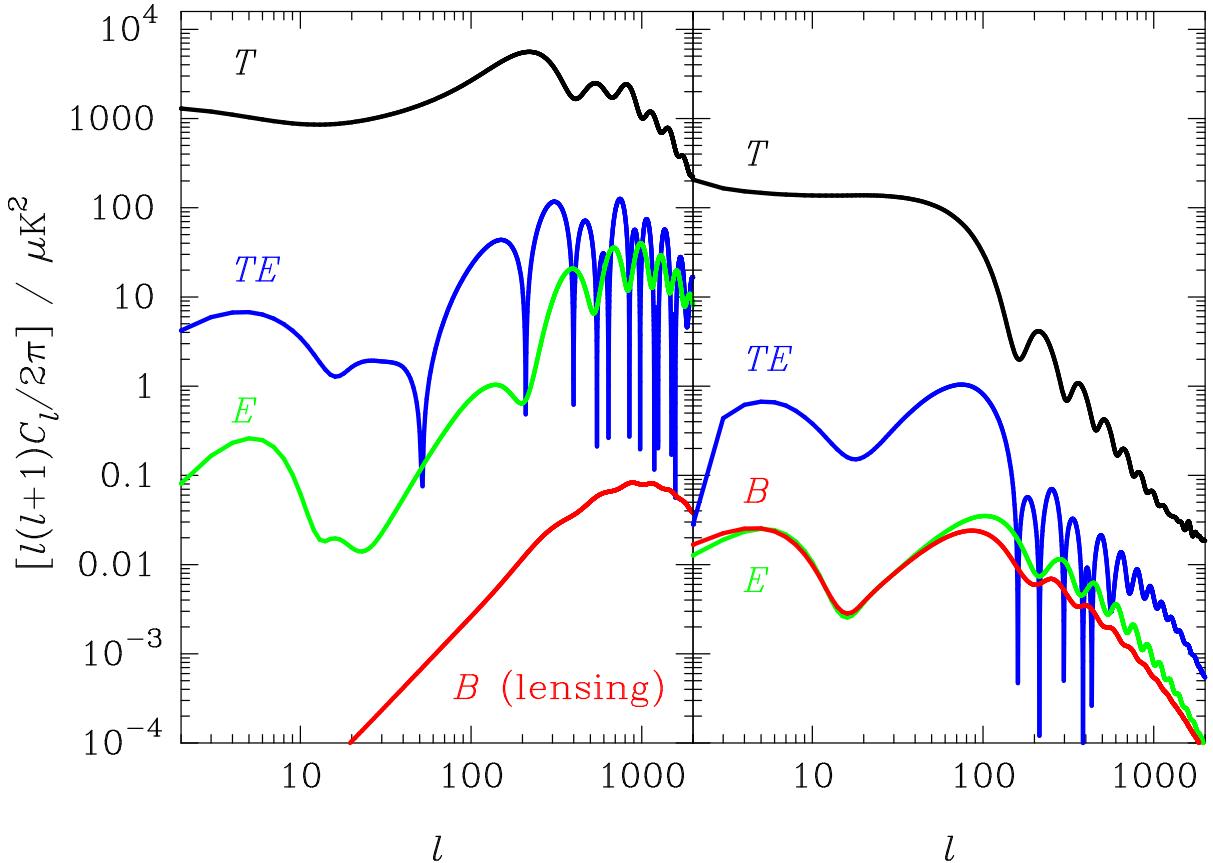


Рис. 10.4: Пример спектров анизотропии и поляризации реликтового излучения [61]. На левой части рисунка представлены предсказания для спектров с учётом лишь адиабатических скалярных возмущений, а на правой части, наоборот, представлен вклад тензорных мод. Использованные величины космологических параметров примерно соответствуют принятым в этой книге; несколько завышены отношение мощностей тензорных и скалярных мод, выбранное равным $r = 0.38$, и оптическая толщина эпохи вторичной ионизации, выбранная равной $\tau_{rei} = 0.17$.

падает вблизи всех экстремумов спектра анизотропии C_l^{TT} . Появление малой по амплитуде B -моды в случае скалярных возмущений связано со вторичным эффектом — слабым линзированием на структурах при распространении фотонов E -моды в современной Вселенной. Отметим на обеих частях рисунка усиление спектра при $l \lesssim 10$, вызванное дополнительным вкладом от эпохи вторичной ионизации.

10.3 Генерация поляризации реликтового излучения

Наша основная цель в этом разделе — получить оценочные формулы для поляризации реликтового излучения, возникшей в процессе отщепления фотонов в ходе рекомбинации. При этом мы будем пользоваться приближением, в котором поляризация появляется в последнем процессе рассеяния, а до этого излучение считается неполяризованным, см. раздел 10.1.

10.3.1 Общее рассмотрение

Начнём с того, что рассмотрим неполяризованное излучение, приходящее к месту последнего рассеяния вдоль направления \mathbf{n}' и рассеянное в направлении на наблюдателя \mathbf{n} . Для такого излучения справедлива формула (10.2). Выберем на небесной сфере (или, что то же самое, на сфере последнего рассеяния) базис, состоящий из векторов \mathbf{e}_a , и запишем соотношение (10.2) в виде $E_a = C \mathbf{e}_a \mathbf{E}'$, где C — константа, не зависящая от направления вектора \mathbf{n}' , E_a — компоненты электрического поля рассеянного излучения, а \mathbf{E}' — электрическое поле падающего излучения. Для неполяризованного падающего излучения следует произвести усреднение по всем направлениям вектора \mathbf{E}' в плоскости, ортогональной \mathbf{n}' . Для квадратичных по полям выражений, определяющих компоненты поляризационного тензора, в ортонормированном базисе имеем

$$\langle E'_i E'_j \rangle = \frac{1}{2} (\delta_{ij} - n'_i n'_j) \langle \mathbf{E}'^2 \rangle, \quad (10.23)$$

где мы учли ортогональность электрического поля \mathbf{E}' вектору \mathbf{n}' . Тогда для компонент тензора I_{ab} будем иметь

$$\langle E_a E_b \rangle = \frac{1}{2} (g_{ab} - \mathbf{n}' \mathbf{e}_a \cdot \mathbf{n}' \mathbf{e}_b) \cdot C^2 \cdot \langle \mathbf{E}'^2 \rangle. \quad (10.24)$$

Для интенсивности рассеянной волны получим из (10.24)

$$\langle E_a E_b g^{ab} \rangle = \frac{1}{2} (1 + \mathbf{n}'^2) \cdot C^2 \cdot \langle \mathbf{E}'^2 \rangle. \quad (10.25)$$

▷ *Задача 7. Получить формулу (10.25), исходя непосредственно из формулы (10.1) для сечения комптоновского рассеяния.*

Теперь воспользуемся формулой (10.4), обобщив её на интересный случай, когда интенсивность рассеиваемого излучения $I(\mathbf{n}')$ зависит от направления прихода, и проинтегрировав по всем возможным направлениям \mathbf{n}' . Учтём ещё, что последнее рассеяние фотона может происходить в различные моменты времени η ; доля фотонов, зарегистрированных в современный момент η_0 и испытавших последнее рассеяние в интервале времени $(\eta, \eta + d\eta)$ равна $V(\eta_0, \eta) d\eta$, где $V(\eta_0, \eta)$ — функция прозрачности (8.163). В результате для компонент поляризационного тензора \mathcal{P}_{ab} получим

$$\mathcal{P}_{ab}(\mathbf{n}) = \frac{\int_0^{\eta_0} d\eta V(\eta_0, \eta) \int d\mathbf{n}' I(\eta, \mathbf{n}') [\frac{1}{2} (1 - (\mathbf{n}\mathbf{n}')^2) g_{ab} - \mathbf{n}' \mathbf{e}_a \cdot \mathbf{n}' \mathbf{e}_b]}{\int_0^{\eta_0} d\eta V(\eta_0, \eta) \int d\mathbf{n}' I(\eta, \mathbf{n}') [1 + (\mathbf{n}\mathbf{n}')^2]}. \quad (10.26)$$

Из формулы (10.26) видно, что для изотропного случая, когда интенсивность $I(\mathbf{n}')$ не зависит от направления \mathbf{n}' , тензор поляризации зануляется, $\mathcal{P}_{ab} = 0$. Таким образом, для создания поляризации действительно необходима локальная анизотропия интенсивности (температуры) излучения. Кроме того, поскольку вектор \mathbf{n}' входит в выражение (10.26) квадратично, эта локальная анизотропия должна иметь *квадрупольный характер*.

Анизотропная часть интенсивности $I(\eta, \mathbf{n}')$ возникает благодаря скалярным и тензорным возмущениям. Поэтому числитель выражения (10.26) имеет первый порядок малости по этим возмущениям. В то же время, знаменатель отличен от нуля

для однородной среды и, следовательно, имеет нулевой порядок. Записывая интенсивность в виде $I = C_1 T^4$, получим в нулевом порядке

$$\int d\mathbf{n}' I(\eta, \mathbf{n}') \left(1 + (\mathbf{n}\mathbf{n}')^2\right) = 4C_1 T^4(\eta) \cdot \frac{4\pi}{3}. \quad (10.27)$$

В числителе (10.26) стоит анизотропная часть интенсивности, которая равна

$$\delta I(\eta, \mathbf{n}') = C_1 T^4(\eta) \cdot 4 \frac{\delta T}{T}(\eta, \mathbf{x}; \mathbf{n}'), \quad (10.28)$$

где $(\delta T/T)(\eta, \mathbf{x}; \mathbf{n}')$ — флуктуация температуры фотонов, распространяющихся в направлении \mathbf{n}' в точке \mathbf{x} расположения рассеивающего электрона в момент рассеяния η . Эти фотоны предпоследний раз рассеиваются в разные моменты η' , а доля фотонов, испытавших рассеяние в интервале времени $(\eta', \eta' + d\eta')$ равна $V(\eta, \eta')d\eta'$, где $V(\eta, \eta')$ — функция прозрачности Вселенной в момент η — прямое обобщение формулы (8.163). В полной аналогии с (9.22) для случая скалярных возмущений можно записать

$$\frac{\delta T}{T}(\eta, \mathbf{x}; \mathbf{n}') = \int_0^\eta d\eta' V(\eta, \eta') \int d^3k \left[\Phi(\eta') + \frac{1}{4} \delta_\gamma(\eta') + i\mathbf{k}\mathbf{n}' v_B(\eta') \right] e^{i[\mathbf{k}\mathbf{x} - \mathbf{k}\mathbf{n}'(\eta - \eta')]} , \quad (10.29)$$

Знак второго члена в показателе экспоненты связан с тем, что \mathbf{n}' — направление движения фотона перед последним рассеянием, так что испускается он в точке $[\mathbf{x} - \mathbf{n}'(\eta - \eta')]$. Как мы покажем ниже, в образовании поляризации реликтового излучения доминирующую роль играет допплеровский вклад $\mathbf{k}\mathbf{n}' v_B$; вклад Сакса–Вольфа подавлен величиной $\Delta\eta_r/\eta_r \simeq 0.04$, и для оценок он будет нами опущен. Интегральный вклад Сакса–Вольфа также мал, и мы его сразу опустили в (10.29). Для случая тензорных возмущений запишем, в полной аналогии с (9.24):

$$\frac{\delta T}{T}(\eta, \mathbf{x}; \mathbf{n}') = \frac{1}{2} \int_0^\eta d\eta' V(\eta, \eta') \int d^3k \int_{\eta'}^\eta d\eta'' n'_i h'_{ij}(\eta'') n'_j e^{i[\mathbf{k}\mathbf{x} - \mathbf{k}\mathbf{n}'(\eta - \eta'')]}. \quad (10.30)$$

В формулах (10.29), (10.30) нижний предел интегрирования по конформному времениложен равным нулю. Это формальная запись, поскольку из определения функции прозрачности очевидно, что все интегралы с её участием набираются вблизи момента последнего рассеяния $\eta \sim \eta_r$.

Подставляя формулы (10.27), (10.28), в (10.26) получим поляризационный тензор реликтового излучения в современную эпоху

$$\mathcal{P}_{ab}(\eta_0; \mathbf{n}) = \frac{3}{4\pi} \int d\mathbf{n}' \left[\frac{1}{2} \left(1 - (\mathbf{n}\mathbf{n}')^2\right) g_{ab} - \mathbf{n}' \mathbf{e}_a \cdot \mathbf{n}' \mathbf{e}_b \right] \int_0^{\eta_0} d\eta V(\eta_0, \eta) \frac{\delta T}{T}(\eta, \mathbf{x}; \mathbf{n}') , \quad (10.31)$$

где $\delta T/T(\eta, \mathbf{x}; \mathbf{n}')$ определяется интегралами (10.29) и (10.30) для случаев скалярных и тензорных возмущений, соответственно. Отметим одно обстоятельство. До сих пор мы считали \mathbf{n} направлением движения фотона после последнего рассеяния. В последующих формулах удобно сделать замену $\mathbf{n} \rightarrow -\mathbf{n}$, то есть считать вектор \mathbf{n} направлением наблюдения. Тогда фотон рассеивается в точке $\mathbf{x} = (\eta_0 - \eta)\mathbf{n}$.

В (10.31) встречаются многократные интегралы по конформному времени. Рассмотрим их подробнее, при этом будем считать $\Delta\eta_r/\eta_r$ и $k\Delta\eta_r$ малыми параметрами и работать в главном порядке по ним (как мы уже отмечали, приближение $k\Delta\eta_r \ll 1$ означает, что мы исключаем из рассмотрения мультиполи с $l \gtrsim \eta_0/\Delta\eta_r \sim 1000$).

Из (10.29) видно, что в случае вклада скалярных возмущений, образующегося в эпоху рекомбинации, в (10.31) входит двойной интеграл

$$\int_0^{\eta_0} d\eta V(\eta_0, \eta) e^{i\mathbf{kn}(\eta_0 - \eta)} \int_0^\eta d\eta' V(\eta, \eta') e^{-i\mathbf{kn}'(\eta - \eta')} f(\eta') , \quad (10.32)$$

где $f(\eta')$ — медленно меняющаяся функция. Интересующий нас вклад набирается из области

$$\eta', \eta \sim \eta_r, \quad (\eta - \eta_r) \sim (\eta' - \eta_r) \sim \Delta\eta_r . \quad (10.33)$$

Поэтому в главном порядке по $\Delta\eta_r/\eta_r$ интеграл (10.32) можно записать как

$$f(\eta_r) \cdot e^{i\mathbf{kn}(\eta_0 - \eta_r)} \cdot \tilde{I} ,$$

где

$$\tilde{I} = \int_0^{\eta_0} d\eta V(\eta_0, \eta) e^{i\mathbf{kn}(\eta_r - \eta)} \int_0^\eta d\eta' V(\eta, \eta') e^{-i\mathbf{kn}'(\eta - \eta')} . \quad (10.34)$$

Используя определение функции прозрачности (8.163), (8.162), изменим в (10.34) порядок интегрирования,

$$\tilde{I} = \int_0^{\eta_0} d\eta' \sigma_{T\text{an}_e}(\eta') \exp \left(- \int_{\eta'}^{\eta_0} \sigma_{T\text{an}_e}(\eta'') d\eta'' \right) e^{i(\mathbf{kn}'\eta' + \mathbf{kn}\eta_r)} \int_{\eta'}^{\eta_0} d\eta \sigma_{T\text{an}_e}(\eta) e^{-i(\mathbf{kn}' + \mathbf{kn})\eta} \quad (10.35)$$

В области (10.33) концентрация свободных электронов экспоненциально быстро падает со временем, см. (8.164), так что $n_e(\eta) = F(T) \cdot e^{-\frac{\Delta_H}{4T}} = F(\eta) \cdot e^{-\frac{\eta^2}{2\eta_r\Delta\eta_r}}$, где функция $F(\eta)$ изменяется степенным образом. В главном порядке по $\Delta\eta_r/\eta_r$ запишем для концентрации свободных электронов при $(\eta - \eta_r) \ll \eta_r$:

$$n_e(\eta) = n_e(\eta_r) e^{-\frac{\eta-\eta_r}{\Delta\eta_r}} . \quad (10.36)$$

Масштабный фактор медленно меняется со временем, поэтому в подынтегральном выражении в (10.35) можно положить

$$a(\eta) = a(\eta') = a(\eta_r) . \quad (10.37)$$

Внутренний интеграл по η в (10.35) набирается на нижнем пределе, и в лидирующем порядке по $\Delta\eta_r/\eta_r$ получим

$$e^{i\mathbf{kn}'\eta'} \int_{\eta'}^{\eta_0} d\eta \sigma_{T\text{an}_e}(\eta) e^{-i(\mathbf{kn}' + \mathbf{kn})\eta} = \frac{\sigma_{T\text{an}_e}(\eta') \cdot \Delta\eta_r}{1 + i(\mathbf{kn} + \mathbf{kn}') \Delta\eta_r} \cdot e^{-i\mathbf{kn}\eta'} .$$

Оставшийся интеграл по η' имеет вид

$$\int_0^{\eta_0} d\eta' e^{-i\mathbf{kn}(\eta' - \eta_r)} \sigma_T^2 a^2 n_e^2(\eta') \exp \left(- \int_{\eta'}^{\eta_0} \sigma_{T\text{an}_e}(\eta'') d\eta'' \right) .$$

Используя (10.36) и (10.37) этот интеграл нетрудно вычислить, перейдя к переменной τ (оптической толще), такой что $d\tau = \sigma_{T\text{an}_e} d\eta$. В результате получим окончательно в нулевом порядке по $\mathbf{kn}\Delta\eta_r$:

$$\tilde{I} = \frac{1}{1 + i\mathbf{kn}'\Delta\eta_r} . \quad (10.38)$$

Таким образом, в лидирующем порядке имеем для интеграла, определяющего вклад скалярных возмущений в генерацию поляризации в эпоху рекомбинации,

$$\int_0^{\eta_0} d\eta V(\eta_0, \eta) e^{i\mathbf{kn}(\eta_0 - \eta)} \int_0^\eta d\eta' V(\eta, \eta') e^{-i\mathbf{kn}'(\eta - \eta')} f(\eta') = \frac{e^{i\mathbf{kn}(\eta_0 - \eta_r)}}{1 + i\mathbf{kn}'\Delta\eta_r} \cdot f(\eta_r) . \quad (10.39)$$

Отметим, что величиной $\mathbf{kn}'\Delta\eta_r$ в знаменателе пренебрегать нельзя, поскольку именно она ответственна за квадрупольную локальную анизотропию, приводящую к поляризации, см. раздел 10.3.2.

Обратимся теперь к эпохе вторичной ионизации, $z \sim 10$, когда происходит дополнительная генерация поляризации в результате рассеяния анизотропного излучения, пришедшего с эпохи рекомбинации. Поскольку оптическая толщина для реликтовых фотонов в эпоху вторичной ионизации мала, $\tau_{rei} \simeq 0.08$, вероятность фотону расseyаться дважды ничтожна. В этом случае в интеграле (10.32) фигурирует $\eta = \eta_{rei}$, а $\eta' \sim \eta_r$, так что

$$\int_0^{\eta_0} d\eta V(\eta_0, \eta) e^{i\mathbf{kn}(\eta_0 - \eta)} \int_0^\eta d\eta' V(\eta_0, \eta') e^{i\mathbf{kn}'(\eta' - \eta)} f(\eta') = \tau_{rei} \cdot e^{i\mathbf{kn}(\eta_0 - \eta_{rei})} \cdot e^{-i\mathbf{kn}'(\eta_{rei} - \eta_r)} f(\eta_r) . \quad (10.40)$$

Кроме того, в эпоху вторичной ионизации Вселенной искажается поляризация, образовавшаяся в эпоху рекомбинации, так что вклад (10.39) должен быть, вообще говоря, умножен на подавляющий фактор $e^{-\tau_{rei}}$. Численно этот фактор близок к единице, и мы его не будем учитывать в дальнейшем.

Вклад тензорных возмущений (10.30) в рекомбинационную эпоху приводит к появлению в (10.31) трёхкратного интеграла вида

$$\int_0^{\eta_0} d\eta V(\eta_0, \eta) e^{i\mathbf{kn}(\eta_0 - \eta)} \int_0^\eta d\eta' V(\eta, \eta') \int_{\eta'}^\eta d\eta'' f(\eta'') e^{-i\mathbf{kn}'(\eta - \eta'')} \quad (10.41)$$

$$= f(\eta_r) \cdot e^{i\mathbf{kn}(\eta_0 - \eta_r)} \int_0^{\eta_0} d\eta V(\eta_0, \eta) e^{i\mathbf{kn}(\eta_r - \eta)} \int_0^\eta d\eta' V(\eta, \eta') \int_{\eta'}^\eta d\eta'' e^{-i\mathbf{kn}'(\eta - \eta'')} , \quad (10.42)$$

где $f(\eta) \propto n'_i h'_{ij}(\eta) n'_j$. При этом нам достаточно удержать лидирующий (нулевой) порядок по $\mathbf{kn}'\Delta\eta_r$, поскольку квадрупольная компонента локальной анизотропии (10.30) отлична от нуля уже в этом порядке (в выражении (10.30) явно фигурирует билинейная комбинация $n'_i n'_j$). Интеграл по η'' даёт

$$\int_{\eta'}^\eta d\eta'' e^{-i\mathbf{kn}'(\eta - \eta'')} = \frac{1}{i\mathbf{kn}'} \left(1 - e^{-i\mathbf{kn}'(\eta - \eta')} \right) .$$

Далее, по определению функции прозрачности, для любого η выполняется

$$\int_0^\eta d\eta' V(\eta, \eta') = 1 .$$

Интегралы по η и η' в (10.42) набираются в области (10.33), так что в нулевом порядке по $\mathbf{kn}\Delta\eta_r$ справедливо

$$\int_0^{\eta_0} d\eta V(\eta_0, \eta) \cdot e^{i\mathbf{kn}(\eta_r - \eta)} \int_0^\eta \frac{d\eta' V(\eta, \eta')}{i\mathbf{kn}'} = \frac{1}{i\mathbf{kn}'} .$$

Аналогичный интеграл с весом $e^{-i\mathbf{kn}'(\eta-\eta')}$ нам уже встречался, см. (10.34), он равен (10.38), так что окончательно получаем

$$\int_0^{\eta_0} d\eta V(\eta_0, \eta) e^{i\mathbf{kn}(\eta_0-\eta)} \int_0^\eta d\eta' V(\eta, \eta') \int_{\eta'}^\eta d\eta'' f(\eta'') e^{-i\mathbf{kn}'(\eta-\eta'')} = \frac{1}{i\mathbf{kn}'} \left(1 - \frac{1}{1 + i\mathbf{kn}'\Delta\eta_r} \right) \cdot f(\eta_r) \cdot e^{i\mathbf{kn}(\eta_0-\eta_r)} = \Delta\eta_r \cdot f(\eta_r) \cdot e^{i\mathbf{kn}(\eta_0-\eta_r)} \quad (10.43)$$

▷ Задача 8. Поскольку в (10.42) фигурирует $\eta-\eta'' \sim \Delta\eta_r$, последнюю экспоненту в (10.42) можно положить равной единице, то есть записать $\int_{\eta'}^\eta d\eta'' e^{i\mathbf{kn}(\eta-\eta'')} = \eta - \eta'$. Получить отсюда результат (10.43).

Наконец, в случае вклада тензорных мод в поляризацию реликтового излучения, образующуюся в эпоху вторичной ионизации Вселенной, в (10.41) интегрирование по η'' ведётся в довольно широкой области с $\eta_{rec} \lesssim \eta \lesssim \eta_{rei}$, так что функцию $f(\eta'')$ нельзя считать постоянной и выносить за знак интеграла, а произведение $\mathbf{kn}'\eta''$ нельзя считать малой величиной. В этом случае вместо (10.43) будем иметь

$$\int_0^{\eta_0} d\eta V(\eta_0, \eta) e^{i\mathbf{kn}(\eta_0-\eta)} \int_0^\eta d\eta' V(\eta, \eta') \int_{\eta'}^{\eta_{rei}} d\eta'' f(\eta'') e^{-i\mathbf{kn}'(\eta-\eta'')} = \tau_{rei} \cdot e^{i\mathbf{kn}(\eta_0-\eta_{rei})} \int_{\eta_r}^{\eta_{rei}} d\eta f(\eta) e^{-i\mathbf{kn}'(\eta_{rei}-\eta)}. \quad (10.44)$$

Дальнейший анализ удобно проводить для скалярных и тензорных возмущений по отдельности.

10.3.2 Скалярные возмущения

Рассмотрим вклад скалярных возмущений в поляризационный тензор (10.31), генерируемый в эпоху рекомбинации. Для него запишем (см. (10.39)):

$$\mathcal{P}_{ab}(\mathbf{n}) = \int d^3k \mathcal{P}_{ab}(\mathbf{k}, \mathbf{n}), \quad (10.45)$$

где величина

$$\mathcal{P}_{ab}(\mathbf{k}, \mathbf{n}) = \frac{3}{4\pi} e^{i\mathbf{kn}(\eta_0-\eta_r)} \int \frac{d\mathbf{n}'}{1 + i\mathbf{kn}'\Delta\eta_r} \left(\frac{1}{2} \left(1 - (\mathbf{n}\mathbf{n}')^2 \right) g_{ab} - \mathbf{n}'\mathbf{e}_a \cdot \mathbf{n}'\mathbf{e}_b \right) \times \left(\Phi(\mathbf{k}, \eta_r) + \frac{1}{4} \delta_\gamma(\mathbf{k}, \eta_r) + i\mathbf{kn}'v_B(\mathbf{k}, \eta_r) \right) \quad (10.46)$$

имеет смысл вклада в поляризационный тензор мод с импульсом \mathbf{k} . В последующих формулах мы, как правило, будем опускать аргументы у Фурье-образов величин Φ , δ_γ и v_B .

Для дальнейших вычислений воспользуемся приёмом, примененным нами в разделе 9.2.2 при изучении вклада тензорных мод в анизотропию температуры. А именно, заметим, что потенциалы $\mathcal{P}_E(\mathbf{n})$ и $\mathcal{P}_B(\mathbf{n})$, так же как и анизотропия температуры $\delta T(\mathbf{n})$ являются скалярами относительно пространственных вращений. Скалярами являются и интересующие нас мультиполи $C_l^{X,Y}$, $X, Y = T, E, B$. Кроме того, вклады

в C_l^{XY} от мод с различными конформными импульсами складываются некогерентно. Поэтому для вычисления вкладов мод с фиксированным импульсом \mathbf{k} можно использовать любую удобную систему координат, причём эти системы координат могут быть разными для разных \mathbf{k} .

Выберем сферическую систему координат с азимутальной осью вдоль вектора \mathbf{k} . В такой системе вектор \mathbf{n} описывается угловыми переменными (θ, ϕ) , а вектор \mathbf{n}' — переменными (θ', ϕ') . В 3-мерной декартовой системе координат используемых векторов имеют вид:

$$\begin{aligned}\mathbf{n} &= (\sin \theta \cos \phi, \sin \theta \sin \phi, \cos \theta) , & \mathbf{e}_\theta &= (-\cos \theta \cos \phi, -\cos \theta \sin \phi, \sin \theta) , \\ \mathbf{n}' &= (\sin \theta' \cos \phi', \sin \theta' \sin \phi', \cos \theta') , & \mathbf{e}_\phi &= (\sin \theta \sin \phi, -\sin \theta \cos \phi, 0) .\end{aligned}$$

Для входящих в формулу (10.46) биномов скалярных произведений получим

$$\begin{aligned}2(\mathbf{n}\mathbf{n}')^2 &= \sin^2 \theta \sin^2 \theta' + 2 \cos^2 \theta \cos^2 \theta' \\ &\quad + \sin^2 \theta \sin^2 \theta' \cos 2(\phi - \phi') + \sin 2\theta \sin 2\theta' \cos(\phi - \phi') ,\end{aligned}\tag{10.47a}$$

$$\begin{aligned}2(\mathbf{e}_\theta \mathbf{n}')^2 &= \cos^2 \theta \sin^2 \theta' + 2 \sin^2 \theta \cos^2 \theta' \\ &\quad + \sin^2 \theta' \cos^2 \theta \cos 2(\phi - \phi') - \sin 2\theta \sin 2\theta' \cos(\phi - \phi') ,\end{aligned}\tag{10.47b}$$

$$2(\mathbf{e}_\phi \mathbf{n}')^2 = \sin^2 \theta \sin^2 \theta' - \sin^2 \theta \sin^2 \theta' \cos 2(\phi - \phi') ,\tag{10.47c}$$

$$2\mathbf{e}_\theta \mathbf{n}' \cdot \mathbf{e}_\phi \mathbf{n}' = \frac{1}{2} \sin 2\theta \sin^2 \theta' \sin 2(\phi - \phi') - \sin^2 \theta \sin 2\theta' \sin(\phi - \phi') .\tag{10.47d}$$

Подставляя (10.47) в (10.46) и проводя интегрирование по азимутальному углу ϕ' замечаем, что в (10.46) вклады слагаемых, зависящих от этого угла, зануляются. В результате в выбранной нами системе координат недиагональные компоненты $\mathcal{P}_{\theta\phi}(\mathbf{k}, \mathbf{n})$ и $\mathcal{P}_{\phi\theta}(\mathbf{k}, \mathbf{n})$ равны нулю, так что $U(\mathbf{k}, \mathbf{n}) = 0$. Компоненты $\mathcal{P}_{\theta\theta}(\mathbf{k}, \mathbf{n})$ и $\mathcal{P}_{\phi\phi}(\mathbf{k}, \mathbf{n})$ не зависят от ϕ . Отсюда сразу следует вывод, что скалярные моды не приводят к генерации B -моды поляризации. Действительно, тензор $\mathcal{P}_{ab}(\mathbf{k}, \mathbf{n})$ диагонален и зависит только от одной координаты θ , так что выражение (10.6b) для него равно нулю.

Компонента $\mathcal{P}_{\theta\theta}(\mathbf{k}, \mathbf{n})$ определяется величиной

$$\frac{1}{2} \left(1 - (\mathbf{n}\mathbf{n}')^2 \right) g_{\theta\theta} - \mathbf{n}' \mathbf{e}_\theta \cdot \mathbf{n}' \mathbf{e}_\theta = \frac{\sin^2 \theta}{4} (1 - 3 \cos^2 \theta') = -\frac{1}{2} \sin^2 \theta \cdot P_2[\cos \theta'] ,\tag{10.48}$$

где P_2 — полином Лежандра второго порядка, см. Приложение F. Аналогично $\mathcal{P}_{\phi\phi}(\mathbf{k}, \mathbf{n})$ определяется величиной

$$\frac{1}{2} \left(1 - (\mathbf{n}\mathbf{n}')^2 \right) g_{\phi\phi} - \mathbf{n}' \mathbf{e}_\phi \cdot \mathbf{n}' \mathbf{e}_\phi = \frac{1}{2} \sin^4 \theta \cdot P_2[\cos \theta'] .\tag{10.49}$$

Таким образом, как и ожидалось, между компонентами $\mathcal{P}_{\theta\theta}(\mathbf{k}, \mathbf{n})$ и $\mathcal{P}_{\phi\phi}(\mathbf{k}, \mathbf{n})$ есть связь (10.13):

$$\mathcal{P}_{\phi\phi}(\mathbf{k}, \mathbf{n}) = -\sin^2 \theta \cdot \mathcal{P}_{\theta\theta}(\mathbf{k}, \mathbf{n}) .$$

Для интегрирования по углу θ' воспользуемся разложением в ряд

$$\frac{1}{1 + i\mathbf{k}\mathbf{n}'\Delta\eta_r} = \sum_{l=0}^{\infty} (-ik\Delta\eta_r \cos \theta')^l .\tag{10.50}$$

Используя свойства интегралов с полиномами Лежандра (см. Приложение F), в результате интегрирования получим в лидирующем нетривиальном порядке по $k\Delta\eta_r$:

$$\mathcal{P}_{\theta\theta}(\mathbf{k}, \mathbf{n}) = -\frac{\mathcal{P}_{\phi\phi}(\mathbf{k}, \mathbf{n})}{\sin^2\theta} = \frac{k\Delta\eta_r}{5} \sin^2\theta \cdot \left[\left(\Phi + \frac{1}{4}\delta_\gamma \right) \cdot k\Delta\eta_r - kv_B \right] \cdot e^{i\mathbf{kn}(\eta_0 - \eta_r)} . \quad (10.51)$$

Как и для случая анизотропии интенсивности излучения, вклад в гармонику l определяется в основном модами с импульсами $k\eta_0 \sim l$. Поэтому для поляризации на не очень малых угловых масштабах, $l \lesssim \eta_0/\Delta\eta_r \sim 1000$, в выражении (10.51) можно оставить только допплеровский вклад. В дальнейшем, как и раньше в этой Главе, мы ограничимся изучением именно таких угловых масштабов.

Физическая причина, по которой эффект Допплера доминирует над эффектом Сакса–Вольфа, состоит в том, что вклад эффекта Допплера в флуктуации температуры (последний член в (10.46)) сам по себе обладает локальной анизотропией, поскольку он пропорционален \mathbf{kn}' . Эта локальная анизотропия имеет дипольный характер, и для превращения её в квадрупольную необходим дополнительный множитель $\mathbf{kn}'\Delta\eta_r$, связанный с анизотропией потока фотонов, приходящего с расстояния порядка длины свободного пробега фотона, и формально возникающий из разложения знаменателя в (10.46); отсюда и появляется множитель $k\Delta\eta_r$ в (10.51). Флуктуации температуры, обусловленные эффектом Сакса–Вольфа, локальной анизотропией не обладают, поэтому квадрупольная локальная анизотропия возникает лишь во втором порядке разложения по $\mathbf{kn}'\Delta\eta_r$.

Для мод возмущений с импульсом \mathbf{k} определим величину $a_{lm}^E(\mathbf{k})$ по формуле, вполне аналогичной (10.10), но содержащей $\mathcal{P}_{ab}(\mathbf{k}, \mathbf{n})$ вместо $\mathcal{P}_{ab}(\mathbf{n})$. Тогда выражение, например, для мультиполя C_l^{EE} будет иметь вид (ср. с (9.49))

$$C_l^{EE} = \frac{1}{2l+1} \int d^3k \sum_m \langle a_{lm}^E(\mathbf{k}) a_{lm}^{E*}(\mathbf{k}) \rangle , \quad (10.52)$$

где имеется в виду, что одно интегрирование по импульсам уже снято благодаря свойству

$$\langle kv_B(\mathbf{k}, \eta_r) kv_B^*(\mathbf{k}', \eta_r) \rangle = \frac{1}{(2\pi)^3} P_v(k, \eta_r) \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}') ,$$

где $P_v(k, \eta_r)$ — спектр мощности скорости в эпоху рекомбинации, который выражается через спектр мощности первичных возмущений согласно формулам Главы 6. Как мы говорили, подынтегральное выражение в (10.52) можно вычислять в любой системе координат. Используя (10.16) и (10.14) и оставляя только допплеровский вклад в (10.51), получим в выбранной нами системе

$$\begin{aligned} a_{lm}^E(\mathbf{k}) &= - \int d\mathbf{n} Y_{lm}^{(E)ab*} \mathcal{P}_{ab}(\mathbf{n}) = - \int d\mathbf{n} \left[Y_{lm,\theta\theta}^{(E)*} \mathcal{P}_{\theta\theta}(\mathbf{n}) + Y_{lm,\phi\phi}^{(E)*} \frac{\mathcal{P}_{\phi\phi}(\mathbf{n})}{\sin^4\theta} \right] \\ &= \frac{2}{5} k^2 v_B \Delta\eta_r \sqrt{\frac{(l-2)!}{2(l+2)!}} \int d\mathbf{n} e^{ik(\eta_0 - \eta_r) \cos\theta} \sin^2\theta \cdot \left[2 \frac{\partial^2}{\partial\theta^2} + (l+1)l \right] Y_{lm}(\mathbf{n}) . \end{aligned} \quad (10.53)$$

Из полученной формулы (10.53) следует, что поскольку зависимость от азимутального угла ϕ содержится только в сферических функциях Y_{lm} , то для $m \neq 0$ все интегралы по азимутальному углу дадут нуль. Таким образом, в выбранной системе координат $a_{l,m \neq 0}^E(\mathbf{k}) = 0$. Для $m = 0$ сферическая функция равна (см. (F.38)),

$$Y_{l,0} = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} P_l .$$

Как следует из (F.22), для полиномов Лежандра справедливо равенство

$$\frac{d^2}{d\theta^2} P_l [\cos \theta] = \cos \theta \frac{dP_l [\cos \theta]}{d \cos \theta} - l(l+1) P_l [\cos \theta].$$

Тогда

$$\sin^2 \theta \cdot \left(2 \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + (l+1)l \right) P_l [\cos \theta] = (1-x^2) \left(2x \frac{dP_l [x]}{dx} - l(l+1) P_l [x] \right), \quad (10.54)$$

где $x = \cos \theta$. Полезно воспользоваться рекуррентными соотношениями (F.24), (F.25) и переписать правую часть равенства (10.54) в следующем виде

$$\frac{(l+2)!}{(l-2)!} \left(\frac{P_{l-2} [x]}{(2l-1)(2l+1)} - \frac{2P_l [x]}{(2l-1)(2l+3)} + \frac{P_{l+2} [x]}{(2l+1)(2l+3)} \right).$$

Подставляя эту формулу в (10.53) вместе с разложением (F.34) осциллирующей экспоненты по полиномам Лежандра и интегрируя по углу θ с учётом ортогональности полиномов Лежандра (F.38), получим

$$a_{l,0}^E (\mathbf{k}) = -\frac{4\pi}{5} k v_B k \Delta \eta_r \sqrt{\frac{(l+2)!}{2(l-2)!}} \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} \cdot i^l \times \left(\frac{j_{l-2} [k(\eta_0 - \eta_r)]}{(2l-1)(2l+1)} + \frac{2j_l [k(\eta_0 - \eta_r)]}{(2l-1)(2l+3)} + \frac{j_{l+2} [k(\eta_0 - \eta_r)]}{(2l+1)(2l+3)} \right). \quad (10.55)$$

Выражение в скобках в (10.55) нам уже встречалось, см. (9.52), оно равно (9.53). Окончательно находим

$$a_{l,m}^E (\mathbf{k}) = -\delta_{m,0} \cdot \frac{4\pi}{5} k^2 v_B (\mathbf{k}) \Delta \eta_r \sqrt{\frac{(l+2)!}{2(l-2)!}} \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} \cdot i^l \cdot \frac{j_l [(\eta_0 - \eta_r) k]}{(\eta_0 - \eta_r)^2 k^2}. \quad (10.56)$$

Полученное выражение (10.56) позволяет вычислить два интересных поляризационных спектра C_l^{EE} и C_l^{TE} , к чьему мы и перейдём.

Для собственного спектра поляризации E -моды C_l^{EE} будем иметь из (10.52) и (10.56):

$$C_l^{EE} = \frac{2\pi}{25} \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} P_v (k, \eta_r) \cdot \frac{(l+2)!}{(l-2)!} (\Delta \eta_r)^2 \left(\frac{j_l [(\eta_0 - \eta_r) k]}{(\eta_0 - \eta_r)^2 k} \right)^2. \quad (10.57)$$

В интеграл (10.57), как всегда, дают основной вклад импульсы $k \sim l/\eta_0$. В области $l \lesssim l^{(r)} \sim 100$ рассматриваемый вклад в поляризацию мал, поскольку соответствующие моды находятся за звуковым горизонтом, и скорость $k v_B$ для них мала. В области $l \sim 100 - 1000$ спектр C_l^{EE} осциллирует, причём положения максимумов и минимумов примерно такие же, как у допплеровского вклада в анизотропию температуры (см. задачу 10). Общий уровень C_l^{EE} определяется тем, что выражение (10.57) содержит малый множитель $(\Delta \eta_r)^2$, о происхождении которого мы уже говорили. Наконец, в этой области мультиполей общая зависимость C_l^{EE} от l — слабая (если отвлечься от осцилляций), так что величина

$$\mathcal{D}_l^{EE} = \frac{l(l+1)}{2\pi} C_l^{EE} T_0^2$$

квадратично растёт с ростом l . Это следует из простого подсчёта степеней: для близкого к плоскому начального спектра имеем $d^3kP_v \propto dk/k$, а при $k \sim l/\eta_0$ выполняется $j_l \sim 1/l$, так что с точностью до осциллирующего множителя выражение под интегралом в (10.57) не зависит от l . Все эти свойства вполне соответствуют результатам численного анализа, приведённым на рис. 10.4.

▷ Задача 9. Оценить поведение мультиполей C_l^{EE} в зависимости от l в области $l \simeq 30 - 100$.

▷ Задача 10. Получить следующую оценку для C_l^{EE} в области $l \sim 100 - 1000$ в случае адиабатических возмущений:

$$C_l^{EE} = \frac{3\pi}{50} \left(\frac{\Delta\eta_r}{\eta_0} \right)^2 \frac{A_\Phi A^2(l)}{1 + R_B(\eta_r)} \left[\frac{2}{3} c_4 - \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi l^{(r)}}{l}} \cos \left(2 \frac{l}{l^{(r)}} + \frac{\pi}{4} \right) \right], \quad (10.58)$$

где $A(l)$ — та же величина, что фигурирует в (9.72) и (9.78), c_4 по порядку величины равна единице, а при больших l выполняется (9.66) и $c_4 = 1$.

Как следует из (10.58), в спектре E -моды поляризации максимумы по l располагаются вблизи

$$l_n^{EE} = \left[\frac{3\pi}{8} + \pi(n-1) \right] l^{(r)} \simeq 110 + 295(n-1), \quad n = 1, 2, \dots,$$

что вполне согласуется с численными расчётами, представленными на рис. 10.4. Как видно на рис. 10.4, осцилляции C_l^{EE} ослабляются с ростом l . Это связано с тем фактом, что амплитуда осциллирующего слагаемого в (10.58) падает с ростом l как $1/\sqrt{l}$. Подставляя в формулу (10.58) численные значения

$$\frac{\Delta\eta_r}{\eta_r} \simeq 0.04, \quad \frac{\eta_r}{\eta_0} \simeq 0.02, \quad A_\Phi \simeq 1.09 \cdot 10^{-9}$$

и используя для оценки формулу (9.66), получим оценку

$$C_l^{EE} T_0^2 \sim 7 \cdot 10^{-4} \mu\text{K}^2,$$

что даёт правильный порядок величины для амплитуды поляризации E -моды.

Напомним, что приближения, использованные нами при получении формулы (10.58), позволяют рассматривать только гармоники с $100 \lesssim l \lesssim 1000$, так что выражение в скобках в (10.58), конечно же, всегда положительно. В этой области мультиполей амплитуда осциллирующего вклада оказывается численно того же порядка, что и амплитуда постоянного вклада, поэтому осцилляции в спектре C_l^{EE} довольно хорошо заметны, см. рис. 10.4.

▷ Задача 11. Найти приближённо спектр C_l^{EE} для случая CDM -моды постоянной кривизны.

Теперь обратимся к младшим мультиполям с $l \ll \eta_0/\eta_r \simeq 50$. Основной вклад в поляризацию на этих угловых масштабах появляется в эпоху вторичной ионизации Вселенной. Малость этого эффекта связана главным образом с малостью оптической толщины эпохи вторичной ионизации $\tau_{rei} \simeq 0.08$.

Поскольку речь идёт о больших угловых масштабах, вкладом эффекта Допплера в флуктуации температуры можно пренебречь. Исходя из (10.31) и (10.40), получим

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{ab}(\mathbf{k}, \mathbf{n}) &= \frac{3\tau_{rei}}{4\pi} e^{i\mathbf{k}\mathbf{n}(\eta_0-\eta_r)} \int d\mathbf{n}' e^{-i\mathbf{k}\mathbf{n}'(\eta_{rei}-\eta_r)} \left[\Phi(\eta_r) + \frac{1}{4} \delta_\gamma(\eta_r) \right] \\ &\times \left[\frac{1}{2} \left(1 - (\mathbf{n}\mathbf{n}')^2 \right) g_{ab} - \mathbf{n}'\mathbf{e}_a \cdot \mathbf{n}'\mathbf{e}_b \right]. \end{aligned} \quad (10.59)$$

Интегрирование по азимутальному углу ϕ' осуществляется с помощью формул (10.47), так что ненулевые диагональные компоненты поляризационного тензора по-прежнему

будут определяться величинами (10.48) и (10.49). Для интегрирования по полярному углу θ' удобно воспользоваться представлением (F.34) для входящего в (10.40) экспоненциального фактора, и условием (F.33) ортогональности полиномов Лежандра. Приближённо можно считать $(\eta_{rei} - \eta_r) \simeq \eta_{rei}$. Таким образом, получим в выбранной системе отсчёта

$$\mathcal{P}_{\theta\theta}(\mathbf{k}, \mathbf{n}) = -\frac{\mathcal{P}_{\phi\phi}(\mathbf{k}, \mathbf{n})}{\sin^2 \theta} = \frac{3\tau_{rei}}{2} \sin^2 \theta \cdot \left(\Phi + \frac{1}{4}\delta_\gamma \right) j_2[k(\eta_{rei} - \eta_r)] e^{i\mathbf{kn}(\eta_0 - \eta_{rei})}, \quad (10.60)$$

В полной аналогии с предыдущим случаем отсюда, в частности, следует, что имеется вклад в E -моду поляризации, а генерации B -моды не происходит.

Основной вклад в мультиполи C_l^{EE} , как обычно, дают моды с импульсом $k \sim l/\eta_0$, так что в аргументе сферической функции Бесселя j_2 в (10.60) будет стоять $k\eta_{rei} \sim l\eta_{rei}/\eta_0$. Эта величина не должна сильно превышать единицу, поскольку в асимптотике большого аргумента сферические функции Бесселя подавлены. Именно поэтому вклад в поляризацию, возникающий в эпоху вторичной ионизации, существен только для младших гармоник $l \lesssim l_{rei} = \pi\eta_0/\eta_{rei} \simeq 9$, см. (9.82), (9.89), а также рис. 10.4.

Дальнейшее вычисление вполне аналогично приведённому выше в этом разделе. Учитывая соотношения (9.30), (9.31), запишем окончательный результат:

$$C_l^{EE} = \tau_{rei}^2 \cdot \frac{81\pi}{200} \cdot \frac{(l+2)!}{(l-2)!} \int \frac{dk}{k} \mathcal{P}_\Phi \cdot j_2^2(k\eta_{rei}) \cdot \frac{j_l^2[(\eta_0 - \eta_{rei})k]}{(\eta_0 - \eta_{rei})^4 k^4}. \quad (10.61)$$

Из него следует, что при $l \gg \pi\eta_0/\eta_{rei}$ мультиполи C_l^{EE} ведут себя как l^{-4} , а величины \mathcal{D}_l^{EE} — как l^{-2} . Действительно, интеграл в (10.61) набирается при $k \sim l/\eta_0$, и в этой области мультиполей $k\eta_{rei} \gg 1$. В этой асимптотике $j_2(k\eta_{rei}) \propto (k\eta_{rei})^{-1} \propto l^{-1}$ и $j_l[k(\eta_0 - \eta_{rei})] \propto l^{-1}$ (с точностью до осциллирующих множителей), откуда и следует сделанное утверждение. Падение \mathcal{D}_l^{EE} с ростом l при $l \gtrsim 9$ хорошо видно на рис. 10.4. Как и ожидалось, поляризация, образованная в эпоху вторичной ионизации, имеется лишь в области младших мультиполей.

Интеграл в (10.61) в области $l \gg \pi\eta_0/\eta_{rei}$ можно взять аналитически. Для сферических функций Бесселя можно воспользоваться асимптотиками (F.10), (F.15) и все быстроосциллирующие множители заменить на их средние по периоду, так что

$$j_2^2(k\eta_{rei}) \simeq \frac{1}{2(k\eta_{rei})^2}, \quad j_l^2[(\eta_0 - \eta_{rei})k] \simeq \frac{1}{2(\eta_0 - \eta_{rei})k} \frac{1}{\sqrt{(\eta_0 - \eta_{rei})^2 k^2 - (l + \frac{1}{2})^2}}.$$

В результате в случае масштабно-инвариантного спектра, $\mathcal{P}_\Phi(k) = A_\Phi$, получим для (10.61):

$$C_l^{EE} = \tau_{rei}^2 \cdot A_\Phi \cdot \frac{81\pi}{800} \cdot \frac{(l+2)!}{(l-2)!} \frac{1}{(l + \frac{1}{2})^8} \left(\frac{\eta_0}{\eta_{rei}} - 1 \right)^2 \int_1^\infty \frac{du}{u^8 \sqrt{u^2 - 1}} \quad (10.62a)$$

$$\simeq \tau_{rei}^2 \cdot A_\Phi \cdot \frac{81\pi}{1750} \left(\frac{\eta_0}{\eta_{rei}} - 1 \right)^2 \frac{1}{l^4}, \quad (10.62b)$$

где мы формально распространили область интегрирования на все $k \gtrsim l/\eta_0$, поскольку интеграл набирается вблизи $k \sim l/\eta_0$. Падение мультиполей с ростом l как $C_l^{EE} \propto l^{-4}$ видно отсюда явно. С учётом оценки $\tau_{rei} \simeq 0.08$ для $l \sim l_{rei}$ имеем численно

$$\mathcal{D}_l^{EE} = \frac{l(l+1)}{2\pi} C_l^{EE} T_0^2 \sim 0.05 \mu\text{K}^2 \cdot \left(\frac{10}{l} \right)^2, \quad l \gtrsim 10,$$

что согласуется с численными расчётами, результат которых представлен на рис. 10.4.

▷ Задача 12. Проведя более аккуратную аналитическую оценку, убедиться, что спектр (10.61) как функция l имеет максимум, и приблизённо найти его положение.

Теперь обсудим смешанный спектр C_l^{TE} . Начнём с вклада, возникающего в эпоху рекомбинации. Как следует из (9.4), (9.22) выражение для $a_{lm}^T(\mathbf{k})$ — вклада моды с импульсом \mathbf{k} в коэффициент анизотропии реликтового излучения a_{lm}^T — в выбранной нами системе координат имеет вид

$$a_{lm}^T(\mathbf{k}) = 2\pi\delta_{m,0} \cdot \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} \cdot i^l \cdot \left[\left(\frac{1}{4}\delta_\gamma + \Phi \right) j_l[(\eta_0 - \eta_r)k] + kv_B j'_l[(\eta_0 - \eta_r)k] \right]. \quad (10.63)$$

Здесь мы опустили малый для реалистичных значений космологических параметров вклад от интегрального эффекта Сакса–Вольфа.

▷ Задача 13. Получить формулу (10.63).

Подставляя (10.56) и (10.63) в (10.22), получим для кросс-корреляционного спектра температуры и поляризационной E -моды:

$$C_l^{TE} = \frac{2\pi}{5} \cdot \sqrt{\frac{(l+2)!}{2(l-2)!}} \Delta\eta_r \cdot \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \left\{ -\frac{j_l^2[(\eta_0 - \eta_r)k]}{(\eta_0 - \eta_r)^2 k} P_{SW,v}(k, \eta_r) \right. \\ \left. - \frac{j_l[(\eta_0 - \eta_r)k] j'_l[(\eta_0 - \eta_r)k]}{(\eta_0 - \eta_r)^2 k} P_v(k, \eta_r) \right\}, \quad (10.64)$$

где $P_{SW,v}$ — кросс-корреляционный спектр мощности, определяемый соотношением

$$\langle \left(\frac{1}{4}\delta_\gamma + \Phi \right)(\mathbf{k}, \eta) \cdot k' v_B^*(\mathbf{k}', \eta) \rangle = \frac{1}{(2\pi)^3} P_{SW,v}(k, \eta) \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}').$$

Рассмотрим в общих чертах, что даёт формула (10.64) в случае адиабатических возмущений, причём ограничимся мультиполями с $l \lesssim 1000$, для которых эффекты неидеальности невелики. Соответствующее обсуждение во многом аналогично приведенному в разделе 9.2.3.

Область $l \ll l^{(r)} \simeq 100$ соответствует модам, находящимся глубоко под звуковым горизонтом в эпоху рекомбинации. Для таких мод скорость среды мала, поэтому мала и образующаяся поляризация.

В области $l = 100 - 1000$ для возмущений используем выражения (9.64) и (9.76). Произведение $j_l[(\eta_0 - \eta_r)k] \cdot j'_l[(\eta_0 - \eta_r)k]$ быстро осциллирует как функция k , поэтому вклад в интеграл (10.64) от второго слагаемого в скобках пренебрежимо мал. Из (9.64) и (9.76) следует, что спектр мощности $P_{SW,v}(k, \eta_r)$ как функция k осциллирует вокруг нуля,

$$P_{SW,v} = -P_\Phi \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{1 + R_B(\eta_r)}} \left(\frac{A^2}{2} \sin 2kr_s - AB \sin kr_s \right) \quad (10.65)$$

Поэтому C_l^{TE} как функция l также осциллирует вокруг нулевого значения. Расстояние между максимумами и минимумами определяется первым слагаемым в скобках в (10.65); с учётом обычного соотношения $k \simeq l/\eta_0$ это расстояние составляет

$$\Delta l \simeq \frac{\pi r_s}{2\eta_0} = \frac{\pi}{2} l^{(r)} \simeq 150.$$

Наличие второго слагаемого в (10.65) приводит к модуляциям осцилляций: нечётные пики (которым, грубо говоря, соответствуют импульсы $k \sim (\pi + 2\pi n)/r_s$) усилены по сравнению с чётными. Эффект модуляции наиболее заметен для первых пиков, поскольку при больших l величина $A(l) \equiv A(k = l/\eta_0)$ не зависит от l , а величина $B(l)$ падает как $1/l^2$, см. (9.67). Все эти особенности видны на рис. 10.4. Отметим, что на рис. 10.4 показан модуль \mathcal{D}_l^{TE} , то есть величина $l(l+1)|C_l^{TE}| \cdot T_0^2/(2\pi)$.

Рассмотрим смешанный спектр в области $100 \ll l \lesssim 1000$ более подробно, считая величину $l^{(r)}/l$ малым параметром. Будем считать спектр начальных возмущений плоским; обобщение на случай слегка наклонного спектра, как всегда, даётся формулой (9.37).

В подынтегральном выражении в (10.64) опустим второе слагаемое, заменим быстро осциллирующий множитель $j_l^2[k(\eta_0 - \eta_r)]$ его средним значением и воспользуемся асимптотикой (F.15). Перейдя к переменной интегрирования $u = k\eta_0/l$, получим

$$C_l^{TE} = \frac{\pi}{5} \frac{\sqrt{3}\Delta\eta_r}{\sqrt{1+R(\eta_r)}} \sqrt{\frac{(l+2)!}{2(l-2)!}} \cdot \frac{A_\Phi}{l^3} \int_1^\infty \frac{du}{u^3\sqrt{u^2-1}} \left[\frac{A^2}{2} \sin\left(2u\frac{l}{l^{(r)}}\right) - AB \sin\left(u\frac{l}{l^{(r)}}\right) \right], \quad (10.66)$$

Интеграл в (10.66) набирается при $u \approx 1$ в узкой области $\Delta u \sim l^{(r)}/l$. Тогда для первого слагаемого можно записать приближённо, воспользовавшись табличным интегралом,

$$\int_1^\infty \frac{du}{u^3\sqrt{u^2-1}} \sin\left(u\frac{2l}{l^{(r)}}\right) \simeq \frac{1}{\sqrt{2}} \int_1^\infty \frac{du}{\sqrt{u-1}} \sin\left(u\frac{2l}{l^{(r)}}\right) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi l^{(r)}}{l}} \sin\left(\frac{2l}{l^{(r)}} + \frac{\pi}{4}\right).$$

Для второго слагаемого справедлива аналогичная формула. В результате получим приближённо:

$$C_l^{TE} = \frac{\pi}{5} \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{1+R(\eta_r)}} \sqrt{\frac{(l+2)!}{2(l-2)!}} \cdot \frac{A_\Phi}{l^3} \sqrt{\frac{\pi l^{(r)}}{2l}} \left[\frac{A^2}{2\sqrt{2}} \sin\left(2\frac{l}{l^{(r)}} + \frac{\pi}{4}\right) - AB \sin\left(\frac{l}{l^{(r)}} + \frac{\pi}{4}\right) \right]. \quad (10.67)$$

где $A = A(l)$, $B = B(l)$. В области достаточно высоких мультиполей A не зависит от l , а $B \propto 1/l^2$, и первый вклад доминирует. В этой области величина C_l^{TE} колеблется около нуля, а амплитуда этих колебаний падает с ростом l как $C_l^{TE} \propto l^{-3/2}$, что согласуется с численными результатами, представленными на рис. 10.4. При не слишком больших l второе слагаемое в скобках в (10.67) приводит к модуляции осцилляций. Первое слагаемое в (10.67) имеет максимумы и минимумы при

$$l_{(max)} = \left(\frac{\pi}{8} + \pi n\right) l^{(r)}, \quad \text{и} \quad l_{(min)} = \left(\frac{5\pi}{8} + \pi n\right) l^{(r)},$$

соответственно, а второе — при

$$l_{(max)} = \left(\frac{5\pi}{4} + 2\pi n'\right) l^{(r)}, \quad \text{и} \quad l_{(min)} = \left(\frac{\pi}{4} + 2\pi n'\right) l^{(r)},$$

где $n, n' = 0, 1, 2, \dots$. Видно, что при нечётных n максимумы двух вкладов располагаются довольно близко, так что суммарный эффект усиливается. Чётные же максимумы первого вклада почти совпадают с минимумами второго вклада, поэтому суммарный эффект, наоборот, ослабляется. Первые несколько минимумов первого и второго вкладов не совпадают, поэтому их глубина не испытывает усилий или ослаблений из-за интерференции. Это согласуется с численным результатом, представленным на рис. 10.5. Эффект заметен только для первых максимумов, для которых амплитуда $B \propto 1/l^2$ численно не очень мала. Первый максимум при

$$l \simeq \left(\frac{\pi}{8} + \pi\right) l^{(r)} \simeq 330$$

усилен, а второй при

$$l \simeq \left(\frac{\pi}{8} + 2\pi\right) l^{(r)} \simeq 630$$

наоборот, ослаблен. Отметим, что численное взятие интеграла (10.66) показывает, что все экстремумы несколько сдвинуты в область меньших l по сравнению с аналитических результатом. Сдвиг тем меньше, чем больше l , когда использованное нами приближение работает хорошо.

В полученном результате (10.67) наблюдается прямая аналогия с формулой (9.74), определяющей картину осцилляций в спектре C_l^{TT} в той же области мультиполей $100 \ll l \lesssim 1000$. Фазы осциллирующих слагаемых в (10.67) сдвинуты на $\pi/2$ по отношению к фазам в (9.74), так что приближённо можно считать, что экстремумам по l функции C_l^{TT} соответствуют нули функции C_l^{TE} . При достаточно больших l это находится в хорошем согласии с результатами как численного анализа, так и наблюдений, см. рис. 10.5. При не слишком больших l из-за модуляции колебаний нули сдвинуты.

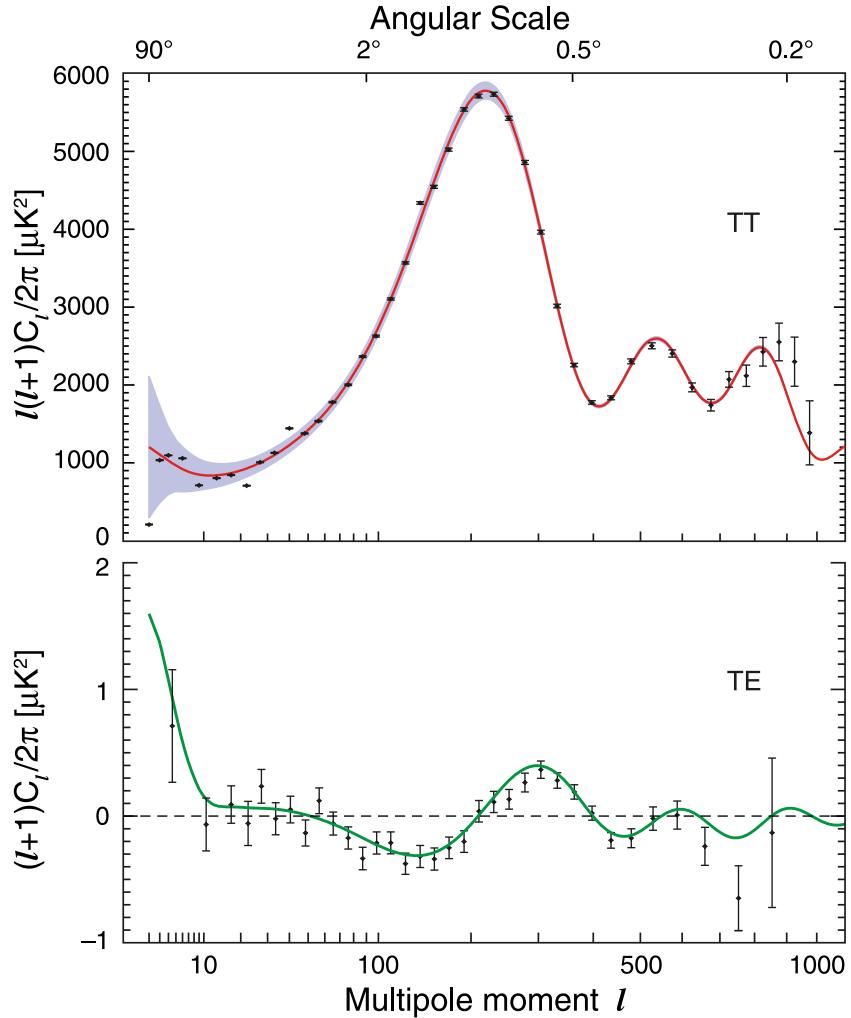


Рис. 10.5: Спектры анизотропии температуры реликтового излучения C_l^{TT} и смешанный спектр температуры и поляризации C_l^{TE} из анализа данных 5-летних наблюдений WMAP [46]. Положения экстремумов C_l^{TT} близки к положениям нулей C_l^{TE} .

▷ Задача 14. Найти приближённо спектр C_l^{TE} для случая мод постоянной кривизны.

Теперь рассмотрим младшие мультиполи. Основной вклад в C_l^{TE} при малых l появляется в эпоху вторичной ионизации Вселенной. Почти дословно повторяя рассуждения, проведённые нами для получения формулы (10.61) при обсуждении спектра C_l^{EE} , получим

$$C_l^{TE} = \tau_{rei} \frac{27\pi}{100} \sqrt{\frac{(l+2)!}{2(l-2)!}} \cdot \int \frac{dk}{k} \mathcal{P}_\Phi j_2(k\eta_{rei}) \frac{j_l^2[(\eta_0 - \eta_{rei})k]}{(\eta_0 - \eta_{rei})^2 k^2}. \quad (10.68)$$

Из этого выражения вновь следует, что вклад эпохи вторичной ионизации существует лишь для низших мультиполей.

Интеграл в (10.68) можно оценить для $l \gg 1$, когда для сферических функций Бесселя j_l справедливо приближение (F.15), при этом быстроосциллирующий множитель j_l^2 в (10.68) можно усреднить. В

результате получим приближённо:

$$C_l^{TE} = \tau_{rei} \frac{27\pi}{200} \frac{1}{(l + \frac{1}{2})^4} \sqrt{\frac{(l+2)!}{2(l-2)!}} \int_1^\infty du \frac{j_2\left[u \frac{\eta_{rei}}{\eta_0 - \eta_{rei}} (l + \frac{1}{2})\right]}{\sqrt{u^2 - 1}} \mathcal{P}_\Phi, \quad (10.69)$$

где $u = k(\eta_0 - \eta_{rei}) / (l + \frac{1}{2})$ и мы формально распространили интегрирование на область $u \gg 1$. Ясно, что интеграл в (10.69) набирается при небольших значениях $u \sim 1$, в области $\Delta u \sim (\eta_0 - \eta_{rei}) / ((l + \frac{1}{2}) \eta_{rei}) \ll 1$. Из вида подынтегрального выражения следует, что при не слишком больших l величины C_l^{TE} положительны. Это справедливо по крайней мере до тех пор, пока подынтегральная функция Бесселя j_2 в области $u \sim 1$ положительна, т.е. для $l \lesssim 2\pi(\eta_0 - \eta_{rei})/\eta_{rei} \sim 12$. Именно эта область и представляет интерес, поскольку для больших l вклад от эпохи вторичной ионизации всё равно несущественен. В указанной области выражение (10.69) падает при возрастании l быстрее чем l^{-2} , поскольку область интегрирования в (10.69) убывает с ростом l . Поэтому величина \mathcal{D}_l^{TE} также падает, что согласуется с рис. 10.4.

▷ Задача 15. Произведя численную оценку интеграла (10.69), убедиться, что сделанное приближение даёт правильную оценку по порядку величины для амплитуды спектра C_l^{TE} , см. рис. 10.4.

▷ Задача 16. Найти вклад эпохи вторичной ионизации в C_l^{TE} при $l_{rei} \ll l \ll l^{(r)}$.

10.3.3 Тензорные возмущения

Перейдём к обсуждению возможных вкладов тензорных мод в поляризацию реликтового излучения. В качестве основного примера рассмотрим образование поляризации в эпоху рекомбинации. Для мод с импульсом \mathbf{k} вклад тензорных возмущений (10.30) в поляризационный тензор в приближении (10.39) имеет вид

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{ab}(\mathbf{k}, \mathbf{n}) &= \frac{3}{8\pi} \int d\mathbf{n}' \left(\frac{1}{2} \left(1 - (\mathbf{n}\mathbf{n}')^2 \right) g_{ab} - \mathbf{n}'\mathbf{e}_a \cdot \mathbf{n}'\mathbf{e}_b \right) \cdot e^{i\mathbf{k}\mathbf{n}(\eta_0 - \eta_r)} \cdot \Delta\eta_r \\ &\times \sum_{A=+, \times} n'_i \epsilon_{ij}^{(A)} n'_j \cdot h^{(A)\prime}(\mathbf{k}, \eta_r), \end{aligned} \quad (10.70)$$

при этом сам поляризационный тензор определяется формулой (10.45).

Будем вновь работать в сферической системе координат с азимутальной осью вдоль вектора \mathbf{k} . В этой системе координат для двух поляризаций гравитационных волн справедливы равенства (9.51). Произведение $n'_i n'_j$ в (10.70) содержит тригонометрические функции удвоенного азимутального угла, поэтому вклад в интеграл по азимутальному углу в (10.70) дадут только те слагаемые из (10.47), которые зависят от удвоенного азимутального угла. Ненулевой вклад будет происходить от

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \left(1 - (\mathbf{n}\mathbf{n}')^2 \right) g_{\theta\theta} - \mathbf{n}'\mathbf{e}_\theta \cdot \mathbf{n}'\mathbf{e}_\theta &\longrightarrow -\frac{1}{4} (1 + \cos^2 \theta) \cdot \sin^2 \theta' \cdot \cos 2(\phi - \phi') , \\ \frac{1}{2} \left(1 - (\mathbf{n}\mathbf{n}')^2 \right) g_{\phi\phi} - \mathbf{n}'\mathbf{e}_\phi \cdot \mathbf{n}'\mathbf{e}_\phi &\longrightarrow \frac{1}{4} \sin^2 \theta \cdot (1 + \cos^2 \theta) \cdot \sin^2 \theta' \cdot \cos 2(\phi - \phi') , \\ -\mathbf{n}'\mathbf{e}_\theta \cdot \mathbf{n}'\mathbf{e}_\phi &\longrightarrow \frac{1}{2} \sin \theta \cdot \cos \theta \cdot \sin^2 \theta' \sin 2(\phi - \phi') . \end{aligned}$$

Из сравнения приведённых выражений с (10.13) заключаем, что параметры Стокса для тензорных возмущений с поляризацией (+) определяются следующими интегра-

лами:

$$\begin{aligned} Q_{(+)} &= -\frac{3}{32\pi} \Delta\eta_r \cdot h^{(+)\prime} \cdot (1 + \cos^2 \theta) e^{ik(\eta_0 - \eta_r) \cos \theta} \\ &\quad \times \int_0^\pi d\theta' \cdot \sin^5 \theta' \int_0^{2\pi} d\phi' \cdot \cos 2\phi' \cdot \cos 2(\phi - \phi') , \end{aligned} \quad (10.71)$$

$$\begin{aligned} U_{(+)} &= -\frac{3}{16\pi} \cdot \Delta\eta_r \cdot h^{(+)\prime} \cdot \cos \theta e^{ik(\eta_0 - \eta_r) \cos \theta} \\ &\quad \times \int_0^\pi d\theta' \cdot \sin^5 \theta' \int_0^{2\pi} d\phi' \cdot \cos 2\phi' \cdot \sin 2(\phi - \phi') . \end{aligned} \quad (10.72)$$

Аналогичные формулы для тензорных возмущений с поляризацией (\times) отличаются от (10.71), (10.72) заменой $\cos 2\phi'$ на $\sin 2\phi'$.

Выполнив интегрирование в (10.71), (10.72), получаем

$$Q_{(+)}(\mathbf{k}, \mathbf{n}) = -\frac{1}{10} \Delta\eta_r \cdot h^{(+)\prime} e^{ik(\eta_0 - \eta_r) \cos \theta} \cdot (1 + \cos^2 \theta) \cdot \cos 2\phi , \quad (10.73a)$$

$$U_{(+)}(\mathbf{k}, \mathbf{n}) = -\frac{1}{5} \Delta\eta_r \cdot h^{(+)\prime} e^{ik(\eta_0 - \eta_r) \cos \theta} \cdot \cos \theta \cdot \sin 2\phi , \quad (10.73b)$$

и аналогично для $Q_{(\times)}$ и $U_{(\times)}$ с заменой $\cos 2\phi \longleftrightarrow \sin 2\phi$. Мы видим, что тензорные возмущения дают вклад в оба параметра Стокса. Отсюда в конечном итоге и следует, что тензорные возмущения приводят к генерации как E -, так и B -моды поляризации.

Для вычисления вклада тензорных мод с импульсом \mathbf{k} в величины $a_{lm}^{E,B}$ требуется взять интегралы по единичной сфере, определённые согласно (10.10), (10.11). Поскольку компоненты поляризационного тензора зависят от азимутального угла ϕ лишь через множители $\cos 2\phi$ или $\sin 2\phi$, в интегралах (10.10), (10.11), представляющих собой свёртки со сферическими функциями (F.38), интегрирование по азимутальному углу даёт ненулевой результат только для сферических функций $Y_{l,\pm 2}$. Таким образом, в выбранной системе координат ненулевыми могут быть только коэффициенты $a_{l,\pm 2}^{E,B}$. Интегрирование по полярному углу θ осуществляется с использованием определения сферических функций (F.38), разложения экспоненты в (10.73) по полиномам Лежандра и учёта свойств полиномов Лежандра, приведённых в разделе F.2. В результате, например, для вклада поляризации (+) имеем (вывод приведён ниже)

$$\begin{aligned} a_{lm,(+)}^E(\mathbf{k}) &= \frac{1}{10} \Delta\eta_r h^{(+)\prime} \cdot i^l \cdot \sqrt{2\pi(2l+1)} \cdot (\delta_{m,+2} + \delta_{m,-2}) \\ &\quad \times \left\{ \frac{(l+2)(l+1)}{(2l-1)(2l+1)} j_{l-2}[(\eta_0 - \eta_r)k] \right. \\ &\quad \left. - \frac{6(l+2)(l-1)}{(2l-1)(2l+3)} j_l[(\eta_0 - \eta_r)k] + \frac{l(l-1)}{(2l+1)(2l+3)} j_{l+2}[(\eta_0 - \eta_r)k] \right\} , \end{aligned} \quad (10.74)$$

$$\begin{aligned} a_{lm,(+)}^B(\mathbf{k}) &= \frac{1}{5} \Delta\eta_r h^{(+)\prime} \cdot i^l \cdot \sqrt{2\pi(2l+1)} \cdot (\delta_{m,+2} - \delta_{m,-2}) \\ &\quad \times \left\{ \frac{l+2}{2l+1} j_{l-1}[(\eta_0 - \eta_r)k] - \frac{l-1}{2l+1} j_{l+1}[(\eta_0 - \eta_r)k] \right\} . \end{aligned} \quad (10.75)$$

Отметим, что из структуры полученных выражений,

$$a_{lm,(+)}^E(\mathbf{k}) \propto (\delta_{m,+2} + \delta_{m,-2}) , \quad a_{lm,(+)}^B(\mathbf{k}) \propto (\delta_{m,+2} - \delta_{m,-2}) ,$$

следует, что что E - и B -моды нескоррелированы, то есть $C_l^{EB} \propto \sum_m a_{lm,(+)}^E a_{lm,(+)}^B = 0$. Кроме того, поскольку для вклада (9.52) гравитационных волн в анизотропию температуры реликтового излучения в выбранной системе координат выполняется

$$a_{lm,(+)}^T \propto (\delta_{m,+2} + \delta_{m,-2}) , \quad a_{lm,(+)}^T \propto (\delta_{m,+2} - \delta_{m,-2}) ,$$

то $C_l^{TB} = 0$, а спектр C_l^{TE} нетривиален. Отсутствует и корреляция между вкладами в поляризацию от скалярных и тензорных возмущений.

▷ Задача 17. Показать, что спектр C_l^{TE} распадается на два независимых вклада — от скалярных и от тензорных мод возмущений. То же для спектра C_l^{EE} . Отсутствия корреляции между первичными скалярными и тензорными возмущениями с одним и тем же импульсом не предполагать.

Для поляризации (\times) справедливо (с точностью до замены $h^{(+)}$ на $h^{(\times)}$)

$$a_{l,\pm 2,(\times)}^E = \mp i a_{l,\pm 2,(+)}^E , \quad a_{l,\pm 2,(\times)}^B = \pm i a_{l,\pm 2,(+)}^B , \quad (10.76)$$

так что

$$a_{lm,(\times)}^E \propto (\delta_{m,+2} - \delta_{m,-2}) , \quad a_{lm,(\times)}^B \propto (\delta_{m,+2} + \delta_{m,-2}) .$$

Таким образом, вклады мод $(+)$ и (\times) в поляризационный тензор ортогональны друг другу.

Получим формулы (10.74) и (10.75). Для этого воспользуемся вторым интегральным представлением для коэффициентов $a_{lm}^{E,B}$, см. (10.10), (10.11). Как следует из (10.73а), (10.73б), (10.13) для используемой нами стандартной метрики на сфере (10.12) вклад мод с импульсом \mathbf{k} в поляризационный тензор с верхними индексами имеет вид

$$\mathcal{P}_{(+)}^{ab}(\mathbf{n}, \mathbf{k}) = -\frac{1}{20} \Delta \eta_r \cdot h^{(+)\prime} \begin{pmatrix} (1 + \cos^2 \theta) \cos 2\phi & -2 \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \sin 2\phi \\ -2 \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \sin 2\phi & -\frac{1 + \cos^2 \theta}{\sin^2 \theta} \cos 2\phi \end{pmatrix} .$$

Тогда из (10.45), (10.10) и (10.16) для E -мод, и из (10.45), (10.11) и (10.17) для B -мод будем иметь, соответственно,

$$a_{lm,(+)}^E(\mathbf{k}) = -\frac{1}{10} \Delta \eta_r \cdot h^{(+)\prime} \sqrt{\frac{(l-2)!}{2 \cdot (l+2)!}} \int d\mathbf{n} e^{i(\eta_0 - \eta_r)k \cos \theta} [W_{lm}^* \cdot (1 + \cos^2 \theta) \cos 2\phi - 2X_{lm}^* \cos \theta \sin 2\phi] , \quad (10.77)$$

$$a_{lm,(+)}^B(\mathbf{k}) = -\frac{1}{10} \Delta \eta_r \cdot h^{(+)\prime} \sqrt{\frac{(l-2)!}{2 \cdot (l+2)!}} \int d\mathbf{n} e^{i(\eta_0 - \eta_r)k \cos \theta} [X_{lm}^* \cdot (1 + \cos^2 \theta) \cos 2\phi + 2W_{lm}^* \cos \theta \sin 2\phi] . \quad (10.78)$$

Воспользовавшись уравнением для сферических функций (F.39), удобно преобразовать W_{lm}^* , см. (10.14),

$$W_{lm}^* = \left[-2 \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} + 2 \frac{m^2}{\sin^2 \theta} - l(l+1) \right] Y_{lm}^* .$$

Как мы уже отмечали, интегралы по азимутальному углу отличны от нуля только для $m = \pm 2$. Соответствующие сферические функции (F.38) удобно выразить через полиномы Лежандра,

$$Y_{l,\pm 2} = \sqrt{\frac{(l-2)!}{(l+2)!}} \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} (1-x^2) \frac{d^2 P_l}{dx^2} \cdot e^{\pm 2i\phi} = \sqrt{\frac{(l-2)!}{(l+2)!}} \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} \left[2x \frac{d P_l}{dx} - l(l+1) P_l \right] \cdot e^{\pm 2i\phi} , \quad (10.79)$$

где $x = \cos \theta$ и для получения второго равенства мы воспользовались уравнением (F.22) на полиномы Лежандра. После интегрирования в (10.79) по азимутальному углу будем иметь

$$a_{l,\pm 2,(+)}^E = -\frac{1}{10} \Delta \eta_r \cdot h^{(+)\prime} \frac{\pi}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} \frac{(l-2)!}{(l+2)!} \cdot I_l^E ,$$

$$a_{l,\pm 2,(+)}^B = \pm \frac{i}{10} \Delta \eta_r \cdot h^{(+)\prime} \frac{\pi}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} \frac{(l-2)!}{(l+2)!} \cdot I_l^B ,$$

где

$$\begin{aligned} I_l^E &= \int_{-1}^1 dx e^{i(\eta_0 - \eta_r)kx} \left(2x^3 \frac{d}{dx} - 6x \frac{d}{dx} + \frac{8}{1-x^2} - (1+x^2)(l+1)l \right) \left(2x \frac{dP_l}{dx} - l(l+1)P_l \right), \\ &= \frac{(l+2)!}{(l-2)!} \int_{-1}^1 dx e^{i(\eta_0 - \eta_r)kx} \left(\frac{(l+2)(l+1)}{(2l-1)(2l+1)} P_{l-2} + \frac{6(l+2)(l-1)}{(2l-1)(2l+3)} P_l + \frac{l(l-1)}{(2l+3)(2l+1)} P_{l+2} \right), \end{aligned} \quad (10.80)$$

и

$$\begin{aligned} I_l^B &= 2 \int_{-1}^1 dx e^{i(\eta_0 - \eta_r)kx} \left(-2 \frac{d}{dx} + \frac{4x}{1-x^2} + 2x - xl(l+1) \right) \left(2x \frac{dP_l}{dx} - l(l+1)P_l \right), \\ &= 2 \frac{(l+2)!}{(l-2)!} \int_{-1}^1 dx e^{i(\eta_0 - \eta_r)kx} \left(\frac{l+2}{2l+1} P_{l-1} + \frac{l-1}{2l+1} P_{l+1} \right), \end{aligned} \quad (10.81)$$

и при преобразовании подынтегральных выражений мы использовали уравнение (F.22) и рекуррентные соотношения (F.24), (F.25) для полиномов Лежандра. Наконец, представляя экспоненту в виде ряда по полиномам Лежандра, и проводя интегрирование по переменной x с учётом условия ортогональности (F.33), приходим окончательно к формулам (10.74), (10.75).

▷ Задача 18. Убедиться в справедливости соотношений (10.76).

Пожалуй, наиболее важной особенностью тензорных возмущений является генерация ими B -моды поляризации. Обсудим поэтому корреляционный спектр B -моды несколько подробнее. Вклад в него поляризации (+) получим² из (10.75):

$$C_l^{BB} = \frac{1}{2l+1} \sum_m \int d^3k \langle a_{lm}^B(\mathbf{k}) a_{lm}^{B*}(\mathbf{k}) \rangle \quad (10.82a)$$

$$= \frac{4\pi}{25} \Delta\eta_r^2 \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \hat{P}_T^{(+)}(k, \eta_r) \cdot \left[\frac{l+2}{2l+1} j_{l-1}(k\eta_0) - \frac{l-1}{2l+1} j_{l+1}(k\eta_0) \right]^2, \quad (10.82b)$$

где $\hat{P}_T^{(+)}(k, \eta)$ — спектр мощности величины $h^{(+)\prime}(\mathbf{k}, \eta)$ (отметим, что здесь фигурирует производная амплитуды по конформному времени), и мы пренебрегли отличием $(\eta_0 - \eta_r)$ от η_0 . Вклад (\times)-компоненты в C_l^{BB} совпадает со вкладом от (+)-компоненты с точностью до замены $\hat{P}_T^{(+)}$ на $\hat{P}_T^{(\times)}$. В реалистическом случае (например, для инфляционных моделей) спектры возмущений мод (+) и (\times) совпадают, поэтому полный вклад тензорных мод в спектр C_l^{BB} равен удвоенному выражению (10.82).

Используя выражение для амплитуд (9.46b) и явный вид коррелятора (5.43), получим окончательно

$$C_l^{BB} = \frac{4\pi}{25} \Delta\eta_r^2 \int_0^\infty \frac{dk}{k} \mathcal{P}_T(k) \mathfrak{h}'^2(k, \eta_r) \cdot \left[\frac{l+2}{2l+1} j_{l-1}(k\eta_0) - \frac{l-1}{2l+1} j_{l+1}(k\eta_0) \right]^2. \quad (10.83)$$

Моды, загоризонтные в период рекомбинации, дают малый вклад в интеграл (10.83) даже при малых l , поскольку в этот период гравитационное поле таких мод меняется со временем медленно. При $l \lesssim \eta_0/\eta_r \sim 50$ основной вклад в этот интеграл дают моды, которые в эпоху рекомбинации как раз входят под горизонт, то есть моды с $k\eta_r \sim 1$. Для таких мод $\mathfrak{h}' \sim k \sim \eta_r^{-1}$, см. (9.47), при этом $j_l(k\eta_0) \propto (k\eta_0)^{-1}$. Отсюда в случае плоского спектра первичных тензорных возмущений получаем оценку

$$C_l^{BB} = \text{const} \cdot A_T \left(\frac{\Delta\eta_r}{\eta_0} \right)^2 = \text{const} \cdot A_T \left(\frac{\Delta\eta_r}{\eta_r} \right)^2 \left(\frac{\eta_r}{\eta_0} \right)^2, \quad l \lesssim 50,$$

²Выражение (10.82a) носит несколько условный характер: в его записи уже учтено, что один из интегралов по импульсам снимается с помощью δ -функции в корреляторе величин $h^{(+)\prime}(\mathbf{k}, \eta)$.

с численной постоянной, которая оказывается довольно малой. Поскольку C_l^{BB} слабо зависят от l при малых l , величина $\mathcal{D}_l^{BB} = T_0^2 \cdot \frac{l(l+1)}{2\pi} C_l^{BB}$ растёт как l^2 в этой области углового спектра, что согласуется с рис. 10.4.

При $50 < l < 1000$ интеграл (10.83) набирается, как всегда, при $k \sim l/\eta_0$. В этой области имеем $\mathfrak{h}' \sim 1/(k\eta_r^2) \sim \eta_0/(l\eta_r^2)$ и $j_l(k\eta_0) \propto 1/l$. Отсюда следует оценка

$$C_l^{BB} = \text{const} \cdot A_T \left(\frac{\Delta\eta_r}{\eta_r} \right)^2 \left(\frac{\eta_0}{\eta_r} \right)^2 \frac{1}{l^4}, \quad 50 < l < 1000.$$

Из неё видно, что \mathcal{D}_l^{BB} падает с ростом l как l^{-2} . Это видно на рис. 10.4. Осцилляционное поведение C_l^{BB} связано, как обычно, с осцилляциями величины $\mathfrak{h}'(\eta_r)$ как функции импульса.

Уточним приведённые оценки. Используя рекуррентные соотношения (F.3), (F.4), из выражения (9.47) получим

$$\mathfrak{h}'(k, \eta_r) = \frac{d}{d\eta_r} \left[\frac{3j_1(k\eta_r)}{k\eta_r} \right] = -\frac{3j_2(k\eta_r)}{\eta_r}. \quad (10.84)$$

Пользуясь теми же рекуррентными соотношениями (F.3) и (F.4), выражение в фигурных скобках в (10.83) можно записать в следующем виде:

$$\frac{l+2}{2l+1} j_{l-1}(k\eta_0) - \frac{l-1}{2l+1} j_{l+1}(k\eta_0) = \frac{d}{d(k\eta_0)} j_l(k\eta_0) + \frac{2j_l(k\eta_0)}{k\eta_0}. \quad (10.85)$$

Рассмотрим сначала B -моды поляризации с $10 \lesssim l \lesssim \eta_0/\eta_r \simeq 50$. Считая $l \gg 1$, для сферических функций Бесселя порядка l и их производных можно воспользоваться асимптотиками (F.15) и (F.21), соответственно. Учитывая осцилляционное поведение сферических функций Бесселя, и то, что фазы асимптотик (F.15) и (F.21) сдвинуты на $\pi/2$, интерференционным вкладом в (10.83), пропорциональным $j_l \cdot j'_l$, можно пренебречь, а в асимптотиках для j_l^2 и $j_l'^2$ можно усреднить осциллирующие факторы. В результате для спектра B -моды получим приближённо

$$C_l^{BB} = \frac{36\pi}{25} \frac{\Delta\eta_r^2}{\eta_r^2} \int_{(l+1/2)/\eta_0}^{\infty} \frac{dk}{k} \mathcal{P}_T(k) j_2^2(k\eta_r) \left[\frac{\sqrt{(k\eta_0)^2 - (l + \frac{1}{2})^2}}{2(k\eta_0)^3} + \frac{2}{(k\eta_0)^3 \sqrt{(k\eta_0)^2 - (l + \frac{1}{2})^2}} \right]. \quad (10.86)$$

В пределе $l \gg 1$ первое слагаемое в скобках в (10.86) доминирует.

Ограничим дальнейшее рассмотрение случаем масштабно-инвариантного спектра первичных тензорных возмущений. Поскольку при малых значениях аргумента выполняется $j_2(x) \propto x^2$, см. (F.8), интеграл в (10.86) набирается при $k\eta_r \sim 1$. Переходя к новой переменной интегрирования $y = k\eta_r$, запишем для спектра

$$C_l^{BB} \simeq \frac{18\pi}{25} \left(\frac{\Delta\eta_r}{\eta_0} \right)^2 \cdot A_T \cdot \int_{\frac{\eta_r}{\eta_0}(l+\frac{1}{2})}^{\infty} \frac{dy}{y^3} j_2^2(y).$$

В этом интеграле нижний предел можно положить равным нулю. Воспользовавшись табличным интегралом

$$\int_0^{\infty} \frac{dy}{y^3} j_2^2(y) = \frac{1}{72},$$

получим приближённо:

$$\mathcal{D}_l^{BB} = T_0^2 \cdot \frac{l(l+1)}{2\pi} C_l^{BB} \simeq T_0^2 \cdot \frac{A_T}{200} \left(\frac{\Delta\eta_r}{\eta_r} \right)^2 \left(\frac{\eta_r}{\eta_0} \right)^2 \cdot l^2.$$

Таким образом, величина \mathcal{D}_l^{BB} действительно растёт с увеличением l как $\mathcal{D}_l^{BB} \propto l^2$. Численное вычисление интеграла (10.86) показывает несколько более медленный рост, однако и полученное нами аналитическое приближение неплохо согласуется с полным численным расчётом, представленным на правой половине рис. 10.4. Численно, для $l = 30$, $r = A_T/A_R = 0.38$ и $A_R \simeq 2.5 \cdot 10^{-9}$ получаем

$$\mathcal{D}_{30}^{BB} \approx 2 \cdot 10^{-2} \mu\text{K}^2,$$

в качественном согласии с точным расчётом, представленным на рис. 10.4.

Получим теперь оценку для меньших угловых масштабов, $l \gg \eta_0/\eta_r \simeq 50$, где основной вклад в поляризацию реликтового излучения дают моды, зашедшие под горизонт до рекомбинации. Для оценки

воспользуемся формулой (10.86), в пределе $l\eta_r/\eta_0 \gg 1$ используем для j_2 асимптотику больших аргументов (F.10) и для случая масштабно-инвариантного первичного спектра найдём

$$C_l^{BB} = \frac{9\pi}{25} \left(\frac{\Delta\eta_r}{\eta_r} \right)^2 \left(\frac{\eta_0}{\eta_r} \right)^2 \frac{A_T}{(l + \frac{1}{2})^4} \int_1^\infty \frac{du}{u} \frac{\sqrt{u^2 - 1}}{u^5} \left\{ 1 - \cos \left[2u \frac{\eta_r}{\eta_0} \left(l + \frac{1}{2} \right) \right] \right\}, \quad (10.87)$$

где $u = k\eta_0/l$. Отсюда следует, что мультиполы C_l^{BB} для $l > 50$ испытывают осцилляции как функции l с периодом около $l \simeq \pi\eta_0/\eta_r \simeq 160$, что согласуется с численным расчётом, представленным на правой половине рис. 10.4. Среднее значение, вокруг которого происходят осцилляции C_l^{BB} , быстро падает с ростом l . Это среднее найдём, воспользовавшись табличным интегралом

$$\int_1^\infty \frac{du}{u^6} \sqrt{u^2 - 1} = \frac{2}{15}.$$

Приближённо получим

$$\mathcal{D}_l^{BB} \simeq \frac{3T_0^2}{125} \left(\frac{\Delta\eta_r}{\eta_r} \right)^2 \left(\frac{\eta_0}{\eta_r} \right)^2 \cdot \frac{A_T}{(l + \frac{1}{2})^2}.$$

Как и ожидалось, при $l > 50$ величины \mathcal{D}_l^{BB} падают с ростом l как $\mathcal{D}_l^{BB} \propto l^{-2}$, ср. рис. 10.4. Численно для $l = 500$, $r = A_T/A_R = 0.38$ и $A_R \simeq 2.5 \cdot 10^{-9}$ получаем

$$\mathcal{D}_{500}^{BB} \approx 2 \cdot 10^{-3} \mu\text{K}^2,$$

в согласии с результатом численного расчёта, представленным на рис. 10.4.

На больших угловых масштабах, $l \lesssim 20$, основной вклад тензорных мод происходит от эпохи вторичной ионизации Вселенной. Найдём этот вклад, используя приближённую формулу (10.44). Вклад мод с импульсом \mathbf{k} в поляризационный тензор имеет вид (ср. (10.70))

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{ab}(\mathbf{k}, \mathbf{n}) &= \frac{3}{8\pi} \int d\mathbf{n}' \left(\frac{1}{2} \left(1 - (\mathbf{n}\mathbf{n}')^2 \right) g_{ab} - \mathbf{n}'\mathbf{e}_a \cdot \mathbf{n}'\mathbf{e}_b \right) \cdot e^{i\mathbf{k}\mathbf{n}(\eta_0 - \eta_{rei})} \cdot \tau_{rei} \\ &\times \sum_{A=+, \times} n'_i \epsilon_{ij}^{(A)} n'_j \cdot \int_{\eta_r}^{\eta_{rei}} d\eta h^{(A)'}(\mathbf{k}, \eta) \cdot e^{-i\mathbf{k}\mathbf{n}'(\eta_{rei} - \eta)}. \end{aligned}$$

Дальнейшее рассмотрение происходит во многом аналогично случаю генерации поляризации в эпоху рекомбинации, поэтому мы укажем лишь отличия, рассматривая для определённости тензорную моду $h^{(+)}$. В выражениях для $Q_{(+)}$ и $U_{(+)}$ — аналогах формул (10.71) и (10.72) — стоят другие функции полярного угла θ' , так что соответствующий интеграл принимает вид

$$\int_0^\pi d\theta' \sin^5 \theta' \cdot e^{-ik(\eta_{rei} - \eta) \cos \theta'}.$$

Для экспоненты под знаком интеграла воспользуемся представлением (F.34), а интеграл по полярному углу θ' снимем, используя равенство

$$\int_{-1}^{+1} (1 - x^2)^2 P_l(x) dx = \frac{16}{15} \left(\delta_{l,0} - \frac{2}{7} \delta_{l,2} + \frac{1}{21} \delta_{l,4} \right). \quad (10.88)$$

▷ Задача 19. Вычислить интеграл (10.88) двумя способами: 1) воспользоваться формулой Родрига (F.28) и затем проинтегрировать по частям; 2) разложить $(1 - x^2)^2$ по полиномам Лежандра и воспользоваться свойством ортогональности (F.33).

