

# Лекции по общей теории относительности

Катанаев Михаил Орионович<sup>1</sup>

Математический институт имени В. А. Стеклова  
Российской Академии Наук

13 мая 2018 г.

<sup>1</sup>Любые замечания, указания на ошибки, неточности и опечатки прошу отправлять на e-mail: [katanaev@mi.ras.ru](mailto:katanaev@mi.ras.ru)



# Основные обозначения и соглашения

Дифференцирование выполняется раньше алгебраических операций.

$\mathbb{Z} := \{\dots - 1, 0, 1, \dots\}$	– группа целых чисел по сложению,
$\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$	– поле рациональных, вещественных, комплексных чисел,
$\mathbb{R}_+$	– множество положительных вещественных чисел,
$\mathbb{R}^\times := \mathbb{R} \setminus \{0\}$	– группа вещественных чисел по умножению,
$\dagger$	– комплексное или эрмитово сопряжение,
$:=$	– равно по определению,
$\equiv$	– тождественно равно,
$\Leftrightarrow$	– эквивалентно,
$x$ и $(x^1, \dots, x^n)$	– точка многообразия и ее координаты,
$(x^\alpha) = (x^0, x^\mu) = (x^0, \mathbf{x})$	– декартовы координаты в пространстве Минковского, или координаты на псевдоримановом многообразии,
$\partial_\alpha := \frac{\partial}{\partial x^\alpha}$	– частная производная,
$\partial_{\alpha\beta}^2 := \frac{\partial^2}{\partial x^\alpha \partial x^\beta}$	– частная производная второго порядка,
$\nabla_\alpha$	– ковариантная производная,
$\Delta$	– оператор Лапласа или Лапласа–Бельтрами,
$\square$	– оператор Даламбера, конец доказательства, примера или определения,
$(\partial f)^2 := g^{\alpha\beta} \partial_\alpha f \partial_\beta f$	– квадрат градиента функции $f$ ,
$g_{\alpha\beta}$	– компоненты метрики,
$g := \det(g_{\alpha\beta})$	– определитель метрики,
$e_\alpha^a$	– компоненты репера,
$\sqrt{ g } = \det(e_\alpha^a)$	– элемент объема (определитель репера),
$v := dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n \sqrt{ g }$	– форма объема на (псевдо)римановом многообразии $\mathbb{M}$ ,
$e$	– единица группы,
$e$	– основание натурального логарифма,
$\Gamma_{\alpha\beta}^\gamma$	– компоненты аффинной связности,
$\omega_{\alpha a}^b$	– компоненты линейной или лоренцевой связности,
$\text{sgn } \sigma(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$	– знак перестановки $\sigma$ индексов $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ .

Некоторые многообразия и классы объектов имеют специальные обозначения:

$\mathbb{R}^n$	– $n$ -мерное евклидово пространство,
$\mathbb{R}_+^n$	– подпространство в $\mathbb{R}^n$ , определяемое условием $x^n > 0$ ,
$\mathbb{R}^{1,n-1}$	– $n$ -мерное пространство Минковского,
$\mathbb{S}_r^n$	– $n$ -мерная сфера радиуса $r$ ,
$\mathbb{B}_r^n$	– $n$ -мерный шар радиуса $r$ ,

$\mathcal{C}^k(\mathbb{M})$	– класс функций на многообразии $\mathbb{M}$ , непрерывных вместе с производными вплоть до $k$ -го порядка,
$\mathcal{X}(\mathbb{M})$	– множество гладких векторных полей на многообразии $\mathbb{M}$ ,
$\mathcal{T}(\mathbb{M})$	– множество гладких тензорных полей на многообразии $\mathbb{M}$ ,
$\mathbb{M} \approx \mathbb{N}$	– многообразие $\mathbb{M}$ диффеоморфно (гомеоморфно) многообразию $\mathbb{N}$ ,
$a \approx b$	– $a$ примерно равно $b$ ,
$a \Rightarrow b$	– $b$ следует из $a$ ,
$\mathbb{G} \simeq \mathbb{H}$	– группа (алгебра, векторное пространство, ...) $\mathbb{G}$ изоморфна группе (алгебре, векторному пространству, ...) $\mathbb{H}$ ,
$\mathbb{M} \rightarrow \mathbb{N}$	– отображение множеств,
$\mathbb{M} \ni a \mapsto b \in \mathbb{N}$	– отображение элементов множеств,

Антисимметризация по индексам обозначается квадратными скобками:

$$A^{[ab]} := \frac{1}{2}(A^{ab} - A^{ba}),$$

$$A^{[abc]} := \frac{1}{6}(A^{abc} + A^{bca} + A^{cab} - A^{bac} - A^{acb} - A^{cba}).$$

В общем случае, когда имеется  $n$  индексов, сумма берется по всем  $n!$  перестановкам и делится на  $n!$ . При этом четные перестановки индексов входят со знаком плюс, а нечетные – со знаком минус.

Симметризация индексов обозначается круглыми скобками:

$$A^{(ab)} := \frac{1}{2}(A^{ab} + A^{ba}),$$

$$A^{(abc)} := \frac{1}{6}(A^{abc} + A^{bca} + A^{cab} + A^{bac} + A^{acb} + A^{cba}).$$

Символ Кронекера  $\delta_a^b$  является тождественным оператором, действующим в векторном пространстве, и равен единичной матрице. Для краткости, произведение символов Кронекера обозначается одним символом

$$\delta_{ef\dots h}^{ab\dots d} := \delta_e^a \delta_f^b \dots \delta_h^d. \quad (1)$$

Евклидова метрика  $\delta_{ab}$  имеет два нижних индекса и равна единичной матрице. Например, в четырехмерном евклидовом пространстве  $\mathbb{R}^4$

$$\delta_{ab} := \text{diag}(++++) := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (2)$$

Метрика Минковского в четырехмерном пространстве-времени  $\mathbb{R}^{1,3}$  имеет вид

$$\eta_{ab} := \text{diag}(+---) := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (3)$$

Каноническая симплектическая форма в евклидовом пространстве  $\mathbb{R}^{2n}$  имеет вид

$$\varpi := \begin{pmatrix} 0 & -\mathbb{1} \\ \mathbb{1} & 0 \end{pmatrix}, \quad (4)$$

где  $\mathbb{1}$  – единичная  $n \times n$  матрица.

# Глава 1

## Многообразие и тензорные поля

Начнем с определения евклидова пространства.

**Определение.** *Евклидовым пространством  $\mathbb{R}^n$  называется прямое произведение  $n$  вещественных прямых:*

$$\mathbb{R}^n := \underbrace{\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}}_n, \quad (1.1)$$

где  $n \in \mathbb{N}$  – произвольное натуральное число, которое называется *размерностью* пространства  $\mathbb{R}^n$ . Точкой  $x \in \mathbb{R}^n$  является упорядоченный набор  $n$  вещественных чисел  $x^\alpha \in \mathbb{R}$ ,  $\alpha = 1, \dots, n$ , которые называются *декартовыми координатами* данной точки. Мы записываем координаты точки в виде строки,

$$x = (x^\alpha) = (x^1, \dots, x^n) \in \mathbb{R}^n.$$

Каждый из сомножителей, входящих в определение пространства  $\mathbb{R}^n$  (1.1), называется *координатной прямой*, а точка с нулевыми координатами  $(0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n$  – *началом координат*.

Под 0-мерным пространством  $\mathbb{R}^0$  понимают одну точку – число нуль. Одномерное евклидово пространство представляет собой вещественную прямую:  $\mathbb{R}^1 = \mathbb{R}$ . Двумерное пространство  $\mathbb{R}^2$  называется *плоскостью*.  $\square$

**Замечание.** Номер координаты обозначается с помощью верхнего индекса так же, как и показатель степени. Как правило, различие в значении индексов ясно из контекста.  $\square$

В определении пространства  $\mathbb{R}^n$  точку и ее координаты можно отождествить. Однако, определив таким образом  $\mathbb{R}^n$ , мы можем затем перейти в другую систему координат. Тогда той же точке пространства  $\mathbb{R}^n$  будет соответствовать другой набор вещественных чисел. Поэтому следует различать точку пространства  $\mathbb{R}^n$  и ее координаты, которые зависят от выбора системы координат.

Расстояние  $l$ , т.е. отображение  $l : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , между двумя произвольными точками  $p, q \in \mathbb{R}^n$  с декартовыми координатами  $p^\alpha$  и  $q^\alpha$  определяется следующей формулой

$$l(p, q) := |q - p| := \sqrt{(q^1 - p^1)^2 + \dots + (q^n - p^n)^2}. \quad (1.2)$$

Между двумя бесконечно близкими точками  $x^\alpha$  и  $x^\alpha + dx^\alpha$  расстояние задается *интервалом*, который представляет симметричная квадратичная форма,

$$ds^2 := l^2(x, x + dx) = dx^\alpha dx^\beta g_{\alpha\beta}, \quad (1.3)$$

где компоненты метрики  $g_{\alpha\beta}$  в декартовой системе координат не зависят от точки пространства  $\mathbb{R}^n$  и представляют собой единичную матрицу, которую будем обозначать следующим образом

$$g_{\alpha\beta} := \delta_{\alpha\beta} = \underbrace{\text{diag}(1, \dots, 1)}_n. \quad (1.4)$$

В формуле (1.3) и в дальнейшем по повторяющимся индексам, один из которых пишется сверху, а другой – снизу, производится суммирование, если не оговорено противное. Это правило называется *правилом суммирования Эйнштейна*. Матрица (1.4) называется *евклидовой метрикой* и имеет специальное обозначение  $\delta_{\alpha\beta}$ .

После того, как пространство  $\mathbb{R}^n$  определено, в нем можно строить произвольные криволинейные, например, сферические или цилиндрические системы координат в зависимости от специфики той или иной задачи. В таких системах координат метрика  $g_{\alpha\beta}(x)$  в (1.3) будет зависеть от точки пространства  $\mathbb{R}^n$ .

В дифференциальной геометрии роль индексов чрезвычайно важна. Поэтому отметим ряд общих правил, которые всюду используются в дальнейшем. Эти правила связаны с группами преобразований, которые действуют на геометрические объекты.

- 1) Каждое слагаемое может содержать некоторый индекс один или два раза. В первом случае он называется *свободным*, а во втором случае – *немым*.
- 2) Если некоторое выражение состоит из суммы нескольких слагаемых, то каждое слагаемое должно содержать один и тот же набор свободных индексов. При этом значения этих индексов во всех слагаемых должно фиксироваться одновременно.
- 3) Немой индекс обязательно встречается один раз сверху и один раз снизу в каждом слагаемом. Значение этого индекса в каждом слагаемом не может быть зафиксировано, т.к. по нему проводится суммирование. В разных слагаемых немые индексы можно обозначать различными буквами, а число их пар может различаться.

**Определение.** Кривой  $\gamma = x(t) = (x^\alpha(t))$  в пространстве  $\mathbb{R}^n$  называется отображение замкнутого единичного отрезка  $[0, 1]$  в пространство  $\mathbb{R}^n$ ,

$$\gamma : [0, 1] \ni t \mapsto x(t) = (x^\alpha(t)) \in \mathbb{R}^n, \quad (1.5)$$

где  $t$  – вещественный параметр вдоль кривой. Все функции  $x^\alpha(t)$  предполагаются достаточно гладкими. Говорят, что кривая соединяет две точки  $p$  и  $q$ , где  $x(0) = p$ ,  $x(1) = q$ . Если граничные точки кривой совпадают,  $p = q$ , то кривая называется *замкнутой*. Совокупность функций  $\dot{x}^\alpha$ , где точка обозначает дифференцирование по параметру  $t$ , определяет касательный вектор к кривой,

$$X_{(\gamma)} = (X_{(\gamma)}^\alpha := \dot{x}^\alpha),$$

который называется *вектором скорости* кривой. Кривая  $\gamma$  называется также *путем*, при этом точка  $p$  является началом, а  $q$  – концом пути.

Кривая  $\gamma$  называется *гладкой (дифференцируемой)*, если все координатные функции  $x^\alpha(t)$  являются гладкими (дифференцируемыми). Мы предполагаем, что вектор скорости дифференцируемой кривой отличен от нуля, т.е. отлична от нуля по крайней мере одна из компонент  $\dot{x}^\alpha$ .  $\square$

В общем случае кривая может иметь точки самопересечения.

Единичный отрезок в определении кривой выбран для определенности. Выбор другого замкнутого интервала соответствует *перепараметризации кривой*. Под этим понимается замена параметра  $t \mapsto t' = t'(t)$ , где  $t'(t)$  – произвольная достаточно гладкая монотонная функция такая, что  $dt'/dt \neq 0$ . При этом вектор скорости кривой преобразуется по правилу дифференцирования сложных функций:

$$X_{(\gamma)}^\alpha := \frac{dx^\alpha}{dt} = \frac{dx^\alpha}{dt'} \frac{dt'}{dt}.$$

**Определение.** *Длиной* дифференцируемой кривой  $\gamma$ , соединяющей точки  $p$  и  $q$ , называется интеграл

$$l(\gamma) := \int_p^q ds = \int_0^1 dt \sqrt{\dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta g_{\alpha\beta}}. \quad (1.6)$$

В евклидовом пространстве  $\mathbb{R}^n$  длину кривой  $s(t)$  от начала  $p$  до текущей точки  $x(t) \in \gamma$  всегда можно выбрать в качестве параметра вдоль кривой. В этом случае  $s$  называют *каноническим параметром*. Он однозначно определяется обыкновенным дифференциальным уравнением

$$ds = dt \sqrt{\dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta g_{\alpha\beta}} = dt \sqrt{X_{(\gamma)}^\alpha X_{(\gamma)}^\beta g_{\alpha\beta}},$$

с начальным условием  $s(0) = 0$ . □

Из формулы (1.6) следует, что определение длины кривой не зависит от выбора ее параметризации. Ясно также, что длина кривой не зависит от выбора координат в евклидовом пространстве.

Если кривая параметризована каноническим параметром  $s$ , то вектор скорости  $X_{(\gamma)}^\alpha = dx^\alpha/ds$  имеет единичную длину:

$$X_{(\gamma)}^\alpha X_{(\gamma)}^\beta g_{\alpha\beta} = 1.$$

В пространстве  $\mathbb{R}^n$ , используя понятие расстояния (1.2), можно задавать различные подмножества, которые широко используются в дальнейшем и играют большую роль в приложениях. Эти подмножества мы определим в декартовой системе координат.

**Пример 1.0.1 (Шар).** Подмножество  $\mathbb{B}_r^n(p) \subset \mathbb{R}^n$ , определяемое неравенством:

$$\mathbb{B}_r^n(p) := \{x \in \mathbb{R}^n : |x - p| < r\}, \quad r = \text{const} > 0, \quad (1.7)$$

называется  $n$ -мерным открытым *шаром* радиуса  $r$  с центром в точке  $p$ . В одномерном случае,  $n = 1$ , шар называется *интервалом*<sup>1</sup>. При  $n = 2$  шар  $\mathbb{B}_r^2$  называется *диском* или *кругом*.

Вложение  $\mathbb{B}_r^n \hookrightarrow \mathbb{R}^3$  тривиально (точки шара и евклидова пространства просто отождествляются), поэтому метрика на шаре, индуцированная этим вложением, совпадает с евклидовой. □

**Пример 1.0.2 (Сфера).** Подмножество  $\mathbb{S}_r^{n-1}(p) \subset \mathbb{R}^n$ , определяемое равенством:

$$\mathbb{S}_r^{n-1}(p) := \{x \in \mathbb{R}^n : |x - p| = r\}, \quad r = \text{const} > 0, \quad (1.8)$$

---

<sup>1</sup>Этот термин употребляется в дифференциальной геометрии также для обозначения квадрата расстояния между двумя бесконечно близкими точками (1.3)

называется  $(n - 1)$ -мерной *сферой* радиуса  $r$  с центром в точке  $p$ . При  $n = 1$  сфера вырождается в две точки, являющиеся концами интервала  $(p - r, p + r) \subset \mathbb{R}$ . В дальнейшем для сферы единичного радиуса нижний индекс мы будем опускать,  $\mathbb{S}^n := \mathbb{S}_1^n$ .

Поскольку сфера вложена в евклидово пространство,  $\mathbb{S}^{n-1} \hookrightarrow \mathbb{R}^n$ , то на ней индуцируется нетривиальная метрика.

Отметим, что  $n - 1$  мерная сфера является краем  $n$  мерного шара,  $\mathbb{S}_r^{n-1} = \partial \mathbb{B}_r^n$ .  $\square$

На евклидовом пространстве  $\mathbb{R}^n$  можно задать различные математические структуры. Его можно рассматривать как метрическое, топологическое, векторное (линейное) или аффинное пространства. Естественная метрика в евклидовом пространстве задается формулой (1.2). Эта метрика определяет в  $\mathbb{R}^n$  естественную топологию. Линейная структура – это обычные правила сложения векторов и их умножение на числа. Если евклидово пространство рассматривается как аффинное пространство, до к линейной структуре добавляется еще операция сдвига точек на векторы. Мы не будем подробно останавливаться на этих структурах, а перейдем к обобщению понятия евклидова пространства, которое делается в дифференциальной геометрии.

Базовым понятием дифференциальной геометрии является дифференцируемое многообразие  $\mathbb{M}$ . Топологически нетривиальные многообразия не покрываются одной системой координат, однако локально устроены так же, как и евклидовы пространства без линейной структуры. Это позволяет использовать математический анализ для построения и анализа многих важных моделей современной математической физики.

**Определение.** Топологическое хаусдорфово пространство  $\mathbb{M}$  со счетной базой, каждая точка которого имеет окрестность, гомеоморфную открытому  $n$ -мерному шару единичного радиуса  $\mathbb{B}_1^n$  в евклидовом пространстве  $\mathbb{R}^n$ , называется  $n$ -мерным *топологическим многообразием*. Число  $n$  называется *размерностью* многообразия. Мы пишем  $\dim \mathbb{M} = n$ .  $\square$

**Замечание.** Выбор шаров единичного радиуса  $\mathbb{B}_1^n$  сделан для определенности и не является существенным, т.к. шар единичного радиуса можно заменить на произвольную гомеоморфную ему область, в частности, на все евклидово пространство  $\mathbb{R}^n$ .  $\square$

**Определение.** *Областью* называется произвольное открытое подмножество в  $\mathbb{M}$ , гомеоморфное открытому шару в  $\mathbb{R}^n$ , которое, следовательно, можно покрыть одной системой координат. *Окрестностью* точки  $x \in \mathbb{M}$  называется произвольная область, содержащая эту точку.  $\square$

Окрестность произвольной точки многообразия  $\mathbb{M}$  устроена так же, как и окрестность точки в евклидовом пространстве  $\mathbb{R}^n$ . Однако в отличие от евклидова пространства, которое по определению может быть покрыто одной картой, многообразие в общем случае одной картой не покрывается. Поэтому на многообразии общего вида нельзя ввести структуру векторного или аффинного пространства.

**Предложение 1.0.1.** *Многообразие представляет собой объединение конечного или счетного числа областей,  $\mathbb{M} = \bigcup_i \mathbb{U}_i$ , каждая из которых гомеоморфна  $n$ -мерному шару, и, следовательно, всему  $\mathbb{R}^n$ .*

*Доказательство.* Поскольку каждая точка имеет окрестность, гомеоморфную  $\mathbb{R}^n$ , то все многообразие можно покрыть, возможно, несчетным числом областей  $\mathbb{U}_i$ . Выберем счетную базу топологии на  $\mathbb{M}$ , которая также является покрытием. Каждая



координатная окрестность  $\mathbb{U}_i$  является объединением счетного числа элементов базы и поэтому на каждом элементе базы задан гомеоморфизм в  $\mathbb{R}^n$ . Теперь можно выбрать базу топологии в качестве координатного покрытия, а она – счетна.  $\square$

В приложениях рассматриваются, как правило, многообразия, которые покрываются конечным числом карт.

Согласно данному определению, многообразие, как объединение открытых множеств, не имеет границы, которую в случае многообразий принято называть краем.

**Определение.** Под 0-мерным многообразием мы будем понимать счетное множество точек с дискретной топологией. Одномерное и двумерное многообразия называются, соответственно, *кривой* и *поверхностью*.  $\square$

Данное выше определение задает *топологическое многообразие*, т.к. в нем говорится только о непрерывности. Теперь перейдем к описанию дифференцируемых многообразий.

**Определение.** Из определения многообразия следует, что существует гомеоморфизм (биекция, непрерывная в обе стороны)

$$\varphi_i : \mathbb{M} \supset \mathbb{U}_i \rightarrow \varphi_i(\mathbb{U}_i) \subset \mathbb{R}^n,$$

области  $\mathbb{U}_i$  на ее образ  $\varphi_i(\mathbb{U}_i)$  (суммирования нет) в евклидовом пространстве  $\mathbb{R}^n$ . Поскольку в евклидовом пространстве есть система координат, например, декартова, то данный гомеоморфизм можно записать в виде

$$\varphi_i : \mathbb{M} \supset \mathbb{U}_i \ni x \mapsto \varphi_i(x) = (x^1, \dots, x^n) \in \varphi_i(\mathbb{U}_i) \subset \mathbb{R}^n,$$

где точку многообразия  $x$  и ее координаты  $(x^1, \dots, x^n)$  мы обозначили одной и той же буквой. Области  $\mathbb{U}_i$ , покрывающие многообразие, называются *координатными окрестностями*, а набор чисел  $(x^1, \dots, x^n)$  – *локальными координатами*. Пара  $(\mathbb{U}_i, \varphi_i)$  называется *картой*.

Если две карты пересекаются,  $\mathbb{U}_i \cap \mathbb{U}_j \neq \emptyset$ , то произвольная точка из пересечения  $x \in \mathbb{U}_i \cap \mathbb{U}_j$  имеет свой набор координат в каждой карте. Отображение областей евклидова пространства,

$$f_{ji} := \varphi_j \circ \varphi_i^{-1} : \mathbb{R}^n \supset \varphi_i(\mathbb{U}_i \cap \mathbb{U}_j) \rightarrow \varphi_j(\mathbb{U}_i \cap \mathbb{U}_j) \subset \mathbb{R}^n,$$

задается набором  $n$  функций  $x^{\alpha'}(x)$  от  $n$  переменных (1.77), где  $x^\alpha$  и  $x^{\alpha'}$  ( $\alpha, \alpha' = 1, \dots, n$ ) – координаты, соответственно, на  $\mathbb{U}_i$  и  $\mathbb{U}_j$ . Они называются *функциями склейки*, поскольку склеивают между собой различные карты. Совокупность всех карт, покрывающих многообразие,  $\mathbb{M} = \bigcup_i \mathbb{U}_i$ , называется *координатным покрытием* или *атласом*  $\{\mathbb{U}_i, \varphi_i\}$ ,  $i \in I$  многообразия  $\mathbb{M}$ . Атлас, который не содержится ни в каком другом атласе, называется *полным*.  $\square$

При проведении вычислений в одной карте точку многообразия  $x \in \mathbb{M}$  и ее координаты  $\varphi(x) \in \mathbb{R}^n$  можно отождествлять. Но всегда следует помнить, что точка одна, а координат много.

**Определение.** Многообразие  $\mathbb{M}$  вместе с полным атласом  $\{\mathbb{U}_i, \varphi_i\}$  называется *дифференцируемым многообразием* класса  $C^k$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , если функции склейки (1.77) для всех пересекающихся карт непрерывны вместе со своими частными производными вплоть до  $k$ -того порядка:  $f_{ji} := \varphi_j \circ \varphi_i^{-1} \in C^k(\mathbb{R}^n)$ . Полный атлас  $\{\mathbb{U}_i, \varphi_i\}$  называется *дифференцируемой структурой* многообразия  $\mathbb{M}$ .  $\square$

Аналогично определяются гладкие  $C^\infty$  и вещественно аналитические многообразия  $C^\omega$ . На  $C^\omega$ -многообразиях функции склейки задаются сходящимися степенными рядами. Напомним, что функции склейки имеют ненулевой якобиан и поэтому осуществляют взаимно однозначное отображение областей в  $\mathbb{R}^n$ . Это означает, что обратное преобразование существует, и дифференцируемость обратных функций такая же, как и самих функций склейки. В дальнейшем, если не оговорено противное, под многообразием мы будем понимать  $C^\infty$  дифференцируемые многообразия.

Отметим некоторые свойства функций склейки.

**Предложение 1.0.2.** *Функции склейки удовлетворяют тождествам:*

$$f_{ij} = f_{ji}^{-1}, \quad \forall \quad x \in \mathbb{U}_i \cap \mathbb{U}_j, \quad (1.9)$$

$$f_{ij}f_{jk}f_{ki} = \text{id}, \quad \forall \quad x \in \mathbb{U}_i \cap \mathbb{U}_j \cap \mathbb{U}_k, \quad (1.10)$$

где  $\text{id}$  – тождественное отображение.

*Доказательство.* Прямая проверка. □

**Следствие.** Справедливо тождество  $f_{ii} = \text{id}$ .

**Определение.** Если связное многообразие покрыто совокупностью карт  $\{\mathbb{U}_i, \varphi_i\}$  с координатами  $\varphi_i(x) = (x_i^\alpha)$ , причем якобианы функций перехода для всех пересекающихся карт  $\mathbb{U}_i$  и  $\mathbb{U}_j$  положительны,

$$\det \left( \frac{\partial x_i^\alpha}{\partial x_j^\beta} \right) > 0, \quad \forall i, j$$

то многообразие называется *ориентированным*. Многообразие называется *неориентируемым*, если атласа со всеми положительными якобианами функций склейки не существует. При неудачно выбранном атласе на ориентируемом многообразии якобианы могут быть разных знаков, однако атлас с положительными якобианами существует. Такие многообразия называются *ориентируемыми*. □

Связное ориентируемое многообразие допускает в точности две ориентации. Чтобы поменять ориентацию ориентированного многообразия достаточно заменить каждую карту  $(\mathbb{U}_i, \varphi_i)$  ориентированного атласа на карту  $(\mathbb{U}_i, \psi_i)$ , где гомеоморфизм  $\psi_i$  является композицией  $\varphi_i$  и отражения первой (или любой другой) координаты:  $(x^1, x^2, \dots, x^n) \mapsto (-x^1, x^2, \dots, x^n)$ .

Рассмотрим простейшие примеры многообразий.

**Пример 1.0.3.** Все евклидово пространство  $\mathbb{R}^n$  является простейшим  $n$ -мерным многообразием, которое можно покрыть одной картой (а можно и несколькими). Дифференцируемая структура – это полный атлас, содержащий естественную карту  $(\mathbb{U} = \mathbb{R}^n, \varphi = \text{id}(\mathbb{R}^n))$ . При этом класс гладкости многообразия определяется классом гладкости допустимых преобразований координат. Любое многообразие  $\mathbb{M}$ ,  $\dim \mathbb{M} = n$ , которое покрывается одной картой, диффеоморфно  $\mathbb{R}^n$  и называется *тривиальным*. □

**Пример 1.0.4.** Рассмотрим произвольное вещественное векторное пространство  $\mathbb{V}$ ,  $\dim \mathbb{V} = n$ . Если в векторном пространстве выбран базис  $\{e_a\}$ ,  $a = 1, \dots, n$ , то каждая точка векторного пространства задается упорядоченным набором вещественных чисел  $(x^1, \dots, x^n)$ . Тогда его можно отождествить с евклидовым пространством  $\mathbb{R}^n$

и рассматривать, как гладкое многообразие. Дифференцируемая структура в  $\mathbb{V}$  не зависит от выбора базиса, т.к. замена базиса задается невырожденной матрицей, и соответствует преобразованию координат класса  $C^\infty$ . В дальнейшем мы всегда будем считать, что все векторные пространства снабжены естественной дифференцируемой структурой евклидова пространства.  $\square$

**Пример 1.0.5.** Рассмотрим новый лист бумаги. Он является гладким двумерным многообразием (поверхностью) с краем. Сомнём его. С внутренней точки зрения ничего не изменилось, и он по-прежнему остался гладким многообразием. Появившиеся на листе изломы, которые мы видим, свидетельствуют лишь о недифференцируемом вложении листа в  $\mathbb{R}^3$ .  $\square$

**Пример 1.0.6.**  $n$ -мерная сфера  $\mathbb{S}_r^n \hookrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$  радиуса  $r$  с центром в начале координат, вложенная в  $(n+1)$ -мерное евклидово пространство, задается уравнением (1.8). Само по себе это уравнение задает только множество точек в  $\mathbb{R}^{n+1}$ , а никак не многообразие. Зададим на нем топологию, сказав, что топология индуцирована вложением  $\mathbb{S}_r^n \hookrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ . Пусть  $N = (0, \dots, 0, r)$  и  $S = (0, \dots, 0, -r)$  – северный и южный полюс сферы. Гладкая дифференцируемая структура на  $\mathbb{S}_r^n$  – это полный атлас, содержащий две карты:  $(\mathbb{S}_r^n \setminus N, \varphi_N)$  и  $(\mathbb{S}_r^n \setminus S, \varphi_S)$ , где  $\varphi_N$  и  $\varphi_S$  – стереографические проекции из северного и южного полюса. Тогда сфера становится  $n$ -мерным компактным ориентируемым многообразием. Это многообразие нетривиально и покрывается не менее, чем двумя картами.  $\square$

**Пример 1.0.7.** Тор  $\mathbb{T}^n$  представляет собой прямое произведение  $n$  окружностей,

$$\mathbb{T}^n := \underbrace{\mathbb{S} \times \mathbb{S} \times \dots \times \mathbb{S}}_n,$$

и является  $n$ -мерным компактным ориентируемым многообразием.  $\square$

**Пример 1.0.8.** *Проективным пространством*  $\mathbb{RP}^n$  над полем вещественных чисел называется множество прямых евклидова пространства  $\mathbb{R}^{n+1}$ , проходящих через начало координат. Проективное пространство  $\mathbb{RP}^n$  представляет собой многообразие размерности  $n$ . Его можно представлять себе как сферу  $\mathbb{S}^n$  с отождествленными диаметрально противоположными точками. Действительно, любая прямая, проходящая через начало координат, пересекает единичную сферу с центром в начале координат ровно в двух диаметрально противоположных точках. Обратно, любая из этих двух точек однозначно определяет прямую, проходящую через начало координат. Таким образом

$$\mathbb{RP}^n \approx \frac{\mathbb{S}^n}{\mathbb{Z}_2},$$

где циклическая группа  $\mathbb{Z}_2$  состоит из двух элементов  $\{1, -1\}$ . Проективное пространство  $\mathbb{RP}^n$  можно представить также в виде полусферы  $x \in \mathbb{S}^n$ ,  $x^n \geq 0$ , у которой отождествлены диаметрально противоположные краевые точки, т.е. точки  $(n-1)$ -мерной сферы

$$\mathbb{S}^{n-1} = \{x \in \mathbb{S}^n : x^n = 0\}.$$

Рассмотрим замкнутую кривую в проективном пространстве, проходящую через одну из краевых точек. На рис. 1.1, *a*, для наглядности изображена проективная плоскость  $\mathbb{RP}^2$  в трехмерном евклидовом пространстве и возможная кривая. Выберем ортонормированный базис вдоль кривой, включающий единичный касательный вектор

$e_1$ . При прохождении через краевую точку  $p$  касательный вектор  $e_1$  не меняет ориентации относительно кривой, в то время как все остальные базисные векторы  $e_2, e_3, \dots$  меняют направление. Это значит, что ориентация ортонормированного базиса при прохождении вдоль этой замкнутой кривой изменится при четных  $n$  и сохранится при нечетных  $n$ . Если замкнутая кривая целиком лежит в верхней полусфере, то ориентация базиса вдоль кривой сохраняется. Тем самым мы показали, что проективные пространства четного числа измерений неориентируемы, а нечетного числа измерений – ориентируемы.  $\square$

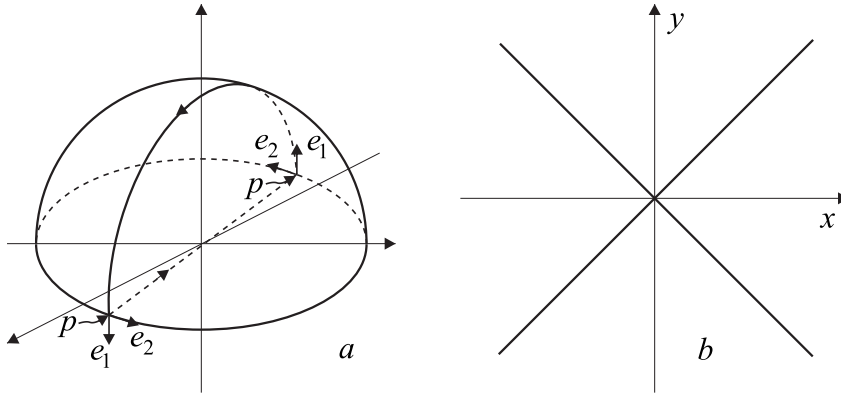


Рис. 1.1: Проективная плоскость  $\mathbb{RP}^2$  как полусфера в  $\mathbb{R}^3$ . Показан замкнутый путь, проходящий через граничную точку  $p$ , и перенос базиса вдоль пути (a). Две пересекающиеся прямые не являются многообразием (b).

**Пример 1.0.9.** Продемонстрируем отличие топологического пространства от многообразия. Пусть множество точек на евклидовой плоскости состоит из двух пересекающихся прямых  $y^2 - x^2 = 0$ , изображенных на рис. 1.1, b. Пусть топология на этих прямых индуцирована вложением. Тогда это множество представляет собой связное хаусдорфово топологическое пространство. В то же время оно не является многообразием, потому что окрестность точки пересечения прямых нельзя взаимно однозначно отобразить на интервал вещественной прямой  $\mathbb{R}$ .  $\square$

В дальнейшем мы будем изучать различные свойства многообразий. Условимся о терминологии. Будем говорить, что данное свойство выполняется на многообразии  $\mathbb{M}$  *глобально*, если оно выполнено во всех точках  $x \in \mathbb{M}$ . Гораздо чаще встречаются свойства, которые выполнены только *локально*. А именно, для каждой точки  $x \in \mathbb{M}$  существует координатная окрестность  $\mathbb{U}_x \supset$  такая, что данное свойство выполнено на  $\mathbb{U}_x$ . В этом случае можно говорить, что данное свойство выполнено в фиксированной системе координат. Конечно, любое свойство, выполненное глобально, справедливо и локально, но не наоборот.

## 1.1 Векторные поля и 1-формы

Напомним, что вещественнозначной функцией  $f$  на многообразии  $\mathbb{M}$ ,  $\dim \mathbb{M} = n$ , называется отображение

$$f : \mathbb{M} \rightarrow \mathbb{R}. \quad (1.11)$$

Это отображение часто, особенно в физических приложениях, называют *скалярным полем* на  $M$ . По определению отображения (??) скалярное поле должно быть однозначно. Функция называется *дифференцируемой* класса  $C^k$ , если отображение (1.11), заданное в координатах,

$$f \circ \varphi_i^{-1} : \mathbb{R}^n \supset \varphi_i(U_i) \ni x \mapsto f(x) \in \mathbb{R}$$

$k$  раз непрерывно дифференцируемо в каждой карте атласа  $\{U_i, \varphi_i\}$ . Конечно, не имеет смысла говорить о степени гладкости функции, которая превышает степень гладкости дифференцируемой структуры многообразия. Поэтому мы предполагаем, что степень гладкости функции меньше или равна степени гладкости многообразия.

В двух областях  $U_i$  и  $U_j$  скалярное поле задается, соответственно, двумя функциями  $f(x)$  и  $f'(x')$  от  $n$  переменных  $x = (x^\alpha)$  и  $x' = (x^{\alpha'})$ ,  $\alpha, \alpha' = 1, \dots, n$ . Если области пересекаются, то в области пересечения согласно, (1.77), справедливо равенство

$$f'(x'(x)) = f(x), \quad (1.12)$$

поскольку в каждой точке функция имеет только одно значение. Формулу (1.12) можно интерпретировать, как правило преобразования функции при замене координат  $x^\alpha \mapsto x^{\alpha'}(x)$ . Другими словами, значение функции после преобразования в точке  $x'$  равно ее прежнему значению в точке  $x$ .

Теперь дадим локальное определение векторных полей и 1-форм, которое является более наглядным. Рассмотрим многообразие  $M$ ,  $\dim M = n$ . Ограничим наше рассмотрение двумя пересекающимися картами  $(U_i, \varphi_i)$  и  $(U_j, \varphi_j)$  с координатами  $x^\alpha$  и  $x^{\alpha'}$ , соответственно. В области пересечения этих карт (или при преобразовании координат  $x^\alpha \rightarrow x^{\alpha'}(x)$ ) дифференциалы умножаются на матрицу Якоби

$$J_{\alpha}^{\alpha'} := \frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^{\alpha}}, \quad (1.13)$$

а частные производные – на ее обратную:

$$dx^{\alpha'} = dx^{\alpha} \frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^{\alpha}}, \quad (1.14)$$

$$\partial_{\alpha'} = \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x^{\alpha'}} \partial_{\alpha}. \quad (1.15)$$

Матрицы преобразования дифференциалов и частных производных являются взаимно обратными по правилу дифференцирования сложных функций:

$$\frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x^{\beta}} = \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x^{\alpha'}} \frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^{\beta}} = \delta_{\beta}^{\alpha}. \quad (1.16)$$

Векторные поля и 1-формы на многообразии определяются, исходя из правила преобразования дифференциалов и частных производных. А именно,  $n$  достаточно гладких функций  $X^{\alpha}(x)$ , заданных на карте  $(U_i, \varphi_i)$  и преобразующихся по правилу (1.14),

$$X^{\alpha'} := X^{\alpha} \frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^{\alpha}}, \quad (1.17)$$

при преобразовании координат, называются *компонентами векторного* или *контравариантного векторного* поля. Аналогично,  $n$  достаточно гладких функций  $A_{\alpha}(x)$ , преобразующихся по правилу (1.15),

$$A_{\alpha'} := \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x^{\alpha'}} A_{\alpha}. \quad (1.18)$$

называются *компонентами ковекторного*, или *ковариантного векторного* поля, или *1-формы*. В общем случае (ко)векторное поле имеет  $n$  независимых компонент. Каждая из функций  $X^\alpha$  или  $A_\alpha$  является компонентой векторного или ковекторного поля относительно координатных базисов  $e_\alpha := \partial_\alpha$  и  $e^\alpha := dx^\alpha$ . Смысл обозначения координатных базисов частными производными и дифференциалами не случаен и будет ясен из дальнейшего.

**Пример 1.1.1.** Если векторное поле имеет нулевые компоненты в одной системе координат, то они равны нулю и во всех других системах. Нулевое векторное поле, компоненты которого равны нулю во всех картах, называется *тривиальным*. Это единственное векторное поле, компоненты которого инвариантны относительно преобразований координат. Аналогично определяется нулевая 1-форма.  $\square$

**Пример 1.1.2.** Частные производные от произвольной функции  $f \circ \varphi^{-1}$  на образе  $\varphi(\mathbb{U}) \subset \mathbb{R}^n$  являются компонентами ковариантного векторного поля  $(\partial_\alpha f)$ , которое называется градиентом функции. Это ковекторное поле определено в произвольной карте и имеет правильный закон преобразования (1.18).  $\square$

**Пример 1.1.3.** Примером векторного поля на кривой  $\gamma = (x^\alpha(t)) \in \mathbb{M}$  является вектор скорости (1.5). Действительно, при преобразовании координат компоненты вектора скорости  $\dot{x}^\alpha$  преобразуются, как дифференциалы. При этом вектор скорости рассматривается в точке кривой  $\gamma \in \mathbb{M}$ . В то же время сами координатные функции  $x^\alpha(t)$  определены на отрезке  $t \in [0, 1]$ , а не на многообразии и векторного поля не образуют. Векторное поле скорости называется также касательным векторным полем к кривой  $\gamma$ .  $\square$

Преобразования векторных полей (1.17) и 1-форм (1.18) различны, поэтому контравариантные и ковариантные индексы необходимо различать и они всегда будут писаться, соответственно, сверху и снизу.

Из закона преобразования частных производных (1.15) и дифференциалов (1.14) следует, что суммы

$$X = X^\alpha \partial_\alpha = X^\alpha e_\alpha, \quad (1.19)$$

$$A = dx^\alpha A_\alpha = e^\alpha A_\alpha \quad (1.20)$$

инвариантны относительно преобразований координат. Эти формулы представляют собой разложения векторов и 1-форм по координатному базису.

Теперь дадим глобальные определения.

**Определение.** Множество всех касательных векторов  $X_p$  в точке  $p$  называется *касательным пространством* к многообразию в точке  $p$  и обозначается  $T_p(\mathbb{M})$ . Объединение всех касательных пространств

$$T(\mathbb{M}) := \bigcup_{p \in \mathbb{M}} T_p(\mathbb{M}). \quad (1.21)$$

называется *касательным расслоением* с базой  $\mathbb{M}$  и естественной проекцией  $\pi : T(\mathbb{M}) \rightarrow \mathbb{M}$ , которая задана отображением  $(p, X_p) \mapsto p$ . Слоем касательного расслоения в точке  $p$  является касательное пространство  $\pi^{-1}(p) = T_p(\mathbb{M})$ . Векторным полем  $X(x)$  на многообразии  $\mathbb{M}$  называется сечение касательного расслоения  $T(\mathbb{M})$ , т.е. отображение

$$X : \quad \mathbb{M} \ni \quad x \mapsto X(x) \quad \in T(\mathbb{M})$$

такое, что  $\pi(X(x)) = x$ . Множество всех гладких векторных полей на многообразии  $\mathbb{M}$  обозначим  $\mathcal{X}(\mathbb{M})$ .  $\square$

Напомним, что сечением расслоения называется такое отображение

$$\sigma : \mathbb{M} \rightarrow \mathbb{T}(\mathbb{M}),$$

что  $\pi \circ \sigma = \text{id}$ .

Типичным слоем касательного расслоения  $\mathbb{T}(\mathbb{M}) \xrightarrow{\pi} \mathbb{M}$  является евклидово пространство  $\mathbb{R}^n$ , на котором введена структура векторного пространства.

Касательное расслоение является многообразием размерности  $2n$ .

Теперь нетрудно дать глобальное определение ковариантных векторных полей.

**Определение.** Множество линейных функционалов на касательном пространстве  $\mathbb{T}_p(\mathbb{M})$  в точке  $p \in \mathbb{M}$  называется *кокасательным векторным пространством* и обозначается  $\mathbb{T}_p^*(\mathbb{M})$ . Объединение всех кокасательных пространств

$$\mathbb{T}^*(\mathbb{M}) := \bigcup_{p \in \mathbb{M}} \mathbb{T}_p^*(\mathbb{M}). \quad (1.22)$$

называется *кокасательным расслоением* с базой  $\mathbb{M}$  и естественной проекцией  $\pi : \mathbb{T}^*(\mathbb{M}) \rightarrow \mathbb{M}$ . Слой кокасательного расслоения в точке  $p$  является кокасательное пространство  $\pi^{-1}(p) = \mathbb{T}_p^*(\mathbb{M})$ . *Кокасательным векторным полем* или *1-формой*  $A(x)$  на многообразии  $\mathbb{M}$  называется сечение кокасательного расслоения  $\mathbb{T}^*(\mathbb{M})$

$$A : \mathbb{M} \ni x \mapsto A(x) \in \mathbb{T}^*(\mathbb{M}), \quad \pi(A(x)) = x.$$

Эквивалентно, кокасательным векторным полем называется линейное отображение множества векторных полей

$$A : \mathcal{X}(\mathbb{M}) \ni X \mapsto A(X) \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{M}).$$

Множество всех гладких 1-форм на многообразии  $\mathbb{M}$  обозначим  $\Lambda_1(\mathbb{M})$ . □

В координатах ковекторное поле задается набором  $n$  компонент  $A_\alpha(x)$ , которые при преобразовании координат преобразуются по правилу (1.18). Тогда линейное отображение задается простым суммированием компонент:

$$A(X) = X^\alpha A_\alpha.$$

### 1.1.1 Векторные поля и дифференцирования

Зафиксируем произвольную точку  $p \in \mathbb{M}$  и рассмотрим некоторую координатную окрестность этой точки  $(\mathbb{U}, \varphi)$ . С каждым векторным полем  $X \in \mathcal{X}(\mathbb{U})$  естественным образом связывается оператор дифференцирования в алгебре гладких функций  $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{U})$ . Его действие на функцию в произвольной карте определяется формулой

$$\mathcal{C}^\infty(\mathbb{U}) \ni f \mapsto Xf := X^\alpha \partial_\alpha f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{U}) \quad (1.23)$$

и представляет собой *дифференцирование вдоль векторного поля*. Это дифференцирование не зависит от выбора карты, т.к. запись (1.23) инвариантна относительно преобразований координат, и удовлетворяет свойствам:

- 1)  $X(af + bg) = aXf + bXg$  — линейность,
- 2)  $X(fg) = (Xf)g + f(Xg)$  — правило Лейбница,

для всех  $a, b \in \mathbb{R}$  и  $f, g \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{U})$ .

**Определение.** Координатным базисом векторных полей  $\mathcal{X}(\mathbb{U})$  на карте  $(\mathbb{U}, \varphi)$  многообразия  $\mathbb{M}$  называется набор гладких векторных полей

$$\left\{ e_\alpha(x) := \left( \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \right)_x \right\} \in \mathcal{X}(\mathbb{U}), \quad \alpha = 1, \dots, n,$$

таких, что выполнено равенство

$$\left( \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \right)_p f(p) := \partial_\alpha(f \circ \varphi^{-1})|_{\varphi(p)}, \quad \alpha = 1, \dots, n. \quad (1.24)$$

Подчеркнем, что символ  $\left( \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \right)_p$  не является частной производной, т.к. определен в точке многообразия  $p \in \mathbb{M}$ , а не евклидова пространства  $\mathbb{R}^n$ . Дуальный базис  $\{e^\alpha(x)\} \in \Lambda_1(\mathbb{U})$ ,  $e^\alpha(e_\beta) = \delta_\beta^\alpha$ , называется *координатным базисом* ковекторных полей (1-форм). Координатный базис для ковекторных полей обозначается  $dx_p^\alpha$  или просто  $dx^\alpha$ .  $\square$

**Замечание.** Подчеркнем, что координатный базис – это не набор частных производных, а векторные поля на многообразии. Их действие как дифференцирований определено только для достаточно гладких функций  $\mathcal{C}^k(\mathbb{U})$ . Действие векторных полей  $e_\alpha(x)$  на тензоры более высокого ранга не определено.  $\square$

В дальнейшем мы будем писать сокращенно  $X = X^\alpha(x)\partial_\alpha$ , имея в виду, что на функции  $f \circ \varphi^{-1}$  в евклидовом пространстве координатный базис действительно действует, как частная производная. Для 1-форм в координатном базисе мы часто будем использовать общепринятую сокращенную запись  $A = dx^\alpha A_\alpha$ ,  $e^\alpha := dx^\alpha$ .

### 1.1.2 Векторные поля и интегральные кривые

**Определение.** Рассмотрим кривую  $\gamma = (x^\alpha(t))$ , определяемую системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dx^\alpha}{dt} = X^\alpha(x), \quad (1.25)$$

с начальными условиями

$$x^\alpha|_{t=t_p} = x_p^\alpha, \quad (1.26)$$

где  $t_p$  – значение параметра вдоль кривой, при котором она проходит через точку  $p$ . Решение этой задачи Коши называется *интегральной кривой* векторного поля  $X$ , проходящей через точку  $p \in \mathbb{M}$ .  $\square$

Из существования и единственности решения задачи Коши для системы дифференциальных уравнений (1.25) (см., например, [?], § 31) вытекает

**Теорема 1.1.1.** Если векторное поле  $X$  на многообразии  $\mathbb{M}$  дифференцируемо, то через каждую точку  $p \in \mathbb{M}$  проходит одна и только одна интегральная кривая этого векторного поля.

Если решение системы уравнений (1.25) представимо в виде ряда, то вблизи точки  $p$  оно выглядит очень просто

$$x^\alpha(t) = x_p^\alpha + X_p^\alpha(t - t_p) + \dots, \quad |t - t_p| \ll 1.$$



То есть компоненты векторного поля определяют главную линейную часть интегральной кривой.

Вообще говоря, параметр  $t$  в общем случае определен лишь на некотором конечном или полубесконечном интервале  $(a, b) \subset \mathbb{R}$  даже для гладких векторных полей, заданных на всем многообразии.

**Определение.** Векторное поле  $X \in \mathcal{X}(\mathbb{M})$  называется *полным*, если все интегральные кривые этого поля определены при всех значениях  $t \in \mathbb{R}$ .  $\square$

Ранее мы показали, что всюду отличное от нуля дифференцируемое векторное поле, заданное на многообразии  $\mathbb{M}$ , определяет семейство интегральных кривых, проходящих через каждую точку  $\mathbb{M}$ , причем через каждую точку проходит единственная кривая.

**Определение.** Пусть  $s(t, p)$  – интегральная кривая векторного поля  $X \in \mathcal{X}(\mathbb{M})$ , проходящая через точку  $p$ :  $s(0, p) = p$ . Будем считать, что векторное поле полно. Тогда отображение

$$s : \mathbb{R} \times \mathbb{M} \ni t, p \mapsto s(t, p) \in \mathbb{M}, \quad (1.27)$$

генерируемое векторным полем  $X$ , называется *поток векторного поля*.  $\square$

**Предложение 1.1.1.** *Отображение (1.27) удовлетворяет тождеству*

$$s(t_1, s(t_2, p)) = s(t_1 + t_2, p), \quad (1.28)$$

для всех значений  $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ , для которых формула (1.28) имеет смысл.

*Доказательство.* Предложение следует из единственности решения системы дифференциальных уравнений. Действительно, в произвольной карте выполнено равенство

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt_1} s^\alpha(t_1, s(t_2, p)) &= X^\alpha(s(t_2, p)) \\ s(0, s(t_2, p)) &= s(t_2, p). \end{aligned}$$

С другой стороны

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt_1} s^\alpha(t_1 + t_2, p) &= \frac{d}{d(t_1 + t_2)} s^\alpha(t_1 + t_2, p) = X^\alpha(s(t_1 + t_2, p)), \\ s(0 + t_2, p) &= s(t_2, p). \end{aligned}$$

Тем самым и правая, и левая часть равенства (1.28) удовлетворяют одной и той же системе уравнений с одинаковыми начальными условиями.  $\square$

**Замечание.** Поток векторного поля можно представлять себе, как стационарный поток жидкости. В этом случае параметр  $t$  является временем, а  $X$  – векторным полем скорости частиц жидкости.  $\square$

**Предложение 1.1.2.** *Если дифференцируемое векторное поле  $X$  обращается в нуль в некоторой точке многообразия  $p \in \mathbb{M}$ , то эта точка является неподвижной относительно потока векторного поля, т.е.  $x(t) = p$  для всех  $t \in \mathbb{R}$ . Обратно. Если точка  $p \in \mathbb{M}$  является неподвижной на интегральной кривой некоторого векторного поля, то в этой точке векторное поле обращается в нуль,  $X(p) = 0$ .*

*Доказательство.* Постоянные функции  $x^\alpha(t) = x_p^\alpha$  удовлетворяют системе уравнений (1.25), если  $X_p^\alpha = 0$ . Обратное утверждение очевидно.  $\square$

**Пример 1.1.4.** Рассмотрим гладкое векторное поле  $K = -y\partial_x + x\partial_y$  на евклидовой плоскости  $\mathbb{R}^2$ . Нетрудно проверить, что поток этого векторного поля имеет вид

$$s : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \ni t \times (x, y) \mapsto (x \cos t - y \sin t, x \sin t + y \cos t) \in \mathbb{R}^2.$$

Интегральная кривая, проходящая через точку  $(x, y)$ , представляет собой окружность с центром в начале координат. В начале координат векторное поле обращается в нуль, и интегральная кривая вырождается в точку.

Векторное поле  $K$  является ничем иным, как векторным полем Киллинга двумерных вращений евклидовой плоскости и принимает особо простой вид в полярных координатах,  $K = \partial_\varphi$ . Интегральные кривые поля  $K$  являются в данном случае траекториями Киллинга. Поток векторного поля на  $\mathbb{R}^2$  определяется независимо от наличия метрики. Однако интерпретация векторного поля  $K$ , как поля Киллинга уже связана с наличием на плоскости евклидовой метрики.  $\square$

**Пример 1.1.5.** Рассмотрим гладкое векторное поле  $K = y\partial_x + x\partial_y$  на плоскости  $\mathbb{R}^2$ . Поток этого векторного поля имеет вид

$$s : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \ni t \times (x, y) \mapsto (x \operatorname{ch} t + y \operatorname{sh} t, x \operatorname{sh} t + y \operatorname{ch} t) \in \mathbb{R}^2.$$

Интегральная кривая, проходящая через точку  $(x, y)$ , является ветвью гиперболы  $x^2 - y^2 = \text{const}$  с центром в начале координат. При  $y = \pm x$  гиперболы вырождаются в прямые линии, проходящие через начало координат под углом  $\pm\pi/4$ .

Векторное поле  $K$  является векторным полем Киллинга для метрики Лоренца, заданной на плоскости  $\mathbb{R}^2$ , а интегральные кривые – траекториями Киллинга.  $\square$

**Определение.** При фиксированном значении параметра  $t$  поток  $s(t, x)$  представляет собой диффеоморфизм, обозначаемый также

$$s_t : \mathbb{M} \rightarrow \mathbb{M}.$$

Из предложения 1.1.1 следует, что он представляет собой абелеву группу:

- 1)  $s_{t_1} s_{t_2} = s_{t_1+t_2}$ ;
- 2)  $s_0$  – единичный элемент;
- 3)  $s_t^{-1} = s_{-t}$  – обратный элемент.

Эта группа называется *однопараметрической группой преобразований*, генерируемой векторным полем  $X$ . Действительно, из системы уравнений (1.25) следует, что при малых значениях параметра поток имеет вид

$$s_\epsilon : x^\alpha \mapsto x^\alpha + \epsilon X^\alpha.$$

То есть векторное поле  $X$  является генератором бесконечно малых преобразований многообразия  $\mathbb{M}$ .  $\square$

Выше было показано, что любое полное векторное поле генерирует единственную однопараметрическую группу преобразований. Верно и обратное утверждение: любая однопараметрическая группа  $s^\alpha(t, x)$  определяет векторное поле. Для этого достаточно положить

$$X^\alpha := \left. \frac{ds^\alpha}{dt} \right|_{t=0}.$$

Если векторное поле  $X(\mathbb{M})$  является неполным, то понятие потока и однопараметрической группы преобразований можно ввести только локально (см., например, [?].)

### 1.1.3 Алгебра Ли векторных полей

**Определение.** Последовательное применение двух дифференцирований (векторных полей)  $X$  и  $Y$  к некоторой функции  $f$  снова дает функцию из  $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{M})$ . Определим композицию двух дифференцирований  $X \circ Y$  формулой  $(X \circ Y)f := X(Yf)$ . Отображение  $(X \circ Y)$  является линейным, однако правило Лейбница для него не выполнено:

$$(X \circ Y)fg = XfYg + fX(Yg) + XgYf + gX(Yf) \neq f(X \circ Y)g + g(X \circ Y)f.$$

Это означает, что композиция векторных полей  $X \circ Y$  не является векторным полем. По другому, отображение  $X \circ Y$  в координатах содержит не только первые, но и вторые производные. Рассмотрим композицию этих дифференцирований в другом порядке,

$$(Y \circ X)fg = YfXg + fY(Xg) + YgXf + gY(Xf).$$

Нетрудно проверить, что разность  $Y \circ X - X \circ Y$  удовлетворяет правилу Лейбница

$$(X \circ Y - Y \circ X)fg = f(X \circ Y - Y \circ X)g + g(X \circ Y - Y \circ X)f,$$

т.е. является векторным полем. Эта разность называется *коммутатором векторных полей* или *скобкой Ли* и обозначается

$$[X, Y] := X \circ Y - Y \circ X. \quad \square$$

Из определения следует, что коммутатор двух векторных полей антисимметричен,

$$[X, Y] = -[Y, X], \quad (1.29)$$

и коммутаторы трех произвольных векторных полей удовлетворяют *тождеству Якоби*

$$[[X, Y], Z] + [[Y, Z], X] + [[Z, X], Y] = 0, \quad (1.30)$$

где слагаемые отличаются циклической перестановкой.

Рассмотрим векторные поля в произвольной карте  $X = X^\alpha \partial_\alpha$ ,  $Y = Y^\alpha \partial_\alpha$ . Тогда коммутатор дает новое векторное поле

$$Z := [X, Y] = (X^\beta \partial_\beta Y^\alpha - Y^\beta \partial_\beta X^\alpha) \partial_\alpha. \quad (1.31)$$

Используя закон преобразования компонент векторных полей (1.17), нетрудно проверить, что выражение в правой части инвариантно относительно преобразования координат.

Коммутатор (1.31) билинеен:

$$\begin{aligned} [aX + bY, Z] &= a[X, Z] + b[Y, Z], \\ [X, aY + bZ] &= a[X, Y] + b[X, Z], \end{aligned}$$

где  $a, b \in \mathbb{R}$ .

**Определение.** Множество векторных полей с операциями сложения, коммутирования и умножения на вещественные числа образует *алгебру Ли* над полем вещественных чисел. Эта алгебра бесконечномерна и также обозначается  $\mathcal{X}(\mathbb{M})$ .  $\square$

## 1.2 Тензорные поля

Рассмотрим многообразие  $\mathbb{M}$ ,  $\dim \mathbb{M} = n$ . В каждой точке  $x \in \mathbb{M}$  у нас есть два  $n$ -мерных векторных пространства: касательное  $\mathbb{T}_x(\mathbb{M})$  и кокасательное  $\mathbb{T}_x^*(\mathbb{M})$  пространства. Рассмотрим их тензорное произведение

$$\mathbb{T}_{s,x}^r(\mathbb{M}) := \underbrace{\mathbb{T}_x(\mathbb{M}) \otimes \dots \otimes \mathbb{T}_x(\mathbb{M})}_r \otimes \underbrace{\mathbb{T}_x^*(\mathbb{M}) \otimes \dots \otimes \mathbb{T}_x^*(\mathbb{M})}_s, \quad (1.32)$$

где мы взяли  $r$  экземпляров касательного и  $s$  экземпляров кокасательного пространства. Для определенности мы фиксировали порядок сомножителей. Таким образом в каждой точке многообразия мы построили векторное пространство размерности  $\dim \mathbb{T}_{s,x}^r(\mathbb{M}) = n^{r+s}$ .

**Определение.** Объединение

$$\mathbb{T}_s^r(\mathbb{M}) := \bigcup_{x \in \mathbb{M}} \mathbb{T}_{s,x}^r(\mathbb{M}),$$

взятое по всем точкам многообразия, называется *расслоением тензоров типа  $(r, s)$*  на многообразии  $\mathbb{M}$ . Сечение этого расслоения  $T_s^r(x)$  называется *тензорным полем типа  $(r, s)$*  или  $r$  раз *контравариантным* и  $s$  раз *ковариантным* тензорным полем на многообразии  $\mathbb{M}$ . Число  $r + s$  называется *рангом* тензорного поля.  $\square$

Базой этого расслоения является многообразие  $\mathbb{M}$ , типичным слоем – векторное пространство

$$\underbrace{\mathbb{R}^n \otimes \dots \otimes \mathbb{R}^n}_r \otimes \underbrace{\mathbb{R}^n \otimes \dots \otimes \mathbb{R}^n}_s,$$

где  $\mathbb{R}^n$  – типичный слой касательного расслоения. Слой над  $x \in \mathbb{M}$  является векторное пространство (1.32) (тем самым мы определили проекцию).

Координатные базисы в касательном и кокасательном пространствах,  $e_\alpha = \partial_\alpha$  и  $e^\alpha = dx^\alpha$ , индуцируют координатный базис в тензорном произведении, который мы обозначим

$$e_{\alpha_1} \otimes \dots \otimes e_{\alpha_r} \otimes e^{\beta_1} \otimes \dots \otimes e^{\beta_s}. \quad (1.33)$$

Напомним, что тензорное произведение векторов не является коммутативным,

$$e_\alpha \otimes e^\beta \neq e^\beta \otimes e_\alpha,$$

поэтому порядок следования базисных векторов в произведении (1.33) фиксирован: сначала мы пишем базисные векторы касательного, а затем кокасательного пространства.

Рассмотрим произвольную карту  $(\mathbb{U}, \varphi)$  на многообразии. Тогда тензорное поле типа  $(r, s)$  в координатах имеет вид

$$T_s^r(x) = T_{\beta_1 \dots \beta_s}^{\alpha_1 \dots \alpha_r}(x) e_{\alpha_1} \otimes \dots \otimes e_{\alpha_r} \otimes e^{\beta_1} \otimes \dots \otimes e^{\beta_s}. \quad (1.34)$$

Нижние и верхние индексы называют, соответственно, *ковариантными* и *контравариантными*. Общее число индексов  $r + s$  равно рангу тензорного поля.

**Замечание.** Для определенности, у компонент  $T_{\beta_1 \dots \beta_s}^{\alpha_1 \dots \alpha_r}(x)$  мы сначала выписали все ковариантные индексы, а затем – все контравариантные. Порядок индексов

зафиксирован порядком сомножителей в правой части (1.32) и принятом нами соглашением для записи тензорного поля типа  $(1, 1)$ :

$$dx^\beta T_\beta^\alpha \partial_\alpha.$$

Контравариантные индексы так же, как и ковариантные, упорядочены между собой.  $\square$

Набор функций  $X_{\beta_1 \dots \beta_s}^{\alpha_1 \dots \alpha_r}(x)$  с  $r$  верхними и  $s$  нижними индексами называется *компонентами* тензорного поля типа  $(r, s)$  в карте  $(U, \varphi)$ . Тензорное поле называется гладким, если все компоненты – гладкие функции. При преобразованиях координат каждый контравариантный индекс умножается на матрицу Якоби (1.13) так же, как и компоненты вектора, а каждый ковариантный индекс – на обратную матрицу Якоби так же, как и 1-форма.

**Пример 1.2.1.** Компоненты тензорного поля типа  $(1, 1)$  при преобразовании координат  $x^\alpha \mapsto x^{\alpha'}(x)$  преобразуются по правилу:

$$X_{\beta'}^{\alpha'} = \frac{\partial x^\beta}{\partial x^{\beta'}} X_\beta^\alpha \frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^\alpha}. \quad (1.35)$$

Аналогично преобразуются компоненты тензорных полей произвольного типа.  $\square$

В дальнейшем, для краткости, тензорные поля мы часто будем называть просто тензорами.

Очевидно, что, если все компоненты тензорного поля равны нулю в какой то одной системе координат, то они равны нулю во всех остальных системах отсчета. У нетривиальных тензоров хотя бы одна компонента должна быть отлична от нуля. В общем случае у тензора типа  $(r, s)$  на многообразии размерности  $n$  имеется  $n^{r+s}$  независимых компонент в каждой точке.

Обозначим множество гладких тензорных полей типа  $(r, s)$  символом  $\mathcal{T}_s^r(\mathbb{M})$ . При этом  $\mathcal{T}_0^0(\mathbb{M}) = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{M})$ ,  $\mathcal{T}_1^1 = \mathcal{X}(\mathbb{M})$  и  $\mathcal{T}_1^0 = \Lambda_1(\mathbb{M})$ . В дальнейшем индекс 0 у множеств тензорных полей, имеющих только контравариантные или ковариантные индексы, писаться не будет:  $\mathcal{T}_0^r(\mathbb{M}) = \mathcal{T}^r(\mathbb{M})$  и  $\mathcal{T}_s^0(\mathbb{M}) = \mathcal{T}_s(\mathbb{M})$ .

На множестве тензоров введем операцию свертки следующим образом. Пусть задано тензорное поле  $K \in \mathcal{T}_s^r(\mathbb{M})$ , тогда компоненты свернутого тензора имеют вид

$$K_{\beta_1 \dots \beta_{j-1} \gamma \beta_{j+1} \dots \beta_s}^{\alpha_1 \dots \alpha_{i-1} \gamma \alpha_{i+1} \dots \alpha_r} = \delta_{\alpha_i}^{\beta_j} K_{\beta_1 \dots \beta_s}^{\alpha_1 \dots \alpha_r},$$

где произведена свертка (суммирование) по одному верхнему и одному нижнему индексу.

**Пример 1.2.2.** Тензору типа  $(1, 1)$  ставится в соответствие скалярное поле  $\text{tr } K = K_\alpha^\alpha$ , которое называется *следом* тензора  $K = K_\beta^\alpha e_\alpha \otimes e^\beta$ .  $\square$

**Пример 1.2.3.** Значением 1-формы  $A = dx^\alpha A_\alpha$  на векторном поле  $X = X^\alpha \partial_\alpha$  является свертка тензорного произведения  $A \otimes X$ :  $(A, X) := A(X) = X^\alpha A_\alpha$ .  $\square$

Если тензор имеет два или более индексов одного типа, то с помощью симметризации или антисимметризации по верхним или нижним индексам можно строить новые тензорные поля. Поскольку преобразование координат действует одинаково на каждый ковариантный и контравариантный индекс, то симметризация и антисимметризация индексов является инвариантной операцией и свойство симметрии по индексам сохраняется при преобразовании координат.

**Определение.** Тензорное поле называется *неприводимым*, если нельзя найти такие линейные комбинации его компонент с постоянными коэффициентами, которые сами образовывали бы тензор.  $\square$

**Пример 1.2.4.** Скалярные, векторные поля и 1-формы являются неприводимыми тензорными полями.  $\square$

**Пример 1.2.5.** Ковариантные или контравариантные тензорные поля второго ранга приводимы, т.к. их компоненты можно разложить на симметричную и антисимметричную неприводимую части:

$$X_{\alpha\beta} = X_{(\alpha\beta)} + X_{[\alpha\beta]}, \quad (1.36)$$

где

$$X_{(\alpha\beta)} := \frac{1}{2}(X_{\alpha\beta} + X_{\beta\alpha}), \quad X_{[\alpha\beta]} := \frac{1}{2}(X_{\alpha\beta} - X_{\beta\alpha}). \quad \square$$

**Пример 1.2.6.** Тензорное поле  $X_\alpha^\beta$  типа (1,1) также приводимо, поскольку у него можно выделить след  $\text{tr } X$  и бесследовую часть  $Y_\alpha^\beta$  ( $Y_\alpha^\alpha = 0$ ):

$$X_\alpha^\beta = Y_\alpha^\beta + \frac{1}{n}\delta_\alpha^\beta \text{tr } X, \quad (1.37)$$

где

$$\text{tr } X := X_\alpha^\alpha, \quad Y_\alpha^\beta := X_\alpha^\beta - \frac{1}{n}\delta_\alpha^\beta \text{tr } X. \quad \square$$

Тензорные поля ранга три и выше, в общем случае, приводимы. Если на многообразии не задано никаких других объектов, кроме тензорного поля, то разложение на неприводимые компоненты может осуществляться только с помощью взятия следа, симметризации или антисимметризации по индексам.

**Пример 1.2.7.** *Символ Кронекера*, компоненты которого в каждой карте многообразия  $\mathbb{M}$  составляют  $n$ -мерную единичную матрицу,

$$\delta_\beta^\alpha = \begin{cases} 1, & \alpha = \beta, \\ 0, & \alpha \neq \beta, \end{cases} \quad (1.38)$$

и имеют один верхний и один нижний индекс, определяет тензорное поле типа (1, 1). Он инвариантен относительно преобразований координат

$$\delta_{\beta'}^{\alpha'} = \frac{\partial x^\beta}{\partial x^{\beta'}} \delta_\beta^\alpha \frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^\alpha} = \frac{\partial x^\beta}{\partial x^{\beta'}} \frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^\beta} = \begin{cases} 1, & \alpha' = \beta', \\ 0, & \alpha' \neq \beta', \end{cases}$$

т.к. верхний и нижний индексы преобразуются с помощью взаимно обратных матриц. Символ Кронекера представляет собой исключение в двух отношениях. Во-первых, он инвариантен относительно преобразований координат и, во-вторых, его индексы можно писать один под другим, поскольку подъем и опускание индексов с помощью метрики приводит к симметричным тензорам.  $\square$

На многообразии  $\mathbb{M}$  можно также определить *тензорные плотности* степени  $p \in \mathbb{Z}$  и ранга  $(r, s)$ , если при преобразовании координат все их компоненты умножить на якобиан преобразования в степени  $p$ . Например, тензорная плотность типа (1, 1) и степени  $p$  преобразуется по правилу

$$X_{\alpha'}^{\beta'} = J^p \frac{\partial x^\alpha}{\partial x^{\alpha'}} X_\alpha^\beta \frac{\partial x^{\beta'}}{\partial x^\beta}, \quad J := \det J_\alpha^{\alpha'}. \quad (1.39)$$

В каждой точке многообразия тензорные плотности фиксированного типа и степени образуют векторное пространство над полем вещественных чисел.

## 1.3 Полностью антисимметричные тензоры

В настоящем разделе мы рассмотрим полностью антисимметричные тензоры, которые играют очень важную роль в различных приложениях дифференциальной геометрии.

**Определение.** Рассмотрим тензорные поля типа  $(r, 0)$  или  $(0, r)$  при  $r \leq n$  на многообразии  $\mathbb{M}$ ,  $\dim \mathbb{M} = n$ , компоненты которых антисимметричны относительно перестановки любой пары индексов. В инвариантном виде условие антисимметричности для ковариантных тензоров записывается в виде:

$$T(X_1, \dots, X_i, \dots, X_j, \dots, X_r) = -T(X_1, \dots, X_j, \dots, X_i, \dots, X_r), \quad 1 \leq i < j \leq r,$$

где  $T \in \mathcal{T}_r(\mathbb{M})$ ,  $X_1, \dots, X_r \in \mathcal{X}(\mathbb{M})$ . Эти тензоры неприводимы и называются *полностью антисимметричными* ковариантными тензорами ранга  $r$ .  $\square$

Компонента полностью антисимметричного тензорного поля может быть отлична от нуля только в том случае, если все индексы различны, поскольку при совпадении двух или более индексов соответствующая компонента равна нулю. На многообразии размерности  $n$  не существует полностью антисимметричного тензора ранга большего, чем размерность многообразия, т.к. в этом случае по крайней мере два индекса будут совпадать.

Полностью антисимметричный тензор  $X_{\alpha_1 \dots \alpha_n}$  максимального ранга  $n$  имеет только одну независимую компоненту. Нетрудно проверить, что при преобразовании координат  $x \mapsto y(x)$  полностью антисимметричный тензор типа  $(0, n)$  преобразуется по закону

$$X'_{\alpha_1 \dots \alpha_n} = \frac{\partial x^{\beta_1}}{\partial y^{\alpha_1}} \dots \frac{\partial x^{\beta_n}}{\partial y^{\alpha_n}} X_{\beta_1 \dots \beta_n} = X_{\alpha_1 \dots \alpha_n} J^{-1}, \quad (1.40)$$

где  $J := \det(\partial y^\alpha / \partial x^\beta)$  – якобиан преобразования координат. То есть каждая компонента полностью антисимметричного ковариантного тензора максимального ранга умножается на якобиан преобразования в минус первой степени, и ее фиксированную компоненту можно рассматривать как скалярную плотность степени  $-1$ .

В каждой карте  $(\mathbb{U}, \varphi)$  можно построить полностью антисимметричный объект, компоненты которого равны по модулю единице:

$$\hat{\varepsilon}_{\alpha_1 \dots \alpha_n} := \operatorname{sgn} \sigma(\alpha_1 \dots \alpha_n), \quad \hat{\varepsilon}_{1 \dots n} = 1, \quad (1.41)$$

где  $\operatorname{sgn} \sigma$  – знак перестановки  $\sigma$ , который равен  $+1$  или  $-1$ , если для получения последовательности индексов  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  из последовательности натуральных чисел  $1, \dots, n$  необходимо переставить, соответственно, четное и нечетное число пар индексов. Если многообразие  $\mathbb{M}$  ориентируемо, и все якобианы преобразования координат положительны, то формула (1.41) определяет  $\hat{\varepsilon}_{\alpha_1 \dots \alpha_n}$  глобально. На неориентируемых многообразиях глобальное определение невозможно. Объект  $\hat{\varepsilon}_{\alpha_1 \dots \alpha_n}$  не может быть тензором, т.к. в общем случае якобиан преобразования  $J$  отличен от единицы. Из закона преобразования тензорных плотностей (1.39) следует, что каждую фиксированную компоненту  $\hat{\varepsilon}_{\alpha_1 \dots \alpha_n}$  можно рассматривать, как скалярную тензорную плотность степени  $-1$ . Поскольку компоненты антисимметричной тензорной плотности постоянны, то в произвольной системе координат справедливо равенство

$$\partial_\alpha \hat{\varepsilon}_{\alpha_1 \dots \alpha_n} = 0. \quad (1.42)$$

В (псевдо)римановом пространстве при наличии метрики  $g_{\alpha\beta}$  (см. раздел 1.6) можно построить полностью антисимметричный тензор

$$\varepsilon_{\alpha_1 \dots \alpha_n} = \sqrt{|g|} \hat{\varepsilon}_{\alpha_1 \dots \alpha_n}, \quad (1.43)$$

где введено сокращенное обозначение для определителя метрики, которое будет часто использоваться в дальнейшем

$$g := \det g_{\alpha\beta}. \quad (1.44)$$

Полностью антисимметричный тензор (1.43) преобразуется по стандартному закону (1.40).

**Замечание.** Здесь и в дальнейшем мы примем следующее обозначение: шляпка над символом означает, что рассматривается тензорная плотность, а не тензор.  $\square$

Если на многообразии задана метрика, то наличие тензора полностью антисимметричного тензора  $\varepsilon_{\alpha_1 \dots \alpha_n}$  позволяет представить компоненты произвольного ковариантного антисимметричного тензора максимального ранга в виде

$$X_{\alpha_1 \dots \alpha_n} = X^*(x) \varepsilon_{\alpha_1 \dots \alpha_n}, \quad X^* := \varepsilon^{\alpha_1 \dots \alpha_n} X_{\alpha_1 \dots \alpha_n} \operatorname{sgn}, \quad (1.45)$$

где  $X^*(x)$  – псевдоскалярное поле и множитель  $\operatorname{sgn} := \operatorname{sign}(\det g_{\alpha\beta})$  равен знаку определителя метрики. Приставка “псевдо” в данном случае означает, что скалярное поле меняет свой знак при отражении нечетного числа координатных осей.

Аналогичное представление имеет место для произвольного контравариантного тензора максимального ранга. Это означает, что полностью антисимметричные тензоры максимального ранга имеют ровно одну независимую компоненту.

## 1.4 Отображения многообразий

Рассмотрим отображение  $h$  многообразия  $\mathbb{M}$ ,  $\dim \mathbb{M} = m$ , в многообразие  $\mathbb{N}$ ,  $\dim \mathbb{N} = n$ ,

$$h : \mathbb{M} \ni x \mapsto y \in \mathbb{N}. \quad (1.46)$$

Пусть при этом отображении карта  $(U, \varphi)$  многообразия  $\mathbb{M}$  отображается в некоторую карту  $(V, \phi)$  многообразия  $\mathbb{N}$ ,  $h(U) \subset V$ . Обозначим координаты на  $U$  и  $V$  через  $x^\alpha$ ,  $\alpha = 1, \dots, m$ , и  $y^\mu$ ,  $\mu = 1, \dots, n$ . Тогда отображение

$$\phi \circ h \circ \varphi^{-1} : \mathbb{R}^m \supset \varphi(U) \rightarrow \phi(V) \subset \mathbb{R}^n \quad (1.47)$$

двух областей евклидова пространства  $\varphi(U) \subset \mathbb{R}^m$  и  $\phi(V) \subset \mathbb{R}^n$  задается  $n$  функциями от  $m$  переменных  $y^\mu(x)$ . При этом размерность многообразия  $\mathbb{M}$  может быть меньше, равна или больше размерности  $\mathbb{N}$ .

**Определение.** Отображение гладких многообразий называется *гладким (дифференцируемым)*, если задается гладкими (дифференцируемыми) функциями (1.47) в полных атласах на  $\mathbb{M}$  и  $\mathbb{N}$ .  $\square$

**Определение.** Дифференцируемое отображение (1.46) индуцирует линейное отображение касательных пространств

$$h_* : T_x(\mathbb{M}) \ni X = X^\alpha \partial_\alpha \mapsto Y = h_* X = Y^\mu \partial_\mu \in T_{h(x)}(\mathbb{N}) \quad (1.48)$$



следующим образом. Рассмотрим кривую  $\gamma \subset \mathbb{M}$ , проходящую через произвольную точку  $p \in \mathbb{M}$  в направлении произвольного вектора  $X_{(\gamma)}(p)$ . Эта кривая отображится в некоторую кривую  $h \circ \gamma$  на  $\mathbb{N}$ . По определению вектор  $X_{(\gamma)}(p) \in \mathbb{T}_p(\mathbb{M})$  отображается в тот вектор  $Y_{(h \circ \gamma)} \in \mathbb{T}_{h(p)}(\mathbb{N})$ , который касается кривой  $h \circ \gamma$  в точке  $h(p)$ . По правилу дифференцирования сложной функции справедливо равенство

$$\dot{y}^\mu(h \circ \gamma(t)) = \frac{\partial y^\mu}{\partial x^\alpha} \dot{x}^\alpha(\gamma(t)).$$

Поэтому вектор  $Y$  единственен. Это отображение касательных пространств (1.48) называется *дифференциалом отображения* и обозначается  $h_*$ .  $\square$

В компонентах дифференциал отображения задается матрицей Якоби:

$$Y^\mu = X^\alpha \frac{\partial y^\mu}{\partial x^\alpha}. \quad (1.49)$$

Дифференциал отображения  $h_*$  является линейным отображением:

$$\begin{aligned} h_*(X + Y) &= h_*(X) + h_*(Y), & X, Y \in \mathcal{X}(\mathbb{M}), \\ h_*(aX) &= ah_*(X), & a \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

множества всех векторных полей  $\mathcal{X}(\mathbb{M})$  на  $\mathbb{M}$  в множество векторных полей  $\mathcal{X}(h(\mathbb{M}))$  на образе  $h(\mathbb{M}) \subset \mathbb{N}$ , который может не совпадать со всем  $\mathbb{N}$ .

**Предложение 1.4.1.** *Дифференциал отображения согласован со структурой алгебры Ли в пространствах векторных полей, т.е.*

$$h_*[X, Y] = [h_*X, h_*Y]. \quad (1.50)$$

*Доказательство.* Простая проверка.  $\square$

Рассмотрим два отображения  $\mathbb{M} \xrightarrow{h} \mathbb{N} \xrightarrow{g} \mathbb{P}$ . Если обозначить координаты на многообразиях  $\mathbb{M}$ ,  $\mathbb{N}$  и  $\mathbb{P}$ , соответственно, через  $x$ ,  $y$  и  $z$ , то по правилу дифференцирования сложной функции в соответствующих областях определения справедливо равенство

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial x}. \quad (1.51)$$

Здесь, для краткости, мы опустили индексы. Отсюда следует, что дифференциал произведения равен произведению дифференциалов каждого отображения

$$(g \circ h)_* = g_* \circ h_*. \quad (1.52)$$

В координатах мы имеем обычное произведение матриц Якоби (1.51).

Дифференциал отображения естественным образом обобщается на случай произвольных тензорных полей типа  $(r, 0)$ , имеющих только контравариантные индексы, и обозначается  $(h_*)^r$ . При этом каждый контравариантный индекс суммируется с матрицей Якоби отображения.

**Пример 1.4.1.** Для компонент контравариантных тензоров второго ранга имеем следующий закон преобразования

$$Y^{\mu\nu} = X^{\alpha\beta} \frac{\partial y^\mu}{\partial x^\alpha} \frac{\partial y^\nu}{\partial x^\beta},$$

где  $X = X^{\alpha\beta}(x) \partial_\alpha \otimes \partial_\beta \in \mathcal{T}^2(\mathbb{M})$  и  $Y = Y^{\mu\nu}(y) \partial_\mu \otimes \partial_\nu \in \mathcal{T}^2(\mathbb{N})$   $\square$

**Определение.** Инъективное отображение многообразий  $h : \mathbb{M} \rightarrow \mathbb{N}$  индуцирует *возврат отображения* в кокасательных пространствах, который мы обозначим тем же символом, но со звездочкой сверху:

$$h^* : T_{h(x)}^*(\mathbb{N}) \ni B \mapsto A = h^*B \in T_x^*(\mathbb{M}). \quad (1.53)$$

Возврат отображения  $h^*$  дуален (сопряжен) к дифференциалу отображения  $h_*$  и определяется следующим равенством

$$A(X) = B(Y) \quad \text{или} \quad h^*B(X) = B(h_*X), \quad (1.54)$$

где  $Y = h_*X$ . Возврат отображения называется также *отображением дифференциальных форм*. □

Подчеркнем, что возврат отображения действует в сторону, обратную самому отображению  $h$ .

При определении возврата отображения  $h^*$  мы требуем, чтобы исходное отображение  $h$  было инъективным. В противном случае прообраз  $h^{-1}(h(x))$  для некоторого  $x \in \mathbb{M}$  состоит не из одного элемента, и возврат отображения не определен. Возврат отображения определен не на всех формах из  $\mathcal{T}_1(\mathbb{N})$ , а только на формах из образа инъективного отображения  $\mathcal{T}_1(h(\mathbb{M}))$ . Возврат отображения  $h^*$  будет определен на множестве всех форм  $\mathcal{T}_1(\mathbb{N})$  тогда и только тогда, когда отображение  $h$  биективно.

В компонентах возврат отображения записывается в виде

$$A_\alpha = \frac{\partial y^\mu}{\partial x^\alpha} B_\mu, \quad (1.55)$$

т.е. так же, как и дифференциал отображения, определяется матрицей Якоби.

Возврат отображения естественным образом обобщается на тензорные поля из  $\mathcal{T}_s(\mathbb{N})$  типа  $(0, s)$ , имеющие только ковариантные индексы, и обозначается  $(h^*)^s$ .

**Пример 1.4.2.** Для компонент ковариантных тензоров второго ранга имеем следующий закон преобразования

$$X_{\alpha\beta} = \frac{\partial y^\mu}{\partial x^\alpha} \frac{\partial y^\nu}{\partial x^\beta} Y_{\mu\nu},$$

где  $X = X_{\alpha\beta}(x)dx^\alpha \otimes dx^\beta \in \mathcal{T}_2(\mathbb{M})$  и  $Y = Y_{\mu\nu}(y)dy^\mu \otimes dy^\nu \in \mathcal{T}_2(\mathbb{N})$  □

Из правила дифференцирования сложных функций следует, что возврат произведения отображений равен произведению возвратов отображений, но взятых в обратном порядке:

$$(g \circ f)^* = f^* \circ g^*. \quad (1.56)$$

Для тензоров смешанного типа в общем случае не существует индуцированного отображения, поскольку дифференциал и возврат отображения действуют в разные стороны.

**Определение.** Назовем *рангом отображения*  $h : \mathbb{M} \rightarrow \mathbb{N}$  ранг соответствующей матрицы Якоби

$$\text{rank } h := \text{rank } \frac{\partial y^\mu}{\partial x^\alpha}.$$

Если  $\text{rank } h = m$  во всех точках многообразия  $\mathbb{M}$ , то отображение  $h$  называется *невыврожденным*. Для этого необходимо, чтобы  $m \leq n$ .

Рассмотрим отображение (1.46) двух многообразий одинаковой размерности  $\dim \mathbb{M} = \dim \mathbb{N}$ . Если отображение  $h$  биективно, и оба отображения  $h$  и  $h^{-1}$  в координатах задаются гладкими функциями, то отображение  $h$  называется *диффеоморфизмом*. □

**Пример 1.4.3.** Преобразование координат в некоторой области  $(\mathbb{U}, \varphi) \rightarrow (\mathbb{U}, \varphi')$  является диффеоморфизмом.  $\square$

С точки зрения дифференциальной геометрии два диффеоморфных между собой многообразия можно рассматривать, как одно многообразие, заданное в различных координатах, поэтому мы пишем  $\mathbb{M} \approx \mathbb{N}^2$ . В этом случае индуцированные отображения касательных пространств представляют собой не что иное, как правила преобразования тензорных полей при преобразовании координат.

**Определение.** Пусть для отображения (1.46)  $m < n$ . Если отображение касательного пространства  $T_x(\mathbb{M})$  для всех точек  $x \in \mathbb{M}$  на его образ в касательном пространстве  $T_{h(x)}(\mathbb{N})$  является взаимно однозначным, т.е.  $\text{rank } h = \dim \mathbb{M}$ , то отображение  $h$  называется *погружением*. По определению любое невырожденное отображение задает погружение. При погружении само отображение  $h$  может не быть взаимно однозначным. Размерность многообразия  $\mathbb{M}$  не может превосходить размерности многообразия  $\mathbb{N}$ , т.к. в этом случае не может быть взаимной однозначности дифференциала отображения. Если само отображение  $h$  на его образ  $h(\mathbb{M})$  и его дифференциал являются взаимно однозначными, то отображение  $h$  называется *вложением*. В дальнейшем вложение многообразий мы будем обозначать специальным символом:  $\mathbb{M} \hookrightarrow \mathbb{N}$ .  $\square$

Конечно, каждое вложение одновременно является и погружением.

**Пример 1.4.4.** Отображение окружности  $\mathbb{S}^1$  на плоскость  $\mathbb{R}^2$  в виде восьмерки является погружением, но не вложением, см. рис. 1.2a. В то же время отображение окружности в гладкую замкнутую кривую без самопересечений представляет собой вложение, рис. 1.2b.  $\square$

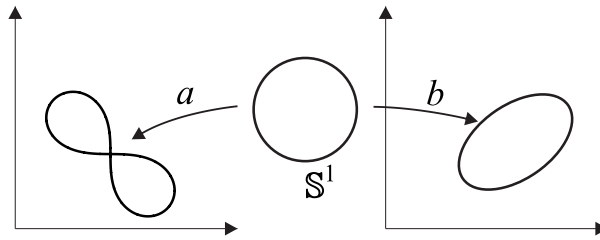


Рис. 1.2: Отображение окружности на плоскость в виде восьмерки является погружением, но не вложением (a). Вложение окружности в плоскость в виде гладкой замкнутой кривой без самопересечений (b).

## 1.5 Подмногообразия

Важным классом отображений многообразий являются подмногообразия.

**Определение.** Пусть  $f : \mathbb{M} \hookrightarrow \mathbb{N}$  – вложение многообразия  $\mathbb{M}$  в  $\mathbb{N}$ , размерностей  $m$  и  $n$ , при этом  $m \leq n$ , тогда пара  $(f, \mathbb{M})$  называется *подмногообразием* в  $\mathbb{N}$ .

<sup>2</sup>Мы не используем обычный знак равенства, т.к. множества точек  $\mathbb{M}$  и  $\mathbb{N}$  могут отличаться по другим признакам, например, по наличию групповой структуры.

В дальнейшем, если не оговорено противное, под вложением мы понимаем гладкое вложение, когда отображение  $f$  определяется гладкими функциями.

**Пример 1.5.1 (Всюду плотная обмотка тора).** Двумерный тор  $\mathbb{T}^2 = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$  можно рассматривать, как двумерное многообразие, полученное путем отождествления противоположных сторон единичного квадрата на евклидовой плоскости. Тем самым точка тора задается упорядоченной парой чисел  $(x, y)$ , каждое из которых определено по модулю один:  $x \sim x + 1$  и  $y \sim y + 1$ . Зафиксируем пару чисел  $a$  и  $b \neq 0$  и рассмотрим отображение вещественной прямой в тор

$$f : \mathbb{R} \ni t \mapsto (at \bmod 1, bt \bmod 1) \in \mathbb{T}^2.$$

Если отношение  $a/b$  иррационально, то отображение  $f$  является вложением, причем образ прямой  $f(\mathbb{R})$  всюду плотен в  $\mathbb{T}^2$  (*всюду плотная обмотка тора*). Если отношение  $a/b$  рационально, то  $f$  представляет собой погружение, и его образ диффеоморфен окружности. Согласно данному выше определению всюду плотная обмотка тора является одномерным подмногообразием на торе. Для всюду плотной обмотки тора индуцированная топология на образе прямой не совпадает с естественной топологией на  $\mathbb{R}$ .  $\square$

При вложении дифференцируемая структура и топология, заданные на  $\mathbb{M}$ , естественным образом переносятся на образ  $f(\mathbb{M})$ , поскольку отображение  $f$  инъективно и дифференцируемо. Тем самым многообразие  $\mathbb{M}$  диффеоморфно своему образу  $f(\mathbb{M})$ . С другой стороны, поскольку образ  $f(\mathbb{M})$  является некоторым подмножеством в пространстве-мишени  $\mathbb{N}$ , то на нем определяется индуцированная из  $\mathbb{N}$  топология. Рассмотренные выше примеры вложения прямой в плоскость и всюду плотной обмотки тора показывают, что топология на  $f(\mathbb{M})$ , наследуемая из  $\mathbb{M}$  при вложении, совсем не обязательно совпадает с топологией, индуцированной из  $\mathbb{N}$ . Это наблюдение мотивирует следующее

**Определение.** Пусть вложение  $f : \mathbb{M} \hookrightarrow \mathbb{N}$  является также и гомеоморфизмом. Тогда пара  $(f, \mathbb{M})$  называется *регулярным подмногообразием*, а  $f$  – *регулярным вложением*  $\mathbb{M}$  в  $\mathbb{N}$ .  $\square$

Доказательство следующей теоремы приведено в [?], теорема 3.4.

**Теорема 1.5.1.** Пара  $(f, \mathbb{M})$  является регулярным подмногообразием в  $\mathbb{N}$  тогда и только тогда, когда для каждой точки  $x \in \mathbb{M}$  существует система координат  $y^\alpha$  на  $\mathbb{U}_{f(x)} \subset \mathbb{N}$ ,  $y^\alpha(f(x)) = 0$ , такая, что пересечение  $f(\mathbb{M}) \cap \mathbb{U}_{f(x)}$  определяется системой, состоящей из  $n - m$  уравнений:

$$y^{m+1} = y^{m+2} = \dots = y^n = 0.$$

В дальнейшем под вложением мы будем понимать только регулярное вложение, для краткости не оговаривая этого явно. В этом случае мы будем отождествлять подмногообразие  $\mathbb{M}$  и его образ  $f(\mathbb{M})$  и будем писать  $\mathbb{M} \subset \mathbb{N}$ .

**Определение.** Пусть  $\mathbb{U}$  является открытым подмножеством  $\mathbb{N}$ . Если ограничить гладкую структуру  $\mathbb{N}$  на  $\mathbb{U}$ , то  $\mathbb{U}$  становится многообразием той же размерности  $\dim \mathbb{U} = \dim \mathbb{N}$ . Тогда вложение  $f : \mathbb{U} \hookrightarrow \mathbb{N}$  осуществляется тождественным отображением, а подмногообразие  $\mathbb{U} \subset \mathbb{N}$  называется *открытым подмногообразием* в  $\mathbb{N}$ .

Пусть  $f(\mathbb{M})$  является подмногообразием в  $\mathbb{N}$  таким, что выполнены два условия:

- 1)  $f(\mathbb{M})$  – замкнутое подмножество в  $\mathbb{N}$ ;
- 2) для каждой точки  $y \in f(\mathbb{M})$  существует такая система координат  $y^\alpha$  на  $\mathbb{U}_y \subset \mathbb{N}$ , что пересечение  $f(\mathbb{M}) \cap \mathbb{U}_y$  задается уравнениями  $y^{m+1} = y^{m+2} = \dots = y^n = 0$ , где  $m = \dim \mathbb{M}$ .

Тогда подмногообразие  $f(\mathbb{M})$  называется *замкнутым подмногообразием* в  $\mathbb{N}$ . Размерность замкнутого подмногообразия  $f(\mathbb{M})$  всегда меньше размерности  $\mathbb{N}$ .  $\square$

**Замечание.** Если подмногообразие (без края)  $\mathbb{M} \subset \mathbb{N}$  имеет ту же размерность, что и  $\mathbb{N}$ , то оно будет обязательно открытым подмногообразием, т.к. в противном случае оно имело бы край. Теорема 1.5.1 утверждает, что любое подмногообразие  $\mathbb{M} \subset \mathbb{N}$  меньшей размерности  $1 < m < n$  является замкнутым подмногообразием.  $\square$

**Определение.** Подмногообразие  $(f, \mathbb{M})$  размерности  $n - 1$  в  $\mathbb{N}$  называется *гиперповерхностью* в  $\mathbb{N}$ .  $\square$

**Пример 1.5.2.** Двумерная сфера  $\mathbb{S}_r^2$  радиуса  $r$  с центром в начале координат является замкнутым подмногообразием трехмерного евклидова пространства  $\mathbb{R}^3$ , которое задается одним уравнением  $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ . Она является гиперповерхностью в  $\mathbb{R}^3$ . В сферической системе координат уравнение сферы задается уравнением  $r = \text{const}$ , а угловые координаты образуют систему координат на сфере.  $\square$

В дальнейшем нам понадобится следующее

**Определение.** Пусть  $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{N})$  – функция и  $\mathbb{M} \subset \mathbb{N}$  – подмногообразие, тогда отображение

$$f|_{\mathbb{M}}: \mathbb{M} \rightarrow \mathbb{R}.$$

называется *сужением* функции  $f$  на подмногообразии  $\mathbb{M}$ . Функция  $f$  является *продолжением* функции  $g$  с некоторого подмногообразия  $\mathbb{M}$  на все  $\mathbb{N}$ , если ее сужение на  $\mathbb{M}$  совпадает с  $g$ ,  $f|_{\mathbb{M}} = g$ . Аналогично, сужением произвольного тензорного поля  $T \in \mathcal{T}(\mathbb{N})$  на подмногообразии называется тензорное поле  $T|_{\mathbb{M}}$ , рассматриваемое только в точках  $x \in \mathbb{M}$ . Обратно, тензорное поле  $T \in \mathcal{T}(\mathbb{N})$  является продолжением тензорного поля  $K \in \mathcal{T}(\mathbb{N})$ , заданного на подмногообразии  $\mathbb{M}$ , если его сужение совпадает с  $K$ ,  $T|_{\mathbb{M}} = K$ .  $\square$

## 1.6 Метрика

Одним из важнейших понятий в геометрии и физике является дифференциально геометрическая метрика или просто метрика. Трудно переоценить ту роль, которую метрика играет в физических приложениях. С ее помощью строятся инварианты, определяется форма объема. Симметрии метрики являются симметриями пространства-времени, которые определяют сохраняющиеся токи. В частности, фундаментальные законы сохранения энергии-импульса и момента количества движения связаны с наличием у метрики определенных симметрий (см. раздел 4.2).

Рассмотрим многообразие  $\mathbb{M}$ ,  $\dim \mathbb{M} = n$ .

**Определение.** Метрикой  $g \in \mathcal{T}_2(\mathbb{M})$  на многообразии  $\mathbb{M}$  называется достаточно гладкое ковариантное тензорное поле типа  $(0, 2)$ , которое является симметричным и невырожденным в каждой точке многообразия:

- 1)  $g_{\alpha\beta} = g_{\beta\alpha}$  – симметричность,

2)  $\det g_{\alpha\beta} \neq 0$  – невырожденность,

где  $g = dx^\alpha \otimes dx^\beta g_{\alpha\beta}$  – выражение для метрики в координатном базисе. Метрика называется *римановой*, если матрица  $g_{\alpha\beta}(x)$  положительно или отрицательно определена во всех точках  $x \in \mathbb{M}$ . В противном случае метрика называется *псевдоримановой*.  $\square$

Метрика определяет билинейное невырожденное и симметричное отображение

$$g : \mathcal{X}(\mathbb{M}) \times \mathcal{X}(\mathbb{M}) \ni X, Y \mapsto (X, Y) \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{M}),$$

которое называется *скалярным произведением* векторных полей. В компонентах скалярное произведение векторных полей  $X = X^\alpha \partial_\alpha$  и  $Y = Y^\alpha \partial_\alpha$  задается сверткой индексов:

$$(X, Y) := X^\alpha Y^\beta g_{\alpha\beta}. \quad (1.57)$$

Скалярное произведение, очевидно, симметрично:  $(X, Y) = (Y, X)$ . Для римановой метрики скалярное произведение является положительно определенным в каждой точке. Скалярное произведение базисных векторных полей  $\partial_\alpha$  равно компонентам метрики:

$$(\partial_\alpha, \partial_\beta) = g_{\alpha\beta}. \quad (1.58)$$

Поскольку метрика невырождена, то существует *обратная метрика*, т.е. симметричное невырожденное контравариантное тензорное поле  $g^{\alpha\beta} \partial_\alpha \otimes \partial_\beta \in \mathcal{T}^2(\mathbb{M})$  типа  $(2, 0)$ , компоненты которого в каждой точке многообразия удовлетворяют условию

$$g^{\alpha\beta} g_{\beta\gamma} = g_{\gamma\beta} g^{\beta\alpha} = \delta_\gamma^\alpha. \quad (1.59)$$

При преобразовании координат  $x^\alpha \rightarrow x^{\alpha'}(x)$  компоненты метрики и ее обратной преобразуются по обычным правилам для тензорных полей:

$$g_{\alpha'\beta'} = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x^{\alpha'}} \frac{\partial x^\beta}{\partial x^{\beta'}} g_{\alpha\beta}, \quad (1.60)$$

$$g^{\alpha'\beta'} = g^{\alpha\beta} \frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x^{\beta'}}{\partial x^\beta}. \quad (1.61)$$

Отсюда следует, что определитель метрики

$$g(x) := \det g_{\alpha\beta}(x) \quad (1.62)$$

преобразуется по правилу  $g' = J^{-2}g$ , где  $J$  – якобиан преобразования координат (1.13). То есть определитель метрики является скалярной плотностью степени  $-2$ .

В общем случае, ввиду симметрии по индексам, метрика  $g_{\alpha\beta}$  задается

$$[g_{\alpha\beta}] = \frac{n(n+1)}{2}$$

произвольными компонентами с единственным условием невырожденности. Здесь и в дальнейшем число компонент тензора мы будем обозначать квадратными скобками.

С помощью метрики и ее обратной можно изменить тип тензора путем опускания или подъема всех или части индексов произвольного тензорного поля.

**Пример 1.6.1.** Произвольному векторному полю  $X \in \mathcal{X}(\mathbb{M})$  можно взаимно однозначно поставить в соответствие 1-форму и наоборот. В компонентах отображение задается следующими формулами:

$$X_\alpha := X^\beta g_{\beta\alpha}, \quad X^\alpha = g^{\alpha\beta} X_\beta. \quad (1.63)$$

Операция подъема и опускания индексов естественным образом продолжается на тензоры произвольного типа.  $\square$

**Замечание.** Если на многообразии задана метрика, то между контравариантными и ковариантными тензорными полями одного ранга  $r$  существует взаимно однозначное соответствие. По этой причине будем считать, что тензоры одного ранга, но с различным типом индексов, описывают один и тот же геометрический объект и будем обозначать их, как правило, одной буквой. Например,

$$T_{\alpha\beta} = T_{\alpha}^{\gamma} g_{\gamma\beta} = T^{\gamma}_{\beta} g_{\gamma\alpha} = T^{\gamma\delta} g_{\gamma\alpha} g_{\delta\beta},$$

где  $T_{\alpha\beta}$  и  $T^{\alpha\beta}$  – ковариантные и контравариантные компоненты тензора второго ранга. Компоненты  $T_{\alpha}^{\beta}$  и  $T^{\alpha}_{\beta}$  называются смешанными. Поскольку при наличии метрики появилась возможность опускать и поднимать индексы, то необходимо следить за порядком ковариантных и контравариантных индексов. В общем случае  $T_{\alpha}^{\beta} \neq T^{\beta}_{\alpha}$ . Поэтому не стоит писать контра- и ковариантные индексы один под другим.  $\square$

**Определение.** Скалярное произведение вектора в каждой точке  $x \in \mathbb{M}$  с самим собой называется *квадратом* вектора и обозначается

$$X^2 := (X, X). \quad (1.64)$$

Если  $(X, Y) = 0$ , то два вектора называются *ортогональными* или *перпендикулярными*, независимо от положительной определенности метрики.  $\square$

**Определение.** Две метрики  $g' = dx^{\alpha} \otimes dx^{\beta} g'_{\alpha\beta}$  и  $g = dx^{\alpha} \otimes dx^{\beta} g_{\alpha\beta}$  на многообразии  $\mathbb{M}$  называются *конформно эквивалентными* или связанными преобразованием Вейля, если они пропорциональны:

$$g' = e^{2\phi} g, \quad (1.65)$$

где  $\phi(x)$  – некоторая достаточно гладкая функция на  $\mathbb{M}$ . Преобразование (1.65) называют *конформным преобразованием* метрики или *преобразованием Вейля*.  $\square$

Поскольку метрика невырождена, то у нее существует обратная метрика (1.59), которая естественным образом определяет скалярное произведение в пространстве 1-форм. Скалярное произведение двух 1-форм  $A = dx^{\alpha} A_{\alpha}$  и  $B = dx^{\beta} B_{\beta}$  по определению равно

$$(A, B) = g(A, B) := g^{\alpha\beta} A_{\alpha} B_{\beta}. \quad (1.66)$$

Это скалярное произведение согласовано с операцией подъема и опускания индексов (1.63):

$$g^{\alpha\beta} A_{\alpha} B_{\beta} = g_{\alpha\beta} A^{\alpha} B^{\beta}, \quad \text{где} \quad A^{\alpha} := g^{\alpha\beta} A_{\beta}, \quad B^{\alpha} := g^{\alpha\beta} B_{\beta}.$$

Скалярные произведения векторов (1.57) и 1-форм (1.66) естественным образом продолжаются на тензорные поля произвольного типа  $(r, s)$ .

Метрика на многообразии определяет инвариантную квадратичную форму дифференциалов, которая называется *интервалом*

$$ds^2 := g_{\alpha\beta} dx^{\alpha} dx^{\beta}. \quad (1.67)$$

Интервал задает расстояние между двумя бесконечно близкими точками с координатами  $x^{\alpha}$  и  $x^{\alpha} + dx^{\alpha}$ . Это расстояние зависит от точки многообразия, но не от выбора системы координат.

### 1.6.1 Метрика на лоренцевых многообразиях

За счет выбора системы координат метрику всегда можно привести к диагональному виду в любой наперед заданной точке  $x \in \mathbb{M}$ . Действительно, при замене координат компоненты метрики преобразуются по правилу (1.60). При этом матрица Якоби преобразования координат  $\partial x^\alpha / \partial x^{\alpha'}$  в фиксированной точке многообразия может быть выбрана произвольным образом.

**Пример 1.6.2.** Однородное линейное преобразование координат  $x^\alpha = x^{\alpha'} M_{\alpha'}^\alpha$  с постоянной невырожденной матрицей  $M_{\alpha'}^\alpha = \text{const}$  дает

$$g_{\alpha'\beta'} = M_{\alpha'}^\alpha M_{\beta'}^\beta g_{\alpha\beta}. \quad \square$$

**Замечание.** В общем случае метрику можно привести к диагональному виду в фиксированной точке, но не в окрестности. Это связано с тем, что  $n$  функций преобразований координат, которыми можно воспользоваться, недостаточно для фиксирования  $n(n-1)/2$  функций, параметризующих недиагональные элементы метрики. Исключение составляют многообразия двух и трех измерений.  $\square$

**Определение.** *Сигнатурой метрики*, заданной на многообразии  $\mathbb{M}$ ,  $\dim \mathbb{M} = n$ , называется пара натуральных чисел  $(p, q)$  таких, что  $p + q = n$ , где  $p$  и  $q$  – количество, соответственно, положительных и отрицательных чисел, стоящих на диагонали метрики после ее диагонализации в какой-либо точке многообразия  $x \in \mathbb{M}$ .  $\square$

Если  $g_{\alpha\beta}$  – матрица, составленная из компонент метрики в некоторой системе координат, то числа  $p$  и  $q$  равны, соответственно, числу положительных и отрицательных собственных значений. При общих преобразованиях координат собственные числа могут менять свою величину, но не знаки. Нулевых собственных значений быть не может, т.к. в этом случае метрика была бы вырожденной.

**Предложение 1.6.1.** *Сигнатура метрики не зависит от точки линейно связного многообразия.*

*Доказательство.* Допустим, что в некоторых точках  $x_1, x_2 \in \mathbb{M}$  метрика имеет разную сигнатуру, и соединим эти точки произвольной кривой. Тогда из непрерывности метрики следует, что ее определитель обратился бы в нуль в некоторой точке кривой, что недопустимо.  $\square$

Сигнатура метрики инвариантна, не зависит от выбора системы координат и точки линейно связного многообразия. Будем считать, что после диагонализации номера координат выбраны таким образом, что сначала идут все положительные, а затем – отрицательные собственные значения. Будем писать

$$\text{sign } g_{\alpha\beta} = (\underbrace{+ \cdots +}_p \underbrace{- \cdots -}_q). \quad (1.68)$$

**Определение.** Пара  $(\mathbb{M}, g)$  называется *римановым многообразием*, если метрика является знакоопределенной  $p = n$  или  $q = n$ , и *псевдоримановым многообразием*, если метрика не является знакоопределенной,  $p \neq 0$  и  $q \neq 0$ . Если положительный элемент на диагонали один,

$$\text{sign } g_{\alpha\beta} = (+ - \cdots -),$$

то говорят, что метрика имеет *лоренцеву сигнатуру*. Если на многообразии задана метрика лоренцевой сигнатуры, то будем говорить, что многообразие *лоренцево*.  $\square$



Подчеркнем, что задание метрики на многообразии может быть произвольным. В частности, на одном многообразии можно задать несколько метрик одновременно, причем разной сигнатуры, если такие существуют.

Для лоренцевой метрики скалярное произведение двух векторов может быть положительно, отрицательно или равно нулю, а из условия  $X^2 = 0$  не следует, что  $X = 0$ .

**Определение.** Назовем *пространством-временем* псевдориманово многообразие  $\mathbb{M}$  с заданной метрикой  $g = dx^\alpha \otimes dx^\beta g_{\alpha\beta}$  лоренцевой сигнатуры (лоренцево многообразие). В пространстве-времени векторное поле  $X$  в точке  $x \in \mathbb{M}$  называется:

$$\begin{array}{lll} \text{времениподобным,} & \text{если} & (X, X) > 0, \\ \text{светоподобным (изотропным, нулевым),} & \text{если} & (X, X) = 0, \\ \text{пространственноподобным,} & \text{если} & (X, X) < 0. \end{array} \quad (1.69)$$

Это определение распространяется на область  $\mathbb{U} \subset \mathbb{M}$ , если во всех точках  $x \in \mathbb{U}$  выполнены соответствующие соотношения.  $\square$

Определение (1.69) инвариантно относительно замены координат. В общем случае гладкое векторное поле может иметь различный тип в различных областях связного многообразия.

**Определение.** Так же, как и в римановом пространстве, два вектора в пространстве-времени называются *ортогональными (перпендикулярными)*, если их скалярное произведение равно нулю. В частности, любой изотропный вектор перпендикулярен самому себе.

Определим тип координатного векторного поля  $\partial_0$ . Из (1.58) следует, что  $(\partial_0, \partial_0) = g_{00}$ . Если в данной системе координат  $g_{00} > 0$ , то векторное поле  $\partial_0$  времениподобно. В этом случае назовем координату  $x^0 = t$  *времениподобной* или *временем*. Противоположно направленное векторное поле  $-\partial_0$  также времениподобно и связано с  $\partial_0$  преобразованием координат  $(x^0, x^1, \dots, x^{n-1}) \mapsto (-x^0, x^1, \dots, x^{n-1})$ , которое назовем *обращением времени*. Выберем (произвольно) ориентацию координаты  $x^0$  и будем говорить, что векторное поле  $\partial_0$  направлено в будущее, а  $-\partial_0$  – в прошлое. Тогда на времениподобных векторных полях можно ввести ориентацию. Произвольное времениподобное поле  $X$  направлено в будущее, если  $(X, \partial_0) = X^0 > 0$ . В противном случае, когда  $X^0 < 0$ , будем говорить, что времениподобное векторное поле направлено в прошлое.  $\square$

**Замечание.** В общем случае метрика, индуцированная на сечениях  $t = x^0 = \text{const}$  лоренцева многообразия, может быть отрицательно определена или быть знаконеопределенной. То есть сечения пространства-времени, соответствующие постоянному времени, совсем не обязательно пространственноподобны (= все касательные векторы пространственноподобны). Это зависит от выбора остальных координат.  $\square$

Можно доказать, что каждая точка многообразия  $\mathbb{M}$  лоренцевой сигнатуры  $(1, n-1)$  имеет такую координатную окрестность с координатами  $(t, u^1, \dots, u^{n-1})$ , что в этих координатах метрика имеет блочно диагональный вид

$$ds^2 = dt^2 + g_{\mu\nu}(t, u) du^\mu du^\nu, \quad \mu, \nu = 1 \dots n-1. \quad (1.70)$$

При этом метрика  $g_{\mu\nu}$ , индуцированная на сечениях  $t = \text{const}$ , является отрицательно определенной. Другими словами, все сечения  $t = \text{const}$  для метрики вида (1.70)

являются пространственноподобными подмногообразиями, т.е. все касательные векторы к сечениям пространственноподобны. Эти сечения являются вложенными римановыми многообразиями с локальной системой координат  $(u^\mu)$  и отрицательно определенной метрикой  $g_{\mu\nu}$ . Отметим также, что все векторы, касательные к этому подмногообразию ортогональны времениподобному векторному полю  $\partial_0$ .

**Замечание.** Здесь и в дальнейшем мы будем использовать следующие обозначения координат на лоренцевом многообразии. Греческие буквы из начала алфавита  $\alpha, \beta, \dots$  будут использоваться для нумерации всех координат, а буквы из середины алфавита  $\mu, \nu, \dots$  – для нумерации остальных координат,  $(x^\alpha) = (x^0, x^\mu)$ . Это правило легко запомнить по следующим включениям:

$$\{1, \dots, n-1\} \subset \{0, 1, \dots, n-1\}, \quad \{\mu, \nu, \dots\} \subset \{\alpha, \beta, \dots\}.$$

Как правило, мы будем считать, что координата  $x^0$  является временем, и все остальные координатные линии  $x^\mu$  пространственноподобны. Поэтому координаты  $x^\mu$  будем называть пространственноподобными.  $\square$

В общем случае метрика на лоренцевом многообразии

$$g_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} g_{00} & g_{0\nu} \\ g_{\mu 0} & g_{\mu\nu} \end{pmatrix} \quad (1.71)$$

не имеет блочно диагонального вида (1.70). Приведем критерий того, что метрика (1.71), заданная на некотором многообразии  $\mathbb{M}$ , имеет лоренцеву сигнатуру.

**Предложение 1.6.2.** Пусть в некоторой окрестности  $\mathbb{U} \subset \mathbb{M}$  задана метрика (1.71) такая, что  $g_{00} > 0$ . Эта метрика имеет лоренцеву сигнатуру тогда и только тогда, когда матрица

$$g_{\mu\nu} - \frac{g_{0\mu}g_{0\nu}}{g_{00}} \quad (1.72)$$

отрицательно определена в каждой точке  $\mathbb{U}$ .

*Доказательство.* Достаточно рассмотреть произвольную точку из  $\mathbb{U}$ . Пусть на  $\mathbb{U}$  задана метрика (1.71) для которой  $g_{00} > 0$ . Интервал в окрестности  $\mathbb{U} \subset \mathbb{M}$  имеет вид

$$ds^2 = g_{00}dx^0dx^0 + 2g_{0\mu}dx^0dx^\mu + g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu, \quad g_{00} > 0.$$

Зафиксируем произвольную точку  $x \in \mathbb{U}$ . Введем вместо  $x^0$  новую координату  $\tilde{x}^0$ , для которой в точке  $x \in \mathbb{U}$  выполнено соотношение

$$dx^0 = d\tilde{x}^0 - \frac{dx^\mu g_{0\mu}}{g_{00}}.$$

В фиксированной точке этого всегда можно добиться линейным преобразованием координат. Тогда интервал примет вид

$$ds^2 = g_{00}d\tilde{x}^0d\tilde{x}^0 + \left(g_{\mu\nu} - \frac{g_{0\mu}g_{0\nu}}{g_{00}}\right)dx^\mu dx^\nu. \quad (1.73)$$

Если метрика (1.71) имеет лоренцеву сигнатуру, то существует такая система координат, что в точке  $x \in \mathbb{M}$  метрика диагональна, причем  $g_{00} > 0$ , а все остальные диагональные компоненты  $g_{\mu\mu}$  отрицательны. Поскольку метрика (1.73) связана с

диагональной метрикой также невырожденным преобразованием координат, то матрица (1.72) отрицательно определена.

Обратно. Если матрица (1.72) отрицательно определена, то дальнейшим линейным преобразованием координат  $x^\mu$  ее всегда можно преобразовать к диагональному виду в фиксированной точке, причем на диагонали будут стоять отрицательные числа. Следовательно, метрика имеет лоренцеву сигнатуру.  $\square$

Матрица (1.72) на лоренцевом многообразии симметрична и невырождена, т.к. отрицательно определена. Она имеет следующий геометрический смысл. Вдоль координатных линий времени  $t = x^0$  всегда можно определить единичное векторное поле

$$n := \frac{1}{\sqrt{g_{00}}} \partial_0, \quad (n, n) = 1.$$

Рассмотрим произвольное векторное поле  $X = X^0 \partial_0 + X^\mu \partial_\mu$ . У него есть составляющая, перпендикулярная времениподобному векторному полю  $n$ ,

$$X_\perp = X - (X, n)n = X^\mu \partial_\mu - X^\mu g_{0\mu} \partial_0.$$

Если задано два произвольных векторных поля  $X$  и  $Y$ , то скалярное произведение их перпендикулярных составляющих равно

$$(X_\perp, Y_\perp) = \left( g_{\mu\nu} - \frac{g_{0\mu} g_{0\nu}}{g_{00}} \right) X^\mu Y^\nu.$$

Таким образом, матрица (1.72) играет роль метрики для перпендикулярных составляющих векторных полей. Из теоремы 1.6.2 следует, что, если  $\mathbb{M}$  – лоренцево многообразие и  $x^0$  – время, то составляющие векторных полей, перпендикулярные  $n$ , всегда пространственноподобны.

В дальнейшем мы всегда предполагаем, что координаты на лоренцевом многообразии выбраны таким образом, что координата  $x^0$  является временем, и все сечения  $x^0 = \text{const}$  пространственноподобны. Такой выбор координат удобен, например, при постановке задачи Коши в различных моделях математической физики. На языке компонент метрики эти условия означают, что  $g_{00} > 0$ , и матрица  $g_{\mu\nu}$  отрицательно определена.

## 1.7 Аффинная связность

Пусть на многообразии  $\mathbb{M}$ ,  $\dim \mathbb{M} = n$ , в некоторой карте заданы: функция  $f \in C^\infty(\mathbb{M})$ , гладкое векторное поле  $X = X^\alpha \partial_\alpha \in \mathcal{X}(\mathbb{M})$  и гладкая 1-форма  $A = dx^\alpha A_\alpha \in \Lambda_1(\mathbb{M})$ . Допустим, что на этом многообразии задана также аффинная связность  $\Gamma$ . Тогда в компонентах ковариантные производные имеют вид:

$$\nabla_\alpha f = \partial_\alpha f \tag{1.74}$$

$$\nabla_\alpha X^\beta = \partial_\alpha X^\beta + X^\gamma \Gamma_{\alpha\gamma}^\beta, \tag{1.75}$$

$$\nabla_\alpha A_\beta = \partial_\alpha A_\beta - \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma A_\gamma, \tag{1.76}$$

где  $\Gamma_{\alpha\beta}^\gamma(x)$  – компоненты локальной формы аффинной связности, которые, как мы предполагаем, являются достаточно гладкими функциями от координат  $x^\alpha$ . То есть

ковариантная производная для скалярного поля совпадает с обычной частной производной, а для векторного поля и 1-формы появляются дополнительные слагаемые, линейные по компонентам. Обратим внимание, что дополнительные слагаемые в (1.75) и (1.76) имеют разные знаки.

Покажем, что ковариантная производная от компонент векторного поля при подходящем преобразовании аффинной связности преобразуется как тензор. Рассмотрим преобразование координат

$$x^{\alpha'} = x^{\alpha'}(x) \quad \alpha' = 1, \dots, n, \quad (1.77)$$

Тогда компоненты векторного поля преобразуются по правилу (1.17). Дифференцируя соотношение (1.17) по  $x^{\beta'}$ , получаем два слагаемых

$$\partial_{\beta'} X^{\alpha'} = \partial_{\beta'} x^{\beta} \partial_{\beta} X^{\alpha} \partial_{\alpha} x^{\alpha'} + \partial_{\beta'} x^{\beta} X^{\alpha} \partial_{\beta\alpha}^2 x^{\alpha'}, \quad (1.78)$$

где  $\partial_{\beta'} = \partial_{\beta'} x^{\beta} \partial_{\beta}$ . Первое слагаемое в правой части соответствует тензорному закону преобразования для производной от векторного поля, в то время как второе слагаемое этот закон нарушает.