Найдём таким образом

$$\int_0^\pi d\theta' \sin \theta' \sin^4 \theta' e^{-ik(\eta_{rei}-\eta) \cos \theta'} = 16 \left(\frac{j_0 [(\eta_{rei} - \eta) k]}{3 \cdot 5} + \frac{2j_2 [(\eta_{rei} - \eta) k]}{3 \cdot 7} + \frac{j_4 [(\eta_{rei} - \eta) k]}{5 \cdot 7} \right) = 16 \frac{j_2 [(\eta_{rei} - \eta) k]}{k^2 (\eta_{rei} - \eta)^2},$$

где для получения последнего равенства мы воспользовались равенством между выражениями (9.52) и (9.53). В результате для параметров Стокса будем иметь (ср. (10.73))

$$Q_{(+)}(\mathbf{k}, \mathbf{n}) = -\frac{3}{2} \tau_{rei} \int_{\eta_r}^{\eta_{rei}} d\eta h^{(+)\prime}(\mathbf{k}, \eta) \frac{j_2 [(\eta_{rei} - \eta) k]}{k^2 (\eta_{rei} - \eta)^2} \cdot e^{ik(\eta_0 - \eta_{rei}) \cos \theta} (1 + \cos^2 \theta) \cos 2\phi,$$

$$U_{(+)}(\mathbf{k}, \mathbf{n}) = -3\tau_{rei} \int_{\eta_r}^{\eta_{rei}} d\eta h^{(+)\prime}(\mathbf{k}, \eta) \frac{j_2 [(\eta_{rei} - \eta) k]}{k^2 (\eta_{rei} - \eta)^2} \cdot e^{ik(\eta_0 - \eta_{rei}) \cos \theta} \cos \theta \cdot \sin 2\phi,$$

Аналоги формул (10.74), (10.75) имеют вид

$$a_{lm,(+)}^E(\mathbf{k}) = \frac{3}{2} \tau_{rei} (\delta_{m,+2} + \delta_{m,-2}) i^l \cdot \left\{ \frac{(l+2)(l+1)}{(2l-1)(2l+1)} j_{l-2} [(\eta_0 - \eta_{rei}) k] \right. \\ \left. - \frac{6(l+2)(l-1)}{(2l-1)(2l+3)} j_l [(\eta_0 - \eta_{rei}) k] + \frac{l(l-1)}{(2l+1)(2l+3)} j_{l+2} [(\eta_0 - \eta_{rei}) k] \right\} \\ \times \sqrt{2\pi(2l+1)} \cdot \int_{\eta_r}^{\eta_{rei}} d\eta h^{(+)\prime}(\mathbf{k}, \eta) \frac{j_2 [(\eta_{rei} - \eta) k]}{k^2 (\eta_{rei} - \eta)^2}, \quad (10.89)$$

$$a_{lm,(+)}^B(\mathbf{k}) = 3\tau_{rei} \cdot i^l \cdot \left\{ \frac{l+2}{2l+1} j_{l-1} [(\eta_0 - \eta_{rei}) k] - \frac{l-1}{2l+1} j_{l+1} [(\eta_0 - \eta_{rei}) k] \right\} \\ \times \sqrt{2\pi(2l+1)} \cdot (\delta_{m,+2} - \delta_{m,-2}) \cdot \int_{\eta_r}^{\eta_{rei}} d\eta h^{(+)\prime}(\mathbf{k}, \eta) \frac{j_2 [(\eta_{rei} - \eta) k]}{k^2 (\eta_{rei} - \eta)^2}. \quad (10.90)$$

причем между соответствующими коэффициентами для двух поляризаций (+) и (×) по-прежнему выполняются равенства (10.76). Отсюда, в частности, для B -моды поляризации получим

$$C_l^{BB} = 36\pi \cdot \tau_{rei}^2 \cdot \int_0^\infty \frac{dk}{k} \mathcal{P}_T(k) \cdot \left\{ \int_{\eta_r}^{\eta_{rei}} d\eta \mathfrak{h}'(k, \eta) \frac{j_2 [(\eta_{rei} - \eta) k]}{(\eta_{rei} - \eta)^2 k^2} \right\}^2 \\ \times \left\{ \frac{l+2}{2l+1} j_{l-1} [(\eta_0 - \eta_{rei}) k] - \frac{l-1}{2l+1} j_{l+1} [(\eta_0 - \eta_{rei}) k] \right\}^2. \quad (10.91)$$

В области самых низших мультиполей, $l \sim (\eta_0 - \eta_{rei})/\eta_{rei} \sim 2$, интегралы в (10.91) насыщаются при $\eta \sim \eta_{rei}$, $k \sim \eta_{rei}^{-1}$. При этом функции $j_{l\pm 1}[(\eta_0 - \eta_{rei})k]$ не подавлены. Зависимость C_l^{BB} от l в этой области слабая, и в случае плоского начального спектра величины \mathcal{D}_l^{BB} растут приблизительно как l^2 ,

$$\mathcal{D}_l^{BB} = T_0^2 \frac{l(l+1)}{2\pi} C_l^{BB} \sim \text{const} \cdot T_0^2 A_T \tau_{rei}^2 l^2. \quad (10.92)$$

Такое поведение согласуется с результатами численного расчёта, см. рис. 10.4.

Численный коэффициент в (10.92) весьма мал. Чтобы проиллюстрировать это, найдём внутренний интеграл в (10.91) при $k\eta_{rei} \ll 1$:

$$\int_{\eta_r}^{\eta_{rei}} d\eta \mathfrak{h}'(k, \eta) \frac{j_2 [(\eta_{rei} - \eta) k]}{(\eta_{rei} - \eta)^2 k^2} \sim 3k^2 \int_{\eta_r}^{\eta_{rei}} \frac{\eta d\eta}{15^2} \simeq \frac{k^2 \eta_{rei}^2}{150}.$$

Отсюда и видна численная малость интеграла (10.91).

В области более высоких мультиполей, где $l \gg (\eta_0 - \eta_{rei})/\eta_{rei}$, ситуация иная. Вклад в величины C_l^{BB} дают моды с импульсами $k \gtrsim l/(\eta_0 - \eta_{rei}) \gg \eta_{rei}^{-1}$. При таких импульсах множитель $j_2[(\eta_{rei} - \eta)k]/[(\eta_{rei} - \eta)^2 k^2]$ во внутреннем интеграле в (10.91) сильно подавлен, если только η не близко к η_{rei} . Поэтому внутренний интеграл насыщается при $\eta = \eta_{rei} - O(k^{-1})$. В этой области имеем $\mathfrak{h}'(k, \eta) \sim 1/(k\eta_{rei}^2)$, и внутренний интеграл по порядку величины равен $(k\eta_{rei})^{-2} \propto l^{-2}$. С учётом того, что $j_l \propto l^{-1}$ мы заключаем, что мультиполи C_l^{BB} в рассматриваемой области падают с ростом l как l^{-6} , а \mathcal{D}_l^{BB} убывают как l^{-4} . Это падение видно на рис. 10.4. Довольно быстро, уже при $l \sim 20$ доминировать в полном спектре C_l^{BB} начинают вклады от эпохи рекомбинации, рассмотренные выше в этом разделе.

Для количественной оценки спектра в области $l \gg (\eta_0 - \eta_{rei})/\eta_{rei}$ воспользуемся формулой (10.84) и асимптотикой (F.10) сферической функции Бесселя j_2 при больших значениях аргумента. Тогда для основного вклада во внутренний интеграл в (10.91), происходящего из области $\eta = \eta_{rei} - O(k^{-1})$, получим

$$\int_{\eta_r}^{\eta_{rei}} d\eta \mathfrak{h}'(k, \eta) \frac{j_2[(\eta_{rei} - \eta)k]}{(\eta_{rei} - \eta)^2 k^2} \simeq 3 \int_0^{\eta_{rei} - \eta_r} d\tilde{\eta} \frac{j_2[(\eta_{rei} - \tilde{\eta})k]}{\eta_{rei} - \tilde{\eta}} \frac{j_2(\tilde{\eta}k)}{\tilde{\eta}^2 k^2} \simeq -3 \int_0^\infty dx \frac{\sin(\eta_{rei}k - x)}{k^2 \eta_{rei}^2} \frac{j_2(x)}{x^2},$$

где $\tilde{\eta} = \eta_{rei} - \eta$, $x = k\tilde{\eta}$, и мы распространяли интегрирование от нуля до бесконечности, учитывая быструю сходимость интеграла. Отсюда получим приближённо

$$\begin{aligned} \int_{\eta_r}^{\eta_{rei}} d\eta \mathfrak{h}'(k, \eta) \frac{j_2[(\eta_{rei} - \eta)k]}{(\eta_{rei} - \eta)^2 k^2} &\simeq -3 \frac{\sin(k\eta_{rei})}{k^2 \eta_{rei}^2} \int_0^\infty dx \cos x \frac{j_2(x)}{x^2} + 3 \frac{\cos(k\eta_{rei})}{k^2 \eta_{rei}^2} \int_0^\infty dx \sin x \frac{j_2(x)}{x^2} \\ &= \frac{1}{4} \frac{\cos(k\eta_{rei})}{k^2 \eta_{rei}^2}, \end{aligned}$$

где мы воспользовались табличными интегралами со сферической функции Бесселя j_2 . Оставшийся интеграл по импульсам берётся переходом к переменной $u \equiv (\eta_0 - \eta_{rei})k / (l + \frac{1}{2})$, использованием формулы (10.85), асимптотики (F.21) больших порядков для j'_l и усреднением всех быстроосциллирующих сомножителей. В итоге получаем

$$C_l^{BB} \simeq \frac{9\pi}{16} \left(\frac{\eta_0 - \eta_{rei}}{\eta_{rei}} \right)^4 \frac{\tau_{rei}^2}{(l + \frac{1}{2})^6} \int_1^\infty \frac{du}{u} \cdot \mathcal{P}_T \left[\frac{(l + \frac{1}{2})u}{\eta_0 - \eta_{rei}} \right] \cdot \frac{\sqrt{u^2 - 1}}{u^7}.$$

Для случая масштабно-инвариантного спектра это даёт

$$\mathcal{D}_l^{BB} \simeq T_0^2 \cdot \frac{3\tau_{rei}^2}{140} \left(\frac{\eta_0 - \eta_{rei}}{\eta_{rei}} \right)^4 \cdot \frac{A_T}{(l + \frac{1}{2})^4}.$$

Итак, спектр действительно быстро падает с ростом l , $\mathcal{D}_l^{BB} \propto l^{-4}$. Для сравнения с рис. 10.4 положим $r = A_T/A_R = 0.38$ и $A_R \simeq 2.5 \cdot 10^{-9}$ и получим при $l = 10$ и $\tau_{rei} = 0.08$

$$\mathcal{D}_{10}^{BB} \simeq 1.1 \cdot 10^{-3} \mu\text{K}^2,$$

что довольно близко к точному численному ответу, представленному на рис. 10.4 с учётом того, что там представлены результаты для случая более ранней вторичной ионизации и, соответственно, вдвое большей оптической толщины.

В заключение раздела приведём для полноты выражения для спектров E -моды поляризации, вызванной тензорными модами. Для вклада, образующегося в эпоху рекомбинации, будем иметь

$$\begin{aligned} C_l^{EE} &= \frac{\pi}{25} \Delta\eta_r^2 \int_0^\infty \frac{dk}{k} \mathcal{P}_T(k) \mathfrak{h}'^2(k, \eta) \left\{ \frac{(l+2)(l+1)}{(2l-1)(2l+1)} j_{l-2}[(\eta_0 - \eta_r)k] \right. \\ &\quad \left. - \frac{6(l+2)(l-1)}{(2l-1)(2l+3)} j_l[(\eta_0 - \eta_r)k] + \frac{l(l-1)}{(2l+1)(2l+3)} j_{l+2}[(\eta_0 - \eta_r)k] \right\}^2. \end{aligned} \quad (10.93)$$

$$\begin{aligned}
C_l^{TE} = & \frac{\pi \Delta \eta_r}{10\sqrt{2}} \sqrt{\frac{(l+2)!}{(l-2)!}} \int_0^\infty \frac{dk}{k} \mathcal{P}_T(k) \mathfrak{h}'(k, \eta_r) \int_{\eta_r}^{\eta_0} d\eta \mathfrak{h}'(k, \eta) \frac{j_l[(\eta_0 - \eta)k]}{(\eta_0 - \eta)^2 k^2} \\
& \times \left\{ \frac{(l+2)(l+1)}{(2l-1)(2l+1)} j_{l-2}[(\eta_0 - \eta_r)k] \right. \\
& \left. - \frac{6(l+2)(l-1)}{(2l-1)(2l+3)} j_l[(\eta_0 - \eta_r)k] + \frac{l(l-1)}{(2l+1)(2l+3)} j_{l+2}[(\eta_0 - \eta_r)k] \right\}. \tag{10.94}
\end{aligned}$$

Для аналогичного вклада от эпохи вторичной ионизации Вселенной получим

$$\begin{aligned}
C_l^{EE} = & 9\pi \cdot \tau_{rei}^2 \cdot \int_0^\infty \frac{dk}{k} \mathcal{P}_T(k) \cdot \left\{ \int_{\eta_r}^{\eta_{rei}} d\eta \mathfrak{h}'(k, \eta) \frac{j_2[(\eta_{rei} - \eta)k]}{(\eta_{rei} - \eta)^2 k^2} \right\}^2 \\
& \times \left\{ \frac{(l+2)(l+1)}{(2l-1)(2l+1)} j_{l-2}[(\eta_0 - \eta_{rei})k] \right. \\
& \left. - \frac{6(l+2)(l-1)}{(2l-1)(2l+3)} j_l[(\eta_0 - \eta_{rei})k] + \frac{l(l-1)}{(2l+1)(2l+3)} j_{l+2}[(\eta_0 - \eta_{rei})k] \right\}^2. \tag{10.95}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C_l^{TE} = & \frac{3\pi \cdot \tau_{rei}}{2\sqrt{2}} \sqrt{\frac{(l+2)!}{(l-2)!}} \cdot \left\{ \int_0^\infty \frac{dk}{k} \mathcal{P}_T(k) \int_{\eta_r}^{\eta_0} d\eta \mathfrak{h}'(k, \eta) \frac{j_l[(\eta_0 - \eta)k]}{(\eta_0 - \eta)^2 k^2} \right\} \\
& \times \left\{ \int_{\eta_r}^{\eta_{rei}} d\eta \mathfrak{h}'(k, \eta) \frac{j_2[(\eta_{rei} - \eta)k]}{(\eta_{rei} - \eta)^2 k^2} \right\} \cdot \left\{ \frac{(l+2)(l+1)}{(2l-1)(2l+1)} j_{l-2}[(\eta_0 - \eta_{rei})k] \right. \\
& \left. - \frac{6(l+2)(l-1)}{(2l-1)(2l+3)} j_l[(\eta_0 - \eta_{rei})k] + \frac{l(l-1)}{(2l+1)(2l+3)} j_{l+2}[(\eta_0 - \eta_{rei})k] \right\}. \tag{10.96}
\end{aligned}$$

Следуя рассуждениям, приведённым нами выше при анализе спектра C_l^{BB} , можно, в частности, убедиться, что спектры C_l^{BB} и C_l^{EE} весьма схожи, что находится в согласии с результатами численного расчёта, представленными на правой половине рис. 10.4.

10.4 Обсуждение

Первые указания на наличие поляризации реликтового излучения были получены в результате анализа спектров C_l^{EE} и C_l^{TE} , построенных на основе данных эксперимента DASI (Degree Angular Scalar Interferometer) [62] на Южном полюсе. Впоследствии и другие эксперименты также заявили о регистрации E -моды, см. рис. 10.5 и 10.6. Современные данные согласуются с изложенным в этой Главе представлением о том, что E -мода возникла в результате комптоновского рассеяния фотонов в неоднородной плазме эпохи рекомбинации: спектры C_l^{EE} и C_l^{TE} совместны с теоретическими предсказаниями для значений космологических параметров, извлечённых из анализа спектра C_l^{TT} , см. рис. 10.5. Нет противоречий и с другими космологическими данными.

Измерения спектров C_l^{EE} и C_l^{TE} позволяют получить дополнительную информацию по отношению к спектру анизотропии температуры и отчасти снять вырождение между космологическими параметрами, о котором мы говорили в разделе 9.4. Так спектр C_l^{EE} в области $l \sim 100 - 1000$ определяется в основном потенциалом скоростей фотонов v_γ в эпоху рекомбинации, в то время как спектр C_l^{TT} в значительной степени обусловлен возмущениями плотности δ_γ и гравитационным потенциалом Φ . В области низких мультиполей спектры C_l^{EE} и C_l^{TE} весьма чувствительны к оптической

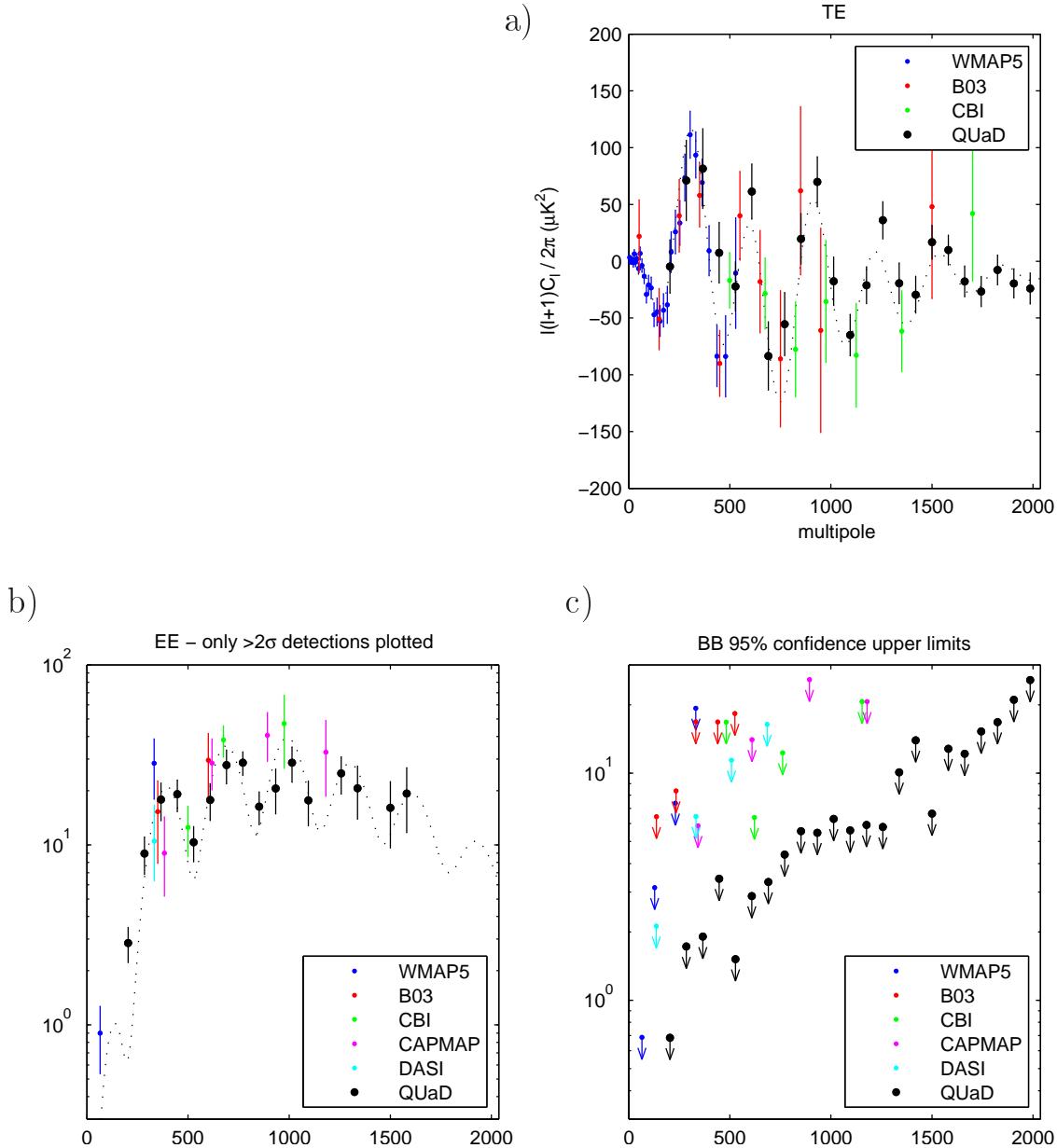


Рис. 10.6: Результаты измерения спектров реликтового излучения [63]; а) Смешанный спектр \mathcal{D}_l^{TE} ; б) спектр E -моды \mathcal{D}_l^{EE} ; в) ограничения на спектр B -моды \mathcal{D}_l^{BB} на уровне достоверности 95%.

толище τ_{rei} , характеризующей эпоху вторичной ионизации, поскольку $C_l^{EE} \propto \tau_{rei}^2$, $C_l^{TE} \propto \tau_{rei}$. В то же время, $C_l^{TT} \propto e^{-\tau_{rei}} A_R^2$, так что спектр анизотропии сравнительно слабо чувствителен к величине τ_{rei} . Именно из измерения спектров C_l^{EE} и C_l^{TE} в основном следует современное значение [60] $\tau_{rei} = 0.084 \pm 0.016$. Отметим, что уровень точности определения τ_{rei} с помощью измерения C_l^{EE} и C_l^{TE} уже сегодня соответствует космической неопределенности.

Положения максимумов и минимумов в спектре C_l^{TE} и относительные положения экстремумов в спектрах C_l^{TT} и C_l^{EE} чувствительны к примеси мод постоянной кривизны. А именно, для случая адиабатических первичных возмущений температура и поляризация анитикоррелируют, так что спектры C_l^{TT} и C_l^{EE} находятся почти в противофазе, а экстремумы C_l^{TT} близки к нулям C_l^{TE} . В то же время, если первич-

ные возмущения являются смесью адиабатических мод и мод постоянной кривизны, то антакорреляция будет испорчена. Таким образом, измерение поляризации позволяет ставить ограничения на долю примеси мод постоянной кривизны в спектре первичных возмущений.

Измерение поляризации реликтового излучения особенно интересно с точки зрения поиска тензорных возмущений. Дело в том, что исследование анизотропии температуры имеет ограниченную чувствительность к тензорным возмущениям (см., например, [64]): в случае плоского тензорного спектра наилучшая чувствительность измерений мультиполей C_l^{TT} к величине $r = A_T/A_R$ составляет $r \simeq 0.07$. Это связано как с космической неопределенностью, так и с вырождением по параметрам. Измерение E -моды поляризации позволяет улучшить эту чувствительность в несколько раз и в будущем добраться до $r \simeq 0.02$. В то же время, измерение B -моды в принципе позволяет продвинуться заметно дальше. Такую перспективу даёт исследование B -моды на средних и малых угловых масштабах, где проблема с космической неопределенностью отступает на второй план, а чувствительность ограничивается “паразитным” вкладом в B -моду, обусловленным гравитационным линзированием.

До сих пор не было зарегистрировано никаких признаков B -моды поляризации, см. рис. 10.6. Современное ограничение для старших мультиполей $l = 2 - 6$ составляет [60]

$$T_0^2 \cdot \frac{l(l+1)}{2\pi} C_l^{BB} < 0.15 \mu\text{K}^2$$

на уровне достоверности 95%. Это соответствует ограничению $r \lesssim 20$, которое значительно слабее, чем то, что мы используем в этой книге. Наиболее сильные ограничения на величину r следуют пока из анализа спектров C_l^{TT} и C_l^{TE} . Сейчас ведётся активная работа по увеличению чувствительности наблюдений, и несколько новых экспериментов в ближайшем будущем позволят заметно продвинуться по амплитуде B -моды. В этих экспериментах можно будет обнаружить сигнал от реликтовых гравитационных волн, если $r \gtrsim 0.1$ (и даже несколько ниже), то есть если мощность первичных тензорных возмущений составляет 10% от мощности скалярных возмущений [64]. Проектируемые эксперименты в среднесрочной перспективе позволят достигнуть уровня 1% для величины r и даже лучше.

Отметим (см. подробнее раздел 13.4), что тензорные возмущения с заметной амплитудой и почти плоским спектром предсказываются некоторыми, в том числе весьма популярными, инфляционными моделями. Поэтому обнаружение первичных гравитационных волн с такими свойствами было бы сильным аргументом в пользу инфляционной теории. Этот вопрос вполне актуален уже сейчас, поскольку существующие ограничения на величину r близки к предсказаниям части моделей инфляции и даже исключают некоторые из них.

Как мы уже отмечали, B -мода поляризации генерируется на малых угловых масштабах из E -моды за счёт гравитационного линзирования. Поэтому измерение B -моды при больших l позволяет в конечном итоге получить информацию о распределении и эволюции структур во Вселенной при $z \sim 1$. Это полезно для исследования свойств тёмной материи. Замечательно, что информация о B -моде на малых угловых масштабах оказывается интересной и с точки зрения физики частиц. В частности, нейтрино Стандартной модели приводят к подавлению спектра возмущений материи на малых пространственных масштабах (см. раздел 8.4.3). Степень подавления зависит от масс нейтрино, и если они имеют порядок, характерный для атмосферных осцилляций (см. Приложение I.C), то измерений только анизотропии тем-

пературы реликтового излучения будет в принципе недостаточно для регистрации эффектов от нейтрино. Измерение поляризации B -моды на малых масштабах в этом случае имеет более высокую чувствительность, вплоть до масс $\sum m_\nu \sim 3 \cdot 10^{-2}$ эВ [65].

Наконец, измерения B -моды чувствительны к некоторым обобщениям Стандартной модели физики частиц, в частности, к моделям с космическими струнами. Струны являются источником тензорных (и векторных) возмущений, которые могут давать существенный вклад в B -моду на угловых масштабах меньше одного градуса, при $l \sim 1000$ [66]. Величины a_{lm}^B в этом случае ожидаются сильно негауссовыми. Измерения B -моды позволяют также проверить некоторые модели ранней генерации межгалактических магнитных полей, поскольку такие поля в ионизованной среде приводят к перемешиванию E - и B -мод из-за фарадеевского вращения плоскости поляризации.

Подводя итог, подчеркнём, что современные результаты по измерению поляризации реликтового излучения пока не противоречат предсказаниям космологической модели Λ CDM в предположениях о близком к масштабно-инвариантному спектре первичных адиабатических скалярных возмущений и об отсутствии реликтовых гравитационных волн. Изменение такого положения дел может произойти в недалёком будущем.

Глава 11

Проблемы теории горячего Большого взрыва. Инфляция как способ их решения

Наблюдаемая Вселенная с хорошей степенью точности однородна и изотропна. Она тёплая и большая. Как мы увидим в разделе 11.1, в рамках теории горячего Большого взрыва эти на первый взгляд самоочевидные свойства не находят своего удовлетворительного объяснения, что представляет собой серьёзную проблему, а точнее, набор связанных между собой проблем. Успешное решение этих проблем предлагает инфляционная теория. Более того, инфляционная теория даёт элегантный механизм генерации первичных неоднородностей плотности во Вселенной, что тоже является проблемой для теории горячего Большого взрыва. Именно поэтому инфляционная теория выглядит весьма убедительно.

Согласно инфляционной теории, стадии горячего Большого взрыва предшествовала стадия быстрого (близкого к экспоненциальному) расширения Вселенной — стадия раздувания (“inflation” можно перевести как “раздувание”). На этой стадии уравнение состояния материи было близко к вакуумному, $p \approx -\rho$, плотность энергии менялась со временем медленно, Вселенная быстро расширялась, становилась однородной на больших масштабах и с высокой точностью пространственно-плоской. По окончании инфляции наступила более или менее продолжительная стадия постинфляционного разогрева, в результате которого вакуумоподобная энергия в конце концов перешла в тепло. И только вслед за этим наступила стадия горячего Большого взрыва. Всё это происходило, по-видимому, в течение чрезвычайно короткого времени; соответствующие оценки мы сделаем ниже.

Хотя инфляционная теория ещё надёжно не подтверждена наблюдениями, ряд её вариантов приводит к предсказаниям, проверка которых возможна в относительно недалёком будущем. Замечательно, что изучение свойств Вселенной на современных космологических масштабах способно прояснить свойства Вселенной и заполняющей её материи в самые первые мгновения эволюции, предшествующие горячей стадии и характеризующиеся гигантскими плотностями энергии и чрезвычайно малыми масштабами расстояний и времён. Это — одно из самых ярких проявлений тесной связи между микро- и макрофизикой, существующей в природе.

11.1 Проблемы теории горячего Большого взрыва

У теории горячего Большого взрыва, которую мы изучали до сих пор, имеется ряд проблем. С точки зрения физики частиц большой проблемой является обнаруженное недавно ускорение темпа расширения Вселенной, свидетельствующее о присутствии тёмной энергии в той или иной форме. Природа тёмной энергии является, по-видимому, одной из самых фундаментальных загадок современной физики, однако в данный момент мы сосредоточимся на обсуждении проблем несколько иного сорта.

Проблемы, о которых пойдёт речь, так или иначе связаны с начальными условиями, которые приходится закладывать в теорию горячего Большого взрыва. Напомним, прежде всего, что в этой теории расширяющаяся Вселенная заполнена на ранних стадиях горячей плазмой с большой плотностью энергии ρ и положительным давлением p , и описывается метрикой вида

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t)dl^2, \quad (11.1)$$

где dl^2 — метрика единичной трёхмерной сферы, трёхмерного плоского пространства или единичного трёхмерного гиперболоида. Существенно, что такая картина предсказывает сингулярность в начальный момент времени, когда масштабный фактор $a(t)$ обращается в нуль, а плотность энергии и давление бесконечны; этот момент обычно выбирают как $t = 0$.

Можно было бы предположить, что наличие такой сингулярности является следствием выбора симметричной метрики (11.1), и что небольшие отклонения от однородности и изотропии могли бы позволить избежать начальной сингулярности. Однако так называемые “теоремы о сингулярности”, доказанные в общей теории относительности, говорят, что это не так, и что начальная сингулярность является общим свойством расширяющихся космологических решений.

Само по себе наличие сингулярности в решении классических уравнений поля не является спецификой фридмановской метрики (11.1) и теории гравитации вообще. Так, кулоновское поле точечного заряда в классической электродинамике Максвелла также имеет сингулярность в месте нахождения заряда. Вблизи сингулярности мы не можем доверять этому решению, и физика должна описываться существенно квантовым образом. В космологическом контексте это означает, что неправомерно пользоваться классическими уравнениями в самом начале эволюции, вблизи $t = 0$, когда метрика близка к сингулярной; классические уравнения можно считать справедливыми лишь с некоторого времени $t \gtrsim t_{Pl}$, когда характерные значения плотности, температуры и кривизны меньше планковских¹. Роль начального квантового этапа эволюции могла бы состоять в том, чтобы зафиксировать начальные условия для дальнейшего классического расширения.

В настоящее время квантовая теория гравитации не развита в достаточной степени, чтобы уверенно предсказать наиболее вероятные начальные условия в сценарии горячего Большого взрыва. Поэтому стоит оговориться, что по крайней мере часть проблем теории горячего Большого взрыва, о которых пойдёт речь ниже, может

¹Вместо планковского масштаба в приведённых здесь и ниже рассуждениях может выступать какой-то другой масштаб, на котором теория гравитации перестаёт быть классической, например, масштаб теории суперструн. Хотя численные оценки в этом случае несколько изменятся, на качественном уровне все соображения останутся справедливыми. Для определённости мы в дальнейшем будем говорить о планковском масштабе.

быть связана с непониманием специфических особенностей гравитации в квантовом режиме. В то же время, можно попытаться качественно представить, как выглядела Вселенная в конце квантового этапа своей эволюции.

Ключевую роль играет наблюдение, что единственным размерным параметром в общей теории относительности является масса Планка M_{Pl} . Таким образом, естественно ожидать, что через время $t \sim t_{Pl}$ после Большого взрыва размер причинно связанный области во Вселенной составляет $L_c \sim l_{Pl}$. Следовательно, для бесконечной Вселенной естественно ожидать, что в момент времени $t \sim t_{Pl}$ две области пространства, находящиеся на расстоянии $L > l_{Pl}$ друг от друга, должны заметно отличаться за счет квантовых флюктуаций. При этом было бы естественно также ожидать, что пространственная кривизна сравнима с планковским значением M_{Pl}^{-2} .

Теперь, пользуясь уравнениями Эйнштейна и принимая гипотезу адиабатичности расширения Вселенной, мы можем проследить эволюцию Вселенной назад по времени от современного состояния к моменту $t \sim t_{Pl}$ и проверить, похожи ли начальные условия, приведшие к современной Вселенной, на эти ожидания. В такой постановке вопроса проблемы сценария горячего Большого Взрыва, о которых пойдёт речь, сводятся фактически к вопросу о соответствии между *ожидаемыми a priori* начальными условиями и теми начальными условиями, которые *должны быть заложены* в начале этапа классической эволюции, чтобы в результате получить Вселенную, похожую на наблюдаемую. Для нас в этой Главе будет достаточно грубых, но простых оценок, проясняющих суть дела.

11.1.1 Проблема горизонта

В качестве первой проверки вычислим размер, занимаемый видимой сейчас частью Вселенной в планковскую эпоху. Размер видимой сейчас части Вселенной составляет около

$$l_{H,0}(t_0) \approx 1.4 \cdot 10^4 \text{ Мпк}$$

В теории горячего Большого взрыва физический размер этой области в планковскую эпоху составлял

$$l_{H,0}(t_{Pl}) = \frac{a(t_{Pl})}{a(t_0)} l_{H,0}(t_0) \sim \frac{T_0}{T_{Pl}} l_{H,0}(t_0), \quad (11.2)$$

где в последнем соотношении мы пренебрегли численным фактором, связанным с изменением числа релятивистских степеней свободы. Численно имеем

$$l_{H,0}(t_{Pl}) \sim 10^{30} M_{Pl}^{-1} \quad (11.3)$$

Таким образом, теория горячего Большого взрыва, экстраполированная назад по времени в эпоху, близкую к планковской, говорит, что размер области, соответствующей современной видимой части Вселенной, почти на 30 порядков превосходил естественный размер причинно-связанной области на тот момент. Другими словами, в рамках этой теории современная видимая часть Вселенной состоит из

$$[l_{H,0}(t_{Pl}) M_{Pl}]^3 \sim 10^{89}$$

областей, которые не были причинно связаны между собой в начале классической эволюции. Следовательно, как мы уже говорили, естественно было бы ожидать, что в начале классической эволюции относительные флюктуации плотности в этих областях были порядка единицы. Как мы обсуждали в предыдущих Главах этой книги,

на радиационно-доминированной и пылевидной стадиях эти начальные флуктуации только растут. Как же тогда объясняется однородность и изотропия современной Вселенной? В отсутствии ответа на этот вопрос сстоит проблема однородности или проблема горизонта.

По-другому эту проблему можно сформулировать и без обращения к гипотетической планковской эпохе; при этом можно опираться лишь на надёжно установленные наблюдательные данные. В разделе I.3.2 мы определили космологический горизонт $l_H(t)$ как расстояние, пройденное сигналом, испущенным в момент Большого взрыва и распространяющимся со скоростью света. Это расстояние характеризует размер причинно связанный области на момент времени t . Проблема горизонта состоит в том, что расширение Вселенной происходит слишком медленно по сравнению с увеличением размера горизонта, так что в поле зрения наблюдателя все время оказываются новые области Вселенной, которые никогда раньше не были в причинном контакте друг с другом; тем не менее Вселенная является с хорошей точностью однородной на очень больших масштабах. А именно, размер причинно связанный области на момент времени t_1 составляет

$$l_{H,1} = a(t_1) \int_{t_{Pl}}^{t_1} \frac{dt}{a(t)} . \quad (11.4)$$

Сегодня, за счёт расширения Вселенной, эта область имеет размер

$$l_{H,1}(t_0) = a(t_0) \int_{t_{Pl}}^{t_1} \frac{dt}{a(t)} . \quad (11.5)$$

Поскольку в теории горячего Большого взрыва расширение до недавнего времени происходило по закону

$$a(t) \propto t^\alpha ,$$

где $\alpha < 1$ (на радиационно-доминированной и пылевидной стадиях $\alpha = 1/2$ и $\alpha = 2/3$, соответственно), интеграл в (11.5) набирается на верхнем пределе. Следовательно размер $l_{H,1}(t_0)$ значительно меньше размера современного горизонта $l_{H,0}$. Для оценки по порядку величины проигнорируем тот факт, что в течение последнего времени Вселенная расширяется с ускорением, и запишем отношение этих двух размеров в виде

$$\frac{l_{H,0}}{l_{H,1}(t_0)} = \frac{\int_0^{t_0} dt/a(t)}{\int_0^{t_1} dt/a(t)} = \frac{\int_0^{a_0} da/[a^2 H(a)]}{\int_0^{a_1} da/[a^2 H(a)]} \simeq \frac{a(t_1)H(t_1)}{a(t_0)H(t_0)} . \quad (11.6)$$

На пылевидной стадии $a \propto t^{2/3}$, $H \propto t^{-1}$, так что $aH \propto t^{-1/3} \propto a^{-1/2}$, и

$$\frac{l_{H,0}}{l_{H,1}(t_0)} \simeq \sqrt{1 + z(t_1)} .$$

Взяв для примера в качестве момента t_1 момент рекомбинации t_r и вспоминая, что $z_r \approx 1060$, получим, что угол $\Delta\theta_r$, под которым сегодня виден горизонт на момент рекомбинации, оценивается согласно²

$$\frac{1}{\Delta\theta_r} = \frac{l_{H,0}}{l_{H,r}(t_0)} \sim 35 .$$

²Более аккуратная оценка этого угла даёт $(\Delta\theta_r)^{-1} \simeq 50$, см. раздел 2.1.2.

Следовательно, сфера последнего рассеяния, наблюдаемая при измерении анизотропии реликтового излучения, состоит из

$$\left(\frac{l_{H,0}}{l_{H,r}(t_0)} \right)^2 \sim 1000$$

областей, которые не были причинно связаны между собой на момент испускания реликтового излучения. Это проиллюстрировано на рис. 11.1. В теории горячего

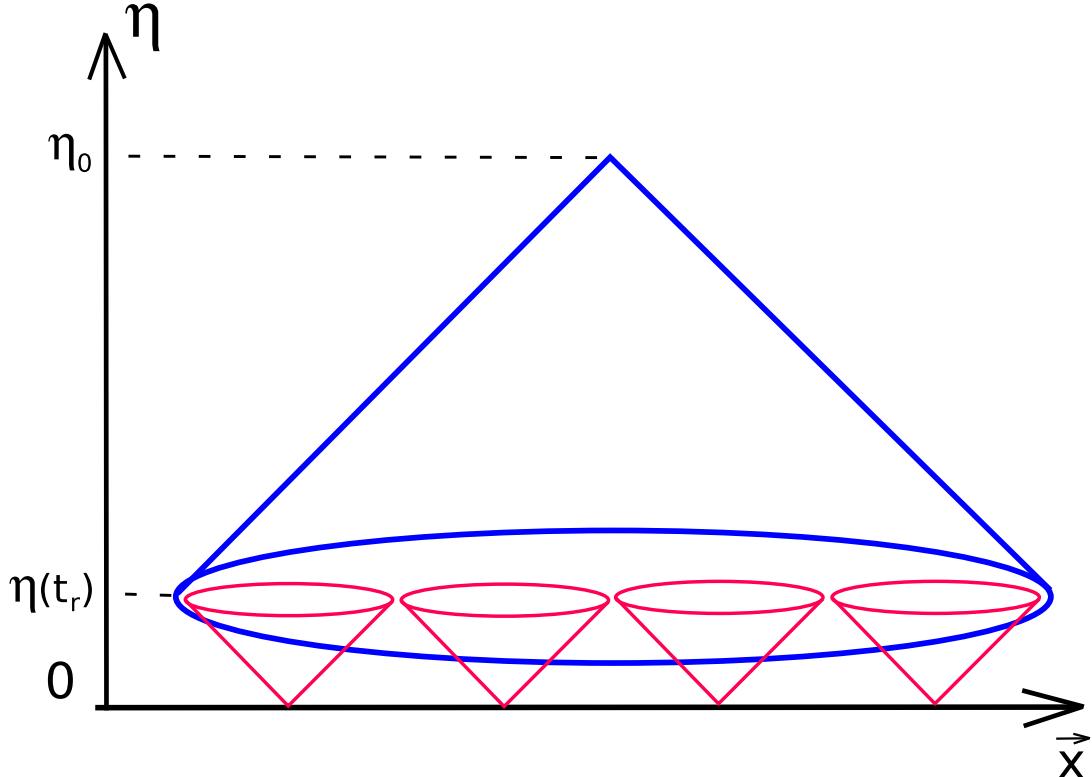


Рис. 11.1: В конформных координатах световые конусы выглядят так же, как в пространстве-времени Минковского. В теории горячего Большого взрыва координатный размер области, причинно связанный на момент рекомбинации t_r , равен $x_H(t_r) = \eta(t_r)$, где $\eta(t_r) \equiv \eta_r = \int_{t_{Pl}}^{t_r} \frac{dt}{a(t)}$. Координатный размер области, из которой приходят реликтовые фотоны к современному наблюдателю, равен $(\eta_0 - \eta_r)$. Количество областей, причинно не связанных между собой к моменту t_r , но видимых сегодня, оценивается как $(\eta_0/\eta_r - 1)^3$ и велико с учётом того, что $\eta_0 \gg \eta_r$. Эта оценка, разумеется, совпадает со сделанной в основном тексте.

Большого взрыва нет никаких оснований ожидать, что температуры фотонов, приходящих из этих причинно несвязанных областей, хоть сколько-нибудь близки между собой. И тем не менее, наблюдаемое реликтовое излучение изотропно с точностью лучше 10^{-4} !

Сформулированная таким образом проблема горизонта, как видно, практически не зависит от физики на планковских масштабах; важно лишь то предположение, что темп расширения ранней Вселенной определяется веществом (релятивистским или нерелятивистским) начиная с самых ранних стадий её классической эволюции.

11.1.2 Проблема плоскостности

Проверим, насколько справедливо ещё одно наше ожидание, а именно, что в планковскую эпоху вклад пространственной кривизны в уравнение Фридмана сравним с другими вкладами. Напомним, что вклад кривизны по абсолютной величине равен a^{-2} , а все вклады вместе равны H^2 . Поэтому наше ожидание состоит в том, что³

$$|\Omega_{curv}(t_{Pl})| \equiv \frac{|\rho_{curv}(t_{Pl})|}{\rho_c(t_{Pl})} = \frac{1}{a^2(t_{Pl})H^2(t_{Pl})} \sim 1. \quad (11.7)$$

Как мы обсуждали в Главе I.4, в настоящее время вклад кривизны в уравнение Фридмана мал

$$|\Omega_{curv}| < 0.02.$$

С другой стороны, этот вклад ведёт себя как

$$\Omega_{curv}(t) \propto \frac{1}{a^2(t)H^2(t)}.$$

При обсуждении проблемы горизонта уже было отмечено, что в модели горячего Большого взрыва отношение (11.6) является быстро падающей функцией времени. Поэтому величина

$$\frac{\Omega_{curv,0}}{\Omega_{curv}(t)} = \frac{[a(t)H(t)]^2}{(a_0H_0)^2} \quad (11.8)$$

велика на ранних стадиях эволюции Вселенной. Так в планковскую эпоху, пренебрегая факторами порядка единицы, имеем

$$\frac{[a(t_{Pl})H(t_{Pl})]^2}{(a_0H_0)^2} \sim \left(\frac{T_0}{M_{Pl}}\right)^2 \left(\frac{M_{Pl}}{H_0}\right)^2 = \frac{T_0^2}{H_0^2} \sim 10^{58}. \quad (11.9)$$

Мы видим, что для того, чтобы модель горячего Большого взрыва действительно воспроизвела наблюдаемую сегодня Вселенную, в неё требуется заложить в качестве начального условия требование

$$|\Omega_{curv}(t_{Pl})| \lesssim 10^{-60}, \quad (11.10)$$

т.е. в начале эволюции пространственная кривизна должна быть на 60 порядков меньше “естественной” оценки, обсуждавшейся выше! Это громадное расхождение между начальным данным, которое необходимо заложить в модель горячей Вселенной, и размерной оценкой называют проблемой плоскостности.

Проблема плоскостности опять-таки не обязательно требует обращения к планковской эпохе. Так, для эпохи нуклеосинтеза (начинающейся с $T_{NS} \sim 1$ МэВ, $t_{NS} \sim 1$ с) имеем оценку

$$\Omega_{curv}(t_{NS}) \sim \left(\frac{a_0H_0}{a(t_{NS})H(t_{NS})}\right)^2 \Omega_{curv,0} \sim \left(\frac{T_{NS}}{T_0}\right)^2 \left(\frac{t_{NS}}{t_0}\right)^2 \Omega_{curv,0} \lesssim 10^{-18}.$$

Таким образом, мы заведомо знаем, что пространственная кривизна в ранней Вселенной была чрезвычайно мала; в теории горячего Большого взрыва такое начальное данное приходится закладывать “руками”.

³В этом, и только в этом разделе мы нарушаем соглашение о том, что величины Ω_λ относятся только к современной эпохе, и используем зависящую от времени величину $\Omega_{curv}(t)$.

Отметим ещё, что величину Ω_{curv} можно воспринимать и как отношение трёхмерной кривизны Вселенной к четырёхмерной её кривизне (при $\Omega_{curv} \ll 1$ четырёхмерный скаляр кривизны по порядку величины равен H^2). С этой точки зрения соотношение (11.10) говорит об огромном (и необъяснимом в рамках теории горячего Большого взрыва) численном различии начальных значений этих в общем-то сходных геометрических величин.

11.1.3 Проблема энтропии

Еще одна проблема, связанная с неестественностью начальных данных в модели горячего Большого взрыва — это проблема энтропии. Мы уже вычисляли энтропию видимой части Вселенной в разделе I.5.2 и получили, что она имеет гигантское значение

$$S_0 \sim 10^{88} .$$

В модели горячего Большого взрыва расширение Вселенной с хорошей точностью является адиабатическим, так что это громадное безразмерное число должно быть заложено в начальные условия расширения. К примеру, в случае замкнутой Вселенной, когда имеет смысл говорить о полной энтропии Вселенной, она должна превышать 10^{88} , тогда как можно было ожидать, что планковская замкнутая Вселенная, родившаяся, например, квантовым образом, имеет полную энтропию порядка числа разных типов частиц (т.е. порядка сотни для Стандартной модели физики частиц).

Легко понять, что эта проблема напрямую связана с проблемой горизонта. Мы уже видели, что видимая сегодня часть Вселенной в планковскую эпоху имела размер на 30 порядков больше планковского. Соответственно и ее энтропия превышает ожидаемое значение на $3 \cdot 30$ порядков величины.

Итак, в теории горячего Большого взрыва нет ответов на вопросы о том, почему Вселенная такая однородная, изотропная, “большая” (пространственно-плоская) и горячая. Наоборот, в рамках этой теории указанные фундаментальные свойства нашей Вселенной выглядят как следствия чрезвычайно неестественных начальных условий.

11.1.4 Проблема первичных неоднородностей

Предыдущее обсуждение указывает на существование физического механизма, ответственного за то, что на самых ранних этапах своей эволюции Вселенная была с хорошей точностью однородной и плоской на масштабах, огромных по сравнению с другими характерными длинами в то время. Тем не менее современная Вселенная не является однородной — в ней имеются структуры, такие как галактики, скопления и сверхскопления галактик, пустоты (“voids”). Как мы обсуждали в предыдущих Главах, существование этих структур, как и наблюдаемой анизотропии реликтового излучения, требует наличия начальных неоднородностей плотности во Вселенной с амплитудами на уровне $\delta\rho/\rho \sim 5 \cdot 10^{-5}$ и спектром, близким к спектру Гаррисона–Зельдовича. В теории горячего Большого взрыва механизма образования этих неоднородностей нет, их приходится закладывать “руками” в качестве начального данного космологической эволюции. В этом состоит проблема первичных неоднородностей, с которой успешно справляется инфляционная теория.

11.2 Инфляция: основная идея

При формулировке проблем горизонта и кривизны существенным обстоятельством был тот факт, что произведение $a(t)H(t)$ является быстро падающей функцией времени для горячей расширяющейся Вселенной. Основная идея инфляции как способа решения проблем теории горячего Большого взрыва состоит в том, что горячей стадии предшествовала инфляционная стадия, на которой произведение $a(t)H(t)$ было растущей функцией времени. Для выполнения этого условия требуется, чтобы масштабный фактор $a(t)$ рос со временем быстрее, чем линейным образом, т.е., чтобы Вселенная расширялась с ускорением. Этим и объясняется происхождение термина “инфляционное расширение”. Технически ускоренное расширение приводит к тому, что интеграл, фигурирующий в (11.4), на инфляционной стадии набирается на нижнем, а не на верхнем пределе, и размер горизонта к моменту разогрева t_{reh} имеет гораздо большее значение, чем в теории горячего Большого взрыва.

Исторически первая разработанная в деталях модель инфляции Старобинского [67, 68] основывается на теории гравитации с лагранжианом, содержащим как первую, так и высшие степени скаляра кривизны. В такой теории уравнение Фридмана модифицируется при больших значениях параметра Хаббла, что приводит к космологическому решению с масштабным фактором, экспоненциально растущим в течение длительного периода эволюции. Имеется в этой модели и механизм постинфляционного разогрева, в результате которого эволюция Вселенной переходит на горячую стадию. С этой точки зрения модель Старобинского является вполне успешной. В этой книге мы, однако, рассмотрим модели, в которых гравитация описывается общей теорией относительности, а инфляционный режим возникает благодаря наличию во Вселенной специфической материи. В действительности в эту категорию попадает и модель Старобинского, поскольку, как мы знаем из раздела I.A.5, теории гравитации с лагранжианами, нелинейными по скаляру кривизны, эквивалентны общей теории относительности со скалярным полем. Мы кратко обсудим модель Старобинского в конце раздела 12.2.

Из результатов раздела I.3.2 следует, что для ускоренного расширения требуется, чтобы вещество, заполняющее Вселенную, имело отрицательное давление

$$p < -\frac{1}{3}\rho . \quad (11.11)$$

- ▷ Задача 1. Строго говоря, в разделе I.3.2 этот результат был получен только для линейного уравнения состояния $p = w\rho$. Докажите, что неравенство (11.11) должно выполняться для ускоренно расширяющейся Вселенной вне зависимости от каких-либо предположений о виде уравнения состояния $p = p(\rho)$.

Далее мы обсудим конкретные модели, в которых Вселенная заполнена материей с таким экзотическим уравнением состояния, пока же просто предположим, что инфляция имела место в промежутке времени от $t \sim t_{Pl}$ до некоторого момента времени t_e (обозначение e , от end, относится к концу инфляции), а потом сменилась горячей стадией с начальной температурой

$$T_{reh} \sim \sqrt{M_{Pl}^* H(t_e)} . \quad (11.12)$$

(от английского “reheating” — разогрев). По существу мы здесь предполагаем, что горячая стадия наступила сразу после окончания инфляции⁴, так что параметр Хаббла, соответствующий температуре разогрева T_{reh} , равен параметру Хаббла в конце инфляции; соотношение (11.12) — это просто уравнение Фридмана, записанное для момента разогрева в рамках такого предположения. Для того, чтобы было выполнено условие (11.7), т.е. была решена проблема плоскостности, требуется (ср. с (11.8))

$$1 \gtrsim \frac{[a(t_{Pl})H(t_{Pl})]^2}{(a_0 H_0)^2} = \frac{[a(t_{Pl})H(t_{Pl})]^2}{[a(t_e)H(t_e)]^2} \frac{[a(t_e)H(t_e)]^2}{(a_0 H_0)^2} \quad (11.13)$$

Другими словами, условием успешной инфляции является

$$\frac{a(t_e)H(t_e)}{a_{Pl}H_{Pl}} \gtrsim \frac{a(t_e)H(t_e)}{a_0 H_0} \sim \frac{T_0}{T_{reh}} \frac{H(t_e)}{H_0}. \quad (11.14)$$

Убедимся, что это же условие оказывается достаточным и для решения проблемы горизонта. Для этого вычислим современный размер области, которая была причинно связанный к моменту окончания инфляции t_e . Воспользуемся (11.5) с $t_1 = t_e$ и получим

$$l_{H,e}(t_0) = a_0 \int_{t_{Pl}}^{t_e} \frac{dt}{a(t)} = a_0 \int_{t_{Pl}}^{t_e} da \frac{1}{Ha^2} \simeq \frac{a_0}{a(t_{Pl})H(t_{Pl})}.$$

Здесь мы учли, что в случае инфляции интеграл набирается на нижнем пределе. Отношение этого размера к размеру видимой части Вселенной оценивается величиной

$$\frac{l_{H,e}(t_0)}{l_{H,0}} \simeq \frac{a_0}{a(t_{Pl})} \frac{H_0}{H(t_{Pl})}.$$

С учётом (11.13) имеем

$$\frac{l_{H,e}(t_0)}{l_{H,0}} \gtrsim 1.$$

Таким образом, вся наблюдаемая Вселенная уже была причинно связана в те эпохи, о которых мы имеем наблюдательные данные, и проблемы горизонта (во второй формулировке) не возникает, см. рис. 11.2.

Обратившись к первой формулировке проблемы горизонта, заметим, что поскольку инфляционная стадия является существенно нетепловой, то последняя оценка в уравнении (11.2) не имеет места. Вместо этого имеем

$$l_{H,0}(t_{Pl}) = \frac{a(t_{Pl})H(t_{Pl})}{a_0 H_0} \frac{H_0}{H(t_{Pl})} l_{H,0} \lesssim \frac{H_0}{H(t_{Pl})} l_{H,0} \lesssim M_{Pl}^{-1},$$

где мы воспользовались неравенством (11.13) и тем, что $H(t_{Pl}) \sim M_{Pl}$. Итак, мы видим, что инфляционная стадия решает проблему горизонта и в первой формулировке: вся наблюдаемая часть Вселенной появилась из области субпланковского размера.

Для грубой оценки необходимой длительности инфляционной стадии запишем условие успешной инфляции (11.14) в виде

$$N_e^{(tot)} > \ln \left(\frac{T_0 H(t_{Pl})}{T_{reh} H_0} \right) \simeq \ln \left(\frac{T_0}{H_0} \right) + \ln \frac{M_{Pl}}{T_{reh}} \quad (11.15)$$

⁴Это — упрощённая картина, которая, впрочем, достаточна для получения оценок по порядку величины, см. обсуждение в конце раздела.

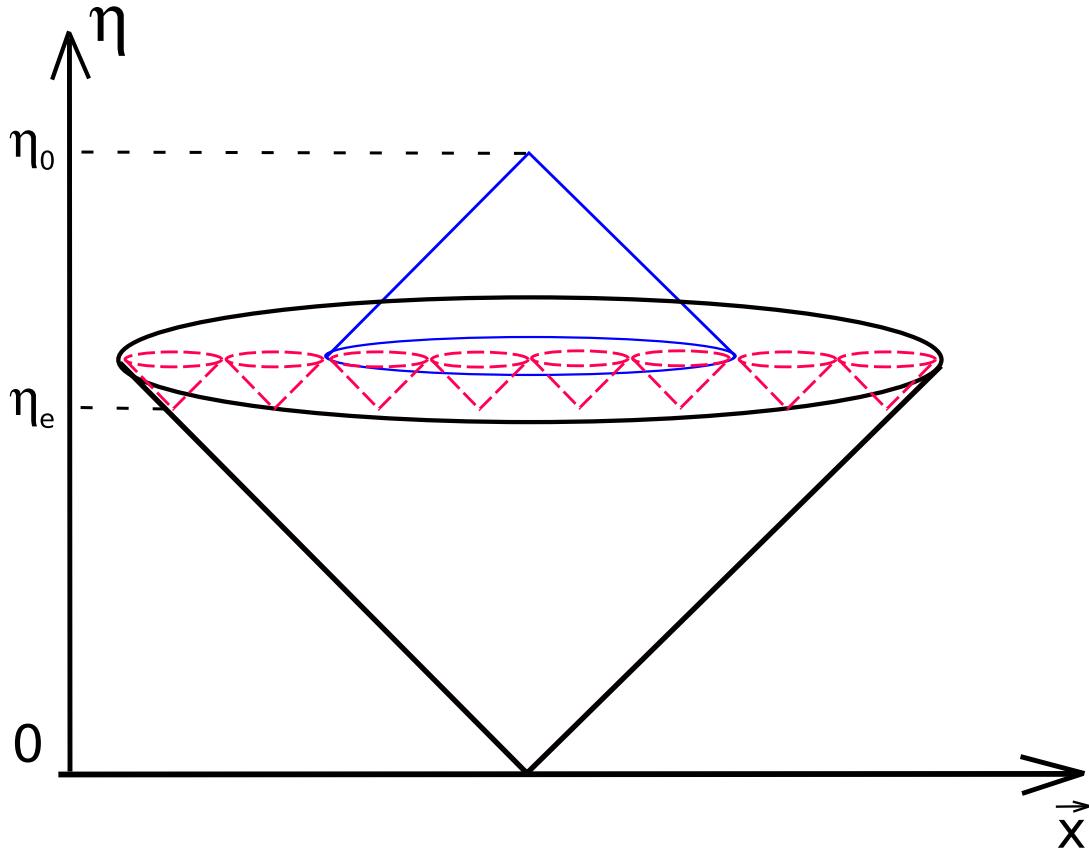


Рис. 11.2: Длительность инфляционной стадии в конформном времени и, соответственно, координатный размер горизонта в инфляционной картине значительно превышают те, которые получились бы в теории горячего Большого взрыва. Инфляция относит конформное время начала эволюции Вселенной далеко назад, сильно увеличивая тем самым размеры причинно связанных областей.

где

$$N_e^{(tot)} = \ln \frac{a(t_e)}{a(t_{Pl})}$$

— полное число так называемых e -фолдингов в течение инфляции. Последнее название связано с тем, что Вселенная растягивается за время инфляции в $\exp[N_e^{(tot)}]$ раз. Отметим, что величину $N_e^{(tot)}$ можно оценить как

$$N_e^{(tot)} = \int_{t_{Pl}}^{t_e} H(t) dt \sim H_{infl} \cdot \Delta t_{infl}, \quad (11.16)$$

где H_{infl} — характерное для инфляционной стадии значение параметра Хаббла, а Δt_{infl} — полная длительность инфляции. Входящую под знак первого логарифма в (11.15) величину мы уже оценивали (см. (11.9)), так что условие (11.15) имеет вид

$$N_e^{(tot)} > N_e^{(min)} \simeq 67 + \ln \frac{M_{Pl}}{T_{reh}}. \quad (11.17)$$

Поэтому для температур разогрева T_{reh} в диапазоне от M_{Pl} до 1 ТэВ имеем

$$N_e^{(min)} \simeq 70 - 100. \quad (11.18)$$

Видно, что для решения проблем горизонта и плоскостности достаточно, чтобы длительность инфляции составляла всего $70 - 100$ хаббловских времён той эпохи, то есть она может быть весьма малой. Действительно, из грубой оценки

$$H_{infl} \sim H(t_e) \sim \frac{T_{reh}^2}{M_{Pl}}$$

получим, что минимальная длительность инфляции составляет

$$\Delta t_{infl}^{(min)} \sim 10^{-42} - 10^{-9} \text{ с}$$

для $T_{reh} = M_{Pl} - 1$ ТэВ. За такое короткое время Вселенная успевает растянуться настолько, что области первоначально планковского размера становятся космологически большими.

Сделаем в связи со сказанным несколько замечаний. Во-первых, при получении оценки (11.18) мы не учитывали, что в реалистических моделях между инфляцией и эпохой горячей Вселенной имеет место стадия пост-инфляционного разогрева, которая длится, вообще говоря, много хаббловских времён. Из-за этого наша оценка $N_e^{(min)}$ оказывается несколько завышенной. Традиционно приводят оценку

$$N_e^{(min)} \simeq 60$$

и говорят о шестидесяти необходимых e -фолдингах, хотя реальное число в действительности зависит от выбора модели.

Во-вторых, правая часть в (11.15) даёт оценку для *минимального* числа e -фолдингов, необходимых для решения проблем горизонта и плоскостности. Вообще говоря, нет никаких оснований думать, что реальное число e -фолдингов совпадает с минимальным; наоборот, это требовало бы тонкой подстройки параметров. Без такой подстройки выполняется

$$N_e^{(tot)} \gg N_e^{(min)} .$$

Отсюда следует важное предсказание о том, что пространственная кривизна современной Вселенной заметно меньше той, что соответствует наблюдательному ограничению, то есть⁵

$$\Omega_{curv} \ll 0.02 .$$

Обнаружение отличной от нуля пространственной кривизны стало бы серьёзным аргументом против инфляционной теории, по крайней мере в простых её версиях.

В-третьих, в предыдущих рассуждениях мы произвольным образом считали моментом начала инфляции планковский момент t_{Pl} . Это совершенно не обязательно; приведённые оценки мало изменяются, если в качестве момента начала инфляции выступает некоторый момент времени $t_i \gg t_{Pl}$, при этом начальное значение параметра Хаббла может быть заметно меньше M_{Pl} (возможно, на несколько, а то и много порядков).

Далее, мы пока ничего не говорили о проблеме энтропии. Тем не менее, ясно, что инфляция даёт возможность решения и этой проблемы. В реалистических моделях после окончания инфляции и пост-инфляционного разогрева во Вселенной устанавливается высокая температура, что автоматически означает, что необходимая энтропия на горячей стадии действительно имеется. В то же время, механизмы,

⁵Мы возвращаемся к соглашению о том, что величины Ω_λ относятся только к современной эпохе.

приводящие к инфляции, отнюдь не требуют, чтобы во Вселенной в начале инфляционной стадии имелась большая энтропия. Энтропия генерируется во время пост-инфляционного разогрева, когда энергия вакуумоподобной материи, не несущей высокой энтропии, трансформируется в тепло. Иными словами, пост-инфляционный разогрев представляет собой процесс, сильно неравновесный с точки зрения термодинамики; он и приводит к производству энтропии во Вселенной.

Мы увидим в Главе 13, каким образом инфляционная теория решает проблему начальных неоднородностей. Здесь отметим, что инфляция часто помогает решить другие космологические проблемы, появляющиеся в моделях физики частиц. Так, например, гипотеза о Большом объединении, состоящая в том, что калибровочные группы электромагнитных, слабых и сильных взаимодействий являются подгруппами простой группы единого калибровочного взаимодействия, спонтанно нарушенной на высоком энергетическом масштабе $M_{GUT} \sim 10^{16}$ ГэВ, приводит к выводу о существовании магнитных монополей — стабильных частиц с отличным от нуля магнитным зарядом и массой порядка 10^{16} ГэВ. Эти частицы должны были бы рождаться при температурах порядка M_{GUT} . Модели с монополями обсуждались в разделе I.12.2; приведённые там вычисления показывают, что плотность их массы сейчас заметно превышала бы критическую плотность. Однако, если температура разогрева Вселенной после инфляции T_{reh} была ниже чем M_{GUT} , то такие частицы вообще никогда не рождались на горячей стадии, а если какое-то их количество было произведено до инфляции, то инфляционное расширение привело к тому, что их плотность стала пренебрежимо малой. Исторически проблема монополей была одной из сильных мотивировок первых инфляционных моделей.

Глава 12

Инфляция в режиме медленного скатывания

12.1 Условия медленного скатывания

Обсудим теперь, как можно реализовать физические условия, необходимые для успешной инфляции. Для этого прежде всего нам требуется понять, какой тип материи может иметь отрицательное давление. Один пример уже обсуждался в разделе I.3.2.3. А именно, мы говорили, что если вакуумное состояние характеризуется ненулевым тензором энергии-импульса, то этот тензор равен

$$T_{\mu\nu} = \rho_{vac} g_{\mu\nu},$$

где ρ_{vac} — плотность энергии вакуума. Другими словами, уравнение состояния вакуума имеет вид

$$p = -\rho.$$

С таким уравнением состояния масштабный фактор меняется по закону

$$a(t) = \text{const} \cdot e^{H_{vac} t}, \quad (12.1)$$

где параметр Хаббла H_{vac} не зависит от времени и равен

$$H_{vac} = \sqrt{\frac{8\pi}{3} \frac{\rho_{vac}}{M_{Pl}^2}}.$$

Если во Вселенной с ненулевой вакуумной энергией имеется также и обычное вещество, то со временем расширение всё равно будет описываться экспоненциальным законом (12.1), поскольку плотность энергии вакуума остается постоянной при расширении Вселенной, а плотность энергии вещества падает. Таким образом, предположение о том, что вакуум обладает положительной энергией, естественным образом приводит к инфляционному расширению. Однако, ещё необходим механизм, прекращающий инфляцию, в результате которого Вселенная разогревается и переходит в горячую стадию. Таким механизмом может быть распад скалярного поля.

Исторически первая из моделей инфляции, в которых явно используется скалярное поле, была основана на скалярном поле с потенциалом, изображенном на рис. 12.1 (“старая инфляция” Гута [69]). У этого потенциала имеется два минимума. Один из них ($\phi = \phi_0$) имеет нулевую энергию и отвечает истинному вакууму, в котором

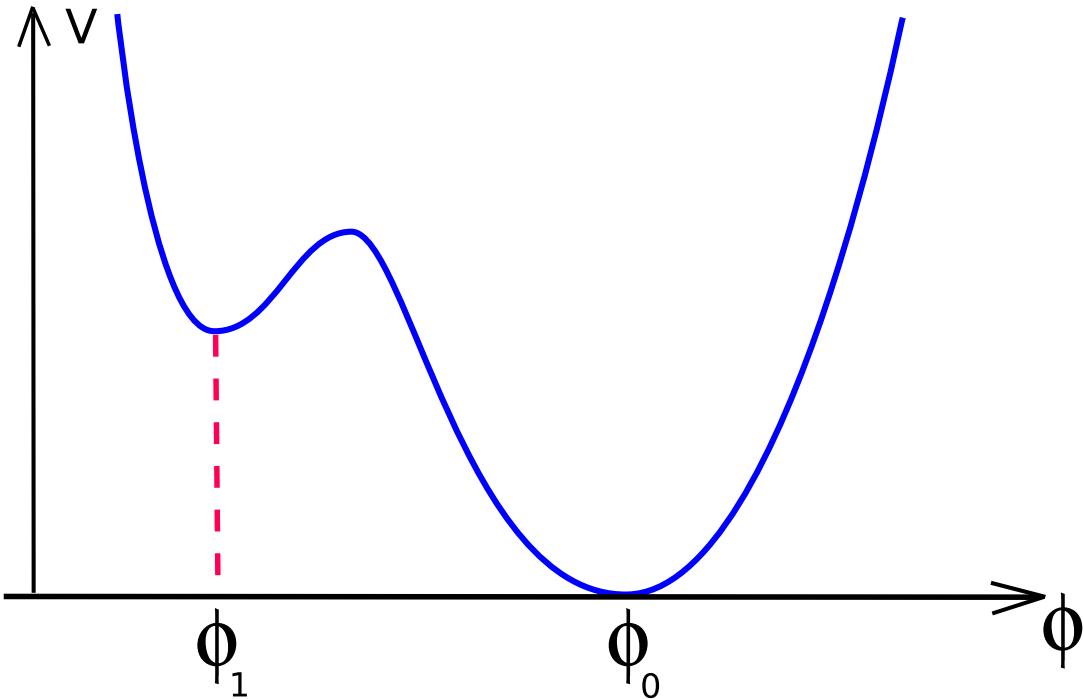


Рис. 12.1: Скалярный потенциал в модели с ложным вакуумом.

мы сейчас и находимся¹. Другой минимум соответствует метастабильному вакууму с ненулевой плотностью энергии

$$\rho_{vac} = V(\phi_1).$$

Старая инфляция основана на предположении², что первоначально Вселенная находилась в ложном вакууме с $\phi = \phi_1$. По мере расширения плотность энергии, связанная с возможным наличием частиц в этом вакууме, падала, и в какой-то момент началась инфляционная стадия со значением хаббловского параметра, определяемым вакуумной плотностью энергии ρ_{vac} . Ложный вакуум нестабилен и распадается за счет процесса квантового туннелирования, приводящего к образованию пузырей, заполненных истинным вакуумом и расширяющихся со скоростью света — Вселенная “закипает”. Предполагалось, что разогрев Вселенной происходит за счет столкновений стенок пузырьков, приводящих к разрушению этих стенок, в результате чего рождаются частицы, а кинетическая энергия стенок переходит в тепло. Однако для реализации достаточно длительной инфляционной стадии в этой модели требуется, чтобы скорость образования пузырей в единицу времени в единице (физического) объема Γ была заметно меньше, чем параметр H_{vac}^4 , характеризующий темп инфляционного расширения Вселенной. В такой ситуации оказывается, что разбегание пузырьков друг от друга, связанное с инфляционным расширением Вселенной в ложном вакууме, препятствует успешной реализации механизма разогрева, описанного выше: вместо того, чтобы сближаться, стенки различных пузырей удаляются

¹ Современной плотностью тёмной энергии пренебрегаем ввиду её малости.

² Это предположение выполнено, например, если до инфляции во Вселенной была горячая стадия, а ϕ — это поле типа поля Хиггса. Тогда при высоких температурах эффективный потенциал для ϕ имеет единственный минимум при $\phi = \phi_1 = 0$, см. раздел I.10.2, и поле ϕ изначально находится в этом минимуме. По мере остывания Вселенной появляется второй минимум эффективного потенциала, но по предположению фазовый переход не успевает произойти до начала инфляции.

друг от друга из-за экспоненциального расширения Вселенной, столкновений между стенками в действительности не происходит, и Вселенная не разогревается. Модель Гута с разогревом за счёт столкновений стенок не работает.

▷ *Задача 1.* Пусть старая инфляция началась в момент времени t_i . Пусть во Вселенной имеются сопутствующие наблюдатели, однородно распределённые в пространстве. Показать, что относительное количество наблюдателей, остающихся в ложном вакууме в момент времени $t > t_i$ равно³

$$P(t) = \exp \left[-\frac{4\Gamma\pi}{3} \int_{t_i}^t dt' a^3(t') \left(\int_{t'}^t \frac{dt''}{a(t'')} \right)^3 \right]. \quad (12.2)$$

При выводе формулы (12.2) считать, что начальный размер пузыря пре-небрежимо мал. Пользуясь этим результатом показать, что для успешной повсеместной инфляции (т.е. такой, что масштабной фактор для большинства наблюдателей успевает вырасти по крайней мере в e^{60} раз) требуется

$$\Gamma \lesssim 0.004 H_{vac}^4.$$

Существует, однако, еще более простой класс моделей, приводящих и к инфляционному расширению, и к разогреву Вселенной после инфляции. Для того, чтобы описать механизм медленного скатывания (“slow roll”), лежащий в основе этого класса моделей, рассмотрим классические уравнения, описывающие динамику скалярного поля в расширяющейся Вселенной. Действие для скалярного поля, минимально взаимодействующего с гравитацией, имеет вид

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \mathcal{L} = \int d^4x \sqrt{-g} \left[\frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - V(\phi) \right], \quad (12.3)$$

а тензор энергии-импульса равен

$$T_{\mu\nu} = \frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S}{\delta g^{\mu\nu}} = \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - g_{\mu\nu} \mathcal{L}. \quad (12.4)$$

Рассмотрим случай однородного скалярного поля и пространственно-плоской Вселенной. Считая, что метрика имеет стандартную форму Фридмана–Робертсона–Уокера (11.1), получаем из действия (12.3) следующее уравнение движения

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + V'(\phi) = 0. \quad (12.5)$$

При этом тензор энергии-импульса по форме совпадает с тензором энергии-импульса идеальной жидкости, а плотность энергии и давление имеют вид

$$\rho = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V(\phi), \quad (12.6)$$

$$p = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - V(\phi). \quad (12.7)$$

В качестве второго уравнения, описывающего нашу систему, используем уравнение Фридмана

$$H^2 = \frac{8\pi}{3M_{Pl}^2} \left(\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V(\phi) \right). \quad (12.8)$$

³Мы избегаем здесь говорить о вероятности, поскольку её определение в данном контексте — это тонкий вопрос.

Уравнение (12.5) имеет простую физическую аналогию — это уравнение описывает механическое скатывание в потенциальной яме с профилем $V(\phi)$ с зависящим от времени коэффициентом трения, равным $3H$. Инфляция в режиме медленного скатывания возникает, когда член $3H\dot{\phi}$, соответствующий трению в уравнении (12.5), доминирует над членом с ускорением, т.е. когда

$$\left| \frac{\ddot{\phi}}{3H\dot{\phi}} \right| \ll 1 . \quad (12.9)$$

При этом условии поле ϕ медленно (из-за сильного “хаббловского трения”) смещается в сторону уменьшения потенциала. Еще одним условием медленного скатывания является возможность пренебречь кинетической энергией по сравнению с потенциальной в уравнении (12.8),

$$\frac{\dot{\phi}^2}{2V(\phi)} \ll 1 . \quad (12.10)$$

Данное условие обеспечивает выполнение приближённого равенства

$$p \approx -\rho ,$$

которое соответствует вакуумоподобной материи и достаточно для инфляции.

При выполнении условий (12.9) и (12.10) система уравнений (12.5), (12.8) принимает следующий простой вид

$$\dot{\phi} = -\frac{1}{3H}V'(\phi) , \quad (12.11)$$

$$H = \frac{1}{M_{Pl}} \left(\frac{8\pi V}{3} \right)^{1/2} . \quad (12.12)$$

Из уравнения (12.12) следует, что в режиме медленного скатывания зависимость масштабного фактора $a(t)$ от времени описывается выражением

$$a(t) = a_i \exp \left(\int_{t_i}^t H(t') dt' \right) = a_i \exp \left[\left(\frac{8\pi}{3M_{Pl}^2} \right)^{1/2} \int_{t_i}^t [V(\phi(t))]^{1/2} dt \right] , \quad (12.13)$$

где индекс i относится к началу инфляции. Для того чтобы убедиться, что такое решение описывает расширение, близкое к экспоненциальному, вычислим величину \dot{H}/H^2 . Взяв производную от обеих частей уравнения (12.12), получим

$$\dot{H} = \frac{1}{2M_{Pl}} \left(\frac{8\pi}{3V} \right)^{1/2} V'(\phi) \dot{\phi} . \quad (12.14)$$

Теперь, взяв отношение выражений (12.14) и (12.12) и выразив $V'(\phi)$ с помощью уравнения (12.11), получаем

$$\frac{\dot{H}}{H} = \frac{1}{2} \frac{V'}{V} \dot{\phi} = -\frac{3}{2} \frac{\dot{\phi}^2}{V} H .$$

Следовательно, из условия (12.10) вытекает, что

$$\left| \frac{\dot{H}}{H^2} \right| = 3 \frac{\dot{\phi}^2}{2V} \ll 1 . \quad (12.15)$$

Это и означает, что в режиме медленного скатывания Вселенная расширяется экспоненциально с точностью до малых поправок: параметр Хаббла не успевает заметно измениться за хаббловское время.

Это же утверждение можно сформулировать и несколько иным образом. Согласно нашему первоначальному определению, инфляционный режим имеет место при росте со временем произведения (aH) . Для производной этой величины запишем

$$\frac{1}{a} \frac{d}{dt}(aH) = H^2 + \dot{H} .$$

С учётом (12.15) мы видим, что (aH) действительно растёт в режиме медленного скатывания.

Рассмотрим теперь, какие ограничения накладывают условия (12.9) и (12.10) на скалярный потенциал $V(\phi)$. Подставив значение параметра Хаббла из уравнения (12.12) в уравнение (12.11), найдем следующее выражение для скорости скатывания $\dot{\phi}$:

$$\dot{\phi} = -\frac{M_{Pl}}{(24\pi)^{1/2}} \frac{V'}{V^{1/2}} . \quad (12.16)$$

Теперь условие (12.10) можно переписать в виде

$$\frac{M_{Pl}^2}{48\pi} \left(\frac{V'}{V} \right)^2 \ll 1 . \quad (12.17)$$

Взяв производную по времени от обеих частей уравнения (12.16), получаем

$$\ddot{\phi} = -\frac{M_{Pl}}{(24\pi)^{1/2}} \left(\frac{V''}{V^{1/2}} - \frac{1}{2} \frac{V'^2}{V^{3/2}} \right) \dot{\phi} = -\frac{M_{Pl}^2}{8\pi} \left(\frac{V''}{V} - \frac{1}{2} \left(\frac{V'}{V} \right)^2 \right) H \dot{\phi} , \quad (12.18)$$

где во втором равенстве мы воспользовались уравнением (12.12). Учитывая условие (12.17), мы видим, что для выполнения неравенства (12.9) требуется

$$\left| \frac{V''}{V} \right| \ll \frac{24\pi}{M_{Pl}^2} . \quad (12.19)$$

Таким образом, для реализации режима медленного скатывания, приводящего к квазиэкспоненциальному расширению Вселенной, скалярный потенциал должен удовлетворять условиям (12.17) и (12.19). Обычно эти условия называются условиями медленного скатывания (“slow roll conditions”).

Традиционно используются следующие параметры медленного скатывания:

$$\epsilon = \frac{M_{Pl}^2}{16\pi} \left(\frac{V'}{V} \right)^2 \quad (12.20)$$

$$\eta = \frac{M_{Pl}^2}{8\pi} \frac{V''}{V} . \quad (12.21)$$

Значения этих параметров в конкретных моделях инфляции существенны для предсказаний свойств скалярных и тензорных возмущений, генерируемых на инфляционной стадии (см. Главу 13), поэтому мы будем довольно подробно обсуждать зависимость ϵ и η от формы скалярного потенциала. В терминах этих параметров условия

медленного скатывания имеют простой вид⁴,

$$\epsilon \ll 1, \quad \eta \ll 1, \quad (12.22)$$

а величины, включающие производные по времени, выражаются через эти параметры:

$$\frac{\dot{\phi}^2}{2V} = \frac{\epsilon}{3}, \quad \frac{\dot{H}}{H^2} = -\epsilon, \quad \frac{\ddot{\phi}}{H\dot{\phi}} = \epsilon - \eta.$$

Отметим, что параметры ϵ и η зависят от времени, поскольку во время инфляции поле ϕ , хотя и медленно, но меняется.

Итак, при выполнении условий (12.22) поле ϕ медленно скатывается вдоль потенциала $V(\phi)$, его скорость $\dot{\phi}$, как и параметр Хаббла H , мало меняется за хаббловское время, уравнение состояния близко к вакуумному, и Вселенная испытывает инфляционное расширение с зависимостью масштабного фактора от времени, близкой к экспоненциальной.

▷ *Задача 2. В низшем нетривиальном порядке по параметрам медленного скатывания ϵ и η найти выражения для параметра w , фигурирующего в уравнении состояния $p = w\rho$, и его относительного изменения за хаббловское время.*

12.2 Модели инфляции

В дальнейшем мы будем называть поле ϕ , дающее доминирующий вклад в тензор энергии-импульса во время инфляции, инфлатоном. В этом разделе мы рассмотрим некоторые примеры скалярных потенциалов, для которых в течение достаточно длительного периода эволюции реализуются условия медленного скатывания, а затем инфляция заканчивается, и Вселенная переходит на горячую стадию. Подчеркнём, что эти примеры далеко не исчерпывают всех возможностей. Они, однако, отличаются простотой и в то же время дают представление о возможных особенностях эволюции инфлатона и масштабного фактора в режиме медленного скатывания. Названия соответствующих инфляционных моделей иногда отражают суть дела, но нередко носят исторический характер, как, например, “старая инфляция”, которую мы кратко обсуждали в начале раздела 12.1.

12.2.1 Инфляция с большим полем (“хаотическая инфляция”)

Условия медленного скатывания (12.17) и (12.19) требуют, чтобы потенциал инфлатона медленно менялся как функция ϕ , если измерять значения поля в планковских единицах. На первый взгляд может показаться, что эти условия сильно ограничивают форму инфлатонного потенциала. Чтобы продемонстрировать, что это не так, рассмотрим инфлатон с простым степенным потенциалом рис. 12.2,

$$V = g\phi^n \quad (12.23)$$

⁴В действительности фигурирующие здесь сильные неравенства являются не такими уж сильными: в большинстве конкретных моделей инфляция продолжается до тех пор, пока $\epsilon, \eta \lesssim 1$ и заканчивается тогда, когда хотя бы один из этих параметров становится близким к 1.

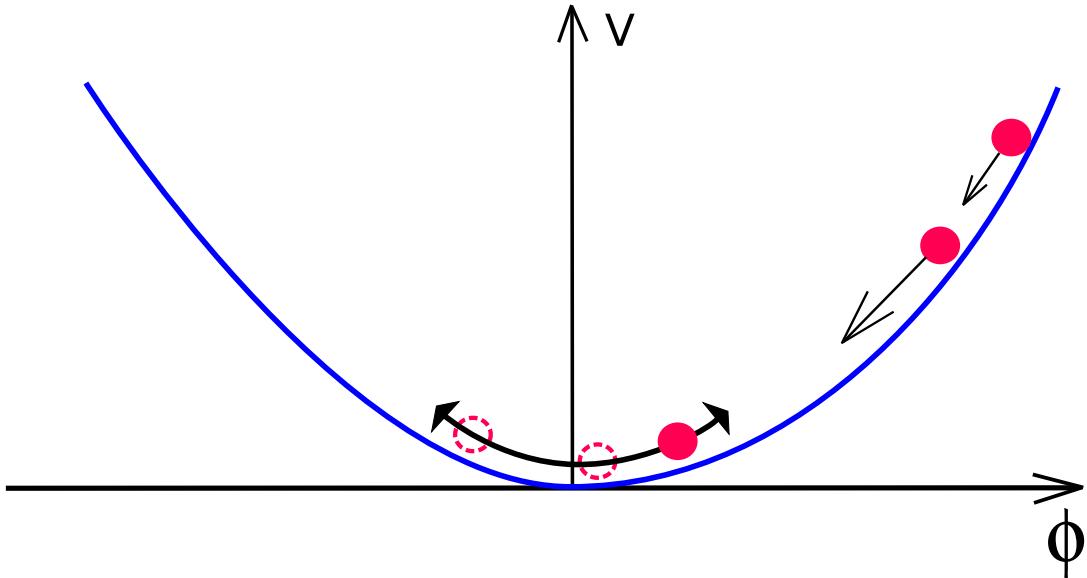


Рис. 12.2: Потенциал инфлатона в модели с большим полем. Кружками показаны значения инфлатонного поля на различных стадиях эволюции.

Константа взаимодействия g имеет размерность

$$[g] = (\text{масса})^{4-n}.$$

Видно, что для потенциала вида (12.23) условия медленного скатывания всегда выполнены при достаточно больших значениях поля инфлатона,

$$\phi \gg \frac{nM_{Pl}}{4\sqrt{3\pi}} \quad (12.24)$$

Таким образом, медленное скатывание происходит при значениях поля, больших в планковских единицах. Это не означает, тем не менее, что описание динамики в рамках классической теории скалярного поля и классической теории гравитации невозможно. Действительно, условием малости эффектов квантовой гравитации является малость плотности энергии в планковских единицах,

$$V(\phi) \ll M_{Pl}^4. \quad (12.25)$$

Это условие выполнено для значений скалярного поля

$$\phi \ll g^{-1/n} M_{Pl}^{4/n}. \quad (12.26)$$

Сравнивая условия (12.24) и (12.26), мы видим, что если константа взаимодействия g достаточно мала в планковских единицах, то имеется широкая область значений скалярного поля, где можно пользоваться классическими уравнениями Эйнштейна и, одновременно, реализуется режим медленного скатывания,

$$\frac{nM_{Pl}}{4\sqrt{3\pi}} \ll \phi \ll \left(\frac{M_{Pl}^4}{g}\right)^{1/n}. \quad (12.27)$$

В дальнейшем, при обсуждении генерации первичных возмущений мы увидим, что константа связи g действительно должна быть весьма малой (в планковских единицах) для того, чтобы амплитуда этих возмущений принимала реалистические значения, так что вся картина является в этом смысле согласованной.

Наиболее простые и привычные степенные потенциалы — это квадратичный и четвёртого порядка:

$$V_2(\phi) = \frac{m^2}{2}\phi^2, \quad (12.28)$$

$$V_4(\phi) = \frac{\lambda}{4}\phi^4, \quad (12.29)$$

при этом константа m имеет размерность массы, а константа λ безразмерна. Для них условия малости константы g имеют следующий вид:

$$m \ll M_{Pl}, \quad \lambda \ll 1,$$

а условия медленного скатывания выполняются при

$$\phi \gg \frac{M_{Pl}}{\sqrt{3\pi}}$$

(здесь мы опустили малосущественные факторы порядка единицы). Отметим, что записав выражения (12.28) и (12.29), или в общем случае (12.23), мы в действительности считаем, что они описывают главные вклады в потенциал $V(\phi)$ при $\phi \gg M_{Pl}$; если в потенциале имеются другие члены, то они должны быть пренебрежимо малыми при сверх-планковских значениях инфлатонного поля.

Опишем теперь сценарий начала инфляции, основанный на приведённом выше наблюдении. А именно, пусть “вначале” Вселенная была такой, как описано в разделе 11.1 — сильно неоднородной на масштабах больше l_{Pl} , сильно искривлённой (радиус пространственной кривизны везде также был порядка M_{Pl}^{-1}), с высокой плотностью энергии, $\rho \sim M_{Pl}$. Предположим также, что среди других полей в теории имеется инфлатон со степенным потенциалом, удовлетворяющим условию медленного скатывания при достаточно больших значениях поля ϕ . Тогда для планковской эпохи наши ожидания состоят в том, что естественными значениями для поля инфлатона являются значения вблизи верхней границы интервала, указанного в (12.27), т.е., когда поле имеет плотность потенциальной энергии планковского масштаба. Отличие от однородной ситуации, обсуждавшейся выше, состоит в том, что поле ϕ , вообще говоря, также сильно флюктуирует в пространстве, так что вклад градиентных членов $\partial_i\phi\partial_j\phi$ в тензор энергии-импульса (и вклад $\partial_i\partial_j\phi$ в уравнение поля), вообще говоря, сравним с вкладом потенциала. Кроме того, существенен также и вклад кривизны в уравнение Фридмана, который мы до сих пор не учитывали. Однако, заметим, что оба эти вклада пропорциональны $1/a^2$ и, следовательно, падают с расширением Вселенной, в то время как вклад потенциального члена остается почти постоянным. Естественно ожидать, что в такой хаотической Вселенной может существовать (или возникнуть в результате флюктуации) область, имеющая размер, несколько больше планковского, где в результате флюктуации вклады градиентных членов и кривизны оказались несколько (не обязательно сильно!) меньше вклада потенциального члена. Тогда такая область начнет расширяться и быстро выйдет на инфляционный режим, описанный выше. В связи с тем, что необходимые для начала инфляции начальные данные предполагаются в таком сценарии возникшими случайно, этот сценарий, предложенный А.Д. Линде [70], называют сценарием хаотической инфляции.

Инфляция будет продолжаться до тех пор, пока поле инфлатона не скатится до нижней границы интервала, указанного в (12.27). После этого член с хаббловским

трением $3H\dot{\phi}$ будет, наоборот, мал по сравнению с членом $\ddot{\phi}$ в уравнении (12.23), и поле инфлатона начнёт быстро осциллировать вблизи минимума потенциала $V(\phi)$. Быстрые осцилляции поля ϕ приводят к рождению частиц, так что энергия классического поля переходит в энергию частиц; для этого, разумеется, требуется, чтобы инфлатон так или иначе взаимодействовал с обычными частицами. Эти частицы в дальнейшем термализуются, и Вселенная переходит в горячую стадию расширения. Динамика пост-инфляционного разогрева, в результате которого энергия инфлатона переходит в тепло, весьма сложна и интересна; некоторые её аспекты мы обсудим в Главе 15. Здесь для нас достаточно интуитивно понятного представления о том, что сильно нестационарные процессы, начинающиеся с быстрых осцилляций когерентного инфлатонного поля, в конце концов приводят к установлению термодинамического равновесия в горячей Вселенной.

Ограничение сверху на начальную температуру T_{reh} образовавшейся плазмы можно получить, учтя, что энергия плазмы не может превышать всю потенциальную энергию, имевшуюся у инфлатона в конце инфляции,

$$T_{reh}^4 \lesssim T_{max}^4 \sim \frac{1}{g_*} V(\phi \approx M_{Pl}) , \quad (12.30)$$

где g_* , как обычно, обозначает эффективное число степеней свободы в космической плазме, в данном случае сразу после пост-инфляционного разогрева. Из (12.25) видно, что эта температура всегда существенно ниже, чем M_{Pl} . Типичной, впрочем, является ситуация, когда пост-инфляционный разогрев протекает достаточно медленно, так что Вселенная успевает значительно расширяться в ходе разогрева. В результате температура T_{reh} в конкретных моделях обычно оказывается на несколько порядков ниже правой части (12.30).

Теперь мы можем подробнее описать решение проблемы энтропии, предлагаемое инфляцией. Во время инфляции материя во Вселенной не обладает энтропией, зато обладает значительной плотностью энергии, которая медленно уменьшается по мере расширения. В конце инфляции эта энергия переходит в тепловую в очень большом объеме, образовавшемся в результате инфляционного расширения, что приводит к громадному увеличению энтропии.

Таким образом, описанный сценарий хаотической инфляции дает следующую космологическую картину. Изначально Вселенная заполнена веществом планковской плотности и, вообще говоря, плохо описывается законами классической физики, так что даже обычные представления о классическом пространстве-времени здесь неприменимы. Некоторые кластеры этой квантовой Вселенной, первоначально имевшие почти планковский размер, “раздулись” за счет инфляции. Наблюдаемая нами сейчас область Вселенной и занимает часть одного из таких “раздутых” кластеров.