Чтобы получить тензорный закон преобразования в общем случае вводится понятие ковариантной производной, которая содержит дополнительное слагаемое в выражении (1.75). Если потребовать, чтобы ковариантная производная после преобразования координат имела тот же вид с некоторыми новыми компонентами  $\Gamma_{\beta'\gamma'}^{\alpha'}$ ,

$$\partial_{\beta'} X^{\alpha'} + \Gamma_{\beta'\gamma'}^{\alpha'} X^{\gamma'} = \partial_{\beta'} x^{\beta} (\partial_{\beta} X^{\alpha} + \Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha} X^{\gamma}) \partial_{\alpha} x^{\alpha'},$$

то с учетом уравнения (1.78) получим следующий закон преобразования компонент аффинной связности:

$$\Gamma_{\beta'\gamma'}^{\alpha'} = \partial_{\beta'} x^{\beta} \partial_{\gamma'} x^{\gamma} \Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha} \partial_{\alpha} x^{\alpha'} - \partial_{\beta'} x^{\beta} \partial_{\gamma'} x^{\gamma} \partial_{\beta\alpha}^2 x^{\alpha'}, \quad (1.79)$$

Закон преобразования компонент аффинной связности отличается от тензорного закона наличием неоднородных слагаемых, которые содержат вторые производные от функций перехода.

Сами по себе компоненты аффинной связности не являются компонентами тензора, однако они позволяют строить новые тензорные поля из заданных с помощью ковариантного дифференцирования. Собственно, название “ковариантное” и отражает это обстоятельство. Нетрудно проверить, что ковариантная производная от 1-формы (1.76) является тензорным полем второго ранга типа (0, 2).

Ковариантное дифференцирование продолжается на тензоры произвольного ранга. В компонентах это выглядит следующим образом. Помимо обычной частной производной в ковариантную производную входят слагаемые с компонентами аффинной связности со знаком плюс для каждого контравариантного и минус для каждого ковариантного индекса:

$$\begin{aligned} \nabla_{\alpha} K_{\beta_1 \dots \beta_s}^{\gamma_1 \dots \gamma_r} &= \partial_{\alpha} K_{\beta_1 \dots \beta_s}^{\gamma_1 \dots \gamma_r} - \Gamma_{\alpha\beta_1}^{\delta} K_{\delta\beta_2 \dots \beta_s}^{\gamma_1 \dots \gamma_r} - \dots - \Gamma_{\alpha\beta_s}^{\delta} K_{\beta_1 \dots \beta_{s-1}\delta}^{\gamma_1 \dots \gamma_r} + \\ &+ K_{\beta_1 \dots \beta_s}^{\delta\gamma_2 \dots \gamma_r} \Gamma_{\alpha\delta}^{\gamma_1} + \dots + K_{\beta_1 \dots \beta_s}^{\gamma_1 \dots \gamma_{r-1}\delta} \Gamma_{\alpha\delta}^{\gamma_r}. \end{aligned}$$

**Пример 1.7.1.** Для тензора второго ранга типа (1, 1) ковариантная производная имеет вид

$$\nabla_{\alpha} K_{\beta}^{\gamma} = \partial_{\alpha} K_{\beta}^{\gamma} - \Gamma_{\alpha\beta}^{\delta} K_{\delta}^{\gamma} + \Gamma_{\alpha\delta}^{\gamma} K_{\beta}^{\delta}. \quad (1.80)$$

В частном случае, ковариантная производная от символа Кронекера (1.38) тождественно равна нулю

$$\nabla_\alpha \delta_\beta^\gamma = \partial_\alpha \delta_\beta^\gamma + \delta_\beta^\delta \Gamma_{\alpha\delta}^\gamma - \Gamma_{\alpha\beta}^\delta \delta_\delta^\gamma = 0. \quad (1.81)$$

То есть символ Кронекера ковариантно постоянен (параллелен) относительно произвольной аффинной связности.  $\square$

**Определение.** Произвольному векторному полю можно поставить в соответствие бесконечно малую величину

$$DX^\alpha := dx^\beta \nabla_\beta X^\alpha = dx^\beta (\partial_\beta X^\alpha + \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha X^\gamma), \quad (1.82)$$

которая называется *ковариантным дифференциалом*. Аналогично определяется ковариантный дифференциал для произвольного тензорного поля. Для функции ковариантный дифференциал совпадает с обычным.

Рассмотрим произвольную дифференцируемую кривую  $\gamma = (x^\alpha(t))$  в римановом пространстве с положительно определенной метрикой. Тогда длина дуги кривой отлична от нуля

$$ds := dt \sqrt{\dot{x}^2} \neq 0, \quad \text{где} \quad \dot{x}^2 := \dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta g_{\alpha\beta}. \quad (1.83)$$

Выражение

$$\frac{DX^\alpha}{ds} := u^\beta \nabla_\beta X^\alpha, \quad (1.84)$$

где

$$u^\alpha := \frac{dx^\alpha}{ds} = \frac{\dot{x}^\alpha}{\sqrt{\dot{x}^2}}, \quad u^2 = 1, \quad (1.85)$$

– единичный касательный вектор к кривой, называется *ковариантной производной вектора  $X$  вдоль кривой  $\gamma$* .  $\square$

Аналогично определяется ковариантная производная вдоль кривой от произвольного тензорного поля.

Пусть на многообразии задано векторное поле  $X \in \mathcal{X}(\mathbb{M})$ . Тогда *ковариантная производная вдоль векторного поля  $X$*  от тензорного поля  $K_{\alpha_1 \dots \alpha_r}^{\beta_1 \dots \beta_s}$  типа  $(r, s)$  дает тензорное поле того же типа с компонентами

$$(\nabla_X K)_{\alpha_1 \dots \alpha_r}^{\beta_1 \dots \beta_s} := X^\gamma \nabla_\gamma K_{\alpha_1 \dots \alpha_r}^{\beta_1 \dots \beta_s}. \quad (1.86)$$

### 1.7.1 Кручение и неметричность

В общем случае компоненты связности  $\Gamma_{\alpha\beta}^\gamma$  никакой симметрии по индексам не имеют и никак не связаны с метрикой  $g_{\alpha\beta}$ , поскольку эти понятия определяют на многообразии  $\mathbb{M}$  разные геометрические операции. А именно, метрика многообразия определяет в каждой точке скалярное произведение векторов из касательного пространства, а аффинная связность определяет ковариантное дифференцирование. Геометрия на многообразии  $\mathbb{M}$  определяется метрикой и аффинной связностью. Будем говорить, что на  $\mathbb{M}$  задана *аффинная геометрия*, если заданы достаточно гладкие метрика и аффинная связность, т.е. задано три объекта  $(\mathbb{M}, g, \Gamma)$ .

**Замечание.** В общем случае метрика и аффинная связность задаются произвольным образом и являются совершенно независимыми геометрическими объектами. Поэтому при построении физических моделей их можно рассматривать как независимые поля, имеющие разную физическую интерпретацию. В настоящее время

принято считать, что метрика описывает гравитационное взаимодействие. Физический смысл аффинной связности пока не ясен. Это связано с тем, что физическая интерпретация связности зависит от конкретной модели. Соответствующие модели сложны с математической точки зрения и в настоящее время изучены недостаточно хорошо.  $\square$

По определению кручение связности в локальной системе координат равно антисимметричной части аффинной связности:

$$T_{\alpha\beta}{}^{\gamma} := \Gamma_{\alpha\beta}{}^{\gamma} - \Gamma_{\beta\alpha}{}^{\gamma}. \quad (1.87)$$

Из закона преобразования связности (1.79) следует, что кручение является тензорным полем типа  $(1, 2)$ .

**Определение.** Если на многообразии задана аффинная геометрия, то можно построить *тензор неметричности*  $Q_{\alpha\beta\gamma}$ . Он равен ковариантной производной от метрики:

$$-Q_{\alpha\beta\gamma} := \nabla_{\alpha}g_{\beta\gamma} = \partial_{\alpha}g_{\beta\gamma} - \Gamma_{\alpha\beta}{}^{\delta}g_{\delta\gamma} - \Gamma_{\alpha\gamma}{}^{\delta}g_{\beta\delta}. \quad \square \quad (1.88)$$

Тензор неметричности, по построению, симметричен относительно перестановки двух последних индексов:

$$Q_{\alpha\beta\gamma} = Q_{\alpha\gamma\beta}.$$

Заметим, что для определения неметричности необходимы оба объекта: и метрика, и связность.

Таким образом по заданной метрике и аффинной связности построено два тензорных поля: кручение и тензор неметричности. Докажем, что по заданной метрике, кручению и тензору неметричности можно однозначно восстановить соответствующую аффинную связность. Уравнение (1.88) всегда можно решить относительно связности  $\Gamma$ . Действительно, линейная комбинация

$$\nabla_{\alpha}g_{\beta\gamma} + \nabla_{\beta}g_{\gamma\alpha} - \nabla_{\gamma}g_{\alpha\beta}$$

приводит к следующему общему решению для аффинной связности с опущенным верхним индексом

$$\begin{aligned} \Gamma_{\alpha\beta\gamma} := \Gamma_{\alpha\beta}{}^{\delta}g_{\delta\gamma} = & \frac{1}{2}(\partial_{\alpha}g_{\beta\gamma} + \partial_{\beta}g_{\gamma\alpha} - \partial_{\gamma}g_{\alpha\beta}) + \frac{1}{2}(T_{\alpha\beta\gamma} - T_{\beta\gamma\alpha} + T_{\gamma\alpha\beta}) + \\ & + \frac{1}{2}(Q_{\alpha\beta\gamma} + Q_{\beta\gamma\alpha} - Q_{\gamma\alpha\beta}). \end{aligned} \quad (1.89)$$

Таким образом, справедливо

**Предложение 1.7.1.** Для того, чтобы на многообразии  $M$  задать аффинную геометрию  $(g, \Gamma)$ , необходимо и достаточно задать три тензорных поля: метрику  $g$ , кручение  $T$  и неметричность  $Q$ .

Подчеркнем еще раз, что все три объекта можно задать совершенно независимым образом, и в моделях математической физики их можно рассматривать как независимые динамические переменные.

**Определение.** Второе слагаемое в правой части равенства (1.89)

$$K_{\alpha\beta\gamma} := \frac{1}{2}(T_{\alpha\beta\gamma} - T_{\beta\gamma\alpha} + T_{\gamma\alpha\beta}) \quad (1.90)$$

называется тензором *кокручения*.  $\square$

Рассмотрим частные случаи аффинной геометрии.

**Определение.** При попытке объединить гравитацию с электромагнетизмом Г. Вейль рассмотрел тензор неметричности специального вида [?]

$$Q_{\alpha\beta\gamma} := W_{\alpha}g_{\beta\gamma}, \quad (1.91)$$

где  $W_{\alpha}$  – форма Вейля, отождествленная с электромагнитным потенциалом, (при этом предполагалось, что кручение тождественно равно нулю). Будем говорить, что на многообразии задана *геометрия Римана–Картана–Вейля*, если на нем задана метрика, кручение и неметричность специального вида (1.91).

Если тензор неметричности тождественно равен нулю, а метрика и кручение нетривиальны, то будем говорить, что на многообразии задана *геометрия Римана–Картана*. В этом случае из уравнения (1.89) следует, что аффинная связность однозначно определяется метрикой и кручением:

$$\Gamma_{\alpha\beta\gamma} = \frac{1}{2}(\partial_{\alpha}g_{\beta\gamma} + \partial_{\beta}g_{\alpha\gamma} - \partial_{\gamma}g_{\alpha\beta}) + \frac{1}{2}(T_{\alpha\beta\gamma} - T_{\beta\gamma\alpha} + T_{\gamma\alpha\beta}). \quad (1.92)$$

Такую связность называют *метрической*, поскольку ковариантная производная от метрики тождественно равна нулю,

$$\nabla_{\alpha}g_{\beta\gamma} = \partial_{\alpha}g_{\beta\gamma} - \Gamma_{\alpha\beta}^{\delta}g_{\delta\gamma} - \Gamma_{\alpha\gamma}^{\delta}g_{\beta\delta} = 0. \quad (1.93)$$

Это равенство называют *условием метричности*, и оно обеспечивает коммутативность ковариантного дифференцирования с опусканием и подъемом индексов.

Если и тензор неметричности, и кручение тождественно равны нулю, а метрика нетривиальна и положительно определена, то будем говорить, что на многообразии задана *геометрия Римана*. В этом случае метрическая связность также симметрична по двум первым индексам и однозначно определяется метрикой:

$$\tilde{\Gamma}_{\alpha\beta}^{\gamma} = \frac{1}{2}g^{\gamma\delta}(\partial_{\alpha}g_{\beta\delta} + \partial_{\beta}g_{\alpha\delta} - \partial_{\delta}g_{\alpha\beta}). \quad (1.94)$$

Эта связность называется *связностью Леви–Чивиты* или *символами Кристоффеля*. Если метрика не является положительно определенной, то геометрия называется *псевдоримановой*.  $\square$

**Замечание.** Если на многообразии задана аффинная геометрия общего вида  $(\mathbb{M}, g, \Gamma)$ , то на нем определены две связности: аффинная связность  $\Gamma$  и связность Леви–Чивиты  $\tilde{\Gamma}$ , поскольку задана метрика. В такой ситуации над связностью Леви–Чивиты и построенных с ее помощью геометрических объектах мы будем писать знак тильды.  $\square$

Из выражения для символов Кристоффеля (1.94) или условия метричности (1.93) следует равенство

$$\partial_{\alpha}g_{\beta\gamma} = \tilde{\Gamma}_{\alpha\beta\gamma} + \tilde{\Gamma}_{\alpha\gamma\beta}. \quad (1.95)$$

Это доказывает следующее

**Предложение 1.7.2.** *Для того, чтобы символы Кристоффеля в некоторой системе координат были равны нулю, необходимо и достаточно, чтобы в этой системе координат компоненты метрики были постоянны.*

Поскольку символы Кристоффеля не являются компонентами тензора, то в другой системе координат они могут быть нетривиальны.

**Пример 1.7.2.** Символы Кристоффеля для евклидова пространства в декартовой системе координат равны нулю, но, скажем, в сферической или цилиндрической системе координат они отличны от нуля.  $\square$

### 1.7.2 Ковариантная производная тензорных плотностей

Ковариантная производная тензорного поля естественным образом обобщается на тензорные плотности произвольной степени  $p$ . Для определенности рассмотрим тензорную плотность  $X_\alpha^\beta$  степени  $p$  и типа  $(1, 1)$ . По определению при преобразовании координат она преобразуется по правилу

$$X_{\alpha'}^{\beta'} = J^p \frac{dx^\alpha}{dx^{\alpha'}} X_\alpha^\beta \frac{dx^{\beta'}}{dx^\beta},$$

где  $J := \det \partial_\alpha x^{\alpha'}$  – якобиан преобразования. Потребуем, чтобы ковариантная производная от тензорной плотности была тензорной плотностью той же степени и того же типа:

$$\nabla_{\alpha'} X_{\beta'}^{\gamma'} = J^p \frac{dx^\alpha}{dx^{\alpha'}} \frac{dx^\beta}{dx^{\beta'}} \nabla_\alpha X_\beta^\gamma \frac{dx^{\gamma'}}{dx^\gamma}. \quad (1.96)$$

Отсюда следует, что ковариантная производная от тензорной плотности имеет вид

$$\nabla_\alpha X_\beta^\gamma = \partial_\alpha X_\beta^\gamma - \Gamma_{\alpha\beta}^\delta X_\delta^\gamma + X_\beta^\delta \Gamma_{\alpha\delta}^\gamma + p \Gamma_\alpha X_\beta^\gamma, \quad (1.97)$$

где  $\Gamma_\alpha := \Gamma_{\alpha\beta}^\beta$  – след аффинной связности. Сравнивая эту ковариантную производную с ковариантной производной (1.80) от тензорного поля типа  $(1, 1)$ , находим, что различие состоит в появлении дополнительного слагаемого, пропорционального степени тензорной плотности и следу аффинной связности. Чтобы проверить выполнение закона преобразования (1.96) заметим, что в законе преобразования следа аффинной связности (1.103) содержится неоднородное слагаемое, которое компенсирует производную от якобиана

$$\partial_\alpha J^p = p J^p \frac{dx^\beta}{dx^{\beta'}} \partial_\alpha \left( \frac{dx^{\beta'}}{dx^\beta} \right).$$

Отсюда следует, что ковариантная производная от тензорной плотности произвольного типа отличается от ковариантной производной соответствующего тензора одним дополнительным слагаемым, пропорциональным степени тензорной плотности и следу аффинной связности.

**Пример 1.7.3.** Определитель метрики  $g$  и элемент объема  $\sqrt{|g|}$  являются тензорными плотностями степеней  $-2$  и  $-1$ , соответственно. Нетрудно убедиться, что в геометрии Римана–Картана и, в частности, (псевдо)римановой геометрии, справедливы следующие равенства:

$$\nabla_\alpha g = 0, \quad \nabla_\alpha \sqrt{|g|} = 0. \quad \square$$

### 1.7.3 Параллельный перенос

С помощью аффинной связности на многообразии  $\mathbb{M}$  можно определить *параллельный перенос* касательных векторов, а также тензоров любого ранга вдоль произвольной кривой.

**Определение.** Пусть дифференцируемая кривая  $\gamma = x(t) = (x^\alpha(t))$ ,  $t \in [0, 1]$  соединяет две точки многообразия  $p, q \in \mathbb{M}$ :  $x(0) = p$ ,  $x(1) = q$ . Касательный вектор к кривой (вектор скорости) имеет компоненты  $u^\alpha := \dot{x}^\alpha$  и предполагается отличным от нуля. Условие параллельного переноса в компонентах имеет вид

$$\nabla_u X^\alpha := u^\beta (\partial_\beta X^\alpha + \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha X^\gamma) = 0, \quad (1.98)$$



или

$$\dot{X}^\alpha = -\dot{x}^\beta X^\gamma \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha, \quad (1.99)$$

где все поля рассматриваются как функции от  $t$ . Это – система линейных обыкновенных дифференциальных уравнений на компоненты векторного поля  $X^\alpha(t)$ , которая решается с некоторым начальным условием  $X^\alpha(0) := X_0^\alpha$ . Если функции  $\dot{x}^\beta \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha$  непрерывны по  $t$ , то решение этой задачи существует и единственно для всех значений  $t \in [0, 1]$  (см., например, [?], § 27). Решение системы уравнений (1.99) с начальным условием  $X^\alpha(0) := X_0^\alpha$  называется *параллельным переносом* вектора  $X_0$  из точки  $p$  в точку  $x(t)$  вдоль кривой  $\gamma$ .  $\square$

**Замечание.** В отличие от параллельного переноса, уравнения геодезических являются нелинейными, и поэтому общие теоремы для систем обыкновенных дифференциальных уравнений гарантируют существование и единственность решений только в некоторой достаточно малой окрестности начальной точки  $t = 0$  при надлежащих условиях на правую часть. Это приводит к проблеме продолжения геодезических.  $\square$

Условие параллельного переноса (1.99) можно переписать в интегральной форме

$$X^\alpha(t) = X_0^\alpha - \int_0^t ds \dot{x}^\beta X^\gamma \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha, \quad (1.100)$$

где все функции в подынтегральном выражении рассматриваются, как функции от параметра  $s$  вдоль кривой и точка обозначает дифференцирование по  $s$ . При  $t = 1$  получим компоненты вектора в конечной точке  $q$ .

**Предложение 1.7.3.** *Результат параллельного переноса вектора из точки  $p$  в точку  $q$  не зависит ни от параметризации кривой, ни от выбора системы координат.*

*Доказательство.* Независимость от параметризации кривой очевидна.

В новой штрихованной системе координат справедливо равенство

$$X^{\alpha'}(t) = X_0^{\alpha'} - \int_0^t ds \dot{x}^{\beta'} X^{\gamma'} \Gamma_{\beta'\gamma'}^{\alpha'}.$$

Это интегральное уравнение связано с уравнением (1.100) преобразованием координат. Чтобы доказать независимость параллельного переноса, представим неоднородное слагаемое в преобразовании компонент аффинной связности (1.79), умноженное на  $\dot{x}^{\beta'} X^{\gamma'}$ , в виде

$$\dot{x}^\beta X^\gamma \partial_{\beta\gamma}^2 x^{\alpha'} = X^\gamma \partial_t (\partial_\gamma x^{\alpha'})$$

и проинтегрируем по частям.  $\square$

В то же время результат параллельного переноса вектора из точки  $p$  в точку  $q$  в общем случае зависит от кривой  $\gamma$ , соединяющей эти точки.

**Пример 1.7.4.** Рассмотрим евклидово пространство  $\mathbb{R}^n$ . В декартовой системе координат компоненты связности Леви–Чивиты равны нулю. Следовательно, правая часть уравнений (1.99) обращается в нуль, и решение задачи Коши имеет вид  $X^\alpha(t) = X_0^\alpha = \text{const}$ . Это согласуется с нашим представлением о параллельном переносе векторов в евклидовом пространстве. В данном примере параллельный перенос векторов не зависит от пути  $\gamma$ , соединяющим точки  $p$  и  $q$ . Это связано с тем, что кривизна связности Леви–Чивиты в евклидовом пространстве равна нулю.  $\square$

Параллельный перенос вектора вдоль кривой можно естественным образом обобщить на кусочно гладкие кривые, как последовательный параллельный перенос от одного излома к другому.

Аналогично определяется параллельный перенос 1-форм и тензоров произвольного ранга.

**Пример 1.7.5.** В геометрии Римана–Картана по определению ковариантная производная от метрики равна нулю. Поэтому можно считать, что метрика получается в результате параллельного переноса симметричной невырожденной матрицы из произвольной точки многообразия. При этом результат параллельного переноса заданной матрицы не зависит от пути для любой метрической связности.  $\square$

Пусть на многообразии  $\mathbb{M}$  помимо аффинной связности задана метрика. Рассмотрим, как меняется скалярное произведение  $(X, Y)$  двух векторов при параллельном переносе вдоль произвольной кривой  $\gamma$ .

**Предложение 1.7.4.** *Зависимость скалярного произведения  $(X, Y)$  двух векторов, которые параллельно переносятся вдоль  $\gamma$ , от точки кривой определяется только тензором неметричности:*

$$\partial_u(X, Y) = \nabla_u(X^\alpha Y^\beta g_{\alpha\beta}) = X^\alpha Y^\beta \nabla_u g_{\alpha\beta} = -u^\gamma X^\alpha Y^\beta Q_{\gamma\alpha\beta}. \quad (1.101)$$

Отсюда следует, что в геометрии Римана–Картана ( $Q = 0$ ) скалярное произведение двух векторов при параллельном переносе вдоль произвольной кривой сохраняется. В частности, квадрат вектора скорости  $u^2$  кривой  $\gamma$  в геометрии Римана–Картана постоянен вдоль нее.

*Доказательство.* Следует из определения тензора неметричности (1.88).  $\square$

**Следствие.** В римановой геометрии и геометрии Римана–Картана длины векторов и углы между ними сохраняются при параллельном переносе вдоль произвольной кривой  $\gamma$ .

Задание аффинной связности позволяет сравнивать компоненты тензоров в бесконечно близких точках, причем делать это ковариантным образом. Трудность сравнения тензоров в различных точках связана с тем, что при преобразовании координат тензоры в разных точках преобразуются по-разному, и их сравнение (сложение компонент) теряет всякий смысл.

## 1.7.4 Свойства аффинной связности

Во многих важных моделях математической физики пространство-время рассматривается, как многообразие  $\mathbb{M}$ ,  $\dim \mathbb{M} = n$ , на котором задана аффинная геометрия, т.е. метрика и аффинная связность. В настоящем разделе приведены тождества, включающие аффинную связность, которые полезны для приложений при проведении вычислений. Кроме того, определены инвариантные дифференциальные операторы второго порядка и приведена формула интегрирования по частям. Все формулы настоящего раздела доказываются прямыми вычислениями.

Определим *след аффинной связности*, который получается после свертки последней пары индексов:

$$\Gamma_\alpha := \Gamma_{\alpha\beta}{}^\beta. \quad (1.102)$$

Он не является ковекторным полем, поскольку закон преобразования содержит неоднородное слагаемое:

$$\Gamma_{\alpha'} = \partial_{\alpha'} x^{\alpha} \Gamma_{\alpha} - \partial_{\alpha'} x^{\alpha} \partial_{\beta'} x^{\beta} \partial_{\alpha\beta}^2 x^{\beta'} = \partial_{\alpha'} x^{\alpha} \Gamma_{\alpha} + \partial_{\alpha'}^2 x^{\alpha} \partial_{\alpha} x^{\beta'}. \quad (1.103)$$

Из выражения (1.89) для компонент аффинной связности следует, что след символов Кристоффеля имеет вид

$$\tilde{\Gamma}_{\alpha} = \frac{1}{2} g^{\beta\gamma} \partial_{\alpha} g_{\beta\gamma} = -\frac{1}{2} g_{\beta\gamma} \partial_{\alpha} g^{\beta\gamma} = \frac{1}{2} \frac{\partial_{\alpha} g}{g} = \frac{\partial_{\alpha} \sqrt{|g|}}{\sqrt{|g|}}, \quad (1.104)$$

где  $g := \det g_{\alpha\beta}$ .

Приведем также несколько полезных формул, справедливых в (псевдо)римановой геометрии:

$$\partial_{\alpha} g = g g^{\beta\gamma} \partial_{\alpha} g_{\beta\gamma}, \quad (1.105)$$

$$\partial_{\alpha} \sqrt{|g|} = \frac{1}{2} \sqrt{|g|} g^{\beta\gamma} \partial_{\alpha} g_{\beta\gamma} = \sqrt{|g|} \tilde{\Gamma}_{\beta\alpha}^{\beta}, \quad (1.106)$$

$$\partial_{\alpha} g^{\beta\gamma} = -g^{\beta\delta} g^{\gamma\epsilon} \partial_{\alpha} g_{\delta\epsilon}, \quad (1.107)$$

$$\partial_{\alpha} (\sqrt{|g|} g^{\beta\gamma}) = \sqrt{|g|} (g^{\beta\gamma} \tilde{\Gamma}_{\alpha} - g^{\beta\delta} \tilde{\Gamma}_{\alpha\delta}^{\gamma} - g^{\gamma\delta} \tilde{\Gamma}_{\alpha\delta}^{\beta}), \quad (1.108)$$

$$\partial_{\beta} (\sqrt{|g|} g^{\beta\alpha}) = -\sqrt{|g|} g^{\beta\gamma} \tilde{\Gamma}_{\beta\gamma}^{\alpha}, \quad (1.109)$$

Определим также след тензора кручения

$$T_{\alpha} := T_{\beta\alpha}^{\beta}. \quad (1.110)$$

**Предложение 1.7.5.** Для метрической связности полностью антисимметричный тензор является ковариантно постоянным:

$$\nabla_{\alpha} \varepsilon_{\alpha_1 \dots \alpha_n} = 0. \quad (1.111)$$

*Доказательство.* Из определения ковариантной производной и связи между полностью антисимметричным тензором и тензорной плотностью (1.43) следует равенство

$$\nabla_{\alpha} \varepsilon_{\alpha_1 \dots \alpha_n} = \hat{\varepsilon}_{\alpha_1 \dots \alpha_n} \partial_{\alpha} \sqrt{|g|} - \Gamma_{\alpha\alpha_1}^{\beta} \varepsilon_{\beta\alpha_2 \dots \alpha_n} - \dots - \Gamma_{\alpha\alpha_n}^{\beta} \varepsilon_{\alpha_1 \dots \alpha_{n-1}\beta}.$$

Это выражение антисимметрично по индексам  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  и, следовательно, пропорционально полностью антисимметричному тензору:

$$\nabla_{\alpha} \varepsilon_{\alpha_1 \dots \alpha_n} = \varepsilon_{\alpha_1 \dots \alpha_n} X_{\alpha},$$

где  $X_{\alpha}$  – компоненты некоторого ковектора. Свертка полученного равенства с контравариантным тензором  $\varepsilon^{\alpha_1 \dots \alpha_n}$  определяет  $X_{\alpha} = 0$ .  $\square$

В дифференциальной геометрии естественным образом вводится понятие градиента и дивергенции.

**Определение.** Назовем *градиентом* скалярного поля (функции)  $f$  ковекторное поле (1-форму):

$$\text{grad } f := dx^{\alpha} \nabla_{\alpha} f = df = dx^{\alpha} \partial_{\alpha} f. \quad (1.112)$$

Назовем *дивергенцией* векторного поля  $X$  скалярное поле

$$\text{div } X := \nabla_{\alpha} X^{\alpha} = \partial_{\alpha} X^{\alpha} + \Gamma_{\beta\alpha}^{\beta} X^{\alpha}, \quad (1.113)$$

построенное с помощью ковариантной производной.  $\square$

В (псевдо)римановой геометрии дивергенция векторного поля принимает вид

$$\tilde{\nabla}_\alpha X^\alpha = \frac{1}{\sqrt{|g|}} \partial_\alpha (\sqrt{|g|} X^\alpha). \quad (1.114)$$

Эта полезная формула позволяет переписать инвариантный интеграл от дивергенции произвольного векторного поля в (псевдо)римановой геометрии в виде

$$\int dx \sqrt{|g|} \tilde{\nabla}_\alpha X^\alpha = \int dx \partial_\alpha (\sqrt{|g|} X^\alpha)$$

и воспользоваться формулой Стокса.

Наличие ковариантной производной  $\nabla_\alpha$  и метрики  $g_{\alpha\beta}$  позволяет строить ковариантные дифференциальные операторы, действующие на произвольные тензорные поля на многообразии. Для их построения достаточно взять произвольный дифференциальный оператор в (псевдо)евклидовом пространстве, заменить частные производные  $\partial_\alpha$  на ковариантные  $\nabla_\alpha$  и (псевдо)евклидову метрику  $\eta_{\alpha\beta}$  на метрику многообразия  $g_{\alpha\beta}$ . В общем случае эта процедура неоднозначна.

Инвариантный дифференциальный оператор второго порядка, действующий на произвольные тензорные поля на многообразии имеет вид

$$\Delta := g^{\alpha\beta} \nabla_\alpha \nabla_\beta. \quad (1.115)$$

Он часто называется *оператором Лапласа–Бельтрами* независимо от сигнатуры метрики.

В (псевдо)римановой действие оператора Лапласа–Бельтрами на скалярное поле можно записать в виде:

$$\tilde{\Delta} f = \frac{1}{\sqrt{|g|}} \partial_\alpha (\sqrt{|g|} g^{\alpha\beta} \partial_\beta f). \quad (1.116)$$

Если пренебречь граничными слагаемыми, то в (псевдо)римановой геометрии справедлива формула интегрирования по частям:

$$\int dx \sqrt{|g|} X^{\alpha A} \tilde{\nabla}_\alpha Y_A = - \int dx \sqrt{|g|} [\tilde{\nabla}_\alpha X^{\alpha A} Y_A], \quad (1.117)$$

где индекс  $A$  обозначает произвольную совокупность ковариантных и контравариантных индексов, по которым подразумевается суммирование. Отсюда следует, что с точностью до граничных членов имеет место равенство

$$\int dx \sqrt{|g|} X^A \tilde{\Delta} Y_A = \int dx \sqrt{|g|} \tilde{\Delta} X^A Y_A, \quad (1.118)$$

т.е. оператор Лапласа–Бельтрами в (псевдо)римановой геометрии самосопряжен.

## 1.8 Тензор кривизны

Помимо кручения аффинная связность  $\Gamma_{\alpha\beta}^\gamma$  на многообразии  $\mathbb{M}$  задает еще один важный геометрический объект – *тензор кривизны* аффинной связности или *тензор Римана–Кристоффеля*. В локальной системе координат он имеет следующие компоненты:

$$R_{\alpha\beta\gamma}{}^\delta := \partial_\alpha \Gamma_{\beta\gamma}^\delta - \Gamma_{\alpha\gamma}^\epsilon \Gamma_{\beta\epsilon}^\delta - (\alpha \leftrightarrow \beta), \quad (1.119)$$

где скобки  $(\alpha \leftrightarrow \beta)$  обозначают предыдущие слагаемые с переставленными индексами  $\alpha$  и  $\beta$ .

**Замечание.** Тензор кривизны никакого отношения к метрике не имеет и определяется только связностью.  $\square$

Тензор кривизны играет очень важную роль в дифференциальной геометрии и возникает в различных контекстах. Покажем, что тензор кривизны позволяет сформулировать критерий локальной тривиальности аффинной связности.

Пусть на многообразии  $\mathbb{M}$  задана аффинная связность с нулевым кручением,  $T_{\alpha\beta}{}^\gamma = 0$ . При этом неметричность, если задана также метрика, может быть отлична от нуля. Рассмотрим соотношения (1.79) как уравнения на функции перехода  $x^\alpha(x')$ . Потребуем, чтобы в новой системе координат компоненты связности обращались в нуль в некоторой односвязной области. Тогда функции перехода должны удовлетворять уравнению

$$\frac{\partial^2 x^\alpha}{\partial x^{\beta'} \partial x^{\gamma'}} = - \frac{\partial x^\beta}{\partial x^{\beta'}} \frac{\partial x^\gamma}{\partial x^{\gamma'}} \Gamma_{\beta\gamma}{}^\alpha. \quad (1.120)$$

Дифференцируя это соотношение по  $x^{\delta'}$  и исключая вторые производные от функций перехода с помощью исходного уравнения (1.120), получим равенство

$$\frac{\partial^3 x^\alpha}{\partial x^{\beta'} \partial x^{\gamma'} \partial x^{\delta'}} = \frac{\partial x^\beta}{\partial x^{\beta'}} \frac{\partial x^\gamma}{\partial x^{\gamma'}} \frac{\partial x^\delta}{\partial x^{\delta'}} (-\partial_\delta \Gamma_{\beta\gamma}{}^\alpha + \Gamma_{\beta\delta}{}^\epsilon \Gamma_{\epsilon\gamma}{}^\alpha + \Gamma_{\delta\gamma}{}^\epsilon \Gamma_{\beta\epsilon}{}^\alpha).$$

Условия интегрируемости уравнений (1.120) получаются из этих уравнений антисимметризацией выражения в круглых скобках по индексам  $\beta', \delta'$  или  $\gamma', \delta'$  и приравниванием результата нулю. Обе антисимметризации приводят к единственному условию: равенству нулю тензора кривизны (1.119),  $R_{\alpha\beta\gamma}{}^\delta = 0$ .

Таким образом, справедлива

**Теорема 1.8.1.** Пусть на многообразии  $\mathbb{M}$  задана геометрия Римана–Картана. Если тензоры кривизны и кручения равны нулю в некоторой односвязной области  $\mathbb{U} \subset \mathbb{M}$ , то, возможно, в меньшей окрестности существует такая система координат, в которой компоненты связности обратятся в нуль.

### 1.8.1 Свойства тензора кривизны

Выведем несколько полезных тождеств, исходя из определения тензора кривизны (1.119). Прямые вычисления с учетом выражения аффинной связности через метрику, кручение и неметричность показывают, что антисимметризация тензора кривизны по первым трем индексам определяется только тензором кручения и его ковариантными производными:

$$\begin{aligned} R_{\alpha\beta\gamma}{}^\delta + R_{\beta\gamma\alpha}{}^\delta + R_{\gamma\alpha\beta}{}^\delta = & \nabla_\alpha T_{\beta\gamma}{}^\delta + \nabla_\beta T_{\gamma\alpha}{}^\delta + \nabla_\gamma T_{\alpha\beta}{}^\delta + \\ & + T_{\alpha\beta}{}^\epsilon T_{\epsilon\gamma}{}^\delta + T_{\beta\gamma}{}^\epsilon T_{\epsilon\alpha}{}^\delta + T_{\gamma\alpha}{}^\epsilon T_{\epsilon\beta}{}^\delta. \end{aligned} \quad (1.121)$$

Пусть на многообразии  $\mathbb{M}$  задана аффинная геометрия, т.е. метрика и связность. Приведем явное выражение для тензора кривизны со всеми опущенными индексами. С учетом разложения связности (1.89) и тождества (1.95) получаем равенство

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta} := R_{\alpha\beta\gamma}{}^\epsilon g_{\epsilon\delta} = \partial_\alpha \Gamma_{\beta\gamma\delta} + \Gamma_{\alpha\gamma}{}^\epsilon \Gamma_{\beta\delta\epsilon} - \Gamma_{\alpha\gamma}{}^\epsilon (T_{\beta\delta\epsilon} + Q_{\beta\delta\epsilon}) - (\alpha \leftrightarrow \beta). \quad (1.122)$$

Если у тензора кривизны со всеми опущенными индексами произвести симметризацию по последней паре индексов, то получим тождество

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta} + R_{\alpha\beta\delta\gamma} = \nabla_\alpha Q_{\beta\gamma\delta} - \nabla_\beta Q_{\alpha\gamma\delta} + T_{\alpha\beta}{}^\epsilon Q_{\epsilon\gamma\delta}. \quad (1.123)$$

Рассмотрим симметрии тензора кривизны относительно перестановок индексов. В общем случае аффинной геометрии единственная симметрия тензора кривизны со всеми опущенными индексами – это антисимметрия по первой паре индексов:

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta} = -R_{\beta\alpha\gamma\delta}, \quad (1.124)$$

что сразу вытекает из определения (1.119).

В геометрии Римана–Картана тензор кривизны антисимметричен также и по второй паре индексов, что является следствием уравнения (1.123),

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta} = -R_{\alpha\beta\delta\gamma}. \quad (1.125)$$

В (псевдо)римановой геометрии тензор кривизны обладает дополнительной симметрией: его антисимметризация по первым трем индексам тождественно обращается в нуль

$$\tilde{R}_{[\alpha\beta\gamma]\delta} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \tilde{R}_{\alpha\beta\gamma\delta} + \tilde{R}_{\beta\gamma\alpha\delta} + \tilde{R}_{\gamma\alpha\beta\delta} = 0. \quad (1.126)$$

что следует из уравнения (1.121). Число независимых антисимметризованных индексов  $[\alpha\beta\gamma]$  в уравнении (1.126) равно

$$C_n^3 = \frac{n!}{3!(n-3)!} = \frac{n(n-1)(n-2)}{6}.$$

Следовательно, число линейно независимых компонент тензора кривизны равно

$$[\tilde{R}_{\alpha\beta\gamma\delta}] = \frac{n^2(n-1)^2}{4} - \frac{n^2(n-1)(n-2)}{6} = \frac{n^2(n^2-1)}{12}.$$

Из свойств (1.124), (1.125) и (1.126) следует, что в (псевдо)римановой геометрии тензор кривизны симметричен также относительно перестановки первой пары индексов со второй:

$$\tilde{R}_{\alpha\beta\gamma\delta} = \tilde{R}_{\gamma\delta\alpha\beta}. \quad (1.127)$$

В (псевдо)римановой геометрии тензор кривизны со всеми опущенными индексами следующим образом выражается через метрику:

$$\tilde{R}_{\alpha\beta\gamma\delta} = \frac{1}{2}(\partial_{\alpha\gamma}^2 g_{\beta\delta} - \partial_{\alpha\delta}^2 g_{\beta\gamma} - \partial_{\beta\gamma}^2 g_{\alpha\delta} + \partial_{\beta\delta}^2 g_{\alpha\gamma}) + \tilde{\Gamma}_{\alpha\gamma}{}^{\epsilon} \tilde{\Gamma}_{\beta\delta\epsilon} - \tilde{\Gamma}_{\alpha\delta}{}^{\epsilon} \tilde{\Gamma}_{\beta\gamma\epsilon}. \quad (1.128)$$

Как видим, он линеен по вторым производным от метрики и квадратичен по первым производным.

**Определение.** По заданному тензору кривизны путем свертки пары индексов можно построить *тензор Риччи*

$$R_{\alpha\gamma} := R_{\alpha\beta\gamma}{}^{\beta}. \quad \square \quad (1.129)$$

**Замечание.** Тензор кривизны и тензор Риччи строятся только по аффинной связности, без использования метрики.  $\square$

В общем случае тензор Риччи не обладает никакой симметрией по своим индексам. В (псевдо)римановой геометрии он симметричен относительно перестановки индексов:

$$\tilde{R}_{\alpha\gamma} = \tilde{R}_{\gamma\alpha}.$$

**Определение.** Свертывая тензор Риччи с обратной метрикой, получаем *скалярную кривизну* многообразия

$$R := R_{\alpha\beta}g^{\alpha\beta}. \quad \square \quad (1.130)$$

Скалярная кривизна зависит и от связности, и от метрики.

В дальнейшем, для упрощения некоторых формул, мы используем также функцию

$$K := -\frac{1}{n(n-1)}R, \quad (1.131)$$

где  $R$  – скалярная кривизна. При  $n = 2$  эта функция совпадает с гауссовой кривизной поверхности (произведением главных кривизн)  $K$ , вложенной в  $\mathbb{R}^3$ . В формуле (1.131) коэффициент подобран таким образом, что кривизна  $K$   $n$ -мерной сферы радиуса  $a$  равна  $1/a^2$ . Будем называть функцию (1.131) *нормированной скалярной кривизной*

Рассмотрим на многообразии  $\mathbb{M}$  произвольное векторное поле  $X = X^\alpha \partial_\alpha \in \mathcal{X}(\mathbb{M})$  и 1-форму  $A = dx^\alpha A_\alpha \in \Lambda_1(\mathbb{M})$ . Ковариантные производные от их компонент имеют вид (1.75), (1.76). Прямые вычисления показывают, что коммутатор двух ковариантных производных определяется тензором кривизны и кручения:

$$[\nabla_\alpha, \nabla_\beta]X^\gamma = R_{\alpha\beta\delta}{}^\gamma X^\delta - T_{\alpha\beta}{}^\delta \nabla_\delta X^\gamma, \quad (1.132)$$

$$[\nabla_\alpha, \nabla_\beta]A_\gamma = -R_{\alpha\beta\gamma}{}^\delta A_\delta - T_{\alpha\beta}{}^\delta \nabla_\delta A_\gamma. \quad (1.133)$$

и отличается только знаком перед слагаемым с кривизной. Коммутатор ковариантных производных от скалярного поля  $\varphi(x)$  проще:

$$[\nabla_\alpha, \nabla_\beta]\varphi = -T_{\alpha\beta}{}^\gamma \nabla_\gamma \varphi \quad (1.134)$$

и определяется только тензором кручения.

Формулы (1.132), (1.133) обобщаются на тензоры произвольного ранга.

**Пример 1.8.1.** Коммутатор ковариантных производных от компонент тензора  $K \in \mathcal{T}_1^1(\mathbb{M})$  типа  $(1, 1)$  имеет вид

$$[\nabla_\alpha, \nabla_\beta]K^\gamma{}_\delta = R_{\alpha\beta\epsilon}{}^\gamma K^\epsilon{}_\delta - R_{\alpha\beta\delta}{}^\epsilon K^\gamma{}_\epsilon - T_{\alpha\beta}{}^\epsilon \nabla_\epsilon K^\gamma{}_\delta.$$

Для тензоров более высокого ранга будем иметь по одному слагаемому с кривизной со знаком плюс и минус, соответственно, для каждого контравариантного и ковариантного индекса и одно общее слагаемое с тензором кручения.  $\square$

## 1.9 Неголономный базис

Аффинная геометрия на многообразии  $\mathbb{M}$ ,  $\dim \mathbb{M} = n$ , задается метрикой  $g_{\alpha\beta}$  и аффинной связностью  $\Gamma_{\alpha\beta}{}^\gamma$  или, что эквивалентно, метрикой  $g_{\alpha\beta}$ , кручением  $T_{\alpha\beta}{}^\gamma$  и неметричностью  $Q_{\alpha\beta\gamma}$ . При таком описании каждое преобразование координат сопровождается соответствующим преобразованием компонент тензорных полей относительно координатного базиса. Существует также другой способ описания геометрии, когда компоненты тензорных полей рассматриваются относительно репера, который не меняется при преобразовании координат. В этом случае на компоненты тензорных полей действует группа локальных преобразований  $\mathbb{GL}(n, \mathbb{R})$ , что соответствует вращению репера. В результате аффинная геометрия на многообразии  $\mathbb{M}$  будет задана репером  $e_a{}^\alpha$  и линейной или  $\mathbb{GL}(n, \mathbb{R})$  связностью  $\omega_{\alpha a}{}^b$ .

**Определение.** Переменные репер  $e_\alpha^a(x)$  и  $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$  связность  $\omega_{\alpha a}^b(x)$ , задающие на многообразии  $\mathbb{M}$  аффинную геометрию, называются *переменными Картана*. В четырехмерном пространстве-времени репер называется *тетрадой*. В двумерном и трехмерном пространстве репер называется, соответственно, *диадой* и *триадой*.  $\square$

**Замечание.** В моделях математической физики переменные Картана, как правило, упрощают вычисления и необходимы при рассмотрении спинорных полей на многообразии  $\mathbb{M}$ .  $\square$

Напомним, что координатный базис касательных пространств  $\mathbb{T}_x(\mathbb{M})$  во всех точках многообразия  $x \in \mathbb{M}$  мы обозначаем  $\partial_\alpha$ , и он называется *голономным*. Важным свойством координатных базисных векторов  $\partial_\alpha$  является их коммутативность:

$$[\partial_\alpha, \partial_\beta] = 0.$$

Предположим, что в каждой точке многообразия  $x \in \mathbb{M}$  задан произвольный базис касательного пространства  $e_a(x)$  (репер) и дуальный к нему базис 1-форм  $e^a(x)$  (корепер),  $a = 1, \dots, n$ . Дуальность означает, что значение 1-форм  $e^a$  на векторных полях  $e_b$  равно символу Кронекера:  $e^a(e_b) = \delta_b^a$ .

Репер и корепер можно разложить по координатному базису:

$$e_a = e^\alpha_a \partial_\alpha, \quad e^a = dx^\alpha e_\alpha^a,$$

где  $e^\alpha_a$  и  $e_\alpha^a$  – взаимно обратные невырожденные матрицы, что является следствием дуальности базисов,

$$e^\alpha_a e_\alpha^b = \delta_a^b, \quad e^\alpha_a e_\beta^a = \delta_\beta^\alpha.$$

По предположению матрицы  $e^\alpha_a$  и  $e_\alpha^a$  невырождены и достаточно гладко зависят от точки многообразия.

В общем случае репер представляет собой *неголономный базис* касательного пространства, т.е. не существует такой системы координат  $x^a = x^a(x)$ , что

$$e^\alpha_a = \partial_a x^\alpha. \quad (1.135)$$

Репер определен с точностью до локальных  $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$  преобразований, действующих на латинские индексы. Его важнейшей характеристикой являются *компоненты неголономности*  $c_{ab}^c$ , которые определяются коммутатором базисных векторных полей:

$$[e_a, e_b] := c_{ab}^c e_c \quad (1.136)$$

и антисимметричны по нижним индексам:

$$c_{ab}^c(x) = -c_{ba}^c(x).$$

Нетрудно проверить, что равенство нулю компонент неголономности является необходимым и достаточным условием локальной разрешимости системы уравнений (1.135). Это означает, что, если компоненты неголономности равны нулю в некоторой области, то для любой точки из этой области существует окрестность, в которой можно выбрать такую систему координат, что базис станет голономным  $e_a = \partial/\partial x^a$ .

Из определения (1.136) следует явное выражение для компонент неголономности через компоненты репера и их производные:

$$c_{\alpha\beta}^c := e_\alpha^a e_\beta^b c_{ab}^c = -\partial_\alpha e_\beta^c + \partial_\beta e_\alpha^c. \quad (1.137)$$



Компоненты неголономности ковариантны относительно преобразования координат  $x^\alpha \rightarrow x^{\alpha'}(x)$ , но не являются компонентами какого-либо тензора относительно локальных  $\mathbb{GL}(n, \mathbb{R})$  преобразований.

Использование неголономного базиса вместо координатного бывает значительно удобнее и часто используется в приложениях. Поэтому получим основные формулы дифференциальной геометрии в неголономном базисе.

Произвольное векторное поле можно разложить как по координатному, так и по некоординатному (неголономному) базису

$$X = X^\alpha \partial_\alpha = X^a e_a,$$

где  $X^\alpha = e^\alpha_a X^a$  и  $X^a = X^\alpha e_\alpha^a$ . Предположим, что переход от греческих индексов к латинским и наоборот у компонент тензорных полей произвольного ранга всегда осуществляется с помощью компонент репера и корепера. При этом все симметрии относительно перестановок индексов, конечно, сохраняются.

Если на  $M$  задана метрика  $g_{\alpha\beta}$ , то ее компоненты в неголономном базисе имеют вид

$$g_{ab} = e^\alpha_a e^\beta_b g_{\alpha\beta}. \quad (1.138)$$

В общем случае компоненты метрики  $g_{ab}(x)$  зависят от точки многообразия. Метрика  $g_{ab}$  всегда имеет ту же сигнатуру, что и метрика  $g_{\alpha\beta}$ , т.к. матрица  $e^\alpha_a$  невырождена. Подъем и опускание греческих и латинских индексов осуществляется с помощью метрик  $g_{\alpha\beta}$  и  $g_{ab}$ , соответственно.

Как правило, репер используют в тех случаях, когда матрица  $g_{ab}$  является диагональной и постоянной, а на диагонали расположены плюс и минус единицы:

$$g_{ab} = \eta_{ab} := \text{diag}(\underbrace{+\dots+}_p, \underbrace{-\dots-}_q), \quad p + q = n.$$

Локально такой репер существует, поскольку уравнение (1.138) при одинаковых сигнатурах метрик  $g_{ab}$  и  $g_{\alpha\beta}$  всегда разрешимо относительно репера. Такой репер называется *ортонормальным* и определен с точностью до  $\mathbb{O}(p, q)$  вращений. Ортонормальный базис часто бывает более удобным, т.к. метрика в этом базисе постоянна.

Компоненты тензоров второго и более высокого рангов могут содержать одновременно и греческие, и латинские индексы. По построению ковариантная производная от компонент такого тензора содержит по одному слагаемому с аффинной связностью для каждого греческого индекса и одному слагаемому с линейной связностью для каждого латинского индекса. Если репер задан, то локальная форма линейной связности взаимно однозначно определяется компонентами аффинной связности:

$$\omega_{\alpha a}^b = \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma e^\beta_a e_\gamma^b - \partial_\alpha e_\beta^b e^{\beta a}. \quad (1.139)$$

Эту формулу можно переписать в виде равенства нулю ковариантной производной от компонент корепера:

$$\nabla_\alpha e_\beta^a = \partial_\alpha e_\beta^a - \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma e_\gamma^a + e_\beta^b \omega_{\alpha b}^a = 0. \quad (1.140)$$

Отсюда следует, что ковариантная производная от компонент репера также обращается в нуль

$$\nabla_\alpha e^{\beta a} = \partial_\alpha e^{\beta a} + \Gamma_{\alpha\gamma}^\beta e^\gamma_a - \omega_{\alpha a}^b e^{\beta b} = 0.$$

Тогда, используя правило Лейбница, можно свободно переходить от греческих индексов к латинским и наоборот под знаком ковариантного дифференцирования:

$$\begin{aligned}\nabla_\alpha X^a &= \nabla_\alpha (X^\beta e_\beta^a) = (\nabla_\alpha X^\beta) e_\beta^a, \\ \nabla_\alpha X_a &= \nabla_\alpha (X_\beta e^\beta_a) = (\nabla_\alpha X_\beta) e^\beta_a,\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}\nabla_\alpha X^a &= \partial_\alpha X^a + \omega_{ab}^a X^b, \\ \nabla_\alpha X_a &= \partial_\alpha X_a - \omega_{ab}^b X_b\end{aligned}\tag{1.141}$$

– ковариантные производные от компонент векторного поля относительно неголономного базиса.

В (псевдо)римановой геометрии кручение и неметричность равны нулю. Тогда из формулы (1.139) для ортонормального репера следует выражение для соответствующей  $\mathbb{SO}(n)$  или  $\mathbb{SO}(p, q)$  связности через компоненты неголономности:

$$\tilde{\omega}_{abc} := e^\alpha_a \omega_{\alpha bc} = \frac{1}{2}(c_{abc} - c_{bca} + c_{cab}),\tag{1.142}$$

т.е. компоненты связности однозначно выражаются через репер и его первые производные.

## 1.10 Тожества Бианки

Тожества Бианки играют большую роль в дифференциальной геометрии и ее приложениях. В настоящем разделе мы рассмотрим их в компонентах. Громоздкие, но прямые вычисления позволяют записать следующие тождества в переменных Картана:

$$\nabla_\alpha R_{\beta\gamma a}^b + \nabla_\beta R_{\gamma\alpha a}^b + \nabla_\gamma R_{\alpha\beta a}^b = T_{\alpha\beta}^\delta R_{\gamma\delta a}^b + T_{\beta\gamma}^\delta R_{\alpha\delta a}^b + T_{\gamma\alpha}^\delta R_{\beta\delta a}^b,\tag{1.143}$$

$$\begin{aligned}\nabla_\alpha T_{\beta\gamma}^a + \nabla_\beta T_{\gamma\alpha}^a + \nabla_\gamma T_{\alpha\beta}^a &= T_{\alpha\beta}^\delta T_{\gamma\delta}^a + T_{\beta\gamma}^\delta T_{\alpha\delta}^a + T_{\gamma\alpha}^\delta T_{\beta\delta}^a + \\ &+ R_{\alpha\beta\gamma}^a + R_{\beta\gamma\alpha}^a + R_{\gamma\alpha\beta}^a.\end{aligned}\tag{1.144}$$

В (псевдо)римановой геометрии, когда кручение и неметричность равны нулю, тождества Бианки (1.143), (1.144) существенно упрощаются:

$$\tilde{\nabla}_\alpha \tilde{R}_{\beta\gamma a}^b + \tilde{\nabla}_\beta \tilde{R}_{\gamma\alpha a}^b + \tilde{\nabla}_\gamma \tilde{R}_{\alpha\beta a}^b = 0,\tag{1.145}$$

$$\tilde{R}_{\alpha\beta\gamma}^a + \tilde{R}_{\beta\gamma\alpha}^a + \tilde{R}_{\gamma\alpha\beta}^a = 0.\tag{1.146}$$

Свернем эти тождества, соответственно, с реперами  $e^\gamma_b$  и  $e^\gamma_a$ . Тогда свернутые тождества Бианки примут вид

$$\tilde{\nabla}_\alpha \tilde{R}_{\beta\gamma} - \tilde{\nabla}_\beta \tilde{R}_{\alpha\gamma} + \tilde{\nabla}_\delta \tilde{R}_{\alpha\beta\gamma}^\delta = 0,\tag{1.147}$$

$$\tilde{R}_{\alpha\beta} - \tilde{R}_{\beta\alpha} = 0.\tag{1.148}$$

Как видим, свойства симметрии тензора кривизны (1.146) и (1.148) в (псевдо)римановой геометрии, которые уже были получены в разделе 1.8.1, можно рассматривать как тождества Бианки.

Свертка тождества (1.147) с  $g^{\alpha\gamma}$  приводит к равенству

$$2\tilde{\nabla}_\beta \tilde{R}_\alpha^\beta - \tilde{\nabla}_\alpha \tilde{R} = 0,\tag{1.149}$$

которое можно переписать в виде

$$\tilde{\nabla}_\beta G^{\beta\alpha} = 0, \quad (1.150)$$

где

$$G_{\alpha\beta} := \tilde{R}_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}g_{\alpha\beta}\tilde{R}$$

– тензор Эйнштейна, построенный из тензора Риччи и скалярной кривизны при нулевом кручении и тензоре неметричности.

## 1.11 Бесконечно малые преобразования координат

В настоящем разделе рассматриваются свойства различных полей на многообразии при бесконечно малых преобразованиях координат. Полученные ниже формулы важны в приложениях, в частности, они будут использованы в следующем разделе для вычисления производных Ли.

Поскольку рассмотрение носит локальный характер, то для простоты и наглядности мы рассмотрим евклидово пространство  $\mathbb{R}^n$  с фиксированной декартовой системой координат. Бесконечно малые (инфинитезимальные) преобразования координат

$$x'^\alpha := x^\alpha + u^\alpha(x) \quad (1.151)$$

определяются векторным полем

$$u = u^\alpha \partial_\alpha.$$

Рассмотрим, как меняются тензорные поля при инфинитезимальных преобразованиях координат (1.151). Начнем с простейшего случая скалярного поля (функции)  $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ . Из закона преобразования скалярного поля (1.12) следует равенство

$$f'(x + u) = f(x). \quad (1.152)$$

Разлагая левую часть этого равенства в ряд Тейлора, в первом порядке по  $u$  получим следующее выражение

$$f' = f - u^\alpha \partial_\alpha f, \quad (1.153)$$

где все поля рассматриваются в точке  $x$ . Полученное соотношение интерпретируется следующим образом. При инфинитезимальном преобразовании координат (1.151) значение функции  $f(x)$  в точке  $x$  меняется на бесконечно малую величину

$$\delta f(x) := f'(x) - f(x) = -u^\alpha \partial_\alpha f = -uf. \quad (1.154)$$

которая называется *приращением* или *вариацией формы* функции  $f$  в точке  $x$ . Правая часть этого равенства с обратным знаком представляет собой производную от функции  $f$  вдоль векторного поля  $u$ , определяющего преобразование координат.

Из закона преобразования векторных полей (1.17), который для инфинитезимальных преобразований в первом порядке по  $u$  можно переписать в виде

$$X'^\alpha(x + u) = X^\beta(\delta_\beta^\alpha + \partial_\beta u^\alpha),$$

следует, что вариация формы компонент векторного поля имеет вид

$$\delta X^\alpha = X^\beta \partial_\beta u^\alpha - u^\beta \partial_\beta X^\alpha = [X, u]^\alpha. \quad (1.155)$$

То есть приращение векторного поля в точке  $x$  равно коммутатору этого векторного поля с инфинитезимальным векторным полем смещения  $u$ .

Закон преобразования компонент 1-формы (1.18) приводит к следующему приращению компонент

$$\delta\omega_\alpha = -\partial_\alpha u^\beta \omega_\beta - u^\beta \partial_\beta \omega_\alpha \quad (1.156)$$

или, в ковариантном виде,

$$\delta\omega_\alpha = -\tilde{\nabla}_\alpha u^\beta \omega_\beta - u^\beta \tilde{\nabla}_\beta \omega_\alpha. \quad (1.157)$$

При этом использовано явное выражение для аффинной связности (1.89). Напомним, что символ  $\tilde{\nabla}$  обозначает ковариантную производную с символами Кристоффеля.

Аналогично находится явный вид бесконечно малых преобразований координат для тензоров произвольного ранга.

Приращения компонент тензорных полей, а также связности при инфинитезимальных преобразованиях координат являются тензорными полями. Поскольку бесконечно малые преобразования координат параметризуются векторным полем  $u$ , то вариации полей всегда можно записать в явно ковариантном виде.

Рассмотрим бесконечно малые преобразования основных геометрических объектов: метрики и аффинной связности. Для метрики справедливо равенство

$$\delta g_{\alpha\beta} = -\partial_\alpha u^\gamma g_{\gamma\beta} - \partial_\beta u^\gamma g_{\alpha\gamma} - u^\gamma \partial_\gamma g_{\alpha\beta} \quad (1.158)$$

или, в ковариантном виде,

$$\delta g_{\alpha\beta} = -\tilde{\nabla}_\alpha u_\beta - \tilde{\nabla}_\beta u_\alpha. \quad (1.159)$$

Из уравнения (1.158) следует правило преобразования определителя метрики

$$\delta g = -u^\alpha \partial_\alpha g - 2\partial_\alpha u^\alpha g. \quad (1.160)$$

Отсюда вытекает выражение для вариации формы элемента объема:

$$\delta\sqrt{|g|} = -u^\alpha \partial_\alpha \sqrt{|g|} - \sqrt{|g|} \partial_\alpha u^\alpha = -\sqrt{|g|} \tilde{\nabla}_\alpha u^\alpha, \quad (1.161)$$

Бесконечно малые приращения различных полей, рассмотренные в настоящем разделе, называются вариацией формы, т.к. показывают как меняется значение полей в фиксированной точке многообразия. Следующее свойство проверяется прямой проверкой и используется при доказательстве теоремы Нетер.

**Предложение 1.11.1.** *Вариация формы производной скалярного поля равно производной от вариации*

$$\delta(\partial_\alpha f) = \partial_\alpha(\delta f). \quad \square$$

Рассмотрим коммутатор двух бесконечно малых преобразований координат. Пусть эти преобразования задаются векторными полями  $u = u^\alpha \partial_\alpha$  и  $v = v^\alpha \partial_\alpha$ . Для простоты, ограничимся их последовательным действием на функцию  $f(x)$ . Коммутатор двух преобразований также является преобразованием координат с параметром, который квадратичен по компонентам  $u^\alpha$  и  $v^\alpha$ . Поэтому, в отличие от предыдущего рассмотрения, для вычисления коммутатора необходимо удерживать квадратичные слагаемые.

Сначала совершим преобразование координат, определяемое векторным полем  $u$ . Из закона преобразования функции (1.152) с учетом квадратичных слагаемых получаем равенство

$$f' + u^\alpha \partial_\alpha f' + \frac{1}{2} u^\alpha u^\beta \partial_{\alpha\beta}^2 f' = f.$$

Во втором слагаемом в левой части равенства  $f'$  можно выразить через  $f$ , воспользовавшись линейным приближением (1.153), а в третьем слагаемом заменим  $f'$  на  $f$ , потому что коэффициент перед ним уже квадратичен по  $u$ . В результате с точностью до квадратичных слагаемых получаем разложение

$$f' := (1 + T_u)f = f - u^\alpha \partial_\alpha f + u^\alpha \partial_\alpha u^\beta \partial_\beta f + \frac{1}{2} u^\alpha u^\beta \partial_{\alpha\beta}^2 f + \dots, \quad (1.162)$$

где мы ввели генератор общих преобразований координат  $T_u$  и выписали его действие на функцию в квадратичном приближении.

Совершим теперь второе преобразование координат с параметром  $v$

$$\begin{aligned} (1 + T_v)f' &= (1 + T_v)(1 + T_u)f = \\ &= f' - v^\alpha \partial_\alpha f' + v^\alpha \partial_\alpha u^\beta \partial_\beta f' + \frac{1}{2} v^\alpha v^\beta \partial_{\alpha\beta}^2 f' + \dots = \\ &= f - (u^\alpha + v^\alpha - u^\beta \partial_\beta u^\alpha - v^\beta \partial_\beta u^\alpha - v^\beta \partial_\beta u^\alpha) \partial_\alpha f + \\ &\quad + \frac{1}{2} (u^\alpha u^\beta + 2u^\alpha v^\beta + v^\alpha v^\beta) \partial_{\alpha\beta}^2 f + \dots \end{aligned}$$

Вычитая из этого выражения результат тех же преобразований в обратном порядке, получим явное выражение для коммутатора двух преобразований координат

$$[T_v, T_u]f = T_{[v, u]}f = (v^\beta \partial_\beta u^\alpha - u^\beta \partial_\beta v^\alpha) \partial_\alpha f. \quad (1.163)$$

Таким образом, коммутатор двух преобразований координат в евклидовом пространстве  $\mathbb{R}^n$ , определяемых инфинитезимальными векторными полями  $u$  и  $v$ , является преобразованием координат, которое задается коммутатором векторных полей  $[v, u]$ .

Из групповых соображений следует, что коммутатор двух преобразований координат не зависит от представления. Другими словами, это же выражение для коммутатора имеет место не только для функций, но и для тензорных полей или плотностей более высокого ранга. В последнем случае вычисления являются более громоздкими.

## 1.12 Производная Ли

Понятие потока  $\mathbb{R} \times \mathbb{M} \xrightarrow{s} \mathbb{M}$ , генерируемого отличным от нуля дифференцируемым векторным полем  $X \in \mathcal{X}(\mathbb{M})$  (раздел 1.1.2), позволяет определить производную Ли  $L_X$  от произвольного тензорного поля  $T$  вдоль векторного поля  $X$ .

Рассмотрим произвольную точку  $x \in \mathbb{M}$ . Тогда у нее существует окрестность  $\mathbb{U}_x$  такая, что отображение  $s : \mathbb{U}_x \rightarrow s(\mathbb{U}_x)$  является диффеоморфизмом. Поэтому для него определены дифференциал отображения  $s_*$  и обратное отображение  $s^{*-1}$  к возврату отображения  $s^*$ . Пусть в некоторой окрестности точки  $x \in \mathbb{M}$  задано тензорное поле  $T \in \mathcal{T}_s^r(\mathbb{M})$  типа  $(r, s)$ . В результате экспоненциального отображения  $s(\epsilon, x)$  с малым параметром  $\epsilon$  тензор  $T(x)$  в точке  $x$  отобразится в тензор  $\tilde{s}T(x)$  в точке  $s(\epsilon, x)$ , где  $\tilde{s}T$  обозначает продолжение отображения  $(s_*)^r (s^{*-1})^s T$ , заданного в касательном и кокасательном пространствах, на всю тензорную алгебру (в компонентах: на каждый контравариантный индекс действует дифференциал отображения  $s_*$ ,

а на каждый ковариантный индекс – обратное отображение  $s^{*-1}$ ). Это значит, что в точку  $x$  отобразится тензор из точки  $s(-\epsilon, x)$ :

$$T(s(-\epsilon, x)) \mapsto \tilde{s}(\epsilon, s(-\epsilon, x))T(s(-\epsilon, x)).$$

**Определение.** Производной  $\mathcal{L}_X$  от тензорного поля  $T$  вдоль векторного поля  $X$  в точке  $x$  называется предел

$$\mathcal{L}_X T := \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{T(x) - \tilde{s}(\epsilon, s(-\epsilon, x))T(s(-\epsilon, x))}{\epsilon}. \quad (1.164)$$

В упрощенной записи мы пишем

$$\mathcal{L}_X T = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{T(x) - \tilde{s}(\epsilon)T}{\epsilon}, \quad (1.165)$$

где мы опустили аргумент  $s(-\epsilon, x) \in \mathbb{M}$ .  $\square$

Для дифференцируемых векторных и тензорных полей этот предел существует.

При малых  $\epsilon$  экспоненциальное отображение имеет вид  $x^\alpha \mapsto s^\alpha(\epsilon, x) = x^\alpha + \epsilon X^\alpha + \dots$ , т.е. соответствует бесконечно малым преобразованиям координат, рассмотренным в предыдущем разделе, с вектором смещения  $u^\alpha = \epsilon X^\alpha$ . При этом выражение, стоящее в числителе производной Ли (1.164), совпадает с вариацией формы тензорного поля  $T$ , взятой с обратным знаком. Это следует непосредственно из определения вариации формы тензорного поля. Поэтому определение (1.164) для компонент тензорного поля типа  $(r, s)$  принимает вид

$$\mathcal{L}_X T_{\beta_1 \dots \beta_s}^{\alpha_1 \dots \alpha_r}(x) = - \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\delta T_{\beta_1 \dots \beta_s}^{\alpha_1 \dots \alpha_r}(x)}{\epsilon}, \quad (1.166)$$

где  $\delta T_{\beta_1 \dots \beta_s}^{\alpha_1 \dots \alpha_r}(x)$  – вариация формы компонент тензорного поля типа  $(r, s)$ , рассмотренная в разделе 1.11. Несложные вычисления приводят к следующему выражению для производной Ли компонент тензорного поля

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_X T_{\beta_1 \dots \beta_s}^{\alpha_1 \dots \alpha_r} = & X^\gamma \partial_\gamma T_{\beta_1 \dots \beta_s}^{\alpha_1 \dots \alpha_r} + \\ & + \partial_{\beta_1} X^\gamma T_{\gamma \beta_2 \dots \beta_s}^{\alpha_1 \dots \alpha_r} + \dots + \partial_{\beta_s} X^\gamma T_{\beta_1 \dots \beta_{s-1} \gamma}^{\alpha_1 \dots \alpha_r} - \\ & - T_{\beta_1 \dots \beta_s}^{\gamma \alpha_2 \dots \alpha_r} \partial_\gamma X^{\alpha_1} - \dots - T_{\beta_1 \dots \beta_s}^{\alpha_1 \dots \alpha_{r-1} \gamma} \partial_\gamma X^{\alpha_r}. \end{aligned} \quad (1.167)$$

Первое слагаемое в правой части (1.167) соответствует смещению самой точки  $x$ , слагаемые во второй и третьей строках (1.167) возникают при действии отображений  $s^{*-1}$  и  $s_*$  на каждый ковариантный и контравариантный индекс, соответственно.

Формула (1.167) конструктивна и позволяет получить явные выражения для производных Ли различных тензорных полей в координатах.

**Пример 1.12.1.** В простейшем случае скалярного поля  $f(x)$  производная Ли совпадает с производной функции вдоль векторного поля. Покажем это. Поскольку на скалярное поле ни дифференциал отображения, ни его возврат не действуют, то из определения (1.164) следует

$$\mathcal{L}_X f = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(x - \epsilon X)}{\epsilon} = X^\alpha \partial_\alpha f.$$

Таким образом, производная Ли от функции – это просто производная вдоль векторного поля.  $\square$

**Пример 1.12.2.** Из уравнения (1.167) следует выражение для производной Ли от векторного поля  $Y$  в координатах:

$$\mathbf{L}_X Y^\alpha = X^\beta \partial_\beta Y^\alpha - Y^\beta \partial_\beta X^\alpha,$$

что совпадает с коммутатором векторных полей (1.31)

$$\mathbf{L}_X Y = [X, Y]. \quad \square \quad (1.168)$$

**Пример 1.12.3.** Из формулы (1.156) для инфинитезимальных преобразований следует, что производная Ли от 1-формы  $A = dx^\alpha A_\alpha \in \Lambda_1(\mathbb{M})$  имеет вид

$$\mathbf{L}_X A_\alpha = X^\beta \partial_\beta A_\alpha + \partial_\alpha X^\beta A_\beta = \tilde{\nabla}_X A_\alpha + \tilde{\nabla}_\alpha X^\beta A_\beta. \quad \square$$

**Пример 1.12.4.** Приведем также явное выражение для производной Ли от метрики

$$\mathbf{L}_X g_{\alpha\beta} = X^\gamma \partial_\gamma g_{\alpha\beta} + \partial_\alpha X^\gamma g_{\gamma\beta} + \partial_\beta X^\gamma g_{\alpha\gamma}.$$

Это выражение можно переписать в виде

$$\mathbf{L}_X g_{\alpha\beta} = \tilde{\nabla}_\alpha X_\beta + \tilde{\nabla}_\beta X_\alpha, \quad (1.169)$$

где  $\tilde{\nabla}_\alpha$  – ковариантная производная со связностью Леви–Чивиты (раздел 1.7.1).  $\square$

**Замечание.** Производная Ли не зависит ни от метрики, ни от аффинной связности, которые могут быть заданы на многообразии совершенно независимо.  $\square$

**Определение.** Пусть  $T \in \mathcal{T}_s^r(\mathbb{M})$  и  $X \in \mathcal{X}(\mathbb{M})$  – произвольное тензорное поле типа  $(r, s)$  и полное векторное поле на многообразии  $\mathbb{M}$ . Полное векторное поле порождает однопараметрическую группу преобразований  $s(t, x)$ . Если значение тензорного поля  $T(s)$  в точке  $s(t, x)$  равно  $\tilde{s}(t, x)T(x)$ , то мы говорим, что тензорное поле  $T(x)$  *инвариантно* при действии однопараметрической группы преобразований.  $\square$

Из определения производной Ли следует

**Предложение 1.12.1.** *Тензорное поле  $T \in \mathcal{T}_s^r(\mathbb{M})$  инвариантно относительно однопараметрической группы преобразований  $s(t, x)$ , порожденной векторным полем  $X$ , для всех  $t$  тогда и только тогда, когда производная Ли равна нулю,  $\mathbf{L}_X T = 0$ .*

# Глава 2

## Геометрические и экстремали

Пусть на многообразии  $\mathbb{M}$  задана аффинная геометрия, т.е. метрика  $g$  и аффинная связность  $\Gamma$ . Тогда можно построить два типа выделенных кривых: геометрические и экстремали. Геометрические линии определяются только связностью как линии, касательный вектор к которым остается касательным при параллельном переносе. Экстремали, напротив, определяются только метрикой как линии экстремальной длины. Поскольку метрика и связность являются независимыми геометрическими объектами, то в общем случае геометрические линии и экстремали различны. В частном случае (псевдо)римановой геометрии, когда связностью является связность Леви–Чивиты, геометрические и экстремали совпадают.

В настоящей главе мы рассмотрим оба типа кривых, т.к. они играют важную роль в моделях математической физики. Достаточно сказать, что одним из постулатов общей теории относительности является предположение о том, что свободные точечные частицы, подверженные действию только гравитационных сил, движутся по экстремалиям. Кроме того, понятие полноты многообразий связано также с экстремалиями.

### 2.1 Геометрические

В аффинной геометрии  $(\mathbb{M}, g, \Gamma)$  существует выделенное семейство линий, которые называются геометрическими. Рассмотрим произвольную кривую  $\gamma = x(t) = (x^\alpha(t))$ , где  $-\infty \leq t_1 < t < t_2 \leq \infty$ , на многообразии  $\mathbb{M}$ . Вектор скорости кривой,  $u(t) = (u^\alpha(t) := \dot{x}^\alpha(t))$ , как всегда, предполагается отличным от нуля.

**Определение.** *Геометрической* линией на многообразии  $\mathbb{M}$  называется кривая  $x(t)$  класса  $\mathcal{C}^2([t_1, t_2])$ , касательный вектор к которой остается касательным при параллельном переносе вдоль нее.  $\square$

**Замечание.** В определении геометрической линии присутствует только аффинная связность. Поэтому понятие геометрической линии никакого отношения к метрике не имеет, которой может вообще не быть на многообразии.  $\square$

Получим уравнения, которым должны удовлетворять координатные функции  $x^\alpha(t)$  для того, чтобы кривая  $\gamma$  была геометрической. Выберем произвольный отличный от нуля вектор  $X_0$ , который касается кривой  $\gamma$  в некоторой точке  $x(t_0)$ , и разнесем его вдоль всей кривой с помощью параллельного переноса. В результате получим векторное поле  $X(x(t))$ , определенное на кривой  $\gamma$ . Из определения геометрической следует,



что это векторное поле всюду касается  $\gamma$  и, следовательно, пропорционально векторному полю скорости:  $X^\alpha(t) = f(t)u^\alpha(t)$ , где  $f$  – некоторая отличная от нуля функция на  $\gamma$ . Изменим параметризацию кривой  $t \mapsto s(t)$ . Тогда условие параллельности примет вид

$$X^\alpha = f \frac{ds}{dt} \frac{dx^\alpha}{ds}. \quad (2.1)$$

Выберем новый параметр  $s$  вдоль геодезической таким образом, чтобы было выполнено уравнение

$$\frac{ds}{dt} = \frac{1}{f},$$

которое всегда имеет решение, поскольку  $f \neq 0$ . Таким образом, на геодезической линии существует такая параметризация, что вектор скорости  $u$  при параллельном переносе остается вектором скорости. В дальнейшем мы предполагаем, что параметр  $t$  вдоль геодезической выбран таким образом, что  $f = 1$ . Если вектор скорости геодезической при параллельном переносе остается касательным, то ковариантная производная от него вдоль геодезической равна нулю (1.98):

$$\nabla_u u = u^\alpha (\partial_\alpha u^\beta + \Gamma_{\alpha\gamma}^\beta u^\gamma) \partial_\beta = 0. \quad (2.2)$$

Поскольку  $d/dt = u^\alpha \partial_\alpha$ , то это уравнение в компонентах принимает вид

$$\ddot{x}^\alpha = -\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha \dot{x}^\beta \dot{x}^\gamma. \quad (2.3)$$

Это уравнение не инвариантно относительно перепараметризации кривой. Однако оно допускает линейную замену параметра

$$t \mapsto at + b, \quad a, b \in \mathbb{R}, \quad a \neq 0. \quad (2.4)$$

Таким образом, мы получили критерий того, что кривая  $x(t)$  является геодезической.

**Предложение 2.1.1.** *Кривая  $x(t)$  на многообразии  $\mathbb{M}$  с заданной аффинной связностью  $\Gamma$  является геодезической тогда и только тогда, когда существует такая параметризация кривой, что ее координатные функции  $x^\alpha(t)$  удовлетворяют системе уравнений (2.3).*

**Замечание.** В уравнение (2.2) входит частная производная  $\partial_\alpha u^\beta$  от вектора скорости. Эта производная не определена, т.к. векторное поле скорости  $u^\beta(x(t))$  задано только вдоль кривой  $\gamma$ . Тем не менее в уравнение входит производная по направлению  $u^\alpha \partial_\alpha u^\beta = \ddot{x}^\alpha$ , которая имеет смысл. Это значит, что, для определения частной производной  $\partial_\alpha u^\beta$ , векторное поле скорости можно продолжить в некоторую окрестность кривой  $\gamma$  произвольным дифференцируемым образом, а конечный ответ от такого продолжения не зависит.  $\square$

**Определение.** Параметр  $t$ , по которому проводится дифференцирование в системе обыкновенных дифференциальных уравнений (2.3), определяющих геодезическую линию, называется *каноническим* или *аффинным*.  $\square$

**Предложение 2.1.2.** *Любые два канонических параметра вдоль геодезической связаны между собой линейным преобразованием (2.4).*

*Доказательство.* Рассмотрим вопрос как меняется уравнение для геодезических при произвольной замене канонического параметра. При другой параметризации геодезической  $x^\alpha(s)$ , где  $s = s(t)$ ,  $ds/dt \neq 0$ , уравнение (2.3) изменится:

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 \frac{d^2 x^\alpha}{ds^2} + \frac{d^2 s}{dt^2} \frac{dx^\alpha}{ds} = - \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha \frac{dx^\beta}{ds} \frac{dx^\gamma}{ds}. \quad (2.5)$$

Отсюда следует, что форма уравнений (2.3) не изменится тогда и только тогда, когда  $d^2 s/dt^2 = 0$ , т.е. замена параметра является аффинной.  $\square$

Уравнение (2.5) представляет собой уравнение геодезической  $x(s)$  при произвольной параметризации кривой. Действительно, из правила дифференцирования сложной функции вытекает формула

$$\frac{d^2 s}{dt^2} / \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = - \frac{d^2 t}{ds^2} / \frac{dt}{ds}.$$

где

$$\left(\frac{dt}{ds}\right)^2 = g_{\alpha\beta} \frac{dx^\alpha}{ds} \frac{dx^\beta}{ds}.$$

Тогда уравнение для геодезической в произвольной параметризации примет вид

$$\frac{d^2 x^\alpha}{ds^2} = - \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha \frac{dx^\beta}{ds} \frac{dx^\gamma}{ds} + \frac{dx^\alpha}{ds} \frac{d^2 t}{ds^2} / \frac{dt}{ds}. \quad (2.6)$$

**Пример 2.1.1.** В пространстве Минковского  $\mathbb{R}^{1,3}$  точечная частица движется по некоторой мировой линии  $x(t)$ . Если в качестве параметра вдоль траектории выбрано время  $t = x^0$ , то скорость и ускорение кривой совпадают со скоростью и ускорением частицы. Если частица свободна, т.е. на нее не действуют никакие силы и, следовательно, ее ускорение равно нулю, то траекторией частицы будет одна из геодезических линий. Поскольку связность в  $\mathbb{R}^{1,3}$  в декартовой системе координат имеет равные нулю компоненты, то уравнения (2.3) сводятся к уравнениям

$$\ddot{x}^\alpha = 0,$$

которые определяют прямые линии. Таким образом, в пространстве Минковского  $\mathbb{R}^{1,3}$  прямые и только они являются геодезическими. Это значит, что свободная частица в пространстве Минковского равномерно движется вдоль прямой линии (первый закон Ньютона).  $\square$

Геодезическая линия в аффинной геометрии обобщает понятие прямой в (псевдо)евклидовом пространстве, сохраняя то свойство, что касательный вектор остается касательным при параллельном переносе.

Уравнения для геодезических (2.3) – это система нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка. Поэтому при достаточно гладких компонентах связности для однозначного решения задачи Коши необходимо задать начальную точку  $(x^\alpha(0))$  и вектор скорости  $(\dot{x}^\alpha(0))$ . Геометрически это означает, что через данную точку многообразия в данном направлении проходит одна и только одна геодезическая.

Для геодезической линии можно также поставить краевую задачу: найти геодезическую, соединяющую две фиксированные точки многообразия, которое предполагается линейно связным. Эта задача разрешима в малом, т.е. любые две достаточно близкие точки можно соединить геодезической и притом только одной. Для удаленных точек эта задача может не иметь решения или иметь несколько решений.

**Пример 2.1.2.** Рассмотрим сферу, вложенную в евклидово пространство,  $\mathbb{S}^2 \hookrightarrow \mathbb{R}^3$ . Пусть метрика на сфере индуцирована вложением и на ней задана связность Леви-Чивиты. Тогда любые две точки на сфере  $\mathbb{S}^2$ , не являющиеся диаметрально противоположными, можно соединить двумя разными геодезическими (две дуги большой окружности, проходящей через эти точки). Диаметрально противоположные точки соединяются бесконечным числом геодезических.  $\square$

Введем важное понятие полноты геодезической по каноническому параметру  $t$ . В силу однозначного разрешения задачи Коши, через каждую точку многообразия в заданном направлении проходит одна геодезическая. Это значит, что геодезическую линию, если она заканчивается в некоторой точке  $q \in \mathbb{M}$ , всегда можно продолжить. Действительно, если при конечном значении канонического параметра геодезическая попадает в точку  $q$ , то продолжим ее, склеив с геодезической, выходящей из точки  $q$  в том же направлении.

**Определение.** Геодезическая в  $\mathbb{M}$  называется *полной*, если ее можно продолжить в обе стороны до бесконечного значения канонического параметра,  $t \in (-\infty, \infty)$ .  $\square$

**Замечание.** Поскольку канонический параметр определен с точностью до аффинного преобразования и не зависит от выбора системы координат, то данное определение корректно.  $\square$

Пусть на многообразии  $\mathbb{M}$  задана не только аффинная связность  $\Gamma$ , но и метрика  $g$ . Тогда компоненты аффинной связности можно выразить через метрику, кручение и неметричность по формуле (1.89). Хотя в уравнение для геодезических входит только симметричная часть связности, тем не менее оно нетривиально зависит от кручения и неметричности. Действительно, из формулы (1.89) следует, что симметричная часть аффинной связности имеет вид

$$\begin{aligned} \Gamma_{\{\beta\gamma\}}^{\alpha} &= \frac{1}{2}(\Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha} + \Gamma_{\gamma\beta}^{\alpha}) = \\ &= \tilde{\Gamma}_{\beta\gamma}^{\alpha} + \frac{1}{2}(T^{\alpha}_{\beta\gamma} + T^{\alpha}_{\gamma\beta}) + \frac{1}{2}(Q_{\beta\gamma}^{\alpha} + Q_{\gamma\beta}^{\alpha} - Q^{\alpha}_{\beta\gamma}), \end{aligned} \quad (2.7)$$

где  $\tilde{\Gamma}_{\beta\gamma}^{\alpha}$  – символы Кристоффеля. Ясно, что две связности, имеющие одинаковую симметричную часть определяют одно и то же семейство геодезических.

Рассмотрим два вектора  $X$  и  $Y$ , которые параллельно переносятся вдоль геодезической  $\gamma$ .

**Предложение 2.1.3.** Зависимость скалярного произведения  $(X, Y)$  двух векторов, которые параллельно переносятся вдоль  $\gamma$ , от точки геодезической определяется только тензором неметричности:

$$\partial_u(X, Y) = \nabla_u(X^{\alpha}Y^{\beta}g_{\alpha\beta}) = -u^{\gamma}X^{\alpha}Y^{\beta}Q_{\gamma\alpha\beta}. \quad (2.8)$$

Отсюда следует, что в римановой геометрии и геометрии Римана–Картана, где  $Q = 0$ , скалярное произведение двух векторов при параллельном переносе вдоль геодезической сохраняется. В частности, квадрат вектора скорости геодезической постоянен вдоль нее.

*Доказательство.* Следует из определения тензора неметричности (1.88).  $\square$

**Замечание.** Это утверждение верно и для произвольной кривой (предложение 1.7.4). Скалярное произведение двух векторных полей, полученных в результате параллельного переноса двух векторов вдоль произвольной кривой  $\gamma$  в римановой геометрии и геометрии Римана–Картана, не зависит от точки кривой.  $\square$

**Следствие.** Если неметричность лоренцева многообразия  $\mathbb{M}$  равна нулю, то квадрат вектора скорости постоянен вдоль геодезических, и их можно разделить на три класса: времениподобные, пространственноподобные и светоподобные (изотропные). При этом тип геодезической не может меняться от точки к точке.  $\square$

## 2.2 Экстремали

Другим выделенным типом кривых в аффинной геометрии  $(\mathbb{M}, g, \Gamma)$  являются экстремали, которые определяются как линии экстремальной длины. Рассмотрим произвольную достаточно гладкую кривую  $\gamma = x(t) \in \mathbb{M}$ ,  $t \in [t_1, t_2]$ . Предположим, что квадрат вектора скорости кривой,  $u^\alpha := \dot{x}^\alpha(t)$ , всюду отличен от нуля,  $u^2 := u^\alpha u^\beta g_{\alpha\beta} \neq 0$ .

**Замечание.** Для римановой метрики это условие автоматически выполняется, поскольку вектор скорости предполагается отличным от нуля. Если метрика не является знакоопределенной, то это условие нетривиально. Например, для лоренцевой метрики это условие равносильно тому, что мы рассматриваем либо времени-, либо пространственноподобные кривые.  $\square$

Пусть кривая соединяет две точки  $p = (x^\alpha(t_1))$  и  $q = (x^\alpha(t_2))$ . Тогда длина этой кривой задается интегралом

$$S = \int_p^q ds, \quad ds := dt \sqrt{|g_{\alpha\beta} \dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta|} = dt \sqrt{|u^2|}. \quad (2.9)$$

Этот функционал инвариантен относительно общих преобразований координат  $x^\alpha$  и произвольной перепараметризации кривой  $t \rightarrow \tau(t)$ .

**Определение.** *Экстремалью*, соединяющей две точки (псевдо)риманова многообразия  $p, q \in \mathbb{M}$ , если она существует, называется неизотропная кривая  $\gamma$  класса  $C^2([t_1, t_2])$ , для которой функционал (2.9) принимает экстремальное значение.  $\square$

**Замечание.** Если метрика на многообразии  $\mathbb{M}$  не является знакоопределенной, то существуют изотропные кривые, для которых функционал длины (2.9) равен нулю и данное выше определение экстремалей не проходит. Определение изотропных экстремалей будет дано ниже.  $\square$

Экстремали в римановом пространстве обобщают понятие прямой в евклидовом пространстве, сохраняя свойство быть линиями минимальной (экстремальной) длины, соединяющей две точки.

Найдем уравнения, которым должны удовлетворять координатные функции  $x^\alpha(t)$  для того, чтобы кривая  $x(t)$  была экстремалью. Пусть экстремаль соединяет две точки  $p$  и  $q$  многообразия. Выберем такую карту на многообразии, которая целиком содержит данную экстремаль. Для этого достаточно взять объединение всех достаточно малых шаров, центры которых лежат на экстремали. Пусть в этой карте экстремаль и ее вариация задаются набором функций  $x^\alpha(t)$  и  $\delta x^\alpha(t)$ . Мы предполагаем,

что вариации кривой в конечных точках  $p, q \in \mathbb{M}$  равны нулю,  $\delta x^\alpha(p) = \delta x^\alpha(q) = 0$ , и поэтому вкладом граничных членов при интегрировании по частям можно пренебречь. Вариация длины кривой (2.9) с точностью до знака имеет вид

$$\delta S = \int \frac{dt}{2\sqrt{|u^2|}} [2\delta(\dot{x}^\alpha)\dot{x}^\beta g_{\alpha\beta} + \dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta \delta g_{\alpha\beta}].$$

Проинтегрируем первое слагаемое по частям и воспользуемся равенством

$$\delta g_{\beta\gamma} = \partial_\alpha g_{\beta\gamma} \delta x^\alpha.$$

Тогда вариация длины кривой принимает вид

$$\delta S = - \int dt \left[ \frac{d}{dt} \left( \frac{\dot{x}^\beta g_{\alpha\beta}}{\sqrt{|u^2|}} \right) - \frac{1}{2\sqrt{|u^2|}} \dot{x}^\beta \dot{x}^\gamma \partial_\alpha g_{\beta\gamma} \right] \delta x^\alpha.$$

Поскольку

$$ds = \sqrt{|u|^2} dt, \quad \text{и} \quad \dot{x}^\alpha = \sqrt{|u^2|} \frac{dx^\alpha}{ds},$$

то вариацию длины кривой можно переписать в виде

$$\delta S = - \int ds \left( \frac{d^2 x^\beta}{ds^2} + \tilde{\Gamma}_{\gamma\delta}{}^\beta \frac{dx^\gamma}{ds} \frac{dx^\delta}{ds} \right) g_{\alpha\beta} \delta x^\alpha,$$

где  $\tilde{\Gamma}_{\beta\gamma}{}^\alpha$  – символы Кристоффеля (1.94). Фактически, на этом этапе мы воспользовались инвариантностью интеграла (2.9) относительно перепараметризации кривой, выбрав длину кривой в качестве параметра,  $t \mapsto s$ . Параметр  $s$  вдоль экстремали называется *каноническим*. В дальнейшем канонический параметр мы будем обозначать буквой  $t$ . Таким образом, мы доказали следующее утверждение.

**Теорема 2.2.1.** *Для того, чтобы кривая  $x(t)$  была экстремалью в канонической параметризации, необходимо и достаточно, чтобы координатные функции  $x^\alpha(t)$  удовлетворяли системе обыкновенных дифференциальных уравнений*

$$\ddot{x}^\alpha = -\tilde{\Gamma}_{\beta\gamma}{}^\alpha \dot{x}^\beta \dot{x}^\gamma, \quad (2.10)$$

где точка обозначает дифференцирование по каноническому параметру  $t$ .

В приложениях иногда полезно использовать произвольную параметризацию экстремалей. Обозначим экстремаль в произвольной параметризации через  $(x^\alpha(u))$ , где  $u$  – произвольный параметр. Он связан с каноническим параметром некоторым достаточно гладким и невырожденным преобразованием  $t \mapsto u(t)$ ,  $dt/du \neq 0$ . Равенство (2.5) представляет собой уравнение экстремалей (если  $\Gamma_{\beta\gamma}{}^\alpha$  – символы Кристоффеля), записанные в произвольной параметризации. Запишем их в виде

$$\frac{d^2 x^\alpha}{du^2} = -\tilde{\Gamma}_{\beta\gamma}{}^\alpha \frac{dx^\beta}{du} \frac{dx^\gamma}{du} - \frac{dx^\alpha}{du} \frac{d^2 u}{dt^2} \left( \frac{dt}{du} \right)^2. \quad (2.11)$$

Легко проверить формулу дифференцирования

$$\frac{d^2 u}{dt^2} \left( \frac{dt}{du} \right)^2 = -\frac{d^2 t}{du^2} \frac{du}{dt}.$$

Тогда уравнение экстремалей в произвольной параметризации (2.11) примет вид

$$\frac{d^2 x^\alpha}{du^2} = -\tilde{\Gamma}_{\beta\gamma}^\alpha \frac{dx^\beta}{du} \frac{dx^\gamma}{du} + \frac{dx^\alpha}{du} \frac{d^2 t}{du^2} \frac{du}{dt}. \quad (2.12)$$

Если в качестве канонического параметра выбрана длина экстремали  $t = s$ ,

$$ds^2 := g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta,$$

то равенство (2.12) необходимо дополнить уравнением на параметр

$$\left(\frac{ds}{du}\right)^2 = g_{\alpha\beta} \frac{dx^\alpha}{du} \frac{dx^\beta}{du}. \quad (2.13)$$

Мы получили критерий того, что неизотропная кривая является экстремалью. При выводе уравнений (2.10) из вариационного принципа для действия (2.9) существенно используется условие  $u^2 \neq 0$ , которое исключает изотропные (светоподобные) экстремали. Поэтому изотропные экстремали определим не с помощью функционала длины, а непосредственно уравнениями (2.10). Для любой изотропной кривой  $u^2 = 0$  и интеграл (2.9) равен нулю. В то же время уравнения (2.10) имеют смысл.

**Определение.** *Изотропной экстремалью* в канонической параметризации называется изотропная кривая  $\gamma$  класса  $C^2([t_1, t_2])$ , которая задана функциями  $x^\alpha(t)$ , удовлетворяющими системе обыкновенных дифференциальных уравнений (2.10).  $\square$

Это определение корректно, т.к. квадрат вектора скорости экстремали постоянен. При этом не всякая изотропная кривая является экстремалью.

Если параметр вдоль изотропной экстремали  $x^\alpha(u)$  не канонический, то система уравнений меняется на уравнения (2.12). При этом длина касательного вектора остается нулевой.

Уравнения (2.10) определяются только метрикой, поскольку функционал длины не зависит от аффинной связности. Тем самым экстремали не зависят от того заданы ли на многообразии  $\mathbb{M}$  тензоры кручения и неметричности или нет. Сравнение уравнений (2.10) с уравнением для геодезических (2.3) показывает, что экстремали являются геодезическими линиями по отношению к параллельному переносу, определяемому символами Кристоффеля. Это означает, что все свойства геодезических справедливы также и для экстремалей. В частности, канонический параметр вдоль экстремали инвариантен относительно преобразования координат. При произвольной параметризации уравнение для экстремалей имеет вид (2.12).

**Определение.** Экстремаль  $\gamma$  в  $\mathbb{M}$  называется *полной*, если ее можно продолжить до бесконечного значения канонического параметра в обе стороны,  $t \in (-\infty, \infty)$ .  $\square$

**Замечание.** При продолжении экстремали (или геодезической) возможны два случая. Во-первых, она может оказаться полной и иметь бесконечную длину. К полным экстремальям мы относим также и замкнутые экстремали, которые имеют конечную длину. Хотя их длина конечна, но канонический параметр продолжается до бесконечности, что соответствует бесконечному числу проходов вдоль экстремали. Во-вторых, при конечном значении канонического параметра экстремаль может попасть в такую точку многообразия, в которой один из геометрических инвариантов, например, скалярная кривизна, неопределен. Эта точка является сингулярной, и продолжение экстремали через нее не имеет смысла.  $\square$

## 2.3 Интегрирование уравнений для экстремалей и геодезических

Уравнения для экстремалей и геодезических в ряде случаев имеют первые интегралы, наличие которых существенно упрощает их исследование. Начнем с универсального закона сохранения. Поскольку при параллельном переносе и в римановой геометрии, и в геометрии Римана–Картана длины векторов не меняется, то отсюда сразу следует, что длина вектора скорости  $u = (\dot{y}^\alpha)$  вдоль экстремалей и геодезических постоянна.

**Предложение 2.3.1.** *В геометрии Римана–Картана и (псевдо)римановой геометрии для уравнений геодезических (2.3) и экстремалей (2.10) существует первый интеграл*

$$C_0 = u^2 := \dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta g_{\alpha\beta} = \text{const}, \quad (2.14)$$

*квадратичный по первым производным (скоростям).*

*Доказательство.* Следствие предложения 2.1.3. Можно доказать и формально, продифференцировав уравнение (2.14) по каноническому параметру и воспользовавшись уравнением для геодезических или экстремалей.  $\square$

Первый интеграл (2.14) имеет кинематический характер и существует для любой экстремали и геодезической в (псевдо)римановой геометрии и геометрии Римана–Картана. Если метрика имеет лоренцеву сигнатуру, то экстремали и геодезические можно разделить на три класса: времениподобные,  $C_0 > 0$ , изотропные или светоподобные,  $C_0 = 0$ , и пространственноподобные,  $C_0 < 0$ . Поскольку канонический параметр определен с точностью до аффинных преобразований, то для времениподобных и пространственноподобных экстремалей его всегда можно выбрать таким образом, что  $C_0 = \pm 1$ . В этом случае для времениподобных экстремалей канонический параметр называется *собственным временем*, а для пространственноподобных – *длиной* экстремали.

Существование других первых интегралов связано с инфинитезимальными симметриями метрики, которые определяются векторными полями Киллинга.

**Предложение 2.3.2.** *Если метрика на многообразии имеет один или несколько векторов Киллинга  $K_i = (K_i^\alpha)$ ,  $i = 1, \dots, N$ , то для каждого вектора Киллинга имеется свой интеграл движения и для экстремалей, и для геодезических в канонической параметризации*

$$C_i = K_i^\alpha \dot{x}^\beta g_{\alpha\beta} = \text{const}, \quad i = 1, \dots, N, \quad (2.15)$$

*который линеен по компонентам скорости.*

*Доказательство.* Дифференцируем соотношения (2.15) по каноническому параметру и используем уравнения (2.3) или (2.10).  $\square$

## 2.4 Уравнение Гамильтона–Якоби для экстремалей

Уравнения для экстремалей  $\gamma = x(t)$  вытекают из вариационного принципа для действия (2.9). Важным обстоятельством является то, что уравнения для экстремалей

являются уравнениями Эйлера–Лагранжа также и для другого действия

$$S_m = \int_a^b dt L_m, \quad L_m = -\frac{1}{2} m g_{\alpha\beta} \dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta, \quad (2.16)$$

где точка обозначает дифференцирование по каноническому параметру  $t$  и  $m = \text{const}$  – постоянная, имеющая физический смысл массы точечной частицы. Действие (2.16) приводит к уравнениям для экстремалей, в которых переменная  $t$  уже является каноническим параметром. Это согласуется с тем обстоятельством, что рассмотренное действие инвариантно относительно общих преобразований координат и сдвигов параметра  $t$ . Для сравнения напомним, что исходное действие для экстремалей (2.9) инвариантно также относительно произвольных преобразований параметра  $t$  вдоль экстремали.

Действие (2.16) имеет простой физический смысл. Предположим, что метрика имеет лоренцеву сигнатуру и зафиксируем временную калибровку:

$$g_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & g_{\mu\nu} \end{pmatrix}, \quad \text{sign } g_{\mu\nu} = (- \dots -). \quad (2.17)$$

Символы Кристоффеля для этой метрики имеют вид

$$\begin{aligned} \Gamma_{00}^0 &= \Gamma_{00}^\mu = \Gamma_{0\mu}^0 = \Gamma_{\mu 0}^0 = 0, \\ \Gamma_{0\mu}^\nu &= \Gamma_{\mu 0}^\nu = \frac{1}{2} g^{\nu\rho} \partial_0 g_{\mu\rho}, \\ \Gamma_{\mu\nu}^0 &= -\frac{1}{2} \partial_0 g_{\mu\nu}, \\ \Gamma_{\mu\nu}^\rho &= \hat{\Gamma}_{\mu\nu}^\rho, \end{aligned} \quad (2.18)$$

где  $\hat{\Gamma}_{\mu\nu}^\rho$  – символы Кристоффеля на пространственноподобном сечении  $x^0 = \text{const}$ , построенные только по метрике  $g_{\mu\nu}$ . Предположим также, что пространственная часть метрики  $g_{\mu\nu}$  не зависит от времени  $x^0$ . Тогда уравнения для экстремалей расцепляются:

$$\ddot{x}^0 = 0, \quad (2.19)$$

$$\ddot{x}^\mu = -\hat{\Gamma}_{\nu\rho}^\mu \dot{x}^\nu \dot{x}^\rho. \quad (2.20)$$

Из первого уравнения следует, что, не ограничивая общности, канонический параметр  $t$  можно отождествить с временем  $x^0 = ct$ , где  $c = \text{const}$  – скорость света. Тогда лагранжиан (2.16) имеет прямой физический смысл – с точностью до аддитивной постоянной это – кинетическая энергия точечной частицы, которая движется в римановом пространстве со статической метрикой  $g_{\mu\nu}(x)$ . Несмотря на то, что потенциальная энергия частицы равна нулю, ее траекториями уже не будут прямые линии, если метрика нетривиально зависит от точки пространства.

Вернемся к исходному действию (2.16) до фиксирования временной калибровки. Переформулируем эту лагранжеву систему на гамильтоновом языке, рассматривая канонический параметр  $t$  в качестве параметра эволюции. Под временем мы подразумеваем координату  $x^0$  и, соответственно, предполагаем, что  $g_{00} > 0$ . Кроме этого мы предполагаем, что все сечения постоянного времени  $x^0 = \text{const}$  пространственноподобны. Импульс, сопряженный координатам  $x^\alpha$ , и гамильтониан системы равны

$$\begin{aligned} p_\alpha &= \frac{\partial L_m}{\partial \dot{x}^\alpha} = -m g_{\alpha\beta} \dot{x}^\beta, \\ H_m &= -\frac{1}{2m} g^{\alpha\beta} p_\alpha p_\beta. \end{aligned} \quad (2.21)$$



Соответствующие уравнения Гамильтона (уравнения движения) имеют вид

$$\dot{x}^\alpha = [x^\alpha, H_m] = -\frac{1}{m} g^{\alpha\beta} p_\beta, \quad (2.22)$$

$$\dot{p}_\alpha = [p_\alpha, H_m] = \frac{1}{2m} \partial_\alpha g^{\beta\gamma} p_\beta p_\gamma. \quad (2.23)$$

Дифференцируя первое из этих уравнений по каноническому параметру и исключая импульсы  $p_\alpha$  и производные  $\dot{p}_\alpha$  с помощью уравнений движения, нетрудно проверить, что система уравнений (2.22), (2.23) эквивалентна системе уравнений для экстремалей (2.10). Тем самым мы переписали уравнения для экстремалей в виде канонической системы уравнений движения.

Ранее было доказано, что длина касательного вектора к экстремали постоянна (2.14). В гамильтоновой форме это утверждение имеет вид

$$C_0 = \frac{1}{m^2} g^{\alpha\beta} p_\alpha p_\beta = \text{const}. \quad (2.24)$$

По своей физической сути это есть закон сохранения энергии точечной частицы. В данном случае только кинетической, т.к. потенциальная энергия тождественно равна нулю.

Продолжим анализ гамильтоновой формы уравнений для экстремалей. Функция действия  $S_m(x, t)$  удовлетворяет уравнению Гамильтона–Якоби

$$\frac{\partial S_m}{\partial t} - \frac{1}{2m} g^{\alpha\beta} \frac{\partial S_m}{\partial x^\alpha} \frac{\partial S_m}{\partial x^\beta} = 0. \quad (2.25)$$

Поскольку гамильтониан (2.21) не зависит от параметра  $t$  явно, то функция действия имеет вид

$$S_m(x^\alpha, t) = \frac{mC_0}{2} t + W_m(x^\alpha), \quad C_0 = \text{const},$$

где укороченная функция действия  $W_m$  удовлетворяет укороченному уравнению Гамильтона–Якоби

$$g^{\alpha\beta} \frac{\partial W_m}{\partial x^\alpha} \frac{\partial W_m}{\partial x^\beta} = m^2 C_0. \quad (2.26)$$

Поскольку экстремали не зависят от массы пробной частицы, то, не ограничивая общности, можно положить  $m = 1$  (включить в постоянную  $C_0$ ). Так как  $p_\alpha = \partial W_m / \partial x^\alpha$ , то постоянная  $C_0$  равна длине касательного вектора к экстремали

$$g_{\alpha\beta} \dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta = g^{\alpha\beta} p_\alpha p_\beta = C_0.$$

Для экстремалей в пространстве-времени знак постоянной  $C_0$  определяет тип экстремали: постоянные  $C_0 > 0$ ,  $C_0 = 0$  и  $C_0 < 0$  соответствуют времениподобным, светоподобным и пространственноподобным экстремалиям. Поскольку канонический параметр определен с точностью до линейных преобразований, то можно считать, что  $C_0 = 1$ ,  $C_0 = 0$  или  $C_0 = -1$ . Отметим, что для экстремалей нулевой длины  $C_0 = 0$ , и укороченное действие совпадает с полным  $W_m = S_m$ .

Рассмотрим волновое уравнение для скалярного поля  $\varphi(x) \in \mathcal{C}^2(\mathbb{M})$  на лоренцевом многообразии:

$$g^{\alpha\beta} \tilde{\nabla}_\alpha \tilde{\nabla}_\beta \varphi = g^{\alpha\beta} \partial_\alpha \partial_\beta \varphi - g^{\alpha\beta} \tilde{\Gamma}_{\alpha\beta}^\gamma \partial_\gamma \varphi = 0, \quad (2.27)$$

или, эквивалентно,

$$\frac{1}{\sqrt{|g|}} \partial_\alpha (\sqrt{|g|} g^{\alpha\beta} \partial_\beta \varphi) = 0, \quad g := \det g_{\alpha\beta},$$

где мы воспользовались тождеством (1.116). Это – линейное дифференциальное уравнение в частных производных второго порядка с переменными коэффициентами гиперболического типа, т.к. метрика имеет лоренцеву сигнатуру. Важным понятием в теории дифференциальных уравнений является характеристика (или характеристическая поверхность), которая для дифференциальных уравнений второго порядка определяется квадратичной формой  $g^{\alpha\beta}$ .

**Определение.** *Характеристикой* гиперболического дифференциального уравнения второго порядка (2.27) называется  $\mathcal{C}^1$  гиперповерхность в многообразии  $\mathbb{M}$ , которая задается уравнением

$$W(x) = 0, \quad (2.28)$$

где функция  $W \in \mathcal{C}^1(\mathbb{M})$  на поверхности  $W = 0$  удовлетворяет условию

$$g^{\alpha\beta} \partial_\alpha W \partial_\beta W|_{W=0} = 0. \quad (2.29)$$

При этом требуется, чтобы по крайней мере одна из частных производных  $\partial_\alpha W$  была отлична от нуля на гиперповерхности (2.28).  $\square$

**Замечание.** Отметим, что в определении характеристики важна гиперболичность, т.к. при положительно или отрицательно определенной метрике уравнение (2.29) не имеет вещественных решений.  $\square$

Уравнение (2.29) для характеристики совпадает с укороченным уравнением Гамильтона–Якоби для экстремалей (2.26) при  $C_0 = 0$ . Это значит, что характеристика соответствует укороченной функции действия для экстремалей нулевой длины. Напомним, что для экстремалей нулевой длины укороченная и полная функции действия совпадают. Однако условие (2.29) является более слабым, т.к. мы требуем выполнения (2.29) только на характеристике, а не во всем пространстве-времени.

## Глава 3

# Векторные поля Киллинга

Изучение преобразований, которые сохраняют метрику пространства-времени играет исключительно важную роль в математической физике. Достаточно сказать, что с такими преобразованиями связаны наиболее важные законы сохранения. В настоящей главе мы рассмотрим (псевдо)риманово многообразие  $(\mathbb{M}, g)$  и найдем условия, при которых метрика инвариантна относительно действия группы преобразований  $(\mathbb{M}, \mathbb{G})$ . Дадим определение векторных полей Киллинга, которые являются генераторами локальных симметрий метрики, а также изучим некоторые из их свойств. Будет доказана теорема о том, что, если (псевдо)риманово многообразие обладает максимально возможной группой симметрии, то это – пространство постоянной кривизны.

### 3.1 Изометрии и инфинитезимальные изометрии

Рассмотрим  $n$ -мерное (псевдо)риманово многообразие  $(\mathbb{M}, g)$  с метрикой  $g(x) = g_{\alpha\beta}(x)dx^\alpha \otimes dx^\beta$ ,  $\alpha, \beta = 0, 1, \dots, n-1$ , и соответствующей связностью Леви-Чивиты  $\Gamma$ . В настоящей главе, для простоты, мы не будем использовать знак тильды для обозначения компонент связности Леви-Чивиты, т.к. аффинная связность общего вида с кручением и неметричностью пользоваться не будет.

**Определение.** Диффеоморфизм

$$\iota : \mathbb{M} \ni x \mapsto x' = \iota(x) \in \mathbb{M}$$

называется *изометрией* или *движением* многообразия  $\mathbb{M}$ , если он сохраняет метрику,

$$g(x) = \iota^* g(x'), \quad (3.1)$$

где  $\iota^*$  – возврат отображения  $\iota$ . □

Поскольку изометрия сохраняет метрику, то она сохраняет также связность Леви-Чивиты, соответствующий тензор кривизны, экстремали и, вообще, все геометрические объекты, которые определяются только метрикой.

Запишем отображение (3.1) в координатах. Пусть обе точки  $x$  и  $x'$  принадлежат одной координатной окрестности и имеют, соответственно, координаты  $x^\alpha$  и  $x'^\alpha$ . Тогда изометрия  $\iota$  в координатах запишется в виде условия

$$g_{\alpha\beta}(x) = \frac{\partial x'^\gamma}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x'^\delta}{\partial x^\beta} g_{\gamma\delta}(x'), \quad (3.2)$$

связывающего компоненты метрики в различных точках многообразия. Это условие по виду совпадает с правилом преобразования компонент метрики при преобразовании координат (1.60). Разница заключается в следующем. При преобразовании координат мы считаем, что одной и той же точке  $x \in \mathbb{M}$  соответствует два набора координат  $(x^\alpha)$  и  $(x'^\alpha := x'^\alpha)$  в двух различных системах координат. При рассмотрении изометрий  $x$  и  $x'$  — это две различные точки одного и того же многообразия  $\mathbb{M}$ , и равенство (3.2) связывает значения компонент метрики в этих точках.

**Предложение 3.1.1.** *Множество всех изометрий данного (псевдо)риманова многообразия  $(\mathbb{M}, g)$  является группой, которую обозначим  $\mathbb{I}(\mathbb{M}) \ni \iota$ .*

*Доказательство.* Две последовательных изометрии также являются изометрией. Произведение (последовательное действие изометрий) ассоциативно. Тожественное отображение многообразия  $\mathbb{M}$  является изометрией и представляет собой единицу группы. У каждого диффеоморфизма  $\iota$  есть обратный диффеоморфизм  $\iota^{-1}$ , который является обратной изометрией.  $\square$

Если метрика на многообразии задана, т.е. определены значения ее компонент во всех точках  $x$ , то соотношение (3.2) представляет собой уравнение на функции  $x'(x)$ , которые определяют изометрию. В общем случае это уравнение не имеет решений и у соответствующего (псевдо)риманова многообразия нет никаких нетривиальных изометрий. В этом случае группа изометрий состоит из одного единичного элемента. Чем шире группа изометрий, тем уже класс соответствующих (псевдо)римановых многообразий.

**Пример 3.1.1.** Евклидово пространство  $\mathbb{R}^n$  с евклидовой метрикой  $\delta_{\alpha\beta}$  допускает группу изометрий, которая состоит из преобразований неоднородной группы вращений  $\mathbb{IO}(n, \mathbb{R})$ ,  $\dim \mathbb{IO}(n, \mathbb{R}) = \frac{1}{2}n(n+1)$ , состоящей из вращений, сдвигов и отражений.  $\square$

Группа изометрий  $\mathbb{I}(\mathbb{M})$  может быть дискретной или группой Ли.

**Определение.** Если группа изометрий  $\mathbb{I}(\mathbb{M})$  является группой Ли, то имеет смысл говорить об инфинитезимальных преобразованиях (см. раздел ??). В этом случае мы говорим об *инфинитезимальных изометриях*

$$x^\alpha \mapsto x'^\alpha = x^\alpha + \epsilon K^\alpha + o(\epsilon), \quad \epsilon \ll 1.$$

Каждая инфинитезимальная изометрия генерируется некоторым достаточно гладким векторным полем  $K(x) = K^\alpha(x)\partial_\alpha$ , которое называется векторным *полем Киллинга*.  $\square$

Запишем условие инвариантности метрики относительно инфинитезимальных преобразований из группы изометрий в координатах. В разделе 1.1.2 было показано, что каждое векторное поле генерирует однопараметрическую группу преобразований, которая называется экспоненциальным отображением. Формально условие инвариантности метрики записывается в виде равенства нулю производной Ли вдоль векторного поля Киллинга  $K = K^\alpha\partial_\alpha$  от метрики

$$\mathbb{L}_K g = 0. \quad (3.3)$$

Используя явное выражение для производной Ли (1.167), это уравнение в локальной системе координат принимает вид [?]

$$\nabla_\alpha K_\beta + \nabla_\beta K_\alpha = 0, \quad (3.4)$$

где  $K_\alpha := K^\beta g_{\beta\alpha}$  – компоненты 1-формы Киллинга, а ковариантная производная

$$\nabla_\alpha K_\beta = \partial_\alpha K_\beta - \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma K_\gamma$$

строится по символам Кристоффеля  $\Gamma_{\alpha\beta}^\gamma$  (связность Леви–Чивиты).

**Определение.** Уравнение (3.4) называется *уравнением Киллинга*, а интегральные кривые полей Киллинга называются *траекториями Киллинга*. Если  $K = K^\alpha \partial_\alpha$  – векторное поле Киллинга, то ему взаимно однозначно ставится в соответствие 1-форма  $K = dx^\alpha K_\alpha$ , где  $K_\alpha := K^\beta g_{\beta\alpha}$ , которая называется *формой Киллинга*, и для которой мы сохранили то же обозначение.  $\square$

На любом (псевдо)римановом многообразии  $(\mathbb{M}, g)$  уравнения Киллинга (3.3) всегда имеют тривиальное решение  $K = 0$ . Если уравнения Киллинга имеют только тривиальное решение, то в этом случае нетривиальные непрерывные изометрии отсутствуют.

Траектории Киллинга  $(x^\alpha(t)) \in \mathbb{M}$ , где  $t \in \mathbb{R}$ , определяются системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{x}^\alpha = K^\alpha. \quad (3.5)$$

Если траектория Киллинга при  $t = 0$  проходит через точку  $p = (p^\alpha) \in \mathbb{M}$ , то при малых  $t$  она имеет вид

$$x^\alpha(t) = p^\alpha + tK^\alpha(p) + o(t). \quad (3.6)$$

Если в некоторой точке векторное поле Киллинга равно нулю, то эта точка остается неподвижной, т.е. является стационарной точкой группы изометрий. Поскольку изометрии определены для всего многообразия  $\mathbb{M}$  и образуют группу, то векторные поля Киллинга обязаны быть полными, т.е. параметр  $t$  должен меняться на всей вещественной прямой  $\mathbb{R}$ .

Если для (псевдо)риманова многообразия  $(\mathbb{M}, g)$  известно векторное поле Киллинга, то оно определяет не только инфинитезимальные изометрии, но и всю однопараметрическую подгруппу изометрий  $\mathbb{I}(\mathbb{M})$ . Для этого нужно найти интегральные кривые  $x(t)$ , проходящие, через все точки многообразия  $p \in \mathbb{M}$ . Если  $x(0) = p$ , то каждому значению  $t \in \mathbb{R}$  соответствует диффеоморфизм

$$\iota : \quad \mathbb{M} \ni \quad p \mapsto x(t) \quad \in \mathbb{M}.$$

В моделях математической физики часто ставится задача нахождения векторов Киллинга для заданной метрики на многообразии. Для решения этой задачи бывает удобнее использовать контравариантные компоненты векторов Киллинга, для которых уравнение Киллинга принимает вид

$$g_{\alpha\gamma} \partial_\beta K^\gamma + g_{\beta\gamma} \partial_\alpha K^\gamma + K^\gamma \partial_\gamma g_{\alpha\beta} = 0. \quad (3.7)$$

Уравнения Киллинга (3.3), которые в компонентах имеют вид (3.7), линейны и по векторам Киллинга, и по метрике. Отсюда сразу следует, что две метрики, которые отличаются постоянным множителем, имеют один и тот же набор векторов Киллинга. Кроме того, векторное поле Киллинга определено с точностью до умножения на произвольную постоянную, отличную от нуля. В частности, если  $K$  – векторное поле Киллинга, то и  $-K$  также является полем Киллинга. Если независимых векторных полей Киллинга для заданной метрики несколько, то любая линейная комбинация

этих полей также является полем Киллинга. То есть множество всех векторных полей Киллинга образует линейное пространство над полем вещественных чисел, которое является подпространством в множестве векторных полей  $\mathcal{X}(\mathbb{M})$ . В этом векторном пространстве можно ввести билинейную операцию. Простые вычисления показывают, что коммутатор двух векторных полей Киллинга  $K_1$  и  $K_2$  снова дает поле Киллинга:

$$\mathcal{L}_{[K_1, K_2]}g = \mathcal{L}_{K_1} \circ \mathcal{L}_{K_2}g - \mathcal{L}_{K_2} \circ \mathcal{L}_{K_1}g = 0,$$

Отсюда следует, что векторные поля Киллинга образуют алгебру Ли  $\mathfrak{i}(\mathbb{M})$  над полем вещественных чисел, которая является подалгеброй алгебры Ли множества всех векторных полей,  $\mathfrak{i}(\mathbb{M}) \subset \mathcal{X}(\mathbb{M})$ . Эта алгебра является алгеброй Ли группы Ли изометрий  $\mathbb{I}(\mathbb{M})$ . В дальнейшем мы увидим, что алгебра Ли векторных полей Киллинга конечномерна.

Уравнения Киллинга (3.7) представляют собой систему линейных уравнений в частных производных первого порядка на компоненты векторных полей Киллинга. Эта система переопределена: мы имеем  $n(n+1)/2$  уравнений на  $n$  неизвестных компонент  $K^\alpha(x)$  (или  $K_\alpha(x)$ ). Ниже мы увидим, что общее решение уравнений Киллинга при фиксированной метрике не содержит функционального произвола, но может зависеть от нескольких параметров, число которых совпадает с числом линейно независимых решений. Максимальное число независимых параметров в общем решении  $n(n+1)/2$  достигается на пространствах постоянной кривизны (теорема 3.3.2).