Оценим полную длительность инфляции и полное число e -фолдингов в таком сценарии. Для дальнейшего полезно обсудить более общий вопрос, а именно, найти количество e -фолдингов $N_e(\phi)$, набирающихся до конца инфляции с того момента, когда поле инфлатона принимает значение ϕ . Мы увидим в Главе 13, что особый интерес представляет случай $N_e \simeq 50\text{-}60$. В духе определения, данного в разделе 11.2, запишем

$$N_e(\phi) = \ln \frac{a_e}{a(\phi)} ,$$

где a_e — значение масштабного фактора ко времени окончания инфляции t_e , $a(\phi)$ — значение масштабного фактора в тот момент t_ϕ на инфляционной стадии, когда

поле инфлатона принимает значение ϕ . Согласно основному определению параметра Хаббла имеем (ср. с (11.16))

$$N_e(\phi) = \int_{t_\phi}^{t_e} H(t) dt .$$

Используем теперь последовательно уравнения (12.11) и (12.12), справедливые на инфляционной стадии в режиме медленного скатывания, и получим

$$N_e(\phi) = \int_\phi^{\phi_e} H(\phi) \frac{d\phi}{\dot{\phi}} = \int_{\phi_e}^\phi 3H^2 \frac{d\phi}{V'} = \frac{8\pi}{M_{Pl}^2} \int_{\phi_e}^\phi \frac{V}{V'} d\phi , \quad (12.31)$$

где ϕ_e — значение поля инфлатона к концу инфляции. Для степенных потенциалов (12.23) имеем задолго до конца инфляции, то есть при

$$\phi \gg \phi_e , \quad (12.32)$$

следующее окончательное выражение:

$$N_e(\phi) = \frac{4\pi}{n} \frac{\phi^2}{M_{Pl}^2} . \quad (12.33)$$

Помимо всего прочего, из последней формулы следует, что интересному числу e -фолдингов $N_e = 50-60$ действительно соответствуют сверх-планковские поля,

$$\phi(N_e) = \sqrt{\frac{n N_e}{4\pi}} \cdot M_{Pl} \quad (12.34)$$

$$= (2.8 - 3.1) \cdot M_{Pl} , \quad n = 2 , \quad N_e = 50 - 60 \quad (12.35)$$

$$= (4.0 - 4.4) \cdot M_{Pl} , \quad n = 4 , \quad N_e = 50 - 60 . \quad (12.36)$$

Для дальнейшего полезно отметить, что для степенных потенциалов выполняются простые соотношения между параметрами медленного скатывания и числом e -фолдингов до конца инфляции:

$$\epsilon = \frac{n}{4N_e} , \quad (12.37)$$

$$\eta = \frac{n-1}{2N_e} . \quad (12.38)$$

Эти соотношения следуют из определений (12.20), (12.21) и формулы (12.33); они выполняются для каждого момента времени задолго до конца инфляции, когда справедливо (12.32).

Возвращаясь к оценке полного числа e -фолдингов, будем считать, в соответствии с описанным сценарием, что инфляция началась тогда, когда плотность потенциальной энергии инфлатона была порядка планковской, $V(\phi_i) \sim M_{Pl}^4$. Тогда для степенных потенциалов (12.23) имеем

$$\phi_i \sim g^{-1/n} M_{Pl}^{4/n} \quad (12.39)$$

и

$$N_e^{(tot)} = N_e(\phi_i) = \frac{4\pi}{n} \left(\frac{M_{Pl}^{4-n}}{g} \right)^{2/n} . \quad (12.40)$$

Видно, что если константа связи мала в планковских единицах, то полное число e -фолдингов велико, что и требуется для успешной реализации инфляционного механизма. В реалистичных моделях, приводящих к генерации начальных возмущений плотности с правильной амплитудой, правая часть (12.40) весьма велика, и масштабный фактор растягивается за время инфляции в огромное число раз.

В качестве примеров рассмотрим потенциалы второго и четвёртого порядка, (12.28) и (12.29), для которых $n = 2$, $g = m^2/2$ и $n = 4$, $g = \lambda/4$, соответственно. В соответствии с (12.40) полное число e -фолдингов в этих примерах оценивается как

$$n = 2 : \quad N_e^{(tot)} \simeq 4\pi \frac{M_{Pl}^2}{m^2}, \quad (12.41)$$

$$n = 4 : \quad N_e^{(tot)} \simeq \frac{2\pi}{\sqrt{\lambda}}. \quad (12.42)$$

Мы увидим в Главе 13, что в этих моделях первичные возмущения плотности имеют требуемую амплитуду, $\delta\rho/\rho \sim 5 \cdot 10^{-5}$ при следующих значениях параметров (для нас здесь достаточны оценки по порядку величины)

$$n = 2 : \quad m \sim 10^{-6} M_{Pl}, \quad (12.43)$$

$$n = 4 : \quad \lambda \sim 10^{-13}. \quad (12.44)$$

Поэтому полное число e -фолдингов составляет $N_e^{(tot)} \sim 10^{13}$ и $N_e^{(tot)} \sim 10^7$, соответственно, а микроскопический (планковского размера) участок Вселенной растягивается за время инфляции до области размера

$$R \sim 10^{10^{13}} \text{ и } 10^{10^7}, \quad (12.45)$$

неважно в каких единицах — планковских длинах или Гигапарсеках. Инфляция справляется со своей задачей чрезвычайно эффективно.

Оценим, наконец, полную длительность инфляции, опять-таки на примерах потенциалов второго и четвёртого порядка. Запишем по определению

$$\Delta t^{(tot)} = \int_{t_i}^{t_e} dt = \int_{\phi_i}^{\phi_e} \frac{d\phi}{\dot{\phi}}.$$

Воспользуемся уравнениями медленного скатывания (12.11) и (12.12) и получим

$$\Delta t^{(tot)} = \int_{\phi_e}^{\phi_i} \frac{3Hd\phi}{V'(\phi)} = 3\sqrt{\frac{8\pi}{3}} \frac{1}{M_{Pl}} \int_{\phi_e}^{\phi_i} \frac{\sqrt{V}d\phi}{V'}.$$

Опуская численные факторы порядка единицы и используя (12.39), (12.43) и (12.44), найдём отсюда

$$\begin{aligned} n = 2 : \quad \Delta t^{(tot)} &\sim \frac{1}{M_{Pl}} \frac{\phi_i}{m} \sim \frac{M_{Pl}}{m^2} \sim 10^{-31} \text{ с,} \\ n = 4 : \quad \Delta t^{(tot)} &\sim \frac{1}{M_{Pl}} \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \ln \frac{\phi_i}{\phi_e} \sim \frac{1}{M_{Pl}} \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \ln \frac{1}{\lambda} \sim 10^{-35} \text{ с.} \end{aligned} \quad (12.46)$$

Мы видим, что раздувание областей Вселенной с микроскопических до гигантских размеров происходит за очень короткое время. В этом — особенность экспоненциального характера расширения Вселенной на инфляционной стадии.

▷ **Задача 3.** Для потенциалов инфлатона второго и четвёртого порядков найти зависимость инфлатонного поля и параметра Хаббла от времени, решив явно уравнения медленного скатывания.

12.2.2 Инфляция вблизи максимума потенциала (“новая инфляция”)

В отличие от инфляции с большими значениями инфлатонного поля модель, которая рассматривается в этом разделе, не требует включение сверхпланковские поля. Представление о возможном начале инфляции в этой модели также сильно отличается от представления о хаотических начальных данных, которое обсуждалось в предыдущем разделе. Отличаются, как мы увидим в Главе 13, и предсказания для скалярных и тензорных возмущений. В то же время, требование плоскостности инфлатонного потенциала сохраняется и для модели этого раздела.

Рассмотрим потенциал инфлатона, изображенный на рис. 12.3, причём будем

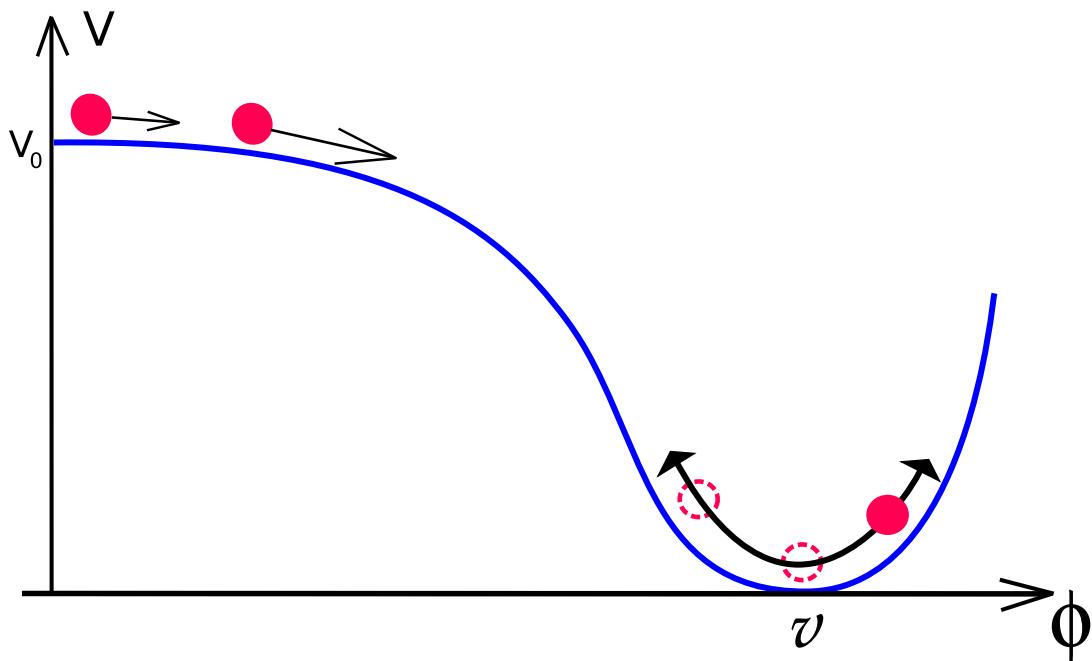


Рис. 12.3: Потенциал инфлатона в модели с инфляцией при малых полях.

считать, что вблизи начала координат он имеет вид

$$V(\phi) = V_0 - g\phi^n, \quad (12.47)$$

где

$$n \geq 3.$$

Наиболее часто рассматривают потенциал четвёртого порядка,

$$V(\phi) = V_0 - \frac{\lambda}{4}\phi^4.$$

Для определённости мы в основном будем рассматривать именно последний случай, и сделаем комментарии о произвольных n в подходящих местах.

В соответствии с определениями (12.20) и (12.21) параметры медленного скатывания равны

$$\epsilon = \frac{M_{Pl}^2}{16\pi} \frac{\lambda^2 \phi^6}{V_0^2}, \quad (12.48)$$

$$\eta = -\frac{M_{Pl}^2}{8\pi} \frac{3\lambda \phi^2}{V_0}. \quad (12.49)$$

Видно, что режим медленного скатывания $\epsilon, \eta \ll 1$ заведомо имеет место при малых полях. Предположим, что начальное значение инфлатона близко к $\phi = 0$, тогда во Вселенной действительно реализуется инфляционный режим.

Близкое к нулю начальное значение инфлатонного поля ϕ , необходимое для реализации рассматриваемого сценария, может возникать следующим образом. Предположим, что до инфляции во Вселенной имелась горячая среда, находившаяся в состоянии, близком к состоянию термодинамического равновесия. В этом смысле свойства вещества во Вселенной перед инфляцией предполагаются похожими на те, что имеются в теории горячего Большого взрыва, за тем исключением, что жёстких требований к однородности, изотропии и пространственной плоскости Вселенной накладывать, вообще говоря, не требуется. Мы видели в разделе I.10.2, что эффективный потенциал скалярных полей при высоких температурах отличается от нуль-температурного потенциала $V(\phi)$, причём минимум этого эффективного потенциала, как правило, находится при $\phi = 0$. Если такая картина имеет место для инфлатона, то начальное значение инфлатонного поля естественным образом оказывается равным нулю. По мере расширения Вселенной и понижения температуры эффективный потенциал постепенно превращается в нуль-температурный, и начинается инфляционная стадия. Для потенциала рис. 12.3 значение $\phi = 0$ неустойчиво, и квантовые эффекты слегка сдвигают инфлатонное поле из этого значения. Отметим, что такая картина позволяет оценить начальное значение для классической эволюции инфлатона, а также полное число e -фолдингов во время инфляции, см. ниже.

Интерес представляет случай, когда медленное скатывание заканчивается при сравнительно небольшом значении инфлатонного поля, так что

$$\lambda\phi_e^4 \ll V_0 . \quad (12.50)$$

Именно его мы и будем рассматривать. Действительно, обратный случай, когда инфляция продолжается вплоть до значений поля, сравнимых с его значением v в минимуме потенциала, по-существу является разновидностью ситуации, рассмотренной в предыдущем разделе. При выполнении (12.50) между параметрами ϵ и η имеет место неравенство

$$\epsilon \ll |\eta| , \quad (12.51)$$

причём, как видно из (12.49),

$$\eta < 0 . \quad (12.52)$$

Свойство (12.51) непосредственно следует из (12.48), (12.49) и (12.50),

$$\frac{\epsilon}{|\eta|} = \frac{\lambda\phi_e^4}{6V_0} \leq \frac{\lambda\phi_e^4}{6V_0} \ll 1 .$$

С учётом (12.51) инфляция прекращается при

$$|\eta_e| = \frac{M_{Pl}^2}{8\pi} \frac{3\lambda\phi_e^2}{V_0} \sim 1 ,$$

поэтому условие (12.50) ограничивает параметры инфлатонного потенциала:

$$\frac{V_0}{M_{Pl}^4} \ll \left(\frac{3}{8\pi} \right)^2 \lambda . \quad (12.53)$$

Именно при этом условии реализуется рассматриваемый сценарий инфляции при малых полях [74, 75], который по историческим причинам называют ещё сценарием новой инфляции. После того, как инфлатон съедет с малых значений до ϕ_e , инфляционный режим заканчивается, ϕ быстро скатывается к минимуму потенциала $V(\phi)$, и дальнейшая космологическая эволюция происходит так же, как в модели предыдущего раздела.

▷ *Задача 4.* Рассмотрим потенциал инфлатона, который имеет форму, изображенную на рис. 12.3, но при малых ϕ имеет вид

$$V(\phi) = V_0 - \frac{m^2}{2}\phi^2 - \frac{\lambda}{4}\phi^4$$

Пусть начальное значение инфлатона близко к $\phi = 0$, и нет никакой специальной подстройки параметров потенциала. Показать, что в зависимости от параметров модели либо инфляционная стадия не имеет места вовсе, либо она происходит в режиме, описанном выше в этом разделе, либо реализуется режим предыдущего раздела. Таким образом, включение квадратичного слагаемого в потенциал при малых ϕ не даёт ничего нового, если отсутствует подстройка параметров.

Мы увидим в Главе 13, что требуемое значение амплитуды первичных скалярных возмущений получается в указанном сценарии при весьма малом значении константы λ ,

$$\lambda \sim 10^{-13}. \quad (12.54)$$

Из (12.53) следует тогда, что, как и в сценарии хаотической инфляции, температура разогрева после инфляции сравнительно мала:

$$T_{reh} \lesssim \left(\frac{1}{g_*} V_0 \right)^{1/4} \ll 10^{-3} M_{Pl}.$$

Отметим, что единственным ограничением на величину V_0 является ограничение сверху (12.53), так что V_0 может быть гораздо меньше λM_{Pl}^4 . Соответственно, может быть мала и температура Вселенной после пост-инфляционного разогрева. Таким образом, рассматриваемый сценарий служит примером, в котором максимальная температура Вселенной на горячей стадии может быть малой без специальной подстройки параметров. Наоборот, требование того, чтобы Вселенная после инфляции разогревалась до достаточно высокой температуры T_{reh} , накладывает ограничение на V_0 снизу. Это ограничение сильно зависит как от выбранной величины⁵ T_{reh} , так и от механизма пост-инфляционного разогрева.

Продолжая изучение этой модели, найдём соотношение между значением инфлатонного поля на инфляционной стадии и числом e -фолдингов до конца инфляции. Воспользуемся для этого (12.31) и получим для $N_e \gg 1$ и, соответственно, $\phi \ll \phi_e$, соотношение

$$N_e(\phi) = \frac{3H^2}{2\lambda\phi^2} \quad (12.55)$$

$$= \frac{4\pi V_0}{\lambda M_{Pl}^2 \phi^2}. \quad (12.56)$$

⁵ T_{reh} заведомо превышает несколько МэВ — температуру начала нуклеосинтеза. Скорее всего $T_{reh} \gtrsim 100$ ГэВ, так что генерация тёмной материи и барионной асимметрии происходят на горячей стадии, но это, строго говоря, не обязательно.

Из (12.49) теперь следует важное для дальнейшего соотношение (ср. с (12.38))

$$\eta = -\frac{3}{2N_e} .$$

В общем случае степенного поведения (12.47) аналогичное соотношение имеет вид

$$\eta = -\frac{n-1}{n-2} \frac{1}{N_e} . \quad (12.57)$$

▷ Задача 5. Получить последнее соотношение.

Из соотношений (12.55), (12.56) следует, что как и в предыдущем разделе, полное число e -фолдингов определяется начальным значением инфлатонного поля ϕ_i ,

$$N_e^{(tot)} = \frac{3H^2}{2\lambda\phi_i^2} = \frac{4\pi V_0}{\lambda M_{Pl}^2 \phi_i^2} . \quad (12.58)$$

Если, как мы обсуждали выше, среднее значение инфлатонного поля в самом начале инфляции равно нулю, то величина ϕ_i определяется квантовыми флуктуациями. Мы увидим в Главе 13, что амплитуда этих флуктуаций оценивается величиной

$$\phi_i \sim \delta\phi \sim H .$$

Из (12.58) сразу следует, что

$$N_e^{(tot)} \sim \frac{1}{\lambda} .$$

С учётом (12.54) мы получаем отсюда тот же вывод, что и в модели предыдущего раздела (см. (12.45)): во время инфляции Вселенная растягивается в огромное число раз.

▷ Задача 6. Получить оценку длительности инфляции, аналогичную оценке (12.46).

12.2.3 Гибридная инфляция

В качестве третьего примера рассмотрим модель, с точки зрения начала инфляционной стадии аналогичную модели раздела 12.2.1, но не требующую вводить в рассмотрение сверхпланковские поля [76]. В простейшем варианте эта модель содержит два скалярных поля — поле инфлатона ϕ и дополнительное поле χ . В связи с этим модель получила название “гибридной инфляции”. Скалярный потенциал модели выберем так, как изображено на рис. 12.4. Идея состоит в том, что во время инфляционной стадии поле ϕ велико, и система медленно скатывается вдоль долины $\chi = 0$. После того, как долина $\chi = 0$ превращается в седло, происходит быстрое скатывание в перпендикулярном направлении, инфляция заканчивается, а осцилляции вблизи минимума $\phi = 0, \chi = v$ приводят к разогреву Вселенной.

Для определённости выберем скалярный потенциал следующим образом:

$$V(\phi, \chi) = \frac{1}{2}(g^2\phi^2 - \mu^2)\chi^2 + \frac{h}{4}\chi^4 + U(\phi) + V_0 ,$$

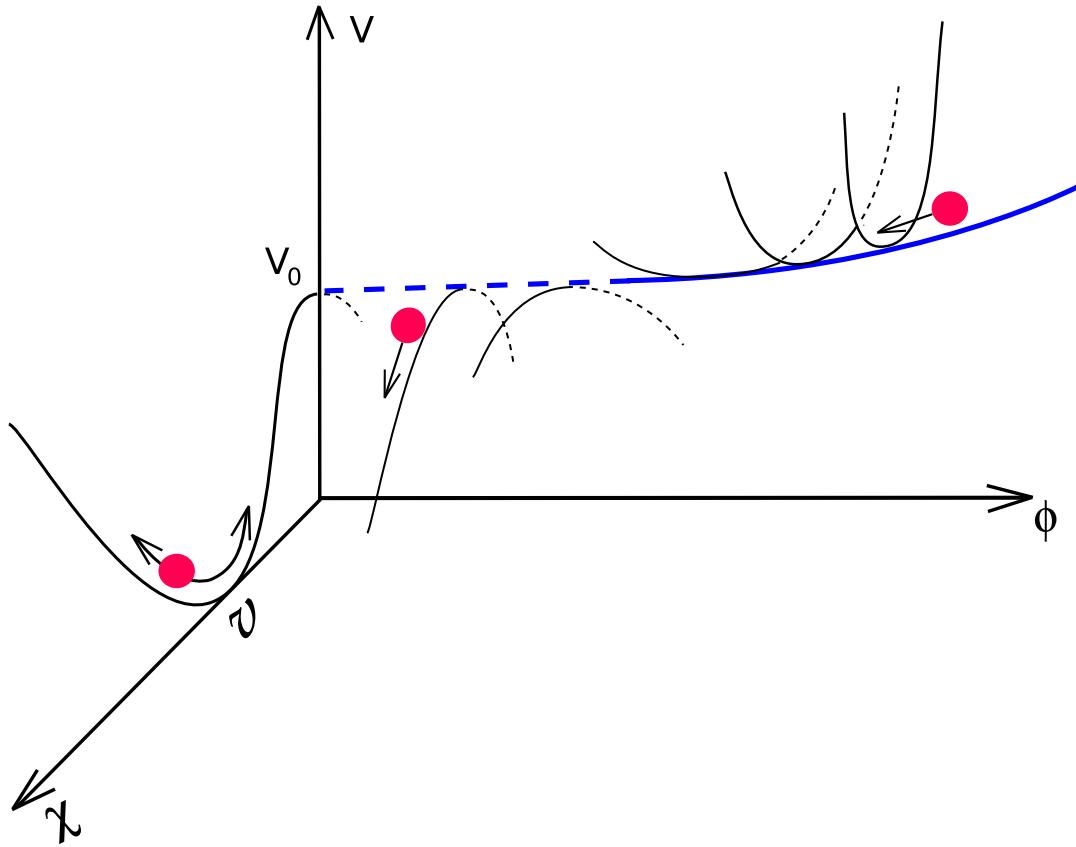


Рис. 12.4: Скалярный потенциал в модели гибридной инфляции.

где g и h — положительные безразмерные постоянные, μ — параметр размерности массы, $U(\phi)$ — монотонно растущий потенциал инфлатона. Для удобства положим

$$U(\phi = 0) = 0 .$$

В дальнейшем мы для определённости будем предполагать, что $U(\phi)$ имеет степенное поведение в интересной области значений поля ϕ . В качестве примера можно, хотя и отнюдь не обязательно, выбрать

$$U(\phi) = \frac{m^2}{2} \phi^2 . \quad (12.59)$$

Потенциал $V(\phi, \chi)$ имеет минимум при

$$\phi = 0 , \quad \chi = v = \frac{\mu}{\sqrt{h}} .$$

Константа V_0 определяется из требования, чтобы значение потенциала в минимуме равнялось нулю, что даёт

$$V_0 = \frac{\mu^4}{4h} .$$

Линия $\chi = 0$ является долиной потенциала $V(\phi, \chi)$ при $\phi > \phi_c$, где

$$\phi_c = \frac{\mu}{g} .$$

Нас будет интересовать случай, когда при критическом значении инфлатонного поля его вклад в энергию мал по сравнению с полной потенциальной энергией,

$$U_c \equiv U(\phi_c) \ll V_0 . \quad (12.60)$$

Потребуем, чтобы инфляция продолжалась вплоть до того момента, когда инфлатон скатится до критического значения ϕ_c . Именно при выполнении последних двух условий динамика в рассматриваемой модели сильно отличается от хаотической инфляции, а интересные значения инфлатонного поля $\phi \sim \phi_c$ малы по сравнению с массой Планка (см. задачу 9). Требование выполнения условия медленного скатывания для инфлатона при $\phi \geq \phi_c$ имеет вид

$$\eta(\phi_c) = \frac{M_{Pl}^2}{8\pi} \frac{U''(\phi_c)}{V_0} \ll 1 .$$

Для степенных потенциалов $U(\phi)$ имеем отсюда

$$\eta(\phi_c) \sim \frac{M_{Pl}^2}{8\pi\phi_c^2} \frac{U_c}{V_0} \ll 1 . \quad (12.61)$$

Отметим, что параметр η положителен,

$$\eta(\phi_c) > 0 .$$

Второй параметр медленного скатывания в этой модели, так же как и в модели предыдущего раздела, мал:

$$\epsilon(\phi_c) = \frac{M_{Pl}^2}{16\pi} \left(\frac{U'(\phi_c)}{V_0} \right)^2 \sim \frac{M_{Pl}^2}{16\pi\phi_c^2} \left(\frac{U_c}{V_0} \right)^2 \sim \eta \cdot \frac{U_c}{V_0} \ll \eta .$$

Из (12.61) видно, что инфляция действительно может происходить при суб-планковских значениях инфлатонного поля: для этого достаточно выбрать параметры так, что $\phi_c \ll M_{Pl}$, а малость η обеспечивается малостью отношения U_c/V_0 .

Обсудим теперь вопрос о том, при каких ограничениях на параметры модели система быстро (за несколько хаббловских времён) скатывается в минимум потенциала $\phi = 0, \chi = v$ после достижения инфлатоном критического значения ϕ_c . Через хаббловское время $\Delta t \sim H^{-1}(\phi_c)$ после этого момента значение инфлатонного поля будет равно $\phi_c - \Delta\phi$, где

$$\Delta\phi \sim -\dot{\phi}\Delta t \sim \frac{U'(\phi_c)}{3H^2} ,$$

и при получении последней оценки мы воспользовались уравнением медленного скатывания (12.11). При таком инфлатонном поле потенциал поля χ вблизи $\chi = 0$ имеет вид

$$V_{eff}(\chi) = V_0 - \frac{\mu_{eff}^2}{2} \chi^2 , \quad (12.62)$$

где

$$\mu_{eff}^2 = 2g^2\phi_c\Delta\phi \sim g^2 \frac{2U'\phi_c}{3H^2} .$$

Воспользовавшись уравнением Фридмана и учтя степенной характер потенциала $U(\phi)$, запишем

$$\mu_{eff}^2 \sim g^2 \frac{M_{Pl}^2}{4\pi} \frac{U_c}{V_0} . \quad (12.63)$$

Таким образом, через хаббловское время после достижения инфлатоном критического значения поле χ начинает скатываться вдоль потенциала $V_{eff}(\chi)$. Это скатывание — быстрое, если выполняется неравенство

$$\eta_\chi = \frac{M_{Pl}^2}{8\pi} \frac{V''_{eff}}{V_{eff}} \gtrsim 1$$

(параметр ϵ_χ мал при малых χ). С учётом (12.62) и (12.63) последнее неравенство можно записать в виде

$$\frac{g^2}{(4\pi)^2} \frac{U_c}{V_0} \frac{M_{Pl}^4}{V_0} \gtrsim 1. \quad (12.64)$$

Таким образом, описанный сценарий гибридной инфляции действительно реализуется, если выполнены неравенства (12.60), (12.61) и (12.64). Предполагая ещё, что критическое значение инфлатонного поля мало по сравнению с массой Планка, запишем окончательную цепочку неравенств в виде

$$\frac{(4\pi)^2}{g^2} \frac{V_0}{M_{Pl}^4} \lesssim \frac{U_c}{V_0} \ll \frac{\phi_c^2}{M_{Pl}^2} \ll 1. \quad (12.65)$$

Такая цепочка неравенств выполняется в широкой области значений параметров потенциала $V(\phi, \chi)$, то есть гибридная инфляция не требует тонкой подстройки параметров модели.

▷ **Задача 7.** Записать цепочку неравенств (12.65) в терминах исходных параметров g , h , μ и t для квадратичного инфлатонного потенциала (12.59). Убедиться, что значения параметров можно изменять в широкой области без нарушения неравенств (12.65). Указание: считать, что константы связи невелики, $g, h \lesssim 1$, а размерные величины t , μ и v малы по сравнению с массой Планка.

Как и в предыдущих разделах, найдём зависимость числа e -фолдингов до конца инфляции от значения инфлатонного поля. Воспользовавшись (12.31), запишем

$$N_e(\phi) = \frac{8\pi V_0}{M_{Pl}^2} \int_{\phi_c}^{\phi} \frac{d\phi}{U'(\phi)}.$$

Здесь мы учли, что конец инфляции наступает тогда, когда инфлатонное поле достигает критического значения, то есть $\phi_e = \phi_c$. Для не слишком больших N_e (как мы уже отмечали, интерес представляет случай $N_e \simeq 50-60$) имеем оценку

$$N_e(\phi) \simeq \frac{8\pi V_0}{M_{Pl}^2 U'(\phi_c)} (\phi - \phi_c) \simeq \frac{1}{\eta(\phi_c)} \frac{\phi - \phi_c}{\phi_c},$$

где мы использовали (12.61). Видно, что при не слишком больших N_e значение ϕ не слишком отличается от ϕ_c , так что

$$\eta(\phi) \simeq \eta(\phi_c).$$

Соотношения между η и N_e типа (12.38) в данной модели не возникает, и параметр η является в ней произвольным (в том смысле, что он меняется независимо от других

феноменологически важных величин при изменениях параметров потенциала), хотя и малым.

Ограничение на параметр η , хотя и модельно-зависимое, для гибридной инфляции всё же имеется. Чтобы убедиться в этом, рассмотрим для определённости квадратичный инфлатонный потенциал (12.59). В этом случае параметр η не зависит от ϕ и равен

$$\eta = \frac{M_{Pl}^2 m^2}{8\pi V_0} .$$

Найдём теперь полное число e -фолдингов за всё время инфляции. Воспользуемся для этого равенством (12.31) и получим

$$N_e^{(tot)} = \frac{8\pi V_0}{M_{Pl}^2 m^2} \ln \frac{\phi_i}{\phi_c} ,$$

откуда имеем

$$\eta = \frac{1}{N_e^{(tot)}} \ln \frac{\phi_i}{\phi_c} .$$

Если начало инфляции наступает при $\phi_i \sim M_{Pl}$ (это верно, в частности, если в потенциале имеются неперенормируемые слагаемые (12.67)), то последнее равенство записывается в виде

$$\eta = \frac{1}{N_e^{(tot)}} \ln \frac{M_{Pl}}{\phi_c} .$$

Поскольку $N_e^{(tot)} \gtrsim 60$, отсюда следует ограничение сверху на величину параметра η , которое, однако, логарифмически зависит от параметров модели посредством ϕ_c .

Если инфлатонный потенциал имеет степенной вид $U \propto \phi^n$ с $n > 2$, то ограничение подобного типа является более сильным.

▷ Задача 8. Предполагая, что в модели нет подстройки параметров, в частности, что $N_e^{(tot)} \gg 60$, найти ограничение на параметр η за 60 e -фолдингов до конца инфляции в случае степенного инфлатонного потенциала $U \propto \phi^n$ с $n > 2$.

▷ Задача 9. Распространить анализ этого раздела на случай $U_c \sim V_0$, построив тем самым модель гибридной инфляции с $\phi_c \gtrsim M_{Pl}$. Какая область на плоскости (ϵ, η) соответствует моделям данного типа?

12.2.4 Заключительные замечания

Сделаем несколько замечаний в заключение этой главы.

Во-первых, режим медленного скатывания инфлатона, как и близкий к экспоненциальному закон космологического расширения, для реализации инфляционного сценария не обязателен. Это соображение, по-видимому, представляет лишь академический интерес в связи с результатами космологических наблюдений, согласно которым первичный спектр скалярных возмущений близок к плоскому спектру Гаррисона–Зельдовича (см. Главу 13).

▷ Задача 10. Степенная инфляция.

Показать, что расширение пространственно-плоской Вселенной по закону

$$a = a_0 t^\alpha, \quad \alpha > 1 \tag{12.66}$$

позволяет решить проблемы горизонта, плоскости и др., т. е. является инфляционным расширением. Предполагая, что такое расширение обусловлено скалярным полем ϕ , и предполагая режим медленного скатывания скалярного поля на этой стадии, найти скалярный потенциал модели. При каких α и/или ϕ режим медленного скатывания действительно имеет место? Найти скалярный потенциал также в случае, когда приближение медленного скатывания не работает.

Во-вторых, плоскостность потенциала инфлатона является далеко не тривиальным требованием к моделям физики частиц, расширяющим Стандартную модель. Проблема заключается, в частности, в том, что динамика пространственно-однородного скалярного поля определяется в действительности не тем скалярным потенциалом, который фигурирует в классическом действии теории, а *эффективным потенциалом*, учитывающим квантовые поправки. При не слишком слабом взаимодействии инфлатона с другими полями (а такое взаимодействие необходимо для пост-инфляционного разогрева) эти поправки, вообще говоря, велики, и эффективный потенциал не обладает необходимой плоскостностью. Эта проблема носит не столь драматичный характер в суперсимметричных теориях, однако и в них полностью решить её непросто [71]. В моделях с большим полем (раздел 12.2.1) и их разновидностях проблема усугубляется тем, что в них инфлатонный потенциал должен быть весьма плоским *при сверхпланковских полях*. Однако из общих соображений можно было бы ожидать, что в инфлатонном эффективном потенциале имеются слагаемые высших порядков (“неперенормируемые вклады”), которые подавлены максимальным энергетическим масштабом теории — массой Планка M_{Pl} . Такие слагаемые имели бы вид

$$\Delta V(\phi) = c_6 \frac{\phi^6}{M_{Pl}^2} + c_8 \frac{\phi^8}{M_{Pl}^4} + \dots \quad (12.67)$$

с константами $c_{6,8,\dots}$ порядка единицы. Они были бы пренебрежимо малы при $\phi \ll M_{Pl}$, но при существенных для инфляции сверхпланковских полях они бы, наоборот, доминировали и разрушали режим медленного скатывания. Как правило, такая ситуация действительно имеет место в моделях супергравитации [71]. В связи с этим вопрос о механизме, естественным образом обеспечивающем плоскостность инфлатонного потенциала при $\phi \gg M_{Pl}$, представляет значительный интерес для теорий, претендующих на реалистическое описание физических явлений при сверхвысоких энергиях, например, для теории суперстрюн. В последнее время в понимании этого вопроса достигнут определённый прогресс [72, 73].

▷ **Задача 11.** Для квадратичного потенциала (12.28) оценить значения параметров c_6 и c_8 , при которых дополнительные слагаемые (12.67) несущественны за 60 e -фолдингов до окончания инфляции. То же для потенциала четвёртого порядка (12.29). Указание: численные значения t и λ выбрать равными (12.43) и (12.44), соответственно.

Во-третьих, механизм инфляции не обязательно связан со скатыванием скалярного инфлатона вдоль его потенциала. Альтернативами могут служить модели с неминимальными кинетическими членами скалярных полей (k -инфляция), модели с векторными полями и т.д. Отметим в связи с этим, что важным для всех моделей является вопрос об окончании инфляции и переходе на горячую стадию (“graceful exit”). В описанных в данной главе моделях этот вопрос решается положительно, причём по-существу автоматически, но в других моделях это может быть не так (либо инфляция не заканчивается вовсе, либо горячая стадия после инфляции не наступает). Такие модели не являются реалистическими; примером служит “старая инфляция”, кратко рассмотренная в начале этой главы.

Наконец, в этом разделе мы уделяли некоторое внимание возможным механизмам начала инфляции. Если отсутствует подгонка параметров, и число e -фолдингов превышает 100, то этот аспект носит чисто академический характер, по крайней мере при современном понимании вопроса. Из-за длительной инфляционной стадии

состояние Вселенной до инфляции полностью забыто, и механизм начала инфляции недоступен экспериментальной проверке. Вполне может оказаться, что вопрос о самом начале космологической эволюции не относится к категории вопросов, ответы на которые можно получить обычным для физики путём сравнения теории и эксперимента.

В заключение Главы рассмотрим кратко модель Старобинского, о которой мы упоминали в начале раздела 11.2. Изначально модель не содержит скалярных полей, и представляет собой модификацию теории гравитации; гравитационная часть действия содержит не только линейное, но и квадратичное по кривизне слагаемое:

$$S = -\frac{M_{Pl}^2}{16\pi} \int \sqrt{-g} d^4x f(R), \quad f(R) = R - \frac{R^2}{6M^2}, \quad (12.68)$$

где параметр M имеет размерность массы. Тем не менее, как показано в разделе I.A.5, такая теория эквивалентна общей теории относительности с дополнительным скалярным полем. После введения новой метрики $\tilde{g}_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}/\psi$ действие этой эквивалентной теории имеет вид (I.A.77), так что после восстановления размерных параметров имеем

$$S = -\frac{M_{Pl}^2}{16\pi} \int \sqrt{-g} d^4x \tilde{R} + \frac{M_{Pl}^2}{16\pi} \int \sqrt{-g} d^4x \left(\frac{3}{2} \frac{\tilde{g}^{\mu\nu} \tilde{\nabla}_\mu \psi \nabla_\nu \psi}{\psi^2} + \frac{R_0(\psi)}{\psi} - \frac{f[R_0(\psi)]}{\psi^2} \right),$$

где $R_0(\psi) = 3(1-\psi)M^2$. Замена

$$\psi = \exp \left(\frac{4\sqrt{\pi}}{\sqrt{3}} \frac{\phi}{M_{Pl}} \right)$$

приводит кинетический член для скалярного поля к каноническому виду, при этом скалярный потенциал оказывается равным

$$V = \frac{3M^2 M_{Pl}^2}{32\pi^2} \left(1 - \frac{1}{\psi} \right)^2 = \frac{3M^2 M_{Pl}^2}{32\pi^2} \left(1 - e^{-\frac{4\sqrt{\pi}}{\sqrt{3}} \frac{\phi}{M_{Pl}}} \right)^2. \quad (12.69)$$

При больших значениях поля $\phi \gtrsim M_{Pl}$ потенциал выполняется, а при $\phi \rightarrow 0$ потенциал стремится к нулю. При больших значениях поля реализуется инфляционная стадия, причём для её описания применимо приближение медленного скатывания. Отметим, что индуцированное переходом от одной метрики к другой взаимодействие поля ϕ с другими полями теории, в частности, с полями Стандартной модели, мало, поскольку оно подавлено величиной гравитационного масштаба M_{Pl} .

Итак, модель Старобинского эквивалентна модели хаотической инфляции с одним инфлатонным полем и потенциалом вида (12.69).

- ▷ Задача 12. Найти область значений параметра M и начальное значение поля ϕ , при которых в рассмотренной инфляционной модели работает приближение медленного скатывания.

Глава 13

Генерация космологических возмущений на инфляционной стадии

Как мы уже упоминали, одно из главных достоинств предположения о существовании инфляционной стадии состоит в том, что оно объясняет наличие первичных возмущений во Вселенной. Согласно инфляционному механизму, первичные скалярные возмущения возникли в результате усиления вакуумных квантовых флюктуаций инфлационного поля¹, которое происходит, в конечном итоге, именно благодаря ускоренному расширению Вселенной на инфляционной стадии [77, 78, 79, 80, 81]. В результате такого же механизма происходит и генерация тензорных возмущений, только в этом случае усиливаются вакуумные флюктуации гравитационного поля, а не инфлатаона [67, 82, 83].

Отметим, что обусловленное расширением Вселенной усиление нулевых флюктуаций предлагалось в качестве возможного механизма генерации первичных скалярных возмущений и вне контекста инфляционной теории [84] (см. ещё работу [85], где уже была высказана мысль об эффективной генерации скалярных возмущений на инфляционной стадии). Генерация гравитационных волн в расширяющейся Вселенной также рассматривалась ещё до появления инфляционной теории [86].

Предсказания инфляционного механизма согласуются с имеющимися наблюдательными данными. Следует, правда, сказать, что эти данные пока нельзя рассматривать как однозначное свидетельство в пользу инфляционной теории: всё, что сегодня достоверно известно, — это близкий к гауссовому характер скалярных возмущений, близкий к плоскому спектр и преобладание адиабатической моды. Мы уже упоминали в разделе 5.1, что адиабатическая мода является физически выделенной; наоборот, существование мод постоянной кривизны требовало бы довольно экзотических механизмов генерации барионной асимметрии, тёмной материи или лептонной асимметрии. Следовательно, наблюдаемое доминирование адиабатической моды вполне естественно при любом механизме генерации возмущений плотности. Плоский спектр Гаррисона–Зельдовича (предложенный, кстати, задолго до формулировки инфляционной теории) также выделен из соображений масштабной инвариантности и, вообще говоря, может не быть специфическим для инфляционного механизма генерации скалярных возмущений. Таким образом, подтверждение инфляционной теории связано с измерением более тонких свойств первичных космологических воз-

¹В разделе 14.2 мы рассмотрим возможность того, что скалярные возмущения обязаны усиленным вакуумным флюктуациям другого поля. Идея последнего механизма, впрочем, близка к идеи механизма, основанного на возмущениях самого инфлатаона.

мущений. Инфляционная теория предсказывает, что спектр скалярных возмущений, вообще говоря, не является в точности плоским, а имеет небольшой наклон. Кроме того, предсказывается и наличие тензорных возмущений, амплитуда которых может быть измеримой, хотя и довольно малой. Наблюдение этих особенностей стало бы сильнейшим свидетельством в пользу инфляции. Отметим сразу, что конкретные результаты относительно наклона спектра скалярных возмущений и амплитуды тензорных возмущений зависят от модели инфляции (в моделях с медленным скатыванием — от формы инфлатонного потенциала), так что однозначных предсказаний для них инфляционная теория не даёт. Есть, правда, и предсказание, одинаковое для всех моделей с медленным скатыванием, однако его проверка связана с измерением наклона спектра тензорных возмущений, что является делом отдалённого будущего.

В этой главе мы рассмотрим весь этот круг вопросов. Мы начнём с упрощенного обсуждения механизма генерации скалярных возмущений, которое, однако, ухватывает основные черты этого механизма и приводит к правильному ответу. Более аккуратное рассмотрение этого вопроса мы проведём в разделе 13.2, а затем рассмотрим генерацию тензорных возмущений и обсудим предсказания инфляционной теории для наблюдательной космологии.

13.1 Упрощенный анализ: флюктуации инфлатонного поля

Инфлатонное поле, как и все другие поля, испытывает вакуумные флюктуации. Эти флюктуации усиливаются в процессе инфляции, так что в результате генерируются вполне макроскопические возмущения инфлатона и, соответственно, его тензора энергии-импульса. Вообще говоря, такие возмущения порождают возмущения метрики, см. Главу 2. Приближение, которое мы будем использовать в этом разделе, состоит в пренебрежении последним эффектом. Таким образом, мы будем рассматривать флюктуации инфлатона на фоне однородной внешней метрики раздувающейся Вселенной. Такой анализ не вполне адекватен для описания возмущений с большими длинами волн (за горизонтом, см. раздел 2.4), однако он хорошо иллюстрирует физическую сторону дела и быстро приводит к ответу.

Прежде чем рассматривать флюктуации инфлатона в раздувающейся Вселенной, полезно обсудить свойства вакуумных флюктуаций скалярного поля в пространстве-времени Минковского.

13.1.1 Вакуумные флюктуации в плоском пространстве-времени

Рассмотрим действительное свободное безмассовое квантовое скалярное поле в пространстве Минковского. Действие для него имеет вид

$$S_\varphi = \frac{1}{2} \int d^4x \left[(\partial_t \varphi)^2 - (\partial_i \varphi)^2 \right],$$

а функционал энергии равен

$$E = \frac{1}{2} \int d^3x \left[(\partial_t \varphi)^2 + (\partial_i \varphi)^2 \right]. \quad (13.1)$$

Оценим, сначала на качественном уровне, амплитуду вакуумных флюктуаций поля φ с характерными импульсами q и частотами $\omega_q = q$. Для этого заметим, что энергия этих флюктуаций в характерном пространственном объёме размера $\lambda \sim q^{-1}$ должна по порядку величины совпадать с энергией нулевых колебаний осциллятора с частотой ω_q , которая равна $\hbar\omega_q/2$. С другой стороны, если $\delta\varphi(q)$ — амплитуда интересующих нас флюктуаций, то согласно (13.1) оценка для соответствующей плотности энергии имеет вид

$$\rho \sim \omega_q^2 (\delta\varphi)^2 .$$

Полагая, как обычно, $\hbar = 1$, имеем соотношение

$$\frac{\omega_q}{2} \sim \rho \lambda^3 \sim \omega_q^2 (\delta\varphi)^2 \lambda^3 ,$$

откуда с учётом $\omega_q = q$, $\lambda \sim q^{-1}$ имеем

$$\delta\varphi(q) \sim q . \quad (13.2)$$

Это и даёт искомую оценку амплитуды вакуумных флюктуаций с характерным импульсом q , которая на самом деле очевидна из размерных соображений. Мы сейчас уточним смысл этой оценки, но перед этим отметим, что амплитуды вакуумных флюктуаций велики при больших импульсах q и, соответственно, при малых длинах волн, и, наоборот, малы при больших длинах волн. Эффекты вакуумных флюктуаций незаметны на макроскопических расстояниях.

Чтобы уточнить приведённую качественную оценку, запишем стандартное выражение для оператора поля φ ,

$$\varphi(\mathbf{x}, t) = \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^{3/2} \sqrt{2\omega_q}} \left(e^{i\omega_q t - i\mathbf{q}\mathbf{x}} A_{\mathbf{q}}^\dagger + e^{-i\omega_q t + i\mathbf{q}\mathbf{x}} A_{\mathbf{q}} \right) , \quad (13.3)$$

где операторы рождения и уничтожения удовлетворяют стандартным коммутационным соотношениям

$$[A_{\mathbf{q}}, A_{\mathbf{q}'}^\dagger] = \delta(\mathbf{q} - \mathbf{q}') . \quad (13.4)$$

Одновременные корреляционные функции операторов $\varphi(\mathbf{x}, t)$ выражаются стандартным образом через двухточечную функцию

$$\langle 0 | \varphi(\mathbf{x}, t) \varphi(\mathbf{y}, t) | 0 \rangle ,$$

где $|0\rangle$ обозначает вакуумное состояние. А именно, для корреляторов справедлива теорема Вика. Как мы обсуждаем в разделе C.2, это свойство характерно и для гауссовых случайных полей; в этом смысле вакуумные флюктуации свободных квантовых полей (в данном случае безмассового скалярного поля) представляют собой гауссово случайное поле. Определим, как в теории однородных изотропных гауссовых случайных полей, спектр мощности $\mathcal{P}_\varphi(q)$ вакуумных флюктуаций следующим образом (в дальнейшем мы всё время будем иметь дело с флюктуациями в вакууме, и соответствующее обозначение будем опускать)

$$\langle \varphi^2(x) \rangle = \int_0^\infty \mathcal{P}_\varphi(q) \frac{dq}{q} , \quad (13.5)$$

где интегрирование идёт по модулю импульса². Как обычно, спектр мощности определяет вклад логарифмического интервала импульсов в средний квадрат флуктуации, в данном случае в величину $\langle \varphi^2(x) \rangle$. Левую часть последней формулы нетрудно вычислить с использованием (13.3),

$$\langle \varphi^2(x) \rangle = \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3 \cdot 2\omega_q} = \int_0^\infty \frac{4\pi q^2 dq}{2(2\pi)^3 q} = \int_0^\infty \frac{q^2}{(2\pi)^2} \frac{dq}{q}. \quad (13.6)$$

Таким образом,

$$\mathcal{P}_\varphi(q) = \frac{q^2}{(2\pi)^2}. \quad (13.7)$$

Амплитуду вакуумных флуктуаций $\delta\varphi(q)$ будем понимать как среднеквадратичную флуктуацию поля с характерным импульсом q . Последняя определяется соотношением

$$\delta\varphi(q) \equiv \Delta_\varphi = \sqrt{\mathcal{P}_\varphi(q)}. \quad (13.8)$$

Мы видим, что для свободного безмассового квантового поля она равна

$$\delta\varphi(q) = \frac{q}{2\pi}. \quad (13.9)$$

В этом и состоит точный смысл приведённой выше оценки (13.2); к тому же мы нашли и численный коэффициент.

Заключая этот раздел, напомним, что в расширяющейся Вселенной физические импульсы q уменьшаются со временем (“краснеют”). Если расширение медленное, то соответственно уменьшаются и амплитуды вакуумных флуктуаций каждой моды. В инфляционной Вселенной это далеко не так.

13.1.2 Генерация возмущений инфлатона

Рассмотрим, как ведут себя флуктуации инфлатонного поля во время инфляции. Поле инфлатона представим в виде суммы однородного фонового поля $\phi_c(t)$ и части $\varphi(\mathbf{x}, t)$, описывающей возмущения:

$$\phi(\mathbf{x}, t) = \phi_c(t) + \varphi(\mathbf{x}, t). \quad (13.10)$$

Здесь $\phi_c(t)$ — это однородное классическое решение уравнений поля, соответствующее инфляции; именно о таких решениях шла речь в предыдущей главе (там мы их обозначали просто $\phi(t)$; здесь мы добавили индекс c во избежание недоразумений). В дальнейшем мы будем считать $\varphi(\mathbf{x}, t)$ квантовым полем, но пока для нас это несущественно. Мы будем работать в рамках линеаризованной теории, считая возмущения $\varphi(\mathbf{x}, t)$ малыми. Квадратичное действие для $\varphi(\mathbf{x}, t)$ на фоне пространственно-плоской метрики получим, подставляя разложение (13.10) в общее выражение для действия (12.3):

$$\begin{aligned} S_\varphi &= \frac{1}{2} \int d^4x \sqrt{-g} [g^{\mu\nu} \partial_\mu \varphi \partial_\nu \varphi - V''(\phi_c) \varphi^2] \\ &= \frac{1}{2} \int dt d^3x a^3 [\dot{\varphi}^2 - a^{-2} (\partial_i \varphi)^2 - V''(\phi_c) \varphi^2]. \end{aligned} \quad (13.11)$$

²Вообще говоря, интеграл (13.5) ультрафиолетово расходится, что связано с тем, что два оператора φ в левой части (13.5) берутся в одной точке. Это, однако, не мешает вычислять спектр мощности, используя формулу (13.5). Физические величины, такие как корреляторы полей в разных точках, в теории свободного квантового поля конечны.

Соответствующее линеаризованное уравнение имеет вид

$$\ddot{\varphi} + 3H\dot{\varphi} - \frac{1}{a^2}\partial_i\partial_i\varphi + V''(\phi_c)\varphi = 0.$$

В силу пространственной однородности фоновых полей решения этого уравнения можно искать в виде плоских волн

$$\varphi(\mathbf{x}, t) \propto e^{\pm i\mathbf{kx}}\varphi_{\mathbf{k}}(t),$$

где \mathbf{k} — постоянный во времени конформный импульс (ср. с Главой 2). Уравнение для Фурье-амплитуд выглядит следующим образом:

$$\ddot{\varphi} + 3H\dot{\varphi} + \frac{k^2}{a^2}\varphi + V''(\phi_c)\varphi = 0. \quad (13.12)$$

Здесь и далее мы опускаем индекс \mathbf{k} при Фурье-амплитудах там, где это не приводит к недоразумениям, и обозначаем $k = |\mathbf{k}|$.

Идея дальнейшего вычисления состоит в следующем. На инфляционной стадии параметр Хаббла H меняется со временем медленно, а масштабный фактор a быстро растёт. На ранних временах физический импульс $q(t) = k/a(t)$ велик по сравнению с параметром Хаббла, и, кроме того, $q^2 \gg V''(\phi_c)$. Поэтому главными в уравнении (13.12) являются первый и третий члены; поле $\varphi(t)$ быстро осциллирует и в значительной степени ведёт себя так же, как в пространстве-времени Минковского. Иными словами, мода $\varphi_{\mathbf{k}}$ находится под горизонтом, см. раздел 2.4; кривизна пространства-времени эффективно мала и слабо сказывается на её эволюции. В такой ситуации квантовополевой вакуум хорошо определён (рождение частиц, которое может происходить за счёт меняющейся во времени внешней метрики, сильно подавлено и в формальном пределе $k/a \rightarrow \infty$ вообще отсутствует), амплитуды вакуумных флюктуаций каждой моды падают в соответствии с покраснением импульса. С другой стороны, на поздних временах справедливо $q(t) \ll H$, и главным в уравнении (13.12) является второе слагаемое с хаббловским трением. Мода находится за горизонтом, её амплитуда практически не меняется со временем; вакуумные флюктуации “замораживаются” по амплитуде несмотря на то, что их длина волны растёт, а физический импульс падает. Переход от режима под горизонтом к режиму за горизонтом (выход за горизонт) происходит, когда импульс данной моды становится порядка параметра Хаббла,

$$q(t) \sim H.$$

В этот момент амплитуда флюктуации оценивается согласно (13.9) величиной

$$\delta\varphi(k) \equiv \Delta_{\varphi} \sim \frac{H}{2\pi}, \quad (13.13)$$

а после этого она держится постоянной. Это означает, что флюктуации инфлатонного поля с большими длинами волн (далеко за горизонтом) усилены по сравнению с флюктуациями с такими же длинами волн в пространстве Минковского фактором

$$\frac{\delta\varphi}{\delta\varphi_{Mink}} \sim \frac{H}{q}.$$

Космологически интересные длины волн сегодня, грубо говоря, сравнимы с современным размером горизонта, а выходят они за горизонт на инфляционной стадии

тогда, когда их длина волны не слишком сильно превышает планковскую (если считать, что во время инфляции параметр H не слишком мал по сравнению с M_{Pl} в логарифмическом масштабе). Из результатов раздела 11.1.1 следует тогда, что между выходом интересных мод за горизонт и окончанием инфляции прошло порядка $N_e \sim 60$ е-фолдингов (это соображение мы ещё уточним). Таким образом, за это время импульс уменьшился в e^{N_e} раз, и фактор усиления флуктуаций по сравнению с пространством Минковского составил к концу инфляции гигантскую величину

$$\frac{H}{q(t_e)} \sim e^{N_e} \sim e^{60}.$$

В этом и состоит механизм инфляционного усиления вакуумных флуктуаций инфлатонного поля, который в конечном итоге обеспечивает генерацию первичных скалярных возмущений во Вселенной.

Заканчивая обсуждение на качественном уровне, отметим, что для каждой модели последовательность событий на инфляционной стадии прямо противоположна той, которая имеет место на радиационно-доминированной или пылевидной стадии. А именно, на инфляционной стадии мода сначала находится под горизонтом ($q(t) \gg H$), а затем — за горизонтом³ ($q(t) \ll H$). На радиационно-доминированной или пылевидной стадии ситуация обратная. Зависимость физического импульса и параметра Хаббла от времени на инфляционной и последующих стадиях показана на рис. 13.1.

Перейдём теперь к количественному рассмотрению. В дальнейшем мы будем интересоваться случаем инфляции в режиме медленного скатывания. В этом случае

$$V'' = \frac{8\pi}{M_{Pl}^2} V \cdot \eta = 3H^2 \cdot \eta \ll H^2,$$

где η — параметр медленного скатывания. Поэтому последним слагаемым в левой части (13.12) можно пренебречь. Удобно ввести⁴ конформное время η , связанное, как обычно, с временем t соотношением $dt = a d\eta$. Для дальнейшего полезно напомнить, что при экспоненциальном расширении Вселенной, то есть при $a(t) = a_0 \cdot \exp(Ht)$ зависимость масштабного фактора от конформного времени имеет вид (см. раздел 2.1.1)

$$a(\eta) = -\frac{1}{H\eta} \quad (13.14)$$

(при этом η отрицательно и $|\eta|$ убывает с течением времени), а отношение физического импульса к параметру Хаббла равно

$$\frac{q(t)}{H} = \frac{k}{a(t)H} = -k\eta.$$

Разумеется, на инфляционной стадии эти соотношения не являются точными, но ими можно пользоваться на достаточно коротких временных интервалах, в течение которых параметр Хаббла не успевает сколько-нибудь заметно измениться.

³Отметим, что такая последовательность событий прямо связана с решением в инфляционной теории проблем теории горячего Большого взрыва: для решения этих проблем требуется, чтобы масштабный фактор рос со временем быстрее, чем H^{-1} , см. раздел 11.1, так что $q(t) = k/a(t)$ обязательно падает быстрее, чем $H(t)$.

⁴По историческим причинам обозначения для конформного времени и одного из параметров медленного скатывания совпадают. Это, однако, не будет приводить к недоразумениям.

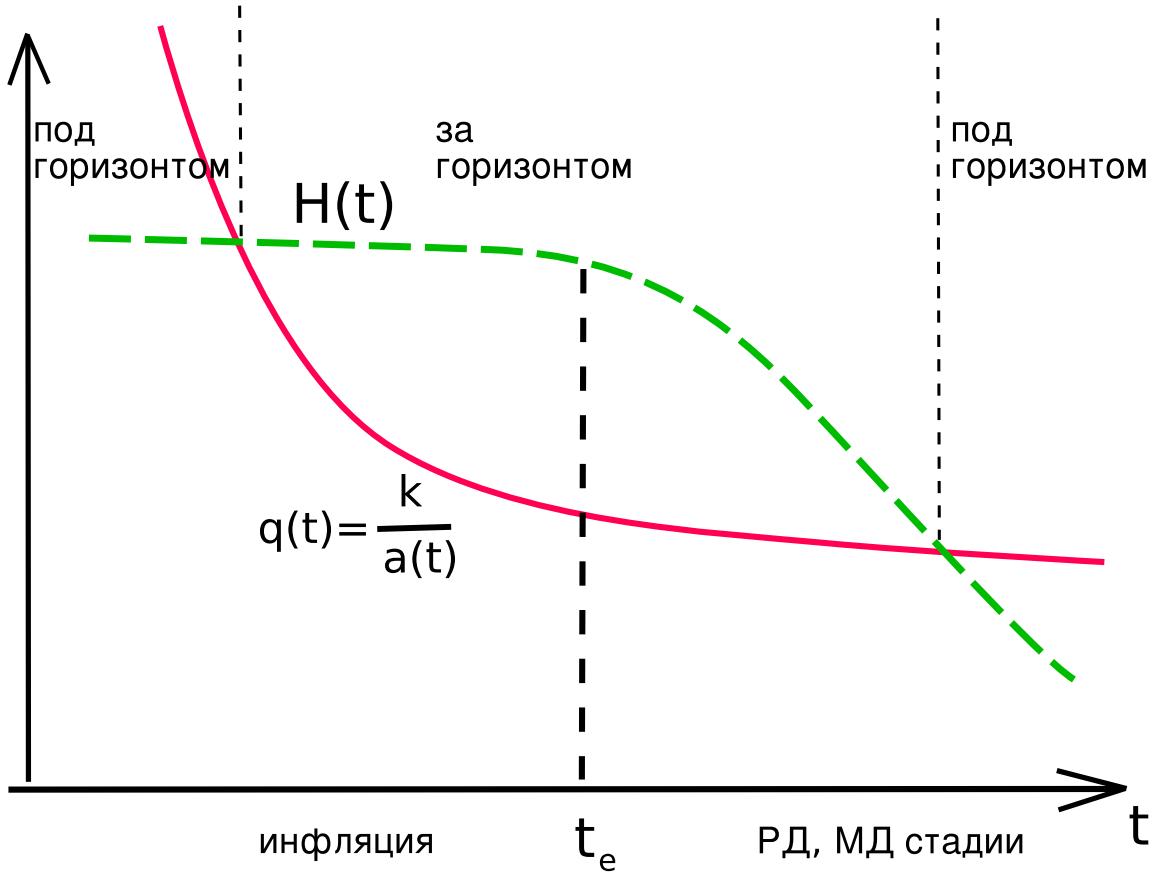


Рис. 13.1: Зависимость физического импульса и параметра Хаббла от времени на инфляционной, радиационно-доминированной и пылевидной стадии для моды с фиксированным конформным импульсом. При $q \gg H$ и $q \ll H$ мода находится под горизонтом и за горизонтом, соответственно.

Напомним, что в конформном времени метрика имеет вид (см. раздел 2.1.1) $ds^2 = a^2(\eta) \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$, так что действие (13.11) в пренебрежении слагаемым с V'' выглядит следующим образом:

$$S_\varphi = \frac{1}{2} \int d^4x a^2(\eta) [(\partial_\eta \varphi)^2 - (\partial_i \varphi)^2] , \quad (13.15)$$

а уравнение для возмущений инфлатона имеет вид

$$\varphi'' + 2\frac{a'}{a}\varphi' - \Delta\varphi = 0 , \quad (13.16)$$

где, как обычно, $\Delta = \partial_i \partial_i$ и штрих обозначает производную по η . Удобно ввести новое поле χ соотношением

$$\varphi = \frac{1}{a(\eta)}\chi . \quad (13.17)$$

Подстановка этого выражения в (13.15) приводит к действию для поля χ вида

$$S_\chi = \frac{1}{2} \int d^3x d\eta \left[\left(\chi' - \frac{a'}{a}\chi \right)^2 - (\partial_i \chi)^2 \right] = \frac{1}{2} \int d^3x d\eta \left[\chi'^2 - (\partial_i \chi)^2 + \frac{a''}{a}\chi^2 \right] , \quad (13.18)$$

где последнее выражение получается путём интегрирования по частям. Из него получаем уравнение для χ , которое мы запишем в импульсном представлении:

$$\chi'' - \frac{a''}{a}\chi + k^2\chi = 0. \quad (13.19)$$

На ранних временах a''/a мало по сравнению с k^2 , и соответствующими слагаемыми можно пренебречь в уравнении (13.19) и выражении для действия (13.18). Формально при $\eta \rightarrow -\infty$ эти слагаемые стремятся к нулю (например, для экспоненциального расширения $a''/a = 2/\eta^2$). Поэтому поле χ в конформном времени ведёт себя на ранних временах в точности так же, как безмассовое скалярное поле в пространстве Минковского⁵. Мы сразу можем записать для оператора поля выражение, в точности аналогичное (13.3):

$$\chi(\mathbf{x}, \eta) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2} \sqrt{2k}} \left(e^{ik\eta - i\mathbf{kx}} A_{\mathbf{k}}^\dagger + e^{-ik\eta + i\mathbf{kx}} A_{\mathbf{k}} \right), \quad \eta \rightarrow -\infty, \quad (13.20)$$

где операторы рождения и уничтожения $A_{\mathbf{k}}^\dagger$ и $A_{\mathbf{k}}$ удовлетворяют стандартным коммутационным соотношениям, то есть соотношениям (13.4) с заменой \mathbf{q} на \mathbf{k} .

Физически разумным предположением о начальном состоянии квантового инфляционного поля φ является предположение о том, что оно совпадает с вакуумным состоянием по отношению к операторам $A_{\mathbf{k}}^\dagger$ и $A_{\mathbf{k}}$ для интересующих нас \mathbf{k} . Действительно, моды с интересными импульсами выходят за горизонт за $N_e(k) \sim 60$ е-фолдингов до конца инфляции (см. раздел 13.1.3), так что в начале инфляции их физические импульсы составляют

$$q(t_i) \sim H e^{N_e^{tot} - N_e(k)},$$

что является, вообще говоря, очень большой величиной. Таким образом, отличие начального состояния от вакуумного означало бы, что на самых ранних этапах инфляции во Вселенной имелись частицы с огромными физическими импульсами; такое предположение не выглядит физически оправданным. Итак, мы будем в дальнейшем рассматривать в качестве начального состояния вакуум по отношению к операторам $A_{\mathbf{k}}^\dagger$ и $A_{\mathbf{k}}$. Подчеркнём, что мы работаем в гайзенберговской формулировке, так что это состояние не меняется со временем. В теории поля в пространстве де Ситтера вакуумное по отношению к операторам $A_{\mathbf{k}}^\dagger$ и $A_{\mathbf{k}}$ состояние называют вакуумом Банча–Дэвиса.

Отметим, что согласно (13.17) амплитуды мод поля φ падают со временем под горизонтом как a^{-1} , то есть так же, как уменьшается физический импульс, что вполне соответствует проведённому выше качественному анализу.

С другой стороны, при больших временах на инфляционной стадии моды находятся за горизонтом, и слагаемым k^2 в уравнении (13.19) можно пренебречь. В этом режиме поле χ имеет растущую моду

$$\chi = \text{const} \cdot a(\eta), \quad (13.21)$$

которой соответствует не зависящая от времени мода поля φ . Имеется и падающее решение

$$\chi(\eta) = a(\eta) \int d\eta \frac{\text{const}}{a^2}.$$

⁵Существенно, что общий множитель в действии (13.18) имеет стандартное значение 1/2.

Последнее решение неинтересно в нашем контексте, поскольку соответствующее ему поле φ быстро убывает и становится пренебрежимо малым вскоре после выхода моды за горизонт.

Итак, при больших временах оператор поля χ растёт как масштабный фактор, а оператор поля φ держится постоянным, что вполне соответствует нашему предварительному качественному рассмотрению. Нас интересует выражение для этого постоянного оператора, которое и определит спектр мощности возмущений инфлатонного поля за горизонтом на инфляционной стадии. Чтобы найти это выражение, иными словами, чтобы спиши решения (13.20) и (13.21), необходимо решить уравнение (13.19) вблизи того момента времени, когда мода с данным k пересекает горизонт. На небольшом интервале времени вблизи этого момента можно использовать выражение (13.14) для масштабного фактора и записать уравнение (13.19) в виде

$$\chi'' - \frac{2}{\eta^2} \chi + k^2 \chi = 0 .$$

Его решение с положительно-частотной асимптотикой в формальном пределе $\eta \rightarrow -\infty$ равно

$$\chi_k^{(+)} = e^{ik\eta} \left(1 + \frac{i}{k\eta} \right) , \quad (13.22)$$

а решение с отрицательно-частотной асимптотикой получается комплексным сопряжением,

$$\chi_k^{(-)} = [\chi_k^{(+)}]^* .$$

Как и ожидалось, под горизонтом (ранние времена, $k|\eta| \gg 1$) эти решения осцилируют с частотой k , а за горизонтом ($k|\eta| \ll 1$, поздние времена) они ведут себя как $\eta^{-1} \propto a(\eta)$. Требуя, чтобы задолго до пересечения горизонта поле имело вид (13.20), вблизи времени пересечения горизонта мы можем записать для вклада мод с импульсами порядка k в оператор поля χ выражение

$$\chi(\mathbf{x}, \eta)_{\{k\}} = \int_{\{k\}} \frac{d^3 k}{(2\pi)^{3/2} \sqrt{2k}} \left(e^{-i\mathbf{k}\mathbf{x}} \chi_k^{(+)}(\eta) A_{\mathbf{k}}^\dagger + e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}} \chi_k^{(-)}(\eta) A_{\mathbf{k}} \right) , \quad (13.23)$$

где обозначение $\{k\}$ подчёркивает, что речь идёт не о всех модах, а только о модах с импульсами вблизи фиксированного импульса k . Через достаточно долгое время после пересечения горизонта, то есть при $|\eta| \ll k^{-1}$ выражение (13.23) можно представить в виде

$$\chi(\mathbf{x}, \eta)_{\{k\}} = \int_{\{k\}} \frac{d^3 k}{(2\pi)^{3/2} \sqrt{2k}} \left(-\frac{1}{k\eta} \right) (e^{-i\mathbf{k}\mathbf{x}} \tilde{A}_{\mathbf{k}}^\dagger + e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}} \tilde{A}_{\mathbf{k}}) ,$$

где операторы $\tilde{A}_{\mathbf{k}}^\dagger$ и $\tilde{A}_{\mathbf{k}}$ отличаются от операторов $A_{\mathbf{k}}^\dagger$ и $A_{\mathbf{k}}$ несущественными фазовыми множителями и по-прежнему удовлетворяют стандартным коммутационным соотношениям для операторов рождения и уничтожения. Используя (13.17) и (13.14), для инфлатонного поля φ после пересечения горизонта получаем

$$\varphi(\mathbf{x}, \eta)_{\{k\}} = \int_{\{k\}} \frac{d^3 k}{(2\pi)^{3/2} \sqrt{2k}} \frac{H}{k} (e^{-i\mathbf{k}\mathbf{x}} \tilde{A}_{\mathbf{k}}^\dagger + e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}} \tilde{A}_{\mathbf{k}}) . \quad (13.24)$$

Видно, что за горизонтом инфлатонное поле действительно не зависит от времени. Оно имеет характер случайного гауссова поля (теорема Вика с очевидностью

выполнена, см. также раздел С.2), а вклад импульсов порядка k в его квадрат равен

$$\langle \varphi(\mathbf{x})^2 \rangle_{\{k\}} = \int_{\{k\}} \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{H^2}{2k^3} = \int_{\{k\}} \frac{dk}{k} \frac{H^2}{(2\pi)^2}. \quad (13.25)$$

Отсюда получаем спектр мощности

$$\mathcal{P}_\varphi(k) = \frac{H_k^2}{(2\pi)^2} \quad (13.26)$$

и амплитуду возмущений инфлатонного поля⁶

$$\delta\phi_{\{k\}} \equiv \Delta_\varphi(k) = \frac{H_k}{2\pi}. \quad (13.27)$$

Здесь мы учли одно обстоятельство. Моды с разными импульсами выходят за горизонт в разное время: моды с малыми k (большими длинами волн) — раньше, моды с большими k — позже. Параметр Хаббла на инфляционной стадии хотя и медленно, но зависит от времени. Всё предыдущее рассмотрение, в частности, формула (13.22) и последующие формулы, относилось к отрезку времени вблизи момента выхода моды с импульсом k за горизонт, который мы обозначим η_k ; после выхода за горизонт моды поля φ держатся постоянными. Поэтому в (13.24), и, следовательно, в (13.26) и (13.27) в действительности фигурирует параметр Хаббла, взятый именно в этот момент,

$$H_k = H(\eta_k).$$

Сам же этот момент определяется из условия, что физический импульс равен параметру Хаббла, то есть из уравнения

$$H(\eta_k) = \frac{k}{a(\eta_k)}. \quad (13.28)$$

Таким образом, в правых частях (13.26) и (13.27) имеется слабая зависимость от k , то есть от длины волны моды. Отметим, что соотношение (13.28) нужно воспринимать как равенство по порядку величины, однако в силу медленного изменения параметра Хаббла это несущественно в лидирующем порядке по параметрам медленного скатывания.

В пренебрежении слабой зависимостью параметра Хаббла от времени в течение инфляции, то есть при $H_k = H = \text{const}$, спектр возмущений инфлатона за горизонтом на инфляционной стадии согласно (13.26) не зависит от импульса, то есть является плоским спектром. Это приводит, как мы увидим в следующем разделе, к почти плоскому спектру первичных скалярных возмущений. С другой стороны, медленное изменение свойств фоновой метрики и фонового поля со временем в течение инфляционной стадии находит своё отражение в слабой зависимости амплитуды первичных возмущений от импульса и, в частности, в небольшом наклоне спектра. Это является одним из характерных предсказаний инфляционной теории.

В заключение этого раздела сделаем следующее замечание. Попробуем использовать выражение (13.25) для вычисления полной флуктуации поля. Запишем

$$\langle \varphi^2(\mathbf{x}) \rangle = \int \frac{dk}{k} \frac{H^2}{(2\pi)^2}. \quad (13.29)$$

⁶Тот факт, что численный коэффициент здесь совпал с тем, который фигурирует в оценке (13.13), представляется простым совпадением.

Этот интеграл формально расходится на нижнем пределе⁷, $k \rightarrow 0$ (верхним пределом интегрирования является $k_{max} \sim aH$, поскольку моды с большими импульсами находятся под горизонтом, и выражение (13.25) для них неприменимо). Расходимость эта — логарифмическая, поэтому потенциально большой вклад в $\langle \varphi^2(\mathbf{x}) \rangle$ могут давать экспоненциально малые импульсы. Моды с достаточно малыми импульсами однородны не только в масштабе инфляционного горизонта, но и в масштабе современного горизонта. Кроме того, они выходят за горизонт на очень ранней стадии инфляционного расширения. Поэтому для всех “практических” приложений можно считать, что они просто перенормируют начальное значение классического инфлатонного поля ϕ_c . В то же время, флуктуации инфлатонного поля сверхбольших длин волн могут сделать Вселенную сильно неоднородной на масштабах, заметно превышающих современный горизонт. Такую возможность мы обсудим в разделе 14.1.

13.1.3 Первичные скалярные возмущения

Продолжая наш упрощенный анализ, рассмотрим, к каким первичным скалярным возмущениям приводят найденные в предыдущем разделе возмущения инфлатонного поля. Их можно найти, используя следующую качественную картину (ср. с разделом 5.2). Различные области Вселенной с размером больше горизонта эволюционируют независимо, как различные однородные изотропные Вселенные. Это верно и для инфляционной стадии, причём роль размера горизонта здесь играет H^{-1} . Наличие возмущений инфлатона с физическими длинами волн больше этого размера приводит к тому, что полное (с учётом возмущений) поле инфлатона в этих различных областях принимает несколько разные значения⁸, но в каждой из этих областей оно практически однородно. Следовательно, эти различные области (“локальные вселенные”) находятся на несколько разных стадиях эволюции: области, где полное поле $\phi_c + \delta\phi$ превышает среднее по Вселенной поле ϕ_c , несколько отстают от средней эволюции, а области с $\phi_c + \delta\phi < \phi_c$ опережают среднюю эволюцию⁹, см. рис. 13.2. Время задержки/опережения δt можно определить из соотношения

$$\dot{\phi}_c \delta t = \delta\phi . \quad (13.30)$$

Из-за такой задержки/опережения локальные вселенные выходят из инфляционной стадии при несколько разных временах, соответственно и плотность энергии в них различна: в областях, вышедших из инфляции раньше, плотность энергии успевает уменьшиться из-за расширения Вселенной к тому моменту, когда инфляционная стадия прекратится в других областях. Таким образом образуются возмущения плотности, оценка для которых имеет вид

$$\delta\rho \sim \dot{\rho}\delta t .$$

Во время выхода из инфляции для плотности энергии имеем

$$\dot{\rho} \sim -H\rho ,$$

⁷Отметим, что эта расходимость не связана с тем, что рассматривается произведение операторов φ в одной точке. Соответствующая расходимость тоже имеется, но она, как и в случае фонового пространства Минковского, носит ультрафиолетовый характер. Нас же здесь интересует инфракрасная расходимость, связанная с большими амплитудами длинноволновых мод и специфичная для инфляционной внешней метрики.

⁸Такая картина справедлива лишь при определённом выборе калибровки, однако этот тонкий момент мы опустим при нашем качественном рассмотрении.

⁹Здесь предполагается для определённости, что во время инфляции поле ϕ уменьшается.

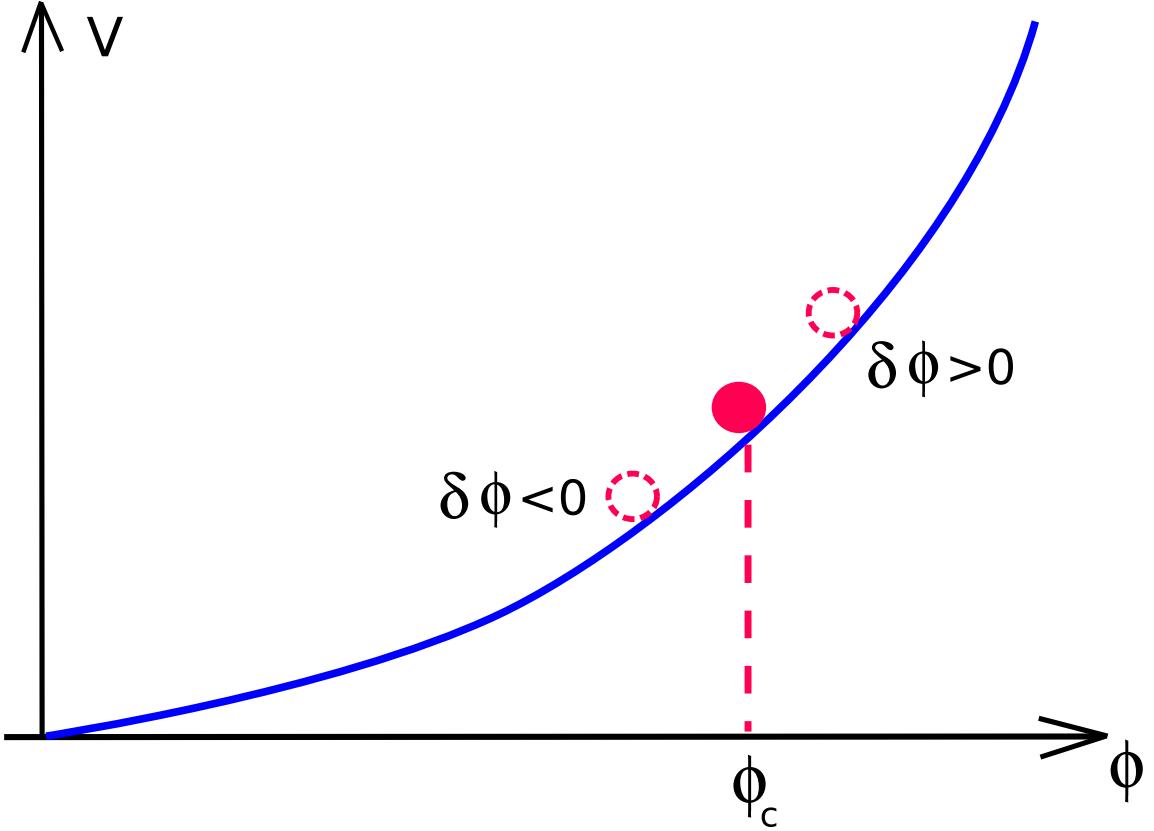


Рис. 13.2: Инфляционное поле в разных областях хабболовского размера с учётом возмущений инфлятона.

и из (13.30) получаем оценку для амплитуды

$$\frac{\delta\rho}{\rho} \sim \frac{H}{\dot{\phi}_c} \delta\phi .$$

Эти соображения не только позволяют оценить амплитуду возмущений плотности, но и приводят к выводу о том, что поле возмущений плотности пропорционально полю возмущений инфлятона, то есть

$$\frac{\delta\rho(\mathbf{x})}{\rho} = \text{const} \cdot \frac{H}{\dot{\phi}_c} \varphi(\mathbf{x}) . \quad (13.31)$$

Таким образом, ожидается, что возмущения плотности представляют собой гауссово случайное поле, спектр мощности которого определяется спектром мощности возмущений инфлятона.

Приведённые соображения являются, разумеется, качественными и недостаточно аккуратными. Во-первых, они не позволяют найти численный коэффициент в (13.31). Во-вторых, что ещё более важно, они не указывают, в какой именно момент времени следует выбирать параметры H и $\dot{\phi}_c$, фигурирующие в (13.31). Более того, сама величина $\delta\rho/\rho$ не подходит в качестве хорошо определённого объекта вычислений хотя бы потому, что она зависит от времени даже для мод за горизонтом. Мы рассмотрим эти вопросы в разделе 13.2, где мы построим аккуратную теорию, а здесь, забегая вперёд, скажем, что коэффициент в соотношении типа (13.31) для правильно определённой характеристики скалярных возмущений (а именно, для пространственной кривизны в сопутствующей системе отсчёта \mathcal{R} , см. раздел 5.2) равен

единице, а параметры H и $\dot{\phi}_c$ следует брать в момент, когда соответствующая мода выходит за горизонт на инфляционной стадии. Пока же мы запишем окончательный результат для амплитуды возмущений плотности и спектра мощности:

$$\Delta_{\mathcal{R}} = \left(\frac{H}{|\dot{\phi}_c|} \right)_{\eta_k} \delta\phi_{\{k\}} = \left(\frac{H^2}{2\pi|\dot{\phi}_c|} \right)_{\eta_k}, \quad (13.32)$$

$$\mathcal{P}_{\mathcal{R}}(k) = \left(\frac{H^2}{2\pi\dot{\phi}_c} \right)_{\eta_k}^2. \quad (13.33)$$

Обозначение η_k указывает, что соответствующие величины следует брать в тот момент времени, когда выполняется соотношение (13.28). Благодаря медленному скатыванию, величины H и $\dot{\phi}_c$ медленно зависят от времени на стадии инфляции, поэтому зависимость от импульса в (13.32) — слабая, и спектр близок к плоскому спектру Гаррисона–Зельдовича.

Удобно рассматривать не саму величину η_k , а число e -фолдингов с этого момента до окончания инфляции $N_e(k)$. Оценка последней величины близка к оценкам, сделанным в Главе 11. А именно, современный импульс волны равен $q_0 = k/a_0$, поэтому соотношение (13.28) можно записать в виде

$$q_0(k) \frac{a_0}{a_e} e^{N_e(k)} = H(\eta_k). \quad (13.34)$$

Для оценки входящего сюда отношения масштабных факторов будем считать, что на стадии пост-инфляционного разогрева плотность энергии ведёт себя как $\rho(a) \propto a^{-\beta}$, где $\beta = \text{const}$; из результатов Главы 15 следует, что на этой стадии β в действительности изменяется от $\beta = 3$ (пылевидное уравнение состояния) до $\beta = 4$ (релятивистское вещество). Тогда

$$\frac{a_0}{a_e} = \frac{a_0}{a_{reh}} \frac{a_{reh}}{a_e} \simeq \frac{T_{reh}}{T_0} \left(\frac{\rho_e}{\rho_{reh}} \right)^{1/\beta},$$

где мы пренебрели изменением числа степеней свободы на горячей стадии (это несущественно для дальнейших оценок). Используя уравнение Фридмана, связь $\rho_{reh} \simeq T_{reh}^4$ и пренебрегая множителями порядка единицы, запишем соотношение (13.34) в виде

$$e^{N_e(k)} \simeq \frac{T_0}{q_0} \frac{T_{reh}^{4/\beta-1} H_e^{1-2/\beta}}{M_{Pl}^{2/\beta}} \frac{H(\eta_k)}{H_e}. \quad (13.35)$$

Для $3 \leq \beta < 4$ это соотношение показывает, что $N_e(k)$ убывает при общем уменьшении масштаба инфляции и температуры разогрева. Его полезно записать и в другом виде, введя параметр $T_e \simeq \sqrt{M_{Pl} H_e}$, имеющий смысл температуры, которая появилась бы во Вселенной при мгновенном разогреве. Из (13.35) будем иметь¹⁰

$$N_e(k) \simeq \ln \frac{T_0}{q_0} - \left(\frac{4}{\beta} - 1 \right) \ln \frac{T_e}{T_{reh}} - \frac{1}{2} \ln \frac{M_{Pl}}{H_e} + \ln \frac{H(\eta_k)}{H_e}. \quad (13.36)$$

¹⁰Отметим, что формула (13.36), применённая к масштабам порядка современного горизонта, $k/a_0 \sim H_0$, согласуется с грубой оценкой (11.15). Действительно, при получении (11.15) мы считали разогрев мгновенным, а параметр Хаббла в начале инфляции равным M_{Pl} , и по-существу требовали, чтобы в начале инфляции волны указанного масштаба находились под горизонтом. В используемых здесь переменных всё это означает, что $T_e = T_{reh}$, $H_e \sim T_{reh}^2/M_{Pl}$, $H(\eta_k) \sim M_{Pl}$ и $q_0 \sim H_0$. Выражение (13.36) при таких значениях на самом деле переходит в правую часть (11.15).

Третье слагаемое здесь определяет общую зависимость $N_e(k)$ от энергетического масштаба инфляции, а второе учитывает неопределенность, связанную с процессом разогрева.

Интересующие нас современные длины волн находятся в диапазоне от сотен килопарсек до длин порядка современного размера горизонта, то есть порядка 10 Гпк. Зависимость N_e от импульса слабая (логарифмическая), поэтому для оценки достаточно рассмотреть волну с каким-то промежуточным импульсом, скажем,

$$q_0 = 0.002 \text{ Мпк}^{-1}. \quad (13.37)$$

Наибольшая величина под логарифмом в (13.36) — это отношение

$$\frac{T_0}{q_0} \simeq 10^{28},$$

Для оценки остальных слагаемых в (13.36) рассмотрим, например, модель инфляции с большим полем и потенциалом $V(\phi) = m^2\phi^2/2$. В этом случае $H_e \sim m\phi_e/M_{Pl} \sim m \sim 10^{-6}M_{Pl}$ (см. (13.61)), $T_e \sim 10^{-3}M_{Pl}$, а температура разогрева может варьироваться в широких пределах, скажем $T_{reh} = 10^8 - 10^{16}$ ГэВ. Последнее слагаемое в (13.36) невелико, и мы им пренебрежём. Считая, что $3 \leq \beta < 4$, получим из (13.36) оценку $N_e = 50 - 57$, в зависимости от температуры разогрева. Аналогичные значения получаются и в других моделях с большим полем. Традиционно в этих моделях используют диапазон значений

$$N_e \simeq 50 - 60.$$

Таким образом, в (13.32) фигурируют величины, характерные для инфляционной стадии за 50 – 60 e -фолдингов до её окончания.

Сделаем в заключение этого раздела несколько замечаний. Во-первых, в спектре возмущений инфлатона к концу инфляции практически отсутствует падающая мода: за горизонтом убывающее со временем решение уравнения (13.16) ведёт себя как

$$\varphi_{dec} \propto \int \frac{d\eta}{a^2(\eta)} = \int \frac{dt}{a(t)}$$

и амплитуда этой падающей моды убывает за $N_e \sim 60$ e -фолдингов в $\exp(N_e)$ раз. Соответственно, падающая мода отсутствует и в скалярных возмущениях. Таким образом, предположение о пренебрежимости падающей моды выполняется в инфляционной теории с высочайшей точностью. Во-вторых, описанный здесь механизм приводит к генерации *адиабатической* моды скалярных возмущений, поскольку физические условия к концу инфляции во всех областях Вселенной одинаковы: вся энергия во Вселенной обусловлена энергией инфлатона. Генерация мод постоянной кривизны требует введения дополнительных механизмов, см. по этому поводу разделы 14.2 и 14.4. Наконец, гауссов характер возмущений плотности имеет место постольку, поскольку слагаемыми в уравнении для возмущений инфлатона, нелинейными по отношению к этим возмущениям, можно пренебречь. Мы увидим в разделе 13.5, что такие слагаемые действительно очень малы, так что при рассматриваемом механизме генерации скалярные возмущения действительно гауссова с высокой степенью точности.

Мы обсудим следствия формулы (13.32) в разделе 13.4. Перед этим мы сначала изучим вопрос о скалярных возмущениях на строгом уровне, а затем рассмотрим ещё один важный вопрос — генерацию тензорных возмущений.

13.2 *Скалярные возмущения с учётом возмущений метрики

В этом разделе мы приведём аккуратный вывод результатов, относящихся к генерации скалярных возмущений на инфляционной стадии. Наша конечная цель — найти точное линеаризованное уравнение, описывающее возмущения инфлатона и связанные с ними скалярные возмущения метрики, а в моделях с медленным скатыванием получить формулу (13.32) для введённой в разделе 5.2 величины \mathcal{R} — пространственной кривизны гиперповерхностей сопутствующей системы отсчёта (при этом нам ещё предстоит разобраться, что называть сопутствующей системой, то есть какая величина играет роль скорости среды на инфляционной стадии).

Для изучения скалярных возмущений на инфляционной стадии мы, как и в Главах 2, 4 и 6, будем использовать конформную ньютонову калибровку, в которой с учётом отсутствия тензора анизотропных напряжений (см. ниже) выражение для возмущённой метрики (2.66) имеет вид

$$ds^2 = a^2(\eta)[(1 + 2\Phi)d\eta^2 - (1 - 2\Phi)d\mathbf{x}^2]. \quad (13.38)$$

Начнём с вычисления тензора энергии-импульса для возмущений инфлатонного поля. Согласно (12.4) полный тензор энергии-импульса со смешанными компонентами равен

$$T_\nu^\mu = g^{\mu\lambda}\partial_\nu\phi\partial_\lambda\phi - \delta_\nu^\mu\left(\frac{1}{2}g^{\lambda\rho}\partial_\lambda\phi\partial_\rho\phi - V(\phi)\right). \quad (13.39)$$

Подставляя сюда разложение поля в виде (13.10) (мы вновь используем обозначение ϕ_c для фонового поля инфлатона) и выражение для метрики (13.38), получаем для интересующих нас компонент тензора энергии-импульса в линейном порядке по возмущениям

$$\begin{aligned} \delta T_0^0 \equiv \delta\rho &= \frac{1}{a^2}[-\Phi\phi_c'^2 + \phi_c'\varphi'] + \frac{dV(\phi_c)}{d\phi_c}\varphi \\ &= \frac{1}{a^2}\left[-\Phi\phi_c'^2 + \phi_c'\varphi' - \left(\phi_c'' + 2\frac{a'}{a}\phi_c'\right)\varphi\right], \end{aligned} \quad (13.40)$$

$$\delta T_i^0 = \frac{1}{a^2}\phi_c'\partial_i\varphi, \quad (13.41)$$

где штрих, как обычно, обозначает производную по конформному времени η . Кроме того, из общей формулы (13.39) и пространственной однородности ϕ_c следует, что $T_j^i \propto \delta_j^i$, то есть тензор анизотропных напряжений равен нулю; выражение для T_j^i нам не потребуется. При получении последней формулы в (13.40) мы использовали тот факт, что фоновое поле удовлетворяет уравнению движения, которое в конформном времени имеет вид

$$\phi_c'' + 2\frac{a'}{a}\phi_c' + a^2\frac{dV(\phi_c)}{d\phi_c} = 0.$$

Напомним, что по определению потенциала скоростей $\delta T_i^0 = -(\rho+p)\partial_i v$ (см. (2.37) и (2.65)). Из (12.6) и (12.7) следует, что невозмущённые плотность энергии и давление удовлетворяют соотношению

$$\rho + p = \frac{1}{a^2}\phi_c'^2.$$

Поэтому (13.41) приводит к следующему выражению для эффективного потенциала скоростей в теории инфлатонного поля:

$$v = -\frac{\varphi}{\phi'_c} . \quad (13.42)$$

Теперь становится ясно, что следует понимать под сопутствующей системой отсчёта в рассматриваемой теории: это та система, где поле постоянно в пространстве, поскольку именно в этой системе $v_i = \partial_i v = 0$.

Теперь можно записать интересующие нас уравнения для скалярных возмущений, а именно, 00- и $0i$ -компоненты линеаризованных уравнений Эйнштейна, то есть уравнения (2.71) и (2.72):

$$\Delta\Phi - 3\frac{a'}{a}\Phi' - 3\frac{a'^2}{a^2}\Phi = -4\pi G\phi_c'^2\Phi + 4\pi G\left[\phi_c'\varphi' - \left(\phi_c'' + 2\frac{a'}{a}\phi_c'\right)\varphi\right] \quad (13.43)$$

$$\Phi' + \frac{a'}{a}\Phi = 4\pi G\phi_c'\varphi . \quad (13.44)$$

Этих двух уравнений достаточно для того, чтобы найти эволюцию двух неизвестных функций времени Φ и φ . Удобство выбора именно этой пары уравнений состоит в том, что в неё не входят вторые производные этих функций по времени.

- ▷ Задача 1. Показать, что векторные возмущения не генерируются в инфляционных моделях со скалярными полями.
- ▷ Задача 2. Показать, что ij -компоненты линеаризованных уравнений Эйнштейна удовлетворяются тождественно, если выполнены уравнения (13.43) и (13.44).
- ▷ Задача 3. Найти линеаризованное уравнение движения, следующее из вариации действия по ϕ . Показать, что оно удовлетворяется тождественно, если выполнены уравнения (13.43) и (13.44).

Таким образом, не выписанные в тексте уравнения не дают ничего нового по сравнению с системой (13.43), (13.44).

До сих пор мы не использовали тот факт, что $a(\eta)$ и $\phi_c(\eta)$ удовлетворяют уравнениям Эйнштейна. Воспользуемся теперь этим фактом. А именно, используем (2.3) и (2.4) и запишем

$$\frac{a''}{a} - 2\frac{a'^2}{a^2} = -4\pi G(\rho + p)a^2 = -4\pi G\phi_c'^2 . \quad (13.45)$$

Данное соотношение позволяет преобразовать первое слагаемое в правой части (13.43) и записать это уравнение в виде

$$\Delta\Phi - 3\frac{a'}{a}\Phi' - \left(\frac{a''}{a} + \frac{a'^2}{a^2}\right)\Phi = 4\pi G\left[\phi_c'\varphi' - \left(\phi_c'' + 2\frac{a'}{a}\phi_c'\right)\varphi\right] . \quad (13.46)$$

Систему (13.44), (13.46) удобно преобразовать следующим образом. Выразим из (13.44) Φ через Φ' и ϕ_c и подставим это выражение в (13.46). Воспользуемся снова (13.45) и представим полученное уравнение в форме

$$\Delta\Phi = 4\pi G\frac{a}{a'}\phi_c'^2 \cdot \frac{d}{d\eta} \left(\Phi + \frac{a'}{a\phi_c'}\varphi\right) . \quad (13.47)$$

Отметим, что согласно определению (5.16) и с учётом выражения для “потенциала скоростей” (13.42) стоящая в правой части величина в точности совпадает с $-\mathcal{R}$, поскольку

$$\mathcal{R} = -\Phi + \frac{a'}{a}v = -\left(\Phi + \frac{a'}{a\phi'_c}\varphi\right).$$

В соответствии со сказанным выше, величина \mathcal{R} представляет собой пространственную кривизну гиперповерхностей постоянного инфляционного поля.

Из (13.47) видно, что естественной переменной является не само поле φ , а линейная комбинация

$$\tilde{\varphi} = \varphi + \frac{a\phi'_c}{a'}\Phi. \quad (13.48)$$

По аналогии с полем χ , определённым согласно (13.17), удобно ввести поле u соотношением

$$\tilde{\varphi} = \frac{u}{a},$$

так что

$$u = -z\mathcal{R}, \quad (13.49)$$

где

$$z = \frac{a^2\phi'_c}{a'}.$$

Функцию u в литературе называют переменной Муханова–Сасаки. В её терминах уравнение (13.47) записывается в виде

$$\Delta\Phi = 4\pi G\phi'_c \frac{z}{a} \cdot \frac{d}{d\eta} \left(\frac{u}{z} \right). \quad (13.50)$$

Второе уравнение для Φ и u — это уравнение (13.44), записанное в этих переменных:

$$\frac{a'}{a^2} \frac{d}{d\eta} \left(\frac{a^3}{a'} \Phi \right) = 4\pi G\phi'_c u. \quad (13.51)$$

Система (13.50), (13.51) сводится к уравнению второго порядка для функции u : подействовав оператором Δ на уравнение (13.51) и использовав (13.50), получаем

$$\frac{d}{d\eta} \left[z^2 \frac{d}{d\eta} \left(\frac{u}{z} \right) \right] = z\Delta u,$$

или окончательно

$$u'' - \frac{z''}{z}u - \Delta u = 0. \quad (13.52)$$

Подчеркнём, что это уравнение — точное в теории с одним инфляционным полем и без другой материи. Приближение медленного скатывания при его выводе не использовалось; не использовали мы и каких-либо предположений о форме скалярного потенциала¹¹. В этой связи отметим, что растущее решение уравнения (13.52) за горизонтом, когда последним слагаемым в нём можно пренебречь, имеет вид

$$u = \text{const} \cdot z.$$

¹¹Уравнение типа (13.52) имеет место в общем случае скалярных возмущений в расширяющейся Вселенной, заполненной однокомпонентной средой [84, 85]. Его обобщение на случай более сложного кинетического члена скалярного поля см. в книге [87].

Согласно (13.49) кривизна \mathcal{R} для этого решения не зависит от времени, что ещё раз иллюстрирует утверждение, сделанное в разделе 5.2.

Перейдём теперь к случаю медленного скатывания. Важно иметь в виду, что хотя поле ϕ_c медленно меняется со временем t , величина $\dot{\phi}_c = a\dot{\phi}_c$ не мала и быстро меняется из-за быстрого изменения масштабного фактора. Удобно поэтому записать величину z в виде

$$z = a \frac{\dot{\phi}_c}{H} . \quad (13.53)$$

В этом выражении быстро меняющимся фактором является $a(t)$, в то время как $\dot{\phi}_c$ и H можно считать постоянными в лидирующем порядке по параметрам медленного скатывания. Поэтому в лидирующем порядке уравнение (13.52) превращается в знакомое нам уравнение (см. (13.19))

$$u'' - \frac{a''}{a}u - \Delta u = 0 , \quad (13.54)$$

причём в приближении медленного скатывания

$$a = -\frac{1}{H\eta} . \quad (13.55)$$

На ранних временах на стадии инфляции, когда мода с фиксированным конформным импульсом k находится глубоко под горизонтом, поле u совпадает с полем $\chi = a\varphi$. Действительно, как видно из (13.50), $\Phi \propto k^{-1}u$ в формальном пределе $k \rightarrow \infty$, поэтому вклад поля Φ в правую часть (13.48) мал и $\tilde{\varphi} = \varphi$. Отсюда следует, что квантовое поле u при больших отрицательных η имеет в точности вид правой части (13.20).

▷ Задача 4. Найти поведение $\Phi(\eta)$ и $\varphi(\eta)$ — решений уравнений (13.50), (13.51) в импульсном представлении — при больших отрицательных η (глубоко под горизонтом).

Последнее соображение не обязательно использовать для нахождения вида квантового поля u при больших отрицательных η . Поле u можно прокvantовать и непосредственно. Для этого необходимо найти действие для этого поля. Чтобы в результате вариации действия получилось уравнение (13.52), в общем случае действие должно иметь вид

$$S_u = \frac{c}{2} \int d\eta d^3x \left[u'^2 + \frac{z''}{z}u^2 - (\partial_i u)^2 \right] . \quad (13.56)$$

Это действие, разумеется, должно получаться из исходного квадратичного действия для возмущений (суммы квадратичных по возмущениям частей действия Эйнштейна–Гильберта и действия скалярного поля) путём исключения поля Φ . Действуя таким образом, можно было бы непосредственно вычислить численный коэффициент c . Однако идти таким длинным путём не обязательно: численный коэффициент c можно найти, потребовав, чтобы слагаемое χ'^2 входило в действие с правильным коэффициентом $1/2$. Поскольку $u = \chi + z\Phi$, из этого требования следует $c = 1$. Кvantование теории с действием (13.56) происходит на ранних временах так же, как кvantование скалярного поля в пространстве Минковского.

Итак, в приближении медленного скатывания выражение для оператора u в точности совпадает с выражением для оператора χ раздела 13.1.2, а выражение для оператора $\tilde{\varphi}$ — с выражением для оператора χ/a , который в упрощенном анализе раздела 13.1.2 был оператором возмущений инфлатонного поля. За горизонтом

оператор $\tilde{\varphi}$ держится постоянным и равным правой части (13.24), соответствующее гауссово случайное поле имеет спектр мощности (13.26). Наконец, соотношения (13.49) и (13.53) дают связь между $\tilde{\varphi}$ и \mathcal{R} :

$$\mathcal{R} = -\frac{H}{\dot{\phi}_c} \tilde{\varphi}.$$

Отсюда и получается выражение (13.33) для спектра мощности величины \mathcal{R} в приближении медленного скатывания.

- ▷ Задача 5. Считая, что параметры медленного скатывания ϵ и η не зависят от времени и малы, найти аналог уравнения (13.54) в первом нетривиальном порядке по этим параметрам. Указание: учесть, что формула (13.55) для масштабного фактора неверна при $\epsilon \neq 0$. Решив полученные уравнения, найти спектр мощности скалярных возмущений $\mathcal{P}_{\mathcal{R}}$ в первом нетривиальном порядке по ϵ и η . Показать, что зависимость ϵ и η от времени является эффектом следующего порядка.

13.3 Тензорные возмущения

Механизм генерации тензорных возмущений — в точности тот же, что рассмотренный в разделе (13.1.2) механизм генерации возмущений инфлатонного поля. Мы видели в разделе 2.3.1, что тензорная мода фиксированной поляризации удовлетворяет уравнению (2.55), которое совпадает с уравнением (13.16) для возмущений инфлатаона. Единственное различие в том, что действие (2.56) для тензорных мод отличается от действия скалярного поля (13.15) общим множителем $1/(32\pi G) \equiv M_{Pl}^2/(32\pi)$. Введём канонически нормированное поле тензорных возмущений с поляризацией A ,

$$\varphi^{(A)} = \sqrt{\frac{M_{Pl}^2}{32\pi}} h^{(A)}.$$

Его квантовая динамика в точности совпадает с динамикой возмущений инфлатаона, так что спектр мощности даётся формулой (13.26),

$$\mathcal{P}_{\varphi^{(A)}}(k) = \frac{H_k^2}{(2\pi)^2}.$$

Отсюда для спектра мощности тензорных возмущений получим

$$\mathcal{P}_T = \frac{32\pi}{M_{Pl}^2} \sum_{A=+, \times} \mathcal{P}_{\varphi^{(A)}}(k) = \frac{16}{\pi} \frac{H_k^2}{M_{Pl}^2}, \quad (13.57)$$

где мы учли, что тензорные моды имеют две поляризации. Безразмерная амплитуда тензорных возмущений равна

$$h \equiv \Delta_T = \sqrt{\mathcal{P}_T} = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \frac{H_k}{M_{Pl}}. \quad (13.58)$$

Здесь, как и раньше, фигурирует параметр Хаббла на момент выхода моды с импульсом k за горизонт на инфляционной стадии. Для современных длин волн, сравнимых

с космологическими масштабами, это время соответствует $50 - 60$ е-фолдингам до окончания инфляции. Как и в случае возмущений инфлатона, первичные тензорные возмущения представляют собой гауссово случайное поле¹². Его спектр близок к плоскому.

В заключение этого раздела сделаем замечание, которое вполне аналогично замечанию после формулы (13.29). Оно касается длинноволновых мод тензорных возмущений, которые рано выходят за горизонт на инфляционной стадии и до сих пор находятся за горизонтом. Такие моды, формально, вносят логарифмически расходящийся инфракрасный вклад $h_{ij}^{(IR)}$ в полные возмущения метрики h_{ij} . На всех космологически интересных масштабах расстояний вклад этих мод настолько слабо зависит от пространственных координат, что результирующую метрику

$$g_{ij} = a^2(\eta_{ij} + h_{ij}^{(IR)})$$

можно считать не зависящей от точки пространства. Сделав не зависящее от времени преобразование координат x^i , такую метрику можно привести к стандартному виду $g_{ij} = a^2\eta_{ij}$. При этом классическое поле инфлатона ϕ_c останется однородным, а инфракрасные моды гравитационного поля не будут оказывать никакого влияния на эволюцию после того, как они выйдут за горизонт на инфляционной стадии. Благодаря последнему обстоятельству проведённый в этом и предыдущих разделах анализ мод с меньшими длинами волн остаётся в силе. Инфракрасные тензорные, равно как и скалярные возмущения несущественны для описания видимой части Вселенной (по поводу возможного влияния инфракрасных мод на сверхбольших масштабах см. раздел 14.1).

13.4 Амплитуды и наклоны спектров. Сравнение с наблюдениями.

Обсудим более конкретно, какие предсказания относительно спектров первичных скалярных и тензорных возмущений дают модели инфляции и какими параметрами должны обладать потенциалы инфлатона в этих моделях, чтобы их предсказания согласовывались с имеющимися наблюдательными данными. При этом в качестве иллюстрации мы будем рассматривать три простые модели, изученные в разделах 12.2.1, 12.2.2 и 12.2.3.

13.4.1 Амплитуда скалярных возмущений: плоскостность потенциала инфлатона

Начнём с амплитуды скалярных возмущений. Наблюдательные данные согласуются с представлением о том, что первичные возмущения — гауссова и содержат только адиабатическую моду. Они дают значение для величины $A_{\mathcal{R}}$, приведённое в (5.37), так что амплитуда первичных скалярных возмущений равна

$$\Delta_{\mathcal{R}} = \sqrt{\mathcal{P}_{\mathcal{R}}} = 5.0 \cdot 10^{-5}. \quad (13.59)$$

В инфляционной теории эта амплитуда даётся формулой (13.32). Используя уравнения медленного скатывания (12.11) и (12.12), выражение (13.32) можно записать

¹²Мы вкратце обсудим в разделе 13.5, в какой степени этот результат является точным.

в виде

$$\Delta_{\mathcal{R}} = \frac{3H^3}{2\pi V'} = 4 \left(\frac{8\pi}{3} \right)^{1/2} \frac{V^{3/2}}{M_{Pl}^3 V'} , \quad (13.60)$$

причём, как мы видели в разделе 13.1.3, входящие в эту формулу величины должны вычисляться в момент на инфляционной стадии, соответствующий $N_e = 50 - 60$ e -фолдингам до её окончания.

Мы сейчас убедимся, что величина (13.60) определяется фигурирующими в потенциале инфлатона константами связи, причём малость этой величины требует малости этих констант, то есть плоскостности потенциала. В качестве первого примера рассмотрим инфляционные модели с большим полем, в которых потенциал имеет степенной вид (12.23). В дальнейшем мы будем опять опускать индекс s у фонового инфлатонного поля. В моделях с большим полем

$$\frac{V^{3/2}}{V'} = \frac{\sqrt{g}}{n} \phi^{n/2+1}$$

Значение поля ϕ в интересующий нас момент связано с числом e -фолдингов соотношением (12.33). Используя это соотношение, получим для величины (13.60) следующее выражение:

$$\Delta_{\mathcal{R}} = \frac{4}{n} \left(\frac{8\pi}{3} \right)^{1/2} \left(\frac{nN_e}{4\pi} \right)^{(n+2)/4} \left(\frac{g}{M_{Pl}^{4-n}} \right)^{1/2} .$$

Видно, что малость амплитуды скалярных возмущений определяется малостью константы связи g (в планковских единицах при $n \neq 4$). Иначе говоря, для константы связи можно записать

$$\frac{g}{M_{Pl}^{4-n}} = \frac{3}{8\pi} \left(\frac{n}{4} \right)^2 \cdot \left(\frac{4\pi}{nN_e} \right)^{(n+2)/2} \cdot \Delta_{\mathcal{R}}^2 ,$$

что в силу (13.59) является весьма малой величиной. Так, для потенциалов второго и четвёртого порядка (12.28) и (12.29), для которых $n = 2$, $g = m^2/2$ и $n = 4$, $g = \lambda/4$ соответственно, имеем

$$\frac{m}{M_{Pl}} = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cdot \frac{\pi}{N_e} \cdot \Delta_{\mathcal{R}} \simeq 10^{-6} , \quad (13.61)$$

$$\lambda = \frac{3}{2\pi} \cdot \left(\frac{\pi}{N_e} \right)^3 \cdot \Delta_{\mathcal{R}}^2 \simeq 10^{-13} , \quad (13.62)$$

где для численных оценок мы положили $N_e = 60$. Как мы уже обсуждали в разделе 12.2.1, потенциал инфлатона должен быть весьма плоским при сверх-планковских значениях полей.

Перейдём теперь к инфляции вблизи максимума потенциала, то есть к модели раздела 12.2.2 с потенциалом четвёртого порядка, по-прежнему предполагая, что выполняется (12.50). В этой модели

$$\frac{V^{3/2}}{V'} = \frac{V_0^{3/2}}{\lambda \phi^3} ,$$

а значение поля ϕ связано с числом e -фолдингов соотношением (12.56). Используя это соотношение, для константы связи λ и амплитуды скалярных возмущений получим в точности соотношение (13.62), так что и в этой модели $\lambda \simeq 10^{-13}$.

- ▷ Задача 6. Найти значения констант связи в моделях раздела 12.2.2 с потенциалами вида $V = V_0 - g\phi^n$ с $n > 2$, считая, что инфляция происходит в режиме $V_0 \gg g\phi^n$.

В моделях гибридной инфляции малость амплитуды возмущений плотности также требует плоскости потенциала, но теперь уже в окрестности критического значения ϕ_c . Поскольку в этих моделях можно выбрать $\phi_c \ll M_{Pl}$, плоскость потенциала вблизи этой точки уже не выглядит столь проблематичной.

- ▷ Задача 7. Рассмотреть модель гибридной инфляции раздела 12.2.3 с квадратичным потенциалом инфлатона (12.59). Считая, что за $N_e \sim 50 - 60$ е-фолдингов до конца инфляции поле ϕ несильно отличается от критического, получить соотношение

$$\Delta_R \simeq \frac{1}{2\pi\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{\eta^{3/2}} \cdot \frac{m}{\phi_c},$$

где η — параметр медленного скатывания. При суб-планковских ϕ_c из этого соотношения и мягкого ограничения $\eta < 0.1$ (мы увидим в дальнейшем, что наблюдательное ограничение на самом деле заметно сильнее) следует ограничение на массу инфлатона $m \lesssim 10^{-6} M_{Pl}$.

Из рассмотренных примеров ясно, что в рамках общей теории относительности реализация инфляционной стадии на раннем этапе развития Вселенной с помощью инфлатона, минимально связанного с гравитацией, требует расширения Стандартной модели физики частиц. Возможность реализации инфляционной стадии рассматривается в рамках суперсимметричных обобщений, в моделях Большого объединения и др., при этом плоскость потенциала инфлатона, как мы отмечали в разделе 12.2.4, представляет собой нетривиальную проблему. Иная возможность состоит в расширении самой теории относительности, примером чего служит модель Старобинского.

- ▷ Задача 8. Рассмотреть возможность инфляции в модели с неминимальной связью хиггсовского дублета Стандартной модели H с гравитацией [88],

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{SM} - \frac{M^2}{16\pi} R - \xi H^\dagger H R.$$

Найти значение безразмерной константы ξ , при котором модель становится реалистичной. Вычислить показатели наклонов спектров скалярных и тензорных возмущений (см. раздел 13.4.3). Указание: сделайте подходящую конформную замену метрики, перейдя к теории с минимальной связью скалярного поля с гравитацией (переход от йордановской к эйнштейновской системе).

13.4.2 Амплитуда тензорных возмущений

Рассмотрим теперь соотношение между амплитудами тензорных и скалярных возмущений. Из (13.57) в теориях с медленным скатыванием следует выражение для спектра мощности тензорных возмущений:

$$\mathcal{P}_T = \frac{128}{3} \frac{V}{M_{Pl}^4}. \quad (13.63)$$

Отсюда для отношения тензорного и скалярного спектров получим

$$r \equiv \frac{\mathcal{P}_T}{\mathcal{P}_{\mathcal{R}}} = \frac{1}{\pi} \frac{M_{Pl}^2 V'^2}{V} = 16\epsilon , \quad (13.64)$$

где ϵ — параметр медленного скатывания (12.20). Видно, что при не слишком малых ϵ амплитуда первичных тензорных возмущений довольно велика. Например, в моделях с большим полем из (12.37) следует соотношение

$$r = \frac{4n}{N_e} .$$

Так, модели с потенциалами второго и четвёртого порядка предсказывают

$$\begin{aligned} r &= 0.13 - 0.16 , \quad n = 2 , \\ r &= 0.27 - 0.32 , \quad n = 4 . \end{aligned}$$

Амплитуда первичных тензорных возмущений в этих моделях находится на уровне

$$\Delta_T = r^{1/2} \Delta_{\mathcal{R}} = (1.8 - 2.8) \cdot 10^{-5} . \quad (13.65)$$

С другой стороны, как мы видели в разделах 12.2.2 и 12.2.3, параметр ϵ мал в рассмотренных там моделях инфляции, точнее $\epsilon \ll \eta$. Поэтому без специального подбора параметров амплитуды тензорных возмущений в этих моделях малы.

Эффект от тензорных возмущений, генерированных на инфляционной стадии, можно было бы обнаружить путём измерения анизотропии реликтового излучения [82, 83, 89, 90]. Такой эффект пока не найден; современное ограничение на отношение r составляет

$$r < 0.20 \quad (13.66)$$

на 95%-ном уровне достоверности (см. раздел 5.4; мы ещё вернёмся к этому вопросу ниже). Видно, что наблюдения начинают быть довольно чувствительными к тензорным возмущениям, и уже сегодня модели инфляции с большим полем и степенными потенциалами с $n \geq 4$ начинают входить в противоречие с экспериментом.

Подчеркнём, что ограничение (13.66), вместе с известной амплитудой скалярных возмущений (13.59) позволяют поставить модельно-независимые ограничения на значения параметра Хаббла и, соответственно, плотность энергии к концу инфляции (точнее, за 50 – 60 e -фолдингов до её окончания). Из (13.66) и (13.59) имеем ограничение

$$\mathcal{P}_T < 5.0 \cdot 10^{-10} , \quad \Delta_T < 2.2 \cdot 10^{-5} ,$$

а используя (13.57) и (13.63) получаем

$$H < 1 \cdot 10^{-5} M_{Pl} , \quad N_e \sim 50 - 60 , \quad (13.67)$$

и

$$E_{inf} \equiv V^{1/4} < 2 \cdot 10^{-3} M_{Pl} , \quad N_e \sim 50 - 60 ,$$

соответственно. Таким образом, заключительные этапы инфляции действительно проходили при плотностях энергии, заметно меньших планковской плотности. Отметим, что в моделях инфляции с большим полем параметр Хаббла и масштаб энергий близки к указанным ограничениям.

Прежде чем двигаться дальше, обсудим, какими могут быть современные амплитуды реликтовых гравитационных волн относительно небольшой длины. Мы видели в разделе 3.2.2, что амплитуда тензорных возмущений держится постоянной до тех пор, пока они находятся за горизонтом, а после входа под горизонт на радиационно-доминированной или пылевидной стадии амплитуда падает как a^{-1} . Нас интересуют волны с длиной, много меньшей 100 Мпк; они входят под горизонт на радиационно-доминированной стадии, см. раздел 2.4. Связь современной амплитуды h_0 таких волн с первичной амплитудой h даётся формулой (3.11). Подставляя в неё численные значения параметров, мы получаем для современной амплитуды волн с длиной $\lambda_0 = 2\pi/q_0$

$$\Delta_{T,0}(\lambda_0) \simeq 0.6 \cdot 10^{-18} \left(\frac{\lambda_0}{10^{13} \text{ см}} \right) \cdot \Delta_T , \quad (13.68)$$

где мы положили $g_* \simeq 100$, имея в виду волны с длиной $\lambda_0 \lesssim 10^{16}$ см, которые входят под горизонт при температуре $T_x \gtrsim 100$ ГэВ, см. раздел 2.4 (для волн с большей длиной численный коэффициент в (13.68) немного больше благодаря меньшему значению g_* во время их входа под горизонт). Воспользовавшись для оценки значениями (13.65), получим, что в инфляционных моделях с большим полем предсказывается амплитуда реликтовых гравитационных волн на уровне¹³

$$\Delta_{T,0}(\lambda_0) \simeq (1 - 2) \cdot 10^{-23} \left(\frac{\lambda_0}{10^{13} \text{ см}} \right) . \quad (13.69)$$

Напомним, что речь идёт о стохастическом, гауссовом гравитационно-волновом “шуме”, а амплитуда $\Delta_{T,0}$ определена как квадратный корень спектра мощности этого шума $\mathcal{P}_{T,0}$.

Отметим, что верхнюю из оценок (13.69) следует воспринимать как максимально возможную для неэкзотических инфляционных моделей¹⁴. Действительно, максимальное значение в (13.69) соответствует ограничению (13.66), причём последнее ограничение применимо к тензорным возмущениям с длинами волн порядка сотен Мегапарсек и более. В инфляционных моделях без экзотики спектр тензорных возмущений — падающий (см. задачу в конце раздела и следующий раздел), поэтому амплитуды рассматриваемых волн заведомо не превышают верхнего из значений, приведённых в правой части (13.69).

Полученное выражение (13.68) позволяет найти вклад реликтовых гравитационных волн в плотность энергии в современной Вселенной. Для волн с длинами, много меньшими современного размера горизонта, расширением Вселенной в нынешнюю эпоху можно пренебречь, так что действие (2.56) для них имеет вид действия для свободных гравитационных волн в пространстве Минковского:

$$S_{TT} = \sum_A \frac{1}{64\pi G} \int d^4x \left[(\partial_t h^{(A)})^2 - \partial_k h^{(A)} \partial_k h^{(A)} \right] ,$$

¹³В действительности эта оценка завышена на фактор 1.5–2. Оценки (13.65) относятся к большим длинам волн, $\lambda_0 \sim 1$ Гпк, см. (13.37). Рассматриваемые возмущения с меньшими длинами волн выходят за горизонт на инфляционной стадии позже, так что параметр Хаббла в этот момент меньше, чем для волн с длиной 1 Гпк. Соответственно меньше и амплитуды (13.58), см. задачу в конце раздела.

¹⁴Экзотические модели, такие как модели с фантомом в качестве инфлатаона или модели с нарушением Лоренц-инвариантности на малых расстояниях, иногда предсказывают большие амплитуды относительно коротких волн.

где производные берутся по физическим пространственным координатам, а интеграл берётся по физическому четырёхмерному объёму. Соответствующее выражение для энергии имеет вид

$$E_{TT} = \sum_A \frac{1}{64\pi G} \int d^3x \left[(\partial_t h^{(A)})^2 + \partial_k h^{(A)} \partial_k h^{(A)} \right].$$

Отсюда сразу получаем плотность энергии стохастического гравитационно-волнового фона

$$\rho_{GW} = \frac{M_{Pl}^2}{32\pi} \int \frac{dq_0}{q_0} (q_0 \Delta_{T,0})^2. \quad (13.70)$$

где интегрирование ведётся по модулю импульса. Используя выражение (3.11), получим отсюда

$$\Omega_{GW} = \frac{1}{12} \Omega_{rad} \int \frac{dq_0}{q_0} \left(\frac{g_{*,0}}{g_*(\eta_\times)} \right)^{1/3} \Delta_T^2. \quad (13.71)$$

Отсюда следует, что логарифмический интервал импульсов вносит вклад в плотность энергии, соответствующий

$$\Omega_{GW,log} \simeq 0.03 \Omega_{rad} \Delta_T^2 \simeq 0.8 \cdot 10^{-15} \cdot \left(\frac{\Delta_T}{2 \cdot 10^{-5}} \right)^2. \quad (13.72)$$

Напомним, что в (13.71) интегрирование ведётся по конечному интервалу импульсов. Минимальный импульс соответствует моде с современной хаббловской длиной волны, которая как раз входит под горизонт (см. обсуждение в конце раздела 13.1.2). Максимальный импульс соответствует моде, которая зашла за горизонт в момент окончания инфляции. Таким образом, для случая плоского спектра, вклад всех тензорных мод в Ω_{GW} отличается от вклада мод логарифмического интервала импульсов (13.72) фактором, равным числу е-фолдингов $N_e \simeq 50 - 60$. Мы видим, что этот вклад весьма мал: как на современной, так и на радиационно-доминированной стадии он по крайней мере на 9 порядков меньше вклада фотонов, так что им вполне можно пренебречь.

- ▷ Задача 9. Получить соотношение (13.70) и оценку (13.71).
- ▷ Задача 10. Получить ограничение на полную плотность энергии реликтовых гравитационных волн в инфляционной теории. Указание: учесть, что инфляционный механизм их генерации работает только для волн, которые выходят за горизонт на инфляционной стадии, и что максимальные длины волн, вносящих сегодня вклад в плотность энергии, не превышают современного размера горизонта.
- ▷ Задача 11. В моделях инфляции с большим полем уточнить оценку (13.69) с учётом того, что волны с малой длиной выходят за горизонт на инфляционной стадии позже, чем волны с длиной 1 Гпк.

Предсказываемые амплитуды (13.69) весьма малы, так что в ближайшем будущем реликтовые гравитационные волны вряд ли будут прямо зарегистрированы. Тем не менее, в отдалённом будущем интерферометры, размещённые в космосе, возможно, будут обладать достаточной чувствительностью к волнам с длинами порядка

10^{13} см (размер земной орбиты). Не исключено также, что волны с большими длинами (и, соответственно, с большими предсказываемыми амплитудами) можно будет обнаружить путём точных измерений временных вариаций периодов пульсаров (pulsar timing). С другой стороны, регистрация реликтовых гравитационных волн в экспериментах на Земле (например, с помощью интерферометров с базой в несколько километров) представляется безнадёжной задачей, поскольку амплитуды волн с реалистичной длиной порядка $\lambda_0 \sim 10^3$ км, предсказываются на чрезвычайно низком уровне, $h_0 \lesssim 10^{-28}$. Эта ситуация проиллюстрирована на рис. 13.3. Здесь приведены

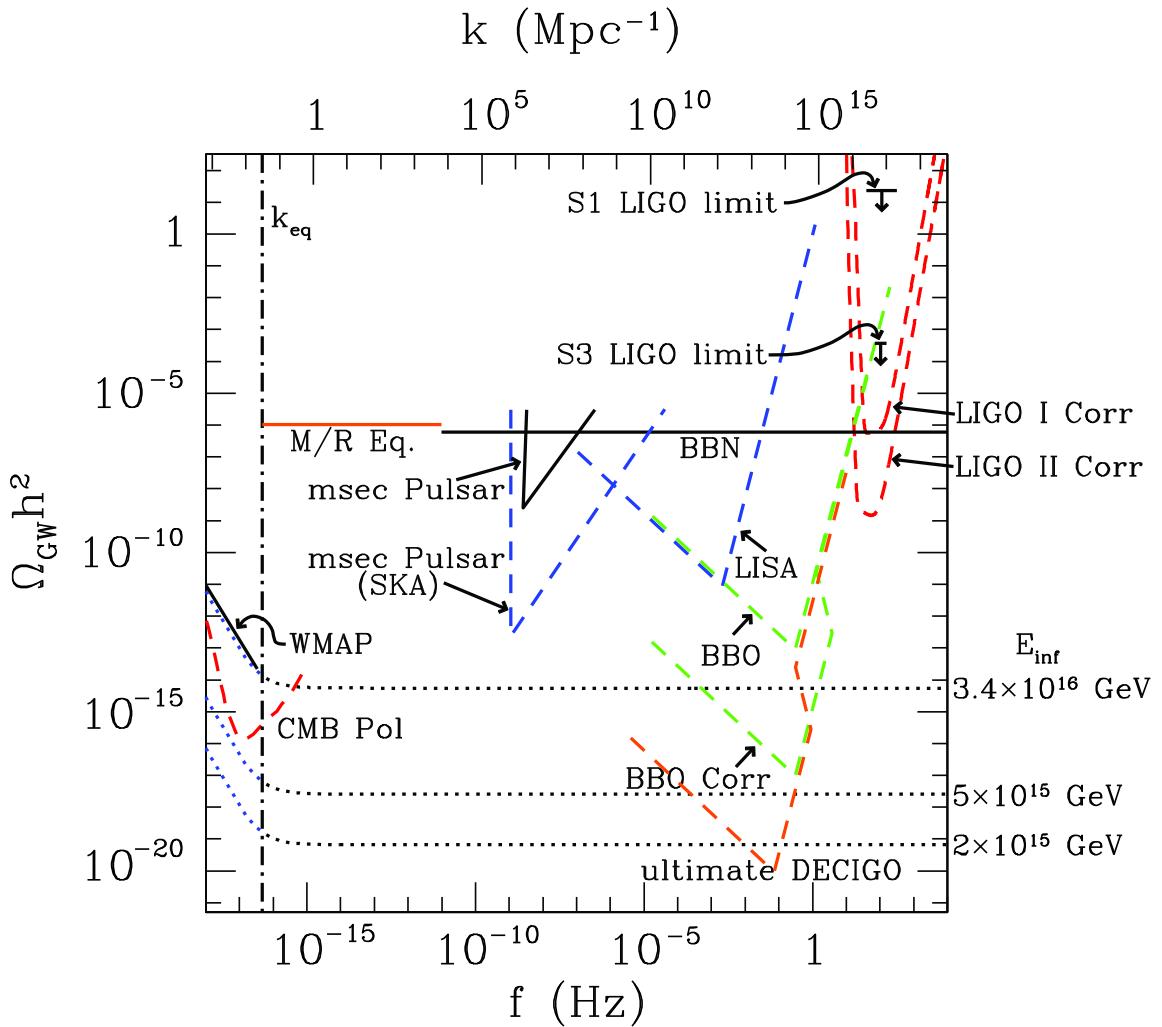


Рис. 13.3: Экспериментальные ограничения (сплошные кривые), чувствительности планируемых экспериментов (длинный пунктир) и предсказания простейших инфляционных моделей с плоским спектром начальных возмущений $n_T = 0$ для относительного вклада реликтовых гравитационных волн в современную плотность энергии Вселенной [91].

экспериментальные ограничения, чувствительности планируемых экспериментов и предсказания простейших инфляционных моделей с плоским спектром начальных возмущений $n_T = 0$ для относительного вклада логарифмического интервала частот реликтовых гравитационных волн в современную плотность энергии Вселенной. На графике вертикальной штрих-пунктирной линией (k_{eq}) отделены моды, вошедшие под горизонт в различные эпохи: большие и меньшие частоты соответствуют модам,

вашедшим под горизонт на радиационно-доминированной стадии и на пылевидной стадии, соответственно. Первые, за счёт вклада в релятивистскую компоненту вещества, могли влиять на темп расширения Вселенной. Это могло изменить предсказания стандартного первичного нуклеосинтеза и отсрочить переход на пылевидную стадию. В предположении о плоском спектре первичных возмущений согласие модели Λ CDM с космологическими наблюдениями приводит к ограничениям сверху на долю гравитационных волн, обозначенным как BBN и M/R Eq. Коротким пунктиром показаны предсказания простейших инфляционных моделей с плоским спектром для нескольких значений “инфляционного масштаба”, $E_{\text{inf}} \equiv V_{\text{inf}}^{1/4}$. В таких моделях вклад в плотность энергии мод, вошедших под горизонт на РД-стадии, не зависит от частоты, в соответствии с формулой (13.71). Вклад длинноволновых мод, вошедших под горизонт на пылевидной стадии, растёт с уменьшением частоты. Он ограничен из наблюдений анизотропии реликтового излучения (ограничение WMAP). Прямые ограничения сверху на амплитуду гравитационных возмущений малых длин волн дают гравитационные интерферометры (представлены результаты двух этапов работы интерферометра LIGO). Пунктирные линии соответствуют ожидаемой чувствительности группы интерферометров (LIGO Corr), а также чувствительности некоторых обсуждаемых орбитальных проектов (LISA, BBO, DECIGO). Представлены также ограничения, полученные из наблюдений за пульсарами (msec Pulsar), и оценка чувствительности проекта SKA.

13.4.3 Наклоны спектров

Поскольку волны разных длин выходят за горизонт на инфляционной стадии в разное время, а значение инфлатонного поля, входящее в (13.60) и (13.63), хотя и слабо, но зависит от времени (инфлатон скатывается вдоль своего потенциала), спектры скалярных и тензорных возмущений не являются в точности плоскими. Традиционно спектры скалярных и тензорных возмущений параметризуют в виде (5.35) и (5.44), соответственно,

$$\mathcal{P}_{\mathcal{R}}(k) = A_{\mathcal{R}} \left(\frac{k}{k_*} \right)^{n_s - 1}, \quad \mathcal{P}_T(k) = A_T \left(\frac{k}{k_*} \right)^{n_T}. \quad (13.73)$$

Для вычисления наклона скалярного спектра учтём, что этот наклон мал в моделях с медленным скатыванием, воспользуемся формулой (13.60) и запишем

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{\mathcal{R}}(k) &= \mathcal{P}_{\mathcal{R}}(k_*) \left\{ 1 + 2 \frac{d \ln \Delta_{\mathcal{R}}}{d\phi} [\phi(\eta_k) - \phi(\eta_{k_*})] \right\} \\ &= \mathcal{P}_{\mathcal{R}}(k_*) \left\{ 1 + \left(3 \frac{V'}{V} - 2 \frac{V''}{V'} \right) [\phi(\eta_k) - \phi(\eta_{k_*})] \right\}, \end{aligned} \quad (13.74)$$

где $\phi(\eta_k)$ — значение инфлатонного поля в тот момент на инфляционной стадии, когда мода с импульсом k выходит за горизонт. Мы учили, что поле ϕ меняется мало между моментами времени η_k и η_{k_*} . Нам осталось найти значение величины $[\phi(\eta_k) - \phi(\eta_{k_*})]$. Для этого вспомним, что момент выхода за горизонт определяется соотношением

$$\frac{k}{a(\eta_k)} = H(\eta_k).$$

В последнем равенстве сильной зависимостью от времени обладает масштабный фактор, а параметр Хаббла зависит от времени слабо. Пренебрегая последней зависимостью, то есть полагая $H(\eta_k) = H(\eta_{k_*})$, запишем

$$\frac{k}{k_*} = \frac{a(\eta_k)}{a(\eta_{k_*})} = e^{N_e(\phi_{k_*}) - N_e(\phi_k)}, \quad (13.75)$$

где $N_e(\phi_k) \equiv N_e(\eta_k)$ по-прежнему обозначает число e -фолдингов до конца инфляции, так что $a(\eta)\exp[N_e(\eta)] = a_e = \text{const}$. Далее,

$$N_e(\phi_k) - N_e(\phi_{k_*}) = \frac{dN_e}{d\phi} [\phi(\eta_k) - \phi(\eta_{k_*})] = \frac{8\pi V}{M_{Pl}^2 V'} [\phi(\eta_k) - \phi(\eta_{k_*})], \quad (13.76)$$

где при получении последнего равенства мы воспользовались (12.31). Итак, соотношение (13.75) даёт

$$\phi(\eta_k) - \phi(\eta_{k_*}) = -\frac{M_{Pl}^2 V'}{8\pi V} \ln \frac{k}{k_*}. \quad (13.77)$$

В итоге из (13.74) получаем

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{\mathcal{R}}(k) &= \mathcal{P}_{\mathcal{R}}(k_*) \left[1 - \left(\frac{3M_{Pl}^2 V'^2}{8\pi V^2} - \frac{M_{Pl}^2 V''}{4\pi V} \right) \ln \frac{k}{k_*} \right] \\ &= \mathcal{P}_{\mathcal{R}}(k_*) \left[1 + (2\eta - 6\epsilon) \ln \frac{k}{k_*} \right], \end{aligned}$$

где ϵ и η — параметры медленного скатывания. С другой стороны, из (13.73) имеем при малых $(n_s - 1)$

$$\mathcal{P}_{\mathcal{R}}(k) = \mathcal{P}_{\mathcal{R}}(k_*) \left[1 + (n_s - 1) \ln \frac{k}{k_*} \right].$$

Сравнивая последние два выражения, мы приходим к окончательному результату

$$n_s - 1 = 2\eta - 6\epsilon. \quad (13.78)$$

Видно, что наклон спектра скалярных возмущений зависит как от параметра ϵ , так и от параметра η . Напомним, что отношение r квадратов амплитуд тензорных и скалярных возмущений зависит только от ϵ . Поэтому измерение наклона скалярного спектра вместе с измерением амплитуды первичных возмущений обоих типов позволит определить оба этих параметра и тем самым сделать выбор между различными моделями инфляции. Например, для моделей с большим полем из (12.37) и (12.38) следует, что

$$r = \frac{4n}{N_e}, \quad n_s - 1 = -\frac{n+2}{2N_e}. \quad (13.79)$$

Для моделей инфляции вблизи максимума инфлатонного потенциала без подстройки параметров выполняется (см. (12.51) и (12.57); считаем, что потенциал вблизи максимума пропорционален целой степени поля ϕ)

$$r \simeq 0, \quad n_s - 1 = -(1-2) \cdot \frac{1}{N_e},$$

в то время как в модели гибридной инфляции, опять-таки без подгонки параметров,

$$r \simeq 0, \quad n_s - 1 > 0.$$

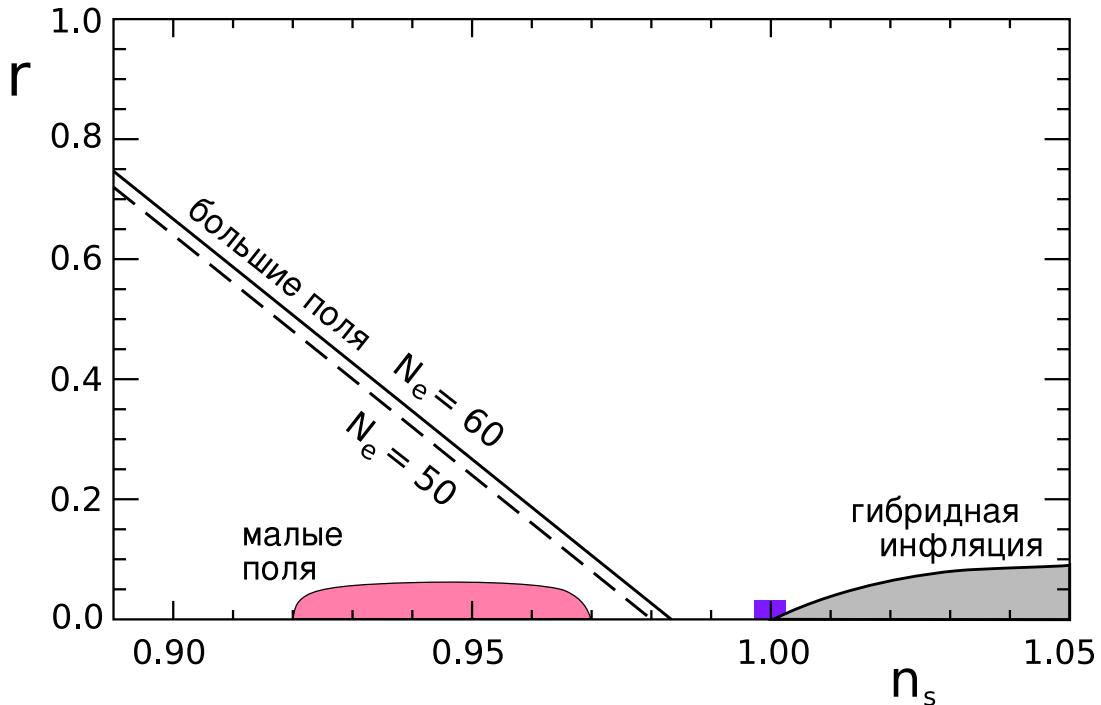


Рис. 13.4: Области на плоскости (n_s, r) , соответствующие инфляционным моделям раздела 12.2. Прямоугольником обозначен случай Гаррисона–Зельдовича — плоский скалярный спектр в отсутствие тензорных возмущений, $n_s = 1, r = 0$.

Области на плоскости (n_s, r) , предсказываемые в указанных классах моделей, представлены на рис. 13.4.

Сразу подчеркнём, что рассмотренные в разделе 12.2 модели — это только примеры моделей инфляции. Кроме того, даже в рассмотренных моделях вполне могут нарушаться сильные неравенства типа (12.50) или (12.60). Поэтому с точки зрения феноменологии параметры ϵ и η можно воспринимать как независимые; подробнее см. в разделе 13.5.

Анализ существующих наблюдательных данных по анизотропии и поляризации реликтового излучения, по распределениям галактик и квазаров и по сверхновым типа Ia приведён на рис. 13.5. Он даёт указание на то, что либо скалярный спектр имеет отрицательный наклон, либо во Вселенной есть тензорные возмущения, либо существуют оба этих эффекта. Разумеется, это — всё ещё указание; его подтверждение (или опровержение) является делом относительно недалёкого будущего.

▷ **Задача 12.** В моделях с большим полем найти темп изменения наклона спектра скалярных возмущений с импульсом, $dn_s/d\ln k$. Сделать численные оценки для инфлатонных потенциалов второго и четвёртого порядков.

До сих пор нам не удалось получить модельно-независимых соотношений между непосредственно наблюдаемыми величинами. Такие соотношения, разумеется, весьма важны для прямой проверки того, что истинным механизмом генерации первичных космологических возмущений является описанный в этой главе механизм, основанный на теории инфляции в режиме медленного скатывания. Одно из таких соотношений возникает при рассмотрении наклона спектра тензорных возмущений.

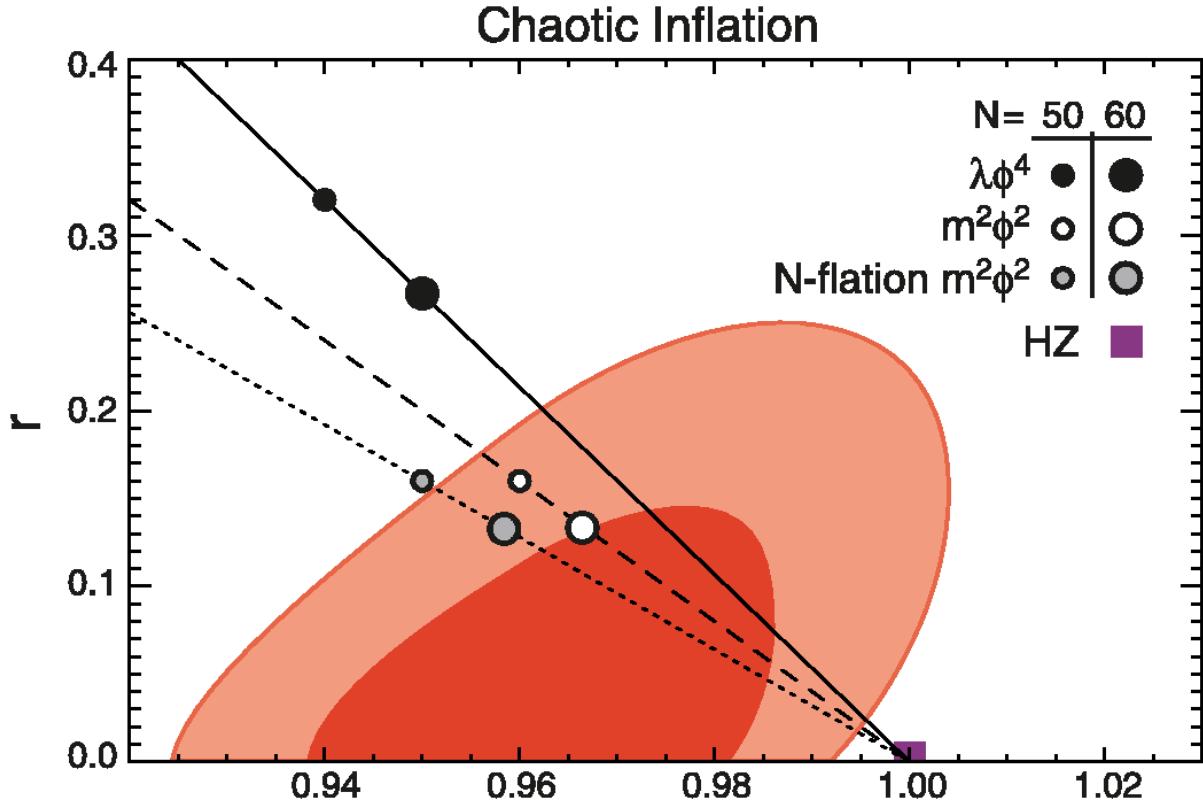


Рис. 13.5: Разрешённые области на плоскости (n_s, r) для моделей хаотической инфляции, уровень достоверности 68% и 95% [2]. Параметр r определён при значении импульса $q_0 = 0.002 \text{ Мк}^{-1}$. Прямоугольником обозначен случай Гаррисона-Зельдовича — плоский скалярный спектр в отсутствие тензорных возмущений, $n_s = 1, r = 0$. Сплошная и крупно-пунктирная линии соответствуют предсказанием моделей с большим полем (13.79) с потенциалами четвёртого и второго порядка ($n = 4$ и $n = 2$), соответственно, для различных значений N_e . Мелко-пунктирная линия показывает предсказание моделей с большим количеством скалярных полей, каждое с квадратичным потенциалом.

Аналогично случаю скалярных возмущений, запишем для тензорных возмущений

$$\mathcal{P}_T(k) = \mathcal{P}_T(k_*) \left\{ 1 + \frac{d \ln \mathcal{P}_T}{d\phi} [\phi(\eta_k) - \phi(\eta_{k_*})] \right\} = \mathcal{P}_T(k_*) \left\{ 1 + \frac{V'}{V} [\phi(\eta_k) - \phi(\eta_{k_*})] \right\} .$$

Используем теперь (13.77) и получим

$$\mathcal{P}_T(k) = \mathcal{P}_T(k_*) \left[1 - \frac{M_{Pl}^2 V'^2}{8\pi V^2} \ln \frac{k}{k_*} \right] = \mathcal{P}_T(k_*) \left(1 - 2\epsilon \ln \frac{k}{k_*} \right) . \quad (13.80)$$

Окончательно, имеем

$$n_T = -2\epsilon . \quad (13.81)$$

Таким образом, инфляция в режиме медленного скатывания предсказывает выполнение модельно-независимого соотношения

$$n_T = -\frac{r}{8} . \quad (13.82)$$

Поправки к этому соотношению малы по параметрам медленного скатывания, то есть они должны находиться в пределах десятка процентов.

Экспериментальная проверка соотношения (13.82) является очень сложной задачей. Она потребует не только собственно регистрации эффектов, обусловленных тензорными возмущениями, но и гораздо более тонкого измерения наклона спектра тензорных возмущений. Решение этой задачи, тем не менее, чрезвычайно важно для того, чтобы появилась полная уверенность в справедливости инфляционной теории.

▷ Задача 13. Найти область значений параметра M в инфляционной модели с потенциалом (12.69), при котором модель является реалистичной. Найти наклоны спектров скалярных и тензорных мод в этой модели и определить отношение амплитуд этих мод.

В заключение раздела отметим, что при обработке экспериментальных данных часто допускают возможность того, что спектр первичных скалярных возмущений отличается от степенного. При этом используется параметризация (5.36). В инфляционной теории параметр $(dn/d\ln k)(k_*)$ определяется инфлатонным потенциалом и его несколькими первыми производными на момент пересечения горизонта модой с импульсом k_* . В лидирующем порядке по малым параметрам инфлатонного потенциала производная спектрального индекса по логарифму конформного импульса получается простым дифференцированием его явного выражения. Удобно воспользоваться связью дифференциалов $d\phi$ и $d\ln k$ в точке $\phi(\eta_{k_*}) = \phi_*$, для которой справедливо простое соотношение

$$\frac{d}{d\ln k} = -\frac{M_{Pl}^2}{8\pi} \frac{V'}{V} \frac{d}{d\phi},$$

непосредственно следующее из (13.77). Для тензорного спектра соотношение (13.80) даёт

$$n_T(k_*) = -\frac{M_{Pl}^2}{8\pi} \left(\frac{V'}{V} \right)^2 (\phi_*),$$

откуда получаем

$$\frac{dn_T}{d\ln k}(k_*) = 4\epsilon\eta - 8\epsilon^2.$$

Наклон скалярного спектра имеет вид (см. (13.74))

$$n_s(k_*) - 1 = \frac{M_{Pl}^2}{4\pi} \left(\frac{V''}{V} - \frac{3}{2} \left(\frac{V'}{V} \right)^2 \right) (\phi_*),$$

так что

$$\frac{dn_s}{d\ln k}(k_*) = 16\eta\epsilon - 24\epsilon^2 - 2\zeta^2,$$

где мы ввели обозначение для слагаемого, содержащего третью производную скалярного потенциала,

$$\zeta^2 \equiv \left(\frac{M_{Pl}^2}{8\pi} \right)^2 \frac{V'''}{V} \frac{V'}{V} (\phi_*).$$

В моделях с медленным скатыванием изменение показателя спектра тензорных мод мало, поскольку оно квадратично по параметрам медленного скатывания. В изменение показателя скалярных мод, помимо заранее известного малого вклада, квадратичного по параметрам медленного скатывания, имеется вклад третьей производной потенциала инфлатона, не обязанный, вообще говоря, быть малой величиной. В простых моделях, однако, параметр ζ^2 мал, и по порядку величины совпадает с η^2, ϵ^2 . Такова ситуация, например, в моделях со степенными потенциалами.

▷ Задача 14. Найти величину $dn/d\ln k$ в инфляционных моделях, рассмотренных в предыдущих разделах.

13.5 Обсуждение

В заключение этой главы полезно сделать несколько замечаний.

Первое из них относится к выбору потенциала инфлатона. В разделе 12.2 мы рассмотрели три класса потенциалов, в которых при определённых значениях параметров и полей реализуются условия медленного скатывания, приводящие к инфляционному расширению Вселенной. Этим трём классам потенциалов соответствуют области на плоскости (n_s, r) , изображённые на рис. 13.4. Разумеется, три рассмотренных нами класса потенциалов далеко не исчерпывают все возможности, а показанные на рис. 13.4 области отнюдь не являются обязательными предсказаниями инфляционной теории. В действительности подбором инфлатонного потенциала можно получить любые значения величин $(n_s - 1)$ и r ; единственное предсказание инфляции в режиме медленного скатывания состоит в том, что эти величины должны быть небольшими¹⁵. Это достаточно очевидно из того факта, что $(n_s - 1)$ и r , как и амплитуды скалярных и тензорных возмущений, выражаются через три параметра V , ϵ и η , то есть через $V(\phi)$, $V'(\phi)$ и $V''(\phi)$ при таком значении ϕ , которому соответствует $N_e \sim 60$ e -фолдингов до конца инфляции. Подбором последних трёх величин можно получить любые значения $(n_s - 1)$, амплитуд тензорных и скалярных возмущений и, как следствие, отношения r , лишь бы $(n_s - 1)$ и r были невелики.

Обсудим этот вопрос немного подробнее. В наиболее оптимистическом варианте, предполагающем измерение амплитуд как скалярных, так и тензорных возмущений, а также определение наклона скалярного спектра, соотношение (13.63) позволяет найти значение инфлатонного потенциала $V(\phi_*)$ при таком значении поля инфлатона $\phi_* = \phi(\eta_{k_*})$, которое соответствует импульсу k_* . После этого амплитуда скалярных возмущений (13.60) может быть использована для определения производной потенциала $V'(\phi_*)$. Наконец, выражение для наклона скалярного спектра (13.78) содержит вторую производную потенциала,

$$n_s - 1 = \frac{M_{Pl}^2 V''}{4\pi V} - \frac{3M_{Pl}^2 V'^2}{8\pi V^2}.$$

Поэтому указанная комбинация измерений позволит найти $V(\phi_*)$, $V'(\phi_*)$ и $V''(\phi_*)$, то есть приближенно восстановить инфлатонный потенциал в некоторой, хотя и не слишком широкой, области значений инфлатонного поля. При этом соотношение (13.82) выступает как условие самосогласованности.

Разумеется, такая процедура восстановления инфлатонного потенциала неточна: она верна лишь в главном порядке по параметрам медленного скатывания. Более точно потенциал инфлатона можно будет найти, при наличии наблюдательных данных высокого качества, введя в него некоторый набор параметров (например, коэффициентов разложения Тэйлора вблизи $\phi = \phi_*$) и решив уравнения для фона и уравнения для скалярных и тензорных возмущений с начальными данными типа (13.20). Аналитически такой подход реализовать трудно, поэтому необходимо использовать численные подходы. Эта задача будет представлять всё больший интерес по мере повышения точности наблюдений.

Определим область значений инфлатонного поля, где в принципе возможно восстановление инфлатонного потенциала. В соответствии с формулой (13.77) эта область связана с областью современных длин волн $(\lambda_{0,min}, \lambda_{0,max})$, для которой воз-

¹⁵Если не требовать выполнения условий медленного скатывания, то и это предсказание не обязательно.

можно измерение спектров космологических возмущений, соотношением

$$\phi_{max} - \phi_{min} \equiv \Delta\phi = \frac{M_{Pl}^2 V'}{8\pi V} \ln \frac{\lambda_{0,max}}{\lambda_{0,min}} = M_{Pl} \sqrt{\frac{\epsilon}{4\pi}} \ln \frac{\lambda_{0,max}}{\lambda_{0,min}}.$$

Видно, что потенциал инфлатона можно восстановить в более или менее заметной области изменения поля в тех моделях, где параметр медленного скатывания ϵ сравнительно велик. К таким моделям относятся, например, модели с большим полем, обсуждавшиеся в разделе 12.2.1. Продолжим поэтому наше обсуждение на примере этих моделей. Используя (12.37), получим в моделях с большим полем и степенным потенциалом инфлатона

$$\Delta\phi = M_{Pl} \cdot \sqrt{\frac{n}{16\pi N_e}} \ln \frac{\lambda_{0,max}}{\lambda_{0,min}}. \quad (13.83)$$

Оптимистический интервал значений длин волн, в котором спектры возмущений могут быть исследованы методами космологических наблюдений (такими как изучение структур и реликтового излучения), составляет от $\lambda_{0,min} \sim 100$ кпк до $\lambda_{0,max} \sim 1$ Гпк. Поэтому поддающийся изучению интервал значений инфлатонного поля составляет величину, несколько меньшую массы Планка, в то время как изучаемые поля — сверх-планковские, см. (12.35), (12.36). Отсюда следует вывод, что восстановление инфлатонного потенциала возможно лишь в относительно небольшой области значений поля. Иными словами, сравнивая (13.83) и (12.34), мы видим, что отношение $\Delta\phi$ к самому значению поля ϕ_* (учитывая, что $\phi_* \equiv \phi(N_e)$ при $N_e = 50 - 60$) равно

$$\frac{\Delta\phi}{\phi_*} \simeq \frac{1}{2N_e} \ln \frac{\lambda_{0,max}}{\lambda_{0,min}} \lesssim 0.1.$$

Восстановить инфлатонный потенциал с помощью космологических наблюдений можно в интервале значений инфлатонного поля, на порядок меньшем, чем само поле.

- ▷ Задача 15. В моделях с большим полем оценить относительное изменение потенциала инфлатона $\Delta V/V$ при изменении поля на величину $\Delta\phi$ вблизи значения ϕ_* , воспользовавшись приведёнными в тексте оценками двух последних величин.
- ▷ Задача 16. Проделать аналогичные оценки для измеримых областей значений поля и потенциала в моделях с инфляцией вблизи максимума инфлатонного потенциала, рассмотренных в разделе 12.2.2.

Отметим, что представление о поведении инфлатонного потенциала в заметно более широкой области значений поля можно, хотя бы в принципе, получить путём изучения реликтовых гравитационных волн с относительно короткими длинами, см. конец раздела 13.3.

- ▷ Задача 17. Предположим, что в природе реализуется механизм инфляции с большим полем и степенным потенциалом инфлатона. В какой области значений инфлатонного поля это предположение можно было бы подтвердить или опровергнуть, если кроме данных космологических наблюдений имелись бы достаточно точные данные измерений реликтового гравитационно-волнового фона с длинами волн $\lambda \gtrsim 10^{13}$ см? За какое количество e -фолдингов до конца инфляции такие волны выходят за горизонт? Указание: поскольку искомая область изменения поля довольно велика, использовать приближенное равенство (13.76) нельзя.

Второе замечание состоит в том, что некоторые свойства возмущений в инфляционных моделях без экзотики жёстко зафиксированы. К таким свойствам относится, например, отрицательность наклона спектра тензорных возмущений. Действительно, этот наклон, как мы уже говорили, связан с тем, что волны с большими импульсами выходят за горизонт на инфляционной стадии позже, чем волны с меньшими импульсами. В теориях без экзотики плотность энергии во Вселенной падает со временем, соответственно падает и параметр Хаббла. Отсюда однозначно следует, что амплитуда тензорных возмущений (13.58) является монотонно убывающей функцией импульса, то есть тензорный спектр определённо красный. Отметим, что это предсказание не опирается на представление о медленном скатывании; важно лишь то предположение, что гравитация описывается общей теорией относительности на инфляционной стадии, и что плотность энергии во Вселенной не растёт при её расширении. Если из наблюдений выяснится, что тензорный спектр, наоборот, синий, то это будет означать, что либо общая теория относительности не работает при высоких плотностях энергии, характерных для инфляционной стадии, либо инфлатон является “фантомом” — полем с эффективным уравнением состояния с $p < -\rho$, либо и то, и другое.

Следующее замечание относится к точности, с которой скалярные и тензорные возмущения являются гауссовыми. Негауссовость возникает благодаря опущенным в нашем анализе нелинейным по возмущениям членам в уравнениях для этих возмущений: на уровне линеаризованной теории квантовые поля, исходно находившиеся в вакуумном состоянии, всегда представляют собой гауссова случайные поля, поскольку для них всегда выполняется теорема Вика. Поэтому о масштабе негауссности можно судить по соотношению между нелинейными и линейными по возмущениям членами в уравнениях, при этом существенным является момент выхода возмущений за горизонт на инфляционной стадии. Для тензорных возмущений нелинейные члены при $q \sim H$ оцениваются как $H^2 h^2$, в то время как линейные имеют порядок $H^2 h$. Поэтому масштаб негауссости тензорных возмущений характеризуется величиной $h \lesssim 10^{-5}$. Оценку для скалярных возмущений проведём на примере модели с большим полем и потенциалом $(\lambda/4)\phi^4$. Наибольшее нелинейное слагаемое в уравнении для φ имеет вид $3\lambda\phi_c\varphi^2$ (мы здесь восстановили обозначение ϕ_c для фонового поля инфлатона). Его следует сравнивать с линейными членами, которые, опять-таки при $q \sim H$, имеют порядок $H^2\varphi$. Таким образом, характеристикой негауссности служит величина

$$\frac{3\lambda\phi_c\varphi^2}{H^2\varphi}.$$

Используя оценку (13.13), уравнение Фридмана и связь (12.33) между значением фонового поля и числом e -фолдингов, запишем для этого отношения оценку

$$\frac{3\lambda\phi_c\varphi^2}{H^2\varphi} \sim \sqrt{\frac{\lambda}{N_e}} \lesssim 10^{-7},$$

где мы опустили численный множитель порядка единицы и воспользовались оценкой (13.62).

Приведённые оценки показывают, что в инфляционных моделях с медленным скатыванием и генерацией скалярных возмущений за счет самого инфлатона негауссовость как скалярных, так и тензорных возмущений — весьма слабая, так что обнаружить её экспериментально будет чрезвычайно трудно, если вообще возможно¹⁶.

¹⁶Сравнительно сильная негауссовость возникает из-за нелинейных членов в уравнениях Эйн-

Наоборот, обнаружение заметной негауссности возмущений свидетельствовало бы о каком-то другом механизме генерации возмущений. Такие возможности довольно активно обсуждаются в литературе; мы обсудим одну из них в разделе 14.2.1.

Ещё одно замечание связано с неявным предположением, использованным при вычислении спектров скалярных и тензорных возмущений. Выбирая начальные данные для квантовых полей возмущений инфлатона и метрики, мы в действительности предполагали, что уравнения для этих полей (13.16) и (2.55) справедливы при всех, сколь угодно больших физических импульсах. В то же время, нет никакой гарантии, что используемые представления о свойствах полей, да и самого пространства, действительно работают на сверхмалых расстояниях, например, на расстояниях меньше планковской длины. Поэтому возникает законный вопрос о том, насколько чувствительны предсказания инфляционной теории к возможным изменениям физики на малых, скажем, суб-планковских, расстояниях и, соответственно, при больших импульсах. Этот вопрос получил в литературе название “транс-планковской проблемы” (“trans-Planckian problem”). Здесь, однако, нужно отметить одну особенность этой проблемы. Обычно когда говорят о физике малых расстояний, имеют в виду большие положительные или отрицательные значения *четырёхмерного квадрата импульса* Q^2 . В частности, не вызывает сомнений, что эффекты квантовой гравитации становятся сильными по крайней мере при $|Q^2| \sim M_{Pl}^2$. К обсуждаемому вопросу это не имеет отношения: для гравитонов и возмущений инфлатона на ранних этапах инфляции выполняется

$$Q^2 = \omega^2 - \mathbf{q}^2 \approx 0 ,$$

то есть они находятся вблизи массовой поверхности. Поэтому отнюдь не обязательно, что эффекты физики планковских масштабов для них существенны. Более того, если теория Лоренц-инвариантна, то *большие пространственные импульсы* ничем не отличаются от малых: одни переходят в другие при лоренцевых бустах¹⁷. Поэтому постановка транс-планковской проблемы предполагает, что теория перестаёт быть Лоренц-инвариантной на малых пространственных масштабах. Тем не менее эта проблема вполне заслуживает обсуждения, поскольку уверенности в Лоренц-инвариантности теории на сверхмалых расстояниях (другими словами, при скоростях, чрезвычайно близких к скорости света) нет.

Поскольку ни теоретически, ни тем более экспериментально не известно, как именно может нарушаться Лоренц-инвариантность на сверхмалых расстояниях, один из путей рассмотрения транс-планковской проблемы предполагает построение *ad hoc* моделей с Лоренц-инвариантностью, нарушенной при больших пространственных импульсах, $q \gtrsim P_{LV}$, где P_{LV} — масштаб нарушения, и изучение генерации космологических возмущений на инфляционной стадии в таких моделях. Простая модель такого сорта является предметом предложенной ниже задачи. Если не брать в расчёт совсем уж экзотические варианты, то общие для предложенных к настоящему времени моделей результаты состоят в следующем. Во-первых, предсказания для возмущений не изменяются вообще при $P_{LV} \gg H$, где H — параметр Хаббла на момент выхода интересных мод за горизонт на инфляционной стадии. Точнее, поправки

штейна для возмущений. Этот эффект, однако, не имеет прямого отношения к инфляционному механизму генерации первичных возмущений.

¹⁷В расширяющейся Вселенной Лоренц-инвариантность, конечно, отсутствует. Это, тем не менее, не влияет на приведённый аргумент, поскольку речь идёт об энергиях и пространственных импульсах, заметно превышающих параметр Хаббла. Для полей с такими энергиями и импульсами расширение Вселенной малосущественно.

к стандартному результату подавлены отношением H/P_{LV} ; входящая в эти поправки степень отношения H/P_{LV} является, правда, модельно-зависимой. Таким образом, предсказания инфляционной теории чувствительны в действительности лишь к свойствам полей при относительно низких пространственных импульсах, $q \lesssim H$. Во-вторых, если параметр H (и, возможно, значение величины P_{LV}) слабо зависит от времени, то и зависимость спектров мощности от k слабая даже при $P_{LV} \lesssim H$, хотя соотношения типа (13.64), (13.78) и (13.81), вообще говоря, не выполняются. Иными словами, в пределе не зависящих от времени H и P_{LV} спектры возмущений являются плоскими. Последнее свойство является отражением инвариантности пространства де Ситтера (инфляционной Вселенной с постоянным H) относительно сдвигов во времени, дополненных пространственными растяжениями. Тем не менее, при конечных ϵ и η и/или зависящем от времени P_{LV} отличие спектров от плоских может быть гораздо сильнее, чем в стандартной теории. Таким образом, нарушение Лоренц-инвариантности при пространственных импульсах, сравнимых или меньших H может, вообще говоря, приводить к наблюдаемым следствиям.

- ▷ Задача 18. Один из способов *ad hoc* нарушения Лоренц-инвариантности — изменение “руками” дисперсионного соотношения $\omega^2 = \mathbf{q}^2$ при достаточно больших пространственных импульсах.

Рассмотрим модель инфляции в режиме медленного скатывания и с достаточно плоским потенциалом инфлатона. Пусть градиентный член в действии инфлатонного поля φ равен

$$S_{grad} = \frac{1}{2} \int d^3x dt \sqrt{-g} \left[g^{00} (\partial_t \varphi)^2 + f \left(-\frac{g^{kl} \partial_k \partial_l}{P_{LV}^2} \right) g^{ij} \partial_i \varphi \partial_j \varphi \right],$$

а метрика имеет стандартный вид Фридмана–Робертсона–Уокера. Здесь $f(q^2/P_{LV}^2)$ — некоторая функция, обладающая свойством $f \rightarrow 1$ при $q^2/P_{LV}^2 \rightarrow 0$. Пусть Вселенная испытывает инфляционное расширение в режиме медленного скатывания. Найти спектр мощности поля φ за горизонтом на инфляционной стадии. Подбирая форму функции f , а также соотношение между параметром P_{LV} и параметром Хаббла на инфляционной стадии, проиллюстрировать сделанные в тексте утверждения, относящиеся к транс-планковской проблеме.

Глава 14

*Дополнительные вопросы инфляционной теории

14.1 “Вечная” инфляция

В разделе 13.1.2 мы видели, что во время инфляции всё новые и новые моды квантовых возмущений инфлатонного поля выходят за горизонт, замораживаются и становятся по-существу классическими. Из-за этого в областях с размерами порядка горизонта де Ситтера всё время устанавливаются новые значения однородного (в масштабе этих областей) поля инфлатона. В результате вся область Вселенной, испытывающая инфляцию, оказывается разбитой на локальные “вселенные”, которые характеризуются своими значениями инфлатонного поля и эволюционируют независимо. При определённых условиях, которые мы вскоре найдём, значения инфлатона в достаточно удалённых друг от друга локальных “вселенных” могут различаться настолько сильно, что состояние Вселенной будет далеко от однородного: в некоторых областях накопившиеся возмущения сильно уменьшают значение инфлатона по сравнению с другими областями, а в некоторых, наоборот, сильно увеличивают. Рассматривая для определённости модели с большим полем (раздел 12.2.1), мы можем сказать, что в областях с меньшим полем инфляция будет близка к окончанию, а области с большим полем будут всё ещё раздуваться. В раздувающихся областях разделение на локальные “вселенные” и накопление возмущений будет продолжаться, и вся изложенная только что картина неоднородной Вселенной будет воспроизведиться в каждой из этих областей. Таким образом мы приходим к представлению о “вечной”, самовоспроизводящейся инфляции, согласно которому в любой момент времени¹ во Вселенной есть как области, где инфляция давно завершилась, так и области, где инфляция продолжается, причём по-прежнему в режиме самовоспроизводства.

Подчеркнём, что такая картина Вселенной, неоднородной в целом, никоим образом не противоречит однородности её наблюдаемой части и инфляционному механизму, обеспечивающему эту однородность. В указанной картине те области Вселенной, которые сильно отличаются от нашей (в частности, области, где инфляция продолжается до сих пор), в современную эпоху удалены от нас на расстояние, на много порядков превышающее видимый размер Вселенной. Таким образом, в картине “вечной” инфляции представления, изложенные в предыдущих главах, остаются

¹ Вопрос о том, что понимать под определённым моментом времени в такой картине, чрезвычайно сложен, и мы не будем его обсуждать.

ся справедливыми, но не для всей Вселенной, а для конечной, хотя и очень большой её области. Мы подробнее обсудим этот аспект в конце раздела.

Для конкретизации изложенных соображений обсудим класс моделей раздела 12.2.1 с большим полем и степенными потенциалами. Рассмотрим область хаббловского размера H^{-1} (размера горизонта де Ситтера) в раздувающейся Вселенной в некоторый момент времени t . Пусть среднее поле в этой области равно ϕ_c . Через хаббловское время $\delta t \sim H^{-1}$ среднее поле за счёт классической эволюции изменится на величину

$$\delta\phi_c = \dot{\phi}_c \delta t \sim -\frac{V'}{H^2},$$

где мы воспользовались уравнением медленного скатывания (12.11). За это же время рассматриваемая область разобъётся на несколько хаббловских областей, в каждой из которых среднее поле будет отличаться от $(\phi_c + \delta\phi_c)$ из-за вышедших за горизонт флюктуаций инфлатонного поля. Действительно, в моменты времени t и $(t + \delta t)$ за горизонтом находятся моды с конформными импульсами, удовлетворяющими

$$\frac{k}{a(t)} < H \quad \text{и} \quad \frac{k}{a(t + \delta t)} < H,$$

соответственно. Поэтому в течение отрезка времени δt за горизонт выйдут моды с импульсами вблизи $k \sim aH$, причём соответствующий интервал импульсов оценивается величиной

$$\delta k \sim \frac{k}{a} \delta a \sim kH\delta t.$$

Оценка для вклада этого интервала импульсов в флюктуацию поля ϕ имеет вид (см. (13.25))

$$(\delta\varphi)^2 \sim \frac{H^2}{(2\pi)^2} \frac{\delta k}{k},$$

что для $\delta t \sim H^{-1}$ даёт

$$\delta\varphi \sim \frac{H}{2\pi}.$$

Эта флюктуация однородна в масштабе H^{-1} , поскольку она обусловлена модами за горизонтом. Итак, в момент $(t + \delta t)$ области хаббловского размера, находящиеся внутри исходной области, могут иметь любые средние значения из интервала

$$\phi_c + \delta\phi_c \pm \delta\varphi.$$

При $\delta\varphi \ll |\delta\phi_c|$ имеет место известная нам из предыдущих глав картина: во всех областях среднее поле уменьшается со временем. Наоборот, при

$$\delta\varphi \gtrsim |\delta\phi_c| \tag{14.1}$$

в одних областях поле скатывается вниз, а в других — закатывается наверх вдоль скалярного потенциала. Соотношение (14.1) и представляет собой условие осуществления режима “вечной” инфляции: в заметной части областей хаббловского размера инфлатонное поле растёт, и инфляция продолжается, причём с ещё более быстрым темпом.

Опуская численные факторы порядка единицы, условие (14.1) можно записать в виде

$$H \gtrsim \frac{V'}{H^2}$$

или

$$\frac{V^{3/2}}{M_{Pl}^3 V'} \gtrsim 1. \quad (14.2)$$

Оно вполне может выполняться при плотностях энергии, далёких от планковского значения. Например, для потенциалов второй и четвёртой степени “вечная” инфляция происходит при полях

$$V = \frac{m^2}{2} \phi^2 : \quad \phi \gtrsim \sqrt{\frac{M_{Pl}}{m}} M_{Pl}, \quad (14.3)$$

$$V = \frac{\lambda}{4} \phi^4 : \quad \phi \gtrsim \lambda^{-1/6} M_{Pl}. \quad (14.4)$$

Иными словами, “вечная” инфляция происходит в режиме, для которого эффекты квантовой гравитации несущественны, если

$$V = \frac{m^2}{2} \phi^2 : \quad M_{Pl}^4 \gg V \gtrsim m M_{Pl}^3,$$

$$V = \frac{\lambda}{4} \phi^4 : \quad M_{Pl}^4 \gg V \gtrsim \lambda^{1/3} M_{Pl}^4.$$

При $m \ll M_{Pl}$ и $\lambda \ll 1$, соответственно, этот режим вполне может осуществляться.

При выполнении условия (14.2) значения инфлатонного поля в различных областях хаббловского размера сильно различаются. В частности, в некоторых таких областях накопившиеся флуктуации значительно смещают поле *к меньшим значениям* и приводят к тому, что условие (14.2) перестаёт выполняться. В этих областях доминирующим эффектом становится классическое скатывание, то есть начинает реализовываться случай инфляции с классическим полем, рассмотренный в Главе 12. С учётом изложенных здесь результатов, впрочем, изменяются оценки полного числа *e*-фолдингов “классической” инфляции и размера области однородности по её окончании. Действительно, начальное значение поля для “классической” инфляции получается из условия обращения (14.2) в равенство по порядку величины. Например, в конкретных моделях оно равно правым частям (14.3) и (14.4). Поэтому выражение (12.33) приводит к следующим оценкам для полного числа *e*-фолдингов:

$$V = \frac{m^2}{2} \phi^2 : \quad N_e^{(tot)} \sim \frac{M_{Pl}}{m},$$

$$V = \frac{\lambda}{4} \phi^4 : \quad N_e^{(tot)} \sim \lambda^{-1/3}.$$

Отличие этих оценок от (12.41), (12.42) однако, не приводит к какому-либо изменению общей картины: полное число *e*-фолдингов по-прежнему чрезвычайно велико, $N_e \sim 10^4 - 10^6$, а размер области однородности $R \propto \exp(N_e)$ по-прежнему на много порядков превышает размер наблюдаемой части Вселенной.

В связи с приведёнными только что оценками полезно сделать следующее замечание. Всё представление о “вечной” инфляции носит, насколько можно сейчас судить, экспериментально непроверяемый характер. Действительно, размер нашей области однородности после “классической” инфляции настолько велик, что проверить существование за её пределами областей с другой космологической эволюцией не представляется возможным. В то же время, картина “вечной” инфляции с гигантскими областями во Вселенной, где космология (а, возможно, и сами физические законы,

которые мы сейчас считаем фундаментальными) сильно варьируется от области к области и сильно отличается от известной нам, имеет несомненный эвристический интерес. Например, её нередко используют в качестве обоснования так называемого антропного принципа, на котором мы здесь не будем останавливаться (в связи с антропным принципом см., например, работы [92, 93, 94, 95]).

14.2 Генерация возмущений плотности за счёт дополнительного скалярного поля

14.2.1 Негауссовы адиабатические возмущения

В Главе 13 мы обсуждали механизм генерации скалярных возмущений, связанный с флуктуациями инфлатона. Среди предсказаний, характерных для такого механизма, — гауссов характер возмущений, а также соотношение (13.82) между амплитудами скалярных и тензорных возмущений и наклоном спектра тензорных возмущений. В этом разделе мы проиллюстрируем на простом примере, что предсказания такого рода не обязательны для инфляционной теории, если источником возмущений плотности служат не флуктуации самого поля инфлатона, а флуктуации других полей. Подчеркнём, что всюду в этом разделе речь идёт о возмущениях за горизонтом.

В качестве простейшей возможности рассмотрим дополнительное скалярное поле χ с минимальной связью с гравитацией, взаимодействие которого с полем инфлатона ϕ будем считать пренебрежимо слабым. В англоязычной литературе для поля χ используют термин “curvaton”; мы для этого поля специального термина вводить не будем. Отметим, что всюду в этой Главе и Главе 15 мы считаем, что на *инфляционной стадии* дополнительные поля вносят вклад в энергию, малый по сравнению со вкладом инфлатонного поля.

Предположим, что флуктуации инфлатона вносят пренебрежимо малый вклад в первичные возмущения плотности. Это — довольно сильное предположение; например, в моделях с большим полем оно сводится к требованию, чтобы параметры инфлатонного потенциала были малы по сравнению со значениями, фигурирующими в правых частях (13.61), (13.62). Сделав, тем не менее, такое предположение, сосредоточимся на поле χ и его флуктуациях. Идея состоит в том, что хотя поле χ вносит малый вклад в плотность энергии на инфляционной стадии, его флуктуации, образовавшиеся на этой стадии, могут давать доминирующий эффект с точки зрения генерации скалярных возмущений. Если, кроме того, поле χ достаточно сильно взаимодействует с обычным веществом, то эти флуктуации в конечном итоге перерабатываются в возмущения плотности горячей среды, то есть становятся адиабатическими начальными возмущениями.

Выберем для определённости скалярный потенциал поля χ в виде (в действительности результаты слабо зависят от формы потенциала; по поводу потенциалов общего вида мы сделаем замечания в дальнейшем)

$$V_\chi = \frac{m_\chi^2}{2} \chi^2 . \quad (14.5)$$

Предположим далее, что на всей стадии инфляции

$$m_\chi^2 \ll H^2 . \quad (14.6)$$

Пусть к концу инфляции (перед последними 60-ю e -фолдингами) поле χ имеет отличную от нуля классическую часть χ_c , которая однородна в области, соответствующей видимой части Вселенной. Мы увидим в разделе 14.3.1, что такое предположение вполне естественно, хотя оценки для величины χ_c содержат значительные неопределённости. В дальнейшем в этом разделе мы будем просто считать χ_c свободным параметром.

При выполнении условия (14.6) классическое поле χ_c практически не изменяется в течение последних 60-ти e -фолдингов инфляционной стадии. Постоянство поля χ_c на последних этапах инфляции и несколько позже — одно из основных требований к модели; если потенциал V_χ — степенной, но отличается от (14.5), то для выполнения этого требования вместо (14.6) нужно наложить условие $V''_\chi(\chi_c) \ll H^2$. Помимо однородной части поле χ содержит флюктуирующую часть, которую мы обозначим $\delta\chi$. Источником флюктуирующей части служат начальные вакуумные флюктуации квантового поля χ , а её описание в точности такое же, как описание флюктуаций инфлатонного поля, приведённое в разделе 13.1.2. К концу инфляции флюктуации $\delta\chi(\mathbf{x})$ являются гауссовыми и на космологически интересных пространственных масштабах имеют спектр мощности

$$\mathcal{P}_{\delta\chi} = \frac{H_k^2}{(2\pi)^2}, \quad (14.7)$$

где, как и в (13.26), H_k — это параметр Хаббла в тот момент на инфляционной стадии, когда мода с импульсом k выходит за горизонт. Напомним (см. раздел 13.1.2), что этот спектр близок к плоскому, а его наклон совпадает с наклоном спектра тензорных возмущений (13.81).

Как мы знаем из раздела I.4.8.1, однородное в масштабах текущего горизонта поле χ начинает осциллировать вблизи минимума своего потенциала $\chi = 0$ в тот момент, когда неравенство (14.6) перестаёт выполняться, то есть в момент t_{osc} , когда

$$H(t_{osc}) \simeq m_\chi. \quad (14.8)$$

Согласно сделанному предположению, осцилляции начинаются после окончания инфляции. Мы предположим дополнительно, что неравенство (14.6) перестаёт выполняться на радиационно-доминированной стадии², но всё же при достаточно высокой температуре ($T \gg 10$ МэВ), так что все космологически интересные возмущения всё ещё находятся за горизонтом. В действительности нам потребуется существенно усилить последнее предположение и считать, что осциллирующее поле χ успевает распасться на обычные частицы до момента закалки тёмной материи, а также до периода генерации барионной асимметрии Вселенной. Все эти предположения могут выполняться в широком диапазоне масс m_χ .

В сделанных предположениях физические импульсы космологически интересных мод малы по сравнению с m_χ при $t \sim t_{osc}$, и поле χ , включающее возмущения, осциллирует так же, как пространственно однородное поле. Плотность его энергии перед самым началом осцилляций равна

$$\rho_\chi(\mathbf{x}) = \frac{m_\chi^2}{2} \chi^2(\mathbf{x}) = \frac{m_\chi^2}{2} [\chi_c + \delta\chi(\mathbf{x})]^2,$$

²Другая возможность, которую мы здесь не рассматриваем, состоит в том, что поле χ начинает осциллировать на стадии пост-инфляционного разогрева. Результаты для этого случая получаются качественно схожими с результатами, описываемыми в тексте.

где χ_c всё ещё равно начальному значению однородной части поля, а $\delta\chi$ имеет спектр мощности (14.7). Средняя плотность энергии при этом равна

$$\bar{\rho}_\chi = \frac{m_\chi^2}{2} [\chi_c^2 + \langle (\delta\chi)^2 \rangle] .$$

Отсюда получаем для относительной флуктуации плотности энергии поля χ выражение

$$\delta_{\rho_\chi}(\mathbf{x}) \equiv \frac{\delta\rho_\chi(\mathbf{x})}{\bar{\rho}_\chi} = 2 \frac{\delta\chi(\mathbf{x})}{\chi_c} + \frac{[\delta\chi(\mathbf{x})]^2 - \langle (\delta\chi)^2 \rangle}{\chi_c^2} , \quad (14.9)$$

где мы считаем, что $\langle (\delta\chi)^2 \rangle \ll \chi_c^2$. Поскольку $\delta\chi(\mathbf{x})$ — это гауссово случайное поле, первое слагаемое здесь также является гауссовым полем. В то же время, второе слагаемое — негауссово; его корреляционные функции с самим собой и с первым слагаемым не удовлетворяют теореме Вика. Таким образом, поле $\delta_{\rho_\chi}(\mathbf{x})$ — негауссово; в частности, его трёхточечная корреляционная функция отлична от нуля. В этом и состоит механизм генерации негауссовых возмущений плотности в рассматриваемой модели.

Отметим, что такой механизм генерации приводит к вполне определённому характеру негауссости: возмущения плотности локальным образом зависят от гауссова поля $\delta\chi(\mathbf{x})$, а негауссость связана с тем, что эта зависимость нелинейна. Негауссость именно такого типа мы коротко обсуждали в конце раздела 5.4; из результатов данного раздела следует, что экспериментальный поиск негауссости этого типа неплохо мотивирован.

Для соответствия космологическим наблюдениям необходимо, чтобы негауссость первичных возмущений плотности была невелика. В рассматриваемой модели фактор подавления второго слагаемого в (14.9) по сравнению с первым составляет величину порядка

$$\frac{\Delta_{\delta\chi}}{\chi_c} \sim \frac{H_k}{2\pi\chi_c} , \quad (14.10)$$

где, как обычно, $\Delta_{\delta\chi} = \sqrt{\mathcal{P}_{\delta\chi}}$. Эта величина и является количественной характеристикой отклонений возмущений плотности от гауссости. Она, вообще говоря, может быть не слишком малой (см. обсуждение после формулы (14.13)), так что негауссость возмущений плотности может быть наблюдаемой.

▷ *Задача 1. Введём следующую безразмерную величину, количественно оценивающую отклонения возмущений плотности от гауссости:*

$$d_3 = \frac{|D_3(\mathbf{x}, \mathbf{x}, \mathbf{x})_{\{k\}}|}{[D_2(\mathbf{x}, \mathbf{x})_{\{k\}}]^{3/2}} ,$$

где

$$\begin{aligned} D_2(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)_{\{k\}} &= \langle \delta_{\rho_\chi}(\mathbf{x}_1) \delta_{\rho_\chi}(\mathbf{x}_2) \rangle_{\{k\}} \\ D_3(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3)_{\{k\}} &= \langle \delta_{\rho_\chi}(\mathbf{x}_1) \delta_{\rho_\chi}(\mathbf{x}_2) \delta_{\rho_\chi}(\mathbf{x}_3) \rangle_{\{k\}} \end{aligned}$$

— двухточечная и трёхточечная одновременные корреляционные функции, а индекс $\{k\}$ означает, что удерживается вклад мод с импульсами в логарифмическом интервале вокруг k . Чему равна d_3 в рассматриваемой модели при $\Delta_\chi \ll \chi_c$? Оценивается ли d_3 величиной (14.10)?

Если осциллирующее поле χ практически не взаимодействует с обычным веществом или с другими полями, то оно представляет собой холодную тёмную материю, см. раздел 2.5, а возмущения его плотности энергии — это CDM-возмущения постоянной кривизны. Возможность такого рода мы рассмотрим в разделе 14.4 на примере модели с аксионами. Здесь же мы обсудим другую ситуацию, когда поле χ , наоборот, взаимодействует с обычным веществом достаточно сильно. Как мы обсуждали в разделах I.4.8.1 и 2.5, осциллирующее почти однородное поле χ можно воспринимать как конденсат χ -бозонов с импульсами, близкими к нулю. Если χ -бозоны нестабильны и распадаются на обычные частицы, то время жизни конденсата никак не больше времени жизни χ -бозона³. Осцилляции поля χ прекращаются, и оно релаксирует к своему вакуумному значению $\chi = 0$ к моменту времени t_{dec} , такому, что

$$H(t_{dec}) \simeq \Gamma_\chi , \quad (14.11)$$

где $\Gamma_\chi = \tau_\chi^{-1}$ — обратное время жизни χ -конденсата. В теориях со слабой связью выполнено $\Gamma_\chi < m_\chi$. Заметный интерес для нас будет представлять случай, когда распад осциллирующего поля происходит гораздо позже начала осцилляций, то есть $\Gamma_\chi \ll m_\chi$, $t_{dec} \gg t_{osc}$. Для этого требуется, чтобы взаимодействие между полем χ и обычными частицами было достаточно слабым.

В результате распада осциллирующего поля χ происходит передача энергии от этого поля к релятивистской компоненте среды. Возмущения плотности энергии поля χ превращаются в возмущения релятивистской компоненты, то есть в адиабатические возмущения. При этом существенно упомянутое выше предположение, что распад χ -конденсата происходит до того, как закаливаются частицы темной материи. Если бы распад χ -конденсата происходил, наоборот, после закалки тёмной материи, то начальные возмущения тёмной материи отсутствовали бы; в обозначениях раздела 5.2 $\delta_{CDM} = 0$, в то время как $\delta_{CDM} = (3/4)\delta_{rad}$ для адиабатической моды за горизонтом. Это означает, что первичные скалярные возмущения содержали бы большую примесь CDM-моды постоянной кривизны, анткоррелирующую с адиабатической модой. Такая возможность исключена космологическими наблюдениями, см. раздел 5.4. По такой же причине необходимо, чтобы распад χ -конденсата происходил до образования барионной асимметрии Вселенной: в противном случае генерировалась бы недопустимо большая барионная мода постоянной кривизны, анткоррелирующая с адиабатической модой.

Введём параметр r_χ , характеризующий соотношение между плотностью энергии поля χ и плотностью энергии релятивистского вещества перед распадом осциллирующего поля χ ,

$$\rho_\chi(t_{dec}) = r_\chi \rho_{rad}(t_{dec}) . \quad (14.12)$$

Возмущения полной плотности энергии $\delta\rho$ после распада χ -конденсата равны возмущениям $\delta\rho_\chi$ до распада (с точностью до численного коэффициента, близкого к единице). Поэтому после распада χ -конденсата возмущения оцениваются как

$$\delta \equiv \frac{\delta\rho}{\rho} \simeq \frac{\delta\rho_\chi}{\rho_{rad} + \rho_\chi} \simeq \frac{r_\chi}{1 + r_\chi} \cdot \delta_{\rho_\chi} . \quad (14.13)$$

Численный коэффициент в (14.13), который можно найти с помощью методов раздела 5.2, близок к единице и несущественен для дальнейших оценок.

³Как мы увидим в Главе 15, время жизни конденсата скалярных бозонов — осциллирующего скалярного поля — может быть заметно меньше времени жизни отдельного бозона.

Из выражения (14.13) следуют три вывода. Во-первых, при $r_\chi \ll 1$ амплитуда возмущений поля χ может быть не слишком малой, несмотря на требуемую малость $\delta \sim \mathcal{R}$. Поэтому величина (14.10), характеризующая негауссовость возмущений, действительно не обязана быть очень малой. Во-вторых, статистические свойства случайного поля $\delta(\mathbf{x})$ совпадают со статистическими свойствами поля $\delta_{\rho_\chi}(\mathbf{x})$, так что негауссовость возмущений плотности энергии поля χ прямо переносится на адиабатические возмущения. Наконец, учитывая, что негауссовость возмущений должна быть мала, так что δ_{ρ_χ} близко к $2\delta\chi/\chi_c$, и вспоминая (14.7), находим, что зависимость от k спектра мощности скалярных возмущений такая же, как для тензорных возмущений. В терминах введенных в разделе 13.4.3 наклонов спектров это значит, что

$$n_s - 1 = n_T . \quad (14.14)$$

Заметим, что модель предсказывает “красный” спектр, $n_s < 1$, и что соотношение (14.14) совершенно не характерно для механизма генерации скалярных возмущений за счёт флюктуаций поля инфлатона.