В дальнейшем нам понадобится также следующее наблюдение. Допустим, что метрика  $g_{\alpha\beta}(x, t)$  зависит от некоторого параметра  $t \in \mathbb{R}$ , и для каждого значения  $t$  уравнения Киллинга выполнены. Тогда разность метрик для различных значений параметра,  $g_{\alpha\beta}(x, t_2) - g_{\alpha\beta}(x, t_1)$ , также будет удовлетворять уравнениям Киллинга. Отсюда следует, что производная  $\partial_t g_{\alpha\beta}$  является инвариантным тензором второго ранга относительно действия группы изометрий.

**Предложение 3.1.2.** Пусть (псевдо)риманово многообразие  $(\mathbb{M}, g)$  имеет  $N \leq \dim \mathbb{M}$  отличных от нуля коммутирующих между собой и линейно независимых векторных полей Киллинга  $K_i$ ,  $i = 1, \dots, N$ . Тогда существует такая система координат, в которой все компоненты метрики не зависят от  $N$  координат, соответствующих траекториям Киллинга. Обратно. Если в некоторой системе координат компоненты метрики не зависят от  $N$  координат, то метрика  $g$  допускает локально по крайней мере  $N$  коммутирующих между собой ненулевых векторных полей Киллинга.

*Доказательство.* Мы дадим доказательство предложения только для несветоподобных векторных полей. В разделе 1.1.2 была построена специальная система координат, связанная с произвольным векторным полем, отличным от нуля. Применительно к коммутирующим векторным полям Киллинга  $K_i$  это означает, что существует такая система координат  $(x^1, \dots, x^n)$ , в которой каждое поле Киллинга имеет только одну постоянную компоненту,  $K_i = \partial_i$ . В этой системе координат уравнение (3.7) для каждого поля Киллинга принимает особенно простой вид

$$\partial_i g_{\alpha\beta} = 0, \quad i = 1, \dots, N. \quad (3.8)$$

Это значит, что все компоненты метрики не зависят от координат  $x^i$ . В этой системе координат траектории Киллинга определяются уравнениями

$$\dot{x}^i = 1, \quad \dot{x}^\mu = 0, \quad \mu \neq i.$$

Отсюда следует, что координатные линии  $x^i$  являются траекториями Киллинга.

Обратно. Если метрика не зависит от  $N$  координат, то выполнены уравнения (3.8). Эти уравнения совпадают с уравнениями Киллинга для векторных полей  $K_i := \partial_i$ , которые коммутируют.  $\square$

Согласно сформулированной теореме, в предельном случае, когда количество коммутирующих полей Киллинга равно размерности многообразия,  $N = n$ , существует такая система координат, в которой все компоненты инвариантной метрики постоянны.

**Пример 3.1.2.** В евклидовом пространстве  $\mathbb{R}^n$  в декартовой системе координат  $x^\alpha$ ,  $\alpha = 1, \dots, n$ , компоненты метрики постоянны,  $g_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta}$ . Эта метрика допускает  $n$  коммутирующих между собой векторных полей Киллинга  $K_\alpha := \partial_\alpha$ , которые соответствуют трансляциям. Все координатные оси являются траекториями Киллинга.  $\square$

В общей теории относительности мы предполагаем, что пространство-время является псевдоримановым многообразием с метрикой лоренцевой сигнатуры. Используя понятие векторного поля Киллинга, можно дать инвариантное

**Определение.** Пространство-время или его область называются *стационарными*, если на них существует времениподобное векторное поле Киллинга.  $\square$

В стационарном пространстве-времени интегральную кривую времениподобного векторного поля можно выбрать в качестве временной координаты. Тогда согласно предложению 3.1.2 в этой системе координат компоненты метрики не будут зависеть от времени, что оправдывает название “стационарное”.

## 3.2 Свойства векторных полей Киллинга

Векторные поля Киллинга обладают рядом замечательных свойств. Начнем с простейших.

**Предложение 3.2.1.** Векторные поля Киллинга не имеют точек самопересечения.

*Доказательство.* От противного. Допустим, что точка самопересечения существует. Тогда траектории Киллинга, проходящие через эту точку, должны совпасть в силу единственности решения задачи Коши для системы уравнений (3.5).  $\square$

**Предложение 3.2.2.** Длина вектора Киллинга остается постоянной вдоль траектории Киллинга:

$$\mathcal{L}_K K^2 = \nabla_K K^2 = K^\alpha \partial_\alpha K^2 = 0. \quad (3.9)$$

*Доказательство.* Свернем уравнения Киллинга (3.4) с  $K^\alpha K^\beta$ :

$$2K^\alpha K^\beta \nabla_\alpha K_\beta = K^\alpha \nabla_\alpha K^2 = K^\alpha \partial_\alpha K^2 = 0. \quad \square$$

**Следствие.** Если векторные поля Киллинга существуют на лоренцевом многообразии, то они имеют определенную ориентацию: времениподобную, светоподобную или пространственноподобную.  $\square$

Метрика  $g$  на многообразии  $\mathbb{M}$  определяет два типа выделенных кривых: экстремали (или геодезические, если рассматривается связность Леви–Чивиты) и траектории Киллинга, если они существуют. Сравним траектории Киллинга с экстремалими [?].

**Предложение 3.2.3.** Пусть  $(\mathbb{M}, g)$  – (псевдо)риманово многообразие с векторным полем Киллинга  $K$ . Траектории Киллинга являются экстремальными тогда и только тогда, когда их длина постоянна на  $\mathbb{M}$ ,  $K^2 = \text{const}$  для всех  $x \in \mathbb{M}$ .

*Доказательство.* Рассмотрим траектории Киллинга  $x^\alpha(t)$ , которые определяются системой уравнений

$$\dot{x}^\alpha = K^\alpha. \quad (3.10)$$

Длина дуги траектории Киллинга

$$ds^2 = g_{\alpha\beta} \dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta dt^2 = K^2 dt^2$$

постоянна вдоль траектории, т.е. параметр  $t$  пропорционален длине и, следовательно, является каноническим. Дифференцируя уравнение (3.10) по каноническому параметру  $t$ , получим равенство

$$\ddot{x}^\alpha = \partial_\beta K^\alpha \dot{x}^\beta = (\nabla_\beta K^\alpha - \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha K^\gamma) \dot{x}^\beta,$$

которое перепишем в виде

$$\ddot{x}^\alpha = K^\beta \nabla_\beta K^\alpha - \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha \dot{x}^\beta \dot{x}^\gamma. \quad (3.11)$$

Уравнения Киллинга позволяют переписать первое слагаемое в правой части в виде

$$K^\beta \nabla_\beta K^\alpha = -\frac{1}{2} g^{\alpha\beta} \partial_\beta K^2.$$

Тогда уравнения (3.11) примут вид

$$\ddot{x}^\alpha = -\frac{1}{2} g^{\alpha\beta} \partial_\beta K^2 - \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha \dot{x}^\beta \dot{x}^\gamma.$$

Это уравнение совпадает с уравнением для экстремалей (2.10) тогда и только тогда, когда  $K^2 = \text{const}$  на всем  $\mathbb{M}$ .  $\square$

Доказанное утверждение показывает, что далеко не каждая траектория Киллинга является экстремалью.

**Пример 3.2.1.** Рассмотрим евклидову плоскость  $\mathbb{R}^2$  с евклидовой метрикой. Эта метрика инвариантна относительно трехпараметрической неоднородной группы вращений  $\mathbb{IO}(2)$ . Обозначим декартовы и полярные координаты на плоскости, соответственно, через  $x, y$  и  $r, \varphi$ . Тогда векторные поля Киллинга имеют вид  $K_1 = \partial_\varphi$  для вращений вокруг начала координат и  $K_2 = \partial_x$ ,  $K_3 = \partial_y$  – для сдвигов. Квадраты длин векторов Киллинга равны:

$$K_1^2 = r^2, \quad K_2^2 = K_3^2 = 1.$$

Векторы Киллинга  $K_2$  и  $K_3$  имеют постоянную длину на всей плоскости, их траекториями Киллинга являются прямые линии, которые являются экстремальными. Это согласуется с предложением 3.2.3. Траекториями Киллинга для вращений  $K_1$  являются концентрические окружности с центром в начале координат. Длина вектора Киллинга  $K_1$  постоянна на траекториях в соответствии с предложением 3.2.2, однако непостоянна на всей плоскости  $\mathbb{R}^2$ . Соответствующие траектории Киллинга – окружности – не являются экстремальными.  $\square$



### 3.3 Однородные и изотропные многообразия

Рассмотрим геодезически полное (псевдо)риманово многообразие  $(\mathbb{M}, g)$ , метрика которого допускает одно или несколько полных векторных полей Киллинга. Уравнения Киллинга (3.4) накладывают сильные ограничения на векторные поля Киллинга, которые мы сейчас обсудим. Воспользовавшись тождеством для коммутатора ковариантных производных (1.133), получаем равенство

$$\nabla_\alpha \nabla_\beta K_\gamma - \nabla_\beta \nabla_\alpha K_\gamma = -R_{\alpha\beta\gamma}{}^\delta K_\delta. \quad (3.12)$$

Теперь воспользуемся тождеством (1.126) для тензора кривизны и уравнениями Киллинга (3.4). В результате получим тождество для векторных полей Киллинга:

$$\nabla_\alpha \nabla_\beta K_\gamma + \nabla_\beta \nabla_\gamma K_\alpha + \nabla_\gamma \nabla_\alpha K_\beta = 0,$$

где слагаемые отличаются циклической перестановкой индексов. Это равенство позволяет переписать уравнение (3.12) в виде

$$\nabla_\gamma \nabla_\alpha K_\beta = R_{\alpha\beta\gamma}{}^\delta K_\delta. \quad (3.13)$$

Полученное равенство (3.13) является следствием уравнений Киллинга, но не эквивалентно им. Тем не менее оно позволяет сделать важные выводы. Предположим, что и (псевдо)риманово многообразие  $(\mathbb{M}, g)$ , и векторные поля Киллинга вещественно аналитичны, т.е. в окрестности произвольной точки многообразия  $p \in \mathbb{M}$  компоненты векторного поля Киллинга разлагаются в ряд Тейлора, который сходится в некоторой окрестности этой точки  $\mathbb{U}_p$ . Допустим, что в точке  $p \in \mathbb{M}$  нам заданы компоненты формы Киллинга  $K_\alpha(p)$  и их первых производных  $\partial_\beta K_\alpha(p)$ . Тогда соотношения (3.13) позволяют вычислить все вторые производные от компонент формы Киллинга  $\partial_{\beta\gamma}^2 K_\alpha$  в той же точке  $p$ . Теперь возьмем ковариантную производную от равенства (3.13) и получим некоторое соотношение, линейное по третьим производным. Из него можно найти все третьи производные от вектора Киллинга и т.д. до бесконечности. Важно отметить, что все соотношения линейны по компонентам формы Киллинга и их производным. Это значит, что в окрестности  $\mathbb{U}_p$  компоненты формы Киллинга имеют вид

$$K_\alpha(x, p) = A_\alpha{}^\beta(x, p) K_\beta(p) + B_\alpha{}^{\beta\gamma}(x, p) [\partial_\beta K_\gamma(p) - \partial_\gamma K_\beta(p)], \quad (3.14)$$

где  $A_\alpha{}^\beta(x, p)$  и  $B_\alpha{}^{\beta\gamma}(x, p)$  – некоторые функции. Антисимметрия последнего слагаемого по индексам  $\beta, \gamma$  связана с тем, что симметризованная частная производная выражается через компоненты формы Киллинга в силу уравнения Киллинга (3.4). Таким образом, компоненты формы Киллинга в окрестности  $\mathbb{U}_p$  являются линейными функциями от компонент формы Киллинга в точке  $p$  и ее внешней производной в той же точке.

У формы Киллинга  $K_\alpha(x, p)$  второй аргумент  $p$  означает, что эта форма имеет определенные свойства в точке  $p \in \mathbb{M}$ . По предположению представление (3.14) справедливо для всех точек многообразия  $p \in \mathbb{M}$ , необходимо только задать значения  $K(p)$  и  $dK(p)$ . Мы предполагаем, что функции  $K_\alpha(x, p)$  вещественно аналитичны и по  $x$ , и по  $p$ .

По предположению компоненты формы Киллинга разлагаются в ряды Тейлора в окрестности каждой точки  $p \in \mathbb{M}$ . Обозначим через  $\mathbb{U}_p$  окрестность точки  $p$ , в которой разложение (3.14) справедливо и обратимо, т.е. аргументы  $x$  и  $p$  можно

поменять местами для некоторых новых матриц  $A$  и  $B$ . Рассмотрим точку  $q$ , которая лежит вне  $\mathbb{U}_p$ . Для этой точки также справедливо обратимое разложение вида (3.14) в некоторой окрестности  $\mathbb{U}_q$ . Предположим, что точка  $q$  лежит достаточно близко к  $\mathbb{U}_p$ , так, что окрестности пересекаются,  $\mathbb{U}_p \cap \mathbb{U}_q \neq \emptyset$ . Тогда для всех точек из пересечения  $x \in \mathbb{U}_p \cap \mathbb{U}_q$  справедливо разложение (3.14) по компонентам форм Киллинга  $K(p)$  и  $K(q)$  и их внешним производным. Отсюда следует, что компоненты формы Киллинга и ее внешней производной в точке  $q$  линейно выражаются через компоненты формы Киллинга и ее внешней производной в точке  $p$ . Таким образом, разложение (3.14) справедливо также в объединении  $\mathbb{U}_p \cup \mathbb{U}_q$ . Это построение можно продолжить на все многообразие  $\mathbb{M}$ . Поэтому разложение (3.14) справедливо для всех точек  $x, p \in \mathbb{M}$ .

Теперь предположим, что (псевдо)риманово многообразие  $(\mathbb{M}, g)$  имеет несколько векторных полей Киллинга  $K_i$ ,  $i = 1, \dots, N$ . Тогда для каждого векторного поля Киллинга справедливо разложение (3.14)

$$K_{i\alpha}(x, p) = A_\alpha{}^\beta(x, p)K_{i\beta}(p) + B_\alpha{}^{\beta\gamma}(x, p)[\partial_\beta K_{i\gamma}(p) - \partial_\gamma K_{i\beta}(p)]. \quad (3.15)$$

Функции  $A_\alpha{}^\beta(x, p)$  и  $B_\alpha{}^{\beta\gamma}(x, p)$  одинаковы для всех форм Киллинга, потому что определяются соотношениями (3.13), которые линейны по компонентам форм Киллинга и их производным. Они полностью определяются метрикой, тензором кривизны и их ковариантными производными. В полученном разложении точка  $p \in \mathbb{M}$  произвольна, но фиксирована, а точка  $x \in \mathbb{M}$  пробегает все многообразие.

Соотношение (3.13) представляет собой систему уравнений в частных производных на компоненты формы Киллинга, у которой есть нетривиальные условия разрешимости. Одно из этих условий в ковариантной форме имеет вид

$$[\nabla_\gamma \nabla_\delta] \nabla_\alpha K_\beta = -R_{\gamma\delta\alpha}{}^\epsilon \nabla_\epsilon K_\beta - R_{\gamma\delta\beta}{}^\epsilon \nabla_\alpha K_\epsilon,$$

где квадратные скобки обозначают коммутатор ковариантных производных. Подстановка в левую часть этого уравнения исходного выражения для вторых производных от формы Киллинга (3.13) после несложных алгебраических преобразований приводит к равенству

$$(R_{\alpha\beta\gamma}{}^\epsilon \delta_\delta^\zeta - R_{\alpha\beta\delta}{}^\epsilon \delta_\gamma^\zeta + R_{\gamma\delta\alpha}{}^\epsilon \delta_\beta^\zeta - R_{\gamma\delta\beta}{}^\epsilon \delta_\alpha^\zeta) \nabla_\zeta K_\epsilon = (\nabla_\gamma R_{\alpha\beta\delta}{}^\epsilon - \nabla_\delta R_{\alpha\beta\gamma}{}^\epsilon) K_\epsilon. \quad (3.16)$$

Если кривизна нетривиальна, то это уравнение дает некоторые линейные соотношения между компонентами формы Киллинга  $K_\alpha$  и их ковариантными производными  $\nabla_\beta K_\alpha$ . Наоборот, если существует некоторая информация в формах Киллинга, то полученное уравнение может определить структуру тензора кривизны. В теореме 3.3.2, которая сформулирована ниже, соотношение (3.16) использовано для доказательства того, что однородное и изотропное многообразие является пространством постоянной кривизны.

Перейдем к определениям.

**Определение.** (Псевдо)риманово многообразие  $(\mathbb{M}, g)$  размерности  $\dim \mathbb{M} = n$  называется *однородным в точке*  $p \in \mathbb{M}$ , если существуют инфинитезимальные изометрии, которые переводят эту точку в любую другую точку из некоторой окрестности  $\mathbb{U}_p$  этой точки. Другими словами, метрика должна допускать такие векторные поля Киллинга, которые в точке  $p$  имеют все возможные направления. Поскольку векторы Киллинга образуют линейное пространство, то в сопряженном пространстве необходимо и достаточно существования такого набора из  $n$  форм Киллинга

$K^{(\gamma)} = dx^\alpha K_\alpha^{(\gamma)}(x, p)$ , где индекс  $\gamma$  в скобках нумерует формы Киллинга, что выполнены условия:

$$K_\alpha^{(\gamma)}(p, p) = \delta_\alpha^\gamma. \quad (3.17)$$

То есть из векторных полей Киллинга можно выбрать базис касательного пространства в точке  $p$ . Если (псевдо)риманово многообразие  $(\mathbb{M}, g)$  однородно в каждой своей точке, то оно называется *однородным*. При этом мы требуем, чтобы векторные поля Киллинга были полны. Другими словами, группа изометрий действует на  $\mathbb{M}$  транзитивно.

(Псевдо)риманово многообразие  $(\mathbb{M}, g)$  называется *изотропным в точке*  $p \in \mathbb{M}$ , если существуют такие инфинитезимальные изометрии с формами Киллинга  $K(x, p)$ , которые оставляют эту точку на месте, т.е.  $K(p, p) = 0$ , и для которых внешняя производная  $dK(x, p)$  в точке  $p$  принимает любое значение в пространстве 2-форм  $\Lambda_2(\mathbb{M})|_p$  в точке  $p$ . Для этого необходимо и достаточно существования такого набора из  $n(n-1)/2$  форм Киллинга  $K^{[\gamma\delta]} = -K^{[\delta\gamma]} = dx^\alpha K_\alpha^{[\gamma\delta]}(x, p)$ , где индексы  $\gamma, \delta$  нумеруют формы Киллинга, что выполнены условия:

$$\begin{aligned} K_\alpha^{[\gamma\delta]}(p, p) &= 0, \\ \left. \frac{\partial K_\beta^{[\gamma\delta]}(x, p)}{\partial x^\alpha} \right|_{x=p} &= \delta_{\alpha\beta}^{\gamma\delta} - \delta_{\alpha\beta}^{\delta\gamma}. \end{aligned} \quad (3.18)$$

Последнее равенство означает, что из векторных полей Киллинга можно выбрать базис 2-форм в точке  $p$ . Если (псевдо)риманово многообразие  $(\mathbb{M}, g)$  изотропно в каждой своей точке, то оно называется *изотропным*. При этом мы требуем, чтобы векторные поля Киллинга были полны.  $\square$

**Теорема 3.3.1.** *Любое изотропное (псевдо)риманово многообразие  $(\mathbb{M}, g)$  является также однородным.*

*Доказательство.* Если многообразие изотропно, то формы Киллинга  $K^{[\gamma,\delta]}(x, p)$  и  $K^{[\gamma,\delta]}(x, p + dp)$  удовлетворяют условиям (3.18) в близких точках  $p$  и  $p + dp$ , соответственно. Любая их линейная комбинация будет формой Киллинга и, следовательно, произвольная линейная комбинация производных

$$c^\alpha \frac{\partial K_\beta^{[\gamma\delta]}(x, p)}{\partial p^\alpha} := c^\alpha \lim_{dp^\alpha \rightarrow 0} \frac{K_\beta^{[\gamma,\delta]}(x, p + dp) - K_\beta^{[\gamma,\delta]}(x, p)}{dp^\alpha}$$

также будет формой Киллинга для любого набора постоянных  $c^\alpha$ . Вычислим производную по  $x$  формы Киллинга  $K^{[\gamma\delta]}$  в точке  $p$ . Из первого условия в (3.18) следует равенство

$$\frac{\partial}{\partial p^\alpha} K_\beta^{[\gamma\delta]}(p, p) = \left. \frac{\partial K_\beta^{[\gamma\delta]}(x, p)}{\partial x^\alpha} \right|_{x=p} + \left. \frac{\partial K_\beta^{[\gamma\delta]}(x, p)}{\partial p^\alpha} \right|_{x=p} = 0.$$

Откуда, с учетом второго условия в (3.18), получаем равенство

$$\left. \frac{\partial K_\beta^{[\gamma\delta]}(x, p)}{\partial p^\alpha} \right|_{x=p} = -\delta_{\alpha\beta}^{\gamma\delta} + \delta_{\alpha\beta}^{\delta\gamma}.$$

Отсюда следует, что из форм Киллинга  $K^{[\gamma\delta]}$  можно построить форму Киллинга, которая в точке  $p$  принимает любое заданное значение  $dx^\alpha a_\alpha$ , где  $a_\alpha \in \mathbb{R}$ . Для этого достаточно положить

$$K_\alpha := \frac{a_\gamma}{n-1} \frac{\partial K_\alpha^{[\gamma\delta]}(x, p)}{\partial p^\delta}.$$

Выбрав соответствующим образом постоянные  $a_\gamma$ , получим набор форм Киллинга, который удовлетворяет условиям (3.17).  $\square$

Из данной теоремы вытекает, что достаточно говорить “изотропное пространство”, однако мы предпочитаем традиционное название “однородное и изотропное пространство”, т.к. оно отражает важные физические свойства.

**Теорема 3.3.2.** *Пусть задано связное вещественно аналитическое (псевдо)риманово многообразие  $(\mathbb{M}, g)$ , метрика которого допускает вещественно аналитические векторные поля Киллинга. Тогда алгебра Ли  $\mathfrak{i}(\mathbb{M})$  инфинитезимальных изометрий имеет размерность не более, чем  $n(n+1)/2$ , где  $n := \dim \mathbb{M}$ . Максимальная размерность  $\dim \mathfrak{i}(\mathbb{M}) = n(n+1)/2$  достигается тогда и только тогда, когда многообразие  $\mathbb{M}$  является однородным и изотропным. В этом случае оно представляет собой пространство постоянной кривизны.*

*Доказательство.* Размерность алгебры Ли  $\mathfrak{i}(\mathbb{M})$  равна максимальному числу линейно независимых векторных полей Киллинга на многообразии  $\mathbb{M}$ . Из равенства (3.15) следует, что число независимых векторных полей Киллинга  $N$  не может превышать числа независимых компонент формы  $(K_\alpha(p))$  и ее внешней производной  $(\partial_\beta K_\alpha(p) - \partial_\alpha K_\beta(p))$  в фиксированной точке  $p \in \mathbb{M}$ . Число независимых компонент любой 1-формы в фиксированной точке не превосходит  $n$ , а число независимых компонент внешней производной не может превышать  $n(n-1)/2$ . Поэтому справедливо следующее ограничение на размерность алгебры Ли векторных полей Киллинга:

$$\dim \mathfrak{i}(\mathbb{M}) \leq n + \frac{1}{2}n(n-1) = \frac{1}{2}n(n+1).$$

Это доказывает первое утверждение теоремы.

В этом месте важна вещественная аналитичность метрики, т.к. она была использована при получении представления (3.15).

Связность многообразия  $\mathbb{M}$  необходима для того, чтобы число независимых векторных полей Киллинга было определено. В противном случае, если многообразие  $\mathbb{M}$  имеет несколько компонент связности, число независимых векторных полей Киллинга может отличаться для каждой компоненты связности.

Однородные и изотропные многообразия имеют максимальное число  $n(n+1)/2$  линейно независимых векторных полей Киллинга и, в силу разложения (3.15), определяют все возможные векторы Киллинга на многообразии  $\mathbb{M}$ . Следовательно, если некоторое многообразие имеет максимальное число независимых полей Киллинга, то оно с необходимостью должно быть однородным и изотропным.

Теперь докажем, что любое однородное и изотропное пространство является пространством постоянной кривизны. Если пространство однородно и изотропно, то для каждой точки  $x \in \mathbb{M}$  найдутся такие формы Киллинга, для которых  $K_\alpha(x) = 0$ , а  $\nabla_\beta K_\alpha(x)$  является произвольной антисимметричной матрицей. Отсюда следует, что антисимметризованный коэффициент при  $\nabla_\zeta K_\epsilon$  в уравнении (3.16) должен быть равен нулю, что приводит к равенству

$$R_{\alpha\beta\gamma}{}^\epsilon \delta_\delta^\zeta - R_{\alpha\beta\delta}{}^\epsilon \delta_\gamma^\zeta + R_{\gamma\delta\alpha}{}^\epsilon \delta_\beta^\zeta - R_{\gamma\delta\beta}{}^\epsilon \delta_\alpha^\zeta = R_{\alpha\beta\gamma}{}^\zeta \delta_\delta^\epsilon - R_{\alpha\beta\delta}{}^\zeta \delta_\gamma^\epsilon + R_{\gamma\delta\alpha}{}^\zeta \delta_\beta^\epsilon - R_{\gamma\delta\beta}{}^\zeta \delta_\alpha^\epsilon. \quad (3.19)$$

Если пространство однородно и изотропно, то для произвольной точки  $x \in \mathbb{M}$  существуют также такие формы Киллинга, которые принимают в этой точке произвольные значения. Следовательно, из уравнений (3.16) и (3.19) вытекает равенство

$$\nabla_\gamma R_{\alpha\beta\delta}{}^\epsilon = \nabla_\delta R_{\alpha\beta\gamma}{}^\epsilon. \quad (3.20)$$

Свернем уравнение (3.19) по индексам  $\delta, \zeta$  и опустим верхний индекс. В результате получим выражение тензора кривизны через тензор Риччи и метрику:

$$(n-1)R_{\alpha\beta\gamma\delta} = R_{\beta\delta}g_{\alpha\gamma} - R_{\alpha\delta}g_{\beta\gamma}. \quad (3.21)$$

Поскольку правая часть этой формулы должна быть антисимметрична по индексам  $\delta, \gamma$ , то возникает дополнительное ограничение

$$R_{\beta\delta}g_{\alpha\gamma} - R_{\alpha\delta}g_{\beta\gamma} = -R_{\beta\gamma}g_{\alpha\delta} + R_{\alpha\gamma}g_{\beta\delta}.$$

Свертка полученного равенства по индексам  $\beta, \gamma$  дает связь между тензором Риччи и скалярной кривизной:

$$R_{\alpha\delta} = \frac{1}{n}Rg_{\alpha\delta}. \quad (3.22)$$

Подстановка этого выражения в (3.21) приводит к следующему выражению для полного тензора кривизны

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta} = \frac{R}{n(n-1)}(g_{\alpha\gamma}g_{\beta\delta} - g_{\alpha\delta}g_{\beta\gamma}). \quad (3.23)$$

Теперь осталось доказать, что скалярная кривизна  $R$  однородного и изотропного пространства постоянна. Для этой цели используем свернутые тождества Бианки (1.149)

$$2\nabla_\beta R_\alpha{}^\beta - \nabla_\alpha R = 0.$$

Подставляя в это тождество выражение для тензора Риччи (3.22), получаем условие

$$\left(\frac{2}{n} - 1\right)\partial_\alpha R = 0.$$

При  $n \geq 3$  отсюда следует, что  $R = \text{const}$ .

Случай  $n = 2$  требует особого рассмотрения. Свертка равенства (3.20) по индексам  $\beta, \epsilon$  приводит к равенству

$$\nabla_\gamma R_{\alpha\delta} - \nabla_\delta R_{\alpha\gamma} = 0.$$

дальнейшая свертка с  $g^{\alpha\delta}$  с учетом уравнения (3.22) приводит к условию  $\partial_\gamma R = 0$ , т.е.  $R = \text{const}$  и при  $n = 2$ .

Таким образом, скалярная кривизна в выражении для полного тензора кривизны (3.23) равна константе,  $R = \text{const}$ , и максимально симметричное (псевдо)риманово многообразие является пространством постоянной кривизны.  $\square$

Если тензор кривизны имеет вид (3.23), где  $R = \text{const}$ , то соответствующее многообразие является пространством постоянной кривизны, т.к. ковариантная производная от метрики в римановой геометрии равна нулю,  $\nabla_\epsilon R_{\alpha\beta\gamma\delta} = 0$ .

Выше мы доказали, что любое однородное и изотропное пространство является пространством постоянной кривизны. Верно также обратное утверждение. А именно, в разделе ?? будет доказано, что пространства постоянной кривизны вида (3.23) являются однородными и изотропными.

### 3.4 Симметричные тензоры на пространстве постоянной кривизны

В разделе 3.3 мы выяснили, что однородные и изотропные  $n$ -мерные многообразия с необходимостью являются пространствами постоянной кривизны, которое имеют максимальное число  $n(n+1)/2$  линейно независимых векторных полей Киллинга. Более того, если под пространством постоянной кривизны понимать (псевдо)риманово многообразие с метрикой, удовлетворяющей условию (3.23), где скалярная кривизна  $R$  постоянна, то пространство постоянной кривизны определяется, по существу, единственным образом сигнатурой метрики и знаком скалярной кривизны. Такие пространства часто встречаются в приложениях, причем помимо метрики на таких многообразиях, как правило, задаются дополнительные тензорные поля, например, поля материи. Для того, чтобы вся модель была максимально симметричной необходимо потребовать симметрию не только от метрики, но и от всех остальных полей. В настоящем разделе мы получим условия, которые налагают требования однородности и изотропии на простейшие тензорные поля, заданные на пространстве постоянной кривизны.

Пусть на  $n$ -мерном пространстве постоянной кривизны  $\mathbb{S}$  помимо метрики  $g_{\alpha\beta}$  задано произвольное тензорное поле

$$T = dx^\alpha \otimes \dots \otimes dx^\beta T_{\alpha\dots\beta}.$$

Для определенности мы рассмотрим ковариантные тензорные поля. Пусть задана изометрия  $\iota : x \mapsto x'$ . Тогда условие симметрии тензорного поля относительно действия данной изометрии имеет тот же вид, что и для метрики (3.1):

$$T(x) = \iota^* T(x'),$$

где  $\iota^*$  – возврат отображения. Пусть инфинитезимальные изометрии генерируются векторными полями Киллинга  $K = K^\alpha \partial_\alpha$ . Тогда условие симметрии (??) запишется в виде равенства нулю производной Ли:

$$\mathcal{L}_K T = 0. \quad (3.24)$$

Такое же условие инвариантности должно выполняться и для произвольных тензорных полей, содержащих как ковариантные, так и контравариантные индексы.

Теперь рассмотрим простейшие случаи, которые часто встречаются в приложениях.

**Пример 3.4.1.** Пусть на пространстве постоянной кривизны  $\mathbb{S}$  задано дифференцируемое скалярное поле  $\varphi(x) \in \mathcal{C}^1(\mathbb{S})$  (функция). Тогда равенство нулю производной Ли примет вид

$$K^\alpha(x) \partial_\alpha \varphi(x) = 0.$$

Поскольку для пространства постоянной кривизны векторное поле Киллинга можно выбрать таким образом, что компоненты  $K^\alpha(x)$  будут принимать произвольные значения в любой точке  $x \in \mathbb{S}$ , то отсюда вытекает условие постоянства скалярного поля,  $\varphi = \text{const}$ , на всем  $\mathbb{S}$ . Таким образом, однородное и изотропное скалярное поле на пространстве постоянной кривизны  $\mathbb{S}$  – это постоянная:  $\varphi(x) = \text{const}$  для всех  $x \in \mathbb{S}$ .  $\square$

**Пример 3.4.2.** В качестве второго примера выберем дифференцируемое ковекторное поле  $A = dx^\alpha A_\alpha$ . Производная Ли для него была вычислена в разделе 1.12, и условие инвариантности (3.24) принимает вид

$$K^\beta \partial_\beta A_\alpha + \partial_\alpha K^\beta A_\beta = 0.$$

Выберем векторное поле Киллинга таким образом, что  $K^\beta(x) = 0$  в произвольной, но фиксированной точке  $x \in \mathbb{S}$ . Кроме этого, векторное поле Киллинга можно выбрать так, что частная производная  $\partial_\beta K_\alpha$  будет антисимметрична и произвольна. Поскольку в выбранной точке  $\partial_\alpha K^\beta = \nabla_\alpha K^\beta$ , то справедливы равенства:

$$\partial_\alpha K^\beta A_\beta = \partial_\alpha K_\beta A^\beta = \partial_\gamma K_\beta (\delta_\alpha^\gamma A^\beta).$$

Данное построение можно провести в произвольной точке многообразия  $\mathbb{S}$ , и, следовательно,

$$\delta_\alpha^\gamma A^\beta = \delta_\alpha^\beta A^\gamma.$$

После свертки по индексам  $\alpha$  и  $\gamma$  возникает соотношение

$$n A^\beta = A^\beta.$$

Поэтому, исключая тривиальный случай  $n = 1$ , после опускания индекса получаем равенство  $A_\alpha = 0$ . Следовательно, если ковекторное поле однородно и изотропно, то оно тождественно равно нулю.

Это же относится и к векторному полю  $X = X^\alpha \partial_\alpha$ : однородное и изотропное векторное поле на пространстве постоянной кривизны  $\mathbb{S}$  тождественно равно нулю.  $\square$

**Пример 3.4.3.** В качестве третьего примера рассмотрим дифференцируемый ковариантный тензор второго ранга с компонентами  $T_{\alpha\beta}$ . Мы не предполагаем наличия какой-либо симметрии по индексам  $\alpha, \beta$ . Производная Ли от тензора второго ранга имеет вид

$$\mathcal{L}_K T_{\alpha\beta} = K^\gamma \partial_\gamma T_{\alpha\beta} + \partial_\alpha K^\gamma T_{\gamma\beta} + \partial_\beta K^\gamma T_{\alpha\gamma}.$$

Как и в предыдущем примере выберем векторное поле Киллинга таким образом, чтобы в точке  $x \in \mathbb{S}$  было выполнено равенство  $K^\gamma(x) = 0$  и частная производная  $\partial_\alpha K_\beta$  была антисимметрична и произвольна. Тогда из равенства нулю производной Ли вытекает равенство

$$\delta_\alpha^\delta T^\gamma_\beta + \delta_\beta^\delta T_\alpha^\gamma = \delta_\alpha^\gamma T^\delta_\beta + \delta_\beta^\gamma T_\alpha^\delta.$$

После свертки по индексам  $\alpha, \delta$  и опускания  $\gamma$  получаем соотношение

$$(n-1)T_{\gamma\beta} + T_{\beta\gamma} = g_{\beta\gamma}T, \quad T := T_\alpha^\alpha.$$

Теперь поменяем местами индексы  $\beta$  и  $\gamma$  и вычтем полученное равенство:

$$(n-2)(T_{\gamma\beta} - T_{\beta\gamma}) = 0.$$

Отсюда следует, что при  $n \neq 2$  инвариантный тензор второго ранга должен быть симметричен. С учетом симметрии получаем выражение для инвариантного тензора второго ранга:

$$T_{\alpha\beta} = \frac{T}{n} g_{\alpha\beta}.$$

Поскольку след тензора  $T$  – скаляр, то из его инвариантности вытекает, что он должен быть равен постоянной, как в примере 3.4.1. Таким образом, однородное и изотропное ковариантное тензорное поле второго ранга на пространстве постоянной кривизны имеет вид

$$T_{\alpha\beta} = Cg_{\alpha\beta}, \quad C = \text{const.} \quad (3.25)$$

Эта формула справедлива для  $n \geq 3$  и для симметричной части тензора при  $n = 2$ .

В двумерном случае инвариантный тензор может иметь антисимметричную часть, пропорциональную  $\varepsilon_{\alpha\beta} = -\varepsilon_{\beta\alpha}$  – полностью антисимметричному тензору второго ранга:

$$T_{[\alpha\beta]} = -T_{[\beta\alpha]} = C\varepsilon_{\alpha\beta},$$

если мы не учитываем пространственные отражения. При пространственных отражениях полностью антисимметричный тензор второго ранга меняет знак  $\varepsilon_{\alpha\beta} \mapsto -\varepsilon_{\alpha\beta}$ . Поэтому с учетом пространственных отражений наиболее общий вид однородного и изотропного тензора второго ранга при  $n = 2$  такой же, как и в более высоких размерностях (3.25).

Аналогичное построение можно провести для инвариантного контравариантного тензора второго ранга и тензора со смешанными индексами:

$$T^{\alpha\beta} = Cg^{\alpha\beta}, \quad T^\alpha_\beta = C\delta^\alpha_\beta.$$

Полученные формулы для симметричных тензоров будут использованы при построении космологических моделей, где роль  $T_{\alpha\beta}$  будет играть тензор энергии-импульса полей материи.  $\square$

### 3.5 Пространства с максимально симметричными подпространствами

Во многих важных с физической точки зрения случаях, например, в космологии, (псевдо)риманово многообразие  $\mathbb{M}$ ,  $\dim \mathbb{M} = n$ , представляет собой топологическое произведение двух многообразий,  $\mathbb{M} = \mathbb{R} \times \mathbb{S}$ , где  $\mathbb{R}$  – вещественная прямая, которую мы в дальнейшем отождествим со временем, и  $\mathbb{S}$  – пространство постоянной кривизны. При этом каждой точке  $t \in \mathbb{R}$  соответствует подмногообразие  $\mathbb{S} \subset \mathbb{M}$ . Поскольку  $\mathbb{S}$  – пространство постоянной кривизны вида (3.23), то оно однородно и изотропно (теорема 3.3.2). Соответствующая группа изометрий на  $\mathbb{S}$  генерируется  $n(n-1)/2$  векторными полями Киллинга, где  $n := \dim \mathbb{M}$ . В настоящем разделе мы найдем наиболее общий вид метрики на  $\mathbb{M}$ , инвариантной относительно группы симметрий, которая порождается действием группы изометрий на  $\mathbb{S}$ .

Обозначим координаты на пространстве постоянной кривизны  $\mathbb{S}$  через  $x^\mu$ ,  $\mu = 1, \dots, n-1$ . Пусть компоненты инвариантной метрики на  $\mathbb{S}$  будут  $\overset{\circ}{g}_{\mu\nu}(x)$ . По построению эта метрика однородна и изотропна. Она инвариантна относительно группы изометрий, генерируемых векторными полями Киллинга  $K_i = K_i^\mu(x)\partial_\mu$ ,  $i = 1, \dots, n(n-1)/2$ .

Предположим, что на  $\mathbb{M} = \mathbb{R} \times \mathbb{S}$  задана достаточно гладкая метрика лоренцевой сигнатуры такая, что координата  $t$  является временем, т.е.  $g_{00} > 0$ , и все сечения постоянного времени  $t = \text{const}$  пространственноподобны. Кроме этого, предположим,



что сужение метрики на  $\mathbb{S}$  при каждом значении  $t \in \mathbb{R}$  совпадает с  $\overset{\circ}{g}_{\mu\nu}$ . Ясно, что в общем случае такая метрика имеет вид

$$g_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} g_{00} & g_{0\nu} \\ g_{\mu 0} & h_{\mu\nu} \end{pmatrix}, \quad (3.26)$$

где  $g_{00}(t, x)$  и  $g_{0\mu}(t, x) = g_{\mu 0}(t, x)$  – произвольные функции от  $t$  и  $x$ , а  $h_{\mu\nu}(t, x)$  – метрика постоянной кривизны на  $\mathbb{S}$ , которая зависит от  $t$  как от параметра. Все компоненты метрики предполагаются достаточно гладкими и по  $t$ , и по  $x$ . Поскольку метрика имеет лоренцеву сигнатуру, то согласно предложению 1.6.2 матрица

$$h_{\mu\nu} - \frac{g_{0\mu}g_{0\nu}}{g_{00}}$$

отрицательно определена. Кроме этого, по предположению, матрица  $h_{\mu\nu}$  также отрицательно определена.

Продолжим действие группы изометрий из  $\mathbb{S}$  на все  $\mathbb{M}$  следующим образом. Будем считать, что пространственные компоненты продолженных векторных полей Киллинга зависят от  $t$  как от параметра. Поскольку мы имеем максимальное число векторных полей Киллинга, то зависимость может быть только линейной:  $\tilde{K}_i^\mu(t, x) = M_i^j(t)K_j^\mu(x)$ , где  $M_i^j(t)$  – некоторая невырожденная матрица. Тем самым мы сохраняем группу симметрии, действующую на пространственных сечениях. Определим действие группы инфинитезимальных изометрий на  $\mathbb{M}$  следующими равенствами:

$$\begin{aligned} t &\mapsto t' = t, \\ x^\mu &\mapsto x'^\mu = x^\mu + \epsilon \tilde{K}^\mu + o(\epsilon), \quad \epsilon \ll 1, \end{aligned} \quad (3.27)$$

где  $\tilde{K}$  – произвольный вектор Киллинга из алгебры Ли, порожденной векторами  $\tilde{K}_i$ . То есть преобразования не сдвигают точки вещественной прямой  $t \in \mathbb{R} \subset \mathbb{M}$ . Это означает, что векторные поля Киллинга продолжаются на все  $\mathbb{M}$  таким образом, что у них не возникает дополнительной компоненты:  $K^0 = 0$ . Нетривиальность продолжения сводится лишь к тому, что пространственные компоненты векторов Киллинга теперь могут зависеть от  $t$  как от параметра. Следовательно, алгебра Ли продолженных на  $\mathbb{M}$  векторов Киллинга остается прежней.

**Пример 3.5.1.** В четырехмерном случае векторные поля Киллинга, продолженные на  $\mathbb{M} = \mathbb{R} \times \mathbb{S}$ , порождают группу преобразований  $(\mathbb{M}, \mathbb{G})$ , где

$$\mathbb{G} = \begin{cases} \text{SO}(4), & \mathbb{S} = \mathbb{S}^3 & \text{– сфера,} \\ \text{ISO}(3), & \mathbb{S} = \mathbb{R}^3 & \text{– евклидово пространство,} \\ \text{SO}(3, 1), & \mathbb{S} = \mathbb{H}^3 & \text{– двуполостный гиперболоид.} \end{cases}$$

Этот случай важен в космологии. □

**Теорема 3.5.1.** Если метрика (3.26) на  $\mathbb{M} = \mathbb{R} \times \mathbb{S}$  инвариантна относительно преобразований (3.27), то в окрестности произвольной точки существует такая система координат, в которой метрика имеет блочно диагональный вид

$$ds^2 = dt^2 + h_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu, \quad (3.28)$$

где  $h_{\mu\nu}(t, x)$  – метрика постоянной кривизны на  $\mathbb{S}$  при всех  $t \in \mathbb{R}$ . В этой системе координат компоненты векторных полей Киллинга не зависят от времени:  $\tilde{K}^\mu = \tilde{K}^\mu(x) \Leftrightarrow M_i^j = \delta_i^j$ .

*Доказательство.* Пусть  $x^\mu$  – координаты на  $\mathbb{S}$ . Зафиксируем одну из гиперповерхностей  $t = \text{const}$ . Касательный к ней вектор имеет только пространственные компоненты:  $X = X^\mu \partial_\mu$ . Ортогональный к ней вектор  $n^\alpha \partial_\alpha$  должен удовлетворять равенству

$$n^0 X^\nu N_\nu + n^\mu X^\nu g_{\mu\nu} = 0,$$

где использована АДМ параметризация метрики, см. раздел ???. Поскольку данное равенство должно быть выполнено для всех  $X$ , то оно определяет пространственные компоненты нормальных векторов,

$$n^\mu = -n^0 N^\mu.$$

Следовательно, квадрат ортогонального вектора положителен:

$$(n, n) = (N^2 + N^\rho N_\rho)(n^0)^2 - 2(n^0)^2 N^\mu N_\mu + (n^0)^2 N^\mu N^\nu g_{\mu\nu} = N^2(n^0)^2 > 0.$$

Поэтому вектор, ортогональный к пространственноподобной гиперповерхности, является времениподобным.

Выпустим из каждой точки гиперповерхности геодезическую (экстремаль), которая является времениподобной по построению. Выберем в качестве временной координаты длину геодезической  $s$ . Не ограничивая общности, можно считать, что фиксированная гиперповерхность соответствует значению  $s = 0$ . Тогда в некоторой окрестности поверхности  $\mathbb{S}$  можно выбрать систему координат  $(x^0 := s, x^\mu)$ . Согласно предложению 5.12.2 в построенной таким образом системе координат метрика имеет блочно диагональный вид в некоторой окрестности фиксированной поверхности:

$$g_{00} = 1, \quad g_{0\mu} = g_{\mu 0} = 0, \quad h_{\mu\nu} = h_{\mu\nu}(s, x).$$

Возвращаясь к обозначению  $s \mapsto t$ , получаем метрику (3.28).

**Замечание.** То, что в построенной системе координат метрика имеет блочно диагональный вид является общим утверждением, которое не связано с наличием векторных полей Киллинга.  $\square$

На исходной гиперповерхности  $t = 0$  нулевая компонента вектора Киллинга равна нулю,  $\tilde{K}^0(0, x) = 0$ , по построению. Из  $(0, 0)$  компоненты уравнения Киллинга, которое удобнее использовать в форме (3.7), следует равенство  $\partial_t \tilde{K}^0(t, x) = 0$ . Это дифференциальное уравнение с начальным условием  $\tilde{K}^0(0, x) = 0$  имеет единственное решение  $\tilde{K}^0(t, x) = 0$  для всех значений координаты  $t$ , где определена система координат.

Если метрика является блочно диагональной (3.28), то  $(0, \mu)$  компоненты уравнения Киллинга (3.7) принимают вид  $\partial_t \tilde{K}^\mu = 0$ . Отсюда следует, что пространственные компоненты векторных полей Киллинга не зависят от времени.

Пространственные  $(\mu, \nu)$  компоненты уравнения Киллинга удовлетворяются, поскольку  $K$  – векторы Киллинга на  $\mathbb{S}$ . Следовательно, все гиперповерхности, определяемые уравнением  $t = \text{const}$ , будут инвариантными многообразиями, т.е. пространствами постоянной кривизны по крайней мере в некоторой окрестности исходной гиперповерхности.  $\square$

Поскольку векторные поля Киллинга на  $\mathbb{M}$  в выбранной системе координат не зависят от времени, то знак тильды, для краткости, опустим.

Если метрика имеет блочно диагональный вид (3.28) и  $K = K^\mu \partial_\mu$ , то уравнения Киллинга (3.7) расщепляются на временные и пространственные компоненты:

$$(\alpha, \beta) = (0, 0) : \quad 0 = 0, \quad (3.29)$$

$$(\alpha, \beta) = (0, \mu) : \quad h_{\mu\nu} \partial_0 K^\nu = 0, \quad (3.30)$$

$$(\alpha, \beta) = (\mu, \nu) : \quad h_{\mu\rho} \partial_\nu K^\rho + h_{\nu\rho} \partial_\mu K^\rho + K^\rho \partial_\rho h_{\mu\nu} = 0. \quad (3.31)$$

**Теорема 3.5.2.** *В условиях теоремы 3.5.1 метрика (3.28) имеет вид*

$$ds^2 = dt^2 + a^2 \overset{\circ}{g}_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu, \quad (3.32)$$

где  $a(t) > 0$  – произвольная достаточно гладкая функция (масштабный множитель) и  $\overset{\circ}{g}_{\mu\nu}(x)$  – метрика пространства постоянной кривизны, зависящая только от  $x \in \mathbb{S}$ .

*Доказательство.* Поскольку  $h_{\mu\nu}(t, x)$  – метрика пространства постоянной кривизны на  $\mathbb{S}$  для всех  $t \in \mathbb{R}$ , то уравнения Киллинга (3.31) выполнены. Из теоремы 3.5.1 следует, что векторные поля Киллинга не зависят от времени. Поэтому дифференцирование уравнения (3.31) по времени приводит к равенству

$$\dot{h}_{\mu\rho} \partial_\nu K^\rho + \dot{h}_{\nu\rho} \partial_\mu K^\rho + K^\rho \partial_\rho \dot{h}_{\mu\nu} = 0.$$

Это значит, что производная метрики по времени  $\dot{h}_{\mu\nu}$  является однородным и изотропным тензором второго ранга. Тогда из примера 3.4.3 вытекает, что производная метрики по времени пропорциональна самой метрике:

$$\dot{h}_{\mu\nu} = f h_{\mu\nu}, \quad (3.33)$$

где  $f(t)$  – произвольная достаточно гладкая функция времени.

Если  $f = 0$ , то доказывать нечего, и метрика имеет вид (3.32) с  $a = \text{const}$ .

Пусть  $f \neq 0$ . Тогда введем новую временную координату  $t \mapsto t'$ , определяемую дифференциальным уравнением

$$dt' = f(t) dt.$$

Тогда уравнение (3.33) упростится

$$\frac{dh_{\mu\nu}}{dt'} = h_{\mu\nu}.$$

Его общее решение имеет вид

$$h_{\mu\nu}(t', x) = C e^{t'} \overset{\circ}{g}_{\mu\nu}(x), \quad C = \text{const} \neq 0,$$

где  $\overset{\circ}{g}_{\mu\nu}(x)$  – метрика на пространстве постоянной кривизны  $\mathbb{S}$ , которая не зависит от времени. Отсюда вытекает представление (3.32).  $\square$

# Глава 4

## Принцип наименьшего действия

Можно с уверенностью сказать, что в основе построения моделей современной математической физики лежит принцип наименьшего действия. Этот принцип требует стационарности некоторого функционала – действия – относительно вариаций полей, описывающих данную модель. В результате мы получаем систему уравнений Эйлера–Лагранжа, которая принимается в качестве уравнений движения, уравнений равновесия и т.д. для данной модели. При этом инвариантность действия относительно некоторой группы преобразований приводит к ковариантным уравнениям движения и к законам сохранения, которые играют важнейшую роль в физике.

### 4.1 Постановка вариационных задач

Начнем с постановки вариационной задачи в евклидовом пространстве. Предположим, для простоты, что  $\mathbb{M} \subset \mathbb{R}^n$  – ограниченная область евклидова пространства с достаточно гладкой границей  $\partial\mathbb{M}$ . Пусть в этой области задан некоторый набор достаточно гладких функций  $\varphi = (\varphi^a)$ ,  $a = 1, \dots, N$ . Если  $x^\alpha$ ,  $\alpha = 1, \dots, n$ , – система координат на  $\mathbb{M}$ , то обозначим, для краткости, все первые производные полей через  $\partial\varphi = \{\partial_\alpha \varphi^a\}$ . Предположим, что на  $\mathbb{M}$  определен *функционал действия* или, просто, *действие*

$$S[\varphi] = \int_{\mathbb{M}} dx L(x, \varphi, \partial\varphi), \quad (4.1)$$

где  $L$  – некоторая функция от  $n$  переменных  $x^\alpha$ ,  $N$  переменных  $\varphi^a$  и  $nN$  переменных  $\partial_\alpha \varphi^a$ . Она предполагается дважды непрерывно дифференцируемой функцией переменных  $x \in \mathbb{M}$  и всех остальных переменных для всех конечных значений  $\varphi$  и  $\partial\varphi$ . Назовем функцию  $L(x, \varphi, \partial\varphi)$  *лагранжевой плотностью* или *лагранжианом* данной модели, которая описывается набором полей  $\varphi$ .

Назовем *вариацией* функции  $\varphi^a$  разность двух представителей из класса рассматриваемых функций:  $\delta\varphi^a := \varphi'^a - \varphi^a$ . Для малых вариаций функций  $\epsilon\delta\varphi^a$ , где  $\epsilon > 0$  – малая величина, вариация (главная линейная часть) функционала действия, если она существует, равна

$$\begin{aligned} \delta S &= S[\varphi + \epsilon\delta\varphi] - S[\varphi] = \\ &= \int_{\mathbb{M}} dx \left[ \frac{\partial L}{\partial \varphi^a} - \partial_\alpha \left( \frac{\partial L}{\partial (\partial_\alpha \varphi^a)} \right) \right] \epsilon\delta\varphi^a + \int_{\partial\mathbb{M}} ds_\alpha \frac{\partial L}{\partial (\partial_\alpha \varphi^a)} \epsilon\delta\varphi^a + o(\epsilon), \end{aligned} \quad (4.2)$$

где второе слагаемое возникло при интегрировании по частям, и  $ds_\alpha$  обозначает ориентированный элемент объема края  $\partial\mathbb{M}$ . Отметим, что при вычислении вариации действия (4.1) область интегрирования  $\mathbb{M}$  считалась неизменной.

Назовем набор функций  $\varphi$  *стационарной*, или *критической* точкой, или *экстремалью* функционала  $S[\varphi]$ , если в этой точке линейная часть вариации действия равна нулю,  $\delta S = o(\epsilon)$ . Такие точки соответствуют либо локальному минимуму, либо локальному максимуму, либо седловой точке функционала  $S$ , если матрица вторых производных от лагранжиан (гессиян) невырождена. Это можно проверить после нахождения экстремали функционала, рассмотрев малые отклонения полей от стационарной точки.

Для действия (4.1) можно поставить различные вариационные задачи. Рассмотрим задачи, которые наиболее часто встречаются в физике.

#### 4.1.1 Задача с заданными граничными условиями

Вариационная задача с заданными граничными условиями является наиболее распространенной и самой простой с точки зрения постановки. Рассмотрим класс функций с заданными граничными условиями

$$\varphi|_{\partial\mathbb{M}} = \varphi_0. \quad (4.3)$$

Поскольку граничные условия для всех функций при фиксированном индексе  $a$  одни и те же, то вариации полей обращаются в нуль на границе:

$$\delta\varphi|_{\partial\mathbb{M}} = 0. \quad (4.4)$$

Тогда интеграл по границе области в вариации действия (4.2) обращается в нуль в силу граничных условий (4.4). В рассматриваемом случае существует предел

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{S[\varphi + \epsilon\delta\varphi] - S[\varphi]}{\epsilon} =: \int_{\mathbb{M}} dx \frac{\delta S}{\delta\varphi^a} \delta\varphi^a. \quad (4.5)$$

Функция  $\delta S/\delta\varphi^a$ , стоящая под знаком интеграла, называется *вариационной производной* функционала  $S$  по полю  $\varphi^a$  и обозначается также запятой:

$$S,{}_a := \frac{\delta S}{\delta\varphi^a}. \quad (4.6)$$

Из вида вариации (4.2) получаем явное выражение для вариационной производной

$$S,{}_a = \frac{\partial L}{\partial\varphi^a} - \partial_\alpha \frac{\partial L}{\partial(\partial_\alpha\varphi^a)}. \quad (4.7)$$

Из условия стационарности действия  $\delta S = o(\epsilon)$  в силу произвольности вариации  $\delta\varphi^a$  и основной леммы вариационного исчисления следует

**Теорема 4.1.1.** *Набор функций  $\varphi$  при заданных граничных условиях является стационарной точкой действия  $S[\varphi]$  тогда и только тогда, когда он удовлетворяет системе уравнений Эйлера–Лагранжа*

$$S,{}_a = \frac{\partial L}{\partial\varphi^a} - \partial_\alpha \frac{\partial L}{\partial(\partial_\alpha\varphi^a)} = 0. \quad (4.8)$$

В общем случае уравнения Эйлера–Лагранжа представляют собой систему нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка, число которых  $N$  равно числу функций, от которых зависит функционал действия. Их

надо решать при заданных граничных условиях (4.3). Решение поставленной вариационной задачи может не существовать, а если оно существует, то может быть не единственно. Это зависит от вида лагранжиана и области  $\mathbb{M}$ .

Действие (4.1) для заданных уравнений Эйлера–Лагранжа при постановке задачи с фиксированными граничными условиями определено неоднозначно. Действительно, рассмотрим новый лагранжиан,  $\tilde{L}_\alpha = L + \partial_\alpha F$ , который отличается от исходного на частную производную от некоторой достаточно гладкой функции  $F(x, \varphi, \partial\varphi)$ . Тогда действие получит дополнительный вклад, сводящийся к интегралу по границе. Вариация дополнительного слагаемого равна нулю, т.к. вариации всех полей на границе равны нулю. Отсюда следует, что уравнения Эйлера–Лагранжа не изменятся при добавлении к лагранжиану частных производных  $\partial_\alpha F$  от произвольной функции.

Рассмотренная вариационная задача наиболее часто рассматривается в моделях математической физики. При этом уравнения Эйлера–Лагранжа приводят к уравнениям движения, равновесия и т.д.

### 4.1.2 Задача на условную стационарную точку

В настоящем разделе мы ограничимся рассмотрением вариационных задач на конечном отрезке  $[x_1, x_2] \subset \mathbb{R}$  с заданными граничными условиями. Пусть требуется найти стационарную точку действия (4.1) в классе функций  $\varphi^a \in \mathcal{C}^2([x_1, x_2])$ ,  $a = 1, \dots, N$  при наличии  $M < N$  независимых дополнительных условий, которые называются *связями*

$$G_A(x, \varphi, \partial\varphi) = 0, \quad A = 1, \dots, M < N, \quad (4.9)$$

где  $G_A$  – достаточно гладкие функции своих аргументов. Мы предполагаем, что связи  $G_A$  не противоречат граничным условиям и функционально независимы. В частности, ни одна из связей не выполняется тождественно для всех функций  $\varphi$  и ни одна из связей не является следствием остальных. Функциональная независимость связей означает, что матрица производных

$$\frac{\partial G_A}{\partial(\varphi^a, \partial_x \varphi^b)}$$

имеет постоянный ранг  $M$  для всех  $x$ . Отсюда следует, что локально связи можно разрешить относительно  $M$  функций или их первых производных, рассматривая остальные  $2(N - M)$  функций и их производные как независимые.

В общем случае связи являются дифференциальными уравнениями, и их решения содержат произвольные постоянные. Мы предполагаем, что этот произвол устранен, например, наложением граничных условий, либо каким-то иным образом.

В частном случае связи могут быть алгебраическими уравнениями на неизвестные функции  $G_A(x, \varphi) = 0$ . В этом случае они называются *голономными*. В противном случае связи (4.9) называются *неголономными*.

При наличии связей вариации функций не являются независимыми, и выполнение уравнений Эйлера–Лагранжа для исходного действия (4.1) не является необходимым условием. Прямым способом решения задачи на условный экстремум является явное разрешение связей относительно  $M$  функций, подстановка полученного решения в исходное действие и исследование нового действия от  $N - M$  функций на безусловный экстремум.