Рассмотрим теперь вопрос о том, каков должен быть параметр Хаббла H_k за 60 е-фолдингов до окончания инфляции, чтобы амплитуда адиабатических возмущений имела наблюдаемое значение. Для этого прежде всего свяжем начальное значение χ_c с параметром r_χ . Будем считать, что $r_\chi \lesssim 1$, тогда расширение Вселенной во время осцилляций поля χ происходит по законам радиационно-доминированной стадии, $a(t) \propto t^{1/2}$, $H(t) \propto t^{-1}$. Поэтому из (14.8), (14.11) получаем

$$\frac{a(t_{osc})}{a(t_{dec})} = \left(\frac{\Gamma_\chi}{m_\chi} \right)^{1/2} .$$

Плотность энергии массивного осциллирующего поля χ падает как a^{-3} , см. разделы I.4.8.1 и 2.5, так что

$$\rho_\chi(t_{dec}) = \left(\frac{a(t_{osc})}{a(t_{dec})} \right)^3 \rho_\chi(t_{osc}) \simeq \left(\frac{\Gamma_\chi}{m_\chi} \right)^{3/2} m_\chi^2 \chi_c^2 .$$

Далее, опуская численные множители, получим из уравнения Фридмана, что на момент распада осцилляций

$$\rho_{rad}(t_{dec}) \sim H^2(t_{dec}) M_{Pl}^2 \sim \Gamma_\chi^2 M_{Pl}^2 .$$

В результате соотношение (14.12) сводится к

$$\chi_c^2 \sim r_\chi \left(\frac{\Gamma_\chi}{m_\chi} \right)^{1/2} M_{Pl}^2 . \quad (14.15)$$

Заметим, что описываемый сценарий требует $\chi_c \ll M_{Pl}$. Наконец, учтём, что для адиабатической моды $\delta \simeq \mathcal{R}$, воспользуемся (14.7), (14.9), (14.15) и приведём соотношение (14.13) к виду

$$\frac{H_k}{2\pi M_{Pl}} \sim r_\chi^{-1/2} \left(\frac{\Gamma_\chi}{m_\chi} \right)^{1/4} \Delta_{\mathcal{R}} . \quad (14.16)$$

Это и есть искомое соотношение для инфляционного параметра Хаббла. Используя (14.15), его можно переписать в терминах начального значения поля χ_c , а не в терминах параметра r_χ .

Напомним, что с точностью до численного множителя левая часть (14.16) равна амплитуде тензорных возмущений Δ_T , генерируемых во время инфляции, см. раздел 13.3. Видно, что эта амплитуда зависит от соотношения между двумя, вообще говоря, малыми величинами Γ_χ/m_χ и r_χ . Поэтому какая-либо простая связь амплитуды тензорных возмущений с наклонами спектров в рассматриваемой модели отсутствует.

14.2.2 Моды постоянной кривизны

Варианты рассматриваемой модели могут быть использованы для иллюстрации того, что возможна генерация мод постоянной кривизны, коррелирующих или антикоррелирующих с адиабатической модой. Мы обсудим эту возможность на примере CDM-моды; основная идея может быть распространена на барионную и даже нейтринную моду постоянной кривизны.

Первая модификация модели состоит в том, что частицы тёмной материи появляются во Вселенной исключительно в результате распадов χ -частиц, и никогда не входят в химическое равновесие. Такая возможность реализуется, например, если частицы тёмной материи непосредственно не участвуют во взаимодействиях с частицами Стандартной модели, и достаточно слабо взаимодействуют с полем χ , так что их аннигиляцией через виртуальную χ -частицу можно пренебречь. Предположим, в отличие от раздела 14.2.1, что осциллирующее поле χ доминирует в плотности энергии во Вселенной перед своим распадом, то есть для параметра r_χ справедливо $r_\chi \gg 1$. Предположим далее, что χ -частицы распадаются как на частицы тёмной материи, так и на частицы Стандартной модели. В распадах второго типа генерируется энтропия плазмы. В этой ситуации образуется в основном адиабатическая мода возмущений. Для нахождения примеси моды постоянной кривизны учтём, что после распада поля χ полная плотность энтропии складывается из той, что была до распада (s_{old}), и образовавшейся при распаде (s_{dec}), при этом $s_{old}/s_{dec} \simeq r_\chi^{-3/4} \ll 1$. Отношение плотности числа частиц тёмной материи n_{CDM} к s_{dec} — величина, постоянная в пространстве, хотя и n_{CDM} , и s_{dec} неоднородны из-за начальной неоднородности поля χ . Удобно использовать калибровку, в которой пространственная кривизна гиперповерхностей постоянного времени равна нулю. В этой калибровке в сделанном ранее предположении, что единственным источником скалярных возмущений являются изначальные неоднородности поля χ , имеем, $\delta s_{old} = 0$, $\Psi = \Phi = 0$, а инвариантные величины ζ_λ даются формулой (5.29). Для начальных возмущений величины n_{CDM}/s будем иметь

$$\delta \left(\frac{n_{CDM}}{s} \right) = \delta \left(\frac{n_{CDM}}{s_{dec} + s_{old}} \right) = \delta \left[\frac{n_{CDM}}{s_{dec}} \left(1 - \frac{s_{old}}{s_{dec}} \right) \right] = \frac{n_{CDM}}{s_{dec}} \frac{s_{old}}{s_{dec}} \frac{\delta s_{dec}}{s_{dec}} .$$

Поскольку доминирующие возмущения — адиабатические, то в указанной системе отсчёта $\delta s_{dec}/s_{dec} = 3/4 \cdot \delta_{rad} \approx 3\zeta \approx 3\mathcal{R}$. В итоге получаем

$$\mathcal{S}_{CDM} \equiv \frac{\delta(n_{CDM}/s)}{n_{CDM}/s} \approx 3r_\chi^{-3/4}\mathcal{R} .$$

Таким образом, рассмотренный механизм приводит к генерации CDM-моды постоянной кривизны, полностью скоррелированной с адиабатической модой, причём форма спектров этих двух мод — одна и та же. Физический смысл этого результата состоит в том, что источник возмущений δn_{CDM} и δs — один и тот же, но из-за наличия

однородной части s_{old} относительные возмущения энтропии меньше относительных возмущений плотности тёмной материи. Малость параметра r_χ^{-1} требуется для того, чтобы адиабатическая мода доминировала.

Возможность того, что мода постоянной кривизны антикоррелирует с адиабатической модой, является более экзотической, однако и её исключить нельзя. Например, такая возможность реализуется в следующем варианте рассматриваемой модели. Предположим, что частицы тёмной материи образуются как при распаде поля χ , так и до этого распада, а после распада поля χ они не приходят в химическое равновесие с горячей компонентой. Предположим ещё, что величина r_χ настолько велика, что энтропией, имевшейся до распада поля χ , можно пренебречь. Тогда после распада поля χ плотность числа частиц тёмной материи равна $n_{CDM} = n_{dec} + n_{old}$, а плотность энтропии — это s_{dec} . Будем считать, что $n_{old} \ll n_{dec}$. В системе отсчёта с нулевой пространственной кривизной величина n_{old} однородна в пространстве, а для возмущений δn_{dec} и δs_{dec} выполняется $\delta(n_{dec}/s_{dec}) = 0$. Поэтому для интересующей нас моды постоянной кривизны имеем

$$\delta\left(\frac{n_{CDM}}{s}\right) = \delta\left(\frac{n_{dec} + n_{old}}{s_{dec}}\right) = -\frac{n_{old}}{n_{dec}} \frac{n_{dec}}{s_{dec}} \frac{\delta s_{dec}}{s_{dec}}.$$

Окончательно получаем

$$\mathcal{S}_{CDM} = \frac{\delta(n_{CDM}/s)}{n_{CDM}/s} \approx -\frac{n_{old}}{n_{dec}} \cdot 3\mathcal{R}.$$

Таким образом, в этом варианте действительно генерируется мода постоянной кривизны, антикоррелированная с адиабатической модой. Смысл этого результата состоит в том, что вновь имеется один и тот же источник возмущений δn_{CDM} и δs , однако относительные возмущения числа частиц уменьшены из-за присутствия однородной компоненты n_{old} .

Итак, введение в инфляционную теорию дополнительных полей, ответственных за генерацию возмущений плотности, приводит к новым по сравнению с моделями с одним инфлатонным полем возможностям, таким как заметная негауссовость возмущений, отсутствие связи между амплитудами скалярных и тензорных возмущений и их наклонами, наличие примеси мод постоянной кривизны. В связи с этим прецизионное изучение космологических возмущений, которое позволит сделать выбор между различными механизмами их генерации, представляет особый интерес.

14.3 Лёгкое скалярное поле в раздувающейся Вселенной

В этом разделе мы рассмотрим, как ведёт себя скалярное поле сравнительно малой массы в инфляционной Вселенной. Этот вопрос представляет интерес с точки зрения постановки начальных данных для пост-инфляционной эволюции в моделях, где существенную роль играют скалярные поля. Одну из таких моделей — модель с аксионом — мы рассмотрим в разделе 14.4, в качестве другого примера можно привести модель Аффлека–Дайна генерации барионной асимметрии Вселенной, см. раздел I.11.6. Сначала мы рассмотрим свободное скалярное поле ненулевой массы. Мы увидим, что в пространстве де Ситтера с постоянным параметром Хаббла флуктуации такого поля имеют вполне определённую и вычислимую амплитуду, которая

оказывается весьма большой при малой массе поля. Однако в реалистических моделях инфляционной Вселенной эта амплитуда, вообще говоря, сильно зависит от эволюции масштабного фактора на ранних этапах инфляции. Поэтому в предсказаниях относительно начальных данных для пост-инфляционной эволюции имеются значительные неопределённости.

В связи с большой амплитудой флуктуаций приближение свободного поля может быть неприменимо. Поэтому мы рассмотрим и случай скалярного поля с самодействием. Мы увидим, что при достаточно больших константах самодействия неопределённостей в предсказаниях становится меньше, хотя зависимость от характера протекания инфляции и от величины константы самодействия остаётся.

Мы будем рассматривать скалярное поле, минимально взаимодействующее с гравитацией. В связи с этим стоит отметить, что в противном случае, когда в лагранжиане скалярного поля σ имеется слагаемое $\xi_\sigma R\sigma^2$ с константой ξ_σ порядка единицы, поле имеет большую эффективную массу на стадии инфляции, $m_{eff}^2 \sim \xi_\sigma H^2$, и наш анализ неприменим.

14.3.1 Поле малой массы без самодействия

Итак, начнём со случая, когда помимо инфлатона в теории имеется свободное скалярное поле σ массы m_σ . Его моды удовлетворяют уравнению (ср. с уравнением (13.12))

$$\ddot{\sigma} + 3H\dot{\sigma} + \frac{k^2}{a^2}\sigma + m_\sigma^2\sigma = 0. \quad (14.17)$$

Нас будет интересовать инфляционный режим с медленно меняющимся параметром Хаббла. При этом мы будем считать массу малой⁴,

$$H \gg m_\sigma,$$

и пренебрегать обратным влиянием поля σ на динамику расширения Вселенной. Подобно флуктуациям инфлатонного поля, вакуумные флуктуации поля σ выходят за горизонт и после этого эволюционируют крайне медленно. В результате образуется большая среднеквадратичная флуктуация $\langle \sigma^2(\mathbf{x}) \rangle$. Наша задача — найти её значение в момент времени t . Разумеется, наибольший интерес представляет время окончания инфляции и близкие к нему времена, соответствующие последним 60 e -фолдингам.

В пренебрежении массой поля σ вышедшие за горизонт флуктуации этого поля имели бы спектр мощности вида (13.26), то есть $\mathcal{P}_\sigma = H^2/(2\pi)^2$. В этом приближении для среднего квадрата поля мы получили бы логарифмически расходящийся интеграл

$$\langle \sigma^2(\mathbf{x}) \rangle = \int_0^{q_{max}} \frac{dq}{q} \mathcal{P}_\sigma, \quad (14.18)$$

где $q_{max} \sim H$ — максимальный импульс мод за горизонтом. Расходимость этого интеграла нужно, однако, воспринимать как указание на то, что пренебрегать массой m_σ при вычислении величины $\langle \sigma^2(\mathbf{x}) \rangle$ в действительности нельзя. Физическая причина здесь состоит в том, что благодаря наличию малой, но конечной массы моды поля σ хотя и медленно, но эволюционируют за горизонтом, и их амплитуды постоянно уменьшаются. Для того чтобы это учесть, заметим, что далеко за горизонтом

⁴В случае выполнения обратного неравенства $m_\sigma \gg H$ рассматриваемые в этом разделе эффекты малы, и поле всё время находится вблизи своего вакуумного значения $\sigma = 0$.

импульсом k в уравнении (14.17) можно пренебречь, и оно сводится к уравнению для однородного поля. Эволюция происходит в режиме медленного скатывания, так что для σ имеем уравнение, аналогичное (12.11),

$$\dot{\sigma} = -\frac{m_\sigma^2 \sigma}{3H} \quad (14.19)$$

▷ **Задача 2.** Показать, что при $H \gg m_\sigma$ для поля σ действительно реализуется режим медленного скатывания, то есть $\ddot{\sigma} \ll H\dot{\sigma}$.

Пусть $q(t) \equiv q$ — физический импульс моды в интересующий нас момент времени t . Пусть далее t_q — момент времени, когда эта мода вышла за горизонт; для рассматриваемых инфракрасных мод $t_q < t$. Поскольку $q(t_q) = H(t_q)$ по определению момента выхода за горизонт, для текущего физического импульса имеем выражение

$$q = H(t_q) \exp \left(- \int_{t_q}^t H dt \right). \quad (14.20)$$

Из (14.19) имеем следующее соотношение между амплитудой моды в момент выхода за горизонт и в интересующий нас момент:

$$\sigma(t) = \sigma(t_q) \exp \left(- \int_{t_q}^t \frac{m_\sigma^2}{3H(t')} dt' \right). \quad (14.21)$$

Амплитуду $\sigma(t_q)$ мы знаем: она равна $H(t_q)/(2\pi)$. Поэтому вместо (14.18) из (14.21) сразу получаем выражение, учитывающее массу поля,

$$\langle \sigma^2(\mathbf{x}, t) \rangle = \int_0^{H(t)} \frac{dq}{q} \frac{H^2(t_q)}{(2\pi)^2} \exp \left(- \int_{t_q}^t \frac{2m_\sigma^2}{3H(t')} dt' \right). \quad (14.22)$$

Здесь связь между t_q и переменной интегрирования q даётся формулой (14.20). Эту формулу можно использовать для того, чтобы перейти от интегрирования по q к интегрированию по t_q . Пренебрегая медленной зависимостью параметра Хаббла от времени, получим из (14.20)

$$\frac{d \ln q}{dt_q} = H(t_q),$$

и окончательно

$$\langle \sigma^2(\mathbf{x}, t) \rangle = \int_{t_i}^t dt_q \frac{H^3(t_q)}{(2\pi)^2} \exp \left(- \int_{t_q}^t \frac{2m_\sigma^2}{3H(t')} dt' \right). \quad (14.23)$$

Нижний предел интегрирования t_i здесь написан формально; время t_i соответствует, грубо говоря, началу инфляции, о котором трудно сказать что-то определённое.

Применим сначала общую формулу (14.23) к случаю Вселенной де Ситтера, для которой $H = \text{const}$. В этом случае интегралы легко вычисляются, и мы получаем

$$\langle \sigma^2(\mathbf{x}) \rangle = \frac{3H^4}{8\pi^2 m_\sigma^2}. \quad (14.24)$$

Амплитуда скалярного поля малой, но конечной массы является конечной, хотя и большой величиной во Вселенной де Ситтера. Другой вывод формулы (14.24) приведён в конце раздела.

В инфляционных теориях, где параметр Хаббла зависит от времени, ситуация более сложная. Ниже мы убедимся, что формула (14.24) буквально работает лишь в довольно узком диапазоне масс,

$$H^2 \gg m_\sigma^2 \gg \epsilon H^2 , \quad (14.25)$$

где $\epsilon = |\dot{H}|/H^2$ — параметр медленного скатывания; первое неравенство здесь — это наше исходное предположение, так что нетривиальной частью утверждения является второе неравенство. Если же $m^2 \ll \epsilon H^2$, то амплитуда поля σ отлична от (14.24) и определяется несколькими факторами.

Прежде всего, значение поля σ в самом начале инфляционной стадии необязательно равно нулю. Более того, представление о хаотическом начальном состоянии, и, соответственно, хаотической инфляции (раздел 12.2.1) естественным образом приводит именно к ненулевым начальным данным: в рамках этого представления можно полагать, что в самом начале инфляции плотность энергии поля σ по порядку величины совпадает с планковской плотностью,

$$m_\sigma^2 \sigma_i^2 \sim M_{Pl}^4 . \quad (14.26)$$

Благодаря инфляции начальное поле быстро становится пространственно однородным; из-за большого начального значения это поле можно считать классическим. Это классическое поле σ_c удовлетворяет классическому уравнению движения, при чём при $m_\sigma \ll H$ для него выполняются условия медленного скатывания, так что уравнение имеет вид

$$3H\dot{\sigma}_c = -m_\sigma^2 \sigma_c . \quad (14.27)$$

Решением этого уравнения служит

$$\sigma_c = \exp \left(-m_\sigma^2 \int_{t_i}^t \frac{dt'}{3H(t')} \right) \cdot \sigma_i .$$

При выполнении неравенства

$$m_\sigma^2 \int_{t_i}^t \frac{dt'}{3H(t')} \gg 1 \quad (14.28)$$

начальное значение поля ко времени t забывается, а в противном случае поле σ_c меняется несильно за весь период инфляции, предшествующий моменту t . В некоторых (хотя и не во всех) инфляционных моделях справедлива оценка

$$\int_{t_i}^t \frac{dt'}{3H(t')} \sim \frac{1}{\dot{H}(t)} . \quad (14.29)$$

В этих случаях условие (14.28) сводится к $m^2 \gg \dot{H}$, то есть ко второму неравенству в (14.25). Таким образом, при $m_\sigma^2 \ll \epsilon H^2$ значение поля σ даже к концу инфляции отчасти определяется его начальным значением.

Отметим, что если в какой-то момент инфляционной стадии плотность энергии поля σ_c станет превышать плотность энергии инфлатона ϕ , то основным источником раздувания Вселенной станет само поле σ_c , то есть именно оно начнёт выступать в роли инфлатона.

- ▷ **Задача 3.** Показать, что соотношение (14.29) действительно выполняется на достаточно поздних этапах инфляции в модели с потенциалом инфлатона $V(\phi) = (\lambda/4)\phi^4$ и в модели со степенной инфляцией, $a \propto t^\alpha$, $\alpha > 1$. Выполняется ли оно в модели с $V(\phi) = (m^2/2)\phi^2$? Указание: воспользоваться результатами задачи 3 Главы 12.
- ▷ **Задача 4.** Рассмотрим хаотическую инфляцию с потенциалом инфлатона $V(\phi) = (\lambda/4)\phi^4$ и начальным данным (14.26) для поля σ_c . Найти, при каком соотношении между m_σ и λ плотность энергии поля σ_c не превышает плотности энергии инфлатона вплоть до окончания инфляции. Используя результаты раздела 13.4.1, дать численную оценку для m_σ .

Вернёмся к обсуждению квантовых флуктуаций поля σ , учитывая, что в линейной теории классическое поле σ_c и квантовые флуктуации, которые мы по-прежнему будем обозначать $\sigma(\mathbf{x}, t)$, ведут себя независимо. Существенным обстоятельством для инфляционных моделей является следующее. При $H = \text{const}$ интеграл (14.23) набирается при

$$(t_q - t) \sim H/m_\sigma^2, \quad (14.30)$$

то есть на временном интервале, значительно превышающем хаббловское время. Именно тогда выходят за горизонт моды, дающие основной вклад в интеграл (14.22); для нахождения флуктуации поля σ важна динамика именно этих мод во время и после их выхода за горизонт. Если за время H/m_σ^2 параметр Хаббла меняется мало, то справедлива формула (14.24), а в противном случае этой формулой пользоваться нельзя. Из этого соображения получаем условие применимости формулы (14.24):

$$\dot{H} \cdot \frac{H}{m_\sigma^2} \ll H,$$

что сводится к $m_\sigma^2 \gg \dot{H}$, то есть ко второму неравенству в (14.25).

Обсудим теперь случай

$$m_\sigma^2 \ll \epsilon H^2. \quad (14.31)$$

В соответствии с (14.30), количество e -фолдингов, прошедших с момента выхода существенных мод за горизонт, оценивается как

$$N_e^{(\sigma)} \sim \frac{H^2}{m_\sigma^2}. \quad (14.32)$$

Это — большое число, и совершенно не обязательно, что полное число e -фолдингов $N_e^{(tot)}$ за время инфляции его превышает. При $N_e^{(tot)} < H^2/m_\sigma^2$ результат для $\langle \sigma^2(\mathbf{x}) \rangle$ зависит от того, что происходило в начале инфляционной стадии и до нее, и применение (14.24) для оценки флюктуации было бы совершенно необоснованным. Более того, даже при $N_e^{(tot)} \gg H^2/m_\sigma^2$ формула (14.24) не имеет, вообще говоря, отношения к моделям инфляции, в которых параметр Хаббла не постоянен на протяжении эволюции, соответствующей большому числу e -фолдингов $N_e^{(\sigma)}$. Это — один из немногих случаев, когда приближение деситтеровской Вселенной не работает даже на качественном уровне для описания процессов, происходящих на инфляционной стадии. Связано это, разумеется с тем, что в логарифмический, на первый взгляд, интеграл (14.22) дают основной вклад экспоненциально малые текущие импульсы

$$q \sim H \exp(-H^2/m_\sigma^2), \quad (14.33)$$

из-за чего этот интеграл и оказывается большим.

Заметим, что из приведённых соображений следует, что пространственный размер неоднородности поля σ весьма велик. Например, в случае пространства де Ситтера он, как видно из (14.33), оценивается величиной $H^{-1} \exp(H^2/m_\sigma^2)$. Для⁵ $m_\sigma^2 \ll H^2/60$ этот размер превышает размер видимой части Вселенной (каков он был к моменту окончания инфляции), так что поле σ , генерируемое в результате инфляции, является почти однородным на масштабе видимой части.

Чтобы получить представление о величине поля σ , генерируемого в инфляционной Вселенной в случае, когда полное число e -фолдингов не очень велико, удобно вместо переменной t_q в интеграле (14.23) использовать число e -фолдингов N_e , прошедших с момента t_q до текущего момента t , и рассматривать параметр Хаббла как функцию N_e . Таким образом, $H(N_e)$ — это значение параметра Хаббла в тот момент на инфляционной стадии, с которого прошло N_e e -фолдингов до интересующего момента t (например, до момента окончания инфляции). Учтём, что

$$dt_q = -\frac{dN_e}{H(N_e)},$$

и получим вместо (14.23) выражение

$$\langle \sigma^2(\mathbf{x}) \rangle = \int_0^{N_e^{(tot)}(t)} dN_e \frac{H^2(N_e)}{(2\pi)^2} \exp\left(-\int_0^{N_e} \frac{2m_\sigma^2}{3H^2(N'_e)} dN'_e\right),$$

где $N_e^{(tot)}(t)$ — полное число e -фолдингов от начала инфляции до момента t . Если $N_e^{(tot)}(t)$ мало по сравнению с величиной (14.32), то есть $N_e^{(tot)}(t) \ll H^2/m_\sigma^2$, то экспоненциальный множитель в этом выражении близок к единице, и мы получаем

$$\langle \sigma^2(\mathbf{x}) \rangle = N_e^{(tot)}(t) \frac{\bar{H}^2}{(2\pi)^2}, \quad (14.34)$$

где

$$\bar{H}^2 = \frac{1}{N_e^{(tot)}(t)} \int_0^{N_e^{(tot)}} H^2 dN_e$$

— усреднённое по всем e -фолдингам значение квадрата инфляционного параметра Хаббла. Из (14.34) видно, что в рассматриваемом случае $N_e^{(tot)}(t) \ll H^2/m_\sigma^2$ флуктуации поля σ малы по сравнению со случаем пространства де Ситтера с параметром Хаббла \bar{H} : за горизонтом к моменту t находится ещё слишком мало мод, и их суммарный вклад ещё не успел достичь деситтеровского значения. В то же время, из (14.34) видно также, что генерируемое поле велико по сравнению с наивной оценкой $\sigma \sim H/(2\pi)$. Наконец, как и ожидалось, величина $\langle \sigma^2 \rangle$ набирается на всём протяжении инфляционного расширения, причём наиболее существенным является начальный его период, когда параметр Хаббла велик и медленнее всего меняется со временем, а значит и с числом e -фолдингов N_e .

В действительности даже при большом полном числе e -фолдингов, $N_e^{(tot)}(t) \gg H^2/m_\sigma^2$, величина флуктуации поля σ может определяться начальным периодом инфляционной стадии, а значит не может быть надёжно вычислена. Это вновь связано

⁵Число здесь, разумеется, совпадает с минимальным числом e -фолдингов, необходимых для успешной инфляции.

с тем обстоятельством, что при достаточно малых значениях m_σ основной вклад в флуктуацию поля σ в линейной теории дают моды со сверхбольшой длиной волны, рано выходящие за горизонт.

- ▷ Задача 5. В модели с потенциалом инфлатона $V(\phi) = (\lambda/4)\phi^4$ найти, при каких значениях m_σ основной вклад в $\langle\sigma^2\rangle$ действительно происходит от самого раннего периода инфляции. Считать, как в разделе 12.2.1, что инфляция начинается при $V(\phi_i) \sim M_{Pl}^4$. Используя результаты раздела 13.4.1, сделать численную оценку. Оценить флуктуацию поля σ как в этом, так и в противоположном случае. Указание: перейти в (14.23) от интегрирования по времени t_q к интегрированию по классическому полю инфлатона $\phi(t_q) \equiv \phi$.
- ▷ Задача 6. Рассмотреть модель с квадратичным потенциалом инфлатона, $V(\phi) = (m_\phi^2/2)\phi^2$. Показать, что при $m_\sigma > m_\phi$ флуктуация поля σ не зависит от деталей начала инфляции. Найти выражение для этой флуктуации. Сравнить результат с выражением (14.24).

Приведём прямой вывод формулы (14.24) в квантовой теории поля σ в пространстве де Ситтера. В конформном времени η моды этого поля удовлетворяют уравнению

$$\sigma'' + 2\frac{a'}{a}\sigma' + k^2\sigma + m^2a^2\sigma = 0 .$$

Для пространства де Ситтера справедливо $a = -1/(H\eta)$, и это уравнение приобретает вид

$$\sigma'' - \frac{2}{\eta}\sigma' + k^2\sigma + \frac{m^2}{H^2\eta^2}\sigma = 0 .$$

Общее решение этого уравнения равно

$$\sigma = \text{const} \cdot |\eta|^{3/2} Z_\nu(k\eta) ,$$

где

$$\nu = \sqrt{\frac{9}{4} - \frac{m^2}{H^2}} \approx \frac{3}{2} - \frac{m^2}{3H^2} ,$$

а Z_ν — функция Бесселя. При больших отрицательных η массой поля σ можно пренебречь по сравнению с физическим импульсом $q = k/a$, и мы приходим к ситуации, описанной в разделе 13.1.2. В частности, поле $\chi = a\sigma$ должно на ранних временах иметь вид (13.20). Используя известные асимптотики функций Ганкеля $H_\nu^{(1,2)}$ при больших значениях аргумента, из последнего требования получаем⁶

$$\sigma(\mathbf{x}, \eta) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2}} \frac{\sqrt{\pi}}{2} H |\eta|^{3/2} \left[e^{-i\mathbf{kx}} H_\nu^{(1)}(k\eta) A_\mathbf{k}^\dagger + e^{i\mathbf{kx}} H_\nu^{(2)}(k\eta) A_\mathbf{k} \right] .$$

Используем теперь тот факт, что при малых $k\eta$ выполняется

$$H_\nu^{(1,2)}(k\eta) = \mp i \frac{1}{\sin \nu \pi} \left(\frac{2}{k\eta} \right)^\nu \frac{1}{\Gamma(1-\nu)} \approx \mp i \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{(k\eta)^\nu} ,$$

где мы положили $\nu = 3/2$ везде, где это возможно. В результате для вклада мод за горизонтом в поле $\sigma(\mathbf{x}, \eta)$ получим

$$\sigma(\mathbf{x}, \eta)_{\{k\}} = \int d^3k \frac{1}{4\pi^{3/2}} \frac{H}{k^\nu} |\eta|^{3/2-\nu} \left[e^{-i\mathbf{kx}} \tilde{A}_\mathbf{k}^\dagger + e^{i\mathbf{kx}} \tilde{A}_\mathbf{k} \right] .$$

⁶Операторы $A_\mathbf{k}^\dagger$ и $A_\mathbf{k}$ отличаются от фигурирующих в (13.20) фазовыми множителями, которые несущественны.

Отметим, что это выражение отличается от (13.24) фактором $|k\eta|^{3/2-\nu}$ под интегралом. Из него сразу следует искомый результат

$$\langle \sigma^2(\mathbf{x}) \rangle = \int_0^{k_{max}} \frac{4\pi k^2 dk}{16\pi^3} \frac{H^2}{k^{2\nu}} |\eta|^{3-2\nu} = \frac{H^2}{(2\pi)^2} \frac{1}{3-2\nu} |k_{max}\eta|^{3-2\nu} = \frac{3}{8\pi^2} \frac{H^4}{m^2},$$

где $k_{max} \sim |\eta^{-1}|$ — максимальный импульс мод за горизонтом, и мы выписали ответ в главном порядке по малому параметру m^2/H^2 . Отметим, что интеграл здесь действительно набирается при импульсах

$$k \sim |\eta^{-1}| \cdot \exp\left(-\frac{1}{3-2\nu}\right),$$

то есть при экспоненциально малых физических импульсах (14.33).

14.3.2 Модель с потенциалом четвёртого порядка

Изложенные в предыдущем разделе результаты показывают, что в линейной теории имеются значительные неопределённости при описании флуктуаций поля σ в раздувающейся Вселенной: в $\langle \sigma^2 \rangle$ большой вклад, вообще говоря, дают длинноволновые флуктуации, выходящие за горизонт на начальных стадиях инфляции, а об этих стадиях сколько-нибудь уверенно судить трудно. Кроме того, остаётся зависимость от начального значения поля σ_i . Если в потенциале поля σ имеются нелинейные слагаемые, то ситуация может быть другой. Пусть, например, потенциал поля σ имеет вид

$$V_\sigma = \frac{\lambda_\sigma}{4} \sigma^4, \quad (14.35)$$

и константа λ_σ не слишком мала. Массой поля σ мы пренебрегаем; в дальнейшем мы увидим, что это законно при

$$m_\sigma^2 \ll 3\sqrt{\frac{\lambda_\sigma}{8\pi^2}} H^2. \quad (14.36)$$

В такой теории также возможен случай, когда поле σ имело большое начальное значение σ_i . Аналог уравнения (14.27) для классического поля имеет вид

$$3H\dot{\sigma}_c = -\lambda_\sigma \sigma_c^3;$$

решением его при достаточно больших σ_i служит

$$\sigma_c = \left(\lambda_\sigma \int_{t_i}^t \frac{2dt}{3H(t)} \right)^{-1/2}. \quad (14.37)$$

Мы ещё вернёмся к обсуждению этой формулы.

- ▷ Задача 7. Рассмотрим модель с потенциалом инфлатона $V(\phi) = (\lambda/4)\phi^4$. При каком соотношении между λ и λ_σ поле (14.37) вносит в плотность энергии пренебрежимо малый вклад по сравнению с вкладом инфлатона? Выполнено ли для поля σ_c условие медленного скатывания $\ddot{\sigma}_c \ll 3H\dot{\sigma}_c$? Указание: воспользоваться соотношением (14.29) и выразить результаты через параметр медленного скатывания ϵ .

Рассмотрим теперь квантовые флуктуации поля σ , считая, что величина σ_c пренебрежимо мала (либо из-за малости начального значения σ_i , либо из-за большого значения интеграла в (14.37)) и предполагая, что зависимостью параметра Хаббла от времени можно пренебречь. Выделим в поле σ вклад $\bar{\sigma}$ мод с длинами волн, большими размера текущего горизонта. На масштабах, сравнимых с горизонтом, поле $\bar{\sigma}$ однородно и велико, так что его можно считать классическим однородным фоном. Входящую под горизонт квантовую моду с конформным импульсом k , которая со временем добавляет свой вклад в $\bar{\sigma}$, обозначим σ_k ; в присутствии классического поля она удовлетворяет уравнению

$$\ddot{\sigma}_k + 3H\dot{\sigma}_k + \frac{k^2}{a^2}\sigma_k + 3\lambda_\sigma\bar{\sigma}^2\sigma_k = 0. \quad (14.38)$$

Видно, что величина

$$m_{eff}^2 = 3\lambda_\sigma\bar{\sigma}^2 \quad (14.39)$$

выступает в качестве эффективной массы в этом уравнении. В стационарной ситуации генерируемое всё новыми выходящими за горизонт модами среднее поле, квадрат которого даётся формулой (14.24) с эффективной массой m_{eff} , должно совпадать с самим значением $\bar{\sigma}$, откуда мы приходим к условию самосогласованности⁷

$$\bar{\sigma}^2 \simeq \frac{3H^4}{8\pi^2 m_{eff}^2}.$$

Из этого уравнения получаем окончательно

$$\bar{\sigma}^2 \simeq \sqrt{\frac{1}{8\pi^2\lambda_\sigma}} H^2, \quad m_{eff}^2 = 3\sqrt{\frac{\lambda_\sigma}{8\pi^2}} H^2. \quad (14.40)$$

Сделанное выше предположение о медленном изменении параметра Хаббла, а также постоянно используемое предположение о режиме медленного скатывания выполняются при выполнении условий (14.25) для массы m_{eff} . Требование $m_{eff}^2 \ll H^2$ выполняется при всех $\lambda_\sigma < 1$, а второе условие даёт

$$\lambda_\sigma \gg \frac{8\pi^2}{9}\epsilon^2. \quad (14.41)$$

Таким образом, результат (14.40) имеет область применимости, ограниченную условием (14.41). Сделаем два замечания по поводу этой области.

Во-первых, при выполнении условия (14.41) классическое поле (14.37) во многих инфляционных моделях оказывается малым по сравнению с полем $\bar{\sigma}$, которое генерируется за счёт квантовых флуктуаций. В этом проще всего убедиться на примере моделей, в которых выполняется соотношение (14.29). В этом случае из (14.37) имеем $\sigma_c^2 \sim \dot{H}/\lambda_\sigma$, и с учётом (14.40) неравенство $\bar{\sigma}^2 \gg \sigma_c^2$ сводится к неравенству (14.41) с точностью до фактора порядка единицы. Таким образом, при выполнении (14.41) неопределённости, связанные с неизвестным начальным значением σ_i , во многих инфляционных моделях оказываются несущественными.

⁷Поскольку мы имеем дело с флуктуациями, то есть со случайными величинами, наши рассуждения не являются строгими хотя бы потому, что мы не даём аккуратных определений фигурирующих в них величин, таких как $\bar{\sigma}$. Из-за этого результаты нашего рассмотрения следует воспринимать как оценки, справедливые с точностью до фактора порядка единицы.

Второе замечание касается массового члена поля σ , опущенного в (14.35). Масса m_σ действительно несущественна, если она мала по сравнению с эффективной массой, определяемой формулой (14.39), то есть $m_\sigma^2 \ll m_{eff}^2$. Это неравенство с учётом (14.40) даёт (14.36). Имея в виду (14.41), мы заключаем, для справедливости проведённого анализа достаточно выполнения неравенства (14.31).

Если неравенство (14.41) выполняется вплоть до окончания инфляции, то оценка (14.40) справедлива на всех интересных этапах инфляционной стадии. Например, такая ситуация возможна при не слишком малых λ_σ в моделях инфляции с малым полем инфлатона (раздел 12.2.2) и в моделях гибридной инфляции (раздел 12.2.3), в которых параметр ϵ мал в течение всей инфляции. Картина пространственного распределения поля σ в момент окончания инфляции в этом случае критическим образом зависит от значения константы связи λ_σ . Действительно, мы видели в предыдущем разделе, что вклад в $\bar{\sigma}$ дают моды с экспоненциально малыми импульсами, то есть с экспоненциально большими длинами волн. В данном случае вместо (14.33) имеем грубую оценку для длины волны

$$l \sim H^{-1} \cdot \exp\left(\text{const} \cdot \frac{H^2}{m_{eff}^2}\right) \sim H^{-1} \cdot \exp\left(\text{const} \cdot \sqrt{\frac{8\pi^2}{9\lambda_\sigma}}\right) \quad (14.42)$$

с константой порядка единицы. Это выражение даёт оценку размера области однородности поля к концу инфляции. Если λ_σ мала настолько, что область однородности больше видимой части Вселенной (какой она была к окончанию инфляции), то мы возвращаемся к картине почти однородного поля, о которой мы говорили после формулы (14.33). Для этого достаточно, чтобы показатель экспоненты в (14.42) был больше 60, то есть чтобы $\lambda_\sigma \lesssim 10^{-2}$. В противном случае поле сильно неоднородно в видимой части Вселенной, хотя длина корреляции в любом случае превышает размер горизонта на момент окончания инфляции.

При не слишком малых λ_σ (но всё же $\lambda_\sigma \lesssim 1$, иначе квантовая теория находилась бы в области сильной связи, о которой что-либо определённое сказать сегодня нельзя) вполне возможна ситуация, когда неравенство (14.41) выполняется на ранних стадиях инфляции и перестаёт выполняться на более поздних стадиях. Такая картина возникает в моделях инфляции с большим полем (раздел 12.2.1), где параметр ϵ весьма мал на начальных этапах инфляции и близок к единице в конце инфляции. В этом случае поле $\bar{\sigma}$ замораживается на значении (14.40) в “момент” t_f , когда перестаёт выполняться неравенство (14.41). Действительно, мы видели в предыдущем разделе, что при $m_{eff}^2 \ll \epsilon H^2$ классическое поле (в данном случае $\bar{\sigma}$) не успевает сколько-нибудь заметно скатиться вдоль своего потенциала до окончания инфляции, а дополнительный вклад мод, выходящих за горизонт после момента t_f , мал по сравнению с $\bar{\sigma}$. На момент t_f размер неоднородности оценивается величиной (14.42); к концу инфляции он дополнитель но растягивается в $\exp[N_e(t_f)]$ раз.

Таким образом, в отличие от теории без самодействия, при достаточно больших λ_σ неопределённости, связанные с начальными этапами инфляции, не сказываются на состоянии поля к концу инфляционной эпохи. В то же время, это состояние существенно зависит от деталей эволюции Вселенной на последних этапах инфляции, а также от величины константы связи λ_σ . В частности, вполне возможна ситуация, когда поле σ существенно неоднородно к концу инфляции в наблюдаемой области Вселенной.

В заключение этого раздела сделаем замечание относительно формализма, адекватного для описания флюктуирующего поля σ и позволяющего уточнить простые

оценки, сделанные в этом разделе. Как видно из изложенного, эволюция однородного на масштабе горизонта поля $\bar{\sigma}$ имеет характер диффузии, обусловленной “толчками” со стороны мод, выходящих за горизонт. Соответствующий формализм действительно имеет много общего с формализмом, используемым в теории диффузии; с ним можно познакомиться, например, по книге [96].

14.4 Аксион как тёмная материя: CDM-возмущения постоянной кривизны

В этом разделе мы рассмотрим инфляционный механизм генерации CDM-моды постоянной кривизны в модели, где в качестве холодной тёмной материи выступает когерентно осциллирующее аксионное поле. В отличие от моделей, рассмотренных в разделе 14.2.2, в данном случае CDM-мода постоянной кривизны никак не коррелирована с адабатической модой.

Обсуждаемая модель была рассмотрена в разделе I.9.7.1. Напомним здесь основные положения этого раздела. Согласующаяся с наблюдениями плотность тёмной материи естественным образом получается при значениях массы аксиона

$$m_a = (10^{-5} - 10^{-6}) \text{ эВ}$$

и, соответственно, масштаба Печчеи–Куинн

$$f_{PQ} = (10^{11} - 10^{12}) \text{ ГэВ}. \quad (14.43)$$

Напомним, что в простых вариантах моделей с аксионами предполагается, что в природе имеется комплексное скалярное поле Печчеи–Куинн S с лагранжианом

$$\mathcal{L}_S = \partial_\mu S^* \partial^\mu S - \lambda_{PQ} \left(S^* S - \frac{f_{PQ}^2}{2} \right)^2 + \dots,$$

где невыписанные слагаемые описывают взаимодействие поля S с другими полями, в том числе с полями Стандартной модели. Мы пока будем считать безразмерный параметр λ_{PQ} величиной порядка единицы, и выписывать зависимость интересующих нас величин от λ_{PQ} не будем (для части результатов этого раздела указанное предположение несущественно).

В пренебрежении эффектами квантовой хромодинамики теория обладает глобальной симметрией $U(1)_{PQ}$, относительно которой поле S преобразуется следующим образом:

$$S \rightarrow e^{i\beta} S.$$

Вакуумное среднее поля S отлично от нуля и равно $\langle S \rangle = f_{PQ}/\sqrt{2}$. Из-за этого симметрия $U(1)_{PQ}$ спонтанно нарушена, и в теории имеется голдстоуновский бозон — фаза поля S , параметризующая это поле при энергиях ниже f_{PQ} , а именно $S = (f_{PQ}/\sqrt{2}) \exp[i\theta(x)]$. Обладающее стандартным кинетическим членом поле аксиона $a(x)$ связано с фазой обычным для голдстоуновских полей соотношением

$$a(x) = f_{PQ} \theta(x). \quad (14.44)$$

Благодаря эффектам квантовой хромодинамики поле аксиона приобретает при температуре $T < \Lambda_{QCD}$ малую массу⁸, причем при $T \ll \Lambda_{QCD}$ оценка для нее имеет вид $m_a \simeq (m_\pi f_\pi)/(2f_{PQ})$, где m_π и f_π — масса и константа распада пиона (подробности см. в разделе I.9.7.1).

Описанный в разделе I.9.7.1 механизм генерации тёмной материи в этой модели состоит в том, что на ранних стадиях космологической эволюции (при $T \gg \Lambda_{QCD}$) фаза θ однородна в пространстве, не зависит от времени и принимает некоторое случайное значение $\theta_i \in [0, 2\pi]$, а при понижении температуры до величины порядка 200 МэВ (масштаб сильных взаимодействий) она начинает однородно осциллировать и выполнять роль холодной тёмной материи, в соответствии с разделом 2.5.

Отметим прежде всего, что в такой модели имеется следующая картина для адиабатической моды возмущений горячего вещества и аксионной тёмной материи. До начала осцилляций аксионного поля фаза θ_i фиксирована и однородна в пространстве, а в газе релятивистских частиц имеются первичные неоднородности с длинами волн больше размера текущего горизонта. Осцилляции аксионного поля начинают происходить тогда, когда температура горячей фракции достигает определённой величины, и в последующем значение аксионного поля однозначно связано с температурой. Таким образом, аксионное поле во Вселенной однородно на гиперповерхностях постоянной температуры, что и означает присутствие адиабатической моды, см. раздел 5.2.

► Задача 8. Изложенное только что соображение неприменимо к модам, уже находившимся под горизонтом к моменту начала осцилляций аксионного поля. Оценить максимальную современную длину волны таких мод. Представляют ли они космологический интерес?

В инфляционной теории рассматриваемая модель находит своё развитие и уточнение. Во-первых, указанный механизм генерации однородного осциллирующего поля основывается на неявном предположении, что максимальная температура во Вселенной не достигала значений порядка f_{PQ} . В противном случае симметрия Печчеи–Куинн была бы восстановлена на ранних стадиях эволюции Вселенной, а при понижении температуры до величины порядка f_{PQ} происходил бы фазовый переход с нарушением этой симметрии. Сразу после фазового перехода корреляции между значениями фазы на хаббловском и больших пространственных масштабах отсутствовали бы, то есть фаза θ принимала бы разные значения в разных областях хаббловского размера. Таким образом, предположение об однородности начального значения фазы θ_i не было бы выполнено. На самом деле в результате механизма Кибbla в этом случае образовывались бы аксионные струны — нетопологические протяжённые объекты. В их распадах также производились бы аксионы, но это — другой механизм их генерации, см. обзоры [97, 98].

Инфляционная теория естественным образом приводит к представлению о том, что максимальная температура в пост-инфляционной горячей Вселенной действительно могла быть не слишком велика (см., например, обсуждение в разделе 12.2, в частности, формулу (12.30)). Мы увидим в Главе 15, что температура пост-инфляционного разогрева T_{reh} является модельно-зависимой величиной даже при фикси-

⁸Потенциал для аксиона, генерируемый за счёт эффектов квантовой хромодинамики, не сводится к квадратичному потенциальному для свободного скалярного поля: потенциал периодичен по θ с периодом 2π . В силу данного обстоятельства к формулам этого раздела имеются поправки. Они, однако, невелики и не сказываются на основных выводах.

рованном потенциале инфлатона $V(\phi)$, и тем более она различна для разных инфляционных потенциалов. В частности, при масштабе Печчеи–Куинн в области (14.43) вполне возможно выполнение соотношения

$$T_{reh} \ll f_{PQ},$$

которое оправдывает обсуждаемое предположение.

С другой стороны, в инфляционной теории возникает новый вопрос о том, что происходит с симметрией Печчеи–Куинн в период пост-инфляционного разогрева между окончанием инфляции и горячей стадией, близкой к термодинамическому равновесию. Мы предположим, что и на стадии пост-инфляционного разогрева эта симметрия нарушена. Хотя такое предположение небезобидно, оно действительно выполняется во многих конкретных моделях благодаря достаточно слабому взаимодействию поля Печчеи–Куинн с другими полями.

Поведение поля Печчеи–Куинн S в раздувающейся Вселенной существенным образом зависит от соотношения между масштабом f_{PQ} и параметром Хаббла. Рассмотрим сначала случай, когда к концу инфляции (на последних 60-ти e -фолдингах) темп инфляционного расширения достаточно низок⁹,

$$H \ll f_{PQ}. \quad (14.45)$$

Столь низкий масштаб инфляции заметно ограничивает класс инфляционных моделей, который мы сначала собираемся рассматривать. Мы обсудим случай, противоположный (14.45), в конце раздела.

В указанных предположениях рассмотренный в разделе I.9.7.1 механизм генерации однородного аксионного поля действительно работает. На последних стадиях инфляции модуль поля S близок к своему вакуумному значению $f_{PQ}/\sqrt{2}$. Действительно, поле $|S|$ вблизи своего вакуумного среднего имеет массу порядка f_{PQ} (напомним, что мы считаем λ_{PQ} величиной порядка единицы), которая по предположению (14.45) заметно превышает параметр Хаббла. Поля столь большой массы быстро, за хаббловское время, скатываются во время инфляции к своим вакуумным значениям, а их флуктуации, генерируемые за счет инфляционного механизма, пренебрежимо малы. В то же время, фаза $\theta(x)$, представляющая собой лёгкое поле, почти однородна в масштабах наблюдаемой части Вселенной, см. обсуждение после формулы (14.33). С учётом периодичности поля θ и в соответствии с результатами раздела 14.3 эта фаза в нашей области Вселенной действительно принимает случайное значение θ_i из интервала $[0, 2\pi]$.

После окончания инфляции фаза θ в точности однородной в нашей области Вселенной, однако, не является. Неоднородности фазы возникают благодаря инфляционному механизму генерации флуктуаций. Поскольку поле аксиона $a(x)$ имеет стандартный кинетический член и не имеет массы, к нему применимы результаты раздела 13.1.2. На масштабах, сравнимых с размером видимой части Вселенной и меньших, аксионное поле по окончании инфляции имеет спектр флуктуаций $\mathcal{P}_a = H^2/(2\pi)^2$, где мы не указываем слабую зависимость от импульса, такую же,

⁹Всюду в этом разделе мы предполагаем, что в инфляционную эпоху выполняется $H \gg \Lambda_{QCD}$, где $\Lambda_{QCD} \sim 200$ МэВ — масштаб сильных взаимодействий. Это предположение позволяет считать эффекты квантовой хромодинамики пренебрежимо малыми на стадии инфляции; в частности, аксионное поле можно считать безмассовым. Данное предположение выполняется в громадном большинстве моделей инфляции.

как в (13.26). Спектр флуктуаций фазы имеет вид,

$$\mathcal{P}_\theta = \frac{H^2}{(2\pi)^2 f_{PQ}^2}, \quad (14.46)$$

среднее же значение фазы равно θ_i . Здесь, как обычно, H обозначает значение параметра Хаббла за $N_e \sim 60$ e -фолдингов до окончания инфляции. Амплитуды волн фазы $\theta(\mathbf{x})$, находящихся за горизонтом на горячей стадии вплоть до температур порядка $\Lambda_{QCD} \sim 200$ МэВ, не изменяются до начала осцилляций аксионного поля. Потому в начале осцилляций плотность энергии аксионного поля $\rho_a(x) \propto m_a^2 f_{PQ}^2 \theta^2(x)$ неоднородна в пространстве, и её относительные флуктуации равны

$$\delta_a = \frac{\delta\rho_a}{\bar{\rho}_a} = 2 \frac{\delta\theta}{\theta_i}.$$

В отличие от обсуждавшихся выше адиабатических возмущений, эти флуктуации представляют собой возмущения постоянной кривизны с $\mathcal{S}_{CDM} = \delta_a$, причём они никак не коррелированы с адиабатической модой. CDM-мода характеризуется спектром мощности

$$\mathcal{P}_{\mathcal{S}_{CDM}} = \mathcal{P}_{\delta_a} = \frac{H^2}{(\pi f_{PQ} \theta_i)^2}. \quad (14.47)$$

Из этого результата видно, что амплитуда флуктуаций аксионной тёмной материи может быть весьма велика. Иными словами, требование малости этих флуктуаций накладывает ограничение на величину инфляционного параметра Хаббла. Из данных по измерению свойств реликтового излучения следует ограничение, приведённое в разделе 5.4, $r_{CDM} \equiv \mathcal{P}_{\mathcal{S}_{CDM}}/\mathcal{P}_{\mathcal{R}} < 0.07$. Отсюда и из (14.47) следует ограничение на инфляционный параметр Хаббла:

$$H \lesssim \pi \theta_i f_{PQ} r_{CDM}^{1/2} \Delta_{\mathcal{R}} \quad (14.48)$$

$$\sim (10^7 - 10^8) \text{ ГэВ} \quad (14.49)$$

где численная оценка получена для $f_{PQ} = 10^{11} - 10^{12}$ ГэВ и $\theta_i \sim \pi$. Таким образом, при выполнении соотношения (14.45) рассмотренный в этом разделе механизм генерации аксионной тёмной материи согласуется с данными наблюдательной космологии только для моделей инфляции с довольно низким темпом инфляционного расширения и, соответственно, с низким масштабом плотности энергии к концу инфляции,

$$E_{inf} \equiv V^{1/4} = \left(\frac{3}{8\pi} H^2 M_{Pl}^2 \right)^{1/4} \lesssim (10^{12} - 10^{13}) \text{ ГэВ}. \quad (14.50)$$

С другой стороны, если масштаб E_{inf} близок к указанной верхней границе, CDM-возмущения постоянной кривизны могут оказаться обнаружимыми.

Отметим, впрочем, что ограничение (14.49) не является модельно-независимым. Например, взаимодействие поля S с инфлатонным полем ϕ может явно нарушать симметрию Печчеи–Куинн, например, иметь вид $(\gamma\phi^2 S^2 + \text{h. c.})$, где γ – комплексная константа связи. В результате этого на инфляционной стадии аксион будет иметь большую массу, $m_a^{(eff)} \simeq \sqrt{|\gamma|}\phi$. Флуктуации аксионного поля будут подавлены, если на стадии инфляции $m_a^{(eff)} \gg H$. Другая возможность состоит в том, что из-за взаимодействия с инфлатонным полем среднее значение поля $|S|$ на инфляционной

стадии значительно превышает вакуумное значение f_{PQ} . Такие возможности рассматриваются, например, в работах [99, 100].

Оценку (14.49) можно уточнить, воспользовавшись результатами раздела I.9.7.1. Там было показано, что рассматриваемый механизм приводит к измеренному значению современной плотности тёмной материи — аксионов — при выполнении следующего соотношения между начальной фазой и массой аксиона:

$$\theta_i^2 \cdot \left(\frac{4 \cdot 10^{-6} \text{ эВ}}{m_a} \right)^{1.2} \simeq 1.$$

Далее, связь между массой аксиона и масштабом Печчей–Куинн имеет вид

$$m_a \approx m_\pi \cdot \frac{f_\pi}{2f_{PQ}} \approx 6 \cdot 10^{-6} \text{ эВ} \cdot \left(\frac{10^{12} \text{ ГэВ}}{f_{PQ}} \right).$$

Подставляя эти выражения вместе с численным значением Δ_R в (14.48), получим

$$H < 5 \cdot 10^7 \cdot \left(\frac{f_{PQ}}{10^{12} \text{ ГэВ}} \right)^{0.4} \cdot \left(\frac{r_{CDM}}{0.07} \right)^{0.5} \text{ ГэВ}.$$

Видно, что зависимость от f_{PQ} здесь довольно слабая, так что весьма консервативное ограничение на инфляционный параметр Хаббла имеет вид

$$H < 1 \cdot 10^8 \text{ ГэВ}.$$

Отсюда получаем и консервативное ограничение на энергетический масштаб инфляции, $E_{inf} < 2 \cdot 10^{13} \text{ ГэВ}$.

Весь предыдущий анализ, включая ограничения (14.49), (14.50), опирался на предположение (14.45). Ясно, что противоположный случай

$$H \gtrsim f_{PQ} \tag{14.51}$$

также представляет значительный интерес. В этом случае всё поле S является лёгким, и амплитуда его флюктуаций велика по сравнению с вакуумным средним $f_{PQ}/\sqrt{2}$. Для обсуждения такой ситуации удобно сначала рассмотреть не модуль и фазу поля S , а его действительную и мнимую части, $S_1 = \sqrt{2} \operatorname{Re} S$ и $S_2 = \sqrt{2} \operatorname{Im} S$. При выполнении условия (14.51) квадратичным членом в потенциале поля S можно пренебречь, и мы приходим к теории двух эффективно безмассовых полей с самодействием. На эту теорию прямо обобщаются результаты раздела 14.3.2; например, моды полей $S_{1,2}$ удовлетворяют уравнению (14.38), где вместо квадрата эффективной массы $3\lambda_\sigma\bar{\sigma}$ выступает $m_{eff,(1,2)}^2 = \lambda_{PQ}(\bar{S}_1^2 + \bar{S}_2^2) + 2\lambda_{PQ}\bar{S}_{(1,2)}^2$. Анализ, приводящий к оценке среднего квадрата поля (14.40), с точностью до факторов порядка единицы остаётся в силе. В результате получим оценку

$$\bar{S}_1^2 \sim \bar{S}_2^2 \sim \sqrt{\frac{1}{8\pi^2\lambda_{PQ}}} H^2. \tag{14.52}$$

Оценки корреляционной длины при этом совпадают с оценками, сделанными в разделе 14.3.2, см. (14.42) и последующее обсуждение. Результат для корреляционной длины l , как мы видели в разделе 14.3.2, зависит от параметра медленного скатывания ϵ к концу инфляции и от величины константы самодействия, в данном случае λ_{PQ} . В общем можно сказать, что при достаточно больших λ_{PQ} корреляционная длина мала по сравнению с размером наблюдаемой части Вселенной, каков он был на момент окончания инфляции, а при малых λ_{PQ} — наоборот, велика. В первом

случае фаза θ поля S сильно меняется на масштабе l , и механизм генерации тёмной материи за счёт однородной начальной фазы не работает. Вместо этого после входа под горизонт (на какой-то из пост-инфляционных стадий) областей, имевших на момент окончания инфляции размер l , происходит образование аксионных струн (подробности см., например, в работе [101]). Во втором случае поле S достаточно однородно в области, соответствующей видимой части Вселенной. К флуктуациям фазы в этом случае применимы изложенные выше соображения, за тем исключением, что роль f_{PQ}^2 в (14.46) выполняет среднее значение $(\bar{S}_1^2 + \bar{S}_2^2) \equiv |\bar{S}|^2$. Повторяя рассуждения, приводящие к (14.47), и используя (14.52), получаем, что при малых λ_{PQ} в режиме (14.51) спектр мощности CDM-моды постоянной кривизны в модели с аксионами оценивается как

$$\mathcal{P}_{S_{CDM}} \sim \frac{\sqrt{\lambda_{PQ}}}{\theta_i^2}.$$

С учётом упомянутого ограничения на r_{CDM} мы заключаем, что в этом случае имеется противоречие с наблюдательными данными для всех моделей с $\lambda_{PQ} \gtrsim 10^{-10}$.

Итак, изучение флуктуаций аксионного поля на стадии инфляции приводит к представлению о возможности генерации CDM-моды постоянной кривизны наряду с адиабатической модой. При этом корреляция между этими двумя модами отсутствует. Требование согласия с наблюдениями сильно ограничивает класс моделей, где когерентно осциллирующее аксионное поле выступает в качестве холодной тёмной материи. Со сделанными выше оговорками единственной возможностью здесь являются модели инфляции с низким энергетическим масштабом, удовлетворяющим (14.49) и (14.50). Если в будущих экспериментах будут обнаружены тензорные возмущения, то такая возможность будет исключена. Для моделей, объясняющих тёмную материю аксионами, остаётся, впрочем, возможность высокого инфляционного масштаба, приводящего к (14.51), вместе с достаточно большой константой λ_{PQ} , а также возможность того, что фазовый переход Печчеи–Куинн произошел после окончания инфляционной стадии (что также требует высокого масштаба инфляции). В последних случаях аксионное поле не является однородным на ранних стадиях космологической эволюции; аксионы появляются во Вселенной в результате генерации и последующего распада аксионных струн.

Глава 15

*Постинфляционный разогрев

Как мы вкратце обсуждали в разделе 12.2, вслед за инфляционной стадией наступает стадия постинфляционного разогрева. Состояние материи на этой стадии все ещё далеко от термодинамического равновесия. Начало этой стадии связано с нарушением условий медленного скатывания; во многих моделях инфляции сразу после этого начинаются осцилляции инфлатонного поля вокруг минимума своего потенциала. В таких моделях механизм откачки энергии от пространственно-однородного поля инфлатона и, соответственно, затухания его осцилляций, состоит в рождении частиц за счёт их взаимодействия с быстро меняющимся во времени инфлатонным полем. В этой главе мы в основном и будем рассматривать разные варианты этого процесса.

Отметим в этой связи, что в моделях типа гибридной инфляции роль осциллирующего поля, рождающего частицы, выполняет не поле инфлатона, а другое поле — поле χ в обозначениях раздела 12.2.3. Результаты, обсуждаемые в этой главе, применимы и к этому случаю, хотя параметры, характеризующие поле χ (например, его масса), могут сильно отличаться от параметров инфлатонного поля. Там, где это несущественно, мы будем для определенности говорить о поле инфлатона, имея в виду любое однородное поле, осцилляциями которого заканчивается инфляционная стадия.

Рожденные в результате распада инфлатонного поля частицы постепенно приходят в состояние термодинамического равновесия. Описание этого процесса оказывается весьма сложным, а связанные с ним эффекты — труднообнаружимыми. Поэтому мы сколько-нибудь подробно обсуждать его не будем.

В англоязычной литературе в качестве наименования этапа постинфляционного разогрева используют термин *reheating*. При этом он понимается в широком смысле: в “этап” включают сразу несколько различных стадий, таких как распад инфлатонного конденсата (*preheating*), рождение частиц Стандартной модели и их термализация.

15.1 Предварительные соображения

Заметный интерес с точки зрения возможности протекания тех или иных процессов на горячей стадии эволюции Вселенной представляет максимальная температура, которая достигается после окончания инфляции, и температура, при которой начинает доминировать релятивистское вещество. Мы их обозначим как T_{max} и T_{reh} , соответственно (ясно, что $T_{reh} \leq T_{max}$). Из экспериментальных результатов, про-

суммированных в разделе 5.4, следует модельно-независимое ограничение сверху на температуру T_{max} . А именно, если во Вселенной имеется газ релятивистских частиц в тепловом равновесии с температурой T и, возможно, другие компоненты, то уравнение Фридмана даёт следующее ограничение на температуру релятивистского вещества,

$$\frac{\pi^2}{30} g_* T^4 \leq \frac{3}{8\pi} M_{Pl}^2 H^2 .$$

Параметр Хаббла падает со временем, поэтому для T_{max} отсюда имеем ограничение

$$\frac{T_{max}}{M_{Pl}} < \left(\frac{90}{8\pi^3 g_*} \right)^{1/4} \left(\frac{H_e}{M_{Pl}} \right)^{1/2} , \quad (15.1)$$

где H_e — параметр Хаббла в конце инфляции. Далее, $H_e < H_k$, где H_k — значение параметра Хаббла за 50 — 60 e -фолдингов до конца инфляции, когда выходят за горизонт волны с космологически интересными длинами. На последнее имеется ограничение $H_k < 1 \cdot 10^{-5} M_{Pl}$, см. (13.67). Будем считать, что эффективное число степеней свободы g_* при высоких температурах не меньше эффективного числа степеней свободы в Стандартной модели, $g_{*SM} = 106.75$, см. раздел I.B.7. Отсюда получается модельно-независимое ограничение

$$T_{max} < 0.8 \cdot 10^{-3} M_{Pl} = 1 \cdot 10^{16} \text{ ГэВ} .$$

В конкретных моделях инфляции это ограничение можно несколько усилить, учтя, что ограничение (13.67) относится к параметру Хаббла за 50 — 60 e -фолдингов до окончания инфляции, а не к параметру Хаббла H_e . Рассмотрим, например, модель с большим полем и потенциалом $V(\phi) = (m^2/2)\phi^2$. Инфляция в этой модели заканчивается, когда параметры медленного скатывания ϵ и η становятся порядка единицы (в данной модели это происходит одновременно),

$$\epsilon \equiv \frac{V'^2 M_{Pl}^2}{16\pi V^2} \simeq 1 .$$

Квадрат инфлатонного поля при этом равен

$$\phi_e^2 \simeq \frac{M_{Pl}^2}{4\pi} , \quad (15.2)$$

так что параметр Хаббла с точностью до близкого к единице фактора совпадает с массой инфлатона,

$$H_e^2 = \frac{8\pi}{3M_{Pl}^2} \frac{m^2}{2} \phi_e^2 \simeq \frac{m^2}{3} . \quad (15.3)$$

Это вполне соответствует известному из раздела I.4.8 результату о том, что осцилляции массивного поля начинают происходить тогда, когда параметр Хаббла становится сравнимым с массой поля. Из раздела 13.4.1 мы знаем, что масса инфлатона в данной модели составляет величину $m \simeq 10^{-6} M_{Pl}$, см. (13.61). Из (15.1) получим теперь

$$T_{max} < 0.2 \cdot 10^{-3} M_{Pl} = 2 \cdot 10^{15} \text{ ГэВ} . \quad (15.4)$$

Для других моделей инфляции с большим полем ограничение находится на этом же уровне, а в моделях разделов 12.2.2 и 12.2.3 соответствующее ограничение ещё сильнее.

▷ *Задача 1.* Убедиться в справедливости только что сделанного утверждения как для моделей с большим полем, так и для моделей разделов 12.2.2 и 12.2.3. В качестве модели с большим полем использовать модель с потенциалом $V(\phi) = (\lambda/4)\phi^4$.

Отметим, что эти ограничения, хотя они и являются весьма грубыми, показывают, что на горячей стадии космологической эволюции скорее всего не достигались температуры, характерные для теорий Большого объединения (см. раздел I.11.2.2), $T \sim M_{GUT} \simeq 10^{16}$ ГэВ.

Мы видели в разделе 13.4.1, что константа самодействия инфлатона должна быть чрезвычайно мала. Это обстоятельство указывает на то, что инфлатон по каким-то причинам является слабовзаимодействующим полем. Поэтому вполне возможно, что взаимодействие инфлатона с другими полями, в том числе с полями Стандартной модели, также характеризуется очень малыми константами связи. Это, разумеется, необязательно; в последующих разделах этой Главы мы будем рассматривать и модели, в которых константы взаимодействия инфлатона с другими полями не слишком малы. В случае же очень малых констант постинфляционный разогрев приводит к заметно меньшим максимальным температурам во Вселенной по сравнению с верхней границей в (15.4). Чтобы проиллюстрировать такую возможность, продолжим обсуждение модели с квадратичным потенциалом инфлатона, включив в неё малое самодействие $(\lambda/4)\phi^4$. Последнее будет несущественно к концу инфляции, если $\lambda \lesssim 10^{-13}$ (см. раздел 13.4.1). В начале постинфляционного разогрева во Вселенной имеется однородное инфлатонное поле, осциллирующее с частотой $\omega = m$, где m — масса инфлатона. Такое поле характеризуется пылевидным уравнением состояния $p = 0$, см. раздел I.4.8.1, то есть во Вселенной в эпоху разогрева реализуется промежуточная пылевидная стадия с $a \propto t^{2/3}$. Простая, хотя и не всегда правильная оценка для максимальной температуры во Вселенной в случае очень слабой связи инфлатона с другими полями получается, если воспринимать осциллирующее инфлатонное поле как набор покоящихся частиц и считать, что эти частицы распадаются независимо, а продукты их распадов быстро термализуются. Мы видели в разделе I.5.3, что в такой ситуации максимальная температура во Вселенной достигается сразу после начала пылевидной стадии (через время порядка хаббловского) и для максимальной плотности энергии горячей компоненты справедлива оценка

$$\rho_{rad, max} \simeq \frac{\Gamma}{10\pi G t_*} \simeq \frac{3}{20\pi} \Gamma M_{Pl}^2 H_e .$$

Здесь Γ — ширина распада инфлатона, $t_* = 2/(3H_*)$ — время начала пылевидной стадии, которое мы отождествили с моментом окончания инфляции, положив $H_* = H_e$. Отсюда получаем оценку для максимальной температуры,

$$T_{max} \simeq \left(\frac{9}{2\pi^3 g_*} \cdot \Gamma H_e M_{Pl}^2 \right)^{1/4} .$$

При $\Gamma \ll H_e$, то есть $\Gamma \ll m$ (см. (15.3)), максимальная температура оказывается заметно меньшей, чем дает оценка (15.4). Чтобы грубо оценить диапазон значений, которые может принимать максимальная температура, например, в моделях инфляции с большим полем, оценим ширину распада инфлатона как

$$\Gamma \sim \frac{h^2}{8\pi} N_d m \tag{15.5}$$

где N_d — число каналов распада, h — константа связи, характеризующая распад инфлатона ϕ в две частицы, например, в два фермиона ψ (тройная вершина $h\phi\bar{\psi}\psi$). Последние две величины оценим как $N_d \sim g_*$, $h \sim \sqrt{\lambda}$; тем самым мы делаем сильное предположение о том, что константы взаимодействия инфлатона с самим собой и с другими полями имеют один и тот же порядок величины¹. В результате получим

$$T_{max} \sim \frac{1}{2\pi} (hmM_{Pl})^{1/2}, \quad (15.6)$$

где мы учли, что $H_e \sim m$. Используя результаты раздела 13.4.1, запишем $h^2 \sim \lambda \lesssim 10^{-13}$, $m \simeq 10^{-6}M_{Pl}$ и получим численно

$$T_{max} \lesssim 10^{-7}M_{Pl} \sim 10^{12} \text{ ГэВ}.$$

Таким образом, естественно полагать, что в моделях инфляции с большим полем максимальная температура во Вселенной находится в диапазоне

$$T_{max} \sim 10^{12} - 10^{15} \text{ ГэВ}.$$

В других моделях максимальная температура может быть гораздо ниже.

Отметим, что рассмотренный упрощенный подход к описанию пост-инфляционного разогрева приводит к представлению о том, что на большей части стадии разогрева температура в действительности понижается (ср. с разделом I.5.3). Окончание этой стадии происходит в то время, когда $H \sim \Gamma$: именно в этот период распадается большинство частиц из инфлатонного конденсата, и Вселенная переходит на радиационно-доминированную стадию, см. раздел I.5.3. В сделанных выше предположениях температура во Вселенной в это время оценивается величиной

$$T_{reh} \simeq (\Gamma M_{Pl}^*)^{1/2} \simeq \frac{N_d^{1/2}}{4\pi g_*^{1/4}} (h^2 m M_{Pl})^{1/2}.$$

При малых константах связи h эта температура действительно мала по сравнению с максимальной температурой (15.6): при $N_d \sim g_* \sim 100$, $h^2 \sim 10^{-13}$, $m \sim 10^{-6}M_{Pl}$ имеем

$$T_{reh} \sim 10^{-11}M_{Pl} \sim 10^8 \text{ ГэВ}. \quad (15.7)$$

Как видно, при очень малых константах связи инфлатона распад его колебаний происходит в течение довольно долгого периода. Всё это время происходит интенсивная генерация энтропии.

Описанный только что подход даёт правильные оценки для T_{max} и T_{reh} в случае очень малых констант связи инфлатона с другими полями. Однако в не менее реалистическом случае больших констант² он не ухватывает многих важных особенностей рождения частиц когерентным осциллирующим инфлатонным полем. Например, если в процессе распада образуются бозоны, то они в момент распада имеют один и тот

¹Напомним, что при таком предположении выполняется $\lambda \sim h^2$, поскольку амплитуда процесса рассеяния $\phi + \phi \rightarrow \phi + \phi$ пропорциональна λ , а амплитуда процесса $\phi + \psi \rightarrow \phi + \psi$ пропорциональна h^2 .

²Как мы обсуждали в разделе 12.2.4, при не слишком слабом взаимодействии инфлатона с другими полями инфлатонный эффективный потенциал получает, вообще говоря, большие квантовые поправки. В этой Главе мы будем считать, что эти поправки каким-то образом скомпенсированы, и потенциал инфлатона остаётся плоским. Это в любом случае необходимо для согласия с наблюдениями, см. раздел 13.4.1.

же модуль импульса. Фазовая плотность родившихся бозонов велика, что приводит к возможности Бозе-усиления процессов рождения. Другой особенностью, потенциально существенной как для бозонов, так и для фермионов, является зависимость эффективной массы продуктов распада от величины инфляционного поля. Эти и другие эффекты мы рассмотрим в следующих разделах данной Главы.

15.2 Распад колебаний инфлятона в теории с квадратичным потенциалом

Рассмотрим подробнее, как происходит распад колебаний инфляционного поля на бозоны в теории с инфляционным потенциалом

$$V(\phi) = \frac{m^2}{2}\phi^2. \quad (15.8)$$

Эта задача важна как для модели инфляции с большим полем и с потенциалом (15.8), так и для других инфляционных моделей на этапе, когда инфляционное поле колеблется вблизи минимума своего потенциала, а его нелинейность пренебрежимо мала. В действительности многие (хотя и не все) результаты этого раздела справедливы для моделей с другими потенциалами; особенности теории с инфляционным потенциалом $\lambda\phi^4$ мы рассмотрим в разделе 15.3. Мы обсудим распад колебаний инфлятона за счёт его взаимодействия с некоторым другим бозонным полем χ , которое для простоты будем считать скалярным. Пусть действие для поля χ имеет вид

$$S_\chi = \int d^4x \sqrt{-g} \left(\frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_\mu \chi \partial_\nu \chi - \frac{m_\chi^2}{2} \chi^2 - \frac{1}{2} g^2 \chi^2 \phi^2 \right), \quad (15.9)$$

где g — безразмерная константа связи, которую мы будем считать малой. Мы пренебрегаем самодействием поля χ и его взаимодействием с другими полями; такое приближение оправдано в теориях с малыми константами связи на начальной стадии распада колебаний инфлятона до тех пор, пока плотность числа частиц поля χ невелика, а процессы рассеяния этих частиц не начинают приближать систему к тепловому равновесию. Кроме того, мы в этом разделе будем пренебрегать обратным влиянием рожденных частиц на колебания инфлятона, то есть будем считать инфляционное поле внешним. Этих приближений нам будет в основном достаточно для того, чтобы выяснить качественную картину распада колебаний инфлятона и обсудить физические эффекты, которые могут проявиться в течение этого процесса.

В пренебрежении обратным влиянием поля χ на колебания инфлятона однородное инфляционное поле зависит от времени согласно

$$\phi(t) = \phi_0(t) \cos mt,$$

где амплитуда ϕ_0 падает по закону $\phi_0(t) \propto a^{-3/2}(t)$, см. раздел 2.5. На стадии колебаний инфлятона выполняется неравенство $H \ll m$, поэтому амплитуда ϕ_0 является медленно меняющейся функцией времени в том смысле, что $\dot{\phi}_0/\phi_0 \ll m$. Уравнение на Фурье-компоненты поля χ имеет вид

$$\ddot{\chi} + 3H\dot{\chi} + [\varepsilon^2 + g^2\phi^2(t)]\chi = 0, \quad (15.10)$$

где

$$\varepsilon^2 = \frac{k^2}{a^2} + m_\chi^2$$

— квадрат частоты собственных колебаний моды поля χ , то есть квадрат энергии кванта этого поля, а k — не зависящий от времени конформный импульс моды. Параметр ε также медленно меняется со временем, $\dot{\varepsilon}/\varepsilon \ll m$. Сделав замену переменных

$$\chi = \frac{1}{a^{3/2}}\sigma ,$$

приведём уравнение (15.10) к виду

$$\ddot{\sigma} + \left(\varepsilon^2 + g^2\phi^2 - \frac{3}{4}H^2 - \frac{3\ddot{a}}{2a} \right) \sigma = 0 .$$

Последние два слагаемых в скобке пренебрежимо малы на интересующей нас стадии. Например, два кванта поля χ , рожденных в распаде инфлатона, имеют энергии $\varepsilon = m/2 \gg H, \sqrt{|\ddot{a}/a|}$; мы увидим в дальнейшем, что характерные энергии ε иногда бывают ещё большими. Итак, уравнение, которое нам предстоит исследовать, имеет вид

$$\ddot{\sigma} + (\varepsilon^2 + g^2\phi_0^2 \cos^2 mt) \sigma = 0 , \quad (15.11)$$

причём параметры ε и ϕ_0 адиабатически меняются со временем.

Уравнение (15.11) представляет собой уравнение осциллятора с переменной частотой, квадрат которой равен

$$\omega_\chi^2(t) = \varepsilon^2 + g^2\phi_0^2 \cos^2 mt . \quad (15.12)$$

На классическом уровне это уравнение описывает процесс параметрического возбуждения осциллятора. На квантовом уровне соответствующий процесс — это рождение χ -частиц в нестационарном внешнем инфлатонном поле. Мы будем в основном использовать язык квантовой теории поля и говорить о рождении частиц. Общий метод, позволяющий провести соответствующий анализ, описан в Приложении Е; ключевым его элементом является вычисление коэффициентов Боголюбова.

Мы здесь считаем, что перед концом инфляции среднее значение поля χ равно нулю. Однако в рамках описанного в разделе 12.2.1 представления о хаотическом начале инфляции можно было бы ожидать, что начальное значение поля χ в модели (15.8), (15.9) велико. Тем не менее, при не слишком сильных предположениях о значениях этого поля и поля инфлатона перед началом инфляции поле χ успевает скатиться в минимум своего потенциала $\chi = 0$ задолго до окончания инфляции. Поэтому картина, которую мы здесь обсуждаем, является вполне реалистической. Действительно, при больших значениях полей ϕ и χ в скалярном потенциале доминирует их взаимодействие, так что в приближении медленного скатывания они удовлетворяют уравнениям

$$\begin{aligned} 3H\dot{\phi} &= -g^2\chi^2\phi \\ 3H\dot{\chi} &= -g^2\phi^2\chi \end{aligned}$$

Если начальные значения таковы, что $\phi > \chi$ (при этом сильного равенства не требуется), то скатывающая сила, действующая на χ , превышает силу, действующую на ϕ , поле χ скатывается быстрее и в конечном итоге достигает нуля ещё до окончания инфляционной стадии.

▷ Задача 2. Путём анализа полной системы уравнений для пространственно однородных полей ϕ и χ оценить область значений параметров модели (15.8), (15.9) и начальных данных для ϕ и χ , для которых сделанное утверждение действительно имеет место. Указание: считать, что потенциальная энергия в начале инфляции оценивается величиной $V(\phi, \chi) \sim M_{Pl}^4$. В какой области параметров флуктуации поля χ , генерируемые на инфляционной стадии за счёт механизма раздела 14.3.1, несущественны к концу инфляции?

15.2.1 Распад инфлатонных колебаний большой амплитуды

На начальных этапах колебаний инфлатонного поля вполне возможна ситуация, когда амплитуда этих колебаний настолько велика, что выполняется неравенство

$$g\phi_0 \gg m . \quad (15.13)$$

Например, в моделях инфляции с большим полем и инфлатонным потенциалом (15.8) начальная амплитуда колебаний инфлатона оценивается величиной $\phi_0 \simeq M_{Pl}/\sqrt{4\pi}$, см. (15.2), в то время как масса инфлатона гораздо меньше, $m \simeq 10^{-6}M_{Pl}$. Поэтому неравенство (15.13) выполняется при $g \gg 3 \cdot 10^{-6}$.

В случае, когда выполняется неравенство (15.13), динамика рождения χ -частиц сильно отличается от той, что описана в разделе 15.1. В этом разделе мы рассмотрим именно указанный случай, при этом будем считать, что масса поля χ пренебрежимо мала. В литературе класс процессов, о которых идёт речь в этом разделе и разделе 15.3, получил название “широкого резонанса”; по причинам, о которых речь ниже, для подкласса процессов, подобных рассматриваемому в этом разделе (но не в разделе 15.3) употребляют термин “стохастический резонанс”. Особый интерес для физических приложений представляют здесь следующие два обстоятельства. Во-первых, в упрощённой картине распада инфлатона по каналу $\phi \rightarrow \chi + \chi$, описанной в разделе 15.1, рождение χ -частиц возможно только тогда, когда их масса не превышает половины массы инфлатона. На самом же деле, как мы сейчас увидим, возможно рождение χ -частиц гораздо больших масс. Во-вторых, в результате процесса, описанного в этом разделе, генерируется поле χ большой амплитуды. Некоторые возможные физические следствия этих результатов мы рассмотрим в разделах 15.5.1 и 15.5.2.

При выполнении неравенства (15.13) изменение частоты (15.12) почти всё время является адиабатическим. Это связано с тем, что частота осцилляций поля χ почти всё время велика по сравнению с частотой колебаний инфлатона,

$$\omega_\chi \gg m . \quad (15.14)$$

Для параметра адиабатичности имеем

$$\left| \frac{\dot{\omega}_\chi}{\omega_\chi^2} \right| = \left| \frac{g^2 \phi_0^2 m \cos mt \sin mt}{\omega_\chi^3} \right| \lesssim \left| \frac{m}{g\phi_0} \frac{\sin mt}{\cos^2 mt} \right| \quad (15.15)$$

Этот параметр действительно мал при всех t за исключением узких временных интервалов вокруг значений $t_n = (\pi/2 + \pi n)/m$, $n = 0, 1, \dots$, при которых инфлатонное поле равно нулю. Поэтому рождение χ -частиц происходит только в течение этих интервалов, а между ними число частиц сохраняется. Рассмотрим рождение частиц на первом из этих интервалов, считая, что сначала χ -частиц в системе нет. Как описано в разделе E.1, в этом случае число рождённых частиц в моде с конформным импульсом k даётся коэффициентом Боголюбова β . Для его вычисления рассмотрим уравнение (15.11) вблизи $t_0 = \pi/(2m)$. Воспользовавшись приближением $\cos(\pi/2 + m\tau) = -m\tau$, справедливым при малых $\tau \equiv t - t_0$, запишем это уравнение в виде

$$\ddot{\sigma} + (\varepsilon^2 + g^2 \dot{\phi}^2 \tau^2) \sigma = 0 , \quad (15.16)$$

где

$$\dot{\phi}^2 \equiv \dot{\phi}^2(\tau = 0) = m^2 \phi_0^2 .$$

В соответствии с разделом E.1, нам необходимо найти решение этого уравнения, которое является положительно-частотным при больших *отрицательных* τ (формально при $\tau \rightarrow -\infty$),

$$\sigma^{(+)} = \frac{1}{\sqrt{2\omega_\chi}} e^{i \int \omega_\chi d\tau}, \quad \tau \rightarrow -\infty.$$

Это решение при больших *положительных* τ ведёт себя как

$$\sigma^{(+)} = \alpha \cdot \frac{1}{\sqrt{2\omega_\chi}} e^{i \int \omega_\chi d\tau} + \beta^* \cdot \frac{1}{\sqrt{2\omega_\chi}} e^{-i \int \omega_\chi d\tau}, \quad \tau \rightarrow +\infty, \quad (15.17)$$

причём β и представляет собой интересующий нас коэффициент Боголюбова.

Уравнение (15.16) формально эквивалентно стационарному уравнению Шредингера с координатой τ для частицы “массы” $1/2$ с “энергией” ε^2 в “потенциале”

$$U(\tau) = -g^2 \phi_0^2 m^2 \tau^2. \quad (15.18)$$

Ненулевой коэффициент β в (15.17) соответствует в квантовомеханическом случае надбарьерному отражению от отрицательного квадратичного потенциала (“энергия” в нашей ситуации положительна). Решение такой квантовомеханической задачи хорошо известно, см. [42]; мы сейчас кратко его воспроизведём, адаптирував для наших целей. При больших отрицательных τ частота равна

$$\omega_\chi = \sqrt{\varepsilon^2 + g^2 \phi_0^2 m^2 \tau^2} \approx - \left(g \phi_0 m \tau + \frac{\varepsilon^2}{2 g \phi_0 m \tau} \right),$$

так что положительно-частотная функция имеет вид

$$\sigma^{(+)} = \frac{1}{2 g \phi_0 m} \cdot z^{-\frac{1}{2} - i \frac{\varepsilon^2}{2 g \phi_0 m}} \cdot e^{-\frac{i}{2} g \phi_0 m z^2}, \quad (15.19)$$

где $z = -\tau \rightarrow +\infty$. Фигурирующая в (15.17) отрицательно-частотная часть (второе слагаемое) получается аналитическим продолжением функции (15.19) в нижней полуплоскости в область $z = \rho e^{-i\pi}$, $\rho > 0$, откуда имеем

$$\beta^* = -i \exp \left(-\frac{\pi \varepsilon^2}{2 g \phi_0 m} \right). \quad (15.20)$$

Отсюда следует, что пространственная плотность числа рождённых частиц в элементе физического импульсного объёма $d^3 q$ сразу после окончания процесса рождения равна (см. (E.22))

$$n(q) d^3 q = |\beta(q)|^2 \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} = \exp \left(-\frac{\pi \varepsilon^2}{g \phi_0 m} \right) \frac{d^3 q}{(2\pi)^3}. \quad (15.21)$$

Замечательно, что в результате рассмотренного механизма рождаются частицы с энергиями вплоть до

$$\varepsilon \sim \sqrt{g \phi_0 m}, \quad (15.22)$$

что заметно превышает массу инфлатона. Этот результат связан с тем, что при прохождении нуля инфлатонным полем параметр адиабатичности $\dot{\omega}_\chi / \omega_\chi^2$ для таких частиц принимает значения порядка единицы, см. (15.15).

- ▷ **Задача 3.** Оценить максимальное значение параметра адиабатичности $\dot{\omega}_\chi/\omega_\chi^2$ при $\varepsilon \sim \sqrt{g\phi_0 m}$ и $\varepsilon \gg \sqrt{g\phi_0 m}$.
- ▷ **Задача 4.** Найти связь между коэффициентами Боголюбова α и β , фигурирующими в (15.17), и коэффициентами прохождения и отражения в квантовомеханической задаче о частице в потенциале (15.18). Чему в последней задаче соответствует соотношение $|\alpha|^2 - |\beta|^2 = 1$, известное из раздела E.1?

При $m_\chi \ll \sqrt{g\phi_0 m}$ полная плотность числа χ -частиц сразу после рождения равна

$$n_\chi = \int d^3 q n(q) = \frac{1}{8\pi^3} (g\phi_0 m)^{3/2}. \quad (15.23)$$

При росте инфлатонного поля от значений, близких к нулю, к значениям $\phi \sim \phi_0$ энергия каждой χ -частицы растёт до величины порядка $\omega_\chi \sim g\phi_0$, и плотность энергии оценивается величиной

$$\rho_\chi = n_\chi \omega_\chi \sim n_\chi g\phi_0 \sim \frac{1}{8\pi^3} \left(\frac{g^5 \phi_0}{m} \right)^{1/2} m^2 \phi_0^2. \quad (15.24)$$

Видно, что при достаточно большом значении константы связи g плотность энергии частиц, рожденных при единичном прохождении нуля инфлатонным полем, может быть не мала по сравнению с плотностью энергии инфлатона $\rho_\phi = m^2 \phi_0^2 / 2$, и даже возможна ситуация, когда $\rho_\chi \sim \rho_\phi$. В последнем случае пренебрежение обратным влиянием поля χ на инфлатон незаконно, однако ясно, что амплитуда осцилляций инфлатона сильно уменьшается за одну или несколько этих осцилляций.

До сих пор мы рассматривали процесс рождения χ -частиц при первом прохождении инфлатонным полем нулевого значения. Если рождённые при этом частицы имеют сравнительно малую плотность энергии, $\rho_\chi \ll \rho_\phi$, осцилляции инфлатонного поля продолжаются почти с прежней амплитудой. Что при этом происходит, зависит от свойств χ -частиц. Если они успевают перерассеяться или распасться через половину периода инфлатонных осцилляций, то к моменту, когда инфлатонное поле будет снова пересекать нулевое значение, память о деталях предыдущего процесса рождения сотрётся, и процесс рождения повторится вновь без существенных изменений. В противном случае поле σ продолжает эволюционировать согласно уравнению (15.11); в этом случае процесс рождения χ -частиц в определённом смысле носит стохастический характер. Число частиц при этом экспоненциально растёт,

$$n_k(t) = c_k \exp \left(\frac{\nu_k m t}{\pi} \right), \quad (15.25)$$

где коэффициенты ν_k и c_k нерегулярным образом зависят от конформного импульса k и от параметров модели. При $\beta(k) \sim 1$ оба этих коэффициента по порядку величины равны единице.

Действительно, в пренебрежении перерассеянием и распадами χ -частиц их рождение происходит как когерентный процесс. Для его описания необходимо решить уравнение (15.11) для функции $\sigma^{(+)}$ и выяснить, как изменяются коэффициенты Боголюбова при последующих прохождениях нуля инфлатонным полем. Пусть непосредственно перед n -м пресечением нуля (но всё ещё тогда, когда для уравнения (15.11) работает адиабатическое приближение) функция $\sigma^{(+)}$ равна (мы здесь опускаем несущественный множитель $(2\omega_\chi)^{-1/2}$)

$$\sigma^{(+)}(t) = \alpha_n e^{i \int_{t_n}^t \omega_\chi dt} + \beta_n e^{-i \int_{t_n}^t \omega_\chi dt}, \quad (15.26)$$

где t_n — время, при котором инфлатонное поле n -й раз пересекает нуль. Тогда сразу *после* n -го пересечения нуля она станет равна

$$\sigma^{(+)}(t) = \alpha_n \left(\alpha e^{i \int_{t_n}^t \omega_\chi dt} + \beta^* e^{-i \int_{t_n}^t \omega_\chi dt} \right) + \beta_n \left(\alpha^* e^{-i \int_{t_n}^t \omega_\chi dt} + \beta e^{i \int_{t_n}^t \omega_\chi dt} \right),$$

где β — найденный нами коэффициент (15.20), а α — второй коэффициент Боголюбова, фигурирующий в (15.17). Через половину периода осцилляций инфлатона, перед тем как инфлатонное поле будет пересекать нуль $(n+1)$ -й раз, функция $\sigma^{(+)}$ будет иметь вид, аналогичный (15.26), но с коэффициентами

$$\alpha_{n+1} = (\alpha_n \alpha + \beta_n \beta) e^{i\theta_n} \quad (15.27)$$

$$\beta_{n+1} = (\beta_n \alpha^* + \alpha_n \beta^*) e^{-i\theta_n}, \quad (15.28)$$

где

$$\theta_n = \int_{t_n}^{t_{n+1}} \omega_\chi dt.$$

Уравнения (15.27) и (15.28) определяют эволюцию коэффициентов Боголюбова. При этом фигурирующая в них фаза θ_n как функция n и k носит случайный характер. Действительно, при $\varepsilon \ll g\phi_0$ (а именно этот случай представляет интерес, см. (15.22) и (15.13)) эта фаза оценивается величиной

$$\theta_n \simeq \frac{2}{m} g\phi_0(t_n),$$

где мы учли, что полуperiод осцилляций равен

$$t_{n+1} - t_n = \pi/m. \quad (15.29)$$

Поскольку $\phi_0(t) \propto a^{-3/2}(t)$, изменение этой фазы за полуperiод оценивается как

$$\theta_{n+1} - \theta_n \simeq \frac{2\pi}{m^2} g\dot{\phi}_0 \sim -3\pi \frac{g\phi_0}{m} \frac{H}{m}.$$

При не слишком малых H/m , то есть в наиболее интересном случае начального этапа распада инфлатонных осцилляций, модуль этой величины вполне может намного превышать π , что и означает, что θ_n принимает случайные значения. В результате фазы коэффициентов α_n и β_n нерегулярно зависят как от n , так и от конформного импульса моды.

Эта стохастичность коэффициентов α_n и β_n отражается на эволюции числа частиц. Для величины $|\beta_n|^2$, определяющей число рождённых частиц, получим из (15.27) и (15.28) соотношение

$$|\beta_{n+1}|^2 - |\beta_n|^2 = 2|\beta_n|^2 |\beta|^2 + 2|\beta_n| |\beta| \sqrt{(1 + |\beta_n|^2) \cdot (1 + |\beta|^2)} \cos(\psi_n - \psi) + |\beta|^2, \quad (15.30)$$

где $\psi_n = \text{Arg}(\alpha_n^* \beta_n)$ и $\psi = \text{Arg}(\alpha^* \beta)$. При выводе этого соотношения мы воспользовались равенствами (см. (E.21))

$$|\alpha|^2 - |\beta|^2 = 1 \quad (15.31)$$

$$|\alpha_n|^2 - |\beta_n|^2 = 1. \quad (15.32)$$

Из-за присутствия в правой части (15.30) случайного множителя $\cos(\psi_n - \psi)$ число χ -частиц при каждом прохождении нуля может как возрастать, так и убывать, а эволюция числа рождённых частиц носит нерегулярный характер; с этим связано употребление термина “стохастический резонанс”. Резонансом это явление называют потому, что число частиц экспоненциально растёт со временем; в этом отношении рассматриваемое явление похоже на параметрический резонанс, см. раздел 15.2.2. Действительно, при больших β_n правая часть (15.30) пропорциональна $|\beta_n^2|$, а коэффициент пропорциональности в *среднем* положителен. Отсюда и из (15.29) и следует поведение (15.25), причём зависимость ν_k от конформного импульса связана с тем, что для некоторых мод $\cos(\psi_n - \psi)$ чаще бывает положительным, чем для других. Подробнее по этому поводу см. [102].

▷ Задача 5. Используя уравнения (15.27), (15.28) показать, что из соотношения (15.31) следует равенство (15.32) при всех n .

Как видно из (15.20), на начальном этапе рождения частиц число заполнения $N_q = |\beta(q)|^2$ не превышают единицы (мы сейчас рассматриваем систему в конечном пространственном объёме и пользуемся тем же определением чисел заполнения N_q , что и в разделе E.1). Однако в дальнейшем эти числа заполнения становятся большими. В этом случае дальнейший анализ можно проводить в рамках *классической* теории поля. Действительно, квантовый характер операторов рождения и уничтожения A_q^\dagger , A_q проявляется в том, что их коммутатор отличен от нуля, $[A_q, A_q^\dagger] = 1$. Однако если среднее значение $\langle A_q^\dagger A_q \rangle = N_q$

значительно превышает единицу, то коммутатор пренебрежимо мал по сравнению с этим средним, так что $A_{\mathbf{q}}$ можно воспринимать как классическое гауссово случайное поле с нулевым средним и квадратом дисперсии $\langle A_{\mathbf{q}}^* A_{\mathbf{q}} \rangle = N_{\mathbf{q}}$. Соответственно, квантовое поле $\chi(\mathbf{x}, t)$ можно воспринимать как гауссово случайное поле, при этом в соответствии с результатами раздела E.1, имеют место следующие соотношения между флуктуацией этого поля, плотностью числа частиц и плотностью энергии

$$n_{\chi} \sim \omega_{\chi} \langle \chi^2(\mathbf{x}) \rangle, \quad \rho_{\chi} \sim \omega_{\chi}^2 \langle \chi^2(\mathbf{x}) \rangle,$$

где ω_{χ} — характерная энергия χ -частицы (по поводу точных соотношений см. задачу 8 Приложения С).

Как мы обсуждаем в разделе C.2, линейное квантовое поле, изначально находившееся в вакуумном состоянии, всегда можно воспринимать как классическое гауссово случайное поле, поэтому высказанное только что соображение не слишком интересно в случае линейных полей. Оно, однако, становится весьма полезным при рассмотрении нелинейной эволюции. Идея состоит в том, чтобы перейти к описанию в терминах случайного классического поля ещё на линейной стадии, когда $N_{\mathbf{q}}$ уже велики, но при описании эволюции случайного поля $\chi(\mathbf{x}, t)$ всё ещё можно пренебречь нелинейными эффектами. Иначе говоря, это линейное случайное поле служит начальным условием дальнейшей классической эволюции. Задав таким образом начальные условия, можно перейти к изучению последующих, нелинейных стадий эволюции путём решения полных (нелинейных) классических уравнений поля. Эта задача, которая вполне может быть решена численно, соответствует задаче о нелинейной эволюции системы квантовых полей с учётом перерассеяния частиц, обратного влияния рождённых частиц на эволюцию инфлатона и т.д., при этом все Бозе-факторы учитываются автоматически. Такое описание в рамках классической теории поля имеет, разумеется, свои границы применимости.

Отметим, что приведённое только что рассуждение в действительности носит довольно общий характер (см. также замечание в разделе I.10.3).

Если процессы перерассеяния и распада χ -частиц несущественны, то в модели (15.8), (15.9) квазилинейный режим³ продолжается до тех пор, пока энергия поля χ не станет сравнимой с энергией колебаний инфлатона. Как видно из (15.25), соответствующее время отличается от полуperiода колебаний инфлатона π/m лишь логарифмическим фактором, так что начальная стадия процесса распада колебаний инфлатона протекает быстро. К концу этой стадии величину поля χ можно оценить, приравнивая его энергию, $\omega_{\chi}^2 \chi^2 \simeq g^2 \phi_0^2 \chi^2$, энергии инфлатона $m^2 \phi_0^2/2$. Получим отсюда

$$\chi^2 \sim \frac{m^2}{g^2}. \quad (15.33)$$

Видно, что в это же время вклад поля χ в квадрат эффективной массы инфлатона $m_{eff}^2 = m^2 + g^2 \chi^2$ становится порядка m^2 , что служит ещё одним свидетельством того, что обратное влияние поля χ на эволюцию инфлатона перестаёт быть слабым. Соответствующая плотность числа χ -частиц (во всех модах) оценивается величиной

$$n_{\chi} \sim \omega_{\chi} \chi^2 \sim \frac{m^2 \phi_0}{g}. \quad (15.34)$$

Отметим, что эти оценки остаются справедливыми и при сравнительно больших константах связи, когда распад инфлатона на χ -частицы и завершение квазилинейного режима происходит за один проход нуля инфлатонным полем, см. обсуждение формулы (15.24). В любом случае на последующей нелинейной стадии амплитуда поля χ может возрасти до ещё больших значений по сравнению с оценкой (15.33). Эволюция в нелинейном режиме и последующее установление теплового равновесия — это весьма сложные процессы, которые к тому же являются сильно модельно-зависимыми. Их рассмотрение выходит далеко за рамки этой книги. Упомянем только, что окончательное установление теплового равновесия, связанное с перекачкой энергии из мод с малыми импульсами в моды с большими импульсами, — это медленный процесс, происходящий в режиме турбулентности [103].

³Мы называем этот режим квазилинейным, поскольку эволюция поля χ является линейной, но взаимодействием между полями ϕ и χ мы не пренебрегаем: именно оно ответственно за рождение χ -частиц.

15.2.2 Случай слабой связи

В моделях инфляции с малыми полями существенную роль может играть явление [104, 105], аналогичное классическому параметрическому резонансу, известному из теории колебаний. В литературе по постинфляционному разогреву для него используют термин “узкий резонанс”. На языке квантовой теории поля это явление соответствует Бозе-усиленнию пертурбативного рождения частиц. Например, в модели (15.8), (15.9) речь идёт о парном рождении χ -частиц в процессах $\phi + \phi \rightarrow \chi + \chi$, где ϕ — покоящаяся частица инфлатонного поля, причём константа взаимодействия g считается малым параметром. Мы увидим, что узкий резонанс реализуется, когда парное рождение кинематически разрешено, то есть $m_\chi < m$, и при этом

$$g^2 \phi_0^2 \ll m^2. \quad (15.35)$$

В этом случае влияние взаимодействия χ -частиц с осциллирующим инфлатонным полем на кинематику процесса мало, и энергия каждой из рождённых частиц близка к m . Бозе-усиление рассматриваемых процессов связано с наличием уже рождённых χ -частиц в системе.

Вполне аналогичный эффект имеется в модели с действием поля χ вида

$$S_\chi = \int d^4x \sqrt{-g} \left(\frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_\mu \chi \partial_\nu \chi - \frac{m_\chi^2}{2} \chi^2 - \frac{1}{2} h \phi \chi^2 \right), \quad (15.36)$$

где h — малая константа размерности массы. В этой модели речь идёт о затухании колебаний инфлатонного поля за счёт распадов $\phi \rightarrow \chi + \chi$. Уравнение, аналогичное (15.11), в этой модели имеет вид

$$\ddot{\sigma} + (\varepsilon^2 + h\phi_0 \cos mt) \sigma = 0, \quad (15.37)$$

где по-прежнему $\phi_0 \propto a^{-3/2}$ — медленно меняющаяся амплитуда колебаний инфлатона, а $\varepsilon^2 = k^2/a^2 + m_\chi^2$. Условие, аналогичное (15.35), имеет вид

$$h\phi_0 \ll m^2. \quad (15.38)$$

Для того, чтобы распад $\phi \rightarrow \chi + \chi$ был возможен, в этой модели требуется выполнение неравенства $m_\chi < m/2$.

Из-за медленного изменения ϕ_0 со временем уравнения (15.11) и (15.37) по-существу одинаковы: с учётом того, что $\cos^2 mt = \frac{1}{2}(1 + \cos 2mt)$ они совпадают с точностью до очевидной замены обозначений. Для определённости мы будем рассматривать уравнение (15.37); наши выводы нетрудно переформулировать для модели (15.9). Уравнение (15.37) при не зависящих от времени ε и ϕ_0 представляет собой хорошо известное уравнение Матьё, а адиабатическую зависимость ε и ϕ_0 от времени учесть нетрудно. Решения этого уравнения в режиме (15.38) обладают следующим свойством (см., например, [106], гл. 27). В узкой области энергий ε вблизи $\varepsilon = m/2$, такой что

$$\left| \varepsilon - \frac{m}{2} \right| \leq \frac{h\phi_0}{2m}, \quad (15.39)$$

имеются решения, которые экспоненциально растут со временем,

$$\sigma = e^{\int \nu dt} \cos \left[\frac{mt}{2} + \varphi(t) \right], \quad (15.40)$$

где

$$\nu(t) = \sqrt{\frac{h^2 \phi_0^2(t)}{4m^2} - \left[\varepsilon(t) - \frac{m}{2} \right]^2},$$

а поведение фазы $\varphi(t)$ для нас несущественно. Имеются и другие экспоненциально растущие решения в узких областях вблизи $\varepsilon = (m/2)n$, $n = 2, 3, \dots$, которые можно интерпретировать как многочастичные процессы $\phi + \phi + \dots \rightarrow \chi + \chi$, однако эти решения растут медленнее и интереса для нас не представляют. Кроме того, из инвариантности уравнения (15.37) относительно замены $t \rightarrow -t$ следует, что в области (15.39) имеются и экспоненциально убывающие решения,

$$\sigma = e^{-\int \nu dt} \cos \left(\frac{mt}{2} - \varphi \right). \quad (15.41)$$

В процессе расширения Вселенной моды с подходящими конформными импульсами заходят в интервал (15.39), а затем выходят из него. Интересующая нас функция $\sigma^{(+)}$ представляет собой линейную комбинацию решений (15.40) и (15.41), и в условиях резонанса равна

$$\sigma^{(+)} = c \cdot e^{\int \nu dt} \cos \left[\frac{mt}{2} + \varphi(t) \right],$$

где комплексная постоянная c определяется из условия сшивки с положительно-частотным решением на ранних временах. Отсюда сразу получается оценка для числа рожденных χ -частиц в моде с конформным импульсом k ,

$$|\beta|^2 = \text{const} \cdot e^{2 \int_{t_-}^{t_+} \nu(t) dt}, \quad (15.42)$$

где t_- и t_+ — моменты времени, когда мода входит в интервал (15.39) и выходит из него.

▷ **Задача 6.** Найти приближённое решение $\sigma^{(+)}$ уравнения (15.37) с медленно меняющимися коэффициентами $\varepsilon(t)$ и $\phi_0(t)$ в режиме (15.38). Считать, что энергия $\varepsilon(t)$ убывает со временем из-за покраснения импульсов, поэтому она входит в интервал (15.39) сверху, а затем выбывает из этого интервала. Уточнить тем самым оценку (15.42). Указание: нетривиальной является область $|\varepsilon - m/2| \ll m$. Вне этой области осциллирующим членом в уравнении (15.37) можно пренебречь, и решение является линейной комбинацией положительно- и отрицательно-частотных ВКБ-решений уравнения

$$\ddot{\sigma} + \varepsilon^2 \sigma = 0, \quad (15.43)$$

причём на ранних временах имеется только положительно-частотная компонента. В области $|\varepsilon - m/2| \ll m$ решение следует искать в виде

$$\sigma^{(+)} = a_0(t)e^{imt/2} + b_0(t)e^{-imt/2} + a_1(t)e^{i3mt/2} + b_1(t)e^{-i3mt/2} + \dots,$$

где коэффициенты $a_0(t), \dots, b_1(t)$ меняются сравнительно медленно, $\dot{a}_0/a_0 \ll m$ и т.д. Убедитесь, что a_1, b_1 и другие коэффициенты при кратных гармониках малы по сравнению с a_0 и b_0 . Получите таким образом замкнутые уравнения для $a_0(t)$ и $b_0(t)$. Эти уравнения можно решать в ВКБ-приближении, при этом полезно воспользоваться аналогией с частицей в

одномерной квантовой механике, проникающей через потенциальный барьер. Полное решение получается спивкой полученных таким образом решений с ВКБ-решениями уравнения (15.43) в области $g\phi_0 \ll |\varepsilon - m/2| \ll m$.

Найдём показатель экспоненты в (15.42). Будем для простоты считать, что вырождения между массами m_χ и m нет, так что $m_\chi \ll m$, и мы можем положить $m_\chi = 0$. При прохождении модой k зоны резонанса, в которой $|k/a - m/2| \lesssim k/a$, зависимостью ϕ_0 и параметра Хаббла от времени можно пренебречь, поэтому показатель экспоненты равен

$$2 \int_{t_-}^{t_+} \nu(t) dt = \frac{h\phi_0}{m} \int_{t_-}^{t_+} \sqrt{1 - z^2(t)} dt = \frac{h\phi_0}{m} \int_1^{-1} \sqrt{1 - z^2} \frac{dz}{z},$$

где

$$z = \frac{2m\varepsilon(t) - m^2}{h\phi_0}.$$

Поскольку $\varepsilon = k/a(t)$, имеем $\dot{z} = -2m\varepsilon H/(h\phi_0)$, и в зоне резонанса $\dot{z} = -m^2 H/(h\phi_0)$. Отсюда находим

$$2 \int_{t_-}^{t_+} \nu(t) dt = \frac{\pi}{2} \frac{h^2 \phi_0^2}{m^3 H}.$$

Мы рассматриваем ситуацию, когда плотность энергии осциллирующего инфлатона доминирует во Вселенной. Эта плотность энергии равна $m^2 \phi_0^2/2$, так что

$$H = \sqrt{\frac{4\pi}{3}} \frac{m\phi_0}{M_{Pl}}.$$

Отсюда получаем окончательно

$$2 \int_{t_-}^{t_+} \nu(t) dt = \sqrt{\frac{3\pi}{16}} \left(\frac{h\phi_0}{m^2} \right)^2 \frac{M_{Pl}}{\phi_0}. \quad (15.44)$$

Напомним, что здесь фигурирует амплитуда осцилляций ϕ_0 на момент, когда мода с конформным импульсом k имеет энергию $\varepsilon = k/a = m/2$.

Из (15.44) следует, что рождение χ -частиц наиболее интенсивно происходит в начале осцилляций инфлатона, когда амплитуда ϕ_0 наиболее велика. Кроме того, с учётом (15.38) видно, что рассматриваемый в этом разделе эффект экспоненциального Бозе-усиления может быть существенен лишь для случая сравнительно малых амплитуд осцилляций инфлатона, $\phi_0 \ll M_{Pl}$. Точнее, этот эффект имеет место лишь в моделях, где выполнено неравенство $m^2 \ll hM_{Pl}$, и лишь на той стадии осцилляций, когда амплитуда удовлетворяет неравенствам

$$m^2 \gg h\phi_0 \gg \frac{m^4}{hM_{Pl}}, \quad (15.45)$$

при этом обратное влияние рожденных χ -частиц на осцилляции инфлатона должно быть всё ещё мало на этой стадии. Таким образом, случай узкого резонанса реализуется лишь при довольно специальных соотношениях между параметрами. Отметим, что при выполнении обратного неравенства $\phi_0 \ll m^4/(h^2 M_{Pl})$ (и $\phi_0 \ll m^2/h$) распад инфлатона происходит без Бозе-усиления, то есть так, как описано в разделе 15.1.

- ▷ **Задача 7.** В пределе малой константы h вычислить методом преобразований Боголюбова число рождённых χ -частиц в единице объёма за время $H^{-1} \gg \Delta t \gg m^{-1}$. Показать, что оно равно $\Delta n_\chi = \Gamma n_\phi \Delta t$, где n_ϕ — плотность числа ϕ -частиц в конденсате, $n_\phi = m\phi_0^2/2$, а Γ — ширина распада $\phi \rightarrow \chi + \chi$.
- ▷ **Задача 8.** Для случая (15.38) получить результат об экспоненциальном Бозе-усилении рождения χ -частиц и оценку показателя экспоненты, исходя из квантовой теории. Указание: воспользоваться аналогией с вынужденным испусканием фотонов, см. [18], параграф 44. Учесть, что в рассматриваемом процессе рождаются две χ -частицы с противоположными импульсами.
- ▷ **Задача 9.** Найти показатель экспоненты для числа рождённых частиц в модели с фиксированным конформным импульсом в модели (15.9) в режиме (15.35). Убедиться, что этот показатель может заметно превышать единицу лишь при $\phi_0 \ll M_{Pl}$. Получить аналог неравенств (15.45).

15.3 Особенности теории с потенциалом ϕ^4

Рассмотрим для полноты модель инфляции с большим полем, в которой инфлатонный потенциал имеет вид

$$V(\phi) = \frac{\lambda}{4}\phi^4. \quad (15.46)$$

Будем считать пока, что массового члена в потенциале нет. В этой модели возможно рождение частиц самого инфлатонного поля ϕ с ненулевыми импульсами. Мы, однако, рассмотрим здесь другую возможность, а именно, распад колебаний инфлатона за счёт взаимодействия с полем χ , действие которого имеет вид (15.9). При $m_\chi = 0$ такая теория двух полей в пространстве Минковского обладает конформной симметрией. В частности, действие инвариантно относительно растяжений пространства-времени с одновременным преобразованием полей:

$$\phi(x^\mu) \rightarrow \alpha\phi(\alpha x^\mu), \quad \chi(x^\mu) \rightarrow \alpha\chi(\alpha x^\mu).$$

С этой инвариантностью (хотя она и не является точной в расширяющейся Вселенной) и связаны особенности процесса распада колебаний инфлатона.

Прежде всего, заметим, что колебания инфлатонного поля происходят в режиме

$$\lambda\phi_0^2 \gg H^2, |\dot{H}|, \quad (15.47)$$

где ϕ_0 — амплитуда колебаний.

- ▷ **Задача 10.** Показать, что в случае, когда выполняется обратное неравенство $\lambda\phi^2 \ll H^2$, колебаний инфлатона нет, а вместо этого реализуется режим медленного скатывания.

Для описания колебаний инфлатона удобно ввести поле $\tilde{\phi}$ соотношением

$$\phi = \frac{\tilde{\phi}}{a(t)} \quad (15.48)$$

и перейти к конформному времени η . Исходное уравнение для однородного инфлатонного поля имеет вид

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} = -\lambda\phi^3 ,$$

а в терминах введённых величин оно записывается как

$$\tilde{\phi}'' - \frac{a''}{a}\tilde{\phi} = -\lambda\tilde{\phi}^3 ,$$

где штрих, как обычно, обозначает производную по конформному времени η . Неравенство (15.47) показывает, что второе слагаемое в левой части этого уравнения пренебрежимо мало по сравнению с правой частью, поэтому поле $\tilde{\phi}$ удовлетворяет тому же уравнению, что и однородное поле в пространстве Минковского,

$$\tilde{\phi}'' = -\lambda\tilde{\phi}^3 . \quad (15.49)$$

Это уравнение описывает нелинейные колебания в потенциале четвёртого порядка с постоянной амплитудой $\tilde{\phi}_0$. Замена переменной $\eta = \zeta/(\sqrt{\lambda}\tilde{\phi}_0)$ приводит к уравнению без параметров для функции $\tilde{\phi}/\tilde{\phi}_0$, описывающему колебания с единичной амплитудой. Отсюда следует, что в терминах переменной η период колебаний равен

$$T_\phi = \frac{C}{\sqrt{\lambda}\tilde{\phi}_0} , \quad (15.50)$$

где C — численная постоянная, которая оказывается равной $C = \sqrt{2\pi}\Gamma(1/4)/\Gamma(3/4) \approx 7.4$. Важно, что в пренебрежении обратным влиянием частиц поля χ на колебания инфлатона ни амплитуда $\tilde{\phi}_0$ этих колебаний, ни их период не зависят от масштабного фактора, а значит и от времени. Так проявляется приближённая конформная инвариантность рассматриваемой модели. Амплитуда исходного инфлатонного поля ϕ при этом падает как a^{-1} (в отличие от $a^{-3/2}$ как в случае доминирования массы инфлатона).

- ▷ **Задача 11.** Найти решение уравнения (15.49) в терминах эллиптических функций. Убедиться, что константа C действительно равна 7.4.
- ▷ **Задача 12.** Показать, что в рассматриваемом режиме плотность энергии однородного осциллирующего инфлатонного поля падает как a^{-4} . Найти усреднённый по периоду осцилляций тензор энергии-импульса инфлатона и убедиться, что $p = \rho/3$. Таким образом, закон расширения Вселенной, доминированной инфлатонными осцилляциями в теории ϕ^4 , совпадает с законом расширения радиационно-доминированной Вселенной. Это свойство также связано с приближённой конформной инвариантностью модели.

Для изучения рождения частиц поля χ сделаем замену, аналогичную (15.48), а именно $\chi = \tilde{\chi}/a$. Тогда для моды с конформным импульсом k получим уравнение

$$\tilde{\chi}'' + \left(k^2 + m_\chi^2 a^2(\eta) + g^2 \tilde{\phi}^2\right) \tilde{\chi} = 0 ,$$

где мы вновь пренебрегли слагаемым, пропорциональным a''/a . Будем считать, что константа связи g сравнительно велика,

$$g^2 \gg \lambda . \quad (15.51)$$

Поскольку константа λ должна быть крайне малой, см. (13.62), такой случай является вполне реалистическим. В этой ситуации механизм распада колебаний инфлатона в определённой степени аналогичен тому, что был рассмотрен в разделе 15.2.1. Действительно, *вдали* от нулевого значения инфлатонного поля квадрат конформной частоты моды моды поля $\tilde{\chi}$ оценивается величиной $\Omega_\chi^2 \sim k^2 + m_\chi^2 a^2 + g^2 \tilde{\phi}_0^2$, и в силу (15.50) имеем (ср. с (15.14)) $\Omega_\chi \gg T_\phi^{-1}$. Поэтому мода поля χ почти всегда находится в адиабатическом режиме, а адиабатичность нарушается на тех интервалах времени, когда поле $\tilde{\phi}$ близко к нулю. На этих интервалах уравнение для $\tilde{\chi}$ с очевидными изменениями в обозначениях имеет вид (15.16), где роль параметра ϕ теперь играет производная $\tilde{\phi}'$, вычисленная в тот момент времени, когда $\tilde{\phi} = 0$. Эту производную найдём, воспользовавшись интегралом движения для уравнения (15.49),

$$\frac{1}{2} \left(\tilde{\phi}' \right)^2 + \frac{\lambda}{4} \tilde{\phi}^4 = \text{const.}$$

Получим

$$|\tilde{\phi}'|_{\tilde{\phi}=0} = \sqrt{\frac{\lambda}{2}} \tilde{\phi}_0^2.$$

Вычисление, приводящее к (15.20), воспроизводится дословно с точностью до очевидных замен обозначений. Поэтому для коэффициента Боголюбова получаем

$$\beta^* = -i \exp \left(-\frac{\pi(k^2 + m_\chi^2 a^2)}{g \sqrt{2\lambda} \tilde{\phi}_0^2} \right) = -i \exp \left(-\frac{\pi \varepsilon^2}{g \sqrt{2\lambda} \tilde{\phi}_0^2} \right), \quad (15.52)$$

где по-прежнему $\varepsilon^2 = k^2/a^2 + m_\chi^2$. Видно, что интенсивно рождаются частицы с физическими импульсами и массами вплоть до

$$\frac{k}{a}, \quad m_\chi \sim \lambda^{1/4} g^{1/2} \phi_0.$$

Это соотношение выполняет роль соотношения (15.22) в рассматриваемой модели.

До сих пор наше рассмотрение шло параллельно анализу раздела 15.2.1. Особенностью рассматриваемой в этом разделе модели является дальнейшая эволюция коэффициентов Боголюбова в ситуации, перерассеяние и распады χ -частиц несущественны, а масса χ -частиц пренебрежимо мала. В этом случае ни период осцилляций поля $\tilde{\phi}$, ни частота поля $\tilde{\chi}$ не зависят от времени в конформных переменных. Поэтому стохастического характера эволюции мод поля χ не возникает. Действительно, при $m_\chi = 0$ изменение коэффициентов Боголюбова через полупериод осцилляций инфлатона описывается уравнениями (15.27), (15.28), в которых

$$\theta_n = \int_{nT_\phi/2}^{(n+1)T_\phi/2} \Omega_\chi d\eta \equiv \theta, \quad (15.53)$$

где

$$\Omega_\chi^2(\eta) = k^2 + g^2 \tilde{\phi}^2(\eta).$$

В отличие от модели раздела 15.2.1 эта фаза не является случайной функцией n и конформного импульса и в пренебрежении обратным влиянием рожденных χ -частиц на колебания инфлатона не зависит от n вообще. Уравнения (15.27), (15.28) соответствуют вполне детерминированной эволюции коэффициентов Боголюбова, а значит и числа частиц в каждой mode.

Найдём зависимость числа частиц от времени в ситуации, когда частиц в данной моде уже много, и для коэффициентов Боголюбова справедливо равенство

$$|\alpha_n| = |\beta_n| ,$$

которое следует из общего соотношения $|\alpha_n|^2 - |\beta_n|^2 = 1$ в случае $|\beta_n| \gg 1$. Поскольку $\theta_n = \theta$ не зависит от n , решение уравнений (15.27), (15.28) имеет вид

$$\begin{aligned} \alpha_n &= e^{i\varphi} c_n \\ \beta_n &= e^{i(\varphi+\psi)} c_n , \end{aligned}$$

где амплитуды c_n вещественны, а фазы φ и ψ не зависят от n . Действительно, подставляя эти выражения в (15.27), получим два уравнения

$$\begin{aligned} |c_{n+1}| &= e^\nu |c_n| \\ \operatorname{Im} \left[(\alpha + e^{i\psi} \beta) e^{i\theta} \right] &= 0 , \end{aligned} \quad (15.54)$$

где

$$e^\nu = \left| \alpha + e^{i\psi} \beta \right| = \sqrt{|\alpha|^2 + |\beta|^2 + 2\operatorname{Re}(\beta\alpha^* e^{i\psi})} . \quad (15.55)$$

Условие роста числа частиц выглядит как $\nu > 0$. В этом случае число частиц экспоненциально растёт с конформным временем,

$$|\beta_n|^2 = \text{const} \cdot e^{2(n+1)\nu} = \text{const} \cdot e^{4\nu\eta/T_\phi} ,$$

то есть мы имеем дело с резонансной ситуацией. Как мы уже говорили, стохастического поведения в рассматриваемой системе не наблюдается, число частиц регулярным образом зависит от времени.

С учётом уравнения (15.54) подкоренное выражение в (15.55) положительно, если выполняется условие

$$\left| \operatorname{Re} \left(\alpha e^{i\theta} \right) \right| > 1 . \quad (15.56)$$

Максимальный рост имеет место тогда, когда

$$\operatorname{Arg} \left(\alpha e^{i\theta} \right) = 0 \pmod{\pi} . \quad (15.57)$$

В этом случае

$$e^\nu = |\alpha| + \sqrt{|\alpha|^2 - 1} ,$$

где мы воспользовались равенством $|\alpha|^2 - |\beta|^2 = 1$. Поскольку как α , так и θ зависят от конформного импульса, соотношение (15.56) определяет области импульсов, в которых число рождённых χ -частиц экспоненциально растёт — зоны резонанса. При этом уравнение (15.57) даёт значения импульса, при которых этот рост происходит наиболее быстро.

Опишем свойства решений уравнения (15.57). Нас интересует область импульсов, где коэффициент β не мал, то есть (см. (15.52))

$$k^2 \lesssim k_0^2 = \sqrt{\frac{\lambda}{2}} g \tilde{\phi}_0^2 .$$

Коэффициент α не слишком сильно зависит от импульса в этой области. В то же время, фаза θ довольно быстро изменяется с изменением k . Действительно, для этой фазы справедлива формула (15.53) с $\Omega_\chi^2 = k^2 + g^2 \tilde{\phi}^2(\eta)$. Зависимость интеграла (15.53) от k набирается из области небольших значений $\tilde{\phi}(\eta)$ вблизи нуля, и с логарифмической точностью мы получаем

$$\theta(k) = \theta(k=0) + \frac{k^2}{k_0^2} \ln \left(\frac{g \tilde{\phi}_0}{k} \right) .$$

Для импульсов k не слишком сильно отличающихся от k_0 имеем окончательно

$$\theta(k) = \theta(k=0) + \frac{k^2}{4k_0^2} \ln \left(\frac{g^2}{\lambda} \right) , \quad (15.58)$$

где мы опустили небольшой числовой множитель под знаком логарифма, как выходящий за рамки используемого приближения. Благодаря имеющемуся в выражении (15.58) большому логарифму зависимость θ от k действительно довольно сильная. Отсюда следует, что с логарифмической точностью уравнение (15.57) сводится к уравнению

$$\frac{k^2}{4k_0^2} \ln \left(\frac{g^2}{\lambda} \right) = \text{const} + \pi n , \quad (15.59)$$

где константа зависит от отношения g^2/λ и лежит в области от 0 до π .

При $k^2 \ll k_0^2$ имеем $|\alpha| = \sqrt{1 + |\beta|^2} = \sqrt{2}$. Поэтому максимальный показатель ν равен $\ln(1 + \sqrt{2}) = 0.88$, так что максимальный рост числа частиц происходит по закону

$$n_k \propto e^{3.5 \frac{\eta}{T_\phi}} .$$

В общем случае⁴ минимальный импульс, для которого справедлив этот закон, то есть наименьший k ,

⁴При специальных значениях отношения g^2/λ решения уравнения (15.57) начинаются с $k = 0$.

служащий решением уравнения (15.59), по порядку величины равен

$$k \sim \frac{k_0}{\sqrt{\ln\left(\frac{g^2}{\lambda}\right)}}.$$

Ширина первой зоны, то есть области, где выполняется условие (15.56), имеет тот же порядок величины. С этим и связано употребление термина “широкий резонанс”. Из (15.59) следует, что уравнение (15.57) имеет много решений, то есть существует много резонансных зон. Ширины зон с $k \sim k_0$ и расстояния между этими зонами малы по параметру $\ln^{-1}\left(\frac{g^2}{\lambda}\right)$.

Несмотря на все эти особенности, качественная картина распада колебаний инфлатона в модели этого раздела в целом аналогична картине, обсуждавшейся в разделе 15.2.1. Благодаря экспоненциальному характеру рождения частиц первоначальная перекачка энергии от инфлатона в χ -частицы происходит за небольшое число периодов колебаний, и система быстро выходит на нелинейный режим. Анализ процессов, происходящих в нелинейном режиме, мы оставляем за рамками этой книги.

▷ **Задача 13.** В модели этого раздела с $m_\chi \neq 0$ и $g^2 \gg \lambda$ оценить, при каких значениях амплитуды колебаний инфлатона реализуется рассмотренный в этом разделе режим широкого резонанса, а при каких — режим стохастического резонанса раздела 15.2.1. Указания: считать, что расширение Вселенной доминировано осциллирующим инфлатонным полем; обратным влиянием рожденных χ -частиц на колебания инфлатона пренебречь.

▷ **Задача 14.** Рассмотрим модель инфляции с большим полем и с потенциалом инфлатона

$$V(\phi) = \frac{m^2}{2}\phi^2 + \frac{\lambda}{4}\phi^4,$$

причём будем считать массу m настолько малой, что член четвёртого порядка доминирует в начале осцилляций инфлатона. В модели этого раздела с $m_\chi = 0$ и $g^2 \gg \lambda$ оценить, при каком значении амплитуды осцилляций режим широкого резонанса сменяется режимом стохастического резонанса. Указания те же, что в предыдущей задаче.

В заключение этого раздела отметим, что если неравенство (15.51) не выполняется, рождение частиц происходит в режиме, близком к описанному в разделе 15.2.2, с тем отличием, что в пренебрежении обратным влиянием рожденных частиц конформная частота колебаний инфлатона не меняется со временем, и при $m_\chi = 0$ всё время заселяются моды с одним и тем же конформным импульсом. Число рожденных частиц экспоненциально растёт до тех пор, пока не станет существенным эффект обратного влияния и не наступит нелинейный режим. Таким образом, приближённая конформная инвариантность теории приводит к более эффективному Бозе-усилению рождения частиц в случае слабой связи. Сказанное в полной мере относится и к ситуации, когда основным каналом распада колебаний инфлатона является рождение самих частиц инфлатонного поля с различными от нуля импульсами.

15.4 Рождение тяжёлых фермионов

Механизм рождения тяжёлых частиц осциллирующим инфлатонным полем большой амплитуды, в определённой степени аналогичный рассмотренному в разделе 15.2.1, существует и для фермионов. Чтобы в этом убедиться, рассмотрим модель, в которой фермионы испытывают юкавское взаимодействие с полем инфлатона. Фермионная часть действия этой модели имеет вид

$$S_F = \int d^4x \sqrt{-g} (\bar{\psi} i\gamma^\alpha \mathcal{D}_\alpha \psi - M\bar{\psi}\psi - g\phi\bar{\psi}\psi) ,$$

где ковариантная производная \mathcal{D}_α определена в разделе D.2. Будем для определённости считать, что инфлатон имеет квадратичный потенциал (15.8). Для нас в этом разделе интерес представляет случай, когда масса фермиона в вакууме $\phi = 0$ заметно превышает массу инфлатона,

$$M \gg m . \quad (15.60)$$

В то же время, мы будем считать, что по крайней мере в начальный период инфлатонных осцилляций их амплитуда достаточно велика,

$$g\phi_0 > M . \quad (15.61)$$

В моделях инфляции с большим полем это ограничение не слишком сильное, если не считать безразмерную юкавскую константу g очень малой. В этой ситуации эффективная масса фермиона равна

$$M_{eff}(t) = M + g\phi(t) .$$

Она дважды проходит через нуль в течение одной осцилляции инфлатона, в эти моменты нарушаются условия адиабатичности для эволюции волновых функций фермионов и происходит интенсивное рождение этих частиц.

Чтобы описать этот процесс, запишем уравнение Дирака для волновой функции $\chi = a^{3/2}\psi$ в конформных координатах (η, \mathbf{x}) , см. раздел D.2,

$$i\gamma^\mu \partial_\mu \chi - aM_{eff} \chi = 0 .$$

В киральном представлении матриц Дирака (см. раздел I.B.1) оно сводится к двум уравнениям на двухкомпонентные спиноры χ_L и χ_R ,

$$i\chi'_L + i\sigma \partial \chi_L - aM_{eff} \chi_R = 0 \quad (15.62)$$

$$i\chi'_R - i\sigma \partial \chi_R - aM_{eff} \chi_L = 0 , \quad (15.63)$$

где штрих, как обычно, обозначает производную по конформному времени η , а $\sigma = (\sigma^1, \sigma^2, \sigma^3)$ — набор матриц Паули. Сделаем Фурье-преобразование по пространственным координатам и выберем в качестве χ_L и χ_R состояния с положительной спиральностью $\sigma \mathbf{k} \chi_{L,R} = k \chi_{L,R}$ (случай отрицательной спиральности рассматривается аналогично и приводит к тем же результатам). Тогда уравнения (15.62), (15.63) приводятся к двум уравнениям на комплексные функции времени

$$\begin{aligned} iu' - kv - aM_{eff} u &= 0 \\ iv' - ku + aM_{eff} v &= 0 . \end{aligned}$$

где $u = \chi_L + \chi_R$, $v = \chi_L - \chi_R$. Исключив с помощью второго уравнения переменную u , получим уравнение второго порядка,

$$v'' + [a^2 M_{eff}^2 + k^2 - i(aM_{eff})'] v = 0. \quad (15.64)$$

Как и в разделе 15.2.1, эволюция волновой функции является адиабатической всюду, кроме малых интервалов в окрестности тех моментов времени η_* , когда $M_{eff}(\eta_*) = 0$. В этих интервалах уравнение (15.64) сводится к уравнению

$$v'' + [a_*^2 g^2 (\phi'_*)^2 (\eta - \eta_*)^2 + k^2 - i(aM_{eff})'_*] v = 0, \quad (15.65)$$

где звёздочка обозначает величины, взятые в момент η_* . Уравнение (15.65) совпадает по форме с уравнением (15.16), если положить $\varepsilon^2 = k^2 - i(aM_{eff})'_*$. Поэтому можно сразу воспользоваться результатом (15.20) и получить, что после первого прохождения M_{eff} через нуль число рождённых фермионов определяется величиной

$$|\beta|^2 = \exp\left(-\frac{\pi k^2}{a_* g \phi'_*}\right) = \exp\left(-\frac{\pi q^2}{g \dot{\phi}_*}\right),$$

причём во втором выражении фигурируют физический импульс $q = k/a$ и производная по обычному времени $\dot{\phi}_*$. Отметим, что пока амплитуда осцилляций инфлатона ϕ_0 не стала близкой к M/g , эффективная масса становится равной нулю при ϕ_* , заметно меньшем ϕ_0 , так что $\dot{\phi}_* \sim m\phi_0$.

Итак, несмотря на большое значение массы M фермионы интенсивно рождаются осциллирующим однородным полем инфлатона, пока амплитуда этих осцилляций достаточно велика, $g\phi_0 > M$. При этом конформные импульсы рождённых фермионов находятся в области

$$k^2 \lesssim a^2 g \dot{\phi}_* \sim a^2 g m \phi_0. \quad (15.66)$$

Вообще говоря, для числа рождённых фермионов также должна наблюдаться нерегулярная зависимость от параметров и времени, аналогичная рассмотренной в разделе 15.2.1. Разница состоит в том, что числа заполнения фермионов не могут превышать единицы, поэтому для оценок можно считать, что для всех импульсов в области (15.66) выполняется $|\beta|^2 \simeq 1$. С учётом того, что $\phi_0 \propto a^{-3/2}$, из (15.66) мы видим, что область конформных импульсов родившихся фермионов расширяется со временем, то есть фермионов становится всё больше и больше. Процесс рождения фермионов прекращается, когда амплитуда осцилляций инфлатона падает до значения M/g ; в этот момент заполнены все моды в области физических импульсов

$$q^2 \lesssim q_{max}^2 \sim Mm, \quad (15.67)$$

а плотность числа рождённых фермионов оценивается величиной

$$n_f \sim \frac{4\pi}{3} g_f \frac{q_{max}^3}{(2\pi)^3} \sim \frac{g_f}{6\pi^2} (Mm)^{3/2}, \quad \text{когда } g\phi_0 = M, \quad (15.68)$$

где g_f — число спиновых состояний; по поводу множителя $(2\pi)^{-3}$ см. формулу (E.22).

Оценка (15.68) имеет ограниченную область применимости. Во-первых, она получена в квазилинейном режиме, когда обратным влиянием рождённых частиц на осцилляции инфлатона можно пренебречь. Необходимое для квазилинейности условие имеет вид

$$\rho_f \ll \rho_\phi = \frac{m^2}{2} \phi_0^2. \quad (15.69)$$

Как видно из (15.60) и (15.67), импульсы фермионов малы по сравнению с их массой, поэтому плотность энергии фермионов даётся выражением

$$\rho_f = Mn_f \sim \frac{g_f}{6\pi^2} M^{5/2} m^{3/2}.$$

Таким образом, одним из условий применимости (15.68) является неравенство

$$g^4 M \ll \left(\frac{3\pi^2}{g_f} \right)^2 m, \quad (15.70)$$

где мы учли, что в интересующий нас период $g\phi_0 \simeq M$. Во-вторых, инфлатон может распадаться на другие частицы, что может приводить к сравнительно быстрому затуханию его осцилляций. Оценка (15.68) заведомо неприменима, если к моменту, когда $g\phi_0 \simeq M$, плотность энергии осциллирующего инфлатона становится настолько мала, что параметр Хаббла становится сравнимым с шириной инфлатона Г. Таким образом, необходимым условием справедливости оценки (15.68) служит

$$H^2 = \frac{8\pi}{3M_{Pl}^2} \rho_\phi \sim \frac{M^2 m^2}{g^2 M_{Pl}^2} \gg \Gamma^2.$$

Для ширины инфлатона используем выражение (15.5) и получим ограничение

$$M \gg \frac{h^2 g N_d}{16\pi} M_{Pl}. \quad (15.71)$$

Для меньших масс оценку снизу на плотность числа рожденных фермионов можно получить, считая, что все фермионы рождаются, когда эффективная масса $M_{eff} = M + g\phi$ становится равной нулю в первый раз. Число рожденных при этом фермионов в одном спиновом состоянии даётся той же формулой (15.23), что и в случае бозонов, так что

$$n_f \gtrsim \frac{g_f}{8\pi^3} (g\phi_e m)^{3/2}, \quad (15.72)$$

где мы учли, что при первой осцилляции инфлатона $\phi_0 \sim \phi_e$. В этом случае мы снова должны учесть ограничение (15.69), которое теперь даёт

$$g^3 M^2 \ll \left(\frac{4\pi^3}{g_f} \right)^2 m\phi_e. \quad (15.73)$$

В случае, если неравенство (15.69) не выполняется, рождение фермионов приводит к окончанию квазилинейной стадии распада инфлатона и переходу на нелинейную стадию при некотором значении амплитуды ϕ_0 . В этот момент $\rho_f \sim \rho_\phi$ и

$$n_f \sim \frac{m^2 \phi_0^2}{M}. \quad (15.74)$$

Мы увидим в разделе 15.5.1, что с точки зрения возможных физических приложений все полученные оценки приводят к достаточно большим значениям плотности числа фермионов.

15.5 Физические приложения

15.5.1 Генерация барионной асимметрии в процессе разогрева

В разделах 15.2.1 и 15.4 мы убедились, что в процессе распада колебаний инфлатона может происходить рождение очень тяжёлых частиц. Это приводит к новым возможным механизмам генерации барионной асимметрии Вселенной. В частности, источником несохранения барионного числа могут служить взаимодействия, имеющиеся в теориях Большого объединения, см. раздел I.11.2.2. В этих теориях генерация барионной асимметрии возможна в распадах частиц с массой, сравнимой с масштабом Большого объединения, $M_{GUT} \sim 10^{15} - 10^{16}$ ГэВ, см. раздел I.11.3. Как видно из (15.22) и (15.61), при не слишком малых константах связи этих частиц с инфлатоном такие частицы действительно могут интенсивно рождаться в моделях инфляции с большим полем, где начальное значение амплитуды инфлатонных колебаний сравнимо с планковским. Например, в модели раздела 15.2.1 с $g \sim 1$ могут

рождаться бозоны с массами $m_\chi \sim (mM_{Pl})^{1/2} \sim 10^{16}$ ГэВ, а в модели раздела 15.4 масса рождённых фермионов может быть лишь немного меньше планковской. Поскольку состояние материи во Вселенной во время рождения этих частиц далеко от термодинамического равновесия, третья из условий Сахарова (см. раздел I.11.1) может удовлетворяться без всяких дополнительных условий на параметры теории. В частности, процессы обратного распада могут отсутствовать, так что нет необходимости накладывать характерное для бариогенезиса в горячей среде требование малости ширины распада частиц, $\Gamma \lesssim H$.

В этом разделе мы кратко рассмотрим такую возможность на примере моделей разделов 15.2.1 и 15.4. Наше обсуждение по необходимости будет весьма схематичным, в первую очередь потому, что сегодня трудно сказать что-либо определённое о физике частиц в области энергий Большого объединения, в том числе о свойствах инфлатона и его взаимодействиях с другими частицами. Наша задача — показать, что в процессе постинфляционного разогрева возможна генерация наблюдаемой барионной асимметрии, причём какой-либо подстройки параметров теории для этого не требуется.

Начнём с модели раздела 15.2.1. Будем предполагать, что в распаде одной χ -частицы генерируется барионная асимметрия

$$\delta_\chi = \frac{\sum_f \Gamma(\chi \rightarrow f) B_f}{\Gamma_{\chi,tot}},$$

где суммирование идёт по всем каналам распада f , а B_f — барионное число конечного состояния⁵. Предположим далее, что канал распада инфлатона на χ -частицы является доминирующим (или одним из доминирующих). В соответствии с результатами раздела 15.2.1 распад колебаний инфлатона в квазилинейном режиме, когда обратное влияние рождённых частиц пренебрежимо мало, происходит за небольшое число периодов колебаний. За это время амплитуда колебаний не успевает сильно упасть из-за расширения Вселенной, так что эта амплитуда по порядку величины совпадает со значением инфлатонного поля к концу инфляции,

$$\phi_0 \sim \phi_e \sim \frac{M_{Pl}}{\sqrt{4\pi}}. \quad (15.75)$$

Плотность числа рождённых χ -частиц при этом оценивается величиной (15.34). Как мы сейчас увидим, даже такого количества χ -частиц достаточно, чтобы обеспечить генерацию наблюдаемой барионной асимметрии в их распадах. Разумеется, χ -частицы, вообще говоря, рождаются и на последующей нелинейной стадии, так что наши оценки будут оценками снизу.

Распады χ -частиц приводят к появлению барионного числа во Вселенной, плотность которого равна

$$n_B = \delta_\chi n_\chi.$$

⁵В действительности необходимо рассматривать генерацию не барионной асимметрии как такой, а генерацию $(B - L)$ -асимметрии: при последующей эволюции барионное и лептонные числа по отдельности не сохраняются на горячей стадии за счёт электрослабых процессов (см. раздел I.11.2.1), так что результирующая барионная асимметрия пропорциональна $(B - L)$ -асимметрии, образовавшейся на обсуждаемом здесь этапе. Ещё одно замечание состоит в том, что в случае, когда χ -частицы не являются истинно нейтральными, а инфлатон распадается на $\chi\bar{\chi}$ -пару, асимметрия δ_χ получается сложением вкладов частицы и античастицы, см. раздел I.11.3.

Будем считать, что процессов обратного распада, вымывающих асимметрию, не происходит. Для обоснования последнего предположения достаточно заметить, что на рассматриваемом этапе система далека от термодинамического равновесия. Более того, даже если распад χ -частиц происходит быстрее чем за хаббловское время, а продукты распада — например, релятивистские кварки и лептоны — быстро приходят в состояние теплового равновесия, их температура грубо оценивается из соотношения

$$g_* T^4 \sim \rho_\chi \sim \varepsilon n_\chi ,$$

где $\varepsilon \sim g\phi_0$ — энергия χ -частицы в присутствии инфлатонного поля $\phi \sim \phi_0$, а g_* — эффективное число термализованных степеней свободы. Из этой оценки получим, используя (15.34),

$$\frac{T}{\varepsilon} \sim \left(\frac{m^2}{g_* g^4 \phi_0^2} \right)^{1/4} ,$$

что при не слишком малых g является малой величиной, см. (15.13). Таким образом, энергии термализованных частиц недостаточны для того, чтобы процессы обратного распада происходили с высоким темпом.

На пылевидной постинфляционной стадии, когда основной вклад в плотность энергии во Вселенной вносят осциллирующее инфлатонное поле, нерелятивистские χ -частицы и т.д., плотность числа χ -частиц и, соответственно, плотность барионного числа падают так же, как плотность энергии. После перехода на радиационно-доминированную стадию постоянной величиной (с точностью до фактора, учитывавшего изменение эффективного числа степеней свободы) является $n_B/\rho^{3/4}$. После установления термодинамического равновесия эта же величина (опять-таки с точностью до множителя $g_*^{1/4}$ и численных факторов порядка единицы) служит оценкой асимметрии n_B/s , где s — плотность энтропии. Таким образом, интересующая нас асимметрия оценивается величиной

$$\Delta_B \equiv \frac{n_B}{s} \sim \delta_\chi \rho^{1/4}(t_{reh}) \frac{n_\chi}{\rho} ,$$

где $\rho(t_{reh})$ — плотность энергии в момент перехода на радиационно-доминированную стадию, n_χ/ρ — отношение плотности числа χ -частиц к полной плотности энергии сразу после рождения χ -частиц. Из (15.34) и $\rho \sim m^2 \phi_0^2$ для последнего отношения имеем оценку⁶ $n_\chi/\rho \sim (g\phi_0)^{-1}$. Оценку снизу на $\rho(t_{reh})$ получим исходя из того соображения, что что радиационно-доминированная стадия заведомо начинается не позже того, как распадутся нерелятивистские частицы, то есть не позже того момента, когда $H(t) \sim \Gamma$, где Γ — характерная ширина распада тяжёлых частиц, включая инфлатон и χ -частицы. Имеем отсюда с точностью до численного множителя порядка единицы

$$\rho^{1/4}(t_{reh}) \gtrsim (\Gamma M_{Pl})^{1/2} .$$

Ширину распада тяжёлых частиц оценим как $\Gamma \sim h^2 M / (8\pi)$, где h — характерное значение констант связи, M — массовый масштаб теории. Тогда получим

$$\Delta_B \gtrsim \delta_\chi \frac{h}{g} \left(\frac{M M_{Pl}}{8\pi \phi_0^2} \right)^{1/2} \sim \delta_\chi \frac{h}{g} \left(\frac{M}{M_{Pl}} \right)^{1/2} , \quad (15.76)$$

⁶Разумеется, эта оценка согласуется с тем, что в рассматриваемый момент плотность энергии χ -частиц $\rho_\chi \sim \varepsilon n_\chi \sim g\phi_0 n_\chi$ по порядку величины равна полной плотности энергии, см. конец раздела 15.2.1.

где мы воспользовались (15.75). Величина δ_χ , может иметь порядок $10^{-2} - 10^{-3}$, см. раздел I.11.3, второй сомножитель в правой части (15.76) может быть порядка единицы. Если считать, что массовый масштаб M по порядку величины совпадает с массой инфлатона, $M \simeq 10^{-6} M_{Pl}$, то по порядку величины последний множитель оценивается как 10^{-3} . Несмотря на грубость приведённых оценок и многочисленные неопределённости, отсюда видно, что рассмотренный механизм вполне может обеспечить генерацию наблюдаемой асимметрии $\Delta_B \simeq 10^{-10}$.

Обратимся теперь к возможности генерации барионной асимметрии в распадах фермионов, рождающихся за счёт механизма раздела 15.4. Воспользуемся оценкой (15.68) и учтём, что в то время, когда рождение фермионов прекращается, выполняется соотношение $\rho_\phi = m^2 \phi_0^2 / 2 = m^2 M^2 / (2g^2)$. Тогда будем иметь

$$\frac{n_f}{\rho} \sim \frac{g_f g^2}{3\pi^2} \frac{1}{\sqrt{Mm}}.$$

Повторяя предыдущее рассуждение, получим для барионной асимметрии оценку

$$\Delta_B \sim \delta_f \frac{g_f g^2}{3\pi^2} \left(\frac{h^2 N_d M_{Pl}}{8\pi M} \right)^{1/2}, \quad (15.77)$$

где δ_f — асимметрия в распадах фермиона и антифермиона. Видно, что и в этом случае возможна генерация наблюдаемой асимметрии в широкой области значений параметров.

Результат (15.77) справедлив тогда, когда справедлива оценка (15.68), то есть при значениях параметров, удовлетворяющих (15.70) и (15.71). Если (15.71) не выполняется, но справедливо (15.73), то плотность числа фермионов оценивается снизу согласно (15.72). В этом случае отношение n_f/ρ до перехода на радиационно-доминированную стадию оценивается как

$$\frac{n_f}{\rho} \gtrsim \frac{g_f g^{3/2}}{4\pi^3} \frac{1}{\sqrt{m\phi_e}}.$$

Отсюда имеем оценку для асимметрии

$$\Delta_B \gtrsim \delta_f \frac{g_f g^{3/2} h}{4\sqrt{2}\pi^3} N_d^{1/2}.$$

Такую же оценку снизу будем иметь для случая бозонов, если по каким-то причинам (например, из-за взаимодействия инфлатона с другими полями) распад осцилляций инфлатона происходит всего за несколько периодов. Численное значение асимметрии по-прежнему вполне приемлемо, если константы связи не слишком малы.

Наконец, если рождение тяжёлых фермионов само приводит к окончанию квазилинейной стадии инфлатонных осцилляций, то в этот момент справедливо соотношение (15.74). Поэтому $n_f/\rho \gtrsim 1/(2M)$ и

$$\Delta_B \gtrsim \delta_f \left(\frac{\Gamma M_{Pl}}{4M^2} \right)^{1/2} \sim \delta_f \left(\frac{h^2 N_d m M_{Pl}}{32\pi M^2} \right)^{1/2}.$$

Это значение асимметрии вновь оказывается достаточно большим без какой-либо подгонки параметров.

В заключение раздела отметим, что рождение тяжёлых частиц — бозонов или фермионов — в процессе распада колебаний инфлатона может служить механизмом генерации тёмной материи, альтернативным механизмам, рассмотренным в Главе I.9. При этом тёмная материя может состоять либо из самих рождённых частиц, если они имеют достаточно большое время жизни, либо из продуктов их распада. В соответствии с результатами разделов 15.2, 15.4 масса частиц тёмной материи, образованных за счёт такого механизма, может быть очень велика — её значение может быть гораздо выше температуры постинфляционного разогрева и составлять величину вплоть до 10^{16} ГэВ. Для столь тяжёлых частиц тёмной материи иногда используют термин “wimpzilla”.

▷ Задача 15. Убедиться, что образованная за счёт описанного механизма тёмная материя действительно может иметь $\Omega_{CDM} \simeq 0.2$ без тонкой подстройки параметров.

15.5.2 Нетепловые фазовые переходы

Как мы видели в разделах 15.2.1, 15.3, распад колебаний инфлатона может приводить к генерации больших флуктуаций бозонных полей. Такие флуктуации могут существенно влиять на свойства симметрии системы. В результате на стадии постинфляционного разогрева возможны специфические, нетепловые фазовые переходы. Такая возможность представляет интерес с точки зрения образования стабильных или метастабильных топологических дефектов, например, за счёт механизма Кибла (см. Главу I.12).

Простая модель, иллюстрирующая указанную возможность, получается, если помимо инфлатона и взаимодействующего с ним поля χ ввести ещё одно скалярное поле σ с потенциалом

$$V = \frac{\lambda_\sigma}{4} (\sigma^2 - v^2)^2 + \lambda_{\sigma\chi} \chi^2 \sigma^2.$$

В такой модели имеется симметрия $\sigma \rightarrow -\sigma$, которая спонтанно нарушена в вакууме $\chi = 0, \sigma = \pm v$. Если же поле χ имеет большие флуктуации, то среднее значение поля σ является минимумом эффективного потенциала (флуктуациями самого поля σ для простоты пренебрегаем)

$$V_{eff}(\sigma) = \frac{\lambda_\sigma}{4} (\sigma^2 - v^2)^2 + \lambda_{\sigma\chi} \langle \chi^2 \rangle \sigma^2.$$

Симметрия в такой модели будет восстановлена, если

$$\lambda_{\sigma\chi} \langle \chi^2 \rangle > \frac{\lambda_\sigma}{2} v^2. \quad (15.78)$$

При конечной температуре отличие $\langle \sigma^2 \rangle$ от нуля обусловлено тепловыми флуктуациями, так что

$$\langle \chi^2 \rangle_T \sim T^2.$$

Если максимальная температура во Вселенной была мала по сравнению с $\sqrt{\lambda_\sigma/\lambda_{\sigma\chi}}v$, то на всей горячей стадии симметрия нарушена, $\langle \sigma \rangle \neq 0$, то есть фазового перехода на этой стадии не происходит. В то же время, на стадии распада инфлатона в модели раздела 15.2.1 флуктуации поля χ в квазилинейном режиме оцениваются величиной (15.33), а в нелинейном режиме они ещё больше. Поэтому неравенство (15.78) может выполняться на этой стадии. Анализ области параметров, в которой имеет место рассматриваемое явление, требует изучения динамики системы полей в нелинейном режиме. Такой анализ проводится в рамках классической теории поля, см. конец раздела 15.2.1. Из него следует [107], что нетепловые фазовые переходы действительно могут иметь место, причём энергетический масштаб, на котором это происходит, может быть сравним с масштабом Большого объединения, $v \sim M_{GUT}$. Таким образом, на стадии постинфляционного разогрева возможно образование топологических дефектов, характерных для теорий Большого объединения, в том числе магнитных монополей и космических струн. Если рождение монополей (а также доменных стенок), вообще говоря, нежелательно, см. разделы I.12.2.3, I.12.4, то образование космических струн представляет несомненный интерес. Подробное обсуждение этих вопросов вышло бы нас за рамки этой Книги.

15.5.3 Высокочастотные гравитационные волны

Ещё одним следствием возможного образования флуктуаций полей с большой амплитудой на стадии постинфляционного разогрева является генерация гравитационных волн. Как видно, например, из (15.21), флуктуации полей на этой стадии могут иметь большие длины волн; по-существу единственным модельно-независимым ограничением здесь служит то, что эти длины не должны превышать текущий хаббловский размер. Это подтверждается и численными расчётами [108]. Соответственно, минимальный импульс гравитационных волн на момент генерации составляет величину порядка H_{gen} ; здесь и далее индекс “gen” относится к величинам в эпоху генерации гравитационных волн. Оценим современное значение этого импульса. Запишем,

$$q_0 = q_{gen} \frac{a_{gen}}{a_0} \simeq H_{gen} \frac{a_{gen}}{a_0} .$$

Поступая так же, как в конце раздела 13.1.3, найдём

$$\frac{a_0}{a_{gen}} = \left(\frac{90}{8\pi^3 g_{*,0}} \right)^{1/3} \frac{M_{Pl}}{T_0} \left(\frac{H_{gen}^2}{M_{Pl} T_{reh}} \right)^{1/3} = 2 \cdot 10^{31} \left(\frac{H_{gen}^2}{M_{Pl} T_{reh}} \right)^{1/3} , \quad (15.79)$$

где мы приняли, что уравнение состояния на стадии разогрева имеет вид $p = 0$ (что соответствует $\beta = 3$ в формулах конца раздела 13.1.3), и учли численные множители. Отсюда для минимального современного импульса имеем

$$q_0 \simeq \left(\frac{8\pi^3 g_{*,0}}{90} \right)^{1/3} T_0 \left(\frac{H_{gen} T_{reh}}{M_{Pl}^2} \right)^{1/3} \simeq 30 \left(\frac{H_{gen} T_{reh}}{M_{Pl}^2} \right)^{1/3} \text{ см}^{-1} . \quad (15.80)$$

Для численной оценки рассмотрим модель инфляции с большим полем и квадратичным потенциалом инфлатона. Для оценки снизу будем считать, что константы связи инфлатона с другими частицами малы, и распад его осцилляций происходит так, как описано в конце раздела 15.1. Минимальное значение H_{gen} соответствует генерации гравитационных волн непосредственно перед началом горячей стадии, $H_{gen} = \sqrt{4g_*\pi^3/45} T_{reh}^2/M_{Pl}$. В качестве значения T_{reh} выберем оценку (15.7). В этих предположениях получим $q_0 \sim 7 \cdot 10^{-10} \text{ см}^{-1}$. Соответствующая частота и длина волны равны

$$\omega_0 \sim 20 \text{ Гц} , \quad \lambda_0 = \frac{2\pi}{q_0} \sim 10^5 \text{ км} . \quad (15.81)$$

Видно, что в эпоху разогрева генерируются гравитационные волны сравнительно высокой частоты. В моделях с более быстрым распадом инфлатона частоты генерируемых гравитационных волн на несколько порядков выше.

Поиск высокочастотных гравитационных волн ведётся наземными детекторами — лазерными интерферометрами. Например, область частот гравитационных волн, к которым наиболее чувствительны детекторы LIGO и Virgo, составляет около 10^2 Гц, см. рис. 13.3. Учитывая грубость сделанной оценки, можно заключить, что область частот гравитационных волн, генерируемых в эпоху разогрева, может оказаться доступной для гравитационно-волновых детекторов.

Для оценки современной амплитуды гравитационных волн h_0 учтём, что после генерации амплитуда падает как a^{-1} , см. раздел 3.2.2, так что $h_0 = (a_{gen}/a_0)h_{gen}$. В тех же предположениях, что и раньше, получим из (15.79), что $h_0 \equiv \Delta_{T,0} \simeq 0.6 \cdot 10^{-21} h_{gen}$.

Соответствующее значение вклада логарифмического интервала мод гравитационных волн в современную плотность энергии Вселенной $\Omega_{GW,log}$, оцененное с помощью (13.70), составляет

$$\Omega_{GW,log} = \frac{h_0^2}{12} \frac{q_0^2}{H_0^2} \simeq 2.5 \cdot 10^{-6} h_{gen}^2.$$

Наиболее оптимистическая оценка получается, если считать, что на всех пространственных масштабах вплоть до текущего горизонта $\delta\rho/\rho \sim 1$, так что $h_{gen} \sim 1$. Гравитационные волны с такими начальными амплитудами доступны для исследования на современных и проектируемых интерферометрах, см. рис. 13.3. Отметим, однако, что приведённая оценка амплитуды является завышенной; в реалистических моделях амплитуды гравитационных волн получаются заметно меньшими, а их частоты — заметно большими [108, 109] по сравнению с оценкой (15.81).

Глава 16

*Сценарии с коллапсом и отскоком

Мы видели в предыдущих Главах, что теория инфляции и пост-инфляционного разогрева успешно решает все проблемы, относящиеся к начальным данным эпохи горячего Большого взрыва. Тем не менее, вполне законна постановка вопроса о том, не могла ли горячей стадии предшествовать какая-то иная, не инфляционная стадия эволюции Вселенной. Одна из логических возможностей здесь состоит в том, что расширению Вселенной предшествовал её коллапс, а при достижении достаточно большой плотности энергии произошёл “отскок” — смена сжатия расширением. Рассмотрим вкратце эту возможность, имея в виду обсудить как условия, при которых такой отскок возможен, так и вопрос о том, в какой степени сценарий с отскоком решает проблемы начальных данных эпохи горячего Большого взрыва.

Прежде всего, в рамках классической общей теории относительности смена сжатия расширением требует существования материи с весьма необычными свойствами. Комбинируя основные уравнения эволюции однородной и изотропной Вселенной (уравнения (I.3.7) и (I.3.14)), получим для Вселенной без пространственной кривизны¹

$$\dot{H} \equiv \frac{\ddot{a}}{a} - \frac{\dot{a}^2}{a^2} = -4\pi G (\rho + p) .$$

В эпоху смены сжатия расширением параметр Хаббла *растёт* от отрицательных значений к положительным, так что $\dot{H} > 0$. Это возможно только тогда, когда

$$p < -\rho , \tag{16.1}$$

причём в силу уравнения Фридмана $\rho > 0$. Известные нам виды материи, включая скалярные и векторные поля со стандартными лагранжианами, условию (16.1) не удовлетворяют. Гипотетическую материю со свойством (16.1) называют фантомной (употребляют также термин *фантомная энергия*, *phantom energy*). Построение самосогласованных теоретико-полевых моделей с фантомными свойствами представляет собой весьма нетривиальную задачу.

Другая возможность состоит в том, что отскок обусловлен сугубо квантовыми процессами, не описываемыми в рамках классической общей теории относительности. Такая возможность обсуждается, например, в рамках сценария пред-Взрыва (*pre-Big Bang scenario*), см. [110]. Трудность здесь состоит в том, что квантовая теория гравитации или теория, заменяющая её (например, теория суперструн), не

¹Здесь мы не ограничиваем общности рассмотрения: при высоких плотностях энергии вклад пространственной кривизны в уравнения (I.3.7) и (I.3.14) пренебрежимо мал при реалистических значениях космологических параметров.

развиты ещё до такой степени, чтобы ответить на вопрос, возможен ли отскок в квантовом режиме, и если возможен, то каково состояние Вселенной после выхода на режим классического расширения.

Простая возможность удовлетворить условию (16.1) состоит во введении скалярного поля ϕ с отрицательным кинетическим членом в лагранжиане,

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}g^{\mu\nu}\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi - V(\phi).$$

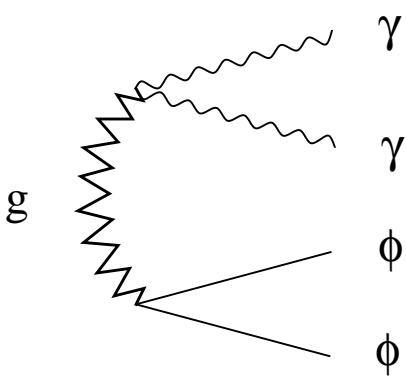


Рис. 16.1: Процесс “вакуум $\rightarrow \phi\phi\gamma\gamma$ ” в модели с духом ϕ .

В случае пространственно-однородного поля плотность энергии и давление в такой модели равны (ср. с (12.6), (12.7))

$$\rho = -\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V(\phi), \quad p = -\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - V(\phi),$$

так что неравенство (16.1) действительно выполняется. Однако такая модель неприемлема, поскольку кванты поля ϕ имеют *отрицательную энергию*², притом неограниченную снизу: при больших импульсах \mathbf{q} энергия ϕ -частицы равна $E = -|\mathbf{q}|$. Это приводит к неустойчивости вакуума относительно рождения ϕ -частиц и обычных частиц за счёт обмена, например, гравитоном, как изображено на рис. 16.1. В теориях с положительной энергией всех частиц такие процессы запрещены законом сохранения энергии, а в рассматриваемой модели этого запрета нет. В Лоренц-инвариантной теории данная неустойчивость носит катастрофический характер, поскольку разрешены все процессы, отличающиеся друг от друга лоренцевыми бустами, и фазовый объём неограниченно велик. Единственная (пока?) известная возможность избежать катастрофической неустойчивости вакуума в теории с фантомом состоит в спонтанном нарушении Лоренц-инвариантности (см., например, работы [111, 112]); на этом пути удаётся построить примеры космологических моделей с отскоком [113, 114, 115].

В модели с отскоком проблема горизонта и проблема однородности, которые мы обсуждали в разделе 11.1.1, представляют собой две разные проблемы. Если процесс сжатия происходил в течение достаточно долгого, а тем более бесконечного времени, то наблюдаемая область Вселенной вполне может быть причинно-связанной; в этом смысле проблема горизонта находит своё решение. С другой стороны, если Вселенная в далёком прошлом, до отскока, была неоднородной, то она, вообще говоря, останется неоднородной и после отскока. Таким образом, проблема однородности в модели с отскоком остаётся, она лишь переносится назад во времени, на стадию сжатия.

▷ **Задача 1.** Пусть при $t < 0$ Вселенная сжималась по закону $a(t) \propto |t - t_*|^\alpha$, $t_* > 0$, $\alpha > 0$, а начиная с момента $t = 0$ она расширялась так же, как в теории горячего Большого взрыва. При каких значениях t современный размер светового конуса, начинающегося в прошлом в момент t , превышает размер наблюдаемой части Вселенной (понимаемый как современный размер сферы последнего рассеяния фотонов)?

Проблема плоскостности хотя и не решается полностью в модели с отскоком, но перестаёт быть столь острой, как в теории горячего Большого взрыва с начальной сингулярностью (понимаемой в смысле начала раздела 11.1). Проведя рассуждения раздела 11.1.2 для стадии коллапса, нетрудно убедиться, что относительный вклад

²Поля такого типа называют *дұхами* (*ghosts*).

пространственной кривизны в уравнение Фридмана уменьшается в процессе сжатия Вселенной. Поэтому неравенство типа (11.10) удовлетворяется автоматически в предположении, что пространственная кривизна если и была существенна в коллапсирующей Вселенной, то очень задолго до остановки коллапса. Таким образом, “геометрические” проблемы разделов 11.1.1 и 11.1.2 по-существу сводятся к предположению о том, что Вселенная в процессе сжатия проходила стадию, аналогичную современной.

▷ **Задача 2.** Показать, что в случае доминирования материи с уравнением состояния $p = w\rho$ условием уменьшения $\Omega_{curv}(t)$ в процессе сжатия является $w > -1/3$.

Проблема энтропии в модели с отскоком решается, если существует механизм распада фантомной материи, доминирующей на стадии отскока, в обычные частицы: фантомная материя почти наверняка имеет низкую или нулевую энтропию (по крайней мере так обстоит дело в известных моделях), а в результате её распада образуется горячий газ частиц. Такое решение проблемы энтропии в принципе аналогично инфляционному.

Ещё более привлекательной возможностью является представление о пульсирующей (циклической) Вселенной. В таком сценарии предполагается, что Вселенная или её часть многократно проходит периоды расширения, сменяющегося сжатием, последующим отскоком и вновь расширением. В такой картине мы находимся на одном из таких циклов. Однородность и пространственная плоскость наблюдаемой Вселенной может тогда быть связана с доминированием тёмной энергии на поздних этапах циклов — начало такого этапа имеет место сейчас.

Генерация первичных космологических возмущений в обсуждаемых моделях представляет собой трудную проблему: в отличие от инфляционных моделей, близкий к плоскому спектр скалярных возмущений в них простым образом не получается (см. по этому поводу задачу 8). Некоторый прогресс в решении этого вопроса наметился лишь сравнительно недавно, см. обсуждение в работах [116, 115, 117, 118].

В рассматриваемых моделях имеется специфическая для них проблема, связанная с локальной *анизотропией* в коллапсирующей Вселенной. Известно, что если материя во Вселенной характеризуется уравнением состояния $p < \rho$, то коллапс на последних стадиях происходит локально-анизотропным и хаотическим образом. Это — результат теории Белинского–Лифшица–Халатникова, подробности см. в [119]. В общих чертах ситуация выглядит следующим образом. В течение достаточно больших промежутков времени эволюция *локальной области* Вселенной адекватно описывается однородной, но анизотропной метрикой,

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t) \cdot \sum_{a=1}^3 e^{2\beta_a(t)} e_i^{(a)} e_j^{(a)} dx^i dx^j , \quad (16.2)$$

где $e_i^{(a)}$ — три линейно независимых единичных вектора, которые не зависят от времени и, вообще говоря, не ортогональны друг другу. Функция $a(t)$ выбрана так, что

$$\sum_a \beta_a = 0 ; \quad (16.3)$$

иначе говоря, $\det g_{ij} = a^6$. Для описания эволюции в указанные промежутки времени неортогональность векторов $e_i^{(a)}$ можно пренебречь, и уравнения Эйнштейна

приводят к простой системе:

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{1}{6} \sum_a \dot{\beta}_a^2 + \frac{8\pi}{3} G\rho, \quad (16.4)$$

$$\ddot{\beta}_a + 3\frac{\dot{a}}{a}\dot{\beta}_a = 0. \quad (16.5)$$

▷ Задача 3. Показать, что в случае метрики вида (16.2) и векторов, удовлетворяющих соотношениям ортогональности $\sum_a e_i^{(a)} e_j^{(a)} = \delta_{ij}$, $\sum_i e_i^{(a)} e_i^{(b)} = \delta^{ab}$, уравнения Эйнштейна сводятся к уравнениям (16.4), (16.5).

Уравнение (16.5) даёт

$$\dot{\beta}_a = \frac{d_a}{a^3}, \quad (16.6)$$

причём в силу (16.3) константы d_a удовлетворяют соотношению $\sum_a d_a = 0$. Теперь уравнение (16.4) приобретает вид

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{1}{6a^6} \sum_a d_a^2 + \frac{8\pi}{3} G\rho. \quad (16.7)$$

Из этого уравнения, в частности, следует, что темп общего сжатия (уменьшения величины $\det g_{ij}$) определяется при малых a локальной анизотропией, а не материей, если выполнено условие $p < \rho$. На поздних этапах коллапса можно в этом случае положить $\rho = 0$, при этом система (16.6), (16.7) имеет своим решением метрику Казнера, для которой

$$\begin{aligned} a(t) &= |t|^{1/3}, & \beta_a &= d_a \ln |t| \\ \sum_a d_a &= 0, & \sum_a d_a^2 &= \frac{2}{3}. \end{aligned} \quad (16.8)$$

В случае неортогональных векторов $e_i^{(a)}$ рассмотренный режим продолжается в течение конечного времени, после чего значения величин d_a меняются. Меняются и направления векторов $e_i^{(a)}$. В пределе $t \rightarrow 0$ такая смена происходит бесконечное число раз, что соответствует хаотическому анизотропному коллапсу.

В описанной картине влияние материи на эволюцию Вселенной пренебрежимо на поздних стадиях коллапса. Поэтому обеспечить смену сжатия расширением проблематично. Кроме того, даже если отскок и происходит, Вселенная перед отскоком является сильно неоднородной: описанные процессы происходят независимо в разных областях хаббловского размера, и в силу хаотической эволюции метрических коэффициентов последние сильно различаются в разных областях. Такая картина сохраняется и после отскока, по крайней мере если отскок происходит в режиме классической эволюции. Сильная неоднородность Вселенной после отскока никак не согласуется с необходимой малостью первичных космологических возмущений. Чтобы решить эту проблему, приходится вводить в рассмотрение материю со сверхжёстким уравнением состояния, $p = w\rho$, $w > 1$. Плотность энергии пропорциональна $\rho \propto a^{-3(1+w)}$ (см. (I.3.39)), и при $w > 1$ она растёт с уменьшением a быстрее, чем a^{-6} . В такой ситуации при коллапсе доминирует второе слагаемое в (16.7). Масштабный фактор ведёт себя как

$$a(t) \propto |t|^\alpha, \quad t < 0, \quad (16.9)$$

с

$$\alpha = \frac{2}{3(1+w)} < \frac{1}{3}. \quad (16.10)$$

Из (16.6) следует, что величины β_a стремятся к константам при $t \rightarrow 0$. Если Вселенная на ранних стадиях коллапса была близка к однородной, а анизотропия — не слишком большой, то в процессе коллапса Вселенная становится всё более и более однородной, см. подробности в работе [120].

В модели со сверхжёстким уравнением состояния, реализующимся на этапе сжатия, возмущения метрики не растут на этом этапе. Поэтому имеется возможность рассмотреть генерацию космологических возмущений в процессе сжатия, и при этом можно ограничиться линейной теорией возмущений. Проведём это рассмотрение на примере тензорных возмущений. В случае фона (16.9) уравнение для тензорных возмущений за горизонтом имеет вид (ср. с разделом 3.2)

$$\ddot{h} + \frac{3\alpha}{t}\dot{h} = 0,$$

где мы опустили индекс, относящийся к поляризации. Одно из решений этого уравнения постоянно во времени, а другое ведёт себя как $|t|^{1-3\alpha}$. В обычных случаях, когда $p < \rho$ и $\alpha > 1/3$, второе решение растёт при сжатии; этому как раз и соответствует обсуждавшийся выше рост неоднородности и анизотропии при коллапсе (в расширяющейся Вселенной это была бы падающая мода). Для сверхжёсткой материи с $\alpha < 1/3$ данное решение *убывает* при сжатии, и доминирующей под горизонтом является константная мода. Это — общее свойство Вселенной, заполненной сверхжёсткой материей с $p > \rho$; отсутствия зависимости параметра уравнения состояния w от времени на самом деле не требуется.

▷ *Задача 4. Доказать последнее утверждение.*

В случае сверхжёсткой материи эволюция тензорных возмущений при сжатии в целом аналогична их эволюции в инфляционной Вселенной: моды возмущений сначала находятся под горизонтом, а затем выходят за горизонт и замораживаются. Для моды с конформным импульсом k это происходит в момент времени t_k , когда

$$k = a(t_k)H(t_k). \quad (16.11)$$

Предполагая, что на ранних стадиях коллапса гравитационных волн во Вселенной не было, и повторяя анализ раздела 13.3, получим спектр тензорных возмущений после выхода за горизонт:

$$\mathcal{P}_T(k) = \frac{16c}{\pi} \frac{H^2(t_k)}{M_{Pl}^2}, \quad (16.12)$$

где константа c — порядка единицы (она зависит от вида функции $a(t)$ при $t \approx t_k$). Коротковолновые моды выходят за горизонт позже длинноволновых, параметр Хаббла в это время больше, больше и амплитуда тензорных возмущений за горизонтом. Это приводит к положительному значению спектрального индекса n_T . В случае сжатия по степенному закону (16.9) имеем $|H| \propto |t|^{-1}$, $a \propto |H|^{-\alpha}$, и из (16.11) получаем $|H(t_k)| \propto k^{1/(1-\alpha)}$. Это даёт $\mathcal{P}_T \propto k^{2/(1-\alpha)}$, то есть

$$n_T = \frac{2}{1-\alpha} > 0.$$

Таким образом, характерным предсказанием рассматриваемого класса моделей является синий спектр тензорных возмущений, в полной противоположности инфляции. Отметим, что при таком механизме генерации амплитуды реликтовых гравитационных волн в диапазонах, доступных экспериментальному изучению, слишком малы для их обнаружения.

- ▷ *Задача 5.* Оценить максимальное допустимое значение параметра Хаббла в момент отскока, приняв во внимание, что плотность энергии гравитационных волн в эпоху первичного нуклеосинтеза не должна превышать плотности энергии нейтрино одного типа. Считать, что Вселенная коллапсирует по степенному закону (16.9), а отскок с переходом на горячую стадию происходит мгновенно.
- ▷ *Задача 6.* В условиях предыдущей задачи оценить амплитуды реликтовых гравитационных волн с современными длинами порядка 1 м, 10^3 км (доступны изучению наземными детекторами, чувствительность к амплитуде порядка 10^{-20} и 10^{-22} , соответственно) и 10^8 км (проекты детекторов в космосе, ожидаемая чувствительность порядка 10^{-23}), см. рис. 13.3.

Примером материи с эффективным сверхжёстким уравнением состояния служит скалярное поле с отрицательным экспоненциальным потенциалом

$$V(\phi) = -V_0 e^{\phi/M}, \quad (16.13)$$

где V_0 и M — положительные параметры соответствующей размерности. Уравнение скалярного поля и уравнение Фридмана для Вселенной, заполненной однородным полем $\phi(t)$, имеют решение вида

$$a(t) = |t|^\alpha, \quad \phi(t) = \text{const} - 2M \ln |t|, \quad V[\phi(t)] = -\frac{2M^2(1-3\alpha)}{t^2}, \quad (16.14)$$

при этом

$$\alpha = 16\pi \frac{M^2}{M_{Pl}^2}. \quad (16.15)$$

Это решение в случае коллапса является аттрактором. В соответствии с (16.10) и (16.15) при выборе $M \ll M_{Pl}$ эффективное уравнение состояния действительно является предельно жёстким, $w \gg 1$. Отметим, что плотность энергии держится положительной и растёт при коллапсе,

$$\rho = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V(\phi) = \frac{6M^2\alpha}{t^2}.$$

Это оставляет возможность того, что в конце стадии коллапса поле ϕ “выныривает” из отрицательной потенциальной ямы, а уравнение состояния меняется так, что начинает выполняться условие (16.1) и коллапс сменяется расширением. Такого рода модели получили название *модели с экпирозисом (ekpyrotic models)*; они довольно широко обсуждаются в литературе.

- ▷ *Задача 7.* Показать, что (16.14) действительно является аттракторным решением уравнения скалярного поля и уравнения Фридмана на стадии коллапса.

▷ Задача 8. Предполагая, что возмущения скалярного поля находятся в вакуумном состоянии на ранних этапах коллапса, найти спектр скалярных возмущений в модели (16.13), генерируемый на стадии коллапса и аналогичный спектру (16.12). Показать, в частности, что спектральный индекс даётся формулой

$$n_s - 1 = \frac{2}{1 - \alpha},$$

то есть наклоны скалярного и тензорного спектров совпадают. Этот результат иллюстрирует сделанное выше утверждение о том, что близкий к плоскому спектр скалярных возмущений в моделях с отскоком получить непросто. Указание: Воспользоваться уравнением (13.52).

Приложение А

Точные решения для гравитирующей материи

А.1 Гравитационный коллапс в ньютоновой теории тяготения

В этом разделе в рамках ньютоновой теории мы обсудим точное решение, описывающее гравитационный коллапс сферически-симметричного тела, состоящего из среды с нулевым давлением — “пыли”. Будем считать для определённости, что в начальный момент среда покоятся и характеризуется некоторым сферически симметричным распределением плотности массы,

$$t = 0 : \quad \mathbf{v} = 0, \quad \rho(t = 0, \mathbf{x}) = \rho_i(r). \quad (\text{A.1})$$

В этом случае дальнейшее движение частиц жидкости является радиальным: сферическая симметрия сохраняется в течение всего процесса коллапса. С учётом сферической симметрии система уравнений (1.1), (1.2), (1.3) переписывается в виде

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) = 4\pi G \rho, \quad (\text{A.2a})$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 v \rho) = 0, \quad (\text{A.2b})$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{\partial \phi}{\partial r} = 0, \quad (\text{A.2c})$$

где v — радиальная скорость жидкости.

Введём вспомогательную переменную

$$m(t, r) = r^2 \frac{\partial \phi}{\partial r} \quad (\text{A.3})$$

В соответствии с уравнением (A.2a) её можно представить в виде

$$m(t, r) = 4\pi G \int_0^r \rho(t, r') r'^2 dr'. \quad (\text{A.4})$$

Отсюда видно, что переменная $m(t, r)$ пропорциональна массе вещества в шаре радиуса r в момент времени t . Выразим через $m(t, r)$ градиент гравитационного потенциала в (A.2). Тогда из уравнений (A.2a) и (A.2b) получим

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial m}{\partial t} + v \frac{\partial m}{\partial r} \right) = 0. \quad (\text{A.5})$$

Из (A.5) следует, что выражение, стоящее в скобках, не зависит от r . На самом деле оно равно нулю. Действительно, считая что пылевой шар имеет конечный размер, при $r \rightarrow \infty$ будем иметь $\partial m / \partial r = 0$ и $\partial m / \partial t = 0$, поскольку $m(r = \infty)$ в ньютоновской механике есть полная масса шара, которая со временем не изменяется.

В результате приходим к системе двух уравнений на функции $v(t, r)$ и $m(t, r)$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{m}{r^2} &= 0, \\ \frac{\partial m}{\partial t} + v \frac{\partial m}{\partial r} &= 0. \end{aligned}$$

Её удобно решать, рассматривая функции v и m как новые переменные, а t и r — как функции от этих переменных, что приводит к следующей системе

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial r}{\partial m} - v \frac{\partial t}{\partial m} \right) \left(1 + \frac{m}{r^2} \frac{\partial t}{\partial v} \right) &= 0, \\ \frac{\partial r}{\partial v} - v \frac{\partial t}{\partial v} &= 0. \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

Обращение в нуль первого сомножителя в уравнении (A.6) при наших начальных условиях (A.1) невозможно, поэтому окончательно получаем

$$\frac{\partial t}{\partial v} = -\frac{r^2}{m}, \quad (\text{A.7a})$$

$$\frac{\partial}{\partial(v^2)} \left(\frac{1}{r} \right) = \frac{1}{2m}. \quad (\text{A.7b})$$

Решение уравнения (A.7b), согласующееся с начальными условиями (A.1), имеет вид

$$\frac{1}{r} = \frac{v^2}{2m} + C(m), \quad (\text{A.8})$$

где функция $C(m)$ определяется начальным распределением пыли. А именно, в начальный момент скорость равна нулю, поэтому $r = [C(m)]^{-1}$, и из (A.4) имеем алгебраическое уравнение, определяющее $C(m)$:

$$m = 4\pi G \int_0^{[C(m)]^{-1}} \rho_i(r) r^2 dr. \quad (\text{A.9})$$

Решение уравнения (A.7a) удобно записать в терминах вспомогательной величины

$$\xi = -\frac{v}{\sqrt{2mC(m)}}, \quad (\text{A.10})$$

выбор знака здесь соответствует коллапсу: в этом случае $v < 0$ и $\xi > 0$. Решение уравнения (A.7a) имеет вид

$$t = \sqrt{\frac{2}{m}} \frac{1}{[C(m)]^{3/2}} \int_0^\xi \frac{d\xi'}{(\xi'^2 + 1)^2} = \frac{1}{(2m)^{1/2}[C(m)]^{3/2}} \left(\arctg \xi + \frac{\xi}{\xi^2 + 1} \right), \quad (\text{A.11})$$

при этом выражение для r выглядит совсем просто,

$$r = \frac{1}{C(m)(\xi^2 + 1)}. \quad (\text{A.12})$$

При известной $C(m)$ из последних двух формул можно найти функции $m(t, r)$ и $\xi(t, r)$, а затем с помощью (A.4) и (A.10) определить физические величины — плотность и скорость среды — как функции радиуса и времени.

Из соотношения (A.4) следует, что пределу $r \rightarrow 0$ соответствует $m \rightarrow 0$; при этом, как видно, например, из (A.9), $C(m) \rightarrow \infty$. Если $\rho_0 = \rho_i(r=0)$ — начальная плотность среды в центре шара, и начальная плотность убывает с радиусом, то вблизи $r = 0$ выполнено

$$C(m) = \left(\frac{4\pi G \rho_0}{3m} \right)^{1/3} \cdot [1 - \epsilon(m)] , \quad (\text{A.13})$$

где $\epsilon(m)$ — неотрицательная функция, растущая с ростом m начиная с нулевого значения при $m = 0$. Например, если начальный профиль плотности вблизи $r = 0$ имеет вид

$$\rho_i(r) = \rho_0 \cdot \left(1 - \frac{r^2}{r_0^2} \right) , \quad r \ll r_0 , \quad (\text{A.14})$$

то при малых m из (A.9) получим

$$\epsilon(m) = \frac{1}{5r_0^2} \left(\frac{3m}{4\pi G \rho_0} \right)^{2/3} , \quad m \ll \frac{4}{3}\pi r_0^3 G \rho_0 .$$

Решение (A.11), (A.12) справедливо лишь на конечном временнóм интервале. Действительно, предел $\xi \rightarrow \infty$ наступает при конечном времени $t(m)$. Из (A.11) и (A.13) видно, что наименьшее из этих времён соответствует $m = 0$ и равно

$$t_s = \min t(m) = \sqrt{\frac{3\pi}{32G\rho_0}} . \quad (\text{A.15})$$

Полученное решение нельзя продолжать на большие времена. Отметим, что время t_s по порядку величины равно времени свободного падения для шара с плотностью массы ρ_0 , см. раздел 1.1, в частности, задачу 2.

Физически невозможность продолжения решения в область $t > t_s$ означает, что при $t = t_s$ решение становится сингулярным. Поскольку минимум в (A.15) достигается при $m = 0$, сингулярность появляется в центре шара. Поведение решения вблизи центра в момент появления сингулярности нетрудно найти. Действительно, моменту времени t_s соответствует линия на плоскости (m, ξ) , на которой

$$\left[1 + \frac{3}{2}\epsilon(m) \right] \cdot \int_0^\xi \frac{d\xi'}{(\xi'^2 + 1)^2} = \frac{\pi}{4} .$$

Здесь мы ограничились областью малых m , которой в момент появления сингулярности соответствует область больших ξ . В явном виде связь между m и ξ выглядит как

$$\xi = \left[\frac{9\pi}{8}\epsilon(m) \right]^{-1/3} .$$

Соотношение (A.12) теперь превращается в алгебраическое уравнение для $m(r)$, которое, опять-таки при малых m , имеет вид

$$r = \left(\frac{3m}{4\pi G \rho_0} \right)^{1/3} \left[\frac{9\pi}{8}\epsilon(m) \right]^{2/3} .$$

Видно, что поведение $m(r)$ вблизи сингулярности зависит от начального распределения плотности вблизи центра шара, которое определяет вид функции $\epsilon(m)$. Для начального распределения (A.14) получим

$$m(r) = \frac{4\pi}{3} B^2 G \rho_0 r_0^3 \left(\frac{r}{r_0} \right)^{9/7},$$

где мы ввели численную константу $B = (40/9\pi)^{3/7}$. Соответствующие распределения плотности и скорости получаются из (A.4) и (A.10):

$$\rho(r) = \frac{3}{7} B^2 \rho_0 \cdot \left(\frac{r}{r_0} \right)^{-12/7}, \quad v(r) = -2Br_0 \sqrt{\frac{2\pi G \rho_0}{3}} \left(\frac{r}{r_0} \right)^{1/7}.$$

Отметим, что описанная сингулярность является интегрируемой: масса, сосредоточенная вблизи особенности, конечна, $M(R) = 4\pi \int_0^R \rho(r) r^2 dr \propto R^{9/7}$. При малых R эта масса меньше, чем масса чёрной дыры со шварцшильдовским радиусом R . Последняя равна $M_{BH}(R) = M_{Pl}^2 R / 2$ (см., например, [119]). Поэтому для данного начального распределения материи (A.14) чёрная дыра в момент появления сингулярности в ньютоновском приближении не образуется. Чтобы образовалась чёрная дыра, требуется взять более пологое начальное распределение плотности среды, например,

$$\tilde{\rho}(r) = \rho_0 \cdot (1 - (r^2/r_0^2)^n), \quad n \geq 2, \quad (\text{A.16})$$

поскольку в этом случае будем иметь

$$M(R) \propto R^{9/(3+4n)}. \quad (\text{A.17})$$

▷ *Задача 1. Провести исследование сингулярности для начального распределения (A.16) и получить зависимость (A.17), убедившись тем самым, что появление сингулярности в ньютоновой теории может соответствовать образованию чёрной дыры.*

A.2 Сферический коллапс пылевидной материи в общей теории относительности

Коллапс сферически симметричной пылевой конфигурации можно изучить аналитически и в рамках общей теории относительности (см. подробнее [119]). При этом удобно работать в сопутствующей системе отсчета, связанной с частицами среды, и в качестве временной координаты использовать собственное время этих частиц (такая система одновременно является синхронной). В этой системе отсчета метрика имеет вид

$$ds^2 = dt^2 - e^{\lambda(t,r)} dr^2 - R^2(t,r) \cdot (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2), \quad (\text{A.18})$$

при этом мировая линия частицы — это линия $r = \text{const}$, а $R(t,r)$ — это радиус сферы, на которой она находится в момент собственного времени t (в том смысле, что $4\pi R^2$ — площадь этой сферы). Не вполне тривиальным обстоятельством здесь служит тот факт, что как скорость частиц $u^i = \dot{x}^i$, так и смешанная компонента метрики g_{0r} могут быть выбраны равными нулю. Он связан с тем, что частицы среды не испытывают никаких сил, кроме гравитационных, то есть они движутся по геодезическим.

▷ Задача 2. Показать, что в обсуждаемой ситуации метрику всегда можно выбрать в виде (A.18). Указание: использовать тот факт, что замена координат $t \rightarrow t + \tau(r)$, $r \rightarrow r$, где $\tau(r)$ — произвольная функция радиуса, не выводит из класса сопутствующих систем отсчёта.

В этом разделе, в отличие от основных частей книги, штрих будет обозначать производную по r . Точкой, как обычно, обозначаем производную по времени t .

В сопутствующей системе единственной ненулевой компонентой тензора энергии-импульса является $T_{00} = \rho$. Не сводящиеся друг к другу компоненты уравнений Эйнштейна имеют вид

$$(00) \times R^2 : \quad R\dot{R}\dot{\lambda} + \dot{R}^2 + 1 - e^{-\lambda} \left(2RR'' + (R')^2 - RR'\lambda' \right) = 8\pi G\rho R^2 \quad (\text{A.19})$$

$$(0r) \times R : \quad \dot{\lambda}R' - 2\dot{R}' = 0 \quad (\text{A.20})$$

$$(rr) \times R^2 : \quad (R')^2 - e^\lambda \left(2R\ddot{R} + \dot{R}^2 + 1 \right) = 0 \quad (\text{A.21})$$

▷ Задача 3. Показать, что оставшиеся уравнения Эйнштейна являются следствиями выписанных уравнений.

Уравнение (A.20) можно проинтегрировать по времени; результат интегрирования удобно представить в виде

$$e^\lambda (1 + f(r)) = (R')^2 , \quad (\text{A.22})$$

где $f(r)$ — произвольная функция радиальной координаты, удовлетворяющая очевидному условию $f(r) > -1$. Подставив (A.22) в уравнение (A.21), получим

$$\dot{R}^2 + 2R\ddot{R} = f(r) . \quad (\text{A.23})$$

Умножив левую и правую части уравнения (A.23) на \dot{R} , найдём его первый интеграл

$$R\dot{R}^2 = Rf(r) + g(r) , \quad (\text{A.24})$$

где мы ввели ещё одну произвольную функцию $g(r)$. Из требования $R(r=0) = 0$ следует, что $g(0) = 0$. Мы будем считать, что $g(r) \geq 0$; необходимость такого ограничения будет видна в дальнейшем, см. (A.30). Уравнение (A.24) можно проинтегрировать, при этом решение удобно представить в параметрическом виде:

$$\begin{cases} R = \frac{g}{2f} (\operatorname{ch} \eta - 1) \\ t_0(r) - t = \frac{g}{2f^{3/2}} (\operatorname{sh} \eta - \eta) \\ f > 0 \end{cases} \quad (\text{A.25})$$

или

$$\begin{cases} R = \frac{g}{2|f|} (1 - \cos \eta) \\ t_0(r) - t = \frac{g}{2|f|^{3/2}} (\eta - \sin \eta) \\ f < 0 \end{cases} \quad (\text{A.26})$$

или

$$\begin{cases} R = \left(\frac{9g}{4}\right)^{1/3} (t_0(r) - t)^{2/3} \\ f = 0 \end{cases} \quad (\text{A.27})$$

где $t_0(r)$ — произвольная функция радиальной координаты. Разумеется, уравнение (A.24) имеет и решения, отличающиеся знаком времени. С учётом (A.22) приведённые выражения дают решение для метрики пространства-времени. Отметим, что поскольку наш выбор метрики (A.18) допускает репараметризацию радиальной координаты $r = r(\tilde{r})$, то из трёх введённых нами произвольных функций $f(r)$, $g(r)$, $t_0(r)$ лишь две являются физическими. Это согласуется с тем, что наиболее общее начальное распределение материи в сферически симметричном случае также задаётся лишь двумя функциями, зависящими от радиальной переменной: начальной плотностью и начальной радиальной скоростью. Также важным является то обстоятельство, что эволюция части облака внутри сферы радиуса r не зависит от начальных условий вне этой сферы.