Задачи на условную стационарную точку часто встречаются в математической физике. В частности, к ним приводят все калибровочные модели, инвариантные относительно локальных преобразований полей. В связи с этим введем удобную терминологию, которая часто используется в физике. А именно, назовем поля *нефизическими*, если связи разрешаются относительно этих полей. Остальные поля, относительно которых после исключения нефизических полей возникает задача на безусловную стационарную точку, называются *физическими*. Деление полей на физические и нефизические условно, т.к. связи можно разрешать относительно различных переменных. В то же время число физических ( $N - M$ ) и нефизических ( $M$ ) полей, по предположению, постоянно.

Прямой способ исключения нефизических полей неприменим, если связи не решаются явно. Кроме этого исключение части полей может нарушить симметрию задачи, например, лоренц-инвариантность, что часто приводит к существенному усложнению вычислений. Поэтому используют метод неопределенных множителей Лагранжа. А именно, строят полное (total) действие

$$S_T := \int_{x_1}^{x_2} dx (L - \lambda^A G_A), \quad (4.10)$$

где  $\lambda(x) \in \mathcal{C}^1([x_1, x_2])$  – новые функции, которые называются *множителями Лагранжа*. Это действие исследуется на безусловный экстремум. Вариация действия (4.10) по полям  $\varphi^a$  и множителям Лагранжа  $\lambda^A$  приводит к  $N + M$  уравнениям Эйлера–Лагранжа,  $M$  из которых, возникших при вариации по множителям Лагранжа, совпадают с уравнениями связей (4.9). При этом вариации множителей Лагранжа на границе не обязаны быть равными нулю, т.к. они входят в действие без производных и никаких дополнительных граничных условий не возникает. Решение новой задачи на безусловный экстремум дает решение исходной задачи на условный экстремум, что является содержанием следующего утверждения.

**Теорема 4.1.2.** *Для функций  $\varphi$ , на которых функционал (4.1) имеет стационарное значение при выполнении уравнений связей (4.9), существует такой набор множителей Лагранжа, что они вместе с полями  $\varphi$  удовлетворяют уравнениям Эйлера–Лагранжа для действия (4.10):*

$$\frac{\delta S_T}{\delta \varphi^a} = 0, \quad \frac{\delta S_T}{\delta \lambda^A} = G_A = 0.$$

*Доказательство.* См., например, [?], глава 9, §1. □

Сформулированная теорема позволяет свести вариационную задачу на условный экстремум к вариационной задаче на безусловный экстремум, но для действия, зависящего от большего числа функций. В теории поля вариационные задачи рассматриваются не на прямой  $\mathbb{R}$ , а в евклидовом пространстве  $\mathbb{R}^n$ . Тогда связи представляют собой в общем случае дифференциальные уравнения в частных производных. Для того чтобы доказать аналог теоремы о множителях Лагранжа необходимо зафиксировать каким-либо образом класс рассматриваемых связей, что является сложной задачей. На практике метод неопределенных множителей Лагранжа часто используют, не заботясь о его применимости. В таком случае применимость метода необходимо доказывать в каждом конкретном случае.

## 4.2 Первая теорема Нетер

В наиболее содержательных моделях математической физики функционал действия инвариантен относительно глобальных или локальных преобразований симметрии. С каждым преобразованием симметрии связан закон сохранения, что было установлено Эмми Нетер [?] в первой и второй теореме, соответственно, для глобальных и локальных преобразований.

Пусть функционал действия (4.1) инвариантен относительно бесконечно малых преобразований

$$x^\alpha \mapsto x'^\alpha = x^\alpha + \delta x^\alpha, \quad (4.11)$$

$$\varphi^a(x) \mapsto \varphi'^a(x') = \varphi^a(x) + \bar{\delta}\varphi^a(x). \quad (4.12)$$

Рассмотрим независимые вариации координат и полей:

$$\delta x^\alpha = \epsilon^A R_A^\alpha(x, \varphi, \partial\varphi), \quad (4.13)$$

$$\bar{\delta}\varphi^a = \varphi'^a(x') - \varphi^a(x) = \epsilon^A R_A^a(x, \varphi, \partial\varphi), \quad (4.14)$$

где  $R_A^\alpha(x, \varphi, \partial\varphi)$  и  $R_A^a(x, \varphi, \partial\varphi)$  – некоторые достаточно гладкие и функционально независимые функции своих аргументов, которые называются *генераторами* преобразований симметрии, а  $\epsilon^A(x)$ ,  $A = 1, 2, \dots, K$ , – постоянные или локальные параметры преобразований, число которых зависит от рассматриваемой модели. Мы говорим, что каждому значению индекса  $A$  соответствует одно преобразование симметрии.

Начнем с доказательства первой теоремы Нетер, т.е. будем считать параметры преобразований постоянными,  $\epsilon^A = \text{const}$ . Под инвариантностью функционала действия мы понимаем следующее равенство

$$S = \int_{\mathbb{M}} dx L(x, \varphi, \partial\varphi) = \int_{\mathbb{M}'} dx' L(x', \varphi', \partial'\varphi'), \quad (4.15)$$

где интегрирование производится по ограниченной области  $\mathbb{M} \subset \mathbb{R}^n$ , которая отображается в  $\mathbb{M}'$  при преобразовании (4.11).

Преобразования (4.13), (4.14) нетривиально действуют как на поля, так и на координаты. В дальнейшем нам понадобится вариация формы функции в данной точке  $x \in \mathbb{M}$  (см., раздел 1.11):

$$\delta\varphi^a(x) := \varphi'^a(x) - \varphi^a(x),$$

которая определяется разностью значений полей после и до преобразования в точке  $x$ . Она связана с вариацией (4.12) следующим соотношением

$$\delta\varphi^a(x) = \bar{\delta}\varphi^a - \delta x^\alpha \partial_\alpha \varphi^a = \epsilon^A (R_A^a - R_A^\alpha \partial_\alpha \varphi^a). \quad (4.16)$$

По построению, для постоянных параметров преобразований вариация формы функции  $\delta$  перестановочна с операцией частного дифференцирования  $\partial_\alpha$ . Вариация действия относительно преобразований (4.11), (4.12) имеет вид

$$\delta S = \int_{\mathbb{M}} dx \left( \frac{\partial L}{\partial \varphi^a} - \partial_\alpha \frac{\partial L}{\partial (\partial_\alpha \varphi^a)} \right) \delta\varphi^a + \int_{\partial\mathbb{M}} ds_\alpha \left( \frac{\partial L}{\partial (\partial_\alpha \varphi^a)} \delta\varphi^a + L \delta x^\alpha \right). \quad (4.17)$$

Если выполнены уравнения Эйлера–Лагранжа, то первое слагаемое исчезает, и вариация действия определяется только поверхностным интегралом. При постоянных



параметрах преобразований симметрии запишем вариацию действия в виде объемного интеграла, используя формулу Стокса,

$$\delta S = - \int_{\mathbb{M}} dx \epsilon^A \partial_\alpha J_A^\alpha, \quad (4.18)$$

где

$$J_A^\alpha := - \frac{\partial L}{\partial(\partial_\alpha \varphi^a)} (R_A^a - R_A^\beta \partial_\beta \varphi^a) - L R_A^\alpha. \quad (4.19)$$

Совокупность величин  $J_A^\alpha$ ,  $\alpha = 1, \dots, n$  можно рассматривать, как компоненты некоторого вектора (точнее, векторной плотности)  $J_A$ , который называется *сохраняющим током* для каждого преобразования симметрии с параметром  $\epsilon^A$ . Из полученного выражения следует

**Теорема 4.2.1 (Первая теорема Нетер).** *Если действие (4.1) инвариантно относительно преобразований (4.11)–(4.14) с постоянными параметрами  $\epsilon^A$ , то для каждого преобразования симметрии и любого решения уравнений Эйлера–Лагранжа токи сохраняются:*

$$\partial_\alpha J_A^\alpha = 0, \quad A = 1, \dots, K. \quad (4.20)$$

Заметим, что для сохранения тока достаточно глобальной инвариантности, когда параметр преобразования не зависит от точек пространства-времени.

Поскольку лагранжиан не содержит производных выше первого порядка, то компоненты токов в общем случае зависят только от координат, полей и их первых производных.

Закон сохранения (4.20) не нарушится, если к току (4.19) добавить слагаемое

$$J_A'^\alpha = J_A^\alpha + \partial_\beta f_A^{\beta\alpha}, \quad (4.21)$$

где  $f_A^{\beta\alpha} = -f_A^{\alpha\beta}$  – произвольная антисимметричная по индексам  $\alpha, \beta$  функция. Чтобы не менять структуры тока (4.19), будем считать, что она зависит только от координат  $x^\alpha$ , полей  $\varphi$  и их первых производных  $\partial\varphi$ . Это преобразование часто используется, чтобы упростить выражения для токов.

Перепишем закон сохранения (4.20) в интегральной форме и используем формулу Стокса

$$\int_{\mathbb{M}} dx \partial_\alpha J_A^\alpha = \int_{\partial\mathbb{M}} ds_\alpha J_A^\alpha = 0,$$

где интегрирование ведется по многообразию  $\mathbb{M}$  и его краю  $\partial\mathbb{M}$ .

Пусть на  $\mathbb{M}$  задана (псевдо)риманова геометрия, т.е. метрика  $g_{\alpha\beta}$  и связность Леви–Чивиты  $\tilde{\Gamma}_{\alpha\beta}^\gamma$ . Тогда, если индекс  $A$  не преобразуется при преобразовании координат, то интеграл по (псевдо)риманову многообразию, можно переписать в ковариантной форме:

$$\int_{\mathbb{M}} dx \partial_\alpha J_A^\alpha = \int_{\mathbb{M}} dx \sqrt{|g|} \tilde{\nabla}_\alpha \left( \frac{1}{\sqrt{|g|}} J_A^\alpha \right),$$

где

$$\tilde{\nabla}_\alpha \left( \frac{1}{\sqrt{|g|}} J_A^\alpha \right) = \partial_\alpha \left( \frac{1}{\sqrt{|g|}} J_A^\alpha \right) + \tilde{\Gamma}_{\alpha\beta}^\alpha \frac{1}{\sqrt{|g|}} J_A^\beta$$

– ковариантная производная от вектора тока, и мы воспользовались формулой для дивергенции (1.114).

Рассмотрим действие (4.1) в пространстве Минковского  $\mathbb{R}^{1,n-1}$ . Пусть  $(x^\alpha) = (x^0, \mathbf{x})$  – декартова система координат, и все поля достаточно быстро убывают на пространственной бесконечности:

$$\lim_{|\mathbf{x}| \rightarrow \infty} \varphi^a = 0$$

для всех моментов времени. Тогда, интегрируя уравнение (4.20) по области пространства Минковского, которая ограничена двумя пространственноподобными сечениями  $x_1^0 = \text{const}$  и  $x_2^0 = \text{const}$ , получим закон сохранения

$$Q_A = \int_{\mathbb{S}} d\mathbf{x} J_A^0 = \text{const}, \quad (4.22)$$

где  $\mathbb{S}$  – произвольное сечение  $x^0 = \text{const}$ . Это означает, что каждому преобразованию симметрии соответствует закон сохранения: для любого решения уравнений движения, достаточно быстро убывающего на пространственной бесконечности, интеграл (4.22) не зависит от времени. Интеграл (4.22) называется *сохраняющимся зарядом*, соответствующим току  $J_A^\alpha$ . Если для уравнений движения поставлена задача Коши, то значение заряда  $Q_A$  однозначно определяется начальными условиями.

### 4.2.1 Тензор энергии-импульса

Предположим, что некоторая модель описывается набором полей  $\varphi^a$  в пространстве Минковского  $\mathbb{R}^{1,n-1}$  с декартовыми координатами  $x^\alpha$ . При этом метрика  $\eta_{\alpha\beta} := \text{diag}(+ - \dots -)$  является заданной функцией в действии, по которой варьирование не проводится. Пусть действие инвариантно относительно трансляций

$$\delta x^\alpha = \epsilon^\alpha = \text{const}, \quad (4.23)$$

$$\bar{\delta} \varphi^a = 0. \quad (4.24)$$

Для этого достаточно, чтобы лагранжиан модели  $L(\varphi, \partial\varphi)$  не зависел явно от координат. Для трансляций индекс  $A$  в (4.13) пробегает те же значения, что и  $\alpha$ , генератор трансляций совпадает с символом Кронекера,  $R_A^\alpha \mapsto \delta_\beta^\alpha$ , и  $R_A^a = 0$ . В этом случае выражение для тока (4.19) имеет вид

$$T_\alpha{}^\beta = \partial_\alpha \varphi^a \frac{\partial L}{\partial (\partial_\beta \varphi^a)} - \delta_\alpha^\beta L. \quad (4.25)$$

Полученное выражение называется *тензором энергии-импульса* полей  $\varphi^a$ . В силу первой теоремы Нетер он сохраняется:

$$\partial_\beta T_\alpha{}^\beta = 0. \quad (4.26)$$

Тензор энергии-импульса (4.25) будем называть *каноническим*.

Если лагранжиан модели является скалярным полем (функцией) относительно глобальных преобразований Лоренца  $\mathbb{O}(1, n-1)$ , то выражение (4.25) представляет собой тензор второго ранга типа  $(1, 1)$ . Ясно, что выражение для  $T_0^0$  всегда совпадает с плотностью гамильтониана для полей  $\varphi^a$ , и это оправдывает название “канонический”.

**Замечание.** В общей теории относительности, основанной на псевдоримановой геометрии, постулируется, что тензор Эйнштейна пропорционален тензору энергии-импульса материи. При этом тензор энергии-импульса материи (5.10) определяется, как вариационная производная действия для полей материи по метрике. При таком определении тензор энергии-импульса всегда симметричен. Для скалярного поля вариационная производная действия по метрике является ковариантным обобщением тензора (4.25). В других случаях связь двух определений сложнее и будет обсуждаться в каждом конкретном случае.  $\square$

Вообще говоря, тензор энергии-импульса с опущенным верхним индексом  $T_{\alpha\beta}$  не является симметричным. Если это так, то в ряде случаев можно провести симметризацию, добавив соответствующую дивергенцию (4.21). Однако это не всегда возможно. Действительно, после добавления дивергенции получим новый тензор энергии-импульса

$$T'_{\alpha\beta} = T_{\alpha\beta} + \partial^\gamma f_{\alpha\gamma\beta}.$$

Из условия симметрии  $T'_{\alpha\beta} - T'_{\beta\alpha} = 0$  следуют уравнения на неизвестную функцию  $f_{[\alpha\gamma\beta]} = 0$ , в которые входят только полностью антисимметричные компоненты:

$$\partial^\gamma f_{[\alpha\gamma\beta]} = -\frac{1}{2}(T_{\alpha\beta} - T_{\beta\alpha}).$$

Таким образом, мы имеем  $n(n-1)/2$  дифференциальных уравнений на  $n(n-1)(n-2)/3!$  неизвестных компонент. При  $n = 4$  возникает 6 уравнений на 4 неизвестные функции, которые не всегда имеют решения.

Введем стандартные 3-формы на координатных трехмерных гиперповерхностях в четырехмерном пространстве-времени  $\mathbb{R}^{1,3}$ :

$$ds_\alpha = \frac{1}{6} \varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} dx^\beta \wedge dx^\gamma \wedge dx^\delta. \quad (4.27)$$

Определим сохраняющийся во времени *ковектор энергии-импульса* с помощью интеграла

$$P_\alpha := \int_{x^0 = \text{const}} ds_\beta T_\alpha{}^\beta, \quad (4.28)$$

где по индексу  $\beta$  производится суммирование. Полученное выражение (4.28), по построению, является ковектором относительно глобальных лоренцевых вращений. В предположении, что все поля достаточно быстро убывают на пространственной бесконечности ковектор энергии-импульса определяется одним интегралом по пространству,

$$P_\alpha = \int_{x^0 = \text{const}} d\mathbf{x} T_\alpha{}^0. \quad (4.29)$$

Выражение для нулевой компоненты  $P_0$  совпадает с гамильтонианом системы полей  $\varphi^a$ , т.е. равно сохраняющейся полной энергии. Это оправдывает название ковектора энергии-импульса. Пространственные компоненты тензора энергии-импульса

$$T_i{}^0 = \frac{\partial L}{\partial(\partial_0 \varphi^a)} \partial_i \varphi^a, \quad i = 1, \dots, n-1, \quad (4.30)$$

определяют сохраняющийся полный импульс системы полей  $\varphi^a$ :

$$P_i = \int_{x^0 = \text{const}} d\mathbf{x} T_i{}^0. \quad (4.31)$$

Полная энергия системы  $P_0$  и каждая компонента полного импульса  $P_i$  относительно данной декартовой системы сохраняются во времени. В другой декартовой системе координат они тоже сохраняются, но имеют другие численные значения.

### 4.2.2 Тензор момента количества движения

Пусть действие  $S[\varphi]$  в пространстве Минковского  $\mathbb{R}^{1,n-1}$  инвариантно относительно лоренцевых вращений. Мы предполагаем, что набор полей  $\varphi^a$  преобразуется по некоторому, возможно, приводимому представлению группы Лоренца  $\mathbb{SO}_0(1, n-1)$ . Обозначим представление генераторов группы для полей через  $L_{\gamma\delta}{}^a = -L_{\delta\gamma}{}^a$ . Тогда в инфинитезимальной форме лоренцевы вращения примут вид

$$\delta x^\alpha = -x^\beta \omega_\beta{}^\alpha = \sum_{\gamma < \delta} \omega^{\gamma\delta} (x_\delta \delta_\gamma^\alpha - x_\gamma \delta_\delta^\alpha), \quad (4.32)$$

$$\bar{\delta} \varphi^a = \sum_{\gamma < \delta} \omega^{\gamma\delta} L_{\gamma\delta}{}^a \varphi^b, \quad (4.33)$$

где  $\omega^{\gamma\delta} = -\omega^{\delta\gamma}$  – параметры преобразований, которые предполагаются постоянными. Для инвариантности действия достаточно, чтобы лагранжиан был скалярным полем (функцией) от координат, полей и их производных. Для лоренцевых вращений индекс  $A \mapsto (\alpha\beta) = -(\beta\alpha)$  представляет собой пару антисимметричных векторных индексов.

Выражение для тока (4.19) приводит к следующему тензору *момента количества движения*, который мы представим в виде суммы двух слагаемых:

$$\begin{aligned} J_{\gamma\delta}{}^\alpha &:= -\frac{\partial L}{\partial(\partial_\alpha \varphi^a)} \left( L_{\gamma\delta}{}^a \varphi^b - (x_\delta \delta_\gamma^\beta - x_\gamma \delta_\delta^\beta) \partial_\beta \varphi^a \right) - L(x_\delta \delta_\gamma^\alpha - x_\gamma \delta_\delta^\alpha) = \\ &= M_{\gamma\delta}{}^\alpha + S_{\gamma\delta}{}^\alpha, \end{aligned} \quad (4.34)$$

где введен *орбитальный* и *спиновый* моменты, соответственно,

$$M_{\alpha\beta}{}^\gamma := x_\beta T_\alpha{}^\gamma - x_\alpha T_\beta{}^\gamma, \quad (4.35)$$

$$S_{\alpha\beta}{}^\gamma := -\frac{\partial L}{\partial(\partial_\gamma \varphi^a)} L_{\alpha\beta}{}^a \varphi^b. \quad (4.36)$$

Здесь  $T_\alpha{}^\beta$  – канонический тензор энергии-импульса (4.25). Оба объекта являются тензорами третьего ранга относительно преобразований Лоренца. Обратим внимание, что орбитальный момент (4.35) не инвариантен относительно трансляций, т.к. явно зависит от координат. В противоположность этому спиновый момент инвариантен относительно трансляций.

Если все поля  $\varphi^a$  являются скалярами относительно лоренцевых вращений, то  $L_{\alpha\beta}{}^a = 0$  и спиновый момент равен нулю,  $S_{\alpha\beta}{}^\gamma = 0$ .

Допустим, что действие для некоторой системы полей инвариантно относительно трансляций и лоренцевых вращений (группы Пуанкаре), и спиновый момент равен нулю  $S_{\alpha\beta}{}^\gamma = 0$ , как для скалярных полей. Тогда закон сохранения момента количества движения принимает вид

$$\partial_\gamma M_{\alpha\beta}{}^\gamma = T_{\alpha\beta} - T_{\beta\alpha} + x_\beta \partial_\gamma T_\alpha{}^\gamma - x_\alpha \partial_\gamma T_\beta{}^\gamma.$$

С учетом закона сохранения тензора энергии-импульса (4.26) отсюда вытекает, что для такой системы ковариантный тензор энергии-импульса симметричен:

$$T_{\alpha\beta} = T_{\beta\alpha}. \quad (4.37)$$

Так же, как и для канонического тензора энергии-импульса, для тензора момента количества движения можно ввести полный момент системы. Для полей, достаточно быстро убывающих на пространственной бесконечности, он равен интегралу по пространству:

$$J_{\alpha\beta} := \int_{x^0 = \text{const}} d\mathbf{x} J_{\alpha\beta}^0. \quad (4.38)$$

Полный момент количества движения является антисимметричным тензором второго ранга относительно преобразований Лоренца.

**Замечание.** Требование инвариантности моделей математической физики относительно преобразований группы Пуанкаре имеет глубокий физический смысл и составляет основное содержание специальной теории относительности. Инвариантность действия относительно трансляций означает однородность пространства-времени. То есть все точки пространства-времени равноправны, и законы природы имеют одинаковый вид в декартовых координатах с произвольно выбранным началом. Инвариантность относительно преобразований Лоренца означает изотропность пространства-времени. То есть равноправие всех направлений и одинаковый вид законов природы в декартовых координатах с произвольной ориентацией осей. Законы сохранения энергии-импульса и момента количества движения к настоящему времени нашли многочисленные экспериментальные подтверждения в различных областях физики. Поэтому инвариантность фундаментальных моделей математической физики относительно действия группы Пуанкаре следует считать экспериментально установленным фактом.

Помимо этого требование инвариантности функционала действия относительно преобразований группы Пуанкаре в квантовой теории поля означает, что все элементарные частицы должны описываться полями, принадлежащими одному из неприводимых представлений группы Пуанкаре, которые характеризуются массой и спином. Использование этих понятий в экспериментальной физике элементарных частиц также чрезвычайно плодотворно. Это также можно рассматривать, как экспериментальное подтверждение инвариантности законов природы относительно преобразований группы Пуанкаре.  $\square$

## 4.3 Вторая теорема Нетер

Рассмотрим действие (4.1), которое инвариантно относительно преобразований (4.11)–(4.14) с локальными параметрами  $\epsilon^A(x)$ , зависящим от точек пространства-времени. Мы допускаем, что эти преобразования могут зависеть от частных производных  $\partial_\alpha \epsilon^A$  первого и более высокого порядка. Чтобы упростить формулы будем использовать обозначения Девитта [?], т.е. суммирование по индексу  $A$  в формулах (4.11), (4.12) подразумевает интегрирование, а генераторы локальных преобразований  $R_A^\alpha$  и  $R_A^\alpha$  рассматриваются, как двухточечные функции, содержащие  $\delta$ -функции и (или) их производные.

**Пример 4.3.1.** Калибровочное преобразование в электродинамике с параметром  $\epsilon(x)$

$$\delta A_\alpha = \partial_\alpha \epsilon$$

будем записывать в виде

$$\delta A_\alpha = \epsilon R_\alpha = \partial_\alpha \int dx' \epsilon(x') \delta(x' - x), \quad (4.39)$$

где

$$R_\alpha(x', x) := \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \delta(x' - x). \quad \square \quad (4.40)$$

**Пример 4.3.2.** Бесконечно малые общие преобразования координат для электромагнитного поля (1.156) можно записать в виде

$$\delta x^\alpha = \epsilon^\alpha = \epsilon^\beta R_\beta{}^\alpha, \quad (4.41)$$

$$\delta A_\alpha = -\partial_\alpha \epsilon^\beta A_\beta - \epsilon^\beta \partial_\beta A_\alpha = \epsilon^\beta N_{\beta\alpha}, \quad (4.42)$$

где

$$R_\beta{}^\alpha := \delta_\beta^\alpha \delta(x' - x), \quad (4.43)$$

$$N_{\beta\alpha} := F_{\alpha\beta}(x') \delta(x' - x) - A_\beta(x') \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \delta(x' - x). \quad \square \quad (4.44)$$

**Определение.** Преобразования полей (4.14) с локальными параметрами  $\epsilon^\Lambda(x)$  называются *калибровочными*.  $\square$

Рассмотрим одну из вариационных задач. Будем считать, что параметры  $\epsilon^\Lambda$  и их производные равны нулю на границе области. Тогда инвариантность действия относительно калибровочных преобразований можно записать в виде

$$\delta S = \int dx \delta \varphi^a S_{,a} = \int dx \epsilon^\Lambda (R_\Lambda{}^a - R_\Lambda{}^\alpha \partial_\alpha \varphi^a) S_{,a} = 0. \quad (4.45)$$

При этом были отброшены все граничные слагаемые. Отсюда следует

**Теорема 4.3.1 (Вторая теорема Нетер).** Если функционал действия (4.1) инвариантен относительно калибровочных преобразований, которые параметризуются  $K$  произвольными функциями  $\epsilon^\Lambda(x)$ ,  $\Lambda = 1, \dots, K$ , то уравнения Эйлера–Лагранжа удовлетворяют  $K$  тождествам:

$$(R_\Lambda{}^a - R_\Lambda{}^\alpha \partial_\alpha \varphi^a) S_{,a} = 0, \quad (4.46)$$

которые линейны по  $S_{,a}$ .

**Замечание.** В формулировке теоремы мы отбросили предположение о том, что параметры преобразований и их производные равны нулю на границе. Если это не так, то зависимость уравнений Эйлера–Лагранжа все равно сохранится. В этом случае из требования инвариантности действия появятся дополнительные следствия для граничных условий, которые мы не рассматриваем.  $\square$

Напомним, что в линейном соотношении между уравнениями движения (4.46) суммирование по индексу  $a$  предполагает интегрирование. Отсюда следует, что если калибровочные преобразования зависят от частных производных  $l$ -того порядка от параметра преобразования, то соотношения (4.46) представляют собой систему  $K$  линейных дифференциальных уравнений в частных производных  $l$ -того порядка относительно вариационных производных  $S_{,a}$ .

Вторая теорема Нетер утверждает, что в калибровочных моделях, а также моделях, инвариантных относительно общих преобразований координат, не все уравнения движения являются линейно независимыми. Это указывает на то, что в решениях задачи Коши будет содержаться функциональный произвол, т.к. количества уравнений недостаточно для однозначного определения решений по начальным данным.

Для доказательства теоремы существенно, что параметры преобразований  $\epsilon^A(x)$  является произвольными функциями, т.к. только в этом случае подынтегральное выражение в (4.45) согласно основной лемме вариационного исчисления должно обращаться в нуль.

**Пример 4.3.3.** Проведем аналогию с теорией функций многих переменных. Пусть  $f = f(x)$  – функция  $n$  переменных  $x = (x^\alpha)$ . Аналогом вариационной производной действия в таком случае является обычная частная производная  $\partial_\alpha f$ . Допустим, что  $f$  инвариантна относительно калибровочных преобразований  $\delta x^\alpha = \epsilon X^\alpha$ , где  $\epsilon = \epsilon(x)$  – параметр преобразования и  $X^\alpha$  – векторное поле (генератор калибровочного преобразования), которое предполагается отличным от нуля. Тогда “зависимость уравнений движения” сводится к линейной зависимости частных производных  $X^\alpha \partial_\alpha f = 0$ . Поэтому функция  $f$  постоянна вдоль интегральной кривой  $x(t)$  векторного поля  $X^\alpha$ :

$$f(x(t)) = \text{const}, \quad \dot{x}^\alpha = X^\alpha.$$

Это значит, что локальный экстремум  $\partial_\alpha f = 0$  достигается не в точке, а на интегральной кривой  $x(t)$ .  $\square$

Из второй теоремы Нетер следует, что функционал действия для калибровочных моделей достигает экстремального значения не на отдельных функциях, а на классах функций, связанных между собой калибровочными преобразованиями.

Если некоторая модель инвариантна относительно локальных преобразований, то она, в частности, инвариантна относительно тех же преобразований с постоянными параметрами. Это значит, что токи (4.19) приводят к законам сохранения (4.22) и для локальных преобразований. Поэтому в моделях, инвариантных относительно локальных преобразований можно применить обе теоремы Нетер. При этом первая теорема дает выражения для сохраняющихся токов, а вторая – зависимость уравнений движения. В общем случае это не одно и то же.

**Пример 4.3.4.** Рассмотрим модели математической физики, инвариантные относительно общих преобразований координат. Пусть действие  $S = S(g)$  зависит только от метрики  $g_{\alpha\beta}$ . Обозначим вариационную производную действия следующим образом:

$$\sqrt{|g|}S,^{\alpha\beta} := \frac{\delta S}{\delta g_{\alpha\beta}}. \quad (4.47)$$

Здесь мы явно ввели в качестве множителя определитель репера  $\sqrt{|g|} = \det e_a^{\alpha}$ , поскольку вариационная производная так же, как и лагранжиан, является тензорной плотностью степени  $-1$ . Инвариантность действия относительно общих преобразований координат означает равенство нулю вариации:

$$\delta S = \int dx \sqrt{|g|} S,^{\alpha\beta} \delta g_{\alpha\beta} = 0.$$

Подставляя сюда вариации метрики (1.159) и интегрируя по частям, получим тождества

$$\tilde{\nabla}_\alpha S,^\alpha{}_\beta = 0. \quad (4.48)$$

где  $\tilde{\nabla}_\alpha$  – ковариантная производная со связностью Леви-Чивиты  $\tilde{\Gamma}_{\alpha\beta}^\gamma$ , а подъем и опускание индексов производится с помощью метрики  $g_{\alpha\beta}$ . Таким образом, в моделях, инвариантных относительно общих преобразований координат, уравнения движения удовлетворяют  $n = \dim \mathbb{M}$  линейным дифференциальным тождествам.

В общей теории относительности для действия Гильберта–Эйнштейна справедливо равенство

$$\tilde{\nabla}_\alpha \left( \tilde{R}^\alpha{}_\beta - \frac{1}{2} \delta^\alpha_\beta \tilde{R} \right) = 0. \quad (4.49)$$

Это тождество совпадает со свернутыми тождествами Бианки (1.150).  $\square$

## 4.4 Эффективное действие

При исследовании моделей математической физики, действие которых зависит от нескольких полей, иногда удается решить часть уравнений Эйлера–Лагранжа явно, выразив одни переменные через другие в общем виде. В этом случае вариационную задачу можно свести к новому эффективному действию, зависящему от меньшего числа переменных. В настоящем разделе мы докажем простую теорему, позволяющую строить эффективное действие в случае вариационной задачи с фиксированными граничными условиями. То есть будем пренебрегать всеми граничными слагаемыми. Обобщение на более сложные случаи будет ясно из дальнейшего рассмотрения.

Начнем с простейшего случая. Пусть на ограниченной области  $\mathbb{M} \subset \mathbb{R}^n$  заданы два скалярных поля  $\varphi$  и  $\psi$ . Предположим, что функция  $\psi = \psi(x, \varphi, \partial\varphi, \partial^2\varphi)$  в каждой точке  $x \in \mathbb{M}$  задана как функция  $\varphi$ , ее первых и вторых частных производных:  $\partial_\alpha\varphi$  и  $\partial_\alpha\partial_\beta\varphi$ . Представим значение функции  $\psi(x) := \psi[x, \varphi(x), \partial\varphi(x), \partial^2\varphi(x)]$  в точке  $x \in \mathbb{M}$  в виде функционала, используя  $\delta$ -функцию,

$$\psi(x) = \int_{\mathbb{M}} dy \psi(y) \delta(y - x).$$

Вариация функционала  $\psi(x)$ , вызванная вариацией  $\delta\varphi$ , имеет вид

$$\delta\psi(x) = \int_{\mathbb{M}} dy \left( \frac{\partial\psi}{\partial\varphi} \delta\varphi + \frac{\partial\psi}{\partial(\partial_\alpha\varphi)} \delta(\partial_\alpha\varphi) + \frac{\partial\psi}{\partial(\partial_\alpha\partial_\beta\varphi)} \delta(\partial_\alpha\partial_\beta\varphi) \right) \delta(y - x).$$

Проинтегрировав второе и третье слагаемые по частям, получим выражение для вариационной производной

$$\frac{\delta\psi(x)}{\delta\varphi(y)} = \frac{\partial\psi}{\partial\varphi} \delta(y - x) - \frac{\partial}{\partial y^\alpha} \left( \frac{\partial\psi}{\partial(\partial_\alpha\varphi)} \delta(y - x) \right) + \partial_\alpha\partial_\beta \left( \frac{\partial\psi}{\partial(\partial_\alpha\partial_\beta\varphi)} \delta(y - x) \right), \quad (4.50)$$

где в правой части  $\psi = \psi(y)$  и  $\varphi = \varphi(y)$ .

Теперь обсудим вариационную задачу. Пусть действие  $S[\varphi, \psi]$  зависит от двух функций  $\varphi$  и  $\psi$ . Тогда из принципа наименьшего действия следуют два уравнения Эйлера–Лагранжа:

$$\frac{\delta S}{\delta\varphi} = 0, \quad (4.51)$$

$$\frac{\delta S}{\delta\psi} = 0. \quad (4.52)$$

Допустим, что второе уравнение Эйлера–Лагранжа допускает общее решение для  $\psi$ , как функции от  $\varphi$  и ее производных:

$$\psi = \psi(x, \varphi, \partial\varphi, \partial^2\varphi). \quad (4.53)$$



При этом мы предполагаем, что общее решение не имеет особенностей. Если действие зависит только от самих функций и их первых производных, то в общее решение будут входить производные от  $\varphi$  не выше второго порядка. Поскольку уравнение Эйлера–Лагранжа (4.52) является дифференциальным уравнением в частных производных, то общее решение зависит также от некоторого набора произвольных функций и постоянных. Часть этих произвольных функций и постоянных фиксируется, если это возможно, граничными условиями  $\psi|_{\partial\mathbb{M}} = \psi_0$  и  $\varphi|_{\partial\mathbb{M}} = \varphi_0$ . Используем полученное решение для построения нового *эффективного* действия

$$S_{\text{eff}}[\varphi] := S[\varphi, \psi(\varphi)], \quad (4.54)$$

которое зависит только от одной функции  $\varphi$ . Тогда уравнение Эйлера–Лагранжа для  $\varphi$  связано со старыми уравнениями (4.51), (4.52) простым соотношением

$$\frac{\delta S_{\text{eff}}}{\delta \varphi(x)} = \frac{\delta S}{\delta \varphi(x)} + \frac{\delta S}{\delta \psi(y)} \frac{\delta \psi(y)}{\delta \varphi(x)} \Big|_{\psi=\psi(\varphi)} = 0, \quad (4.55)$$

где во втором слагаемом подразумевается интегрирование по аргументу поля  $\psi(y)$ , которое снимается  $\delta$ -функцией в вариационной производной. Ясно, что второе слагаемое равно нулю, если выполнено уравнение Эйлера–Лагранжа для  $\psi$  (4.52).

Проведенные вычисления остаются в силе и в том случае, когда мы рассматриваем наборы полей  $\varphi = \{\varphi^a\}$ ,  $a = 1, \dots, N$  и  $\psi^A$ ,  $A = 1, \dots, m$ . Отсюда следует

**Теорема 4.4.1.** *Пусть дано действие  $S[\varphi, \psi]$ , зависящее от двух наборов полей  $\varphi$  и  $\psi$ . Тогда множество решений уравнений Эйлера–Лагранжа для вариационной задачи с заданными граничными условиями совпадает с множеством решений уравнений Эйлера–Лагранжа для эффективного действия (4.54), дополненным выражением  $\psi$  через  $\varphi$  (4.53).*

Эта теорема важна, поскольку позволяет строить эффективное действие, которое зависит от меньшего числа полей, подставляя общее решение части системы уравнений Эйлера–Лагранжа непосредственно в исходное действие. Частные решения подставлять в действие, как правило, нельзя, т.к. часть уравнений при этом может быть потеряна.

# Глава 5

## Основы общей теории относительности

В настоящей главе мы приступим к изложению основ общей теории относительности, которая в настоящее время рассматривается в качестве основной модели гравитационных взаимодействий. После вступительного раздела, будут написаны уравнения движения и поставлена одна из основных задач, которая решается в теории гравитации.

### 5.1 Пространство-время, метрика и гравитация

В основе общей теории относительности лежит ряд постулатов. Выделим среди них пять, на наш взгляд, основных.

1. Пространство-время  $\mathbb{M}$ , в котором мы живем, является четырехмерным многообразием.
2. Гравитационное взаимодействие между материальными телами описывается метрикой  $g$  лоренцевой сигнатуры,  $\text{sign } g = (+ - - -)$ , заданной на  $\mathbb{M}$ .
3. Метрика пространства-времени удовлетворяет уравнениям Эйнштейна.
4. Пробная точечная частица, собственным гравитационным полем которой в данной задаче можно пренебречь, под действием только гравитационного поля движется по экстремалиям (геодезическим) пространства-времени  $(\mathbb{M}, g)$ .
5. Пространство-время  $(\mathbb{M}, g)$  должно быть максимально продолжено вдоль экстремалей (геодезических).

Первые два постулата являются “кинематическими”. Из них следует, что в общей теории относительности все законы природы формулируются на четырехмерном псевдоримановом многообразии (*пространстве-времени*)  $(\mathbb{M}, g)$ . Если выбрана некоторая система координат  $x^\alpha$ ,  $\alpha = 0, 1, 2, 3$ , то метрика имеет вид  $g = dx^\alpha \otimes dx^\beta g_{\alpha\beta}$ ,  $\text{sign } g_{\alpha\beta} = (+ - - -)$ . В общем случае, если пространство-время топологически нетривиально, система координат может быть выбрана только локально.

Первые две аксиомы важны, поскольку позволяют описывать окружающий нас мир с помощью некоторого набора полей и формулировать законы природы в виде системы дифференциальных уравнений на  $\mathbb{M}$ . Этот подход оказался самым плодотворным в последние три столетия.

Третья и четвертая аксиома являются “динамическими”. В общей теории относительности постулируется, что метрика на  $\mathbb{M}$  должна удовлетворять уравнениям Эйнштейна (5.1). Тем самым компоненты метрики пространства-времени удовлетворяют некоторой системе уравнений движения, так же как и все другие поля. Это – очень важное отличие общей теории относительности от специальной, где метрика Лоренца  $\eta_{\alpha\beta} := \text{diag}(+ - - -)$  в пространстве Минковского  $\mathbb{R}^{1,3}$  постулирована.

Как мы увидим в дальнейшем, в правой части уравнений Эйнштейна стоит тензор энергии-импульса полей материи. Выбор полей материи зависит от рассматриваемой модели. Это может быть, например, сплошная среда, точечные массивные частицы, электромагнитное поле или что то еще. Возможны также произвольные комбинации полей материи.

Сама по себе система уравнений Эйнштейна не полна. Если мы выбрали какой-либо набор полей материи, то уравнения Эйнштейна необходимо дополнить уравнениями движения полей материи. Вид дополнительных уравнений зависит от рассматриваемой задачи.

Четвертый постулат говорит о следующем. Предположим, что мы выбрали некоторый набор полей материи, записали и решили полную систему уравнений для метрики и полей материи. В результате мы получим псевдориманово многообразие  $(\mathbb{M}, g)$ , на котором заданы также поля материи. Теперь допустим, что к нашей системе добавлена точечная массивная частица, масса которой настолько мала, что она не влияет на решение уравнений Эйнштейна. То есть мы пренебрегаем собственным гравитационным полем частицы. Такую частицу назовем *пробной*. Тогда возникает вопрос, по какой траектории будет двигаться пробная частица под действием только гравитационных сил? Ответ на этот вопрос дает четвертый постулат: пробная частица будет двигаться по  $\mathbb{M}$  вдоль экстремалей (геодезических), определяемых метрикой  $g$ . Мы также предполагаем, что безмассовые частицы (например, фотоны) также распространяются вдоль светоподобных (нулевых) экстремалей (геодезических).

На четвертой аксиоме основано экспериментальное подтверждение общей теории относительности. Два классических теста: смещение перигелия Меркурия и отклонение лучей света в поле тяготения основаны на анализе геодезических для решения Шварцшильда, о котором речь пойдет позже. Третий классический тест – красное смещение частоты электромагнитного излучения – это следствие второй аксиомы.

Обсудим пятую аксиому. В общем случае глобальная структура (топология) пространства-времени  $\mathbb{M}$  может быть нетривиальной и отличаться от тривиальной топологии пространства Минковского. Поскольку глобально структура  $\mathbb{M}$  не фиксирована, то в моделях гравитации вводится новое требование. Пространство-время, по определению, должно быть максимально продолжено вдоль геодезических (экстремалей). Это значит, что любая геодезическая в пространстве-времени может быть либо продолжена до бесконечного значения канонического параметра в обе стороны, либо при конечном значении канонического параметра она попадет в сингулярную точку, где какой-либо из геометрических инвариантов обращается в бесконечность. Поскольку канонический параметр вдоль экстремалей определен с точностью до линейных преобразований (см., главу 2), то данное требование инвариантно, т.е. не зависит от выбора системы координат.

**Замечание.** Требование максимального продолжения пространства-времени вдоль геодезических нельзя заменить на более жесткое требование геодезической полноты, т.к. многие важные точные решения уравнений Эйнштейна не являются геодезически полными. Например, для решений, описывающих черные дыры, времениподоб-

ные геодезические линии достигают сингулярного края (черной дыры), на котором квадрат тензора кривизны обращается в бесконечность при конечном значении канонического параметра (собственного времени).  $\square$

Приведенные аксиомы выделены, потому что лежат в основе любой модели, построенной в рамках общей теории относительности. Их недостаточно для построения конкретной модели гравитации, т.к. необходимо выбрать поля материи и дополнить уравнения Эйнштейна. При этом используются дополнительные аксиомы, которые мы не выделяем, поскольку их столько же, сколько и моделей.

Теперь скажем несколько слов о гравитационном взаимодействии. Для описания движения планет в солнечной системе с хорошей точностью используется механика Ньютона и закон всемирного тяготения. Мы говорим, что между планетами действуют гравитационные силы, которые определяют их движение. При этом движение происходит в плоском трехмерном евклидовом пространстве  $\mathbb{R}^3$ , а время играет роль параметра. Основное свойство гравитационного взаимодействия заключается в том, что движение пробной частицы, при заданных начальных условиях, не зависит от ее массы.

**Пример 5.1.1.** Ускорение свободного падения на Земле не зависит от массы падающего тела. Это утверждение в настоящее время экспериментально проверено с высокой степенью точности.  $\square$

Независимость ускорения от массы частицы означает, что при одних и тех же начальных условиях траектории и мировые линии пробных частиц разной массы совпадают.

**Замечание.** Для сравнения, в электродинамике траектория заряженной частицы зависит от ее заряда. Если электромагнитное поле задано, то траектория частицы однозначно определяется массой, зарядом и начальными условиями.  $\square$

Рассмотрим движение пробной частицы в специальной теории относительности в инерциальной системе отсчета. По определению, если гравитационное поле отсутствует и на частицу не действуют никакие другие силы, то она движется равномерно и прямолинейно (первый закон Ньютона). Теперь рассмотрим движение той же частицы, но в неинерциальной системе отсчета, которая движется с постоянным ускорением относительно инерциальной системы отсчета. В этой системе координат свободная частица движется с ускорением и наблюдатель может сказать (если не наблюдает за другими телами), что его система инерциальна, а частица движется в постоянном и однородном гравитационном поле, которое и вызывает ускорение. При этом ускорение не зависит от массы частицы и определяется только неинерциальной системой координат. Поэтому часто формулируют

**Принцип эквивалентности.** Все физические процессы неразличимы в равноускоренной системе отсчета и в системе координат, находящейся в однородном гравитационном поле.  $\square$

Для однородного гравитационного поля это так, поскольку можно перейти в покоящуюся систему координат. Однако, если гравитационное поле не однородно и тензор кривизны отличен от нуля, то не существует такой системы координат, где гравитационное поле отсутствует.

В инерциальной (декартовой) системе координат в пространстве Минковского метрика диагональна и имеет постоянные компоненты,  $\eta_{\alpha\beta} := \text{diag}(+ - - -)$ . В такой системе координат все экстремали и только они являются прямыми линиями.

Поэтому можно сказать, что свободная пробная частица движется вдоль одной из экстремалей пространства Минковского. Если перейти в неинерциальную (криволинейную) систему координат, то в общем случае метрика перестанет быть диагональной, и ее компоненты станут зависеть от координат точки пространства-времени. В этой системе координат траектория свободной частицы уже не будет выглядеть прямолинейной, а движение – равномерным. Тем не менее траектория, конечно, будет оставаться экстремалью пространства Минковского, т.к. понятие экстремали инвариантно и не зависит от выбора системы координат.

Таким образом, утверждение о том, что свободная пробная частица движется в пространстве Минковского вдоль одной из экстремалей инвариантно относительно выбора системы координат и лежит в основе перехода от механики Ньютона к общей теории относительности. Как уже было сказано, в общей теории относительности мы предполагаем, что пространство-время представляет собой четырехмерное многообразие  $M$ , на котором задана метрика лоренцевой сигнатуры. Мы постулируем, что любая пробная частица движется вдоль одной из экстремалей пространства-времени. Этот постулат согласуется с упомянутыми выше свойствами гравитационного взаимодействия: мировая линия пробной частицы не зависит от ее массы. При этом принцип эквивалентности является лишь наводящим соображением о том, что метрика с нетривиальными компонентами описывает гравитационное взаимодействие.

Тем самым метрика пространства-времени в общей теории относительности играет выделенную роль. Мы считаем, что метрика описывает гравитационные взаимодействия материальных тел и излучения. А именно, если частица движется в плоском пространстве-времени, которое изометрично пространству Минковского  $\mathbb{R}^{1,3}$  с метрикой Лоренца, то на нее не действуют гравитационные силы. В этом случае частица в инерциальной системе координат движется равномерно и прямолинейно. Если гравитационное поле нетривиально, то частицы (массовые и безмассовые) движутся по экстремальям в искривленном пространстве-времени, т.е. по многообразию  $M$  с метрикой  $g$  и связностью Леви–Чивиты  $\Gamma$ , для которой тензор кривизны отличен от нуля. В этом случае отсутствует понятие инерциальной системы отсчета, а экстремали отличаются от прямых линий.

Поскольку в пространстве-времени  $M$  задана метрика, то она однозначно определяет связность Леви–Чивиты или символы Кристоффеля. Это позволяет использовать аппарат ковариантного дифференцирования для построения инвариантов и записи ковариантных уравнений движения. Введение связности Леви–Чивиты на многообразии  $M$  является постулатом общей теории относительности. То есть в теории тяготения Эйнштейна мы постулируем, что кручение и неметричность аффинной связности тождественно равны нулю.

В настоящее время теория тяготения Эйнштейна имеет много обобщений. Большой класс таких обобщений представляют собой модели, в которых на многообразии  $M$  помимо метрики задается также независимая аффинная связность  $\Gamma$  с нетривиальным кручением  $T$  и неметричностью  $Q$ . Эти обобщения естественны с геометрической точки зрения, т.к. метрика и аффинная связность являются совершенно независимыми геометрическими объектами. В общем случае, даже если ограничиться инвариантными лагранжианами, приводящими к уравнениям движения второго порядка, существует очень много возможностей для построения соответствующих моделей гравитации, которые в настоящее время не исследованы в полной мере.

Считается, что общая теория относительности согласуется со всеми наблюдательными данными. Однако, поскольку мы не знаем экспериментальных следствий упомянутых выше геометрических обобщений теории тяготения, говорить о том, что

они противоречат экспериментальным данным нельзя. Различные геометрические обобщения теории тяготения Эйнштейна представляют самостоятельный математический интерес и могут быть полезны при построении квантовой теории гравитации и единых моделей. В современной математической физике такие модели привлекают исследователей постоянно со времен создания общей теории относительности. Достаточно отметить, что геометрическими обобщениями общей теории относительности занимались А. Эйнштейн, Г. Вейль, Э. Шредингер и многие другие выдающиеся физики.

## 5.2 О постановке задач в теории гравитации

Отметим специфику задач, возникающих при рассмотрении произвольного функционала действия, инвариантного относительно общих преобразований координат и содержащего метрику. Уравнения Эйлера–Лагранжа записываются и решаются в произвольной, но фиксированной системе координат, т.е. локальны. Допустим, что мы поставили краевую задачу и нашли какое-то решение уравнений Эйлера–Лагранжа во всем  $\mathbb{R}^n$  с заданными граничными условиями. Это решение может оказаться геодезически неполным. Поскольку исходное действие инвариантно относительно общих преобразований координат, то без потери общности можно отобразить все  $\mathbb{R}^n$ , и тем самым найденное решение, на ограниченную область, например, в открытый шар конечного радиуса. В связи с этим возникает вопрос нельзя ли найденное решение продолжить, т.е. существует ли решение в большей области, сужение которого совпадает с уже найденным решением в шаре? Для ответа на этот вопрос необходимо инвариантное определение глобальности решения, которое дается через полноту геодезических и экстремалей.

**Определение.** Назовем многообразие  $M$  с заданной аффинной геометрией, т.е. тройку  $(M, g, \Gamma)$ , *полным*, если любую геодезическую и экстремаль в  $M$  можно продолжить до бесконечного значения канонического параметра в обе стороны. На практике часто локальное решение уравнений движения нельзя продолжить до полного решения, поскольку возможно появление сингулярностей. Назовем точку многообразия  $M$  *сингулярной*, если в этой точке по крайней мере одно скалярное поле, построенное из метрики и (или) аффинной связности, включая их производные обращается в бесконечность.  $\square$

В этом определении важно, чтобы в сингулярной точке именно скалярная комбинация геометрических объектов обращалась в бесконечность, поскольку наряду с истинными сингулярностями могут существовать координатные сингулярности, связанные с неудачным выбором системы координат. Например, хорошо известна координатная особенность метрики на горизонте событий для решения Шварцшильда в координатах Шварцшильда, от которой можно избавиться, перейдя, например, к системе координат Эддингтона–Финкельштейна или Крускала–Секереша (см. главу 7). Простейшими функциями, определяющими положение сингулярностей являются скалярная кривизна и квадрат тензора кручения, имеющие одинаковую размерность. Примером истинной сингулярности может служить черная дыра в решении Шварцшильда, в которой квадрат тензора кривизны обращается в бесконечность.

В связи с возможным существованием сингулярностей оказывается полезным понятие максимально продолженного многообразия.

**Определение.** Многообразие с заданной аффинной геометрией назовем *максимально продолженным*, если любую геодезическую и экстремаль можно либо продолжить до бесконечного значения канонического параметра, либо они продолжаются до сингулярной точки при конечном значении канонического параметра. Соответствующую тройку  $(\mathbb{M}, g, \Gamma)$  назовем *глобальным решением* в теории гравитации.  $\square$

С физической точки зрения требование полноты или максимального продолжения пространства-времени  $\mathbb{M}$  является естественным. Действительно, если рассмотреть движение точечной частицы в сопутствующей системе отсчета, в которой время является каноническим параметром, то естественно предположить, что эволюция продолжается-либо бесконечно долго, либо обрывается в сингулярной точке.

Отметим, что полное многообразие не может иметь края. При этом существуют две возможности: либо пространство-время  $\mathbb{M}$  некомпактно, либо компактно и без края. В первом случае геометрические инварианты в бесконечности могут стремиться как к конечным, так и бесконечным значениям. В космологии принята следующая терминология. Если все пространственные сечения пространства-времени  $\mathbb{M}$  некомпактны, то вселенная *бесконечна*. Если все пространственные сечения компактны и без края, то говорят, что вселенная *замкнута*. При наличии сингулярностей, соответствующих конечному значению канонического параметра, сингулярные точки образуют край пространства-времени, находящийся на конечном расстоянии (при конечных значениях канонического параметра).

Чтобы найти максимально продолженное решение в общей теории относительности, необходимо пройти несколько этапов: 1) решить уравнения Эйнштейна для метрики в некоторой области; 2) найти и проанализировать полноту всех геодезических; 3) если область, где найдено решение, оказалась неполной, то продолжить решение. Первые два этапа очень сложны, поскольку предполагают решение нелинейных систем дифференциальных уравнений. Последний этап также сложен. Его можно осуществить по крайней мере двумя способами. Либо перейти в новую систему координат, охватывающую большую область, либо найти решение в соседней области, а затем доказать гладкость склейки. Однако общего конструктивного метода продолжения решений в настоящее время не существует. В разделе ?? описан метод конформных блоков построения лоренцевых поверхностей в целом, если метрика допускает один вектор Киллинга.

В общей теории относительности существуют только отдельные примеры максимально продолженных многообразий. Например, расширение Крускала–Секереша решения Шварцшильда, которое будет обсуждаться в главе 7.

### 5.3 Действие Гильберта–Эйнштейна

В общей теории относительности постулируется, что пространство-время является псевдоримановым многообразием  $\mathbb{M}$ ,  $\dim \mathbb{M} = 4$ , с метрикой лоренцевой сигнатуры  $g_{\alpha\beta}$ . При этом считается, что метрика описывает гравитационные взаимодействия. Мы рассмотрим более общий случай произвольной размерности пространства-времени  $n$ , потому что модели гравитации в большем и меньшем числе измерений также важны для приложений.

Мы рассматриваем метрику пространства-времени в качестве одной из полевых переменных и постулируем для нее *уравнения Эйнштейна*:

$$\kappa \left( \tilde{R}_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} \tilde{R} \right) + g_{\alpha\beta} \frac{n-2}{2} \Lambda = -\frac{1}{2} T_{\alpha\beta}. \quad (5.1)$$

В левой части этой системы уравнений для метрики стоит *тензор Эйнштейна*

$$G_{\alpha\beta} := \tilde{R}_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}g_{\alpha\beta}\tilde{R}, \quad (5.2)$$

умноженный на *гравитационную постоянную*  $\kappa$ , и *космологическая постоянная*  $\Lambda \in \mathbb{R}$ . В правой части уравнений Эйнштейна стоит *тензор энергии-импульса материи*  $T_{\alpha\beta}$ . Эти уравнения при  $\Lambda = 0$  и  $n = 4$  были впервые предложены А. Эйнштейном в статье [?].

В дальнейшем, для краткости, мы часто будем говорить “тензор энергии-импульса материи”, подразумевая под этим также возможное излучение.

Тензор энергии-импульса материи зависит от рассматриваемой модели, и в общем случае уравнения Эйнштейна необходимо дополнить уравнениями для полей материи. То есть сама по себе система уравнений Эйнштейна (5.1) не полна.

**Замечание.** В уравнении (5.1) мы оставили знак тильды, чтобы подчеркнуть, что тензор кривизны строится только по метрике при нулевом кручении и неметричности. То есть метрика  $g$  на  $\mathbb{M}$  определяет связность Леви–Чивиты (символы Кристоффеля), которые в свою очередь задают тензор кривизны.  $\square$

Вклад космологической постоянной в уравнения Эйнштейна (5.1) можно перенести в правую часть

$$\kappa \left( \tilde{R}_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}g_{\alpha\beta}\tilde{R} \right) = -\frac{1}{2}(T_{\alpha\beta} + T_{\Lambda\alpha\beta}),$$

где

$$T_{\Lambda\alpha\beta} := (n-2)\Lambda g_{\alpha\beta}$$

и рассматривать его как дополнение к тензору энергии-импульса материи  $T_{\alpha\beta}$ . Сравнивая это выражение с тензором энергии-импульса непрерывной среды (5.68), который будет рассмотрен позже, его можно интерпретировать, как вклад среды с постоянными давлением  $\mathcal{P} = -(n-2)\Lambda$  и плотностью энергии противоположного знака  $\mathcal{E} = -\mathcal{P} = (n-2)\Lambda$ . Разность знаков давления и плотности энергии не позволяет интерпретировать космологическую постоянную, как распределение некоторой обычной материи. В космологических моделях вселенной ее часто связывают с наличием темной энергии (см. раздел 8.1.3).

Обсудим некоторые общие свойства уравнений Эйнштейна и введем терминологию.

Уравнения Эйнштейна при заданном тензоре энергии-импульса представляют собой систему из  $n(n+1)/2$ , где  $n$  – размерность пространства-времени, нелинейных уравнений в частных производных второго порядка для метрики. В частности, в четырехмерном пространстве-времени мы имеем десять уравнений. Уравнения Эйнштейна чрезвычайно сложны, и в настоящее время известны лишь отдельные классы решений, часть из которых будет обсуждаться в дальнейшем.

Уравнения Эйнштейна можно переписать в другом виде. След равенства (5.1) эквивалентен уравнению

$$\kappa\tilde{R} = n\Lambda + \frac{1}{n-2}T_{\text{м}},$$

где  $T_{\text{м}} := T_{\alpha\alpha}$  – след тензора энергии-импульса материи. Исключив скалярную кривизну из (5.1) с помощью этого равенства, получим эквивалентную систему уравнений

$$\kappa\tilde{R}_{\alpha\beta} - \Lambda g_{\alpha\beta} = -\frac{1}{2}\rho_{\alpha\beta}. \quad (5.3)$$



где

$$\rho_{\alpha\beta} := T_{\alpha\beta} - \frac{1}{n-2}g_{\alpha\beta}T_M.$$

Пространство-время называется *пустым*, если тензор энергии-импульса материи всюду равен нулю. В этом случае уравнения Эйнштейна (5.3) принимают вид

$$\kappa \tilde{R}_{\alpha\beta} = \Lambda g_{\alpha\beta}. \quad (5.4)$$

Это – *вакуумные уравнения Эйнштейна* с космологической постоянной. Отсюда следует, что скалярная кривизна пустого пространства постоянна:

$$\tilde{R} = \frac{n\Lambda}{\kappa}.$$

**Замечание.** Коэффициент перед космологической постоянной в уравнениях Эйнштейна (5.1) подобран таким образом, чтобы вакуумные уравнения Эйнштейна имели вид (5.4) и не зависели от размерности пространства-времени.  $\square$

**Определение.** Метрика  $g$  на многообразии  $\mathbb{M}$  называется *эйнштейновской*, если ее компоненты удовлетворяют системе уравнений (5.4). В математической литературе уравнения (5.4) обычно рассматривают при  $\kappa = 1$ .  $\square$

При ненулевой космологической постоянной уравнения (5.4) означают, что тензор Риччи пропорционален метрике. Частным случаем таких пространств являются пространства постоянной кривизны. При нулевой космологической постоянной,  $\Lambda = 0$ , пустое пространство является *Риччи плоским*:

$$\tilde{R}_{\alpha\beta} = 0. \quad (5.5)$$

Следовательно, в этом случае скалярная кривизна также равна нулю,  $\tilde{R} = 0$ .