Уравнение (A.19) определяет плотность энергии среды в терминах функций $f(r)$, $g(r)$, $t_0(r)$. Для получения простой формулы продифференцируем (A.22) по радиальной координате, выразим производную R'' и подставим её в уравнение (A.19), которое примет вид:

$$-f - R \frac{f'}{R'} + R \dot{R} \dot{\lambda} + \dot{R}^2 = 8\pi G \rho R^2. \quad (\text{A.28})$$

Дифференцируя (A.24) по радиальной координате, и используя уравнение (A.20), найдём

$$f' \cdot R = R' \left(R \dot{R} \dot{\lambda} + \frac{g}{R} \right) - g'. \quad (\text{A.29})$$

Подставив это выражение в (A.28) и выразив \dot{R} из уравнения (A.24), получим окончательно:

$$8\pi G \rho = \frac{g'}{R^2 R'} \quad (\text{A.29})$$

Решения (A.25), (A.26) и (A.27) применимы для описания как сжатия, так и расширения сферически симметричного облака. Рассмотрим сначала случай облака конечного размера r_0 в асимптотически плоском пространстве. В этом случае оправдан выбор знака времени, сделанный в (A.25). Параметр t , увеличиваясь, приближается к $t_0(r)$; при $t = t_0(r)$ центра $R = 0$ достигает вещества сопутствующей координатой r . Коллапс происходит при любой, сколь угодно малой массе облака M , для которой будем иметь из (A.29)

$$M = 4\pi \int_0^{R(t,r_0)} \rho R^2 dR = \frac{g(r_0)}{2G}. \quad (\text{A.30})$$

Тот факт, что шар коллапсирует при сколь угодно малой массе, обусловлен полным пренебрежением давления вещества.

В лидирующем порядке сингularityность при $t \rightarrow t_0(r)$ имеет вид

$$R = \left(\frac{9g}{4} \right)^{1/3} (t_0 - t)^{2/3}, \quad e^{\lambda/2} = \left(\frac{2g}{3} \right)^{1/3} \frac{t'_0}{\sqrt{1+f}} (t_0 - t)^{-1/3},$$

при этом в сопутствующей системе координат все радиальные расстояния стремятся к бесконечности, а дуговые — к нулю. Таким образом, объём тоже стремится к нулю, причём линейно, а плотность материи растёт как

$$\rho = \frac{1}{12\pi G} \frac{g'}{gt'_0(t_0 - t)}. \quad (\text{A.31})$$

В центре облака за счёт падения вещества (акреции) формируется и растёт чёрная дыра.

▷ *Задача 4. Найти момент образования горизонта. Показать, что полный коллапс под горизонт происходит при $R(t, r_0) = g(r_0)$.*

▷ *Задача 5. Найти решение внутренней задачи для коллапса однородного облака, состоящего из невзаимодействующих и первоначально покоявшихся частиц.*

Рассмотрим теперь ситуацию, более интересную с точки зрения космологии. А именно, будем считать, что пыль заполняет всё пространство, причём вдали от начала координат её плотность пространственно однородна, а вблизи начала координат имеется превышение плотности над фоном. Будем считать, что это превышение сначала невелико по амплитуде, и рассмотрим вопрос об эволюции такого сферически-симметричного возмущения однородной среды.

Прежде всего, обсудим однородное фоновое решение. Для этого введём вместо $R(r, t)$ переменную $A(r, t)$ и функции $q(r)$ и $\tilde{g}(r)$ соотношениями

$$R(r, t) = rA(r, t), \quad f(r) = -r^2q(r), \quad g(r) = r^3\tilde{g}(r).$$

Тогда уравнение (A.24) примет вид, напоминающий уравнение Фридмана для Вселенной с отличной от нуля пространственной кривизной:

$$\frac{\dot{A}^2}{A^2} = \frac{\tilde{g}(r)}{A^3} - \frac{q(r)}{A^2}. \quad (\text{A.31})$$

Для однородного решения $A = a(t)$ зависит только от времени, поэтому необходимо выбрать f и \tilde{g} не зависящими от r . Кроме того, случаю пространственно-плоской Вселенной соответствует $q = 0$, а значение \tilde{g} можно положить равным единице без потери общности. Тогда уравнение (A.31) имеет решением $A(t) = a(t) \propto t^{2/3}$, а из (A.22) и (A.29) получим

$$e^\lambda = a^2(t), \quad \frac{8\pi}{3}G\rho = \frac{4}{9t^2} = \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2,$$

как и должно быть для Вселенной, заполненной пылью. Отметим, что это решение получается из (A.27) при $t_0 = 0$ заменой $t \rightarrow -t$.

Рассмотрим теперь поведение возмущённой среды на малых временах, когда отклонения от фонового решения малы, и их можно рассматривать по теории возмущений. Для того, чтобы понять, какому выбору функций $q(r)$, $\tilde{g}(r)$ и $t_0(r)$ соответствует рассматриваемая ситуация, воспользуемся опять уравнением (A.31), в котором положим

$$A(r, t) = a(t)[1 + h(t, r)],$$

где h — малая амплитуда возмущения. Записав ещё $\tilde{g}(r) = 1 + \zeta(r)$, и считая $\zeta(r)$ и $q(r)$ малыми, получим линеаризованное уравнение (A.31):

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{1}{t}h = -\left(\frac{2}{3}\right)^{1/3} \frac{1}{2t^{1/3}}q(r) + \frac{1}{3t}\zeta(r)$$

У этого уравнения есть не зависящее от времени решение, $h = \zeta/3$. Это решение соответствует преобразованию координаты r , а потому интереса не представляет. В дальнейшем мы полагаем $\zeta = 0$. Решение однородного уравнения падает со временем, $h = c(r)/t$. Оно соответствует отличному от нуля $t_0(r)$. Поскольку такое решение формально сингулярно на ранних временах, оно описывает сильно неоднородную раннюю Вселенную, и поэтому также неинтересно (по терминологии раздела 3.2.1 это падающая мода). Интерес представляет решение, пропорциональное $q(r)$,

$$h = -\frac{3}{10} \left(\frac{2}{3}\right)^{1/3} \cdot q(r) \cdot t^{2/3}. \quad (\text{A.32})$$

Из (A.29) получаем, что относительное возмущение плотности равно

$$\frac{\delta\rho}{\rho} = -\frac{1}{r^2} (r^3 h)' \quad (\text{A.33a})$$

$$= \text{const} \cdot \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} [r^3 q(r)] \cdot t^{2/3}. \quad (\text{A.33b})$$

В согласии с результатами разделов 1.2 и 4.3 возмущения плотности растут как $t^{2/3} \propto a(t)$. Превышение плотности над фоном имеет место при $q > 0$, то есть $f < 0$; конечность контраста плотности при $r \rightarrow 0$ требует, чтобы функция $q(r)$ была положительна и имела малый, но конечный предел $q(0)$. Величина $q(0)$ характеризует начальную амплитуду возмущений. При $r \rightarrow \infty$ функция $q(r)$ должна стремиться к нулю в соответствии с предположением об асимптотической однородности Вселенной.

Таким образом, интересующее нас решение имеет вид (A.26) с $g = r^3$, $t_0 = 0$ и с противоположным знаком времени t , и для него

$$\begin{aligned} R &= \frac{r}{2q(r)} (1 - \cos \eta) \\ t &= \frac{1}{2q^{3/2}(r)} (\eta - \sin \eta) \end{aligned} \quad (\text{A.34})$$

При $\eta \rightarrow 0$ это решение переходит в описанное выше однородное решение. При конечных η частица среди сопутствующей координатой r постепенно отстает в своём движении от хаббловского потока (в данном случае — потока частиц на пространственной бесконечности) и при $\eta = \pi$ начинает двигаться назад к центру сгустка. В этот момент космологическое время равно

$$t = \frac{\pi}{2q^{3/2}(r)}. \quad (\text{A.35})$$

Отсюда видно, что раньше всего начинает коллапсировать центральная, наиболее плотная часть сгустка. Контраст плотности среды, начинающей испытывать коллапс, по порядку величины совпадает со средней плотностью,

$$[\rho(r) - \rho] \sim \rho, \quad (\text{A.36})$$

где ρ обозначает среднюю плотность, $\rho = \rho(r = \infty)$. Так же как в линейной теории, размер области, которая может испытывать коллапс в момент времени t , ограничен

хаббловским размером, $R \lesssim t$. Чтобы увидеть это, учтём, что $f(r) > -1$, то есть $r^2 q(r) < 1$. Поэтому в момент начала коллапса справедливо

$$\frac{R}{t} = \frac{2}{\pi} r \sqrt{q(r)} < \frac{2}{\pi},$$

откуда и следует сделанное утверждение.

В отсутствие других вкладов в плотность энергии вся область повышенной плотности в конце концов коллапсирует в точку. Однако разные частицы делают это в разное время. Частица с сопутствующей координатой r попадает в центр сгустка при $\eta = 2\pi$, то есть с момента остановки до окончания коллапса проходит промежуток времени, в точности равный (A.35). Весь коллапс происходит за время порядка одного хаббловского времени.

Отметим, что в используемой в этом разделе синхронной калибровке постоянная во времени часть контраста плотности $\delta\rho/\rho$ отсутствует, в то время как в конформной ньютоновской калибровке она есть и доминирует за горизонтом, см. (4.18). В синхронной калибровке имеется, однако, постоянная во времени часть в возмущении метрики, $dg_{rr}/g_{rr} \propto f(r)$, см. (A.22). Она и доминирует до тех пор, пока физический размер возмущения не станет меньше хаббловского размера.

- ▷ Задача 6. Убедиться, что постоянная во времени часть возмущения метрики доминирует на ранних временах над зависящей от времени частью, и что эти две части становятся сравнимыми по величине, когда физический размер возмущения становится порядка хаббловского размера, то есть при $a(t)r_0 \sim t$, где r_0 — характерный координатный размер возмущения.
Указание: анализ провести на уровне решения линеаризованных уравнений.

Случай однородного шара конечного координатного размера r_0 соответствует выбору $q(r) = q_0 = \text{const}$ при $r < r_0$ и $q(r) = q_0(r_0/r)^3$ при $r > r_0$. Именно при таком выборе контраст плотности (A.33b) не зависит от r внутри шара и равен нулю вне его. Из (A.34) следует, что в этом случае внутренность шара коллапсирует одновременно в момент времени $t = t_c = \pi/q_0^{3/2}$. Вычисленный в линеаризованной теории по формулам (A.33a) и (A.32) контраст плотности в этот момент равен

$$\delta_c \equiv \left(\frac{\delta\rho}{\rho} \right)_{lin} (t_c) \quad (\text{A.37a})$$

$$= \frac{3}{20} (12\pi)^{2/3} = 1.686 \quad (\text{A.37b})$$

Разумеется, эта величина непосредственного физического смысла не имеет, однако её использование иногда удобно, см. раздел 7.2. Отметим, что значение δ_c не зависит от размера шара и от времени окончания коллапса. Это утверждение, впрочем, справедливо только для Вселенной без тёмной энергии, заполненной пылевидной материей.

- ▷ Задача 7. Рассмотрим пылевой шар, распределение плотности в котором определяется функцией $q(r)$ вида

$$q(r) = \text{const} \cdot e^{-r/r_0}.$$

По аналогии с (A.37a) определим в этом случае величину δ_c как контраст плотности в точке $r = r_0$ вычисленный в линеаризованной теории в момент времени, когда элемент среды с $r = r_0$ достигнет сингулярности. Показать, что $\delta_c = \frac{1}{10} (12\pi)^{2/3} = 1.124$.

Рассмотрим в заключение, как модифицируются полученные выше результаты в ситуации, когда имеется положительная космологическая постоянная. В этом случае уравнение (A.21) модифицируется следующим образом:

$$(R')^2 - e^\lambda \left(2R\ddot{R} + \dot{R}^2 + 1 \right) = -8\pi G\rho_\Lambda e^\lambda , \quad (\text{A.38})$$

где $\rho_\Lambda = \text{const}$. Уравнение (A.20) остаётся неизменным. Модифицированное уравнение (A.19) нам не понадобится.

Формула (A.22) остаётся в силе, и поступая так же, как и раньше, вместо (A.31) мы получаем уравнение

$$\frac{\dot{A}^2}{A^2} = \frac{1}{A^3} - \frac{q(r)}{A^2} + \frac{8\pi G}{3}\rho_\Lambda ,$$

где мы сразу положили $\tilde{g} = 1$. Это уравнение уже не всегда имеет решение, соответствующее остановке расширения и последующему коллапсу. Правая его часть имеет минимум при $A = 3/(2q)$ и может стать равной нулю, только если выполнено неравенство $q^3 \geq 18\pi G\rho_\Lambda$. Считая, что функция $q(r)$ убывает с ростом r в интересной области значений r , получим отсюда для максимального физического размера области в момент остановки

$$R_{max} = \frac{3r}{2q} = \frac{3r\sqrt{q}}{2q^{3/2}} = \frac{r\sqrt{q}}{\sqrt{3}H_\Lambda} < \frac{1}{\sqrt{3}H_\Lambda} ,$$

где $H_\Lambda^2 = (8\pi/3)G\rho_\Lambda$ и мы воспользовались неравенством $r^2q < 1$. Таким образом, размер коллапсирующей области не может превышать горизонта де Ситтера Λ -доминированной стадии.

Приложение В

Вывод линеаризованных уравнений Эйнштейна

В этом Приложении мы опишем основные элементы вывода явных формул для линеаризованных уравнений Эйнштейна, а также ковариантных законов сохранения для космологических возмущений в секторах с различной спиральностью.

Для получения общего выражения для линеаризованного тензора Эйнштейна воспользуемся тем, что метрика $g_{\mu\nu} = a^2 \gamma_{\mu\nu} \equiv a^2(\eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu})$ и метрика $\gamma_{\mu\nu} \equiv (\eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu})$ связаны между собой конформным преобразованием типа (I.A.61) с $\varphi = \ln a$. Поэтому связь между тензорами Эйнштейна для них даётся формулой (I.A.64), то есть

$$G_{\mu\nu}(g) = G_{\mu\nu}(\gamma) - 2 \frac{\nabla_\mu \nabla_\nu a}{a} + 4 \frac{\partial_\mu a \partial_\nu a}{a^2} + \gamma_{\mu\nu} \gamma^{\lambda\rho} \left(2 \frac{\nabla_\lambda \nabla_\rho a}{a} - \frac{\partial_\lambda a \partial_\rho a}{a^2} \right), \quad (\text{B.1})$$

где ковариантное дифференцирование производится с метрикой $\gamma_{\mu\nu}$. Подняв у выражения в правой части (B.1) один индекс с помощью метрики $g^{\mu\nu} = a^{-2} \gamma^{\mu\nu}$, получим

$$G_\nu^\mu(g) = \frac{1}{a^2} \left[G_\nu^\mu(\gamma) - 2\gamma^{\mu\lambda} \frac{\nabla_\lambda \nabla_\nu a}{a} + 4\gamma^{\mu\lambda} \frac{\partial_\lambda a \partial_\nu a}{a^2} + \delta_\nu^\mu \gamma^{\lambda\rho} \left(2 \frac{\nabla_\lambda \nabla_\rho a}{a} - \frac{\partial_\lambda a \partial_\rho a}{a^2} \right) \right].$$

Воспользовавшись явной формулой для ковариантной производной и линеаризовав последнее выражение, мы приходим к следующему выражению для линеаризованного тензора Эйнштейна:

$$\begin{aligned} \delta G_\nu^\mu &= \frac{1}{a^2} \left[R_\nu^\mu(\gamma) + 2h^{\mu\lambda} \frac{\partial_\nu \partial_\lambda a}{a} - 4h^{\mu\lambda} \frac{\partial_\nu a \partial_\lambda a}{a^2} + 2\eta^{\mu\lambda} \gamma_{\lambda\nu}^\sigma \frac{\partial_\sigma a}{a} \right. \\ &\quad \left. - \delta_\nu^\mu \left(\frac{1}{2}R(\gamma) + 2h^{\lambda\rho} \frac{\partial_\lambda \partial_\rho a}{a} - h^{\lambda\rho} \frac{\partial_\lambda a \partial_\rho a}{a^2} + 2\eta^{\lambda\rho} \gamma_{\lambda\rho}^\sigma \frac{\partial_\sigma a}{a} \right) \right], \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

где $R_\nu^\mu(\gamma)$, $R(\gamma)$ и $\gamma_{\mu\nu}^\lambda$ — линеаризованные тензор Риччи, скаляр кривизны и символы Кристоффеля, вычисленные по метрике $\gamma_{\mu\nu}$.

Из общего вида символов Кристоффеля (I.A.23) следует линеаризованное выражение

$$\gamma_{\mu\nu}^\lambda = \frac{1}{2}(\partial_\mu h_\nu^\lambda + \partial_\nu h_\mu^\lambda - \partial^\lambda h_{\mu\nu}). \quad (\text{B.3})$$

Здесь и далее индексы поднимаются и опускаются с помощью метрики Минковского. Далее, в выражении (I.A.41) для тензора Риччи только первые два слагаемых

линейны по $h_{\mu\nu}$, так что в линейном порядке справедливо

$$R_\nu^\mu(\gamma) = \frac{1}{2}(\partial_\nu \partial_\lambda h^{\mu\lambda} + \partial^\mu \partial_\lambda h_\nu^\lambda - \partial_\lambda \partial^\lambda h_\nu^\mu - \partial^\mu \partial_\nu h_\lambda^\lambda) \quad (\text{B.4})$$

и

$$R(\gamma) = \partial_\mu \partial_\nu h^{\mu\nu} - \partial_\mu \partial^\mu h_\nu^\nu. \quad (\text{B.5})$$

Таким образом, все величины, входящие в (B.2), выписаны явно с учётом того, что

$$\partial_\mu a = \delta_{\mu 0} a' , \quad \partial_\mu \partial_\nu a = \delta_{\mu 0} \delta_{\nu 0} a''.$$

▷ Задача 1. Тензор Эйнштейна $(\bar{G}_\nu^\mu + \delta G_\nu^\mu)$ должен ковариантно преобразовываться при калибровочных преобразованиях (2.29) в линейном порядке по ξ^μ . Показать это непосредственным вычислением, используя выражение (B.2).

Наложим калибровку $h_{0i} = 0$ и выпишем входящие в (B.2) символы Кристоффеля с временным верхним индексом,

$$\gamma_{00}^0 = \frac{1}{2}h'_{00} , \quad \gamma_{0i}^0 = \frac{1}{2}\partial_i h_{00} , \quad \gamma_{ij}^0 = -\frac{1}{2}h'_{ij} , \quad (\text{B.6})$$

а также компоненты тензора Риччи

$$\begin{aligned} R_0^0(\gamma) &= \frac{1}{2}(h'' + \Delta h_{00}) , \\ R_i^0(\gamma) &= \frac{1}{2}(\partial_i h' - \partial_j h'_{ij}) , \\ R_j^i(\gamma) &= \frac{1}{2}(\partial_i \partial_k h_{jk} + \partial_j \partial_k h_{ik} + h''_{ij} - \Delta h_{ij} + \partial_i \partial_j h_{00} - \partial_i \partial_j h) , \end{aligned} \quad (\text{B.7})$$

и скаляр кривизны

$$R(\gamma) = h'' + \Delta h_{00} + \partial_i \partial_j h_{ij} - \Delta h . \quad (\text{B.8})$$

Здесь

$$h = h_{ii} ,$$

суммирование по пространственным (латинским) индексам ведётся с трёхмерной евклидовой метрикой, и $\Delta \equiv \partial_i \partial_i$. Подставляя эти выражения в (B.2), получим явные формулы для компонент тензора Эйнштейна:

$$a^2 \delta G_0^0 = -3h_{00} \left(\frac{a'}{a} \right)^2 - \frac{1}{2} \partial_i \partial_j h_{ij} + \frac{1}{2} \Delta h - \frac{a'}{a} h' , \quad (\text{B.9a})$$

$$a^2 \delta G_i^0 = \frac{1}{2} \partial_i h' - \frac{1}{2} \partial_j h'_{ij} + \frac{a'}{a} \partial_i h_{00} , \quad (\text{B.9b})$$

$$\begin{aligned} a^2 \delta G_j^i &= \frac{1}{2} \partial_i \partial_k h_{jk} + \frac{1}{2} \partial_j \partial_k h_{ik} + \frac{1}{2} h''_{ij} - \frac{1}{2} \Delta h_{ij} + \frac{1}{2} \partial_i \partial_j h_{00} - \frac{1}{2} \partial_i \partial_j h + \frac{a'}{a} h'_{ij} \\ &- \delta_j^i \left[\frac{1}{2} h'' + \frac{1}{2} \Delta h_{00} + \frac{1}{2} \partial_l \partial_k h_{lk} - \frac{1}{2} \Delta h + 2 \frac{a''}{a} h_{00} - \left(\frac{a'}{a} \right)^2 h_{00} + \frac{a'}{a} (h'_{00} + h') \right] \end{aligned} \quad (\text{B.9c})$$

В этом Приложении мы не будем накладывать условия конформной ньютоновой калибровки, но пока продолжим использовать калибровку $h_{0i} = 0$. Возмущенный тензор энергии-импульса материи в общем случае можно записать в виде

$$\delta T_0^0 = \delta\rho \quad (\text{B.10a})$$

$$\delta T_i^0 = -(\rho + p)v_i \quad (\text{B.10b})$$

$$T_j^i = -\delta_j^i \cdot p - \Pi_j^i, \quad (\text{B.10c})$$

где Π_{ij} — симметричный бесследовый тензор анизотропных напряжений, $\Pi_{ii} = 0$, при этом по определению $\Pi_j^i = \Pi_{ij}$. В случае идеальной жидкости имеем $\Pi_{ij} = 0$. В этом случае нетрудно найти в явном виде линеаризованные законы ковариантного сохранения тензора энергии-импульса. Запишем по определению

$$\nabla_\mu T_\nu^\mu = \partial_\mu T_\nu^\mu + \Gamma_{\mu\lambda}^\mu T_\nu^\lambda - \Gamma_{\mu\nu}^\lambda T_\lambda^\mu = 0, \quad (\text{B.11})$$

где символы Кристоффеля строятся по метрике $a^2(\eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu})$. Явное вычисление в калибровке $h_{0i} = 0$ даёт для них

$$\Gamma_{00}^0 = \frac{a'}{a} + \frac{1}{2}h'_{00}, \quad \Gamma_{0i}^0 = \Gamma_{00}^i = \frac{1}{2}\partial_i h_{00}, \quad (\text{B.12a})$$

$$\Gamma_{0j}^i = \frac{a'}{a}\delta_{ij} - \frac{1}{2}h'_{ij}, \quad (\text{B.12b})$$

$$\Gamma_{ij}^0 = \frac{a'}{a}(1 - h_{00})\delta_{ij} - \frac{a'}{a}h_{ij} - \frac{1}{2}h'_{ij}, \quad (\text{B.12c})$$

$$\Gamma_{jk}^i = -\frac{1}{2}(\partial_j h_{ik} + \partial_k h_{ij} - \partial_i h_{jk}). \quad (\text{B.12d})$$

Здесь включены члены нулевого и первого порядка малости. Подставляя все эти выражения в (B.11), мы получаем (2.38), (2.39).

В общем случае удобно выписывать линеаризованные уравнения Эйнштейна и ковариантные законы сохранения в секторах с определённой спиральностью. Разложение по спиральностям для скорости и тензора анизотропных напряжений имеет вид

$$v_i = V_i^T + \partial_i v \quad (\text{B.13a})$$

$$\Pi_{ij} = \Pi_{ij}^{TT} + \partial_i \Pi_j^T + \partial_j \Pi_i^T + (p + \rho) \left(-\frac{1}{2}\delta_{ij} + \frac{3}{2}\frac{\partial_i \partial_j}{\Delta} \right) \pi. \quad (\text{B.13b})$$

Здесь v и π — потенциалы скоростей и анизотропных напряжений, соответственно, множитель $(\rho + p)$ выделен из соображений удобства. В дальнейшем мы используем следующий вид метрики (см. (2.46)):

$$h_{00} = 2\Phi, \quad h_{0i} = 0, \quad (\text{B.14a})$$

$$h_{ij} = -2\Psi\delta_{ij} + 2\partial_i \partial_j E + (\partial_i W_j^T + \partial_j W_i^T) + h_{ij}^{TT}. \quad (\text{B.14b})$$

В секторе с двойной спиральностью имеем $h_{00} = 0$, $h_{ij} = h_{ij}^{TT}$, $T_0^0 = T_i^0 = 0$, $T_{ij} = -\Pi_{ij}^{TT}$. Подставляя эти выражения в линеаризованные уравнения Эйнштейна, приходим к уравнению

$$\partial_\eta^2 h_{ij}^{TT} + 2\frac{a'}{a}\partial_\eta h_{ij}^{TT} - \Delta h_{ij}^{TT} = -16\pi G a^2 \cdot \Pi_{ij}^{TT}. \quad (\text{B.15})$$

В тензорном секторе ковариантные законы сохранения выполняются автоматически. Здесь и всюду в дальнейшем для многокомпонентных сред в правых частях линеаризованных уравнений Эйнштейна фигурирует сумма соответствующих выражений по всем компонентам.

Для векторных мод 00-компоненты уравнений Эйнштейна удовлетворяется тождественно. Остальные уравнения Эйнштейна в векторном секторе имеют вид

$$0i : \quad \partial_\eta \Delta W_i^T = 16\pi G a^2 (\rho + p) V_i^T \quad (B.16a)$$

$$ij : \quad \partial_\eta^2 W_i^T + 2\frac{a'}{a} \partial_\eta W_i^T = -16\pi G a^2 (\rho + p) \Pi_i^T , \quad (B.16b)$$

а из ковариантных законов сохранения нетривиальным является один:

$$\partial_\eta [(\rho + p) V_i^T] + 4\frac{a'}{a} (\rho + p) V_i^T + \Delta \Pi_i^T = 0 . \quad (B.17)$$

В случае идеальной жидкости выполняется $\Pi_i^T = 0$ и мы приходим к уравнениям, выписанным в разделе 2.3.2.

▷ *Задача 2.* Показать, что уравнение (B.16b) является следствием уравнений (B.16a) и (B.17).

Обратимся теперь к скалярному сектору. Подстановка соответствующей части выражений (B.14) в (B.9c) приводит к следующей форме ij -компонент тензора Эйнштейна:

$$\begin{aligned} \delta G_j^i = \frac{1}{a^2} & \left\{ \partial_i \partial_j \left[\Psi + \Phi + E'' + 2\frac{a'}{a} E' \right] \right. \\ & \left. + \delta_{ij} \left[2\Psi'' - \Delta\Psi - \Delta\Phi - \Delta E'' + \frac{a'}{a} (4\Psi' - 2\Phi' - 2\Delta E') - 4\frac{a''}{a} \Phi + 2\frac{a'^2}{a^2} \Phi \right] \right\} \end{aligned}$$

Используем (B.10) и найдём след ij -уравнений Эйнштейна, а также их продольную часть. В результате ij -уравнения превратятся в два скалярных уравнения. Вместе с 00- и 0*i*-уравнениями получим в итоге систему из четырёх уравнений

$$\begin{aligned} \frac{a^2}{2} \delta G_0^0 : \quad & -\Delta\Psi + \frac{a'}{a} (3\Psi' - \Delta E') - 3\frac{a'^2}{a^2} \Phi = 4\pi G a^2 \delta\rho \\ \frac{a^2}{2} \delta G_i^0 : \quad & -\Psi' + \frac{a'}{a} \Phi = -4\pi G (\rho + p) v \\ \frac{a^2}{2} \delta G_j^i : \quad & \Psi'' - \frac{1}{3} (\Delta\Phi + \Delta\Psi + \Delta E'') + \frac{a'}{a} \left(2\Psi' - \Phi' - \frac{2}{3} \Delta E' \right) - 2\frac{a''}{a} \Phi + \frac{a'^2}{a^2} \Phi = -4\pi G a^2 \delta p \\ & \Delta \left(\Phi + \Psi + E'' + 2\frac{a'}{a} E' \right) = -12\pi G a^2 (\rho + p) \pi \end{aligned}$$

Уравнения ковариантного сохранения получим тем же путём, что и в векторном секторе. Они имеют вид

$$\begin{aligned} \delta\rho' + 3\frac{a'}{a} (\delta\rho + \delta p) + (\rho + p) (\Delta v + 3\Psi' - \Delta E') &= 0 \\ [(\rho + p)v]' + \delta p + (\rho + p) \left(4\frac{a'}{a} v + \pi + \Phi \right) &= 0 \end{aligned}$$

В случае идеальной жидкости, то есть при $\pi = 0$, эти уравнения в конформной ньютоновой калибровке $E = 0$ сводятся к уравнениям раздела 2.3.3. В общем случае в конформной ньютоновой калибровке они имеют вид (8.59).

▷ *Задача 3.* Рассмотрим калибровочные преобразования (2.29) с калибровочными функциями, удовлетворяющими соотношению (2.31); напомним, что такие калибровочные преобразования сохраняют калибровку $h_{0i} = 0$. Соотношение (2.31) означает, что ξ_i и ξ_0 выражаются через одну произвольную функцию $\sigma(x)$:

$$\xi_i = -\partial_i \sigma, \quad \xi_0 = \sigma'.$$

Показать, что при таких калибровочных преобразованиях справедливо

$$\begin{aligned}\Phi &\rightarrow \Phi + \sigma'' + \frac{a'}{a} \sigma', & \Psi &\rightarrow \Psi + \frac{a'}{a} \sigma', & E &\rightarrow E - \sigma, \\ \rho &\rightarrow \rho + \rho' \sigma', & \delta p &\rightarrow \delta p + p' \sigma', & v &\rightarrow v - \sigma', & \pi &\rightarrow \pi.\end{aligned}$$

Показать, что при этих преобразованиях линеаризованные уравнения Эйнштейна и законы сохранения преобразуются ковариантным образом.

Приведём для полноты выражения для возмущений тензора Эйнштейна в произвольной калибровке. Формулы раздела 2.3.1 справедливы для тензорного сектора вне зависимости от калибровки, при этом h_{ij}^{TT} являются калибровочно-инвариантными величинами.

Использование общей формулы (B.2) даёт для векторного сектора

$$\begin{aligned}\delta G_0^0 &= 0, \\ \delta G_i^0 &= \frac{1}{2a^2} \left(\Delta Z_i^T - \partial_\eta \Delta W_i^T \right), \\ \delta G_i^0 &= \frac{1}{a^2} \left[\frac{1}{2} \left(\partial_\eta \Delta W^T - \Delta Z^T \right) - 2 \left(\frac{a''}{a} - 2 \frac{a'^2}{a^2} \right) Z_i^T \right], \\ \delta G_j^i &= -\frac{1}{a^2} \left\{ \frac{1}{2} \left[\partial_\eta \left(\partial_i Z_j^T + \partial_j Z_i^T \right) - \partial_\eta^2 \left(\partial_i W_j^T + \partial_j W_i^T \right) \right] \right. \\ &\quad \left. + \frac{a'}{a} \left[\partial_i Z_j^T + \partial_j Z_i^T - \partial_\eta \left(\partial_i W_j^T + \partial_j W_i^T \right) \right] \right\},\end{aligned}$$

В скалярном секторе имеем

$$\delta G_0^0 = -\frac{2}{a^2} \left[\Delta \Psi + \frac{a'}{a} (-\Delta Z + \Delta E' - 3\Psi') + 3 \frac{a'^2}{a^2} \Phi \right] \quad (\text{B.18a})$$

$$\delta G_i^0 = \frac{2}{a^2} \left[-\partial_i \Psi' + \frac{a'}{a} \partial_i \Phi \right] \quad (\text{B.18b})$$

$$\delta G_0^i = -\frac{2}{a^2} \left[-\partial_i \Psi' + \frac{a'}{a} \partial_i \Phi - \left(2 \frac{a'^2}{a^2} - \frac{a''}{a} \right) \partial_i Z \right] \quad (\text{B.18c})$$

$$\begin{aligned}\delta G_j^i &= \frac{1}{a^2} \left\{ \partial_i \partial_j \left[\Psi + \Phi - Z' + E'' - 2 \frac{a'}{a} (Z - E') \right] \right. \\ &\quad \left. + \delta_{ij} \left[2\Psi'' - \Delta \Psi - \Delta \Phi + \Delta Z' - \Delta E'' + \frac{a'}{a} (4\Psi' - 2\Phi' + 2\Delta Z - 2\Delta E') \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - 4 \frac{a''}{a} \Phi + 2 \frac{a'^2}{a^2} \Phi \right] \right\} \quad (\text{B.18d})\end{aligned}$$

Здесь используются те же обозначения, что и в (2.44), (2.45), (2.46). Отметим, что калибровочные преобразования (2.29) с $\xi_i = \partial_i \xi$ в скалярном секторе имеют вид

$$\delta Z = \xi' + \xi_0, \quad \delta E = \xi, \quad \delta \Phi = \xi'_0 + \frac{a'}{a} \xi_0, \quad \delta \Psi = \frac{a'}{a} \xi_0. \quad (\text{B.19})$$

При этом в соответствии с общим законом преобразования тензоров возмущения тензора Эйнштейна преобразуются следующим образом:

$$\begin{aligned}\delta_\xi(\delta G_0^0) &= \partial_0 \bar{G}_0^0 \cdot \xi_0 \\ \delta_\xi(\delta G_i^0) &= \partial_i \xi_0 \cdot \bar{G}_0^0 - \partial_k \xi_0 \cdot \bar{G}_i^k \\ \delta_\xi(\delta G_0^i) &= \partial_i \xi'_0 \cdot \bar{G}_0^0 - \partial_k \xi'_0 \cdot \bar{G}_k^i \\ \delta_\xi(\delta G_j^i) &= \partial_0 \bar{G}_j^i \cdot \xi_0\end{aligned} \quad (\text{B.20})$$

- ▷ Задача 4. Проверить, что преобразования (B.20) действительно соответствуют общему закону преобразования тензоров.
- ▷ Задача 5. Проверить, что выражения (B.18) действительно удовлетворяют свойству (B.20).
- ▷ Задача 6. Проверить ковариантность выражений для δG_ν^μ , выписанных для векторного сектора, относительно калибровочных преобразований, аналогичных (B.19).

Для некоторых приложений бывает полезно использовать выражения для квадратичных частей действия. В тензорном секторе квадратичное действие даётся формулой (2.53). В векторном и скалярном секторах вычисление, аналогичное выполненному в разделе 2.3.1, потребовало бы явного учёта вклада, обусловленного δT_ν^μ , см. (2.51). Поэтому мы поступим несколько иначе. А именно, мы найдём квадратичную часть только гравитационного вклада в действие для возмущений метрики, не предполагая, что фоновая метрика удовлетворяет уравнениям Эйнштейна¹. Мы это сделаем для общности для гравитационного действия, содержащего как вклад Эйнштейна–Гильберта, так и Λ -член,

$$-\Lambda \int d^4x \sqrt{-g}.$$

Поступим так же, как в разделе 2.3.1, но не будем пользоваться уравнениями движения для фоновой метрики. Например, для подынтегрального выражения в вариации действия Эйнштейна–Гильберта запишем в квадратичном порядке по $h_{\mu\nu}$ и $\delta h_{\mu\nu}$

$$\sqrt{-g}G^{\mu\nu}\delta g_{\mu\nu} \implies a^4 \left(\frac{1}{2}h_\lambda^\lambda \bar{G}^{\mu\nu} + a^{-2}\eta^{\mu\lambda}\delta G_\lambda^\nu - a^{-2}h^{\mu\lambda}\bar{G}_\lambda^\nu \right) a^2\delta h_{\mu\nu}.$$

Выражения для δG_ν^μ выписаны выше, а фоновые значения хорошо известны,

$$\bar{G}_0^0 = \frac{3a'^2}{a^4}, \quad \bar{G}_j^i = \delta_j^i \left(2\frac{a''}{a^3} - \frac{a'^2}{a^4} \right).$$

Аналогично поступим с Λ -членом. Действуя затем так же, как в разделе 2.3.1, получим квадратичное действие в векторном секторе

$$S_V = \frac{1}{32\pi G} \int d^3x d\eta a^2 \left[(\partial_k Z_i^T)^2 + 6 \left(\frac{a'^2}{a^2} - H_\Lambda^2 a^2 \right) (Z_i^T)^2 + 2\partial_\eta W_i^T \Delta Z_i^T + (\partial_\eta \partial_k W_i^T)^2 - 2 \left(2\frac{a''}{a} - \frac{a'^2}{a^2} - 3H_\Lambda^2 a^2 \right) (\partial_k W_i^T)^2 \right],$$

где $(\partial_k Z_i)^2 \equiv \partial_k Z_i \partial_k Z_i$, и т.д., и

$$H_\Lambda^2 = \frac{8\pi}{3}G\Lambda.$$

Отметим, что выражения в круглых скобках равны нулю, если Вселенная расширяется только за счёт Λ -члена. Квадратичное действие в скалярном секторе имеет вид

$$S_S = \frac{1}{8\pi G} \int d^4x a^2 \left[-2\Phi\Delta\Psi - 2\Psi'\Delta Z + 2\Psi'\Delta E' + 3\Psi\Psi'' - \Psi\Delta\Psi + \frac{a'}{a}(2\Phi\Delta Z - 2\Phi\Delta E' + 6\Phi\Psi') + \left(-\frac{9}{2}\frac{a'^2}{a^2} + \frac{3}{2}H_\Lambda^2 a^2 \right) \Phi^2 + \left(-\frac{9}{2}\frac{a'^2}{a^2} - \frac{9}{2}H_\Lambda^2 a^2 \right) \Psi^2 + \left(\frac{a'^2}{a^2} - H_\Lambda^2 a^2 \right) \left(9\Phi\Psi - 3\Phi\Delta E + \frac{3}{2}(\partial_i Z)^2 \right) + \left(2\frac{a''}{a} - \frac{a'^2}{a^2} - 3H_\Lambda^2 a^2 \right) \left(-\Psi\Delta E - \frac{1}{2}(\Delta E)^2 \right) \right]$$

Обсудим вкратце, что происходит в отсутствие материи. В векторном секторе переменная Z_i^T не является динамической, она входит в квадратичное действие без производных по времени. Поэтому её можно “отынтигрировать”, то есть получить варьированием действия по Z_i^T уравнение для неё, найти её из этого уравнения, а затем подставить обратно в действие, получив тем самым действие в терминах только переменной W_i^T . Если фоновая метрика удовлетворяет уравнениям Эйнштейна с Λ -членом, то полученное таким образом действие для W_i^T тождественно обращается в нуль. Следовательно, W_i^T не удовлетворяет никаким уравнениям и может быть произвольной функцией координат. Вся конфигурация (Z_i^T, W_i^T) при этом является чистой калибровкой. Так проявляется калибровочная инвариантность общей теории относительности на фоне пространства де Ситтера. Аналогично обстоит дело со скалярным сектором, где нединамическими являются Φ и Z .

- ▷ Задача 7. Проверить сделанные выше утверждения.

¹При этом отлична от нуля и линейная по возмущениям часть гравитационного действия. Её найти просто, но она нас здесь интересовать не будет.

Приложение С

Гауссовые случайные величины и гауссовые случайные поля

C.1 Свойства гауссовых случайных величин

В этом Приложении мы напомним основные определения и свойства гауссовых случайных величин и гауссовых случайных полей.

Понятие случайной величины возникает тогда, когда имеется ансамбль систем, в каждой из которых некоторая величина q имеет определённое значение, но это значение случайным образом меняется от системы к системе. В такой ситуации ансамбль можно характеризовать функцией распределения¹ $F(q)$ случайной величины q . Без ограничения общности будем считать величину q непрерывной (далнейшее обобщается и на дискретный случай). Функция распределения определяет вероятность реализации значения случайной величины в интервале от q до $(q + dq)$,

$$P(q, q + dq) = F(q) dq .$$

Ясно, что $F(q)$ должна быть действительной и неотрицательной. Кроме того, из требования, чтобы вероятность реализации *какого-нибудь* значения случайной величины была равна единице, следует условие нормировки

$$\int F(q) dq = 1 ,$$

где интегрирование ведётся по всей области возможных значений величины q . В дальнейшем мы будем для определённости считать, что эта область — прямая $(-\infty, +\infty)$.

Гауссова случайная величина определяется тем, что её распределение является гауссовым:

$$F(q) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left[-\frac{(q - q_0)^2}{2\sigma^2}\right] , \quad (\text{C.1})$$

где q_0 и σ — действительные параметры, причём $\sigma > 0$. Параметр q_0 имеет смысл среднего значения случайной величины, а σ — её дисперсии,

$$\langle q \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} dq q F(q) = q_0 , \quad \langle (q - q_0)^2 \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} dq (q - q_0)^2 F(q) = \sigma^2 ,$$

¹Мы обозначаем случайную величину и её значения одной и той же буквой q .

соответственно. Любая линейная функция $\tilde{q} = aq + b$ является гауссовой случайной величиной со средним $\tilde{q}_0 = aq_0 + b$ и дисперсией $a\sigma$. В дальнейшем средние значения гауссовых случайных величин и полей мы, как правило, будем полагать равными нулю. Этого можно добиться, сделав линейную замену переменной $q \rightarrow q - q_0$.

Интересным примером гауссовой случайной величины является координата квантовомеханического осциллятора, находящегося в основном состоянии. Волновая функция основного состояния гармонического осциллятора с гамильтонианом $\hat{H} = \frac{1}{2}(\hat{p}^2 + \omega^2 \hat{q}^2)$, как известно, имеет вид

$$\psi(q) = \left(\frac{\omega}{\pi}\right)^{1/4} e^{-\frac{\omega}{2}q^2},$$

так что плотность вероятности того, что координата принимает значение q , равна

$$F(q) = |\psi(q)|^2 = \sqrt{\frac{\omega}{\pi}} e^{-\omega q^2}.$$

Сравнивая это выражение с (C.1), мы видим, что координата q действительно является гауссовой случайной величиной с нулевым средним и дисперсией $(2\omega)^{-1/2}$.

Гауссовой случайной величиной является и импульс квантовомеханического осциллятора в основном состоянии. Более того, любая линейная комбинация импульса и координаты с действительными коэффициентами — также гауссова случайная величина.

▷ Задача 1. Доказать последнее утверждение.

Отметим, что \hat{q} и \hat{p} линейно выражаются через эрмитово-сопряжённые операторы рождения и уничтожения, поэтому последнее свойство означает, что любая эрмитова линейная комбинация операторов рождения и уничтожения является гауссовой случайной величиной, если осциллятор находится в основном состоянии.

Рассмотрим теперь набор нескольких случайных величин q_1, \dots, q_N . Соответствующая функция распределения $F(q_1, \dots, q_N)$ зависит от многих переменных. Набор случайных величин называется гауссовым, если эта функция имеет вид

$$F(q_1, \dots, q_N) \equiv F(q) = \mathcal{N} \exp\left(-\frac{1}{2} q_m M_{mn} q_n + L_n q_n\right), \quad (\text{C.2})$$

где по повторяющимся индексам подразумевается суммирование от 1 до N , коэффициенты M_{mn} и L_n не зависят от q_k и M_{mn} — симметричная невырожденная матрица с действительными элементами. Положительный множитель \mathcal{N} подбирается из условия нормировки на единичную вероятность,

$$\int F(q) d^N q = 1. \quad (\text{C.3})$$

Для сходимости этого интеграла необходимо и достаточно, чтобы квадратичная форма $q_m M_{mn} q_n$ была положительно определённой, иначе говоря, чтобы все собственные значения матрицы M были положительными.

Коэффициенты L_n определяют средние значения случайных величин q_1, \dots, q_N . Действительно, сделаем линейную замену

$$q_m = \tilde{q}_m + D_{mn} L_n, \quad (\text{C.4})$$

где

$$D_{mn} = (M^{-1})_{mn}$$

— матрица, обратная к M . Функция распределения для величин \tilde{q}_n получается подстановкой (C.4) в (C.2) и равна

$$F(\tilde{q}) = \mathcal{N} \exp\left(-\frac{1}{2}\tilde{q}_m M_{mn} \tilde{q}_n\right) \quad (\text{C.5})$$

В силу симметрии $\tilde{q}_n \rightarrow -\tilde{q}_n$ имеем $\langle \tilde{q}_n \rangle = 0$ и

$$\langle q_m \rangle = D_{mn} L_n .$$

▷ *Задача 2.* Показать, что нормировочный множитель в (C.2) и (C.5) равен $\mathcal{N} = (\det M)^{-1/2} (2\pi)^{-N/2}$.

Для дальнейшего полезно заметить, что любые N линейно независимых линейных комбинаций гауссовых случайных величин q_1, \dots, q_N с вещественными коэффициентами также образуют набор гауссовых случайных величин.

Обсудим, какой вид имеют средние от произведений гауссовых случайных величин $\langle q_{n_1} \dots q_{n_k} \rangle$; их называют корреляторами. Для их вычисления удобно ввести производящую функцию

$$Z(j) \equiv Z(j_1, \dots, j_N) = \int F(q_1, \dots, q_N) e^{j_n q_n} d^N q . \quad (\text{C.6})$$

Интересующие нас средние выражаются через производные производящей функции при нулевых значениях её аргумента,

$$\langle q_{n_1} \dots q_{n_k} \rangle = \left[\frac{\partial^k Z}{\partial j_{n_1} \dots \partial j_{n_k}} \right]_{j_m=0} . \quad (\text{C.7})$$

Производящую функцию нетрудно вычислить явно. Будем без ограничения общности считать, что L_m в (C.2) равны нулю, так что равны нулю и средние $\langle q_n \rangle$. Для вычисления интеграла в (C.6) сделаем замену, аналогичную (C.4),

$$q_m = \tilde{q}_m + D_{mn} j_n ,$$

и получим

$$Z(j) = e^{\frac{1}{2} j_m D_{mn} j_n} \int F(\tilde{q}) d^N \tilde{q} = e^{\frac{1}{2} j_m D_{mn} j_n} . \quad (\text{C.8})$$

Отсюда следует, что средние от произведений нечётного числа гауссовых случайных величин равны нулю, а средние от произведений чётного числа выражаются через матричные элементы матрицы $D = M^{-1}$. При этом справедливо утверждение, которое в квантовой теории поля называют теоремой Вика: для вычисления среднего $\langle q_{n_1} \dots q_{n_{2k}} \rangle$ необходимо величины $q_{n_1}, \dots, q_{n_{2k}}$ разбить на пары, каждой паре (q_{n_r}, q_{n_s}) сопоставить величину $D_{n_r n_s}$, а разбиению — произведение всех таких величин, и, наконец, просуммировать по всем возможным разбиениям. Например, среднее от произведения четырёх гауссовых случайных величин равно

$$\langle q_p q_r q_s q_t \rangle = D_{pr} D_{st} + D_{ps} D_{rt} + D_{pt} D_{rs} . \quad (\text{C.9})$$

Верно и обратное утверждение: если все корреляторы случайных величин удовлетворяют теореме Вика с матрицей D_{mn} , а сама эта матрица задаёт положительно определённую квадратичную форму, то соответствующий набор случайных величин является гауссовым и характеризуется функцией распределения (C.2) с $L_m = 0$ и $M = D^{-1}$.

- ▷ Задача 3. Проверить формулу (C.9) явным вычислением.
- ▷ Задача 4. Доказать теорему Вика для гауссовых случайных величин с нулевыми средними.
- ▷ Задача 5. Доказать обратное утверждение.

До сих пор мы не рассматривали зависимость случайных величин от времени. Обсудим кратко такую возможность. Будем считать, что случайные величины $q_n(t)$ удовлетворяют некоторым уравнениям движения, которые позволяют однозначным образом найти значения $q_1(t), \dots, q_N(t)$, если известны значения $q'_1 \equiv q_1(t_i), \dots, q'_N \equiv q_N(t_i)$ в начальный момент времени² t_i ,

$$q_n(t) = f_n(q'_1, \dots, q'_N; t). \quad (\text{C.10})$$

Далее, будем считать, что зависимость (C.10) можно обратить, то есть по величинам $q_1(t), \dots, q_N(t)$ можно однозначно восстановить начальные значения,

$$q'_n \equiv q_n(t_i) = g_n(q_1(t), \dots, q_N(t)). \quad (\text{C.11})$$

Если известна начальная функция распределения $F(q'_1, \dots, q'_N; t_i)$, то корреляторы в момент времени t будут вычисляться следующим образом³

$$\langle q_{n_1}(t) \dots q_{n_k}(t) \rangle = \int f_{n_1}(q'; t) \dots f_{n_k}(q'; t) \cdot F(q'_1, \dots, q'_N; t_i) d^N q'. \quad (\text{C.12})$$

После очевидной замены переменных интегрирования

$$q'_n = g_n(q) \quad (\text{C.13})$$

это выражение приводится к виду

$$\langle q_{n_1}(t) \dots q_{n_k}(t) \rangle = \int q_{n_1} \dots q_{n_k} \cdot F(q_1, \dots, q_N; t) d^N q,$$

где

$$F(q_1, \dots, q_N; t) = J(t) \cdot F(g_1(q), \dots, g_N(q); t_i)$$

— функция распределения в момент t . Здесь

$$J(t) = \frac{\partial(g_1, \dots, g_N)}{\partial(q_1, \dots, q_N)}$$

²Мы не рассматриваем здесь возможности того, что уравнения движения сами содержат случайные силы или случайные параметры, так что эволюция $q_n(t)$ не является детерминированной. Такая ситуация в действительности имеет место во многих физических системах, однако для наших приложений достаточно рассмотреть более простой случай.

³В ряде случаев бывает полезно вводить в рассмотрение и корреляторы случайных величин, взятых в разные моменты времени. Соответствующее обобщение формулы (C.12) очевидно.

— якобиан замены (C.13).

Если начальное распределение $F(q'_1, \dots, q'_N; t_i)$ является гауссовым, а эволюция — линейной и невырожденной, то в каждый последующий момент времени распределение случайных величин $q_1(t), \dots, q_N(t)$ остается гауссовым. Действительно, по определению линейной эволюции величины $q_1(t), \dots, q_N(t)$ являются линейными функциями начальных значений q'_1, \dots, q'_N ; невырожденность же эволюции означает, что линейные функции $f_1(q'), \dots, f_N(q')$ линейно независимы. Отсюда и из сделанного ранее замечания и следует гауссовость набора случайных величин $q_1(t), \dots, q_N(t)$.

▷ Задача 6. Рассмотрим классический осциллятор с координатой q , импульсом p и гамильтонианом

$$H = \frac{1}{2}(p^2 + \omega^2 q^2) .$$

Пусть в начальный момент как координата, так и импульс являются независимыми гауссовыми случайными величинами со средними q_0 , p_0 и дисперсиями σ_q и σ_p (независимость случайных величин означает, что функция распределения факторизована, $F(q, p) = F_q(q) \cdot F_p(p)$). Найти функцию распределения случайных величин $q(t)$, $p(t)$ в момент времени t .

Заканчивая обсуждение гауссовых случайных величин, сделаем следующее замечание. Иногда физический интерес представляет не весь набор случайных величин q_1, \dots, q_N , а набор меньшего числа N' их линейных комбинаций,

$$r_a = \sum_{n=1}^{N'} c_{an} q_n , \quad a = 1, \dots, N' ; \quad N' < N . \quad (\text{C.14})$$

Здесь численные коэффициенты c_{an} действительны, а величины r_a линейно независимы в том смысле, что ни одна из линейная комбинация не обращается тождественно в нуль. Величины r_a сами являются случайными величинами с функцией распределения

$$\bar{F}(r) = \int F(q) \delta^{(N')} \left(r_a - \sum_{n=1}^{N'} c_{an} q_n \right) d^N q . \quad (\text{C.15})$$

Если q_1, \dots, q_N — гауссовые случайные величины, то $r_1, \dots, r_{N'}$ также образуют набор гауссовых случайных величин. Чтобы убедиться в этом, найдём производящую функцию для корреляторов величин r_a ,

$$\bar{Z}(j_1, \dots, j_{N'}) = \int \bar{F}(r) e^{j_a r_a} d^{N'} r .$$

Подставим сюда выражение (C.15) и выполним интегрирование сначала по переменным r_a , а затем по q_n . Считая, что $L_n = 0$ в (C.2), получим

$$\bar{Z}(j_a) = e^{\frac{1}{2} j_a \bar{D}_{ab} j_b} , \quad (\text{C.16})$$

где $\bar{D}_{ab} = (\bar{M}^{-1})_{ab}$ и

$$\bar{M}_{ab} = c_{am} M_{mn} c_{bn} .$$

Производящая функция (C.16) имеет ту же форму, что и (C.8). Поэтому корреляторы случайных величин r_a удовлетворяют теореме Вика, и, следовательно, величины

$r_1, \dots, r_{N'}$ являются гауссовыми. Отметим, что из положительной определённости квадратичной формы, задаваемой матрицей M_{mn} , следует положительная определённость квадратичной формы, соответствующей матрице \bar{M}_{ab} ,

$$r_a \bar{M}_{ab} r_b = (r_a c_{am}) M_{mn} (r_b c_{bn}) > 0 ,$$

что и требуется для гауссовых случайных величин.

C.2 Гауссовые случайные поля

Обратимся теперь к случайным полям и для определённости рассмотрим случай вещественного скалярного поля. Для наших целей поле⁴ $\phi(\mathbf{x})$ удобно воспринимать следующим образом. Будем сначала считать, что пространство имеет конечный объём (например, представляет собой куб размера L), и является дискретным, то есть состоит из большого, но конечного числа точек \mathbf{x}_i . Простейший вариант — это кубическая решётка; для неё индекс i в случае трёхмерного пространства представляет собой набор из трёх целочисленных индексов (i_1, i_2, i_3) , а i_1, i_2, i_3 пробегают значения от 1 до $N = L/a$, где a — шаг решётки. На каждом узле решётки зададим переменную $\phi_i \equiv \phi(\mathbf{x}_i)$. Таким образом, мы имеем дело с системой с конечным, хотя и большим числом степеней свободы N^3 . Если величины ϕ_i образуют набор случайных величин, то в пределе $a \rightarrow 0$ мы приходим к случайному полю $\phi(\mathbf{x})$. Если к тому же набору $\{\phi_i\}$ гауссов, то $\phi(\mathbf{x})$ — гауссово случайное поле.

При конечном шаге решётки и конечном объёме пространства функция распределения $F[\{\phi_i\}]$ имеет обычный смысл, однако в пределе $a \rightarrow 0$ выражения для корреляторов типа

$$\langle \phi(\mathbf{x})\phi(\mathbf{y}) \rangle = \int F[\phi] \phi(\mathbf{x})\phi(\mathbf{y}) D\phi$$

представляют собой функциональные интегралы. Поэтому в теории случайных полей непосредственно функцию распределения изучать неудобно, и на первый план выходят корреляционные функции $\langle \phi(\mathbf{x}_1) \dots \phi(\mathbf{x}_k) \rangle$. Они, вообще говоря, являются обобщенными функциями. Непосредственный физический смысл имеют величины, полученные в результате некоторой процедуры слаживания, например, корреляторы объектов типа $\int f(\mathbf{x}, \mathbf{y})\phi(\mathbf{y}) d^3y$, где $f(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ — гладкая функция, заметно отличная от нуля лишь при \mathbf{y} близком к \mathbf{x} . Такие величины оказываются обычными, не обобщенными функциями.

Для гауссовых случайных полей остаются справедливыми многие обсуждавшиеся выше результаты, что очевидно из соображений, приведённых в начале раздела. В частности, конечный набор линейно независимых интегралов (ср. с (C.14))

$$r_a = \int c_a(\mathbf{x})\phi(\mathbf{x}) d^3x$$

образует набор гауссовых случайных величин. Далее, линейная эволюция гауссова случайного поля оставляет его гауссовым. Наконец, для гауссова и только для гауссова случайного поля справедлива теорема Вика: все многоточечные корреляционные функции либо равны нулю (для нечётного числа полей), либо выражаются через двухточечный коррелятор способом, изложенным перед формулой (C.9), например

$$\langle \phi(\mathbf{x}_1)\phi(\mathbf{x}_2)\phi(\mathbf{x}_3)\phi(\mathbf{x}_4) \rangle = D(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)D(\mathbf{x}_3, \mathbf{x}_4) + D(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_3)D(\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_4) + D(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_4)D(\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3) ,$$

⁴Мы здесь рассматриваем фиксированный момент времени.

где

$$D(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \langle \phi(\mathbf{x})\phi(\mathbf{y}) \rangle \quad (\text{C.17})$$

— двухточечный коррелятор. Здесь и далее мы без ограничения общности считаем, что среднее значение поля равно нулю, $\langle \phi(\mathbf{x}) \rangle = 0$. Отметим, что в случае линейной эволюции теорема Вика выполняется и для разновременных корреляторов $\langle \phi(\mathbf{x}_1, t_1) \dots \phi(\mathbf{x}_k, t_k) \rangle$. Разновременные корреляторы мы рассматривать не будем.

Итак, в теории гауссова случайного поля центральным объектом является двухточечная корреляционная функция (C.17). Если ансамбль систем инвариантен относительно трансляций пространства, то коррелятор зависит только от разности $(\mathbf{x} - \mathbf{y})$. Если к тому же имеет место и инвариантность относительно вращений, то коррелятор является функцией скаляра $|\mathbf{x} - \mathbf{y}|$. Последние утверждения относятся к случаю евклидова пространства; обобщение на 3-сферу и 3-гиперболоид не представляет труда.

Нас будет интересовать именно случай евклидова трёхмерного пространства и случайных полей, инвариантных относительно трансляций и вращений пространства, когда

$$\langle \phi(\mathbf{x})\phi(\mathbf{y}) \rangle = D(|\mathbf{x} - \mathbf{y}|).$$

В этом случае удобно перейти к Фурье-образу

$$\phi(\mathbf{x}) = \int d^3k e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}} \phi(\mathbf{k}),$$

причём для действительного $\phi(\mathbf{x})$ справедливо

$$\phi^*(\mathbf{k}) = \phi(-\mathbf{k}). \quad (\text{C.18})$$

В соответствии со сказанным выше, $\phi(\mathbf{k})$ — это гауссово случайное поле. Найдём его двухточечную функцию

$$\langle \phi(\mathbf{k})\phi(\mathbf{k}') \rangle = \int \frac{d^3x d^3y}{(2\pi)^6} e^{-i\mathbf{k}\mathbf{x}-i\mathbf{k}'\mathbf{y}} D(|\mathbf{x} - \mathbf{y}|) = \int \frac{d^3z d^3y}{(2\pi)^6} e^{-i(\mathbf{k}+\mathbf{k}')\mathbf{y}} e^{-i\mathbf{k}\mathbf{z}} D(|\mathbf{z}|).$$

Окончательно, имеем

$$\langle \phi(\mathbf{k})\phi(\mathbf{k}') \rangle = \frac{P(k)}{(2\pi)^3} \delta(\mathbf{k} + \mathbf{k}'), \quad (\text{C.19})$$

где

$$P(k) = \int d^3z e^{-i\mathbf{k}\mathbf{z}} D(|\mathbf{z}|).$$

Функция $P(k)$ зависит только от $k \equiv |\mathbf{k}|$ в силу инвариантности относительно пространственных вращений. Кроме того, она неотрицательна. Действительно, рассмотрим среднее от квадрата величины

$$\phi_f = \int f(\mathbf{k})\phi(\mathbf{k}) d^3k,$$

где $f(\mathbf{k})$ — гладкая функция, удовлетворяющая соотношению $f^*(\mathbf{k}) = f(-\mathbf{k})$, которое обеспечивает действительность ϕ_f . В остальном $f(\mathbf{k})$ произвольна. Ясно, что $\langle \phi_f^2 \rangle \geq 0$. С другой стороны, имеем

$$\langle \phi_f^2 \rangle = \int d^3k |f(\mathbf{k})|^2 \frac{P(k)}{(2\pi)^3}.$$

Отсюда ясно, что неотрицательность $\langle \phi_f^2 \rangle$ при любой функции $f(\mathbf{k})$ возможна только при неотрицательной $P(k)$.

Функцию $P(k)$ называют *спектром мощности* гауссова случайного поля $\phi(\mathbf{x})$. Этот же термин — спектр мощности — употребляют и для величины

$$\mathcal{P}(k) = \frac{k^3 P(k)}{2\pi^2}.$$

Чтобы пояснить смысл последней, рассмотрим среднее от квадрата поля $\phi(\mathbf{x})$:

$$\langle \phi^2(\mathbf{x}) \rangle = \int d^3 k \, d^3 k' \, e^{i(\mathbf{k}+\mathbf{k}')\cdot\mathbf{x}} \langle \phi(\mathbf{k}) \phi(\mathbf{k}') \rangle = \int d^3 k \, \frac{P(k)}{(2\pi)^3}.$$

После интегрирования по углам остаётся однократный интеграл по модулю импульса,

$$\langle \phi^2(\mathbf{x}) \rangle = \int_0^\infty \frac{dk}{k} \mathcal{P}(k).$$

Отсюда видно, что $\mathcal{P}(k)$ характеризует вклад области импульсов порядка k в флуктуацию поля $\phi(\mathbf{x})$.

Суммируя, скажем, что гауссово случайное поле с нулевым средним, обладающее инвариантностью относительно трансляций и вращений пространства, полностью характеризуется спектром мощности $P(k)$ или $\mathcal{P}(k)$, причём в импульсном представлении двухточечный коррелятор имеет вид (C.19). Как мы обсуждаем в разделе 5.4, существующие наблюдательные данные в целом согласуются с тем, что первичные скалярные возмущения как раз и представляют собой гауссово случайное поле.

В полной аналогии со случаем квантовомеханического осциллятора, рассмотренным в разделе C.1, свободное квантовое бозонное поле (например, скалярное) является гауссовым случайнм полем, если состояние этого поля — вакуумное. Действительно, для вакуумных корреляторов свободных полей выполняется теорема Вика, а это и есть определяющее свойство гауссовых случайных полей. Более того, справедливо и более общее утверждение. А именно, пусть $A_{\mathbf{k}}^\dagger$ и $A_{\mathbf{k}}$ — операторы рождения и уничтожения свободного квантового скалярного поля, удовлетворяющие стандартным коммутационным соотношениям

$$[A_{\mathbf{k}}, A_{\mathbf{k}'}^\dagger] = \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}').$$

Выберем в качестве состояния поля вакуум $|0\rangle$ (по определению вакуума, $A(\mathbf{k})|0\rangle = 0$ для всех \mathbf{k}). Тогда поле

$$\hat{\phi}(\mathbf{x}) = \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^{3/2}} \left(f(\mathbf{k}) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} A_{\mathbf{k}}^\dagger + f^*(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} A_{\mathbf{k}} \right)$$

также представляет собой гауссово случайное поле при любой комплексной функции $f(\mathbf{k})$.

▷ Задача 7. Убедиться, что вакуумные корреляторы поля $\hat{\phi}(\mathbf{x})$ удовлетворяют теореме Вика, то есть что поле $\hat{\phi}(\mathbf{x})$ действительно можно воспринимать как гауссово случайное поле.

▷ Задача 8. Найти спектр мощности для поля $\hat{\phi}(\mathbf{x})$.

▷ Задача 9. Рассмотрим задачу о рождении частиц в постановке раздела E.1.

Найти соотношения между плотностью числа рождённых частиц, плотностью энергии и спектром мощности поля в конечном состоянии.

Приложение D

Фермионы в гравитационных полях

D.1 Группа Лоренца как калибровочная группа

Общая теория относительности в определённом смысле является калибровочной теорией, в которой в качестве калибровочной группы выступает группа Лоренца. Именно этот аспект мы рассмотрим в данном разделе.

Начнём с обсуждения того, как выглядит любая калибровочная теория с калибровочной группой Лоренца. Если отвлечься от того, что группа Лоренца имеет отношение к пространству-времени, то общее построение калибровочной схемы для группы Лоренца идёт так же, как для теории с произвольной неабелевой калибровочной группой. Напомним (см., например, [19]), что инфинитезимальное преобразование Лоренца определяется малыми параметрами преобразования $\omega^{\alpha\beta}$, антисимметричными по индексам α, β ,

$$\omega^{\alpha\beta} = -\omega^{\beta\alpha} \ll 1 .$$

Индексы пробегают значения $\alpha, \beta = 0, 1, 2, 3$. Мы намеренно используем здесь начальные буквы греческого алфавита, зарезервировав буквы μ, ν, \dots для координат в пространстве-времени. Преобразование Лоренца для тензора или спинора A имеет общий вид

$$A \rightarrow \Lambda A = \left(1 + \frac{1}{2} \omega^{\alpha\beta} \Sigma_{\alpha\beta} \right) A , \quad (\text{D.1})$$

где $\Sigma_{\alpha\beta}$ — генераторы группы Лоренца в представлении, по которому преобразуется A . Они также антисимметричны, $\Sigma_{\alpha\beta} = -\Sigma_{\beta\alpha}$, и удовлетворяют коммутационным соотношениям алгебры Лоренца

$$[\Sigma_{\alpha\beta}, \Sigma_{\gamma\delta}] = \eta_{\beta\gamma} \Sigma_{\alpha\delta} + \eta_{\alpha\delta} \Sigma_{\beta\gamma} - \eta_{\alpha\gamma} \Sigma_{\beta\delta} - \eta_{\beta\delta} \Sigma_{\alpha\gamma} .$$

Например, для вектора A^α инфинитезимальное преобразование Лоренца имеет вид

$$A^\alpha \rightarrow A^\alpha + \omega_\beta^\alpha A^\beta .$$

где индексы поднимаются и опускаются с помощью тензора Минковского $\eta_{\alpha\beta}$. Отсюда имеем выражения для генераторов в векторном представлении

$$\text{вектор : } [\Sigma_{\alpha\beta}]^\gamma_\delta = \delta_\alpha^\gamma \eta_{\beta\delta} - \delta_\beta^\gamma \eta_{\alpha\delta} .$$

Для преобразования дираковского спинора имеем

$$\text{дираковский спинор : } \Sigma_{\alpha\beta} = \frac{1}{4} [\gamma_\alpha, \gamma_\beta] ,$$

где γ_α — матрицы Дирака.

Рассмотрим теперь некоторую теорию поля, в которой имеется инвариантность относительно глобальных (не зависящих от точки пространства) преобразований Лоренца (D.1), по-прежнему считая пока, что группа Лоренца не имеет отношения к пространству-времени. Расширим эту теорию, потребовав теперь инвариантности относительно локальных преобразований

$$A(x) \rightarrow \Lambda(x)A(x) = \left(1 + \frac{1}{2}\omega^{\alpha\beta}(x)\Sigma_{\alpha\beta}\right)A(x), \quad (\text{D.2})$$

где параметры преобразования зависят от точки пространства-времени. Иначе говоря, мы хотим построить калибровочную теорию, в которой группа Лоренца является калибровочной группой. Как обычно в калибровочных теориях, для этого требуется ввести калибровочные поля $\Gamma_\mu(x)$ (в калибровочных теориях, используемых в физике частиц, их обычно обозначают A_μ). Эти поля в общей теории относительности называют *спиновыми связностями*. Они принимают значения в алгебре Лоренца, и с их помощью стандартным образом строится ковариантная производная¹ поля $A(x)$,

$$\mathcal{D}_\mu A = \partial_\mu A + \Gamma_\mu A, \quad (\text{D.3})$$

где Γ_μ — спиновые связности в том представлении алгебры Лоренца, по которому преобразуется поле A (мы максимально упрощаем здесь обозначения). Более развернуто эта конструкция выглядит следующим образом: поле $\Gamma_\mu(x)$ задаётся компонентными числовыми полями $\Gamma_\mu^{\alpha\beta}(x)$, антисимметричными по индексам α, β , а калибровочное поле — спиновая связность — равно

$$\Gamma_\mu(x) = \Gamma_\mu^{\alpha\beta}(x)\Sigma_{\alpha\beta},$$

где $\Sigma_{\alpha\beta}$ — те же величины, что фигурируют в (D.1). Например, в векторном представлении

$$[\Gamma_\mu^{\alpha\beta}\Sigma_{\alpha\beta}]^\gamma_\delta = \Gamma_\mu^\gamma{}_\delta - \Gamma_\mu^\gamma{}_\delta,$$

так что

$$(\Gamma_\mu A)^\alpha = 2\Gamma_\mu^{\alpha\beta} A_\beta. \quad (\text{D.4})$$

Для дираковского спинора имеем

$$\Gamma_\mu = \frac{1}{2}\Gamma_\mu^{\alpha\beta}\gamma_\alpha\gamma_\beta. \quad (\text{D.5})$$

Как всегда в калибровочных теориях, основным требованием к ковариантной производной является требование её однородности при калибровочных преобразованиях (D.2) и соответствующих преобразованиях калибровочных полей,

$$(\mathcal{D}_\mu A)(x) \rightarrow \Lambda(x)(\mathcal{D}_\mu A)(x),$$

что приводит к следующему закону преобразования калибровочного поля

$$\Gamma_\mu \rightarrow \Lambda\Gamma_\mu\Lambda^{-1} + \Lambda\partial_\mu\Lambda^{-1} = \Gamma_\mu - \frac{1}{2}(\partial_\mu\omega + [\Gamma_\mu, \omega]), \quad (\text{D.6})$$

¹Мы пока используем терминологию, заимствованную из теории калибровочных полей (см., например, [121]). Выражение для введённой здесь ковариантной производной не совпадает с известным нам выражением с символами Кристоффеля для ковариантной производной в координатном базисе. В связи с этим мы и используем специальное обозначение \mathcal{D}_μ .

где $\omega(x) = \omega^{\alpha\beta}(x)\Sigma_{\alpha\beta}$.

До сих пор мы в точности следовали стандартному изложению теории неабелевых калибровочных полей, считая калибровочную группу Лоренца никак не связанной с пространством-временем. Теперь мы отойдём от этой логики. Дело в том, что в римановой геометрии локальная, то есть калибровочная Лоренц-инвариантность имеется автоматически. Чтобы увидеть это, введём в каждой точке пространства-времени x четыре вектора² \mathbf{e}_α с компонентами e_α^μ . Индекс α просто нумерует эти вектора; их набор принято называть тетрадой. Отметим, что тетраду можно воспринимать как базис в касательном пространстве в данной точке пространственно-временного многообразия. Выберем тетраду ортонормированной в том смысле, что

$$\mathbf{e}_\alpha \cdot \mathbf{e}_\beta \equiv e_{\alpha\mu} e_\beta^\mu = \eta_{\alpha\beta}, \quad (\text{D.7})$$

где пространственно-временной индекс μ поднимается и опускается с метрикой пространства-времени $g_{\mu\nu}$, то есть $e_{\alpha\mu} = g_{\mu\nu} e_\alpha^\nu$. Будем поднимать и опускать тетрадный индекс α с помощью метрики Минковского. Тогда соотношение (D.7) можно записать в виде

$$e_\mu^\alpha e_\beta^\mu = \delta_\beta^\alpha. \quad (\text{D.8})$$

Последнее соотношение означает, что матрица e_μ^α является обратной к матрице e_α^μ . Следовательно, выполняется и соотношение

$$e_\mu^\alpha e_\alpha^\nu = \delta_\mu^\nu,$$

откуда мы получаем

$$e_\mu^\alpha e_{\alpha\nu} = g_{\mu\nu}. \quad (\text{D.9})$$

Последнее свойство полезно для того, чтобы находить явный и удобный вид тетраады в конкретных случаях.

В данной точке пространства-времени существуют разные тетрады $\{\mathbf{e}_\alpha\}$, удовлетворяющие условию ортонормированности (D.7). Они связаны между собой преобразованиями Лоренца

$$\mathbf{e}^\alpha \rightarrow \Lambda_\beta^\alpha \mathbf{e}^\beta. \quad (\text{D.10})$$

Подчеркнём, что эти преобразования не имеют отношения к преобразованиям пространственно-временных координат и, соответственно, не затрагивают индекса μ , если преобразования записывать в компонентной форме, $e_\mu^\alpha \rightarrow \Lambda^\alpha_\beta e_\mu^\beta$.

Таким образом, в каждой точке пространства-времени группа Лоренца действует независимо. Пространственно-временные тензоры и спиноры можно воспринимать как объекты, соответствующим образом преобразующиеся под действием этих Лоренц-преобразований. Например, вектор \mathbf{A} , имеющий в координатном базисе компоненты A^μ , в тетрадном базисе имеет компоненты

$$A^\alpha = e_\mu^\alpha A^\mu.$$

Геометрический смысл этой конструкции состоит в том, что вектор $\mathbf{A}(x)$ принадлежит касательному пространству в точке x , а величины A^α являются компонентами этого вектора в базисе \mathbf{e}_α . При лоренцевом вращении тетрады (D.10) тетрадные компоненты вектора \mathbf{A} также испытывают Лоренц-преобразование, $A^\alpha \rightarrow \Lambda^\alpha_\beta A^\beta$. В

²В этом Приложении, в отличие от остальных Глав, жирным шрифтом мы обозначаем 4-векторы.

общем случае преобразование тензора или спинора имеет вид (D.1). Отметим, что тетрадные компоненты тензоров и спиноров являются скалярными величинами с точки зрения преобразований координат; например, при координатном преобразовании $x'^\mu = x^\mu(x^\nu)$ выполняется $A'^\alpha(x') = A^\alpha(x)$.

Поскольку преобразования тетрад (D.10) можно делать в каждой точке независимо, в теории автоматически имеется калибровочная инвариантность относительно преобразований (D.2). Ясно при этом, что калибровочные поля — спиновые связности Γ_μ — должны каким-то образом выражаться через уже введённые объекты — метрику $g_{\mu\nu}(x)$ и тетраду $e_\mu^\alpha(x)$.

Чтобы найти эту связь, рассмотрим векторное поле $\mathbf{A}(x)$. Напомним, см. раздел I.A.2, что вектор $\tilde{\mathbf{A}}(\tilde{x})$, полученный путём параллельного переноса вектора $\mathbf{A}(x)$ из точки x в точку \tilde{x} с координатами $\tilde{x}^\mu = x^\mu + dx^\mu$, в координатном базисе имеет компоненты

$$\tilde{A}^\mu(\tilde{x}) = A^\mu(x) - \Gamma_{\nu\lambda}^\mu(x)A^\nu(x)dx^\lambda,$$

а ковариантный дифференциал равен разности вектора $\mathbf{A}(\tilde{x})$, имеющегося в точке \tilde{x} , и параллельно перенесённого вектора $\tilde{\mathbf{A}}(\tilde{x})$,

$$\nabla_\nu A^\mu dx^\nu = A^\mu(\tilde{x}) - \tilde{A}^\mu(\tilde{x}). \quad (\text{D.11})$$

Ковариантная производная (D.3) имеет в точности такой же смысл, но в тетрадном базисе. Запишем для неё

$$(\mathcal{D}_\nu A)^\alpha dx^\nu = A^\alpha(\tilde{x}) - \tilde{A}^\alpha(\tilde{x}). \quad (\text{D.12})$$

Правая часть здесь равна $e_\mu^\alpha[A^\mu(\tilde{x}) - \tilde{A}^\mu(\tilde{x})]$ (в линейном порядке отличием $e_\mu^\alpha(\tilde{x})$ от $e_\mu^\alpha(x)$ пренебрегаем). Сравнивая выражения для ковариантных дифференциалов (D.11) и (D.12), находим

$$\mathcal{D}_\nu A^\alpha = e_\mu^\alpha \nabla_\nu A^\mu.$$

С учётом (D.4) и определения ковариантной производной вектора (I.A.17) последнее равенство можно записать в виде

$$\partial_\nu A^\alpha + 2\Gamma_\nu^{\alpha\beta} A_\beta = e_\mu^\alpha [\partial_\nu(e_\beta^\mu A^\beta) + \Gamma_{\nu\lambda}^\mu e^{\beta\lambda} A_\beta].$$

Используя свойство (D.8), получаем окончательно

$$\Gamma_\nu^{\alpha\beta} = \frac{1}{2} e_\mu^\alpha \nabla_\nu e^{\beta\mu}. \quad (\text{D.13})$$

Подчеркнём, что обозначение ∇_ν мы всегда используем для стандартной ковариантной производной, “действующей” только на пространственно-временные индексы; в частности

$$\nabla_\nu e^{\beta\mu} = \partial_\nu e^{\beta\mu} + \Gamma_{\nu\lambda}^\mu e^{\beta\lambda}.$$

Сделаем по поводу результата (D.13) два замечания. Во-первых, из (D.8) следует, что

$$e_\mu^\alpha \nabla_\nu e^{\beta\mu} + (\nabla_\nu e_\mu^\alpha) e^{\beta\mu} = 0,$$

так что выражение в правой части (D.13) действительно антисимметрично по индексам α, β . Во-вторых, из (D.13) следует, что “полная ковариантная производная” тетрады равна нулю,

$$\mathbf{D}_\nu e^{\alpha\mu} \equiv \partial_\nu e^{\alpha\mu} + \Gamma_{\nu\lambda}^\mu e^{\alpha\lambda} + 2\Gamma_\nu^{\alpha\beta} e_\beta^\mu = 0.$$

Как видно из определения, полная ковариантная производная \mathbf{D}_ν , “действует” как на тетрадные лоренцевы индексы, так и на пространственно-временные. Иногда такое соглашение бывает удобным.

▷ *Задача 1.* Проверить, что спиновая связность (D.13) при локальных лоренцевых преобразованиях преобразуется в соответствии с (D.6).

▷ *Задача 2.* Используя ковариантную производную (D.3), определим кривизну $\mathcal{R}_{\mu\nu}$ соотношением

$$[\mathcal{D}_\mu, \mathcal{D}_\nu]A = \mathcal{R}_{\mu\nu}A \equiv \mathcal{R}_{\mu\nu}^{\alpha\beta}\Sigma_{\alpha\beta}A ,$$

которое справедливо для любого лоренцева тензора или спинора A (отметим, что в теории калибровочных полей объект, аналогичный $\mathcal{R}_{\mu\nu}$, называют напряженностью калибровочного поля и обозначают $F_{\mu\nu}$). Найти связь компонент $\mathcal{R}_{\mu\nu}^{\alpha\beta}$ с компонентами тензора Римана при заданном выборе поля тетрады.

D.2 Фермионное действие и уравнение Дирака

Записанный в терминах лоренцевых тензоров и спиноров лагранжиан будет инвариантен относительно координатных преобразований, если ковариантные производные (D.3) фигурируют в нём в комбинации

$$\mathcal{D}_\alpha \equiv e_\alpha^\mu \mathcal{D}_\mu .$$

Действительно, мы уже упоминали, что лоренцевы тензоры и спиноры являются скалярными величинами по отношению к преобразованиям координат; то же можно сказать и об операции \mathcal{D}_α . Если к тому же лагранжиан инвариантен и относительно локальных лоренцевых вращений тетрад, то есть калибровочных лоренцевых преобразований, то теория будет полностью ковариантной — не зависящей ни от выбора координатной сетки на пространственно-временном многообразии, ни от выбора поля тетрад. Это обстоятельство позволяет строить ковариантные теории для полей любого спина. Важным примером является дираковское фермионное поле. Из только что сказанного следует, что простейшим ковариантным обобщением дираковского действия служит

$$S_F = \int d^4x \sqrt{-g} (i\bar{\psi}\gamma^\alpha \mathcal{D}_\alpha \psi - m\bar{\psi}\psi) , \quad (\text{D.14})$$

где в соответствии с (D.5)

$$\mathcal{D}_\alpha \psi = e_\alpha^\mu \left(\partial_\mu + \frac{1}{2} \Gamma_\mu^{\beta\gamma} \gamma_\beta \gamma_\gamma \right) \psi , \quad (\text{D.15})$$

а $\Gamma_\mu^{\alpha\beta}$ даются формулой (D.13). Вариация действия по $\bar{\psi}$ даёт уравнение Дирака в искривлённом пространстве-времени

$$i\gamma^\alpha \mathcal{D}_\alpha \psi - m\psi = 0 . \quad (\text{D.16})$$

Полезно отметить, что для четырёхмерных матриц Дирака справедливы соотношения

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\gamma^\alpha[\gamma^\beta,\gamma^\gamma] &= (\eta^{\alpha\beta}\gamma^\gamma - \eta^{\alpha\gamma}\gamma^\beta) + i\epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}\gamma_\delta\gamma^5 , \\ \frac{1}{2}[\gamma^\beta,\gamma^\gamma]\gamma^\alpha &= -(\eta^{\alpha\beta}\gamma^\gamma - \eta^{\alpha\gamma}\gamma^\beta) + i\epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}\gamma_\delta\gamma^5 ,\end{aligned}\quad (D.17)$$

где, как обычно, $\gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$. Первое из этих соотношений можно использовать, чтобы преобразовать оператор Дирака к виду, удобному для конкретных вычислений,

$$i\gamma^\alpha\mathcal{D}_\alpha = i\left[\gamma^\alpha e_\alpha^\mu\partial_\mu + \frac{1}{2}\gamma^\alpha(\nabla_\mu e_\alpha^\mu)\right] + \frac{1}{4}\gamma^\alpha\gamma^5\epsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}e^{\beta\mu}e^{\gamma\nu}\nabla_\mu e_\nu^\delta . \quad (D.18)$$

Найдём, например, вид уравнения Дирака в пространственно-плоской космологической метрике $ds^2 = a^2(\eta)\eta_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu$. Естественно выбрать тетраду в виде

$$e_\mu^\alpha = a(\eta)\delta_\mu^\alpha ,$$

где множитель a необходим для выполнения условия (D.9). Отличные от нуля символы Кристоффеля равны $\Gamma_{0\nu}^\mu = (a'/a)\delta_\nu^\mu$, $\Gamma_{ij}^0 = (a'/a)\delta_{ij}$. Ковариантные производные векторов тетрады можно найти прямым вычислением, из них отличны от нуля

$$\nabla_i e_\alpha^0 = \frac{a'}{a^2}\delta_{i\alpha} , \quad \nabla_i e_\alpha^j = \frac{a'}{a^2}\delta_i^j\delta_\alpha^0 .$$

Слагаемое с γ^5 в (D.18) равно нулю, а остальные слагаемые дают

$$i\gamma^\alpha\mathcal{D}_\alpha = i\left(\frac{1}{a}\gamma^\mu\partial_\mu + \frac{3}{2}\frac{a'}{a^2}\gamma^0\right) .$$

Таким образом, уравнение Дирака в расширяющейся Вселенной имеет вид

$$i\left(\frac{1}{a}\gamma^\mu\partial_\mu + \frac{3a'}{2a^2}\gamma^0\right)\psi - m\psi = 0 .$$

Заметим, что замена переменных $\psi = a^{-3/2}\chi$ приводит это уравнение к простому виду

$$i\gamma^\mu\partial_\mu\chi - am\chi = 0 .$$

Последнее наблюдение является отражением того общего факта, что безмассовое дираковское поле является конформным полем. А именно, пусть

$$\hat{g}_{\mu\nu}(x) = e^{2\varphi(x)}g_{\mu\nu}(x)$$

— две конформно-связанные метрики, см. раздел I.A.5. Тогда выполняется тождество

$$i\gamma^\alpha\hat{\mathcal{D}}_\alpha\hat{\psi} = e^{-5\varphi/2} \cdot i\gamma^\alpha\mathcal{D}_\alpha\psi ,$$

где $\hat{\mathcal{D}}_\alpha$ и \mathcal{D}_α — производные (D.15) в метриках $\hat{g}_{\mu\nu}$ и $g_{\mu\nu}$, соответственно, а фермионные поля связаны между собой соотношением

$$\hat{\psi} = e^{-3\varphi/2}\psi .$$

Соответствующее соотношение для функционалов действия имеет совсем простой вид

$$S_F(\hat{g}_{\mu\nu}, \hat{\psi}) = S_F(g_{\mu\nu}, \psi) .$$

Это и означает, что дираковское поле является конформным.

▷ Задача 3. Используя формулу (D.18) и формулы раздела I.A.5, доказать следующие только что утверждения. Указание: учесть, что в соответствии с (D.9) связь между тетрадами имеет вид

$$\hat{e}_\mu^\alpha = e^\varphi e_\mu^\alpha, \quad \hat{e}^{\alpha\mu} = e^{-\varphi} e^{\alpha\mu}.$$

Приложение Е

Рождение частиц во внешних полях. Метод преобразований Боголюбова

Для многих приложений интерес представляет задача о квантовом рождении частиц в изменяющихся во времени внешних полях. При этом нередко при описании процессов рождения можно пренебречь взаимодействием рожденных частиц между собой, а внешние поля считать классическими. В этом случае уравнение квантового поля, соответствующего вновь появляющимся частицам, является линейным. В этом Приложении мы опишем метод, позволяющий свести решение такой задачи к решению классических линейных уравнений поля. Этот метод основан на известных из статистической механики преобразованиях Боголюбова.

Хотя метод преобразований Боголюбова применим для весьма широкого класса внешних полей, мы будем считать, что внешнее поле однородно в пространстве и является скаляром относительно пространственных вращений. Именно эта ситуация представляет основной интерес с точки зрения космологических приложений. В этом Приложении мы будем считать пространство-время плоским; обобщение на случай расширяющейся Вселенной приведено в соответствующих местах этой книги.

E.1 Бозоны

Начнем с обсуждения рождения бозонов. В случае однородного в пространстве внешнего поля, являющегося скаляром относительно трёхмерных вращений, бозоны произвольного спина после разложения по спиральностям ведут себя как скаляры, поэтому нам достаточно рассмотреть рождение скалярных частиц. При этом достаточно ограничиться случаем эрмитова скалярного поля. Мы временно будем считать, что пространство представляет собой куб конечного, хотя и большого размера L , а интересующее нас квантовое поле $\hat{\varphi}(\mathbf{x}, t)$ удовлетворяют периодическим граничным условиям на границах этого куба. Тогда пространственное разложение Фурье этого поля имеет вид

$$\hat{\varphi}(\mathbf{x}, t) = \sum_{\mathbf{q}} \frac{1}{L^{3/2}} e^{-i\mathbf{q}\mathbf{x}} \hat{\varphi}_{\mathbf{q}}(t), \quad (\text{E.1})$$

где \mathbf{q} пробегает дискретный ряд значений

$$\mathbf{q} = \left(\frac{2\pi n_1}{L}, \frac{2\pi n_2}{L}, \frac{2\pi n_3}{L} \right). \quad (\text{E.2})$$

Здесь n_1, n_2, n_3 — целые, и по ним ведётся суммирование в (E.1). Нормировочная постоянная в разложении (E.1) подобрана так, чтобы функции $L^{-3/2}e^{i\mathbf{q}\mathbf{x}}$ были ортогональны.

Будем считать, что гайзенбергово уравнение поля в терминах Фурье-образа $\hat{\varphi}_{\mathbf{q}}(t)$ в нестационарном внешнем поле имеет вид

$$\ddot{\hat{\varphi}}_{\mathbf{q}} + \omega_q^2(t)\hat{\varphi}_{\mathbf{q}} = 0 , \quad (\text{E.3})$$

где $\omega_q^2(t)$ — действительная функция, которая положительна¹ при $t \rightarrow \pm\infty$; здесь $q \equiv |\mathbf{q}|$. Такой вид является в действительности весьма общим. Например, в случае лагранжиана массивного поля, взаимодействующего с внешним скалярным полем $\phi(t)$,

$$L_{\varphi} = \frac{1}{2}(\partial_{\mu}\hat{\varphi})^2 + \frac{m_{\varphi}^2}{2}\hat{\varphi}^2 + \frac{1}{2}h\phi(t)\hat{\varphi}^2 , \quad (\text{E.4})$$

имеем

$$\omega_q^2(t) = q^2 + m_{\varphi}^2 + h\phi(t) ,$$

где параметры m_{φ} и h имеют размерность массы. Более сложные случаи, в том числе случай расширяющейся Вселенной, после замен переменных также приводят к уравнению (E.3). Отметим, что гамильтониан, соответствующий уравнению (E.3), имеет вид

$$\hat{H} = \sum_{\mathbf{q}} \left(\frac{1}{2}\dot{\hat{\varphi}}_{\mathbf{q}}\dot{\hat{\varphi}}_{-\mathbf{q}} + \frac{\omega_q^2(t)}{2}\hat{\varphi}_{\mathbf{q}}\hat{\varphi}_{-\mathbf{q}} \right) . \quad (\text{E.5})$$

Отметим ещё, что поскольку внешнее поле по предположению пространственно изотропно, частота ω зависит от модуля импульса q ; это ограничение в действительности для дальнейшего несущественно.

▷ Задача 1. Показать, что гамильтониан, соответствующий лагранжиану (E.4), имеет вид (E.5).

Общее решение уравнения (E.3) можно записать в виде²

$$\hat{\varphi}_{\mathbf{q}}(t) = \varphi_q^+(t)A_{\mathbf{q}}^\dagger + \varphi_q^-(t)A_{-\mathbf{q}} \quad (\text{E.6})$$

где операторы $A_{\mathbf{q}}$ и $A_{\mathbf{q}}^\dagger$ эрмитово сопряжены друг другу, а числовые функции $\varphi_q^\pm(t)$ комплексно сопряжены,

$$\varphi_q^+(t) = (\varphi_q^-(t))^* , \quad (\text{E.7})$$

и удовлетворяют уравнению

$$\ddot{\varphi}_q^\pm + \omega_q^2(t)\varphi_q^\pm = 0 . \quad (\text{E.8})$$

Условие (E.7) необходимо для того, чтобы поле $\hat{\varphi}(\mathbf{x}, t)$ было эрмитовым. В дальнейшем индексы \mathbf{q} и q мы будем часто опускать, имея в виду, что в последующие формулы входят $A_{\mathbf{q}}^\dagger$ и $A_{-\mathbf{q}}$, если не оговорено противное.

¹ Случай $\omega^2 < 0$ соответствует тахионной нестабильности; мы считаем, что тахионная нестабильность если и имеется, то в течение конечного промежутка времени.

² В обозначениях учтено, что в отсутствие внешнего поля разложение квантового поля по операторам рождения и уничтожения имеет вид (см., например, [19])

$$\hat{\varphi}(\mathbf{x}, t) = L^{-3/2} \sum_{\mathbf{q}} \frac{1}{\sqrt{2\omega_q}} (e^{i\omega_q t - i\mathbf{q}\mathbf{x}} A_{\mathbf{q}}^\dagger + e^{-i\omega_q t + i\mathbf{q}\mathbf{x}} A_{\mathbf{q}}) .$$

Полезно заметить, что для любых двух решений φ_1, φ_2 уравнения (E.8) сохраняется во времени вронскиан

$$W(\varphi_1, \varphi_2) = -i(\dot{\varphi}_1\varphi_2 - \varphi_1\dot{\varphi}_2) . \quad (\text{E.9})$$

Можно выбрать функции φ^\pm так, чтобы их вронскиан был равен единице,

$$W(\varphi^+, \varphi^-) = 1 . \quad (\text{E.10})$$

При таком выборе операторы A_q^\dagger и A_q удовлетворяют стандартным коммутационным соотношениям для операторов рождения и уничтожения,

$$\left[A_q, A_{q'}^\dagger \right] = \delta_{q,q'} , \quad (\text{E.11})$$

где δ -символ понимается в смысле равенства целых чисел, фигурирующих в (E.2). Такие коммутационные соотношения обеспечивают выполнение стандартного одновременного коммутационного соотношения для оператора поля и сопряжённого ему импульса,

$$\left[\dot{\hat{\varphi}}(\mathbf{x}, t), \hat{\varphi}(\mathbf{y}, t) \right] = -i\delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) .$$

▷ Задача 2. Доказать последнее утверждение.