**Пример 5.3.1.** Для метрики Лоренца тензор кривизны равен нулю. Следовательно, пространство Минковского является пространством постоянной – нулевой – кривизны. В частности, оно является Риччи плоским. Ясно, что метрика Лоренца удовлетворяет вакуумным уравнениям Эйнштейна с нулевой космологической постоянной.  $\square$

**Пример 5.3.2.** В дальнейшем мы увидим, что вакуумные уравнения Эйнштейна допускают решения в виде плоских волн (см. раздел 5.8). Для таких решений тензор Риччи равен нулю, но полный тензор кривизны отличен от нуля.  $\square$

В двумерном пространстве-времени полный тензор кривизны однозначно восстанавливается по скалярной кривизне, а в трехмерном – по тензору Риччи и скалярной кривизне. Следовательно, полный тензор кривизны в низших измерениях равен нулю, если выполнено условие (5.5). Это значит, что двумерное и трехмерное Риччи плоское пространство локально является пространством Минковского. То есть может быть либо пространством Минковского, либо цилиндром или тором. В четырех измерениях и выше равенства нулю тензора Риччи недостаточно для обращения в нуль полного тензора кривизны.

Физическая интерпретация уравнений Эйнштейна при нулевой космологической постоянной следующая. В общей теории относительности постулируется, что метрика пространства-времени не является метрикой Лоренца, а находится как решение

уравнений Эйнштейна. Таким образом, пространство-время представляет собой псевдориманово многообразие с метрикой специального вида, удовлетворяющей уравнениям (5.1). Эти пространства называются *пространствами Эйнштейна*. Следующий постулат состоит в том, что пробные частицы под действием гравитационных сил двигаются по экстремалиям в пространстве Эйнштейна. При этом в правой части уравнений Эйнштейна подразумевается тензор энергии-импульса всей остальной материи. При этом мы говорим следующее. Пустое пространство при нулевой космологической постоянной и отсутствии гравитационных волн является пространством Минковского, и точечные частицы двигаются по прямым линиям. Это соответствует отсутствию сил тяготения. При наличии полей материи в уравнениях Эйнштейна появляется нетривиальная правая часть, что приводит к тому, что пространство-время становится нетривиальным псевдоримановым многообразием. В этом пространстве-времени экстремали уже не являются прямыми линиями, что интерпретируется, как наличие сил тяготения. Мы говорим, что пробная частица движется в поле тяготения, созданном остальной материей. При этом закон всемирного тяготения является следствием уравнений Эйнштейна в определенном приближении, которое рассмотрено в разделе 5.7.

Теперь обсудим принцип наименьшего действия для уравнений Эйнштейна. Левую часть уравнений (5.1) можно получить из *действия Гильберта–Эйнштейна* [?, ?]:

$$S_{\text{HE}} = \int_{\mathbb{M}} dx \sqrt{|g|} \left( \kappa \tilde{R} - (n-2)\Lambda \right), \quad (5.6)$$

где интегрирование ведется по всему пространству-времени  $\mathbb{M}$  и варьирование проводится по компонентам метрики. Конечно, мы предполагаем, что интеграл сходится. Это действие было впервые предложено Д. Гильбертом в 1915 году в четырехмерном пространстве-времени. Он предложил действие в более общем виде, включающем также электромагнитное поле [?]. Несколько позже А. Эйнштейн тоже рассмотрел это действие для вывода уравнений общей теории относительности в такой системе координат, где  $\det g_{\alpha\beta} = 1$  [?].

В следующем разделе мы покажем, что вариационная производная действия Гильберта–Эйнштейна по метрике имеет вид

$$\frac{\delta S_{\text{HE}}}{\delta g_{\alpha\beta}} = -\sqrt{|g|}\kappa \left( \tilde{R}^{\alpha\beta} - \frac{1}{2}g^{\alpha\beta}\tilde{R} \right) - \sqrt{|g|}\frac{n-2}{2}\Lambda g^{\alpha\beta}. \quad (5.7)$$

При доказательстве этого равенства были отброшены все граничные вклады, возникающие при интегрировании по частям.

При наличии полей материи чаще удобнее варьировать по обратной метрике, что приводит к изменению знака вариационной производной:

$$\frac{\delta S_{\text{HE}}}{\delta g^{\alpha\beta}} = \sqrt{|g|}\kappa \left( \tilde{R}_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}g_{\alpha\beta}\tilde{R} \right) + \sqrt{|g|}\frac{n-2}{2}\Lambda g_{\alpha\beta}. \quad (5.8)$$

Полное действие для гравитационного поля и полей материи имеет вид суммы

$$S = S_{\text{HE}} + S_{\text{M}}, \quad (5.9)$$

где  $S_{\text{M}}$  – действие для полей материи. Обычно действие для полей материи в теории гравитации получают путем *минимальной подстановки*: выбирают лоренц-инвариантное действие в пространстве Минковского, заменяют лоренцеву метрику на псевдориманову  $\eta_{\alpha\beta} \mapsto g_{\alpha\beta}(x)$ , обычные производные – на ковариантные  $\partial_\alpha \mapsto \tilde{\nabla}_\alpha$ , и

умножают лагранжиан на определитель репера  $\sqrt{|g|}$ , чтобы получить инвариантную меру интегрирования. В результате получим действие для полей материи, инвариантное относительно общих преобразований координат. Сравнивая правую часть уравнений Эйнштейна (5.1) с вариационной производной (5.8), получаем выражение для тензора энергии-импульса материи

$$T_{\alpha\beta} := \frac{2}{\sqrt{|g|}} \frac{\delta S_M}{\delta g^{\alpha\beta}}. \quad (5.10)$$

Эту вариационную производную часто принимают за определение *тензора энергии-импульса* полей материи в общей теории относительности. При таком определении тензор энергии-импульса всегда симметричен. В ряде случаев, например, для скалярного и калибровочного полей, это определение совпадает с ковариантным обобщением канонического тензора энергии-импульса, т.е. получается из выражения (4.25) путем минимальной подстановки. Однако в общем случае это не так, потому что действие для полей материи (например, спинорных полей) не всегда может быть выражено через метрику.

## 5.4 Вариация действия Гильберта–Эйнштейна

Докажем равенство (5.7) в более общем виде, который полезен при рассмотрении моделей, основанных на геометрии Римана–Картана или аффинной геометрии. А именно, рассмотрим инвариантное действие

$$S = \int_{\mathbb{M}} dx L = \int_{\mathbb{M}} dx \sqrt{|g|} \varphi R, \quad (5.11)$$

зависящее от скалярного поля  $\varphi(x) \in \mathcal{C}^2(\mathbb{M})$  и скалярной кривизны  $R(g, \Gamma)$ , построенной по метрике  $g_{\alpha\beta}$  и аффинной связности общего вида  $\Gamma_{\alpha\beta}^\gamma$ . Мы предполагаем, что компоненты метрики и связности являются достаточно гладкими функциями, и интеграл (5.11) сходится. Кроме этого предположим, что всеми граничными слагаемыми, возникающими при интегрировании по частям, можно пренебречь.

Подстановка в действие (5.11) римановой кривизны  $\tilde{R}$ , зависящей только от метрики, приводит к чрезвычайно трудоемкой вариационной задаче. Это связано с тем, что при дифференцировании по частям необходимо дифференцировать также и скалярное поле. Поскольку скалярная кривизна  $\tilde{R}$  содержит вторые производные от метрики, то интегрировать по частям необходимо два раза, и это приводит к большому числу слагаемых. Значительное упрощение вносят последовательные действия. Сначала варьируем по метрике  $g_{\alpha\beta}$  и связности  $\Gamma_{\alpha\beta}^\gamma$ , рассматривая их, как независимые переменные, а затем подставляем вариацию связности, выраженную через вариацию метрики. В общей теории относительности такой подход называется *формализмом первого порядка*.

Начнем с нескольких вспомогательных формул, необходимых в дальнейшем. Варьируя определение обратной метрики,

$$g^{\alpha\beta} g_{\beta\gamma} = \delta_\gamma^\alpha,$$

получаем тождество

$$\delta g^{\alpha\beta} g_{\beta\gamma} + g^{\alpha\beta} \delta g_{\beta\gamma} = 0.$$

Отсюда следует связь между вариацией самой метрики и ее обратной:

$$\delta g^{\alpha\beta} = -g^{\alpha\gamma} g^{\beta\delta} \delta g_{\gamma\delta}. \quad (5.12)$$

Из теории матриц известно, что для произвольной квадратной обратимой матрицы  $A = (A_{\alpha\beta})$  справедливо тождество

$$\delta \det A = \det A A^{-1\alpha\beta} \delta A_{\alpha\beta}.$$

Отсюда следует, что вариация определителя метрики  $g := \det g_{\alpha\beta}$  равна

$$\delta g = g g^{\alpha\beta} \delta g_{\alpha\beta} = -g g_{\alpha\beta} \delta g^{\alpha\beta}. \quad (5.13)$$

Эту вариацию мы записали в двух видах, т.к. в приложениях часто бывает удобнее варьировать действие не по самой метрике, а по ее обратной. Наличие квадратного корня в мере объема  $\sqrt{|g|} := \sqrt{|\det g_{\alpha\beta}|}$  приводит к появлению множителя  $1/2$ . Поэтому для ее вариации справедливы равенства

$$\delta \sqrt{|g|} = \frac{1}{2} \sqrt{|g|} g^{\alpha\beta} \delta g_{\alpha\beta} = -\frac{1}{2} \sqrt{|g|} \delta g^{\alpha\beta} g_{\alpha\beta}. \quad (5.14)$$

Приступим к вариации действия (5.11). Вариационная производная по скалярному полю  $\varphi$  очевидна

$$S_{,\varphi} := \frac{\delta S}{\delta \varphi} = \sqrt{|g|} R. \quad (5.15)$$

Метрика входит в действие (5.11) дважды: в форму объема и в определение скалярной кривизны (1.130), причем без производных. Поэтому нетрудно проверить, что

$$S^{,\alpha\beta} := \frac{\delta S}{\delta g_{\alpha\beta}} = -\sqrt{|g|} \varphi \left( R^{\alpha\beta} - \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} R \right). \quad (5.16)$$

Вариация действия по аффинной связности  $\Gamma_{\alpha\beta}^{\gamma}$ , все компоненты которой рассматриваются, как независимые переменные, более трудоемка. Это связано с тем, что приходится интегрировать по частям, т.к. тензор кривизны (1.119) зависит от производных аффинной связности. Прямые вычисления приводят к следующему выражению для вариации лагранжиана после интегрирования по частям

$$\begin{aligned} \delta L = & -\sqrt{|g|} \partial_{\alpha} \varphi g^{\alpha\gamma} \delta \Gamma_{\beta\gamma}^{\beta} + \sqrt{|g|} \partial_{\gamma} \varphi g^{\alpha\beta} \delta \Gamma_{\alpha\beta}^{\gamma} - \sqrt{|g|} \varphi \left( Q_{\alpha}^{\alpha\gamma} - \frac{1}{2} Q^{\gamma} \right) \delta \Gamma_{\beta\gamma}^{\beta} + \\ & + \sqrt{|g|} \varphi \left[ - \left( T_{\delta\gamma}^{\delta} + \frac{1}{2} Q_{\gamma} \right) g^{\alpha\beta} - T_{\gamma}^{\beta\alpha} - T_{\gamma}^{\alpha\beta} + Q_{\gamma}^{\alpha\beta} \right] \delta \Gamma_{\alpha\beta}^{\gamma}, \end{aligned} \quad (5.17)$$

где  $T_{\alpha\beta}^{\gamma}$  и  $Q_{\alpha\beta\gamma}$  – тензоры кручения и неметричности. Для облегчения вычислений следует помнить, что выражение, стоящее перед вариацией связности, должно быть тензорным полем. Это поможет правильно сгруппировать слагаемые. Заметим также, что выражение, стоящее в квадратных скобках, симметрично по индексам  $\alpha$  и  $\beta$ .

Теперь вычислим очень важную для приложений вариационную производную действия (5.11) по метрике  $g_{\alpha\beta}$  в (псевдо)римановой геометрии. Обозначим соответствующее действие, зависящее только от скалярного поля и метрики, через

$$\tilde{S} = \int_{\mathbb{M}} dx \tilde{L} = \int_{\mathbb{M}} dx \sqrt{|g|} \varphi \tilde{R}. \quad (5.18)$$

Поскольку кручение и неметричность в (псевдо)римановой геометрии равны нулю, то из (5.16) и (5.17) следует, что вариация подынтегрального выражения в действии по метрике равна

$$\delta\tilde{L} = -\sqrt{|g|}\varphi \left( \tilde{R}^{\alpha\beta} - \frac{1}{2}g^{\alpha\beta}\tilde{R} \right) \delta g_{\alpha\beta} - \sqrt{|g|}\partial_\gamma\varphi g^{\gamma\beta}\delta\tilde{\Gamma}_{\alpha\beta}^\alpha + \sqrt{|g|}\partial_\gamma\varphi g^{\alpha\beta}\delta\tilde{\Gamma}_{\alpha\beta}^\gamma.$$

Выразив вариацию связности  $\delta\tilde{\Gamma}_{\alpha\beta}^\gamma$  через вариацию метрики, проинтегрировав по частям и приведя подобные члены, получим окончательное выражение для вариационной производной

$$\tilde{S},^{\alpha\beta} := \frac{\delta\tilde{S}}{\delta g_{\alpha\beta}} = -\sqrt{|g|}\varphi \left( \tilde{R}^{\alpha\beta} - \frac{1}{2}g^{\alpha\beta}\tilde{R} \right) + \sqrt{|g|}(\tilde{\square}\varphi g^{\alpha\beta} - \tilde{\nabla}^\alpha\tilde{\nabla}^\beta\varphi). \quad (5.19)$$

Напомним, что в римановой геометрии ввиду симметрии символов Кристоффеля по нижним индексам вторая ковариантная производная от скалярного поля симметрична:  $\tilde{\nabla}^\alpha\tilde{\nabla}^\beta\varphi = \tilde{\nabla}^\beta\tilde{\nabla}^\alpha\varphi$  (сравните с равенством (1.134)).

Если скалярное поле равно единице,  $\varphi = 1$ , то действие (5.18) совпадает с действием Гильберта–Эйнштейна (5.6) без космологической постоянной, и мы получаем выражение для вариационной производной (5.7).

## 5.5 Зависимость уравнений Эйнштейна

В настоящем разделе мы считаем, что кручение и неметричность равны нулю, а связностью является связность Леви–Чивиты, построенная по заданной метрике.

Важным обстоятельством в общей теории относительности является линейная зависимость уравнений Эйнштейна (5.1). Предположим, что эти уравнения получены вариацией по метрике действия (5.9), которое инвариантно относительно общих преобразований координат. Если действие инвариантно относительно локальных преобразований, то согласно второй теореме Нетер между уравнениями движения существует линейная зависимость (4.46). Рассмотрим эту зависимость в случае общих преобразований координат. Для простоты предположим, что действие полей материи зависит только от некоторого конечного набора скалярных полей  $\varphi^a(x)$ ,  $a = 1, \dots, N$ . При бесконечно малых преобразованиях координат  $x^\alpha \mapsto x^\alpha + \epsilon^\alpha$  с параметром  $\epsilon^\alpha(x)$  метрика и скалярные поля преобразуются по правилам (1.159) и (1.153):

$$\begin{aligned} \delta g_{\alpha\beta} &= -\tilde{\nabla}_\alpha\epsilon_\beta - \tilde{\nabla}_\beta\epsilon_\alpha, \\ \delta\varphi^a &= -\epsilon^\alpha\partial_\alpha\varphi^a, \end{aligned}$$

где  $\epsilon_\alpha := g_{\alpha\beta}\epsilon^\beta$ . Следовательно, инвариантность действия записывается в виде

$$\delta S = \int dx \left( \frac{\delta S}{\delta g_{\alpha\beta}}(-2\tilde{\nabla}_\beta\epsilon_\alpha) + \frac{\delta S}{\delta\varphi^a}(-\epsilon^\alpha\partial_\alpha\varphi^a) \right) = 0.$$

После интегрирования по частям первого слагаемого получаем искомую зависимость уравнений движения

$$2\sqrt{|g|}\tilde{\nabla}_\beta \left( \frac{\delta(S_{\text{HE}} + S_{\text{M}})}{\sqrt{|g|}\delta g_{\alpha\beta}} \right) - \partial_\alpha\varphi^a \frac{\delta S_{\text{M}}}{\delta\varphi^a} = 0,$$

т.к. действие Гильберта–Эйнштейна не зависит от полей материи. Это – тождества, которые выполняются независимо от того удовлетворяют поля уравнениям движения или нет. Поскольку каждое слагаемое в действии инвариантно само по себе, то выполняются два тождества:

$$\tilde{\nabla}_\beta G^{\beta\alpha} = 0, \quad (5.20)$$

$$\sqrt{|g|}\tilde{\nabla}_\beta T_{\text{м}\alpha}^\beta - \frac{\delta S_{\text{м}}}{\delta\varphi^a}\partial_\alpha\varphi^a = 0, \quad (5.21)$$

где мы воспользовались определением тензора энергии-импульса материи (5.10) в общей теории относительности. Первое из этих уравнений представляет собой свернутые тождества Бианки (1.150), а второе – ковариантный “закон сохранения” тензора энергии-импульса материи. Действительно, если выполнены уравнения для полей материи,

$$\frac{\delta S_{\text{м}}}{\delta\varphi^a} = 0,$$

то ковариантная дивергенция тензора энергии-импульса материи обращается в нуль

$$\tilde{\nabla}_\beta T_{\text{м}\alpha}^\beta = 0. \quad (5.22)$$

Нетрудно видеть, что аналогичные выкладки можно проделать для любого набора полей материи. При этом второе слагаемое в (5.21) может усложниться, но оно всегда будет пропорционально уравнениям движения для полей материи. Единственное условие – это инвариантность действия. Таким образом, получаем следующее

**Предложение 5.5.1.** *Если действие полей материи инвариантно относительно общих преобразований координат и поля материи удовлетворяют своим уравнениям Эйлера–Лагранжа, то ковариантная дивергенция тензора энергии-импульса (5.22) равна нулю.*

На формулу (5.22) можно взглянуть с другой точки зрения. Допустим, что нам заданы уравнения Эйнштейна (5.1), а про инвариантное действие, приводящее к этим уравнениям, ничего не известно. Уравнения Эйнштейна – это система дифференциальных уравнений на метрику, и у них есть условия интегрируемости. Чтобы их получить возьмем ковариантную производную от обеих частей уравнений Эйнштейна. Дивергенция тензора Эйнштейна равна нулю (5.20) как следствие тождеств Бианки (1.150). Дивергенция метрики тоже равна нулю, т.к. связность Леви–Чивиты является метрической. Следовательно, ковариантный “закон сохранения” тензора энергии-импульса материи (5.22) является условием интегрируемости системы дифференциальных уравнений Эйнштейна для метрики (5.1). Это важно учитывать в тех случаях, когда тензор энергии-импульса материи получен не из принципа наименьшего действия, а из каких-либо других соображений.

**Пример 5.5.1.** Если в качестве материи рассматривать жидкость или газ (см. раздел 5.9), для которой уравнения движения не следуют из принципа наименьшего действия, то условие (5.22) является независимым уравнением (см. далее раздел 5.9).  $\square$

## 5.6 Точечные частицы в теории гравитации

Пусть задано пространство-время, т.е. многообразие  $\mathbb{M}$  с метрикой  $g$  лоренцевой сигнатуры. Будем считать, что кручение и неметричность на  $\mathbb{M}$  равны нулю, и,

для простоты, не будем помечать это обстоятельство знаком тильды. Размерность пространства-времени пока не фиксируем,  $\dim \mathbb{M} = n \geq 2$ . Точечная частица движется в пространстве-времени  $\mathbb{M}$  по некоторой дифференцируемой времениподобной кривой  $(q^\alpha(\tau)) \in \mathbb{M}$ , где  $\tau \in \mathbb{R}$  – произвольный параметр вдоль этой кривой. Напомним, что кривая называется времениподобной, если вектор скорости кривой,  $u^\alpha := \dot{q}^\alpha := dq^\alpha/d\tau$ , времениподобен:  $u^2 := u^\alpha u^\beta g_{\alpha\beta} > 0$ . Мы считаем, что частица движется в будущее, т.е.  $u^0 > 0$ . Форма кривой определяется рассматриваемой задачей и силами, которые действуют на частицу. В общем случае параметр вдоль кривой произволен, и его выбирают из соображений удобства. Наиболее часто в качестве параметра вдоль траектории частицы выбирают ее длину  $s$ , которая является каноническим параметром. Это всегда возможно, т.к. обыкновенное дифференциальное уравнение  $ds = \sqrt{\dot{q}^\alpha \dot{q}^\beta g_{\alpha\beta}} d\tau$  разрешимо относительно  $s = s(\tau)$ . В дальнейшем точка, как правило, будет обозначать дифференцирование по параметру  $s$ .

**Определение.** Времениподобная дифференцируемая кривая  $(q^\alpha(\tau)) \in \mathbb{M}$ , вдоль которой движется точечная частица, называется *траекторией* или *мировой линией* частицы. Если параметр вдоль траектории частицы совпадает с ее длиной,  $\tau = s$ , то он называется *собственным временем*. Векторное поле

$$u^\alpha := \frac{dq^\alpha}{ds}, \quad (5.23)$$

определенное на траектории частицы, называется *собственной скоростью* частицы. Ковариантная производная от скорости частицы вдоль ее траектории

$$w^\alpha := \frac{dq^\beta}{ds} \nabla_\beta u^\alpha = u^\beta \nabla_\beta u^\alpha \quad (5.24)$$

называется *ускорением* частицы. Частица называется *свободной*, если ее ускорение равно нулю. Производная вдоль траектории частицы

$$v^\alpha := \frac{dq^\alpha}{dq^0} = \frac{\dot{q}^\alpha}{\dot{q}^0} \quad (5.25)$$

называется *наблюдаемой скоростью* частицы в системе координат  $x^\alpha$ .  $\square$

Собственная скорость и ускорение частицы являются  $n$ -мерными векторами, определенными вдоль траектории частицы. Собственное время – это то время, которое показывают часы наблюдателя, движущегося вместе с частицей. Когда наблюдатель движется вместе с частицей, то он может измерить свою скорость относительно системы координат  $x^\alpha$ , это и будут компоненты собственной скорости. Наблюдаемая скорость, как следует из определения, не является векторным полем и зависит от выбора системы координат. Это та скорость, которую измеряет внешний наблюдатель в выбранной системе отсчета.

Равенство нулю ускорения частицы

$$u^\beta \nabla_\beta u^\alpha = 0,$$

определяет экстремали (??). Это значит, что свободные частицы в теории тяготения движутся вдоль экстремалей пространства-времени. Если на частицу действуют негравитационные силы, например, электромагнитные, то в уравнении движения  $mw^\alpha = f^\alpha$ , где  $m = \text{const} > 0$  – масса частицы, появится внешняя сила с компонентами  $f^\alpha$ . В этом случае ее траектория будет отличаться от экстремали.

**Предложение 5.6.1.** Если параметр вдоль мировой линии частицы канонический, то квадрат собственной скорости равен единице,

$$u^2 := u^\alpha u^\beta g_{\alpha\beta} = 1. \quad (5.26)$$

При этом ускорение всегда ортогонально скорости

$$u^\alpha w_\alpha = 0.$$

*Доказательство.* Первое утверждение следует из определения:

$$u^2 = \frac{dx^\alpha}{ds} \frac{dx^\beta}{ds} g_{\alpha\beta} = \frac{ds^2}{ds^2} = 1.$$

Продифференцируем это равенство вдоль траектории

$$u^\beta \nabla_\beta (u^2) = 2u^\beta u^\alpha \nabla_\beta u_\alpha = 2u^\alpha w_\alpha = 0,$$

где мы воспользовались тем, что ковариантная производная от метрики для связности Леви–Чивиты равна нулю. Отсюда вытекает второе утверждение предложения.  $\square$

Наблюдаемая скорость является нековариантным объектом. Из определения следует соотношение между компонентами собственной и наблюдаемой скоростями

$$v^\alpha = \frac{u^\alpha}{\dot{q}^0}. \quad (5.27)$$

Более подробно,

$$v^0 = 1, \quad v^\mu = \frac{dq^\mu}{dq^0}, \quad \mu = 1, \dots, n-1.$$

Возведем равенство  $v^\alpha \dot{q}^0 = u^\alpha$  в квадрат и учтем, что  $u^2 = 1$ . Тогда получим, что компоненты собственной скорости частицы можно записать в виде

$$u^0 := \dot{q}^0 = \frac{1}{\sqrt{v^2}}, \quad u^\mu := \dot{q}^\mu = \frac{v^\mu}{\sqrt{v^2}}, \quad (5.28)$$

где  $v^2 = v^\alpha v^\beta g_{\alpha\beta}$  – квадрат наблюдаемой скорости. Из равенства (5.27) также следует, что  $v^2 > 0$ . Понятие наблюдаемой скорости частицы будет использовано в дальнейшем при определении ультрарелятивистского предела для точечной частицы.

В общем случае, когда на частицу действуют произвольные силы, она может двигаться по любой времениподобной кривой. В моделях гравитации мы предполагаем, что точечная частица, на которую действуют только гравитационные силы, описывается инвариантным действием

$$S_m = -mc \int_p^q ds = -mc \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau \sqrt{\dot{q}^\alpha \dot{q}^\beta g_{\alpha\beta}}, \quad (5.29)$$

где  $m = \text{const} > 0$  – масса частицы,  $c$  – скорость света и интегрирование проводится вдоль времениподобной кривой  $q(\tau)$ ,  $\tau \in \mathbb{R}$ , соединяющей точки  $p := q(\tau_1)$  и  $q := q(\tau_2)$ . Действие (5.29) отличается от длины мировой линии частицы (2.9) постоянным множителем  $-mc$  и, если метрика задана, варьируется только по траектории частицы  $\delta q^\alpha(\tau)$ . В дальнейшем положим  $c = 1$ .



Предположим, что в пространстве-времени находится  $N$  частиц с массами  $m_i$ ,  $i = 1, \dots, N$ , которые взаимодействуют между собой только посредством гравитационных сил. В общей теории относительности суммарное действие гравитационного поля и совокупности точечных частиц равно сумме действия Гильберта–Эйнштейна (5.6) и действий для каждой частицы:

$$S = S_{\text{HE}} + \sum_{i=1}^N S_i = \kappa \int_{\mathbb{M}} dx \sqrt{|g|} R - \sum_i m_i \int_{\tau_{i1}}^{\tau_{i2}} d\tau_i \sqrt{\dot{q}_i^\alpha \dot{q}_i^\beta g_{\alpha\beta}}, \quad (5.30)$$

где мы, для простоты, опустили космологическую постоянную и знак тильды у скалярной кривизны. Во втором слагаемом метрика рассматривается как сложная функция  $g_{\alpha\beta}(\tau_i) = g_{\alpha\beta}(q(\tau_i))$ , и параметры  $\tau_i$  могут быть выбраны произвольно для каждой частицы. Первый интеграл берется по всему пространству-времени, а последующие – в пределах  $\tau_{i1,2}$  (возможно, бесконечных), которые соответствуют пересечению мировых линий частиц с краем пространства-времени  $\partial\mathbb{M}$ , если таковой имеется. Для простоты, предположим, что мировые линии частиц нигде не пересекаются, т.е. частицы не сталкиваются между собой.

В настоящем разделе нас не будут интересовать граничные эффекты. Поэтому пределы интегрирования, для простоты, мы в дальнейшем опустим.

Действие (5.30) инвариантно относительно общих преобразований координат и независимой перепараметризации параметров  $\tau_i$  вдоль каждой траектории. Мы предполагаем, что вдоль каждой траектории параметр совпадает с собственным временем. Более того, поскольку в действие входит сумма интегралов вдоль траекторий, то индекс  $i$  у параметров  $\tau_i$  можно опустить,

$$S = \int dx \sqrt{|g|} \kappa R - \int d\tau \sum_i m_i \sqrt{\dot{q}_i^\alpha \dot{q}_i^\beta g_{\alpha\beta}}. \quad (5.31)$$

В общем случае пределы интегрирования для различных частиц могут отличаться. Однако, поскольку нас не интересуют граничные эффекты, мы этого указывать не будем.

В разделе 2.2 действие для экстремалей было проварьировано в предположении, что вдоль нее выбран канонический параметр. Сейчас мы получим уравнения без этого предположения, т.к. в ряде случаев удобнее выбирать параметр вдоль экстремалей, исходя из других соображений. Рассмотрим одну точечную частицу с мировой линией  $q^\alpha(\tau)$  в произвольной параметризации. Простые вычисления приводят к следующим уравнениям движения

$$S_{m,\alpha} := \frac{\delta S_m}{\delta q^\alpha} = m \frac{g_{\alpha\beta}}{u^2} \left( \ddot{q}^\beta + \Gamma_{\gamma\delta}^\beta \dot{q}^\gamma \dot{q}^\delta - \frac{\dot{q}^\beta}{2u^2} \frac{d(u^2)}{d\tau} \right) = 0. \quad (5.32)$$

Поскольку исходное действие инвариантно относительно произвольной замены параметра вдоль мировой линии, то согласно второй теореме Нетер между уравнениями движения существует линейная зависимость. Чтобы ее найти, рассмотрим бесконечно малое изменение параметра

$$\tau \mapsto \tau + \epsilon(\tau).$$

Соответствующая вариация формы функций  $q^\alpha(\tau)$  (см. раздел 1.11) имеет вид

$$\delta q^\alpha = -\epsilon \dot{q}^\alpha.$$

Следовательно, вариация действия равна

$$\delta S_m = - \int d\tau S_{m,\alpha} \epsilon \dot{q}^\alpha.$$

Поскольку функция  $\epsilon(\tau)$  произвольна, то из инвариантности действия,  $\delta S_m = 0$ , вытекает зависимость уравнений движения:

$$S_{m,\alpha} \dot{q}^\alpha = 0. \quad (5.33)$$

В этом тождестве можно убедиться прямой проверкой.

При произвольной параметризации мировой линии частицы квадрат вектора скорости не является постоянным,  $u^2 \neq \text{const}$ . Если выбран канонический параметр вдоль экстремали, то  $d(u^2)/d\tau = 0$ , и последнее слагаемое в уравнении (5.32) обращается в нуль.

Для вывода полной системы уравнений движения, действие (5.31) необходимо проварьировать по метрике  $g_{\alpha\beta}(x)$  и траекториям частиц  $q_I^\alpha(\tau)$ . Вариация действия для частиц по компонентам метрики  $\delta g_{\alpha\beta}(x)$  не определена, т.к. оно записано только вдоль траекторий. Поэтому мы преобразуем интегралы вдоль траекторий в интегралы по всему пространству-времени. Для этого вставим в подынтегральное выражение единицу,

$$1 = \int dx \delta(x - q_I) := \int dx \delta(x^0 - q_I^0) \delta(x^1 - q_I^1) \dots \delta(x^{n-1} - q_I^{n-1}),$$

и изменим порядок интегрирования, предположив, что это возможно. Тогда действие примет вид

$$S = \int dx \left[ \kappa \sqrt{|g|} R - \int d\tau \sum_I m_I \sqrt{\dot{q}_I^\alpha \dot{q}_I^\beta g_{\alpha\beta}} \delta(x - q_I) \right]. \quad (5.34)$$

Теперь метрику во втором слагаемом можно рассматривать, как функцию от точки пространства-времени,  $g_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta}(x)$ . Вариационные производные этого действия по траекториям частиц и метрике при канонической параметризации равны

$$\frac{\delta S}{\delta q_I^\alpha} = m_I (\ddot{q}_I^\beta + \Gamma_{\gamma\delta}{}^\beta \dot{q}_I^\gamma \dot{q}_I^\delta) g_{\beta\alpha}, \quad (5.35)$$

$$\frac{\delta S}{\delta g_{\alpha\beta}} = -\sqrt{|g|} \kappa \left( R^{\alpha\beta} - \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} R \right) - \int d\tau \sum_I \frac{m_I}{2\sqrt{\dot{q}_I^\gamma \dot{q}_I^\delta g_{\gamma\delta}}} \dot{q}_I^\alpha \dot{q}_I^\beta \delta(x - q_I). \quad (5.36)$$

Для любого решения уравнения (5.35) канонический параметр  $\tau$  можно выбрать так, что  $\sqrt{\dot{q}_I^\gamma \dot{q}_I^\delta g_{\gamma\delta}} = 1$  для каждой частицы. Поэтому, не ограничивая общности, знаменатель во втором слагаемом (5.36) можно упростить, отбросив квадратный корень. Таким образом, связанная система уравнений движения гравитационного поля и системы точечных частиц примет вид

$$\kappa \sqrt{|g|} \left( R^{\alpha\beta} - \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} R \right) = -\frac{1}{2} \sqrt{|g|} T_m^{\alpha\beta}, \quad (5.37)$$

$$g_{\alpha\beta} (\ddot{q}_I^\beta + \Gamma_{\gamma\delta}{}^\beta \dot{q}_I^\gamma \dot{q}_I^\delta) = 0, \quad (5.38)$$

где

$$T_m^{\alpha\beta} := \frac{1}{\sqrt{|g|}} \int d\tau \sum_I m_I \dot{q}_I^\alpha \dot{q}_I^\beta \delta(x - q_I) \quad (5.39)$$

– тензор энергии-импульса точечных частиц и  $\dot{q}_{i\alpha} := \dot{q}_i^\beta g_{\beta\alpha}$ . Интегрирование по каноническому параметру  $\tau$  в тензоре энергии-импульса можно снять, используя одну  $\delta$ -функцию, а именно  $\delta(x^0 - q_i^0(\tau))$ . Поскольку  $\dot{q}_i^0 > 0$  (все частицы движутся в будущее), то для тензора энергии-импульса точечных частиц получаем следующее выражение

$$T_m^{\alpha\beta} = \frac{1}{\sqrt{|g|}} \sum_i \frac{m_i \dot{q}_i^\alpha \dot{q}_i^\beta}{\dot{q}_i^0} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{q}_i), \quad (5.40)$$

где

$$\delta(\mathbf{x} - \mathbf{q}_i) := \delta(x^1 - q_i^1) \dots \delta(x^{n-1} - q_i^{n-1})$$

– пространственная  $\delta$ -функция и параметр  $\tau$  является неявной функцией  $x^0$ , заданной уравнением  $x^0 = q^0(\tau)$ .

**Замечание.** Появление множителя  $1/\sqrt{|g|}$  в выражении для тензора энергии-импульса точечных частиц не случайно. Напомним, что  $\delta$ -функция является не функцией на многообразии, а скалярной плотностью степени  $-1$ , как и элемент объема  $\sqrt{|g|}$ . Если параметризация мировой линии противоположна,  $\dot{q}_i^0 < 0$ , что соответствует античастице, то в знаменателе тензора энергии-импульса (5.40) необходимо поставить знак модуля:  $|\dot{q}_i^0|$ , в соответствии с правилом замены переменных интегрирования.  $\square$

Таким образом, для точечных частиц, на которые действуют только гравитационные силы, мы имеем связанную систему уравнений (5.37), (5.38). Каждая частица движется по экстремали пространства-времени в соответствии с уравнением (5.38), где метрика определяется уравнениями Эйнштейна (5.37). В свою очередь, метрика зависит от распределения частиц, т.к. в правой части уравнений Эйнштейна стоит нетривиальный тензор энергии-импульса.

### 5.6.1 Нерелятивистский предел для точечной частицы

В настоящем разделе будет показана связь между уравнениями движения для точечных частиц (5.38) и хорошо знакомыми уравнениями движения частиц под действием гравитационного поля в механике Ньютона.

Для простоты рассмотрим движение одной частицы. В пространстве-времени  $\mathbb{M}$  с нетривиальной метрикой  $g_{\alpha\beta}(x)$  функции  $(q^\alpha(\tau))$  задают мировую линию точечной частицы. Пусть  $\tau = t$  – канонический параметр (собственное время). Предположим, что координата  $x^0$  на  $\mathbb{M}$  выбрана таким образом, что на траектории частицы  $ct = x^0$ . Здесь мы ввели явно скорость света  $c$  для того, чтобы в дальнейшем строить разложение по малому параметру  $\mathbf{u}^2/c^2 \ll 1$ , где  $\mathbf{u}$  – пространственная часть собственной скорости частицы. Условимся нумеровать, как обычно, пространственные координаты буквами из середины греческого алфавита:

$$(x^\alpha) = (x^0, x^\mu), \quad \mu = 1, \dots, n-1.$$

Поскольку исходное действие (5.29) инвариантно относительно общих преобразований координат, то у нас имеется возможность дополнительно фиксировать  $n-1$  компонент метрики. Положим  $g_{0\mu} = 0$ . Тогда метрика примет блочно диагональный вид

$$g_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} g_{00} & 0 \\ 0 & g_{\mu\nu} \end{pmatrix} \quad (5.41)$$

Другими словами, система координат выбрана таким образом, чтобы времениподобный вектор  $\partial_0$  был ортогонален всем касательным векторам к пространственным сечениям  $x^0 = \text{const}$ .

Введем два параметра разложения. Во-первых, слабому гравитационному полю соответствует метрика, которая мало отличается от метрики Минковского:

$$g_{00} = 1 + h_{00}, \quad g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}, \quad h_{00}, h_{\mu\nu} \sim \epsilon \ll 1.$$

Во-вторых, нерелятивистский предел соответствует скоростям, малым по сравнению со скоростью света,

$$\frac{\mathbf{u}^2}{c^2} \sim \epsilon \ll 1, \quad \mathbf{u}^2 := -\eta_{\mu\nu} \dot{q}^\mu \dot{q}^\nu = \delta_{\mu\nu} u^\mu u^\nu \geq 0.$$

Если гравитационное поле мало,  $g_{\alpha\beta} \rightarrow \eta_{\alpha\beta}$ , то в нерелятивистском пределе  $\mathbf{u}^2 \rightarrow 0$  временная компонента собственной скорости стремится к скорости света,  $\dot{q}^0 \rightarrow c$ , т.к. выполнено соотношение (5.26). Если гравитационное поле не очень велико,  $0 < g_{00} < \text{const}$ , то в нерелятивистском пределе  $g_{00}(\dot{q}^0)^2 \rightarrow c^2$  и производная  $\dot{q}^0$  ограничена снизу некоторой положительной постоянной. Поскольку пространственные компоненты собственной  $u^\mu$  и наблюдаемой  $v^\mu$  скорости частицы отличаются на строго положительный множитель  $\dot{q}^0$ , то пределы  $\mathbf{u}^2 \rightarrow 0$  и  $\mathbf{v}^2 \rightarrow 0$ , где  $\mathbf{v}^2 := -\eta_{\mu\nu} v^\mu v^\nu \rightarrow 0$ , эквивалентны.

Нерелятивистской частице в слабом гравитационном поле соответствует интервал

$$ds^2 = (c^2 + c^2 h_{00} + \eta_{\mu\nu} u^\mu u^\nu + h_{\mu\nu} u^\mu u^\nu) dt^2.$$

В силу сделанных предположений о малости гравитационного поля и скоростей последним слагаемым в этом представлении можно пренебречь. Тогда в нерелятивистском пределе с учетом первой поправки интервал для точечной частицы примет вид

$$ds^2 \approx \left( c^2 + \frac{2U}{m} - \mathbf{u}^2 \right) dt^2, \quad (5.42)$$

где введено обозначение

$$h_{00}(x) =: \frac{2U(x)}{mc^2}. \quad (5.43)$$

Подставим приближенное выражение для интервала (5.42) в действие для точечной частицы (5.29), умноженное на скорость света, и разложим по степеням  $\epsilon$ . Тогда в первом порядке по  $\epsilon$  получим приближенное выражение

$$S_m \approx -mc \int dt \sqrt{c^2 + \frac{2U}{m} - \mathbf{u}^2} \approx \int dt \left( -mc^2 + \frac{m\mathbf{u}^2}{2} - U \right). \quad (5.44)$$

С точностью до энергии покоя точечной частицы с обратным знаком  $-mc^2$  подынтегральное выражение совпадает с хорошо известным выражением для лагранжиана точечной частицы в нерелятивистской механике. Тем самым мы показали, что в нерелятивистском пределе поправку к временной компоненте метрики (5.43), умноженной на  $mc^2$ , следует интерпретировать, как потенциальную энергию  $U := mc^2 h_{00}/2$  точечной частицы, находящейся во внешнем гравитационном поле.

Отметим, что разумный нерелятивистский предел обуславливает выбор общего знака минус в исходном действии для точечной частицы (5.29).

Выше мы определили нерелятивистский предел (5.44) для действия. При этом вместо  $n$  исходных уравнений в (5.35) у нас осталось только  $n - 1$  уравнение, т.к. переменная  $q^0(\tau)$  не вошла в действие (5.44). Можно доказать, что потерянное уравнение движения удовлетворяется с точностью  $\epsilon^2$ .

В общей теории относительности ( $n = 4$ ) метрика вдали от тела массы  $M$  дается решением Шварцшильда (7.1)

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right) dt^2 - \frac{dr^2}{1 - \frac{2GM}{rc^2}} - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2),$$

где  $G$  – гравитационная постоянная. Соответствующее нерелятивистское выражение для потенциальной энергии пробной частицы имеет вид

$$U = -G \frac{mM}{r}, \quad (5.45)$$

что совпадает с *законом всемирного тяготения*. Таким образом, мы показали, что закон всемирного тяготения вытекает из общей теории относительности в нерелятивистском пределе.

### Аналогия с тензором энергии-импульса сплошной среды

Введем новую временную координату  $\tau = \tau(x^0, x^\mu)$  в пространстве-времени  $\mathbb{M}$  таким образом, чтобы вдоль каждой мировой линии частицы она совпадала с собственным временем  $\tau(x^\alpha = q_1^\alpha) = \tau$ . Это всегда можно сделать, причем не единственным образом, т.к. траектории всех частиц не пересекаются, времениподобны, а канонический параметр определен с точностью до сдвигов. Продолжим векторные поля скоростей  $\dot{q}_1^\alpha$ , определенных вдоль мировых линий частиц, на все пространство-время гладким образом. Тогда в новой системе координат  $\tau, x^\mu$  производные  $\dot{q}_1^\alpha$  в выражении (5.39) можно заменить на частные производные  $\dot{x}^\alpha = \partial x^\alpha / \partial \tau$  ввиду наличия  $\delta$ -функций, и вынести за знак интегрирования:

$$T_m^{\alpha\beta} = \frac{\dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta}{\sqrt{|g|}} \int d\tau \sum_i m_i \delta(x - q_i) = \frac{\dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta}{\sqrt{|g|}} \sum_i \frac{m_i}{\dot{q}_i^0} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{q}_i), \quad (5.46)$$

где мы проинтегрировали одну  $\delta$ -функцию:  $\delta(x - q_i^0)$ . Полученное выражение для тензора энергии-импульса точечных частиц имеет такой же вид, как и для сплошной среды (5.68). Для точечных частиц давление равно нулю,  $\mathcal{P} = 0$ , а плотность энергии принимает вид

$$\mathcal{E} = \frac{1}{\sqrt{|g|}} \sum_i \frac{m_i}{\dot{q}_i^0} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{q}_i).$$

Поскольку, по построению, временная координата  $x^0$  на траекториях частиц совпадает с собственным временем  $\tau$ , то  $\dot{q}_i^0 = 1$  и выражение для плотности энергии приобретает интуитивно ясную форму,

$$\mathcal{E} = \frac{1}{\sqrt{|g|}} \sum_i m_i \delta(\mathbf{x} - \mathbf{q}_i).$$

То есть энергия сосредоточена в точках расположения частиц, и каждая частица несет энергию, которая равна ее массе. Тензор энергии-импульса точечных частиц соответствует пылевидной материи, поскольку давление равно нулю.

### След тензора энергии-импульса

Вернемся в произвольную систему координат. Из формулы (5.40) следует выражение для следа тензора энергии-импульса произвольного распределения точечных частиц

$$T_m^{\alpha}{}_{\alpha} = \frac{1}{\sqrt{|g|}} \sum_i \frac{m_i}{\dot{q}_i^0} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{q}_i), \quad (5.47)$$

где использовано равенство  $\dot{q}_i^2 = 1$  для канонического параметра. Поскольку  $m_i > 0$  и  $\dot{q}_i^0 > 0$ , то след тензора энергии-импульса положителен (при этом мы рассматриваем  $\delta$ -функцию, как положительную).

Поскольку след тензора энергии-импульса положителен для *произвольного* распределения точечных частиц, то в моделях математической физики делается предположение о том, что след тензора энергии-импульса для любой обычной (наблюдаемой) материи всегда неотрицателен,  $T^{\alpha}{}_{\alpha} \geq 0$ . При этом равенство следа тензора энергии-импульса нулю, как будет показано ниже, достигается только для частиц, движущихся со скоростью света, или излучения.

След тензора энергии-импульса электромагнитного поля (5.93), который соответствует электромагнитному излучению, также равен нулю. Это согласуется с утверждением о том, что след тензора энергии-импульса произвольного распределения ультрарелятивистских частиц равен нулю. Напомним, что в квантовой электродинамике электромагнитное поле описывает безмассовые частицы – фотоны, которые распространяются со скоростью света.

Мы выделили рассмотрение следа тензора энергии-импульса точечных частиц в отдельный пункт именно в свете последнего замечания, т.к. положительность следа тензора энергии-импульса для произвольной материи ниоткуда больше не следует, и в то же время ведет к важным следствиям.

## 5.7 Ньютонов предел

Для того, чтобы сказать, что общая теория относительности не противоречит экспериментальным данным, желательно показать, что теория тяготения Ньютона в каком то смысле (приближении) следует из уравнений Эйнштейна. Поскольку гравитация Ньютона находится в хорошем согласии с экспериментом, то в этом случае можно утверждать, что общая теория относительности описывает гравитационные взаимодействия по крайней мере не хуже, чем законы Ньютона. Такое приближение существует, и будет описано в настоящем разделе.

В разделе 5.6.1 было показано, что закон всемирного тяготения следует из уравнений Эйнштейна в частном случае, а именно, для решения Шварцшильда. Ниже мы рассмотрим общий случай.

Сначала сделаем общее замечание. Уравнения Эйнштейна существенно нелинейны, в то время как гравитация Ньютона линейна: гравитационные потенциалы различных массивных тел просто складываются. Поэтому естественно ожидать, что закон всемирного тяготения вытекает из уравнений Эйнштейна в линейном приближении.

Рассмотрим вакуумные уравнения Эйнштейна без космологической постоянной в четырехмерном пространстве-времени

$$\kappa \left( R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} R \right) = -\frac{1}{2} T_{\alpha\beta}. \quad (5.48)$$

Будем считать, что пространство-время топологически тривиально, и существует глобальная система координат, в которой метрика, удовлетворяющая уравнениям (5.48), мало отличается от метрики Лоренца в пространстве Минковского  $\mathbb{R}^{1,3}$ :

$$g_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta} + \epsilon h_{\alpha\beta}, \quad \epsilon \ll 1. \quad (5.49)$$

При этом мы считаем малыми также все частные производные:  $\partial_\alpha g_{\beta\gamma} \sim \epsilon$ . Символы Кристоффеля пропорциональны производным  $\partial_\alpha g_{\beta\gamma}$ , и поэтому их квадраты дают вклад в тензор кривизны порядка  $\epsilon^2$ . Тем самым вкладом квадратичных слагаемых по символам Кристоффеля в тензор кривизны (1.128) можно пренебречь по сравнению со вторыми производными от компонент метрики, которые дают вклад порядка  $\epsilon$ . Таким образом, в линейном приближении по  $\epsilon$  тензор Риччи имеет вид

$$\frac{1}{\epsilon} R_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \eta^{\gamma\delta} (\partial_{\alpha\beta}^2 h_{\gamma\delta} - \partial_{\alpha\gamma}^2 h_{\beta\delta} - \partial_{\beta\gamma}^2 h_{\alpha\delta} + \partial_{\gamma\delta}^2 h_{\alpha\beta}).$$

В правой части равенства свертка проводится с помощью метрики Лоренца, т.к. выражение в скобках имеет первый порядок. Соответствующая скалярная кривизна имеет вид

$$\frac{1}{\epsilon} R = \eta^{\alpha\beta} \eta^{\gamma\delta} (\partial_{\alpha\beta}^2 h_{\gamma\delta} - \partial_{\alpha\gamma}^2 h_{\beta\delta}).$$

Введем новые переменные

$$\bar{h}_{\alpha\beta} := h_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} \eta_{\alpha\beta} h, \quad (5.50)$$

где  $h := \eta^{\alpha\beta} h_{\alpha\beta}$  — след возмущения метрики. Тогда тензор Эйнштейна в линейном приближении равен следующему выражению

$$\frac{1}{\epsilon} \left( R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} R \right) = \frac{1}{2} \eta^{\gamma\delta} (\partial_{\gamma\delta}^2 \bar{h}_{\alpha\beta} - \partial_{\alpha\gamma}^2 \bar{h}_{\beta\delta} - \partial_{\beta\gamma}^2 \bar{h}_{\alpha\delta} + \eta_{\alpha\beta} \eta^{\epsilon\zeta} \partial_{\gamma\epsilon}^2 \bar{h}_{\delta\zeta}).$$

Теперь воспользуемся инвариантностью действия Гильберта–Эйнштейна относительно общих преобразований координат. Рассмотрим бесконечно малые преобразования координат, которые генерируются некоторым векторным полем (1.151):

$$x^\alpha \mapsto x^\alpha + \epsilon u^\alpha(x). \quad (5.51)$$

При этом компоненты метрики в линейном приближении по  $\epsilon$  получают приращение (1.159)

$$h_{\alpha\beta} \mapsto h_{\alpha\beta} + \epsilon (\partial_\alpha u_\beta + \partial_\beta u_\alpha). \quad (5.52)$$

Возьмем в качестве компонент векторного поля  $u^\alpha$  произвольные решения уравнения

$$\square u^\alpha = -\partial_\beta \bar{h}^{\alpha\beta},$$

где  $\square := \eta^{\alpha\beta} \partial_\alpha \partial_\beta$  — оператор Даламбера. Тогда в новой системе координат возмущение компонент метрики будет удовлетворять уравнению

$$\partial_\beta \bar{h}_\alpha{}^\beta = 0. \quad (5.53)$$

С учетом условия гармоничности уравнения Эйнштейна (5.48) принимают вид

$$\epsilon \square \bar{h}_{\alpha\beta} = -\frac{1}{\kappa} T_{\alpha\beta}. \quad (5.54)$$

**Замечание.** Если поля материи отсутствуют,  $T_{\alpha\beta} = 0$ , то система уравнений (5.53), (5.54) совпадает с уравнениями для безмассового поля со спином 2 в плоском пространстве-времени Минковского [?]. Поэтому общую теорию относительности в целом можно рассматривать как теорию безмассового поля со спином 2 и с некоторым самодействием, которое соответствует отброшенным нелинейным членам. Следует однако заметить, что понятие массы и спина требует наличия метрики Лоренца, которая является фоновой метрикой для линейного приближения. В общем случае, без обращения к линейному приближению, утверждению о том, что метрика описывает безмассовое поле спина 2 придать точный смысл весьма затруднительно.  $\square$

Рассмотрим в качестве источника в уравнениях Эйнштейна одну частицу массы  $M$ . Поскольку мы рассматриваем слабые гравитационные поля, то будем считать, что  $M \sim \epsilon$ . Этой частице соответствует тензор энергии-импульса (5.40)

$$T_{\alpha\beta} = \frac{1}{\sqrt{|g|}} M \frac{\dot{q}_\alpha \dot{q}_\beta}{\dot{q}^0} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{q}).$$

В линейном приближении по  $\epsilon$  можно сделать замену  $\sqrt{|g|} \mapsto 1$ .

Предположим, что частица покоится в начале координат, т.е.  $(\dot{q}^\alpha) = (1, 0, 0, 0)$  и  $(q^\alpha) = (\tau, 0, 0, 0)$ . Предположим также, что компоненты метрики не зависят от времени (статическое решение). Тогда полная система уравнений Эйнштейна примет вид

$$\kappa \epsilon \Delta \bar{h}_{00} = M \delta(\mathbf{x}), \quad (5.55)$$

$$\Delta \bar{h}_{0\mu} = \Delta \bar{h}_{\mu\nu} = 0, \quad (5.56)$$

где  $\Delta := \partial_1^2 + \partial_2^2 + \partial_3^2$  – лапласиан в трехмерном евклидовом пространстве. Если предположить, что компоненты возмущений метрики  $\bar{h}_{\alpha\beta}$  стремятся к нулю на бесконечности, то уравнения (5.56) имеют единственное решение

$$\bar{h}_{0\mu} = 0, \quad \bar{h}_{\mu\nu} = 0.$$

Для сравнения уравнения (5.55) с законом всемирного тяготения, необходимо восстановить размерные постоянные. Во-первых, положим

$$\epsilon \bar{h}_{00} =: \frac{4\varphi}{c^2},$$

где  $\varphi$  – потенциал гравитационного поля. Это следует из нерелятивистского предела для точечной частицы (5.43). Кроме того, в правую часть уравнения (5.55) надо вставить множитель  $c^2$ : один множитель  $c$  следует из опущенного множителя в действии для точечной частицы (5.29), а второй – из равенства  $\dot{q}^0 = c$ . Если после этого положить

$$\kappa := \frac{c^4}{16\pi G}, \quad (5.57)$$

где  $G$  – гравитационная постоянная в законе тяготения Ньютона, то уравнение (5.55) совпадет с уравнением Пуассона для гравитационного поля. В этом случае решение уравнения Пуассона (5.55) примет вид

$$\varphi = -G \frac{M}{r},$$

где  $r = |\mathbf{x}|$ .



Ясно, что для найденных компонент метрики калибровочное условие (5.53) выполнено, и, следовательно, найдено самосогласованное решение задачи.

Несмотря на то, что общая теория относительности содержит в себе теорию тяготения Ньютона в качестве предельного случая, отметим принципиальное отличие. В механике Ньютона свободная частица движется по прямой линии. Если она находится в поле другой массивной частицы, то на нее действует сила гравитационного притяжения. Теперь она уже не является свободной и ее траектория отличается от прямой линии в соответствии с законом всемирного тяготения. В общей теории относительности ситуация совершенно иная. Массивная частица искривляет пространство-время в соответствии с уравнениями Эйнштейна. Пробная частица в гравитационном поле остается свободной и движется вдоль экстремали. Однако теперь с точки зрения внешнего наблюдателя экстремаль не является прямой линией, поскольку пространство-время перестает быть плоским из-за наличия массивной частицы.

## 5.8 Гравитационные волны

В механике Ньютона гравитационных волн нет. При этом изменение положения одного из массивных тел мгновенно приводит к изменению гравитационного поля во всем пространстве. Кроме этого, если массивные тела отсутствуют, то потенциал гравитационного поля равен нулю. В общей теории относительности ситуация другая. Во-первых, гравитационные взаимодействия распространяются с конечной постоянной скоростью света  $c$  в локально инерциальной системе отсчета. Во-вторых, даже если материальные тела отсутствуют, уравнения Эйнштейна допускают нетривиальные решения в виде гравитационных волн. То есть гравитационное поле может быть отлично от нуля даже если материальные тела отсутствуют. В настоящем разделе мы изучим решения уравнений Эйнштейна, описывающие гравитационные волны.

Рассмотрим вакуумные уравнения Эйнштейна без космологической постоянной

$$R_{\alpha\beta} = 0. \quad (5.58)$$

Как и в предыдущем разделе будем считать, что пространство-время топологически тривиально,  $M \approx \mathbb{R}^4$ , и существует глобальная система координат, в которой метрика мало отличается от метрики Лоренца (5.49). В нулевом порядке по  $\epsilon$  вакуумные уравнения Эйнштейна, очевидно, удовлетворяются, т.к. кривизна пространства Минковского равна нулю. Найдем решение уравнений (5.58) в первом порядке по  $\epsilon$ .

Используя инвариантность действия Гильберта–Эйнштейна относительно общих преобразований координат, выберем систему отсчета таким образом, чтобы выполнялось калибровочное условие (5.53) (гармонические координаты). Тогда все компоненты метрики в первом порядке будут удовлетворять волновому уравнению

$$\square \bar{h}_{\alpha\beta} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \square h_{\alpha\beta} = 0,$$

где компоненты  $\bar{h}_{\alpha\beta}$  определены уравнением (5.50) и  $\square$  – оператор Даламбера в пространстве Минковского. Однако далеко не все компоненты метрики являются независимыми и описывают физические степени свободы, от которых нельзя избавиться путем выбора соответствующей системы координат.

Покажем это. Во-первых, выберем гармоническую систему координат. Тогда в линейном приближении выполнено уравнение (5.53), которое рассматривается как

калибровочное условие. Это условие не фиксирует систему координат однозначно. Действительно, допустим, что в некоторой системе координат это условие выполнено. Совершим преобразование координат  $x^\alpha \mapsto x^\alpha + \epsilon u^\alpha$ , где все компоненты векторного поля  $u$  удовлетворяют волновому уравнению

$$\square u^\alpha = 0. \quad (5.59)$$

Нетрудно проверить, что в новой системе координат калибровочное условие (5.53) будет также выполнено. Следовательно, оставшуюся свободу в выборе системы координат можно использовать для того, чтобы зафиксировать дополнительные компоненты метрики.

Чтобы найти подходящие дополнительные калибровочные условия, необходимо решить уравнения (5.59) с некоторыми начальными условиями. Посмотрим, как преобразуется след возмущений метрики  $h := h_\alpha^\alpha$  и компоненты  $h_{0\mu}$ ,  $\mu = 1, 2, 3$ , при бесконечно малых преобразованиях координат (5.51):

$$\begin{aligned} h &\mapsto h + 2\epsilon \partial_\alpha u^\alpha, \\ h_{0\mu} &\mapsto h_{0\mu} + \epsilon(\partial_0 u_\mu + \partial_\mu u_0). \end{aligned}$$

Рассмотрим пространственное сечение  $x^0 := t = \text{const}$  в качестве поверхности Коши для уравнения (5.59). На этой поверхности найдем какое-либо решение системы линейных уравнений

$$2(\dot{u}_0 + \partial_\mu u^\mu) = -h/\epsilon, \quad (5.60)$$

$$2(\Delta u_0 + \partial_\mu \dot{u}^\mu) = -\dot{h}/\epsilon, \quad (5.61)$$

$$\dot{u}_\mu + \partial_\mu u_0 = -h_{0\mu}/\epsilon, \quad (5.62)$$

$$\Delta u_\mu + \partial_\mu \dot{u}_0 = -\dot{h}_{0\mu}/\epsilon, \quad (5.63)$$

где точка обозначает дифференцирование по времени  $t$ . Из этой системы уравнений определяем компоненты  $u^\alpha$  и их производные по времени  $\dot{u}^\alpha$  на поверхности Коши. После этого решаем задачу Коши для уравнений (5.59) с найденными начальными условиями в обе стороны по времени и определяем векторное поле  $u$  во всем пространстве-времени. Поскольку выполнены уравнения (5.60)–(5.63), то на поверхности Коши справедливы равенства

$$\begin{aligned} h &= 0, & \dot{h} &= 0, \\ h_{0\mu} &= 0, & \dot{h}_{0\mu} &= 0. \end{aligned} \quad (5.64)$$

Это очевидно, если заметить, что уравнения (5.61) и (5.63) возникают после дифференцирования уравнений (5.60) и (5.62) по времени и использования уравнений движения. Поскольку компоненты  $h$  и  $h_{0\mu}$  удовлетворяют волновому уравнению, то условия (5.64) выполнены также во всем пространстве-времени.