Пожалуй, наиболее важным для физической постановки задачи является вопрос о выборе состояния квантового поля. Мы работаем в гайзенберговом представлении, так что речь идёт о начальном состоянии системы. В интересном для приложений случае рождения частиц из вакуума это состояние не должно содержать частиц при $t \rightarrow -\infty$. При произвольном внешнем поле такое состояние определить невозможно; физическая причина состоит в том, что частицы, вообще говоря, рождаются (и уничтожаются) в произвольно отдалённом прошлом. Однако, если рождение частиц отсутствует при $t \rightarrow -\infty$, вакуум поля $\hat{\varphi}$ однозначно определён в асимптотическом прошлом. Это имеет место, например, если внешнее поле выключено в далёком прошлом, а также в более общей ситуации, когда внешнее поле меняется адиабатически медленно при $t \rightarrow -\infty$. Именно этот последний случай мы и будем рассматривать.

Если внешнее поле, а значит и частота $\omega(t)$ меняются адиабатически медленно в асимптотически далёком прошлом, то при $t \rightarrow -\infty$ для уравнения (E.8) работает ВКБ-приближение, и в качестве двух его решений удобно выбрать функции, являющиеся положительно- и отрицательно-частотными в прошлом,

$$\varphi^\pm(t) = \frac{1}{\sqrt{2\omega(t)}} e^{\pm i \int \omega(t) dt} , \quad t \rightarrow -\infty . \quad (\text{E.12})$$

При $t \rightarrow -\infty$, а значит и при любых временах, они очевидным образом обладают свойствами (E.7) и (E.10). Далее, при таком выборе функций φ^\pm гамильтониан (E.5) в асимптотическом прошлом равен

$$\hat{H} = \sum_q \omega_q \left(A_q^\dagger A_q + \frac{1}{2} \right) , \quad t \rightarrow -\infty .$$

Таким образом, состояние $|0_{in}\rangle$, определённое соотношением

$$A_q |0_{in}\rangle = 0 ,$$

имеет наименьшую энергию в удалённом прошлом, то есть именно оно выступает в качестве начального вакуумного состояния. В используемом нами гайзенберговом представлении это состояние со временем не изменяется.

Зная классические решения уравнения поля, обладающие асимптотиками (E.12), можно вычислить корреляционные функции типа $\langle 0_{in} | \hat{\varphi}(\mathbf{x}, t) \hat{\varphi}(\mathbf{x}', t') | 0_{in} \rangle$ в произвольные моменты времени. Для этого достаточно воспользоваться формулами (E.1) и (E.6). В частности, можно вычислить ряд физических величин, таких как среднее значение тензора энергии-импульса или флуктуация поля. Для последней имеем (ср. с (13.6), (13.25))

$$\langle 0_{in} | \hat{\varphi}^2(\mathbf{x}, t) | 0_{in} \rangle = L^{-3} \sum_{\mathbf{q}} \varphi_q^+ \varphi_q^- .$$

В пределе большого объёма можно заменить суммирование интегрированием,

$$\sum_{\mathbf{k}} \rightarrow \int d^3 n = \int \frac{L^3}{(2\pi)^3} d^3 q , \quad (\text{E.13})$$

так что

$$\langle 0_{in} | \hat{\varphi}^2(\mathbf{x}, t) | 0_{in} \rangle = \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} |\varphi_q^+|^2 . \quad (\text{E.14})$$

Мы воспользуемся этой формулой в дальнейшем.

Нас, однако, будет интересовать здесь число рождённых частиц. Оно хорошо определено, если и в асимптотическом будущем внешнее поле адиабатически медленно меняется со временем, так что процесс рождения частиц прекращается при $t \rightarrow +\infty$. В этом случае можно определить другой набор $\tilde{\varphi}^\pm$ решений уравнения (E.8), такой, что соответствующие функции являются положительно- и отрицательно-частотными в будущем,

$$\tilde{\varphi}^\pm(t) = \frac{1}{\sqrt{2\omega(t)}} e^{\pm i \int \omega(t) dt} , \quad t \rightarrow +\infty . \quad (\text{E.15})$$

Поле $\hat{\varphi}$ можно разложить и по этому набору функций,

$$\hat{\varphi}_{\mathbf{q}}(t) = \tilde{\varphi}_q^+(t) \tilde{A}_{\mathbf{q}}^\dagger + \tilde{\varphi}_q^-(t) \tilde{A}_{-\mathbf{q}} , \quad (\text{E.16})$$

при этом операторы $\tilde{A}_{\mathbf{q}}$ и $\tilde{A}_{\mathbf{q}}^\dagger$ также удовлетворяют стандартным коммутационным соотношениям,

$$[\tilde{A}_{\mathbf{q}}, \tilde{A}_{\mathbf{q}'}^\dagger] = \delta_{\mathbf{q}, \mathbf{q}'} . \quad (\text{E.17})$$

Вакуум $|0_{out}\rangle$, соответствующий операторам \tilde{A} , \tilde{A}^\dagger , то есть удовлетворяющий соотношению $\tilde{A}_{\mathbf{q}}|0_{out}\rangle = 0$, является состоянием с наименьшей энергией в удалённом будущем, а операторы \tilde{A}^\dagger , \tilde{A} рождают и уничтожают частицы при $t \rightarrow +\infty$.

В рассматриваемой нами ситуации вектор состояния системы равен $|0_{in}\rangle$. Он, вообще говоря, не совпадает с $|0_{out}\rangle$, то есть при $t \rightarrow +\infty$ в системе имеются частицы. В этом и проявляется эффект рождения частиц в нестационарных внешних полях. В асимптотике $t \rightarrow +\infty$ оператор числа частиц с импульсом \mathbf{q} имеет вид

$$\hat{N}_{\mathbf{q}} = \tilde{A}_{\mathbf{q}}^\dagger \tilde{A}_{\mathbf{q}} ,$$

так что среднее число рождённых частиц с импульсом \mathbf{q} равно

$$N_{\mathbf{q}} = \langle 0_{in} | \tilde{A}_{\mathbf{q}}^\dagger \tilde{A}_{\mathbf{q}} | 0_{in} \rangle . \quad (\text{E.18})$$

Наша задача — найти это число, считая известными решения уравнения поля φ_q^\pm .

Разложения (E.6) и (E.16) дают два выражения для одного и того же оператора $\hat{\varphi}$. Поэтому пары операторов A , A^\dagger и \tilde{A} , \tilde{A}^\dagger линейно связаны между собой³

$$\tilde{A}_\mathbf{q}^\dagger = \alpha A_\mathbf{q}^\dagger + \beta A_{-\mathbf{q}}, \quad (\text{E.19})$$

$$\tilde{A}_\mathbf{q} = \alpha^* A_\mathbf{q} + \beta^* A_{-\mathbf{q}}^\dagger. \quad (\text{E.20})$$

Комплексные параметры α и β зависят от модуля импульса.

Линейные соотношения между операторами рождения и уничтожения (E.19), (E.20) называют *преобразованиями Боголюбова*, а коэффициенты α и β — *коэффициентами Боголюбова*. Совместность коммутационных соотношений (E.11) и (E.17) требует, чтобы для коэффициентов Боголюбова выполнялось равенство

$$|\alpha|^2 - |\beta|^2 = 1. \quad (\text{E.21})$$

Ниже мы найдём эти коэффициенты в терминах функций φ^\pm и $\tilde{\varphi}^\pm$.

Подставляя выражения (E.19), (E.20) в (E.18), получим для среднего числа рожденных частиц с импульсом \mathbf{q}

$$N_\mathbf{q} = \langle 0_{in} | (\alpha_q A_\mathbf{q}^\dagger + \beta_q A_{-\mathbf{q}}) (\alpha_q^* A_\mathbf{q} + \beta_q^* A_{-\mathbf{q}}^\dagger) | 0_{in} \rangle = |\beta_q|^2.$$

Таким образом, задача о вычислении числа рождённых частиц сводится к задаче о вычислении коэффициента Боголюбова β_q . Отметим, что соотношение (E.21) не накладывает никаких априорных ограничений на величину $|\beta_q|^2$, так что число рождённых бозонов может быть в принципе сколь угодно велико. Мы увидим в разделе E.2, что для фермионов имеет место иная ситуация: число рождённых фермионов в фиксированной моде не превышает единицы. Последнее обстоятельство является отражением принципа Паули.

Число рождённых частиц в интервале импульсов от \mathbf{q} до $(\mathbf{q} + \Delta\mathbf{q})$ равно $\Delta N = \sum_\mathbf{n} N_\mathbf{q}$, где суммирование идёт по тем значениям (n_1, n_2, n_3) , которые соответствуют импульсам в указанном интервале. В пределе большого объёма заменим суммирование интегрированием согласно (E.13) и получим, что пространственная плотность числа рождённых частиц с импульсами в объёме импульсного пространства $d^3 q$ равна

$$n(q)d^3 q = \frac{\Delta N}{L^3} = |\beta_q|^2 \frac{d^3 q}{(2\pi)^3}. \quad (\text{E.22})$$

Чтобы найти выражение для коэффициентов Боголюбова, воспользуемся равенством (E.10), записанным для функций $\tilde{\varphi}^\pm$. Из разложения (E.16) будем иметь

$$\tilde{A}^\dagger = W(\hat{\varphi}, \tilde{\varphi}^-).$$

Подставим в это равенство в качестве $\hat{\varphi}$ разложение (E.6) и получим, что \tilde{A}^\dagger действительно выражается через A^\dagger и A согласно (E.19), причём коэффициенты Боголюбова равны

$$\alpha = W(\varphi^+, \tilde{\varphi}^-), \quad (\text{E.23})$$

$$\beta = W(\varphi^-, \tilde{\varphi}^-). \quad (\text{E.24})$$

³Отметим, что в (E.19), (E.20) входят операторы, соответствующие одному и тому же импульсу \mathbf{q} . В этом проявляется пространственная однородность внешнего поля. В случае неоднородного внешнего поля правая часть соотношений (E.19) и (E.20) содержит суммы по импульсам типа $\sum_{\mathbf{q}'} \alpha_{\mathbf{q}, \mathbf{q}'} A_{\mathbf{q}'}^\dagger$, и т.д.; формулы несколько усложняются, но описание остаётся в принципе аналогичным.

С учётом взаимной комплексной сопряженности функций φ^\pm , а также $\tilde{\varphi}^\pm$, это означает, что решение φ^+ уравнения (E.8), положительно-частотное при $t \rightarrow -\infty$, раскладывается по решениям, имеющим определённую частотность при $t \rightarrow +\infty$ следующим образом:

$$\varphi^+ = \alpha \tilde{\varphi}^+ + \beta^* \tilde{\varphi}^- , \quad (\text{E.25})$$

причём α и β суть коэффициенты Боголюбова. Отсюда следует рецепт их вычисления: необходимо найти решение уравнения поля, обладающее положительной частотностью в удаленном прошлом, выяснить асимптотику этого решения в удаленном будущем и разложить эту асимптотику по положительно- и отрицательно-частотным функциям, определённым при $t \rightarrow +\infty$. Коэффициенты этого разложения и будут коэффициентами Боголюбова. Альтернативно, как видно из (E.23), (E.24), можно решить уравнение поля назад во времени с “начальным” условием отрицательной частотности при $t \rightarrow +\infty$, и разложить асимптотику этого решения при $t \rightarrow -\infty$ по положительно- и отрицательно-частотным функциям, определённым по отношению к удалённому прошлому. В любом случае, на этом языке рождение частиц соответствует, как видно из (E.25), перемешиванию частот. Отметим, что из (E.25) очевидно, что интересующие нас коэффициенты Боголюбова не зависят от времени.

Формула (E.22), выражающая плотность числа рождённых частиц через коэффициент Боголюбова, и изложенный метод вычисления β_q являются центральными для этого раздела. Для некоторых приложений полезно иметь выражение и для флуктуации поля $\hat{\varphi}(\mathbf{x}, t)$ при $t \rightarrow +\infty$. Договоримся отсчитывать эту флуктуацию от её вакуумного значения (то есть от значения в вакууме $|0_{out}\rangle$). Из (E.14) получим

$$\langle \hat{\varphi}^2(\mathbf{x}, t) \rangle \equiv \langle 0_{in} | \hat{\varphi}^2(\mathbf{x}, t) | 0_{in} \rangle - \langle 0_{out} | \hat{\varphi}^2(\mathbf{x}, t) | 0_{out} \rangle = \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} \left(|\varphi_q^+|^2 - \frac{1}{2\omega} \right) .$$

Подставив сюда выражение (E.25) и опуская быстро осциллирующие члены, получим

$$\langle \hat{\varphi}^2(\mathbf{x}, t) \rangle = \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3 \cdot 2\omega} (|\alpha_q|^2 + |\beta_q|^2 - 1) = \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3 \omega} |\beta_q|^2 .$$

Таким образом, флуктуация поля также выражается через коэффициент Боголюбова β_q . Как правило, по порядку величины флуктуация поля равна

$$\langle \hat{\varphi}^2(\mathbf{x}, t) \rangle \sim \frac{n}{\omega} , \quad (\text{E.26})$$

где n — полная плотность рождённых частиц, а ω — их характерная энергия.

▷ *Задача 3. Обобщить приведённый в этом разделе анализ на случай пространственно-неоднородного внешнего поля, считая, что оно выключается при $t \rightarrow \pm\infty$.*

Проверим явно, что коэффициенты Боголюбова (E.23), (E.24) удовлетворяют соотношению (E.21). Воспользуемся тем, что

$$\beta^* = -W(\varphi^+, \tilde{\varphi}^+) .$$

Учитывая явный вид вронскиана (E.9), запишем

$$|\alpha|^2 - |\beta|^2 = (\dot{\varphi}^+ \tilde{\varphi}^- - \varphi^+ \dot{\tilde{\varphi}}^-) (\dot{\varphi}^- \tilde{\varphi}^+ - \varphi^- \dot{\tilde{\varphi}}^+) - (\dot{\varphi}^+ \tilde{\varphi}^+ - \varphi^+ \dot{\tilde{\varphi}}^+) (\dot{\varphi}^- \tilde{\varphi}^- - \varphi^- \dot{\tilde{\varphi}}^-) ,$$

где мы воспользовались (E.7). Раскрывая скобки, получим

$$|\alpha|^2 - |\beta|^2 = \dot{\varphi}^+ \varphi^- \cdot [-iW(\tilde{\varphi}^+, \tilde{\varphi}^-)] + \dot{\varphi}^- \varphi^+ \cdot [iW(\tilde{\varphi}^+, \tilde{\varphi}^-)] = W(\varphi^+, \varphi^-) = 1 ,$$

что и требовалось.

В заключение этого раздела сделаем следующее замечание. Корректная формулировка задачи о рождении частиц в нестационарных внешних полях возможна в том случае, когда понятие частицы хорошо определено в начале и в конце процесса. Именно этот случай мы и рассматривали. В тот период времени, когда поведение внешнего поля далеко от адиабатического, определить, что такое частица квантового поля, вообще говоря, невозможно. На формальном уровне это проявляется в том, что невозможно дать однозначное определение положительно- и отрицательно-частотных функций, входящих в (E.6). Тем не менее, если начальное состояние системы известно, то, как мы отмечали, ряд физических величин, выражающихся через корреляторы квантового поля (например, среднее значение тензора энергии-импульса), можно вычислить и в ситуации, далёкой от адиабатической. Кроме того, иногда можно получить качественное представление о поведении квантового поля, используя базис собственных состояний мгновенного гамильтониана. Для его построения запишем в данный момент времени t

$$\begin{aligned}\hat{\varphi}_{\mathbf{q}} &= \frac{1}{\sqrt{2\omega_q(t)}} (\mathcal{A}_{\mathbf{q}}^\dagger + \mathcal{A}_{-\mathbf{q}}) \\ \dot{\hat{\varphi}}_{\mathbf{q}} &= i\sqrt{\frac{\omega_q(t)}{2}} (\mathcal{A}_{\mathbf{q}}^\dagger - \mathcal{A}_{-\mathbf{q}}).\end{aligned}$$

Здесь операторы $\mathcal{A}^\dagger, \mathcal{A}$ явно зависят от времени, а их коммутационные соотношения имеют стандартный для операторов рождения и уничтожения вид. В терминах этих операторов мгновенный гамильтониан (E.5) равен

$$\hat{H} = \sum_{\mathbf{q}} \omega_{\mathbf{q}} \left(\mathcal{A}_{\mathbf{q}}^\dagger \mathcal{A}_{\mathbf{q}} + \frac{1}{2} \right).$$

Поэтому операторы $\mathcal{A}^\dagger, \mathcal{A}$ можно пытаться интерпретировать как операторы рождения и уничтожения частиц в момент времени t . В ситуации, далёкой от адиабатической, такая интерпретация, впрочем, весьма условна, и пользоваться намеченным подходом необходимо с большой осторожностью.

- ▷ Задача 4. Найти зависимость операторов $\mathcal{A}^\dagger, \mathcal{A}$ от времени при адиабатическом изменении внешнего поля.
- ▷ Задача 5. Считая, что в асимптотике $t \rightarrow -\infty$ реализуется адиабатическая ситуация, а начальное состояние квантового поля — вакуумное, найти коэффициенты преобразования Боголюбова от операторов A^\dagger, A к операторам $\mathcal{A}^\dagger, \mathcal{A}$ в произвольный момент времени. Классические решения $\varphi^\pm(t)$ считать известными при всех временах.

E.2 Фермионы

Рассмотрим теперь рождение фермионов в пространственно-однородных нестационарных внешних полях. Для определённости будем считать, что пространство-время — плоское, и что квантовое фермионное поле $\hat{\psi}(\mathbf{x}, t)$ удовлетворяет нестационарному уравнению Дирака вида

$$i\gamma^\mu \partial_\mu \hat{\psi} - m(t) \hat{\psi} = 0$$

с действительной числовой функцией $m(t)$. Здесь влияние нестационарного внешнего поля учитывается зависимостью от времени параметра $m(t)$. Например, юковское взаимодействие с внешним скалярным полем $\phi(t)$ приводит к выражению $m(t) = m_0 + h\phi(t)$, где m_0 — масса фермиона, h — юковская константа связи.

Уравнение Дирака можно записать в виде, аналогичном уравнению Шредингера,

$$i\frac{\partial}{\partial t} \hat{\psi} = [-i\alpha^i \partial_i + \beta \cdot m(t)] \hat{\psi},$$

где $\alpha^i = \gamma^0 \gamma^i$, $\beta = \gamma^0$. Сделав преобразование Фурье, аналогичное (E.1), получим отсюда уравнение в импульсном пространстве,

$$i\frac{\partial}{\partial t} \hat{\psi}_{\mathbf{q}} = [-\alpha^i q_i + \beta \cdot m(t)] \hat{\psi}_{\mathbf{q}}. \quad (\text{E.27})$$

Матрицы α^i и β — эрмитовы, поэтому числовые решения $\psi_{\mathbf{q}}$, $\psi'_{\mathbf{q}}$ уравнения (E.27) обладают свойством сохранения скалярного произведения,

$$\frac{\partial}{\partial t} (\psi_{\mathbf{q}}^\dagger \psi'_{\mathbf{q}}) = 0.$$

Разложение, аналогичное (E.6), в случае фермионов имеет вид⁴

$$\hat{\psi}_{\mathbf{q}} = u_{\mathbf{q}}^{(s)}(t) A_{\mathbf{q}}^{(s)\dagger} + v_{-\mathbf{q}}^{(s)}(t) B_{-\mathbf{q}}^{(s)}. \quad (\text{E.28})$$

Здесь индекс $s = 1, 2$ нумерует спиновые состояния; по нему подразумевается суммирование. В дальнейшем этот индекс мы будем нередко опускать. Четырёхкомпонентные комплексные столбцы $u_{\mathbf{q}}^{(s)}$, $v_{-\mathbf{q}}^{(s)}$ в каждый момент времени образуют полный ортонормированный набор, и как функции времени являются решениями уравнения Дирака (E.27). Операторы $A_{\mathbf{q}}$ и $B_{\mathbf{q}}$ обладают стандартными антисимметрическими соотношениями для операторов рождения и уничтожения фермионов,

$$\{A_{\mathbf{q}}^{(s)}, A_{\mathbf{q}'}^{(s')\dagger}\} = \delta_{\mathbf{q}, \mathbf{q}'} \delta_{s, s'} \quad (\text{E.29})$$

$$\{B_{\mathbf{q}}^{(s)}, B_{\mathbf{q}'}^{(s')\dagger}\} = \delta_{\mathbf{q}, \mathbf{q}'} \delta_{s, s'}, \quad (\text{E.30})$$

остальные антисимметрические операторы равны нулю. Такие антисимметрические соотношения обеспечивают выполнение стандартных одновременных антисимметрических соотношений для операторов поля дираковского фермиона (см., например, [19]),

$$\begin{aligned} \{\hat{\psi}(\mathbf{x}, t), \hat{\psi}^\dagger(\mathbf{x}', t)\} &= \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}'), \\ \{\hat{\psi}(\mathbf{x}, t), \hat{\psi}(\mathbf{x}', t)\} &= 0. \end{aligned}$$

▷ *Задача 6.* Доказать последнее утверждение. Указание: воспользоваться тем, что столбцы $u_{\mathbf{q}}^{(s)}$, $v_{-\mathbf{q}}^{(s)}$ образуют полный ортонормированный набор.

Благодаря C -инвариантности уравнения Дирака (E.27) решения $v_{-\mathbf{q}}$ можно выбрать в виде

$$v_{\mathbf{q}}(t) = U_C u_{\mathbf{q}}^*(t), \quad (\text{E.31})$$

где U_C — не зависящая от времени унитарная матрица C -сопряжения, явный вид которой нам не понадобится, а $u_{\mathbf{q}}^*$ — комплексно-сопряженный спинор.

▷ *Задача 7.* Найти условия, которым должна удовлетворять матрица U_C для того, чтобы функция $v_{\mathbf{q}}$, полученная из решения уравнения Дирака $u_{\mathbf{q}}$ с помощью операции (E.31), также была решением уравнения Дирака. Найти явный вид матрицы U_C в киральном (вейлевском) представлении матриц Дирака (см. Приложение I.B).

Вновь рассмотрим ситуацию, когда внешнее поле адиабатически медленно изменяется со временем как в удалённом прошлом, так и в удалённом будущем. Тогда решения уравнения Дирака $u(t)$ и $v(t)$ можно выбрать так, чтобы они были

⁴В этом разделе мы для упрощения формул не используем надстрочные индексы \pm в обозначениях для числовых решений уравнения поля.

положительно- и отрицательно-частотными при $t \rightarrow -\infty$, соответственно (индекс \mathbf{q} опускаем, где это возможно),

$$\begin{aligned} u(t) &= C_u(t) e^{i \int \omega dt}, \\ v(t) = U_C u^*(t) &= C_v(t) e^{-i \int \omega dt}, \end{aligned}$$

где C_u и C_v — медленно меняющиеся амплитуды (четырёхкомпонентные столбцы). Тогда операторы A^\dagger и A будут операторами рождения и уничтожения фермионов в удалённом прошлом, а операторы B^\dagger и B будут операторами рождения и уничтожения антифермионов, также в удалённом прошлом. В случае отсутствия частиц и античастиц при $t \rightarrow -\infty$ система находится в состоянии вакуума $|0_{in}\rangle$ по отношению к этим операторам (напоминаем, что мы работаем в гайзенберговом представлении, в котором вектор состояния не зависит от времени),

$$A|0_{in}\rangle = B|0_{in}\rangle = 0.$$

В асимптотике $t \rightarrow +\infty$ разложение, аналогичное (E.28), имеет вид

$$\hat{\psi}_{\mathbf{q}} = \tilde{u}_{\mathbf{q}}^{(s)}(t) \tilde{A}_{\mathbf{q}}^{(s)\dagger} + \tilde{v}_{-\mathbf{q}}^{(s)}(t) \tilde{B}_{-\mathbf{q}}^{(s)}, \quad (\text{E.32})$$

где функции \tilde{u} и \tilde{v} являются положительно- и отрицательно-частотными при $t \rightarrow +\infty$, соответственно, а операторы \tilde{A}^\dagger , \tilde{A} , \tilde{B}^\dagger и \tilde{B} — это операторы рождения и уничтожения частиц и античастиц в удалённом будущем. Между двумя наборами операторов снова имеется линейная связь, которая также является преобразованием Боголюбова,

$$\tilde{A}_{\mathbf{q}}^\dagger = \alpha_q A_{\mathbf{q}}^\dagger + \beta_q B_{-\mathbf{q}}, \quad (\text{E.33})$$

$$\tilde{B}_{\mathbf{q}}^\dagger = \alpha_q B_{\mathbf{q}}^\dagger + \beta_q A_{-\mathbf{q}}. \quad (\text{E.34})$$

Отметим, что в (E.33) и (E.34) фигурируют одни и те же коэффициенты Боголюбова; это является следствием C -инвариантности, как мы вскоре увидим. Так же, как в бозонном случае, из (E.33) и (E.34) следуют выражения для среднего числа рождённых частиц и античастиц с импульсом \mathbf{q} ,

$$N_{\mathbf{q}} = \langle 0_{in} | \tilde{A}_{\mathbf{q}}^\dagger A_{\mathbf{q}} | 0_{in} \rangle = |\beta_q|^2, \quad (\text{E.35})$$

$$\bar{N}_{\mathbf{q}} = \langle 0_{in} | \tilde{B}_{\mathbf{q}}^\dagger B_{\mathbf{q}} | 0_{in} \rangle = |\beta_q|^2. \quad (\text{E.36})$$

Числа рождённых частиц и античастиц одинаковы между собой для одного и того же импульса \mathbf{q} в силу C -инвариантности. Отметим, что формулы (E.35), (E.36) справедливы для каждого спинового состояния по отдельности; для нахождения полного числа рождённых частиц нужно просуммировать по спиновым состояниям (в рассматриваемом случае одного фермионного поля и спин-независимого взаимодействия с внешним полем просто умножить на спиновый фактор $g = 2$). В пределе бесконечного пространства плотности числа рождённых частиц и античастиц в импульсном объёме $d^3 q$ даются формулой, аналогичной (E.22),

$$n(q) d^3 q = \bar{n}(q) d^3 q = g |\beta_q|^2 \frac{d^3 q}{(2\pi)^3}.$$

Операторы, относящиеся как к удалённому прошлому, так и к удалённому будущему, удовлетворяют антикоммутационным соотношениям (E.29), (E.30). Это даёт

соотношение между коэффициентами Боголюбова (ср. с (E.21)), которое в случае фермионов имеет вид

$$|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1.$$

Отсюда сразу следует, что число рожденных частиц в каждой моде не превышает единицы,

$$N_{\mathbf{q}} \leq 1.$$

Так в данной задаче проявляется принцип Паули.

Для нахождения коэффициентов Боголюбова поступим так же, как и при выводе выражений (E.23), (E.24). А именно, из (E.32) и ортонормированности набора столбцов $\tilde{u}_{\mathbf{q}}^{(s)}, \tilde{v}_{-\mathbf{q}}^{(s)}$ следует, что

$$\begin{aligned}\tilde{A}_{\mathbf{q}}^\dagger &= \tilde{u}_{\mathbf{q}}^\dagger \hat{\psi} = (\tilde{u}_{\mathbf{q}}^\dagger u_{\mathbf{q}}) \cdot A_{\mathbf{q}}^\dagger + (\tilde{u}_{\mathbf{q}}^\dagger v_{-\mathbf{q}}) \cdot B_{-\mathbf{q}}, \\ \tilde{B}_{\mathbf{q}}^\dagger &= \tilde{v}_{\mathbf{q}}^\dagger \hat{\psi} = (\tilde{v}_{\mathbf{q}}^\dagger u_{-\mathbf{q}}) \cdot A_{-\mathbf{q}}^\dagger + (\tilde{v}_{\mathbf{q}}^\dagger v_{\mathbf{q}}) \cdot B_{\mathbf{q}}.\end{aligned}$$

Первое из этих соотношений приводит к выражениям для коэффициентов Боголюбова, фигурирующих в (E.33):

$$\alpha_q = \tilde{u}_{\mathbf{q}}^\dagger u_{\mathbf{q}} \quad (\text{E.37})$$

$$\beta_q = \tilde{u}_{\mathbf{q}}^\dagger v_{-\mathbf{q}} \quad (\text{E.38})$$

Из второго соотношения получаем для коэффициентов, фигурирующих в (E.34):

$$\alpha_q = (\tilde{v}_{\mathbf{q}}^\dagger v_{\mathbf{q}})^* \quad (\text{E.39})$$

$$\beta_q = (\tilde{v}_{\mathbf{q}}^\dagger u_{-\mathbf{q}})^* \quad (\text{E.40})$$

Полученные два выражения для α_q в действительности равны друг другу; в этом нетрудно убедиться, используя соотношение (E.31) как для функций u, v , так и для функций \tilde{u}, \tilde{v} . Два выражения для β_q также равны друг другу в силу (E.31).

Из (E.37) и (E.40) следует, что разложение функции $u(t)$ по положительно- и отрицательно-частотным функциям в удалённом будущем имеет вид

$$u(t) = \alpha \tilde{u}(t) + \beta^* \tilde{v}(t).$$

Это соотношение вполне аналогично (E.25) и приводит к тому же рецепту вычисления коэффициентов Боголюбова, что и в бозонном случае.

В заключение отметим, что в этом разделе мы для простоты рассматривали C -симметричную ситуацию. Это не обязательно; весь анализ может быть обобщён на случай, когда внешнее поле нарушает C - и CP -инвариантность. Формулы становятся несколько более громоздкими, но суть дела от этого не изменяется.

▷ *Задача 8. Предложить модель юковского типа, описывающую взаимодействие фермионов с нестационарными внешними скалярными полями, в которой нарушается C -инвариантность. Обобщить для этой модели результаты данного раздела. Указание: не забудьте про требование эрмитовости лагранжиана.*

Приложение F

Некоторые специальные функции и их свойства

В этом Приложении мы рассмотрим часто встречающиеся в основном тексте специальные функции и те их свойства, которые для нас наиболее существенны. Наше изложение здесь ни в коей мере не претендует на полноту и математическую строгость, а скорее должно рассматриваться как перечень некоторых полезных сведений о специальных функциях, иногда приводимых с пояснениями.

F.1 Сферические функции Бесселя целого порядка $j_l(x)$

Сферическую функцию Бесселя порядка $l = 0, 1, 2, \dots$ можно определить как конечное в нуле¹ решение уравнения

$$\frac{d^2 j_l}{dx^2} + \frac{2}{x} \frac{dj_l}{dx} + \left(1 - \frac{(l+1)l}{x^2}\right) j_l = 0. \quad (\text{F.1})$$

При этом имеется связь между сферическими и обычными функциями Бесселя:

$$j_l(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} J_{l+\frac{1}{2}}(x). \quad (\text{F.2})$$

Относительная нормировка решений уравнений (F.1) фиксирована так, что выполняются рекуррентные соотношения

$$j_{l+1} + j_{l-1} = \frac{2l+1}{x} j_l, \quad l = 1, 2, \dots, \quad (\text{F.3})$$

$$lj_{l-1} - (l+1)j_{l+1} = (2l+1) \frac{dj_l}{dx}, \quad l = 0, 1, 2, \dots. \quad (\text{F.4})$$

Отметим, что рекуррентные соотношения (F.3), (F.4) справедливы и для сферических функций Бесселя нецелого порядка, определяемых как решения уравнения

¹У уравнений (F.1) есть конечные в нуле решения — набор $j_l(x)$ сферических функций Бесселя *первого порядка* и сингулярные в нуле решения — набор $n_l(x)$ сферических функций Бесселя *второго порядка* (или сферических функций Неймана). Для рассматриваемых в этой книге задач этот второй набор не представляет интереса, поэтому мы его оставляем без внимания и везде в этой книге под сферическими функциями Бесселя подразумеваем только сферические функции Бесселя первого порядка $j_l(x)$.

(F.1) с произвольным неотрицательным l . Такие функции не представляют интерес в контексте данной книги, поэтому мы здесь оставляем их без обсуждения.

- ▷ Задача 1. Исходя из представления сферических функций Бесселя в виде ряда по неотрицательным степеням аргумента, убедиться в справедливости рекуррентных соотношений (F.3), (F.4).
- ▷ Задача 2. Убедиться, что из рекуррентных соотношений (F.3), (F.4) следует уравнение (F.1).

Исходя из уравнения (F.1) несложно убедиться, что сферическая функция Бесселя нулевого порядка имеет вид

$$j_0(x) = \frac{\sin x}{x}. \quad (\text{F.5})$$

Формула (F.5) совместно с рекуррентными соотношениями (F.3), (F.4) позволяет найти все сферические функции Бесселя. А именно, имеет место представление Рэлея:

$$j_l(x) = (-1)^l x^l \left(\frac{1}{x} \frac{d}{dx} \right)^l j_0(x). \quad (\text{F.6})$$

- ▷ Задача 3. Доказать представление Рэлея по индукции.

- ▷ Задача 4. Показать, что формула Рэлея эквивалентна следующему представлению для сферических функций Бесселя

$$j_l(x) = \frac{x^l}{l!2^l} \left(1 + \frac{d^2}{dx^2} \right)^l j_0(x).$$

Формула (F.6) весьма полезна. Во-первых, она позволяет заключить, что сферические функции Бесселя представимы в виде суммы тригонометрических функций $\sin x$, $\cos x$ с коэффициентами, являющимися полиномами по $1/x$. Из (F.6) получим для первых трёх сферических функций Бесселя явные выражения:

$$j_0(x) = \frac{\sin x}{x}, \quad j_1(x) = \frac{\sin x}{x^2} - \frac{\cos x}{x}, \quad j_2(x) = \left(\frac{3}{x^3} - \frac{1}{x} \right) \sin x - \frac{3}{x^2} \cos x.$$

Во-вторых, формула (F.6) позволяет найти асимптотики сферических функций Бесселя при малых значениях аргумента. Для получения этих асимптотик представим выражение (F.5) в виде ряда по x :

$$j_0(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n+1)!}.$$

Поскольку

$$\frac{1}{x} \frac{d}{dx} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n+1)!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n(-1)^n x^{2n-2}}{(2n+1)!}, \quad (\text{F.7})$$

то для сферической функции Бесселя порядка l получим из (F.6):

$$\begin{aligned} j_l(x) &= (-1)^l x^l \left(\frac{1}{x} \frac{d}{dx} \right)^{l-1} \cdot \frac{1}{x} \frac{d}{dx} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n+1)!} \\ &= x^l \sum_{n=l}^{\infty} \frac{2n(2n-2)\dots(2n-2(l-1))}{(2n+1)!} (-1)^{n+l} \cdot x^{2(n-l)}. \end{aligned}$$

Таким образом, при $x \rightarrow 0$ получаем асимптотику

$$j_l(x) = \frac{2^l l!}{(2l+1)!} x^l \cdot [1 + \mathcal{O}(x^2)] = \frac{x^l}{(2l+1)!!} \cdot [1 + \mathcal{O}(x^2)]. \quad (\text{F.8})$$

Итак, при малых значениях аргумента x все сферические функции Бесселя быстро стремятся к нулю, за исключением функции нулевого порядка (F.5), которая стремится к единице.

В дальнейшем нас будут особенно интересовать сферические функции Бесселя высокого порядка, $l \gg 1$. При $x < (l+1/2)$ они экспоненциально малы,

$$j_l(x) \simeq \frac{\exp \left\{ - \left(l + \frac{1}{2} \right) \left[\operatorname{Arch} \left(\frac{l+\frac{1}{2}}{x} \right) - \sqrt{1 - \frac{x^2}{\left(l + \frac{1}{2} \right)^2}} \right] \right\}}{2\sqrt{x} \left(\left(l - \frac{1}{2} \right)^2 - x^2 \right)^{1/4}} \quad (\text{F.9})$$

Способ получения этой асимптотики мы кратко обсудим ниже.

Перейдём к обсуждению поведения сферических функций Бесселя при больших значениях аргумента, $x \gg l$. Обращаясь к формуле (F.6), видим, что в этой асимптотике доминирует вклад, получающийся, когда все производные действуют только на тригонометрическую функцию, а не на стоящий при ней полином от x^{-1} . Поскольку $-d \sin x / dx = \sin(x - \pi/2)$, приходим к выводу, что при $x \gg l$ справедливо приближённое равенство

$$j_l(x) \approx \frac{\sin \left(x - \frac{\pi l}{2} \right)}{x}. \quad (\text{F.10})$$

Асимптотика для амплитуды осцилляций $\sim 1/x$ достигается довольно быстро, см. ниже, однако фазы точного решения и асимптотики (F.10) начинают совпадать только для очень больших значений аргумента, при $x \gg l$.

Вначале сферические функции Бесселя растут и достигают максимума, а затем они осциллируют, см. рис. F.1. Для функций большого порядка $l \gg 1$ можно найти приближённо положение первого пика $x = x_*$, считая $x \sim l \gg 1$. С этой целью перейдём к новой переменной $\xi = x/l$ и перепишем уравнение (F.1) в терминах функции $f(\xi) = j_l(l\xi)$:

$$\frac{1}{l^2} \frac{d^2 f}{d\xi^2} + \frac{2}{l^2} \frac{df}{\xi d\xi} + \left(1 - \frac{1 + \frac{1}{l}}{\xi^2} \right) f = 0. \quad (\text{F.11})$$

В точке максимума $\xi = \xi_*$ имеем $df/d\xi = 0$, поэтому в пределе $l \gg 1$ из (F.11) следует, что если в этой точке вторая производная не слишком большая, то должно приближённо зануляться выражение в скобках, откуда $\xi_* \approx 1 + 1/2l$. Для $l \gg 1$ экстремумов при $\xi < 1$ нет, поскольку из (F.11) следует, что это требовало бы почти

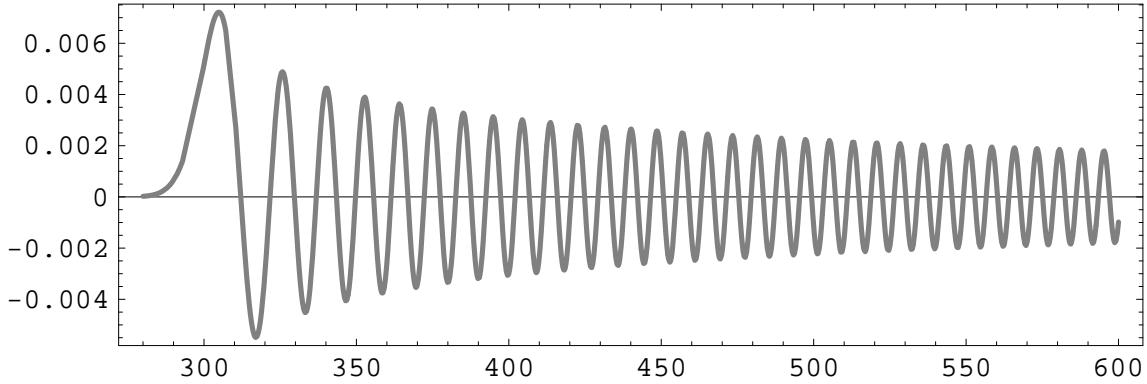


Рис. F.1: Сферическая функция Бесселя $j_l(x)$ порядка $l = 300$. Видно падение амплитуды, соответствующее асимптотике $\propto 1/x$.

точного зануления самой функции. Таким образом, положение первого максимума сферической функции Бесселя порядка l равно

$$x_{*,l} = \left(l + \frac{1}{2}\right) \left[1 + \mathcal{O}\left(\left(l + \frac{1}{2}\right)^{-2/3}\right)\right]; \quad (\text{F.12})$$

поправки к этой формуле можно найти в [6]. Для высоты первого максимума имеется оценка [6]

$$j_l(x_{*,l}) = 0.85 \left(l + \frac{1}{2}\right)^{-5/6} \cdot \left\{1 + \mathcal{O}\left[\left(l + \frac{1}{2}\right)^{-2/3}\right] + \dots\right\}. \quad (\text{F.13})$$

В связи со сказанным представляет интерес двойная асимптотика сферической функции Бесселя при больших значениях аргумента и порядка, $x, l \rightarrow \infty, x/(l + 1/2) = \text{const} > 1$: именно такая двойная асимптотика соответствует области осцилляций — первого максимума (F.12) и дальше. Для её получения мы воспользуемся широко известным результатом — аналогичной асимптотикой для обычных функций Бесселя $J_\nu(x)$ (см. [6]):

$$\begin{aligned} J_\nu(x) = & \sqrt{\frac{2}{\nu\pi\tg\beta}} \left\{ \cos\left(\nu\tg\beta - \nu\beta - \frac{\pi}{4}\right) \cdot \left[1 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\nu^2}\right)\right] \right. \\ & \left. + \frac{1}{\nu} \cdot \frac{1 + \frac{5}{3\tg^2\beta}}{8\tg\beta} \sin\left(\nu\tg\beta - \nu\beta - \frac{\pi}{4}\right) \cdot \left[1 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\nu^2}\right)\right] \right\}, \end{aligned} \quad (\text{F.14})$$

где $\cos\beta \equiv \nu/x$. Будем считать величину $\tg\beta$ не слишком малой, так что вторым слагаемым в (F.14) можно пренебречь. Тогда из (F.14), (F.2) будем иметь

$$j_l(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \frac{1}{\left[x^2 - \left(l + \frac{1}{2}\right)^2\right]^{1/4}} \cos \left[\sqrt{x^2 - \left(l + \frac{1}{2}\right)^2} - \left(l + \frac{1}{2}\right) \arccos \left(\frac{l + \frac{1}{2}}{x}\right) - \frac{\pi}{4} \right]. \quad (\text{F.15})$$

Как видно из рис. F.2, это очень хорошее приближение к сферическим функциям Бесселя порядка $l \gtrsim 5$. Из формулы (F.15) видно, что при $x \gg l$ восстанавливается

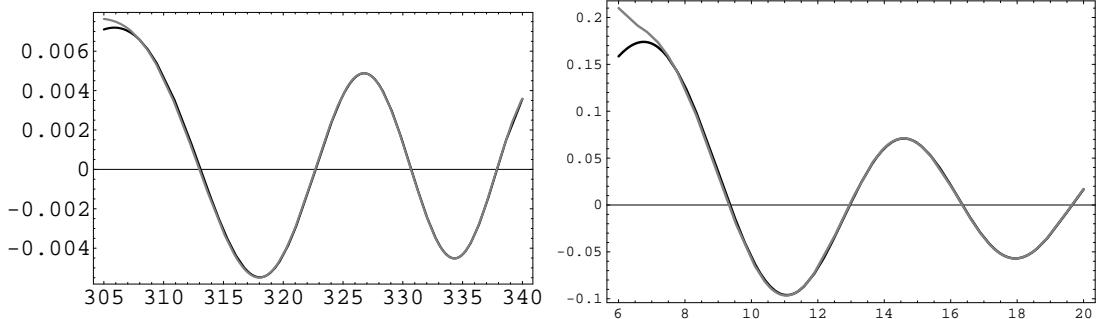


Рис. F.2: Графики (чёрные кривые) сферических функций Бесселя порядков $l = 300$ (слева) и $l = 5$ (справа) и им соответствующих приближений (F.15) (серые кривые). Видна высокая точность приближения (F.15), так что кривые почти всюду совпадают.

асимптотика (F.10). В области первых пиков $x = (l + 1/2)(1 + \epsilon)$, $\epsilon \ll 1$, получим из (F.15) в лидирующем порядке по ϵ :

$$j_l[(l + 1/2)(1 + \epsilon)] = \frac{1}{l + \frac{1}{2}} \frac{1}{(2\epsilon)^{1/4}} \cos\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\epsilon\sqrt{\epsilon} \cdot \left(l + \frac{1}{2}\right) - \frac{\pi}{4}\right). \quad (\text{F.16})$$

Отсюда следует, что ширины первых пиков имеют порядок $\Delta\epsilon \sim l^{-2/3}$, а в терминах аргумента x ширины первых пиков оцениваются как

$$\Delta x \sim l^{1/3} \ll l. \quad (\text{F.17})$$

Отметим, что асимптотическая формула (F.15) допускает аналитическое продолжение в область $x \ll l$. Не вдаваясь в детали, скажем, что осциллирующий косинус в (F.15) при таком продолжении превращается в экспоненту, затухающую при уменьшении x . Таким способом и находится асимптотика (F.9).

Нам в этой книге нередко встречаются свёртки сферических функций Бесселя высокого порядка с медленно меняющимися функциями,

$$\int f(k) j_l(k\eta) dk, \quad l \gg 1. \quad (\text{F.18})$$

Поскольку $j_l(k\eta)$ быстро осциллирует при $k\eta \gg l$ и экспоненциально мала при $k\eta \ll l$, интеграл здесь набирается в области $k\eta \sim l$, то есть в области первых пиков. Пусть $f(k)$ медленно меняется в этой области, а точнее $df/dk \cdot (\Delta(k\eta)/\eta) \ll f$, где $\Delta(k\eta)$ оценивается согласно (F.17). Иначе говоря, будем считать, что $df/dk \ll l^{-1/3}\eta f$. Тогда $f(k)$ можно считать постоянной в существенной для интеграла (F.18) области и записать

$$\int f(k) j_l(k\eta) dk \simeq f\left(\frac{l + \frac{1}{2}}{\eta}\right) \cdot \int dk j_l(k\eta).$$

Поскольку

$$\int dk j_l(k\eta) = \frac{\sqrt{\pi}}{2\eta} \frac{\Gamma\left(\frac{l+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{l+2}{2}\right)} \simeq \sqrt{\frac{\pi}{2l}} \frac{1}{\eta},$$

где последнее равенство справедливо при $l \gg 1$, мы получаем полезное приближённое равенство

$$\int f(k) j_l(k\eta) dk \simeq f\left(\frac{l + \frac{1}{2}}{\eta}\right) \sqrt{\frac{\pi}{2l}} \frac{1}{\eta}. \quad (\text{F.19})$$

Рассмотрим ещё интеграл от медленно меняющейся функции с двумя сферическими функциями Бесселя одинакового порядка $l \gg 1$,

$$\int dk \cdot k^2 f(k) j_l(k\eta) j_l(k\eta') .$$

Из-за быстрых осцилляций сферических функций Бесселя при $k\eta \gg l$ и их экспоненциальной малости при $k\eta \ll l$ этот интеграл заметно отличен от нуля, только если η' близко к η . Поэтому можно записать

$$\int dk \cdot k^2 f(k) j_l(k\eta) j_l(k\eta') \propto \delta(\eta' - \eta) ,$$

где коэффициент пропорциональности нам необходимо найти. Сделаем это, проинтегрировав левую часть с медленно меняющейся функцией $g(\eta')$. Воспользовавшись (F.19) сначала для взятия интеграла по η' в левой части, а затем и интеграла по k , получим

$$\begin{aligned} \int dk \cdot k^2 f(k) j_l(k\eta) \int d\eta' g(\eta') j_l(k\eta') &\approx \int dk k^2 f(k) j_l(k\eta) g\left(\frac{l+1/2}{k}\right) \sqrt{\frac{\pi}{2l}} \frac{1}{k} \\ &\approx \frac{\pi}{2l\eta} k f(k) g\left(\frac{l+1/2}{k}\right) \Big|_{k=(l+1/2)/\eta} \approx \frac{\pi}{2\eta^2} f\left(\frac{l+1/2}{\eta}\right) g(\eta) . \end{aligned}$$

Отсюда получаем окончательно приближённую формулу

$$\int dk \cdot k^2 f(k) j_l(k\eta) j_l(k\eta') \approx \frac{\pi}{2\eta^2} f\left(\frac{l+\frac{1}{2}}{\eta}\right) \cdot \delta(\eta - \eta') . \quad (\text{F.20})$$

В завершение раздела обсудим поведение первой производной сферической функции Бесселя $j'_l(x)$, которая также представляет для нас интерес. Из (F.8) получим, что в нуле производная стремится к нулю как

$$j'_l(x) = \frac{lx^{l-1}}{(2l+1)!!} .$$

Таким образом, все производные, кроме производной функции первого порядка, за-нуляются при $x = 0$. При больших l производная экспоненциально мала в области $x < (l + 1/2)$, как и сама сферическая функция Бесселя, см. (F.9). Двойная асимптотика производной при $l \gg 1$, $x \gg 1$, $x/(l + 1/2) = \text{const} > 1$ получается дифференцированием формулы (F.15). При этом лидирующая асимптотика возникает при дифференцировании косинуса, так что

$$j'_l(x) = -\frac{\left[x^2 - (l+\frac{1}{2})^2\right]^{1/4}}{x\sqrt{x}} \sin\left[\sqrt{x^2 - \left(l+\frac{1}{2}\right)^2} - \left(l+\frac{1}{2}\right) \arccos\left(\frac{l+\frac{1}{2}}{x}\right) - \frac{\pi}{4}\right] . \quad (\text{F.21})$$

В области малых ($x - l$) производная сферической функции Бесселя подавлена по сравнению с самой функцией. Подавление производной в начале осцилляций приводит к тому, что первый пик подавлен, а амплитуда осцилляций остаётся почти неизменной в довольно широкой области значений аргумента. Такое поведение определяется конкуренцией растущего множителя $[x^2 - (l+1/2)^2]^{1/4}$ и убывающего множителя $x^{-3/2}$. Результат этой конкуренции представлен на рис. F.3.

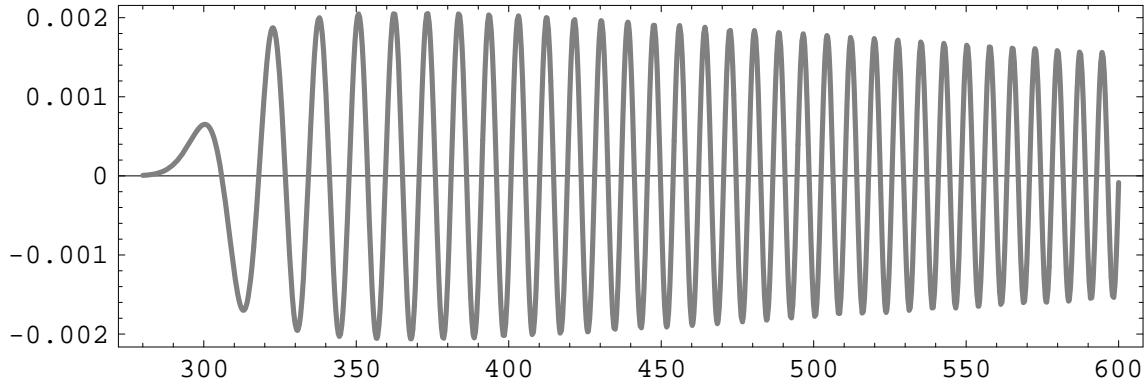


Рис. F.3: Производная сферической функции Бесселя $j_l''(x)$ порядка $l = 300$. Видно подавление амплитуды первой осцилляции и постоянство амплитуды в довольно широкой области значений аргумента $x \simeq 300 - 450$.

F.2 Полиномы Лежандра $P_n(x)$ и сферические гармоники $Y_{lm}(\mathbf{n})$

Полином Лежандра порядка n можно определить как конечное на отрезке $-1 \leq x \leq 1$ решение уравнения

$$(1 - x^2) \frac{d^2 P_n}{dx^2} - 2x \frac{dP_n}{dx} + n(n + 1) P_n = 0 , \quad (\text{F.22})$$

где n — целое неотрицательное число. Можно убедиться, что такое решение — это действительно полином. Принято нормировать полиномы Лежандра условием

$$P_n(1) = 1 . \quad (\text{F.23})$$

При такой нормировке удовлетворяются рекуррентные соотношения

$$(2n + 1) x P_n - n P_{n-1} = (n + 1) P_{n+1} , \quad (\text{F.24})$$

$$nx P_n - n P_{n-1} = (x^2 - 1) \frac{dP_n}{dx} . \quad (\text{F.25})$$

▷ Задача 5. Исходя из представления для полиномов Лежандра в виде ряда по x , убедиться в справедливости рекуррентных соотношений (F.24), (F.25).

▷ Задача 6. Убедиться, что из рекуррентных соотношений (F.24), (F.25) следует уравнение (F.22).

Из (F.22) и (F.23) очевидно, что

$$P_0(x) = 1 . \quad (\text{F.26})$$

Используя рекуррентную формулу (F.24), выпишем явно несколько первых полиномов Лежандра:

$$P_1(x) = x , \quad P_2(x) = \frac{3x^2 - 1}{2} , \quad P_3(x) = \frac{5x^3 - 3x}{2} . \quad (\text{F.27})$$

Пользуясь рекуррентными соотношениями (F.24), (F.25), можно найти для полинома Лежандра порядка n следующее компактное представление (формула Родрига):

$$P_n(x) = \frac{1}{n!2^n} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n . \quad (\text{F.28})$$

▷ Задача 7. Убедитесь явно, что функция (F.28) является решением уравнения (F.22).

▷ Задача 8. Доказать по индукции, что для полиномов (F.28) справедливы рекуррентные соотношения (F.24), (F.25).

Из представления (F.28) видно, что полином n -ого порядка не содержит в своём разложении степеней аргумента выше n . Из неё можно найти и явное выражение для полиномов. Для этого заметим, что

$$\frac{d^2}{dx^2} (x^2 - 1)^n = \frac{d^2}{dx^2} \sum_{m=0}^n (-1)^{n-m} \frac{n!x^{2m}}{m!(n-m)!} = \sum_{m=1}^n (-1)^{n-m} \frac{n!2m(2m-1)}{m!(n-m)!} x^{2m-2} . \quad (\text{F.29})$$

Поэтому из формулы (F.28) получаем

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n} \sum_{m=[n/2]}^n (-1)^{n-m} \frac{2m(2m-1)\dots(2m-n+1)}{m!(n-m)!} x^{2m-n} ,$$

где $[n/2]$ обозначает целую часть числа $n/2$. Для получения более компактной записи перейдём к суммированию по переменной $k = n - m$, после чего умножим на фактор $(n - 2k)!$ числитель и знаменатель каждого слагаемого. Это даёт окончательно

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{[n/2]} \frac{(-1)^k (2n-2k)! x^{n-2k}}{k! (n-k)! (n-2k)!} . \quad (\text{F.30})$$

Далее, из формулы (F.28) видно симметрийное свойство полиномов Лежандра при преобразовании чётности:

$$P_n(-x) = (-1)^n \cdot P_n(x) .$$

Формула (F.28) также позволяет эффективно вычислять интегралы с полиномами Лежандра. В качестве примера исследуем ортогональность полиномов. Для этого вычислим свёртку полинома n -ого порядка с x^m для $m < n$. Используя представление (F.28), запишем

$$\int_{-1}^1 x^m P_n(x) dx = \frac{1}{n!2^n} \int_{-1}^1 x^m \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n dx .$$

Производя m раз интегрирование по частям и замечая, что граничные слагаемые зanуляются из-за множителя $(x^2 - 1)$, который будет обязательно присутствовать, если раскрыть производную, получим

$$\int_{-1}^1 x^m P_n(x) dx = (-1)^m \frac{m!}{n!2^n} \int_{-1}^1 dx \frac{d^{n-m}}{dx^{n-m}} (x^2 - 1)^n = 0 .$$

Итак, интеграл от любой степени аргумента с полиномом Лежандра более высокой степени равен нулю. Как мы уже выяснили, полином Лежандра степени n содержит только степени аргумента не выше n . Отсюда сразу следует, что полиномы Лежандра различных порядков $m \neq n$ ортогональны друг другу,

$$\int_{-1}^1 P_n(x) P_m(x) dx = 0.$$

Найдём, чему равен интеграл от квадрата полинома Лежандра. Для этого вновь воспользуемся формулой Родрига (F.28) и возьмём интеграл n раз по частям:

$$\int_{-1}^1 P_n^2(x) dx = \frac{(-1)^n}{4^n (n!)^2} \int_{-1}^1 dx (x^2 - 1)^n \frac{d^{2n}}{dx^{2n}} (x^2 - 1)^n. \quad (\text{F.31})$$

Воспользовавшись (F.29), найдём, что

$$\frac{d^{2n}}{dx^{2n}} (x^2 - 1)^n = (2n)!.$$

Оставшийся в (F.31) интеграл является табличным

$$\int_{-1}^1 (x^2 - 1)^n dx = (-1)^n \frac{\sqrt{\pi} \Gamma(n+1)}{\Gamma(\frac{3}{2} + n)}.$$

Собирая все факторы, получим для (F.31)

$$\int_{-1}^1 dx P_n^2(x) = \frac{2}{2n+1}. \quad (\text{F.32})$$

Итак, полиномы Лежандра ортогональны на отрезке $-1 \leq x \leq 1$ и удовлетворяют нормировочному условию (F.32). С таким условием они образуют полную ортогональную систему на отрезке $-1 \leq x \leq 1$,

$$\int_{-1}^1 dx P_n(x) P_m(x) = \frac{2\delta_{nm}}{2n+1}. \quad (\text{F.33})$$

В основном тексте используется следующее разложение плоской волны в ряд по полиномам Лежандра:

$$e^{-ix \cos \theta} = \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) (-i)^l j_l(x) P_l(\cos \theta), \quad (\text{F.34})$$

где $j_l(x)$ — сферическая функция Бесселя порядка l , см. раздел F.1. Пользуясь ортогональностью полиномов Лежандра и вводя переменную $y = \cos \theta$, перепишем формулу (F.34) в следующем эквивалентном виде:

$$\int_{-1}^1 e^{-ixy} P_n(y) dy = 2(-i)^n j_n(x). \quad (\text{F.35})$$

Формула (F.35) означает, что с точностью до численного множителя сферическая функция Бесселя есть Фурье-образ полинома Лежандра того же порядка.

▷ Задача 9. Убедиться в справедливости формулы (F.35), используя представление Родрига (F.28) для полиномов Лежандра. Указание: воспользоваться для сферических функций Бесселя представлением, полученным в задаче 4 Приложения F.

Докажем справедливость соотношения (F.35) по индукции. Для $n = 0$ имеем $P_0(x) = 1$, $j_0(x) = \sin(x)/x$, поэтому равенство (F.35) справедливо. Для $n = 1$ $P_1(y) = y$, поэтому левую часть (F.35) удобно представить в следующем виде:

$$\frac{1}{-i} \frac{d}{dx} \int_{-1}^1 e^{-ixy} P_0(y) dy = \frac{2}{-i} \frac{d}{dx} j_0(x) .$$

В результате для $n = 1$ соотношение (F.35) принимает вид:

$$\frac{2}{-i} \frac{d}{dx} j_0(x) = -2ij_1(x) ,$$

что согласуется с (F.4). Таким образом, формула (F.35) справедлива и для $n = 1$.

Пусть формула (F.35) справедлива для $n = l$. Покажем, что тогда она справедлива и для $n = l + 1$. С этой целью заменим под интегралом в (F.35) полином $P_{l+1}(y)$ на линейную комбинацию полиномов младших порядков, используя рекуррентное соотношение (F.24),

$$\int_{-1}^1 e^{-ixy} P_{l+1}(y) dy = \frac{2l+1}{l+1} \int_{-1}^1 y e^{-ixy} P_l(y) dy - \frac{l}{l+1} \int_{-1}^1 e^{-ixy} P_{l-1}(y) dy . \quad (\text{F.36})$$

Второе слагаемое здесь известно по предположению индукции, а первое удобно представить в виде производной от $j_n(x)$, используя

$$\int_{-1}^1 y e^{-ixy} P_l(y) dy = \frac{1}{-i} \frac{d}{dx} \int_{-1}^1 e^{-ixy} P_l(y) dy = 2i(-i)^l \frac{d}{dx} j_l(x) ,$$

Собирая все слагаемые, получим для (F.36):

$$\int_{-1}^1 e^{-ixy} P_{l+1}(y) dy = \frac{2}{l+1} (-i)^{l+1} \left(l j_{l-1}(x) - (2l+1) \frac{d}{dx} j_l(x) \right) = 2(-i)^{l+1} j_{l+1}(x) ,$$

где последнее равенство следует из рекуррентного соотношения (F.4). Итак, формула (F.35) справедлива и для $n = l + 1$, а значит в силу принципа индукции справедлива для всех n .

При больших n для полиномов Лежандра справедлива асимптотическая формула (см., например, [6])

$$P_n(\cos \theta) = \sqrt{\frac{2}{n\pi \sin \theta}} \cos \left[\left(n + \frac{1}{2} \right) \theta - \frac{\pi}{4} \right] + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right) . \quad (\text{F.37})$$

Из неё следует, что при больших n функции $P_n(\cos \theta)$ осциллируют по θ с периодом $2\pi/n$.

В разных частях этой книги используется разложение функций, заданных на сфере единичного радиуса, по сферическим гармоникам $Y_{lm}(\mathbf{n}) \equiv Y_{lm}(\theta, \phi)$, где ϕ и θ — углы сферической системы координат. Сферические гармоники образуют на единичной сфере полную ортонормированную систему (см. подробности, например, в [42]). Напомним, что сферические гармоники можно записать через полиномы Лежандра. А именно (см., например², [42]),

$$Y_{lm}(\theta, \phi) = (-1)^{\frac{m+|m|}{2}} \cdot \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi} \frac{(l-|m|)!}{(l+|m|)!}} \sin^{|m|} \theta \cdot \frac{d^{|m|} P_l(\cos \theta)}{(d \cos \theta)^{|m|}} \cdot e^{im\phi} . \quad (\text{F.38})$$

²Обратим внимание на отличие формулы (F.38) от определения, используемого в [42], где в аналогичной формуле имеется дополнительный множитель i^l .

Сферические гармоники являются решениями уравнения

$$\frac{\partial^2 Y_{lm}}{\partial \theta^2} + \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \frac{\partial Y_{lm}}{\partial \theta} + l(l+1) Y_{lm} - \frac{m^2}{\sin^2 \theta} Y_{lm} = 0 , \quad (\text{F.39})$$

ортогональными на сфере единичного радиуса,

$$\int d\mathbf{n} Y_{lm}^*(\mathbf{n}) Y_{l'm'}(\mathbf{n}) = \delta_{ll'} \delta_{mm'} .$$

▷ Задача 10. Показать, что сферические гармоники, определённые согласно (F.38), удовлетворяют уравнению (F.39).

Асимптотическая формула для сферических гармоник, аналогичная (F.37), имеет вид

$$Y_{lm}(\theta, \phi) = \frac{1}{\pi \sqrt{\sin \theta}} \cos \left[\left(l + \frac{1}{2} \right) \theta - \frac{\pi}{4} + \frac{\pi m}{2} \right] \cdot e^{im\phi} + O\left(\frac{1}{l}\right) . \quad (\text{F.40})$$

Эта формула справедлива при $l \gg 1, l \gg m$. Отметим, что формулы (F.37) и (F.40) перестают работать вблизи полюсов сферы, а именно, при $\sin \theta \lesssim n^{-1}$.

Монографии, обзоры

Ниже приведён далеко не полный список монографий и обзоров, в которых рассматриваются вопросы, затронутые в этой книге.

Монографии

- Я. Б. Зельдович, И. Д. Новиков, *Строение и эволюция Вселенной*, Наука, Москва, 1975.
- А. А. Гриб, С. Г. Мамаев, В. М. Мостепаненко, *Квантовые эффекты в интенсивных внешних полях*, Атомиздат, Москва, 1980.
- Ya. B. Zeldovich, I. D. Novikov, *The Structure and Evolution of the Universe (Relativistic Astrophysics, volume 2)*, University of Chicago Press, 1983.
- Н. Биррелл, П. Девис, *Квантовые поля в искривленном пространстве-времени*, Мир, Москва, 1984.
- А. Д. Долгов, Я. Б. Зельдович, М. В. Сажин, *Космология ранней Вселенной*, Изд-во МГУ, Москва, 1988.
- А. Д. Линде, *Физика элементарных частиц и инфляционная космология*, Наука, Москва, 1990.
- E. W. Kolb, M. S. Turner, *The Early Universe*, Addison-Wesley, Redwood City, 1990 – Frontiers in physics, 69.
- P. J. E. Peebles, *Principles of Physical Cosmology*, Princeton University Press, 1993.
- J. A. Peacock, *Cosmological Physics*, Cambridge University Press, 1999.
- А. В. Захаров, *Макроскопическая гравитация*, Янус-К, Москва, 2000.
- A. R. Liddle, D.H. Lyth, *Cosmological Inflation and Large Scale Structure*, Cambridge University Press, 2000.
- P. Coles and F. Lucchin, *Cosmology: The Origin and evolution of cosmic structure*, Chichester, UK: Wiley, 2002.
- П. Д. Насельский, Д. И. Новиков, И. Д. Новиков, *Реликтовое излучение Вселенной*, Наука, Москва, 2003.
- S. Dodelson, *Modern Cosmology*, Academic Press, Amsterdam, 2003.
- V. Mukhanov, *Physical Foundations of Cosmology*, Cambridge University Press, 2005.

- P. Naselsky, D. Novikov, I. Novikov, *The Physics of Cosmic Microwave Background*, Cambridge University Press, 2006.
- S. Weinberg, *Cosmology*, Oxford University Press, 2008.
- M. Giovannini, *A Primer on the Physics of the Cosmic Microwave Background*, World Scientific, Singapore, 2008.
- A. R. Liddle, D.H. Lyth, *The Primordial Density Perturbation: Cosmology, Inflation and the Origin of Structure*, Cambridge University Press, 2009.
- Б. Н. Лукаш, Е. В. Михеева, *Физическая космология*. Физматлит, Москва, 2009.

Обзоры

Там, где это необходимо, в скобках указаны номера соответствующих Глав книги. Перед всеми электронными препринтами для получения их электронного адреса надо поставить <http://arxiv.org/abs/>

- H. Kodama and M. Sasaki, *Cosmological perturbation theory*, Prog. Theor. Phys. Suppl. **78** (1984) 1.
- R. H. Brandenberger, *Quantum Field Theory Methods And Inflationary Universe Models*, Rev. Mod. Phys. **57** (1985) 1.
- V. F. Mukhanov, H. A. Feldman and R. H. Brandenberger, *Theory of cosmological perturbations*, Phys. Rept. **215** (1992) 203.
- V. N. Lukash, I. D. Novikov, *Lectures on the very early Universe*, in 'Observational and Physical Cosmology', eds. F. Sanchez et al, Cambridge University Press (1992) 3.
- A. R. Liddle and D. H. Lyth, *The cold dark matter density perturbation*, Phys. Rept. **231** (1993) 1 [arXiv:astro-ph/9303019].
- S. D. M. White, *Formation and evolution of galaxies: Lectures given at Les Houches, August 1993*, 349-430 in Cosmology and Large scale structure / Eds. Schaeffer R., Silk J., Spiro M., Zinn-Justin. J., N.Y., Elsevier, 1996. 968p.; arXiv:astro-ph/9410043 (Глава 7).
- А. В. Гуревич, К. П. Зыбин, *Крупномасштабная структура Вселенной. Аналитическая теория*, УФН, **165** (1995) 723 (Глава 1).
- A. Kosowsky, *Cosmic microwave background polarization*, Annals Phys. **246** (1996) 49 [arXiv:astro-ph/9501045] (Глава 10).
- V. N. Lukash, *Formation of the large scale structure of the Universe*, in 'Cosmology and Gravitation, II', ed. M. Novello, Editions Frontieres (1996) 288.
- V. N. Lukash, *Physics of the early Universe*, in 'Cosmology: The Physics of the Universe', eds. B.A. Robson et al., World Scientific (1996) 213.
- J. A. Peacock, *Cosmology and particle physics*, Proc. 1998 European School of High-Energy Physics, St. Andrews, Scotland, 23 Aug - 5 Sep 1998.
- M. S. Turner and J. A. Tyson, *Cosmology at the millennium*, Rev. Mod. Phys. **71** (1999) S145 [arXiv:astro-ph/9901113].

- A. Riotto and M. Trodden, *Recent progress in baryogenesis*, Ann. Rev. Nucl. Part. Sci. **49** (1999) 35 [arXiv:hep-ph/9901362] (Глава 15).
- D. H. Lyth and A. Riotto, *Particle physics models of inflation and the cosmological density perturbation*, Phys. Rept. **314** (1999) 1 [arXiv:hep-ph/9807278].
- V. N. Lukash, *The very early Universe*, [arXiv:astro-ph/9910009].
- A. D. Linde, *Inflationary cosmology*, Phys. Rept. **333** (2000) 575.
- E. Bertschinger, *Cosmological perturbation theory and structure formation*, 1.1 in Proceedings of Cosmology 2000 / Eds. Bento M.C., Bertolami O., Teodoro L. [arXiv:astro-ph/0101009].
- A. D. Dolgov, *Cosmological implications of neutrinos*, Surveys High Energy Phys. **17** (2002) 91 [arXiv:hep-ph/0208222] (Глава 8).
- A. D. Dolgov, *Neutrinos in cosmology*, Phys. Rept. **370** (2002) 333 [arXiv:hep-ph/0202122] (Глава 8).
- K. Enqvist and A. Mazumdar, *Cosmological consequences of MSSM flat directions*, Phys. Rept. **380** (2003) 99 [arXiv:hep-ph/0209244] (Главы 12, 13, 14).
- W. L. Freedman and M. S. Turner, *Measuring and understanding the Universe*, Rev. Mod. Phys. **75** (2003) 1433 [arXiv:astro-ph/0308418].
- I. I. Tkachev, *Astroparticle physics*, Proc. 2003 European School on High-Energy Physics, Tsakhkadzor, Armenia, 24 Aug - 6 Sep 2003 [arXiv:hep-ph/0405168].
- M. Gasperini and G. Veneziano, *The pre-big bang scenario in string cosmology*, Phys. Rept. **373** (2003) 1 [arXiv:hep-th/0207130] (Глава 16).
- М. В. Сажин, *Анизотропия и поляризация реликтового излучения. Последние данные*, УФН **174** (2004) 197 (Главы 9, 10).
- N. Bartolo, E. Komatsu, S. Matarrese and A. Riotto, *Non-Gaussianity from inflation: Theory and observations*, Phys. Rept. **402** (2004) 103 [arXiv:astro-ph/0406398] (Главы 9, 14).
- A. Challinor, *Anisotropies in the cosmic microwave background*, Lect. Notes Phys. 2004. **653**. 71 [arXiv:astro-ph/0403344] (Главы 9, 10).
- V. Rubakov, *Introduction to cosmology*, PoS **RTN2005** (2005) 003.
- M. Giovannini, *Theoretical tools for the physics of CMB anisotropies*, Int. J. Mod. Phys. D **14** (2005) 363 [arXiv:astro-ph/0412601].
- B. A. Bassett, S. Tsujikawa and D. Wands, *Inflation dynamics and reheating*, Rev. Mod. Phys. **78** (2006) 537 [arXiv:astro-ph/0507632].
- A. Lewis and A. Challinor, *Weak gravitational lensing of the CMB*, Phys. Rept. **429** (2006) 1 [arXiv:astro-ph/0601594] (Главы 9, 10).
- S. Hannestad, *Primordial neutrinos*, Ann. Rev. Nucl. Part. Sci. **56** (2006) 137 [arXiv:hep-ph/0602058] (Глава 8).
- J. Lesgourges and S. Pastor, *Massive neutrinos and cosmology*, Phys. Rept. **429**, 307 (2006) [arXiv:astro-ph/0603494] (Глава 8).
- R. Brandenberger, *Topics in cosmology*, PoS **P2GC** (2006) 007 [arXiv:hep-th/0701157].

- N. Aghanim, S. Majumdar and J. Silk, *Secondary anisotropies of the CMB*, Rept. Prog. Phys. **71** (2008) 066902 [arXiv:0711.0518 [astro-ph]] (Главы 9, 10).
- C. G. Tsagas, A. Challinor and R. Maartens, *Relativistic cosmology and large-scale structure*, Phys. Rept. **465** (2008) 61 [arXiv:0705.4397 [astro-ph]].
- L. Kofman, *Preheating after inflation*, Lect. Notes Phys. **738** (2008) 55 (Глава 15).
- A. Linde, *Inflationary cosmology*, Lect. Notes Phys. **738** (2008) 1 [arXiv:0705.0164 [hep-th]].
- J. L. Lehners, *Ekpyrotic and cyclic cosmology*, Phys. Rept. **465**, 223 (2008) [arXiv:0806.1245 [astro-ph]] (Глава 16).

Литература

- [1] Горбунов Д. С., Рубаков В. А., *Введение в теорию ранней Вселенной: Теория горячего Большого взрыва*. — М.: Издательство ЛКИ, 2008. — 552 с.
- [2] E. Komatsu *et al.* [WMAP Collaboration], *Astrophys. J. Suppl.* **180** (2009) 330 [[arXiv:0803.0547 \[astro-ph\]](https://arxiv.org/abs/0803.0547)].
- [3] <http://pdg.lbl.gov>
- [4] M. Bucher, K. Moodley and N. Turok, *Phys. Rev. D* **62** (2000) 083508 [[arXiv:astro-ph/9904231](https://arxiv.org/abs/astro-ph/9904231)].
- [5] N. Bartolo, E. Komatsu, S. Matarrese and A. Riotto, *Phys. Rept.* **402** (2004) 103 [[arXiv:astro-ph/0406398](https://arxiv.org/abs/astro-ph/0406398)].
- [6] Абрамович М., Стиган И., *Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и таблицами*. — М.: НАУКА, 1979. — 832 с.
- [7] V. J. Martinez, *Lect. Notes Phys.* **665** (2009) 269 [[arXiv:0804.1536 \[astro-ph\]](https://arxiv.org/abs/0804.1536)].
- [8] M. Tegmark *et al.* [SDSS Collaboration], *Astrophys. J.* **606** (2004) 702 [[arXiv:astro-ph/0310725](https://arxiv.org/abs/astro-ph/0310725)].
- [9] А. Д. Сахаров, *ЖЭТФ* **49** (1965) 345.
- [10] D. J. Eisenstein *et al.* [SDSS Collaboration], *Astrophys. J.* **633** (2005) 560 [[arXiv:astro-ph/0501171](https://arxiv.org/abs/astro-ph/0501171)].
- [11] W. J. Percival, S. Cole, D. J. Eisenstein, R. C. Nichol, J. A. Peacock, A. C. Pope and A. S. Szalay, *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* **381** (2007) 1053 [[arXiv:0705.3323 \[astro-ph\]](https://arxiv.org/abs/0705.3323)].
- [12] L. R. Abramo, R. C. Batista, L. Liberato and R. Rosenfeld, *JCAP* **0711** (2007) 012 [[arXiv:0707.2882 \[astro-ph\]](https://arxiv.org/abs/0707.2882)].
- [13] J. M. Bardeen, J. R. Bond, N. Kaiser and A. S. Szalay, *Astrophys. J.* **304** (1986) 15.
- [14] J. R. Bond, S. Cole, G. Efstathiou and N. Kaiser, *Astrophys. J.* **379** (1991) 440.
- [15] R. K. Sheth, H. J. Mo and G. Tormen, *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* **323** (2001) 1 [[arXiv:astro-ph/9907024](https://arxiv.org/abs/astro-ph/9907024)].
- [16] R. K. Sheth and G. Tormen, *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* **329** (2002) 61 [[arXiv:astro-ph/0105113](https://arxiv.org/abs/astro-ph/0105113)].

- [17] A. Vikhlinin *et al.*, *Astrophys. J.* **692** (2009) 1060 [arXiv:0812.2720 [astro-ph]].
- [18] Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М., *Теоретическая физика*; в 10 т. Т. IV: В.Б. Берестецкий, Е.М. Лифшиц, Л.П. Питаевский, *Квантовая электродинамика*. — 4-е изд., испр. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2001. — 720 с.
- [19] Боголюбов Н. Н., Ширков Д. В., *Введение в теорию квантованных полей*. — 4-е изд., испр. — М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1984. — 600 с.
- [20] Ициксон К., Зюбер Ж.-Б., *Квантовая теория поля*; в 2 т.: Пер. с англ. — М.: Мир, 1984.
- [21] С. Вайнберг, *Квантовая теория поля*; в 3 т.— М.: УРСС, 2003.
- [22] D. Gorbunov, A. Khmelnitsky and V. Rubakov, *JHEP* **0812** (2008) 055 [arXiv:0805.2836 [hep-ph]].
- [23] A. A. Klypin, A. V. Kravtsov, O. Valenzuela and F. Prada, *Astrophys. J.* **522** (1999) 82 [arXiv:astro-ph/9901240].
- [24] B. Moore, S. Ghigna, F. Governato, G. Lake, T. R. Quinn, J. Stadel and P. Tozzi, *Astrophys. J.* **524** (1999) L19.
- [25] A. Tikhonov and A. Klypin, *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* **395** (2009) 1915 [arXiv:0807.0924 [astro-ph]].
- [26] A. V. Tikhonov, S. Gottloeber, G. Yepes and Y. Hoffman, “The sizes of mini-voids in the local universe: an argument in favor of a warm dark matter model?,” arXiv:0904.0175 [astro-ph.CO].
- [27] M. Viel, M. G. Haehnelt and V. Springel, *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* **354** (2004) 684 [arXiv:astro-ph/0404600].
- [28] J. D. Simon and M. Geha, *Astrophys. J.* **670** (2007) 313 [arXiv:0706.0516 [astro-ph]].
- [29] A. Boyarsky, O. Ruchayskiy and D. Iakubovskyi, *JCAP* **0903**, 005 (2009) [arXiv:0808.3902 [hep-ph]].
- [30] D. Gorbunov, A. Khmelnitsky and V. Rubakov, *JCAP* **0810** (2008) 041 [arXiv:0808.3910 [hep-ph]].
- [31] U. Seljak, A. Makarov, P. McDonald and H. Trac, *Phys. Rev. Lett.* **97** (2006) 191303 [arXiv:astro-ph/0602430].
- [32] A. Boyarsky, D. Iakubovskyi, O. Ruchayskiy and V. Savchenko, *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* **387** (2008) 1361 [arXiv:0709.2301 [astro-ph]].
- [33] R. Trotta and A. Melchiorri, *Phys. Rev. Lett.* **95** (2005) 011305 [arXiv:astro-ph/0412066].
- [34] J. Lesgourges and S. Pastor, *Phys. Rept.* **429**, 307 (2006) [arXiv:astro-ph/0603494].
- [35] V. Barger, D. Marfatia and A. Tregre, *Phys. Lett. B* **595** (2004) 55 [arXiv:hep-ph/0312065].

- [36] M. Tegmark *et al.* [SDSS Collaboration], Phys. Rev. D **74** (2006) 123507 [arXiv:astro-ph/0608632].
- [37] S. Weinberg, Phys. Rev. D **69** (2004) 023503 [arXiv:astro-ph/0306304].
- [38] S. Bashinsky, “Coupled evolution of primordial gravity waves and relic neutrinos,” arXiv:astro-ph/0505502.
- [39] Y. Zhang, W. Zhao, T. Xia and Y. Yuan, Phys. Rev. D **74** (2006) 083006 [arXiv:astro-ph/0508345].
- [40] S. P. Goldman, Phys. Rev. A **40** (1989) 1185.
- [41] Насельский П. Д., Новиков Д. И., Новиков И.Д., *Реликтовое излучение Вселенной*. — М.: Наука, 2003. — 390 с.
- [42] Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М., *Теоретическая физика*; в 10 т. Т. III: *Квантовая механика (нерелятивистская теория)*. — 5-е изд., стереот. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2001. — 808 с.
- [43] C. Copi, D. Huterer, D. Schwarz and G. Starkman, Phys. Rev. D **75**, 023507 (2007) [arXiv:astro-ph/0605135].
- [44] C. L. Reichardt *et al.*, Astrophys. J. **694** (2009) 1200 [arXiv:0801.1491 [astro-ph]].
- [45] <http://map.gsfc.nasa.gov>
- [46] G. Hinshaw *et al.* [WMAP Collaboration], Astrophys. J. Suppl. **180**, 225 (2009) [arXiv:0803.0732 [astro-ph]].
- [47] <http://cmb.phys.cwru.edu/boomerang>
- [48] <http://cosmology.berkeley.edu/group/swlh/acbar/index.html>
- [49] A. Cabre, E. Gaztanaga, M. Manera, P. Fosalba and F. Castander, Mon. Not. Roy. Astron. Soc. Lett. **372** (2006) L23 [arXiv:astro-ph/0603690].
- [50] T. Giannantonio *et al.*, Phys. Rev. D **74** (2006) 063520 [arXiv:astro-ph/0607572].
- [51] W. Hu, Astrophys. J. **506**, 485 (1998) [arXiv:astro-ph/9801234].
- [52] W. Hu, D. J. Eisenstein, M. Tegmark and M. J. White, Phys. Rev. D **59** (1999) 023512 [arXiv:astro-ph/9806362].
- [53] B. Li, J. D. Barrow, D. F. Mota and H. Zhao, Phys. Rev. D **78** (2008) 064021 [arXiv:0805.4400 [gr-qc]].
- [54] R. E. Lopez, S. Dodelson, R. J. Scherrer and M. S. Turner, Phys. Rev. Lett. **81** (1998) 3075 [arXiv:astro-ph/9806116].
- [55] A. Challinor, “Anisotropies in the cosmic microwave background,” arXiv:astro-ph/0403344.
- [56] I. A. Strukov, A. A. Bryukhanov, D. P. Skulachev, and M. V. Sazhin, Pis’ma Astron. Zh. **18** (1992) 387 [Sov. Astron. Lett. **18** (1992) 153].

- [57] G. F. Smoot *et al.*, *Astrophys. J.* **396**, L1 (1992); C. L. Bennett *et al.*, *Astrophys. J.* **464**, L1 (1996) [arXiv:astro-ph/9601067].
- [58] E. Calabrese, A. Slosar, A. Melchiorri, G. F. Smoot and O. Zahn, *Phys. Rev. D* **77**, 123531 (2008) [arXiv:0803.2309 [astro-ph]].
- [59] <http://lambda.gsfc.nasa.gov/toolbox>
- [60] M. R. Nolta *et al.* [WMAP Collaboration], *Astrophys. J. Suppl.* **180**, 296 (2009) [arXiv:0803.0593 [astro-ph]].
- [61] A. Challinor, “Constraining fundamental physics with the cosmic microwave background,” arXiv:astro-ph/0606548.
- [62] J. Kovac, E. M. Leitch, C. Pryke, J. E. Carlstrom, N. W. Halverson and W. L. Holzapfel, *Nature* **420** (2002) 772 [arXiv:astro-ph/0209478].
- [63] C. Pryke *et al.* [QUaD collaboration], *Astrophys. J.* **692** (2009) 1247 [arXiv:0805.1944 [astro-ph]].
- [64] A. Challinor, *Lect. Notes Phys.* **653** (2004) 71 [arXiv:astro-ph/0502093].
- [65] M. Kaplinghat, L. Knox and Y. S. Song, *Phys. Rev. Lett.* **91** (2003) 241301 [arXiv:astro-ph/0303344].
- [66] U. Seljak and A. Slosar, *Phys. Rev. D* **74** (2006) 063523 [arXiv:astro-ph/0604143].
- [67] A. A. Starobinsky, *JETP Lett.* **30** (1979) 682 [*Pisma Zh. Eksp. Teor. Fiz.* **30** (1979) 719].
- [68] A. A. Starobinsky, *Phys. Lett. B* **91** (1980) 99.
- [69] A. H. Guth, *Phys. Rev. D* **23** (1981) 347.
- [70] A. D. Linde, *Phys. Lett. B* **129** (1983) 177.
- [71] D. H. Lyth and A. Riotto, *Phys. Rept.* **314** (1999) 1 [arXiv:hep-ph/9807278].
- [72] S. Kachru, R. Kallosh, A. Linde and S. P. Trivedi, *Phys. Rev. D* **68** (2003) 046005 [arXiv:hep-th/0301240].
- [73] S. Kachru, R. Kallosh, A. Linde, J. M. Maldacena, L. McAllister and S. P. Trivedi, *JCAP* **0310** (2003) 013 [arXiv:hep-th/0308055].
- [74] A. D. Linde, *Phys. Lett. B* **108** (1982) 389.
- [75] A. Albrecht and P. J. Steinhardt, *Phys. Rev. Lett.* **48** (1982) 1220.
- [76] A. D. Linde, *Phys. Rev. D* **49** (1994) 748 [arXiv:astro-ph/9307002].
- [77] V. F. Mukhanov and G. V. Chibisov, *JETP Lett.* **33** (1981) 532 [*Pisma Zh. Eksp. Teor. Fiz.* **33** (1981) 549].
- [78] S. W. Hawking, *Phys. Lett. B* **115** (1982) 295.

- [79] A. A. Starobinsky, Phys. Lett. B **117** (1982) 175.
- [80] A. H. Guth and S. Y. Pi, Phys. Rev. Lett. **49** (1982) 1110.
- [81] J. M. Bardeen, P. J. Steinhardt and M. S. Turner, Phys. Rev. D **28** (1983) 679.
- [82] V. A. Rubakov, M. V. Sazhin and A. V. Veryaskin, Phys. Lett. B **115** (1982) 189.
- [83] R. Fabbri and M. D. Pollock, Phys. Lett. B **125** (1983) 445.
- [84] V. N. Lukash, JETP Lett. **31** (1980) 596 [Pisma Zh. Eksp. Teor. Fiz. **31** (1980) 631].
- [85] V. N. Lukash, Sov. Phys. JETP **52** (1980) 807 [Zh. Eksp. Teor. Fiz. **79** (1980) 1601].
- [86] L. P. Grishchuk, Sov. Phys. JETP **40** (1975) 409 [Zh. Eksp. Teor. Fiz. **67** (1974) 825].
- [87] Mukhanov V., *Physical foundations of cosmology*. — Cambridge, UK: Univ. Pr., 2005. — 280 p.
- [88] F. L. Bezrukov and M. Shaposhnikov, Phys. Lett. B **659** (2008) 703 [arXiv:0710.3755 [hep-th]].
- [89] L. F. Abbott and M. B. Wise, Nucl. Phys. B **244** (1984) 541.
- [90] A. A. Starobinsky, Sov. Astron. Lett. **11** (1985) 133.
- [91] T. L. Smith, M. Kamionkowski and A. Cooray, Phys. Rev. D **73** (2006) 023504 [arXiv:astro-ph/0506422].
- [92] Barrow J. D., Tipler F. J., *The Anthropic Cosmological Principle*. — Oxford, UK: Oxford University Pr., 1986. — 706 p.
- [93] S. Weinberg, Rev. Mod. Phys. **61** (1989) 1.
- [94] A. Linde, “Inflation, quantum cosmology and the anthropic principle,” 426-458 in *Science and Ultimate Reality: From Quantum to Cosmos*. Edited by Barrow J.D., Davies P.C.W., Harper C.L., Cambridge University Press, 2003, [arXiv:hep-th/0211048].
- [95] J. Polchinski, “The cosmological constant and the string landscape,” 216-236 in *PROCEEDINGS of 23rd Solvay Conference in Physics: The Quantum Structure of Space and Time*. Edited by Gross D., M. Henneaux M., Hackensack A. Sevrin., World Scientific, 2007, 272p [arXiv:hep-th/0603249].
- [96] Линде А.Д., *Физика элементарных частиц и инфляционная космология*. — М.: Наука, 1990. — 280 c.
- [97] M. S. Turner, Phys. Rept. **197** (1990) 67.
- [98] E. P. S. Shellard and R. A. Battye, Phys. Rept. **307** (1998) 227 [arXiv:astro-ph/9808220].
- [99] A. D. Linde, Phys. Lett. B **259** (1991) 38.

- [100] M. Dine and A. Anisimov, JCAP **0507**, 009 (2005) [arXiv:hep-ph/0405256].
- [101] D. H. Lyth and E. D. Stewart, Phys. Rev. D **46**, 532 (1992).
- [102] L. Kofman, A. D. Linde and A. A. Starobinsky, Phys. Rev. D **56** (1997) 3258 [arXiv:hep-ph/9704452].
- [103] R. Micha and I. I. Tkachev, Phys. Rev. D **70** (2004) 043538 [arXiv:hep-ph/0403101].
- [104] L. Kofman, A. D. Linde and A. A. Starobinsky, Phys. Rev. Lett. **73** (1994) 3195 [arXiv:hep-th/9405187].
- [105] Y. Shtanov, J. H. Traschen and R. H. Brandenberger, Phys. Rev. D **51** (1995) 5438 [arXiv:hep-ph/9407247].
- [106] Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М., *Теоретическая физика*; в 10 т. Т. I: *Механика*. — 5-е изд., стереот. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2001. — 224 с.
- [107] S. Khlebnikov, L. Kofman, A. D. Linde and I. Tkachev, Phys. Rev. Lett. **81** (1998) 2012 [arXiv:hep-ph/9804425].
- [108] S. Y. Khlebnikov and I. I. Tkachev, Phys. Rev. D **56** (1997) 653 [arXiv:hep-ph/9701423].
- [109] J. F. Dufaux, G. N. Felder, L. Kofman and O. Navros, JCAP **0903** (2009) 001 [arXiv:0812.2917 [astro-ph]].
- [110] M. Gasperini and G. Veneziano, Phys. Rept. **373** (2003) 1 [arXiv:hep-th/0207130].
- [111] J. M. Cline, S. Jeon and G. D. Moore, Phys. Rev. D **70**, 043543 (2004) [arXiv:hep-ph/0311312].
- [112] Рубаков В.А., Тиняков П.Г., УФН **178** (2008) 785; V. A. Rubakov and P. G. Tinyakov, Phys. Usp. **51**, 759 (2008) [arXiv:0802.4379 [hep-th]].
- [113] E. I. Buchbinder, J. Khoury and B. A. Ovrut, Phys. Rev. D **76** (2007) 123503 [arXiv:hep-th/0702154].
- [114] P. Creminelli and L. Senatore, JCAP **0711** (2007) 010 [arXiv:hep-th/0702165].
- [115] J. L. Lehners, Phys. Rept. **465**, 223 (2008) [arXiv:0806.1245 [astro-ph]].
- [116] J. L. Lehners, P. McFadden, N. Turok and P. J. Steinhardt, Phys. Rev. D **76**, 103501 (2007) [arXiv:hep-th/0702153].
- [117] D. Wands, “Cosmological perturbations through the big bang,” arXiv:0809.4556 [astro-ph].
- [118] V. A. Rubakov, JCAP **0909** (2009) 030 [arXiv:0906.3693 [hep-th]].
- [119] Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М., *Теоретическая физика*; в 10 т. Т. II: *Теория поля*. — 8-е изд., стереот. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2001. — 536 с.
- [120] J. K. Erickson, D. H. Wesley, P. J. Steinhardt and N. Turok, Phys. Rev. D **69** (2004) 063514 [arXiv:hep-th/0312009].

- [121] Рубаков В.А., *Классические калибровочные поля* — М.: Эдиториал УРСС, 1999.
— 336 с.