**Определение.** Система координат, в которой в линейном приближении выполнены условия

$$\partial_\beta h_\alpha^\beta = 0, \quad h = 0, \quad h_{0\mu} = 0 \quad (5.65)$$

называется *радиационной калибровкой*.  $\square$

**Предложение 5.8.1.** При отсутствии полей материи и космологической постоянной радиационная калибровка существует в линейном приближении к метрике Лоренца.

*Доказательство.* Было приведено выше.  $\square$

Несмотря на то, что в четырехмерном пространстве-времени общие преобразования координат параметризуются четырьмя произвольными функциями, мы сумели наложить восемь калибровочных условий (5.65).

Из первого условия (5.65) для  $\alpha = 0$  и с учетом того, что  $h_{0\mu} = 0$ , получаем уравнение  $\dot{h}_{00} = 0$ , которое должно быть выполнено во всем пространстве-времени. Тогда уравнение движения для временной компоненты сводится к уравнению Лапласа  $\Delta h_{00} = 0$ . С учетом нулевых граничных условий на бесконечности получаем дополнительное условие на компоненты метрики:  $h_{00} = 0$ .

Рассмотрим плоскую волну, которая распространяется в направлении волнового вектора  $k = (k^\alpha)$ :

$$h_{\alpha\beta} = H_{\alpha\beta} e^{ik_\gamma x^\gamma}, \quad (5.66)$$

где  $H_{\alpha\beta}$  – некоторая постоянная матрица и  $k^2 := k^\alpha k_\alpha = 0$ . Радиационная калибровка (5.65) для этого решения уравнений движения задается следующими восемью условиями:

$$k^\beta H_{\alpha\beta} = 0, \quad H_\alpha{}^\alpha = 0, \quad H_{0\mu} = 0.$$

Из первого и третьего условия при  $\alpha = 0$  вытекает равенство  $k^0 H_{00}$ . Для нетривиального решения  $k^0 \neq 0$ , и поэтому  $H_{00} = 0$ . Ввиду симметрии по индексам матрица  $H_{\alpha\beta}$  имеет 10 независимых элементов. Радиационная калибровка накладывает на них 8 независимых условий. Отсюда вытекает, что в выбранной системе координат только 2 компоненты возмущенной метрики являются независимыми.

Допустим, что гравитационная волна распространяется вдоль оси  $x^1$ , т.е. нормированный волновой вектор имеет только две отличные от нуля компоненты  $k = (1, 1, 0, 0)$ . Тогда матрица  $H_{\alpha\beta}$  в радиационной калибровке имеет вид

$$H = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A & B \\ 0 & 0 & B & -A \end{pmatrix},$$

где  $H_{22} = -H_{33} := A$  и  $H_{23} = H_{32} := B$  – два произвольных числа (амплитуды волн).

Введем новое понятие спиральности плоской волны. Для этого рассмотрим вращение пространства  $\mathbb{R}^3 \subset \mathbb{R}^{1,3}$  на угол  $\varphi$  вокруг оси  $x^1$ . Ясно, что такое вращение не меняет волнового вектора  $k$ . При преобразовании координат компоненты метрики преобразуются по тензорному закону

$$g_{\alpha\beta} \mapsto g'_{\alpha\beta} = S_\alpha{}^\gamma S_\beta{}^\delta g_{\gamma\delta}$$

с соответствующей матрицей вращений  $S$ . Простые вычисления приводят к равенствам для новых амплитуд:

$$\begin{aligned} A' &= \cos 2\varphi A + \sin 2\varphi B, \\ B' &= -\sin 2\varphi A + \cos 2\varphi B. \end{aligned}$$

Это означает, что при повороте системы координат на угол  $\varphi$  амплитуда волны поворачивается на удвоенный угол  $2\varphi$ . В физике часто рассматривают комплексные амплитуды

$$H_\pm := H_{22} \mp iH_{23} = A \mp iB.$$

При вращении они преобразуются по правилу

$$H'_\pm = e^{\pm 2i\varphi} H_\pm.$$

**Определение.** Если амплитуда плоской поперечной волны при повороте на угол  $\varphi$  вокруг направления распространения волны поворачивается на угол  $\hbar\varphi$ , то говорят, что волна имеет *спиральность*  $\hbar$ .  $\square$

Таким образом, плоские гравитационные волны описывают поперечные волны спиральности два.

Тензор Риччи и скалярная кривизна для данного решения вакуумных уравнений Эйнштейна в линейном приближении равны, конечно, нулю. Это следует из того, что мы решаем вакуумные уравнения Эйнштейна без космологической постоянной (5.5). Тем не менее полный тензор кривизны отличен от нуля. В линейном приближении тензор кривизны имеет вид (см. выражение (1.128))

$$\frac{1}{\epsilon} R_{\alpha\beta\gamma\delta} = \frac{1}{2} (\partial_{\alpha\gamma}^2 h_{\beta\delta} - \partial_{\alpha\delta}^2 h_{\beta\gamma} - \partial_{\beta\gamma}^2 h_{\alpha\delta} + \partial_{\beta\delta}^2 h_{\alpha\gamma}). \quad (5.67)$$

Простые вычисления показывают, что среди 20 независимых компонент тензора кривизны только 9 отличны от нуля:

$$\begin{aligned} R_{0303} &= -R_{0202} = R_{1313} = -R_{1212} = R_{0212} = -R_{0313} = \frac{1}{2}\epsilon A e^{i(t-x^1)}, \\ R_{0203} &= R_{1213} = -R_{0213} = -\frac{1}{2}\epsilon B e^{i(t-x^1)}. \end{aligned}$$

При преобразовании координат компоненты тензора кривизны ведут себя ковариантным образом – на то он и тензор. Однако в линейном приближении они не просто ковариантны, а инвариантны. Нетрудно проверить, что выражение (5.67) действительно инвариантно относительно преобразований (5.52) с произвольным вектором  $u$ .

Из явного выражения для нетривиальных компонент тензора кривизны вытекает, что амплитуды волн  $A$  и  $B$  нельзя обратить в нуль никаким преобразованием координат. Следовательно, они описывают физические распространяющиеся степени свободы.

Поскольку вакуумные уравнения Эйнштейна в линейном приближении линейны, то им будет удовлетворять произвольная суперпозиция плоских волн. В частности, поправки к метрике вида

$$h_{\alpha\beta} = H_{\alpha\beta} [f(x^1 - t) + g(x^1 + t)],$$

где  $f$  и  $g$  – произвольные функции, описывающие распространение волн вдоль оси  $x^1$  в положительную и отрицательную стороны, также удовлетворяют линеаризованным уравнениям Эйнштейна в радиационной калибровке. Отсюда, в частности, следует, что для однозначного задания волнового решения уравнений Эйнштейна необходимо задать четыре функции на поверхности Коши: по две для каждой волны. При этом функции можно задать произвольным образом. Таким образом, вакуумные уравнения Эйнштейна без космологической постоянной описывают распространение двух физических степеней свободы, которые порождают нетривиальную кривизну пространства-времени и не устраняются никаким преобразованием координат. Данный подсчет степеней свободы приводит к тому же результату, что и общий подход, основанный на гамильтоновом формализме.

## 5.9 Сплошная среда в общей теории относительности

В правой части уравнений Эйнштейна (5.1) находится тензор энергии-импульса материи  $T_{\text{м}}^{\alpha\beta}$ . В случае скалярного, электромагнитного и других полей, уравнения движения которых следуют из вариационного принципа, правая часть уравнений Эйнштейна определяется вариацией соответствующего действия по метрике. В этом случае вопросов с определением тензора энергии-импульса материи не возникает. Некоторые из этих тензоров будут рассмотрены в дальнейшем.

В то же время в общей теории относительности существует ряд важных моделей (особенно в космологии), для которых тензор энергии-импульса материи не следует из вариационного принципа. В настоящем разделе мы определим тензор энергии-импульса материи  $T_{\text{м}}^{\alpha\beta}$ , которая рассматривается как сплошная среда, например, жидкость или газ, и изучим некоторые из его свойств. При этом мы не будем опираться на вариационный принцип.

Пусть пространство-время  $(\mathbb{M}, g)$  топологически тривиально  $\mathbb{M} \approx \mathbb{R}^{1,3}$  и покрыто одной картой. Мы предполагаем, что координаты  $(x^\alpha) = (x^0, x^\mu)$  выбраны таким образом, что координата  $x^0$  является временем, т.е.  $g_{00} > 0$ . Кроме того, мы считаем, что все сечения  $x^0 = \text{const}$  – пространственноподобны.

Можно привести ряд физических аргументов [?], глава IV, §35 в пользу того, что тензор энергии-импульса материи, которая рассматривается как сплошная среда, имеет вид

$$T_{\text{м}}^{\alpha\beta} := (\mathcal{E} + \mathcal{P})u^\alpha u^\beta - \mathcal{P}g^{\alpha\beta}, \quad (5.68)$$

где  $\mathcal{E}(x)$  и  $\mathcal{P}(x)$  – плотность энергии и давление материи в точке  $x \in \mathbb{M}$ , и

$$u^\alpha := dx^\alpha/ds, \quad ds := \sqrt{|ds^2|}, \quad ds^2 := g_{\alpha\beta}dx^\alpha dx^\beta,$$

– четырехмерная скорость материи в той же точке, которая удовлетворяет тождеству  $u^\alpha u_\alpha = 1$ . Здесь мы предполагаем, что каждая точка материи движется вдоль времениподобной мировой линии  $x^\alpha(s)$  в будущее, т.е.  $u^0 > 0$ . Ясно, что мировые линии точек материи – это интегральные кривые векторного поля скорости  $u$ .

При рассмотрении моделей сплошной среды задают, как правило, не линии тока  $x^\alpha(s)$ , а векторное поле скоростей  $u^\alpha(s)$ . Мы предполагаем, что поле скоростей является достаточно гладким, и через каждую точку многообразия проходит одна и только одна линия тока. Математически это означает, что система уравнений

$$\frac{dy^\alpha}{ds} = u^\alpha(y),$$

с начальным условием  $y^\alpha(0) = x^\alpha$  имеет единственное решение для всех  $x \in \mathbb{M}$ , которое определено для всех  $s \in \mathbb{R}$ .

Поскольку  $u^\alpha$  и  $g^{\alpha\beta}$  являются, соответственно, компонентами вектора и тензора относительно преобразований координат, то мы считаем, что плотность энергии  $\mathcal{E}$  и давление материи  $\mathcal{P}$  являются достаточно гладкими скалярными полями (функциями) на пространстве-времени  $\mathbb{M}$ . В этом случае правая часть равенства (5.68) представляет собой контравариантный симметричный тензор второго ранга. Для обычной (наблюдаемой) материи плотность энергии предполагается положительной,  $\mathcal{E} > 0$ , а давление – неотрицательным,  $\mathcal{P} \geq 0^1$ .

<sup>1</sup> Давление, в принципе, может быть отрицательным. Примером является резина. Для нее уве-

**Замечание.** В нерелятивистской гидро- и газодинамике все уравнения записываются таким образом, что в них входит не сама энергия и давление, а только их градиенты. Это означает, что энергия и давление определены с точностью до добавления произвольной постоянной. В общей теории относительности ситуация отличается принципиально, т.к. уравнения меняются, если к  $\mathcal{E}$  или  $\mathcal{P}$  добавить постоянную. В частности, наличие космологической постоянной  $\Lambda$  можно интерпретировать как среду с постоянной плотностью энергии  $\mathcal{E} = \Lambda$  и постоянным давлением  $\mathcal{P} = -\mathcal{E} = -\Lambda$ . Если  $\mathcal{E} > 0$ , то давление отрицательно,  $\mathcal{P} < 0$ . Поэтому космологическую постоянную можно интерпретировать, как некоторую среду, заполняющую все пространство-время со свойствами обыкновенной резины.  $\square$

Из общих физических представлений следует, что след тензора энергии-импульса для обычной материи должен быть неотрицательным [?], глава IV, §34:

$$T_{\text{м}\alpha}{}^{\alpha} = \mathcal{E} - 3\mathcal{P} \geq 0. \quad (5.69)$$

Этим свойством обладает, в частности, тензор энергии-импульса для произвольного распределения точечных частиц (5.47). Отсюда вытекает ограничение на давление

$$\mathcal{P} \leq \frac{\mathcal{E}}{3}. \quad (5.70)$$

Поскольку давление, по предположению, неотрицательно, то с учетом равенства (5.70) существует два крайних случая. Если материя, которой заполнена вселенная, настолько разрежена, что давление можно считать равным нулю, то говорят, что материя пылевидна. Максимальное возможное давление,  $\mathcal{P} = \mathcal{E}/3$ , соответствует газу ультрарелятивистских частиц, скорости которых близки к скорости света. В этом случае говорят, что вселенная заполнена газом излучения или, просто, излучением.

$$\begin{aligned} \mathcal{P} = 0 & \quad - \text{пыль}, \\ \mathcal{P} = \frac{\mathcal{E}}{3} & \quad - \text{излучение}. \end{aligned} \quad (5.71)$$

Для обычной материи  $0 \leq \mathcal{P} \leq \mathcal{E}/3$ .

**Пример 5.9.1 (Нерелятивистская гидродинамика).** Рассмотрим пространство Минковского  $\mathbb{R}^{1,3}$  в декартовой системе координат с метрикой Лоренца  $\eta_{\alpha\beta} = \text{diag}(+---)$ . Пусть пространство-время заполнено идеальной (без вязкости) жидкостью. Течение жидкости описывается плотностью  $\rho$ , давлением  $\mathcal{P}$  и трехмерной скоростью  $u^\mu$ ,  $\mu = 1, 2, 3$ . Тензор энергии-импульса идеальной жидкости в общей теории относительности по определению имеет вид (5.68). Покажем, что уравнения движения нерелятивистской идеальной жидкости (если не считать уравнения состояния) следуют из закона сохранения четырехмерного тензора энергии-импульса,  $\partial_\beta T_{\text{м}}^{\alpha\beta} = 0$ .

В нерелятивистском приближении мы считаем, что пространственные компоненты скорости малы:  $u^0 \approx 1$ ,  $u^\mu \sim \epsilon \ll 1$ , где  $(u^\alpha) = (u^0, u^\mu)$ ,  $\alpha = 0, 1, 2, 3$ , и давление мало,  $\mathcal{P} \sim \epsilon^2 \ll \mathcal{E}$ . Кроме того, положим  $\mathcal{E} = \rho$ , где  $\rho$  – плотность жидкости, имея в виду формулу  $\mathcal{E} = \rho c^2$  при  $c = 1$ . Тогда в главном приближении компоненты тензора

---

личение объема по сравнению с состоянием равновесия приводит к увеличению давления. В современных космологических моделях предполагается наличие темной энергии. Этот вид материи имеет положительную плотность энергии, но отрицательное давление (см., раздел 8.1.3).

энергии-импульса равны:

$$\begin{aligned} T_{\text{м}}^{00} &= (\mathcal{E} + \mathcal{P})u^0u^0 - \mathcal{P} && \approx \rho, \\ T_{\text{м}}^{0\mu} &= T_{\text{м}}^{\mu 0} = (\mathcal{E} + \mathcal{P})u^0u^\mu && \approx \rho u^\mu, \\ T_{\text{м}}^{\mu\nu} &= (\mathcal{E} + \mathcal{P})u^\mu u^\nu - \mathcal{P}\eta^{\mu\nu} && \approx \rho u^\mu u^\nu - \mathcal{P}\eta^{\mu\nu}. \end{aligned} \quad (5.72)$$

Рассмотрим закон сохранения энергии-импульса  $\partial_\beta T_{\text{м}}^{\alpha\beta} = 0$ . Нулевая компонента этого равенства в главном приближении имеет вид

$$\partial_\beta T_{\text{м}}^{0\beta} = \partial_0 T_{\text{м}}^{00} + \partial_\mu T_{\text{м}}^{0\mu} \approx \partial_0 \rho + \partial_\mu (\rho u^\mu) = 0. \quad (5.73)$$

Полученное уравнение совпадает с *уравнением непрерывности*. Пространственные компоненты закона сохранения энергии-импульса в главном приближении приводят к равенству

$$\partial_\beta T_{\text{м}}^{\mu\beta} = \partial_0 T_{\text{м}}^{\mu 0} + \partial_\nu T_{\text{м}}^{\mu\nu} \approx \rho \partial_0 u^\mu + u^\mu [\partial_0 \rho + \partial_\nu (\rho u^\nu)] + \rho u^\nu \partial_\nu u^\mu - \eta^{\mu\nu} \partial_\nu \mathcal{P} = 0,$$

что, с учетом уравнения непрерывности (5.73), дает *уравнения Эйлера*

$$\partial_0 u^\mu + u^\nu \partial_\nu u^\mu = \frac{1}{\rho} \eta^{\mu\nu} \partial_\nu \mathcal{P}. \quad (5.74)$$

Если дополнить уравнение непрерывности и уравнение Эйлера уравнением состояния идеальной жидкости  $\mathcal{P} = \mathcal{P}(\rho)$ , связывающим давление и плотность, то получим полную систему уравнений для идеальной жидкости (пять уравнений на пять неизвестных). Таким образом уравнения движения нерелятивистской идеальной жидкости следуют из закона сохранения четырехмерного тензора энергии-импульса (5.68), дополненного уравнением состояния.

Эта же система уравнений (5.73), (5.74) описывает движение идеального газа. Разница заключается только в уравнении состояния. Для идеального газа уравнение состояния имеет вид

$$\mathcal{P} = \frac{\rho}{\mu} RT, \quad (5.75)$$

где  $\mu$ ,  $R$  и  $T$  есть, соответственно, молекулярный вес, универсальная газовая постоянная и абсолютная температура. При постоянной температуре  $T = \text{const}$  давление идеального газа прямо пропорционально плотности.  $\square$

Рассмотренный пример показывает, что в нерелятивистском пределе ковариантное сохранение тензора энергии-импульса сплошной среды  $\nabla_\beta T_{\text{м}}^{\alpha\beta} = 0$  сводится к уравнениям нерелятивистской гидродинамики идеальной жидкости. При этом плотность энергии  $\mathcal{E}$  мы отождествили с плотностью жидкости  $\rho$ . Напомним, что в релятивистской механике точечных частиц энергия и импульс частицы являются компонентами четырехмерного вектора, причем энергия представляет собой нулевую компоненту и не является скаляром. Для сплошной среды в общей теории относительности  $\mathcal{E}(x)$  и  $\mathcal{P}(x)$  – скалярные поля.

Наличие в пространстве-времени метрики и времениподобного векторного поля  $u$ ,  $u^2 = 1$ , позволяет определить проекционные операторы:

$$\Pi_\alpha^{\text{л}\beta} := u_\alpha u^\beta, \quad \Pi_\alpha^{\text{т}\beta} := \delta_\alpha^\beta - u_\alpha u^\beta.$$

В каждой точке  $x \in \mathbb{M}$  эти операторы проектируют тензорные поля, соответственно, на направление вектора скорости  $u$  и перпендикулярную гиперплоскость в касательном пространстве  $\mathbb{T}_x(\mathbb{M})$ . Например, проекция метрики имеет вид

$$\begin{aligned} g_{\alpha\beta}^L &:= \Pi_\alpha^L \gamma \Pi_\beta^L g_{\gamma\delta} = u_\alpha u_\beta, \\ g_{\alpha\beta}^T &:= \Pi_\alpha^T \gamma \Pi_\beta^T g_{\gamma\delta} = g_{\alpha\beta} - u_\alpha u_\beta. \end{aligned}$$

Ясно также, что

$$u^{L\alpha} := u^\beta \Pi_\beta^L = u^\alpha, \quad u^T := u^\beta \Pi_\beta^T = 0.$$

Поэтому тензор энергии-импульса (5.68) можно переписать с помощью проекционных операторов:

$$T_M^{\alpha\beta} = \mathcal{E} g^{L\alpha\beta} - \mathcal{P} g^{T\alpha\beta}. \quad (5.76)$$

Поскольку тензор энергии-импульса сплошной среды (5.68) не был получен из вариационного принципа, то на него необходимо наложить дополнительное условие

$$\nabla_\beta T_M^{\beta\alpha} = 0, \quad (5.77)$$

которое является условием совместности уравнений Эйнштейна. Более подробно

$$(\mathcal{E} + \mathcal{P}) u^\beta \nabla_\beta u^\alpha + u^\alpha \nabla_\beta [(\mathcal{E} + \mathcal{P}) u^\beta] - g^{\alpha\beta} \partial_\beta \mathcal{P} = 0, \quad (5.78)$$

где мы воспользовались условием метричности связности Леви-Чивиты  $\nabla_\beta g^{\gamma\alpha} = 0$ . Проекция этого уравнения на вектор  $u$  и перпендикулярную гиперплоскость имеют следующий вид

$$(\mathcal{E} + \mathcal{P}) \nabla_\alpha u^\alpha + u^\alpha \partial_\alpha \mathcal{E} = 0, \quad (5.79)$$

$$(\mathcal{E} + \mathcal{P}) u^\beta \nabla_\beta u^\alpha - (g^{\alpha\beta} - u^\alpha u^\beta) \partial_\beta \mathcal{P} = 0, \quad (5.80)$$

где мы воспользовались уравнением  $u_\alpha \nabla_\beta u^\alpha = 0$ , которое следует из условия  $u^2 = 0$  после дифференцирования. Легко проверить, что свертка уравнений (5.80) с ковектором  $u_\alpha$  тождественно обращается в нуль. Следовательно, только четыре уравнения из (5.79), (5.80) являются независимыми, и они эквивалентны условию ковариантного сохранения тензора энергии-импульса  $\nabla_\beta T_M^{\beta\alpha} = 0$ .

Уравнение (5.79) является ковариантным обобщением уравнения непрерывности для нерелятивистской жидкости (5.73), а уравнение (5.80) – ковариантным обобщением уравнения Эйлера (5.74). Эти уравнения представляют собой систему уравнений *релятивистской гидродинамики*.

Система уравнений (5.79), (5.80) вместе с уравнениями Эйнштейна не образует полной системы уравнений релятивистской гидродинамики. Ее необходимо дополнить уравнением состояния. Широкий класс моделей описывается уравнением состояния  $\mathcal{P} = \mathcal{P}(\mathcal{E})$ , связывающим давление с плотностью энергии в каждой точке пространства-времени. Такие жидкости называются *баротропными*.

Второе слагаемое в уравнении Эйлера (5.80) после опускания индекса имеет вид

$$\Pi_\alpha^T \partial_\beta \mathcal{P} = (\delta_\alpha^\beta - u_\alpha u^\beta) \partial_\beta \mathcal{P}.$$

Если оно равно нулю, т.е. градиент давления параллелен вектору скорости, то уравнение Эйлера упрощается  $u^\beta \nabla_\beta u^\alpha = 0$ . Это есть уравнение экстремалей. В этом и только в этом случае точки жидкости движутся так же, как и точечные частицы под действием одних гравитационных сил.



Для пылевидной материи давление равно нулю и система уравнений релятивистской гидродинамики существенно упрощается:

$$\nabla_\alpha (\mathcal{E} u^\alpha) = 0, \quad u^\beta \nabla_\beta u^\alpha = 0. \quad (5.81)$$

Мы видим, что пылевидная материя движется вдоль экстремалей, как множество точечных частиц.

## 5.10 Скалярное поле в общей теории относительности

Пусть на многообразии (пространстве-времени)  $M$  произвольной размерности  $n$  задана аффинная геометрия, т.е. задана метрика  $g$  лоренцевой сигнатуры и связность  $\Gamma$ . Лагранжиан скалярного поля, минимальным образом взаимодействующего с гравитацией, выбирается в виде

$$L = \sqrt{|g|} \left( \frac{1}{2} \partial \varphi^2 - V(\varphi) \right), \quad (5.82)$$

где введено сокращенное обозначение

$$\partial \varphi^2 := g^{\alpha\beta} \partial_\alpha \varphi \partial_\beta \varphi,$$

для кинетической части лагранжиана и  $V(\varphi)$  – потенциал скалярного поля (достаточно гладкая положительно определенная функция от  $\varphi$ ), включающий массовый член. Лагранжиан (5.82) зависит только от метрики, а аффинная связность в него не входит. Это означает, что лагранжиан скалярного поля при минимальной подстановке имеет один и тот же вид как в общей теории относительности, так и в аффинной геометрии общего вида.

Вычислим вариационные производные действия:

$$S_{,\varphi} := \frac{\delta S}{\delta \varphi} = -\sqrt{|g|} \left( \tilde{\square} \varphi + V'(\varphi) \right) = 0, \quad (5.83)$$

$$S_{,\alpha\beta} := \frac{\delta S}{\delta g^{\alpha\beta}} = \frac{1}{2} \sqrt{|g|} T_{\alpha\beta}, \quad (5.84)$$

где

$$\tilde{\square} := g^{\alpha\beta} \tilde{\nabla}_\alpha \tilde{\nabla}_\beta.$$

– инвариантный волновой оператор, построенный по псевдоримановой метрике  $g_{\alpha\beta}$  и

$$T_{\alpha\beta} = \partial_\alpha \varphi \partial_\beta \varphi - g_{\alpha\beta} \left( \frac{1}{2} \partial \varphi^2 - V \right) \quad (5.85)$$

– ковариантное обобщение тензора энергии-импульса для пространства Минковского. Уравнение (5.83) является инвариантным уравнением движения для скалярного поля в аффинной геометрии. Вариационная производная (5.85) определяет тензор энергии-импульса скалярного поля, который служит источником для гравитационного поля (компонент метрики) в уравнениях Эйнштейна.

Если действие инвариантно относительно общих преобразований координат, которые параметризуются  $n$  функциями, то согласно второй теореме Нетер уравнения движения удовлетворяют  $n$  тождествам. Допустим, что действие зависит только от метрики и скалярного поля. Тогда инвариантность действия означает равенство нулю вариации

$$\delta S = \int dx \sqrt{|g|} (S,^{\alpha\beta} \delta g_{\alpha\beta} + S,_{\varphi} \delta \varphi) = 0.$$

Отсюда с учетом явного вида вариации компонент метрики (1.159) и скалярного поля (1.154) получаем, что уравнения движения (5.83) и (5.84) удовлетворяют  $n$  тождествам:

$$2\tilde{\nabla}_{\alpha} S,^{\alpha}_{\beta} - S,_{\varphi} \partial_{\beta} \varphi = 0, \quad (5.86)$$

где  $\tilde{\nabla}_{\alpha}$  – ковариантная производная с символами Кристоффеля.

С формальной точки зрения сдвиги на постоянный вектор,  $x^{\alpha} \mapsto x^{\alpha} + a^{\alpha}$ ,  $a^{\alpha} = \text{const}$ , образуют подгруппу группы общих преобразований координат. Поэтому так же, как и в пространстве Минковского, можно построить полную “энергию” и “импульс” скалярного поля. Эти величины будут сохраняться на уравнениях движения, однако им не всегда можно придать физический смысл, т.к. понятие декартовой системы координат в общем случае отсутствует. Это построение имеет смысл в асимптотически плоском пространстве-времени, когда на больших расстояниях пространство-время приближается к пространству Минковского. Это же верно и для момента количества движения.

Рассмотрим действительное скалярное поле, которое минимальным образом взаимодействует с гравитацией в общей теории относительности. В этом случае действие имеет вид

$$S = \kappa S_{\text{HE}} + S_{\varphi}, \quad (5.87)$$

где  $S_{\text{HE}}$  – действие Гильберта–Эйнштейна (5.6) и  $S_{\varphi}$  – действие для скалярного поля с лагранжианом (5.82). Добавление к действию скалярного поля действия Гильберта–Эйнштейна дает кинетический член для метрики. Поэтому вариация этого действия по обратной метрике приводит к уравнениям движения Эйнштейна

$$\frac{1}{\sqrt{|g|}} \frac{\delta S}{\delta g^{\alpha\beta}} : \quad \kappa \left( \tilde{R}_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} \tilde{R} \right) + g_{\alpha\beta} \Lambda + \frac{1}{2} T_{\alpha\beta} = 0, \quad (5.88)$$

где  $T_{\alpha\beta}$  – тензор энергии-импульса скалярного поля (5.85). Поскольку действие Гильберта–Эйнштейна не зависит от скалярного поля, то уравнение движения для скалярного поля остается прежним (5.83). Таким образом, полная система уравнений движения для скалярного поля в общей теории относительности состоит из уравнений (5.83) и (5.88).

Покажем, что уравнение движения для скалярного поля (5.83) являются следствием уравнений Эйнштейна (5.88).

**Предложение 5.10.1.** *Если в некоторой области пространства-времени  $\mathbb{U} \subset \mathbb{M}$  градиент скалярного поля отличен от нуля,  $(\partial_{\alpha} \varphi \neq 0)$ , то в этой области уравнение для скалярного поля (5.83) является следствием уравнений Эйнштейна (5.88).*

*Доказательство.* Подействуем оператором ковариантного дифференцирования  $\tilde{\nabla}^{\beta}$  на уравнение (5.88). В силу свернутых тождеств Бианки (1.150)

$$\tilde{\nabla}^{\beta} \left( \tilde{R}_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} \tilde{R} \right) = 0,$$

получим равенство

$$\tilde{\nabla}^\beta T_{\alpha\beta} = \partial_\alpha \varphi (\tilde{\square} \varphi + V') = 0.$$

Отсюда вытекает сделанное утверждение.  $\square$

Доказанное предложение позволяет вместо решения полной системы уравнений для скалярного поля и метрики ограничиться решением только уравнений Эйнштейна.

## 5.11 Электромагнитное поле в общей теории относительности

Лагранжиан электромагнитного поля на многообразии  $\mathbb{M}$  с заданной аффинной геометрией при минимальной подстановке принимает вид

$$L_{\text{EM}} = -\frac{1}{4} \sqrt{|g|} g^{\alpha\beta} g^{\gamma\delta} F_{\alpha\gamma} F_{\beta\delta} := -\frac{1}{4} \sqrt{|g|} F^2, \quad (5.89)$$

где  $F_{\alpha\beta} := \partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha$  – напряженность электромагнитного поля. Ему соответствует действие

$$S_{\text{EM}} = \int_{\mathbb{M}} dx L_{\text{EM}}. \quad (5.90)$$

Как и в случае скалярных полей, лагранжиан (5.89) не зависит от аффинной связности. Это связано с тем, что  $F_{\alpha\beta}$  – это компоненты локальной формы кривизны для  $U(1)$  связности и являются компонентами тензора независимо от того задана или нет на многообразии  $\mathbb{M}$  аффинная геометрия. С геометрической точки зрения в выражении для  $F_{\alpha\beta}$  при минимальной подстановке нет никакой необходимости заменять частные производные на ковариантные, т.к. локальная форма кривизны для  $U(1)$  связности уже является тензором относительно общих преобразований координат.

Уравнения движения для электромагнитного поля и тензор энергии-импульса получаются варьированием соответствующего действия

$$\sqrt{|g|} S_{\text{EM}, \alpha} := \frac{\delta S_{\text{EM}}}{\delta A_\alpha} = \partial_\beta (\sqrt{|g|} F^{\beta\alpha}) = \sqrt{|g|} \tilde{\nabla}_\beta F^{\beta\alpha} = 0, \quad (5.91)$$

$$\sqrt{|g|} S_{\text{EM}, \alpha\beta} := \frac{\delta S_{\text{EM}}}{\delta g^{\alpha\beta}} = \frac{1}{2} \sqrt{|g|} T_{\text{EM}\alpha\beta} = -\frac{1}{2} \sqrt{|g|} F_{\alpha\gamma} F_\beta{}^\gamma + \frac{1}{8} \sqrt{|g|} g_{\alpha\beta} F^2. \quad (5.92)$$

Отсюда следует выражение для тензора энергии-импульса электромагнитного поля

$$T_{\text{EM}\alpha\beta} := -F_{\alpha\gamma} F_\beta{}^\gamma + \frac{1}{4} g_{\alpha\beta} F^2. \quad (5.93)$$

Вариация действия по метрике (5.92) приводит к тензору энергии-импульса электромагнитного поля (5.93), стоящему в правой части уравнений Эйнштейна (5.1). Он является ковариантным обобщением симметричного канонического тензора энергии-импульса в пространстве Минковского. В этом отношении ситуация с электромагнитным полем такая же, как и для скалярного поля.

Если присутствуют источники электромагнитного поля, то в правой части уравнения (5.91) появляется электрический ток:

$$\tilde{\nabla}_\beta F^{\beta\alpha} = J^\alpha, \quad (5.94)$$

где  $J = (J^\alpha)$  – вектор тока. Происхождение электрического тока в настоящий момент не имеет значения.

**Предложение 5.11.1.** Если пространство-время топологически тривиально (диффеоморфно  $\mathbb{R}^n$ ), то система уравнений второго порядка для потенциала  $A_\alpha$  (5.94) эквивалентна системе уравнений первого порядка для компонент напряженности  $F_{\alpha\beta} = -F_{\beta\alpha}$  электромагнитного поля:

$$\begin{aligned}\tilde{\nabla}_\beta F^{\beta\alpha} &= J^\alpha, \\ \partial_\alpha F_{\beta\gamma} + \partial_\beta F_{\gamma\alpha} + \partial_\gamma F_{\alpha\beta} &= 0\end{aligned}\tag{5.95}$$

*Доказательство.* Пусть  $F_{\alpha\beta} = \partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha$ . Тогда из уравнения (5.94) следует система уравнений (5.95). Обратно. В силу леммы Пуанкаре из второго уравнения (5.95) для односвязных многообразий следует существование потенциала  $A_\alpha$ . Подстановка соответствующего выражения в первое уравнение (5.95) приводит к (5.94).  $\square$

**Определение.** Система уравнений первого порядка (5.95) для напряженности электромагнитного поля  $F_{\alpha\beta} = -F_{\beta\alpha}$  называется *уравнениями Максвелла*.  $\square$

Действие для лагранжиана (5.89) инвариантно относительно общих преобразований координат. Соответствующие вариации полей имеют вид (см. раздел 1.11)

$$\begin{aligned}\delta A_\alpha &= -\partial_\alpha \epsilon^\beta A_\beta - \epsilon^\beta \partial_\beta A_\alpha, \\ \delta g^{\alpha\beta} &= g^{\alpha\gamma} \partial_\gamma \epsilon^\beta + g^{\beta\gamma} \partial_\gamma \epsilon^\alpha - \epsilon^\gamma \partial_\gamma g^{\alpha\beta}.\end{aligned}$$

Отсюда, согласно второй теореме Нетер (4.46), следует зависимость уравнений движения

$$\partial_\beta S,^\beta A_\alpha + S,^\beta F_{\beta\alpha} - \partial_\beta S,^\beta{}_\alpha - \partial_\beta S,^\alpha{}_\beta - S,_{\beta\gamma} \partial_\alpha g^{\beta\gamma} = 0.\tag{5.96}$$

Или, в ковариантном виде,

$$\tilde{\nabla}_\beta S,^\beta A_\alpha + S,^\beta F_{\beta\alpha} - 2\tilde{\nabla}^\beta S,_{\beta\alpha} = 0.\tag{5.97}$$

Если выполнены уравнения движения для электромагнитного поля (5.91), то с учетом свернутых тождеств Бианки соотношение (5.97) принимает вид

$$\tilde{\nabla}_\beta T_{\text{ем}\alpha}{}^\beta = 0.\tag{5.98}$$

Полученное равенство, выполненное для всех решений уравнений Эйлера–Лагранжа, можно интерпретировать, как ковариантное обобщение закона сохранения тензора энергии-импульса.

Действие для электромагнитного поля инвариантно также относительно калибровочных преобразований

$$A'_\alpha := A_\alpha + \partial_\alpha \phi,\tag{5.99}$$

где  $\phi(x)$  – произвольная функция, при которых метрика не меняется. Нетрудно видеть, что при калибровочном преобразовании (5.99) компоненты напряженности электромагнитного поля инвариантны. Из калибровочной инвариантности в силу второй теоремы Нетер следует зависимость уравнений движения:

$$\tilde{\nabla}_\alpha S,^\alpha = 0.\tag{5.100}$$

С учетом уравнения Максвелла (5.94) это равенство приводит к закону сохранения электрического тока:  $\tilde{\nabla}_\alpha J^\alpha = 0$ . Если ток возникает при варьировании некоторого калибровочно инвариантного действия для полей заряженной материи, то сохранение тока будет выполняться автоматически в силу второй теоремы Нетер. Если же электрический ток вводится в уравнения Максвелла “руками”, то условие  $\tilde{\nabla}_\alpha J^\alpha = 0$  необходимо для самосогласованности уравнений.

**Предложение 5.11.2.** Действие электромагнитного поля в аффинной геометрии (5.90) инвариантно относительно преобразований Вейля:

$$g_{\alpha\beta} \mapsto \bar{g}_{\alpha\beta} = e^{2\phi} g_{\alpha\beta}, \quad A_\alpha \mapsto \bar{A}_\alpha = A_\alpha, \quad (5.101)$$

где  $\phi(x) \in C^2(\mathbb{M})$  – произвольная вещественнозначная функция.

*Доказательство.* Утверждение следует из равенства

$$\sqrt{|g|} g^{\alpha\beta} g^{\gamma\delta} = \sqrt{|\bar{g}|} \bar{g}^{\alpha\beta} \bar{g}^{\gamma\delta}. \quad \square$$

**Замечание.** Вейлевская инвариантность действия электромагнитного поля является спецификой четырехмерности пространства-времени. Если размерность пространства-времени отлична от четырех, то след тензора энергии-импульса электромагнитного поля отличен от нуля.  $\square$

Равенство нулю следа тензора энергии-импульса электромагнитного поля связано с наличием вейлевской калибровочной инвариантности. Этот факт является общим.

**Предложение 5.11.3.** Пусть действие зависит от метрики  $g_{\alpha\beta}$  и некоторого набора полей материи  $\varphi^A$

$$S_M = \int dx L_M(g, \varphi).$$

Если действие инвариантно относительно преобразований Вейля, не затрагивающих поля материи,

$$g_{\alpha\beta} \mapsto \bar{g}_{\alpha\beta} = e^{2\phi} g_{\alpha\beta}, \quad \varphi^A \mapsto \bar{\varphi}^A = \varphi^A,$$

то след тензора энергии-импульса полей материи равен нулю,  $T_{M\alpha}{}^\alpha = 0$ .

*Доказательство.* Поскольку параметр преобразования Вейля зависит от точки пространства-времени, то справедлива вторая теорема Нетер. В рассматриваемом случае это означает следующее. Инвариантность действия имеет вид

$$\delta S_M = \int dx \frac{\delta S_M}{\delta g^{\alpha\beta}} \delta g^{\alpha\beta} = 0.$$

Учтем определение тензора энергии-импульса в общей теории относительности (5.10) и выражение для бесконечно малых преобразований Вейля

$$\delta g^{\alpha\beta} = -2\phi g^{\alpha\beta}.$$

Тогда равенство нулю вариации действия полей материи равносильно равенству  $g^{\alpha\beta} T_{M\alpha\beta} = 0$ .  $\square$

## 5.12 Выбор системы координат

Уравнения общей теории относительности ковариантны относительно общих преобразований координат. Эту свободу можно использовать для выбора подходящей системы отсчета, которая может упростить уравнения Эйнштейна, например, тем, что метрика будет определяться не десятью (в четырех измерениях), а меньшим числом компонент. Поскольку преобразования координат параметризуются четырьмя функциями, то в общем случае метрика будет иметь не менее шести компонент. В настоящем разделе будут описаны несколько широко распространенных способа фиксирования системы координат.

### 5.12.1 Сопутствующая система координат

Рассмотрим уравнения Эйнштейна

$$\kappa \left( R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} R \right) = -\frac{1}{2} T_{\alpha\beta} \quad (5.102)$$

для сплошной среды с тензором энергии-импульса (см. раздел 5.9)

$$T_{\alpha\beta} = (\mathcal{E} + \mathcal{P}) u^\alpha u^\beta - \mathcal{P} g^{\alpha\beta}. \quad (5.103)$$

Для получения замкнутой системы уравнений уравнения Эйнштейна необходимо дополнить законом сохранения (уравнениями релятивистской гидродинамики)

$$\nabla_\beta T_{\alpha}^{\beta} = 0 \quad (5.104)$$

и уравнением состояния среды

$$\mathcal{P} = \mathcal{P}(\mathcal{E}), \quad (5.105)$$

предполагая среду баротропной. Если среда не является баротропной, то возникают дополнительные уравнения. Система уравнений (5.102), (5.104) и (5.105) образуют полную систему для неизвестных функций:  $g_{\alpha\beta}$ ,  $u^\alpha$ ,  $\mathcal{P}$  и  $\mathcal{E}$ . Нетрудно проверить, что число уравнений равно числу неизвестных (напомним, что на вектор скорости  $u$  наложено условие  $u^2 = 1$  и число его независимых компонент на единицу меньше размерности пространства-времени). Если  $n = 4$ , то число уравнений и число неизвестных равно пятнадцати.

Поскольку плотность энергии  $\mathcal{E}(x)$  и давление  $\mathcal{P}(x)$  являются скалярными полями, то уравнение состояния (5.105) является корректным.

По построению, все уравнения ковариантны. Поэтому преобразования координат можно использовать для упрощения системы уравнений. Обычно преобразования координат используют для фиксирования части компонент метрики. Однако для системы уравнений (5.102), (5.104) и (5.105) существует другая естественная возможность. Если размерность пространства-времени равна  $n$ , то в нашем распоряжении имеется  $n$  функций, которых достаточно для фиксирования векторного поля скорости. Тем самым число неизвестных функций уменьшится, и задача упростится. Такой подход часто используется в космологии.

Опишем этот способ задания системы координат. Рассмотрим псевдориманово многообразие  $\mathbb{M}$ ,  $\dim \mathbb{M} = n$ , с метрикой  $g$  лоренцевой сигнатуры. Пусть на нем задано произвольное достаточно гладкое времениподобное векторное поле  $u = u^\alpha(x) \partial_\alpha$ , всюду отличное от нуля,  $u^2 \neq 0$ . Не ограничивая общности, будем считать, что

$$u^2 := g_{\alpha\beta} u^\alpha u^\beta = 1.$$

В противном случае можно просто заменить  $u^\alpha \mapsto u^\alpha / u^2$ .

В некоторой окрестности произвольной точки существует такая система координат, в которой все компоненты векторного поля, кроме одной, равны нулю. Для единичного времениподобного векторного поля нетривиальная компонента равна единице:

$$(u^\alpha) = (1, 0, \dots, 0). \quad (5.106)$$

**Определение.** Система координат, в которой для единичного времениподобного векторного поля выполнено условие (5.106), называется *сопутствующей векторному полю  $u$* .  $\square$

С физической точки зрения сопутствующую систему координат можно представить следующим образом. Допустим, что некоторая среда заполняет все пространство-время. Тогда с каждой точкой среды связана мировая линия  $x(s)$  (линия тока). Мы предполагаем, что касательные векторы к мировым линиям образуют достаточно гладкое времениподобное векторное поле (вектор скорости)

$$u = u^\alpha \partial_\alpha, \quad u^\alpha := \frac{dx^\alpha}{ds}, \quad ds := \sqrt{g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta},$$

на многообразии  $\mathbb{M}$ . Выберем произвольное сечение  $\mathbb{S}$ , которое пересекает все линии тока один раз, и зададим произвольную систему координат  $x^\mu$ ,  $\mu = 1, \dots, n-1$ , на  $\mathbb{S}$ . Это сечение совсем не обязано быть пространственноподобным. Тогда сопутствующими координатами произвольной точки  $y \in \mathbb{M}$  является набор чисел  $(x^0 := s, x^\mu)$ , где  $x^\mu$  – координаты точки пересечения поверхности  $\mathbb{S}$  с кривой  $x(s)$ , проходящей через точку  $y$ . Для определенности будем считать, что каждая линия тока пересекает поверхность  $\mathbb{S}$  при  $s = 0$ .

**Замечание.** В предыдущем разделе мы установили, что пылевидная материя движется вдоль экстремалей (5.81). Это значит, что в общем случае при наличии давления или других негравитационных сил линии тока среды отличаются от экстремалей.  $\square$

Сопутствующая векторному полю система координат определена неоднозначно. Действительно, совершим преобразование координат  $x^\alpha \mapsto x^{\alpha'}(x)$ . Тогда компоненты скорости преобразуются по тензорному закону:

$$u^\alpha \mapsto u^{\alpha'} := \frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^\alpha} u^\alpha.$$

Если до и после преобразования координат система координат является сопутствующей, то функции преобразования координат должны удовлетворять следующей системе уравнений

$$1 = \frac{\partial x^{0'}}{\partial x^0}, \quad 0 = \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^0}.$$

Общее решение данной системы уравнений имеет вид

$$x^0 \mapsto x^{0'} = x^0 + f(\mathbf{x}), \quad x^\mu \mapsto x^{\mu'} = x^\mu + f^\mu(\mathbf{x}), \quad (5.107)$$

где  $f, f^\mu$  –  $n$  произвольных функций координат на сечении  $\mathbb{S} \subset \mathbb{M}$  и  $\mathbf{x} = (x^\mu)$ . Функция  $f$  соответствует произволу в выборе сечения  $x^0 = \text{const}$ , и функции  $f^\mu$  – свободе в выборе координат  $x^\mu$  на данных сечениях.

Таким образом мы устранили  $n$  неизвестных функций в полной системе уравнений (5.102), (5.104) и (5.105). В этой системе координат тензор энергии-импульса (5.103) принимает вид

$$T_{\mathbf{m}}^{00} = (\mathcal{E} + \mathcal{P}) - \mathcal{P}g^{00}, \quad T_{\mathbf{m}}^{0\mu} = -\mathcal{P}g^{0\mu}, \quad T_{\mathbf{m}}^{\mu\nu} = -\mathcal{P}g^{\mu\nu}.$$

В общем случае ни он, ни тензор энергии-импульса с одним опущенным индексом индексом  $T_{\mathbf{m}\alpha}^\beta$  не будут диагональными.

Если задано единичное времениподобное векторное поле  $u$ , то в каждой точке пространства-времени  $x \in \mathbb{M}$  в касательном пространстве  $T_x(\mathbb{M})$  его можно дополнить  $n-1$  линейно независимыми векторами  $e_\mu$ ,  $\mu = 1, \dots, n-1$ , которые перпендикулярны вектору  $u$ . Тогда совокупность векторов  $\{u, e_\mu\}$  образует в каждой точке

репер. Ясно, что векторы  $e_\mu$  пространственноподобны, и их можно выбрать достаточно гладкими. Тогда они задают  $(n-1)$ -мерное распределение пространственноподобных векторных полей на  $\mathbb{M}$ . Согласно теореме Фробениуса для этого распределения существуют интегральные подмногообразия тогда и только тогда, когда векторные поля  $e_\mu$  находятся в инволюции. В общем случае это не так (это зависит от метрики). Отсюда следует, что остаточного произвола в выборе сопутствующей системы координат (5.107) недостаточно для того, чтобы выбрать секущую поверхность  $\mathbb{S}$  таким образом, чтобы вектор  $u$  был к ней всюду ортогонален.

Тем не менее мы сделаем предположение, что существует семейство пространственноподобных сечений пространства-времени таких, что вектор скорости сплошной среды всюду перпендикулярен этим поверхностям.

Выберем базис касательных пространств, состоящий из векторного поля скоростей сплошной среды и координатного базиса на секущих пространственноподобных поверхностях  $\{u, \partial_\mu\}$ . Тогда, по предположению, метрика в этом базисе будет иметь блочно диагональный вид

$$g_{ab} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & g_{\mu\nu} \end{pmatrix}. \quad (5.108)$$

Это значит, что в рассматриваемом базисе материя покоится, что оправдывает название сопутствующая.

### 5.12.2 Временная калибровка

Рассмотрим многообразие  $\mathbb{M}$ ,  $\dim \mathbb{M} = n$ , на котором задана метрика лоренцевой сигнатуры  $g_{\alpha\beta}(x)$ ,  $\text{sign } g_{\alpha\beta} = (+ - \dots -)$ .

**Определение.** Система координат, в которой метрика имеет блочно диагональный вид (5.108) где  $g_{\mu\nu}$  – отрицательно определенная риманова метрика на пространственноподобных сечениях  $x^0 = \text{const}$ , называется *временной калибровкой*. Эту систему координат называют также *синхронной*, *гауссовой* или *полугеодезической*.  $\square$

В синхронной системе отсчета координата  $x^0$  является временем и явно выделена. Напомним, что греческие буквы из начала алфавита пробегают все значения индексов:  $\alpha, \beta, \dots = 0, 1, \dots, n-1$ , а из середины – только пространственные:  $\mu, \nu, \dots = 1, 2, \dots, n-1$ .

При переходе в синхронную систему отсчета  $n$  произвольных функций, параметризующих диффеоморфизмы, используются для фиксирования  $n$  компонент метрики:

$$g_{00} = 1, \quad g_{0\mu} = 0.$$

**Замечание.** Названия гауссова или полугеодезическая система координат распространены в математической литературе, когда рассматриваются римановы пространства с положительно определенной метрикой. В физической литературе, где преимущественно рассматриваются многообразия с метрикой лоренцевой сигнатуры, чаще употребляют термины временная калибровка или синхронная система координат, потому что в этой системе отсчета координата  $x^0$  действительно играет роль наблюдаемого времени.  $\square$

Название синхронная система координат для метрики (??) оправдано следующим обстоятельством.



### Синхронизация часов

Рассмотрим произвольную систему координат. В общем случае интервал между двумя близкими событиями  $(x^\alpha)$  и  $(x^\alpha + dx^\alpha)$  имеет вид

$$ds^2 = g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta.$$

Предположим, что координата  $x^0$  является наблюдаемым временем, т.е.  $g_{00} > 0$ , и все сечения  $x^0 = \text{const}$  пространственноподобны. Если два события С и D произошли в данной системе координат в одной и той же точке пространства, то они имеют координаты  $C = (x_C^0, x^\mu)$  и  $D = (x_D^0, x^\mu)$ . При этом данные события разделены интервалом собственного времени

$$\Delta s = \int_{x_C^0}^{x_D^0} dx^0 \sqrt{g_{00}}. \quad (5.109)$$

Этот интеграл равен длине времениподобной кривой

$$x^0 = x_C^0 + (x_D^0 - x_C^0)\tau, \quad x^\mu = \text{const}, \quad \tau \in [0, 1],$$

соединяющей события С и D. Конечно, в другой системе координат эти события могут произойти не только в разное наблюдаемое время, но и в разных точках пространства.

Таким образом, если два события, произошедшие в одной точке пространства в данной системе координат, разделены наблюдаемым временем  $x_D^0 - x_C^0$ , то они разделены интервалом собственного времени (5.109). При этом нулевая компонента метрики  $g_{00}$  определяет различие собственного и наблюдаемого времени для событий, произошедших в одной точке.

Теперь определим понятие одновременности для событий, которые произошли в двух разных, но близких точках пространства в данной фиксированной системе координат. Пусть событие А имеет пространственные координаты  $x^\mu$ , а событие В – близкие координаты  $x^\mu + dx^\mu$ . На рис.5.1 сплошными линиями показаны временные оси, проходящие через точки А и В. Возникает следующий вопрос одновременности. Допустим, что событие А имеет координаты  $(x^0, x^\mu)$ . Какова временная координата  $x^0 + \Delta x^0$  события, произошедшего в точке В, которое можно назвать одновременным с событием А?

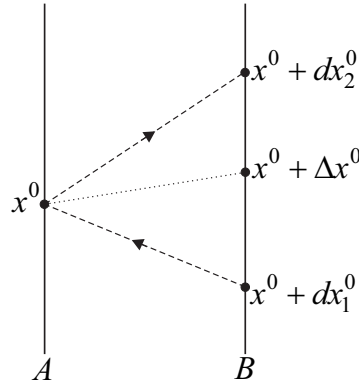


Рис. 5.1: Одновременность близких событий А и В.

Чтобы определить одновременность, испустим свет в точке В в некоторый момент времени  $x^0 + dx_1^0$  (величина  $dx_1^0$  отрицательна). Как только свет попадет в точку А,

сразу отразим его. Допустим, что свет вернулся в точку В в момент времени  $x^0 + dx_2^0$ . Поскольку для света  $ds^2 = 0$ , то изменение наблюдаемого времени в обоих случаях должно удовлетворять уравнению

$$g_{00}(dx_{1,2}^0)^2 + 2g_{0\mu}dx_{1,2}^0dx^\mu + g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu = 0.$$

Это квадратное уравнение имеет два решения:

$$\begin{aligned} dx_1^0 &= \frac{1}{g_{00}} \left[ -g_{0\mu}dx^\mu - \sqrt{(g_{0\mu}g_{0\nu} - g_{\mu\nu}g_{00})dx^\mu dx^\nu} \right], \\ dx_2^0 &= \frac{1}{g_{00}} \left[ -g_{0\mu}dx^\mu + \sqrt{(g_{0\mu}g_{0\nu} - g_{\mu\nu}g_{00})dx^\mu dx^\nu} \right]. \end{aligned}$$

Поскольку мы предположили, что  $g_{00} > 0$  и метрика  $g_{\mu\nu}$  отрицательно определена, то отсюда вытекает, что  $dx_2^0 > 0$ , а  $dx_1^0 < 0$ .

**Определение.** Назовем событие в точке В *одновременным* событию А =  $(x^0, x^\mu)$ , если его временная координата равна  $x^0 + \Delta x^0$ , где

$$\Delta x^0 := \frac{dx_1^0 + dx_2^0}{2} = -\frac{g_{0\mu}dx^\mu}{g_{00}},$$

т.е. лежит посередине между  $x^0 + dx_2^0$  и  $x^0 + dx_1^0$ .  $\square$

Таким образом можно синхронизировать часы, расположенные в различных, но близких точках пространства. Этот процесс можно продолжить вдоль произвольной кривой в пространстве. Конечно, данная процедура синхронизации часов зависит от выбора системы координат (нековариантна) и зависит также от выбора кривой, соединяющей две точки пространства-времени.

Рассмотрим замкнутую кривую  $\gamma$  в пространстве-времени с началом и концом в точке А. Произведем синхронизацию часов вдоль кривой  $\gamma$  описанным выше способом. Тогда после возвращения в точку А временная координата получит приращение

$$\Delta x^0 := - \oint_{\gamma} \frac{g_{0\mu}dx^\mu}{g_{00}}.$$

Отсюда следует, что синхронизация часов в общем случае невозможна, т.к. приращение  $\Delta x^0$  в исходной точке А может быть отлично от нуля. Кроме того, если мы хотим синхронизировать часы во всей области пространства-времени  $\mathbb{U} \subset \mathbb{M}$ , которая покрывается данной системой координат, то равенство  $\Delta x^0 = 0$  должно также выполняться для любой замкнутой кривой  $\gamma$ , целиком лежащей в  $\mathbb{U}$ . Отсюда вытекает

**Предложение 5.12.1.** *Для того, чтобы в выбранной системе координат  $x^\alpha$ , где  $x^0$  – время и все сечения  $x^0 = \text{const}$  пространственноподобны, покрывающей некоторую область  $\mathbb{U} \subset \mathbb{M}$ , можно было синхронизировать часы во всей области  $\mathbb{U}$  необходимо и достаточно чтобы  $g_{0\mu} = 0$ .*  $\square$

Если в некоторой области смешанные компоненты метрики равны нулю,  $g_{0\mu} = 0$ , то часы можно синхронизировать. В этом случае одновременными будут те события, которые происходят при одинаковом значении наблюдаемого времени  $x_0$ .

Вернемся к рассмотрению синхронной системы координат и докажем теорему существования.

**Предложение 5.12.2.** Пусть задано пространство-время  $\mathbb{M}$  с метрикой лоренцевой сигнатуры. Тогда в некоторой окрестности каждой точки  $x \in \mathbb{M}$  существует система координат, в которой метрика имеет блочно диагональный вид (??).

*Доказательство.* Выберем в многообразии  $\mathbb{M}$  произвольную достаточно гладкую пространственноподобную гиперповерхность  $\mathbb{N}$ , содержащую точку  $x \in \mathbb{N} \hookrightarrow \mathbb{M}$ . Пусть  $y^\mu$  – некоторая система координат на гиперповерхности  $\mathbb{N}$  в окрестности точки  $x$ . Построим на  $\mathbb{N}$  векторное поле  $n$ , перпендикулярное к гиперповерхности. Через каждую точку  $y \in \mathbb{N}$  в направлении  $n$  проведем экстремаль в обоих направлениях. Мы уже знаем, что такая экстремаль существует и единственна (см. раздел 2). Поскольку гиперповерхность пространственноподобна, то векторное поле и экстремали времениподобны. Выберем в качестве канонического параметра вдоль каждой экстремали ее длину  $t$  таким образом, чтобы гиперповерхность  $\mathbb{N}$  задавалась уравнением  $t = 0$ . Тогда в некоторой окрестности  $\mathbb{U}$  гиперповерхности,  $\mathbb{U} \subset \mathbb{M}$ , будет определена система координат  $y = (y^0 := t, y^\mu) \in \mathbb{U}$ . Это и есть искомая синхронная система координат.

Покажем это. По построению, координатная кривая  $(y^0 = t, y^\mu = \text{const})$ ,  $t \in \mathbb{R}$ , является экстремалью. Ее вектор скорости в построенной системе координат имеет одну отличную от нуля компоненту  $\dot{y}^\alpha = \delta_0^\alpha$ . Поскольку экстремаль удовлетворяет уравнению

$$\ddot{y}^\alpha = -\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha \dot{y}^\beta \dot{y}^\gamma,$$

то в построенной системе координат на метрику наложены условия  $\Gamma_{00}^\alpha = 0$ . Опустив индекс  $\alpha$ , получим уравнения на компоненты метрики:

$$\partial_0 g_{0\alpha} - \frac{1}{2} \partial_\alpha g_{00} = 0. \quad (5.110)$$

Поскольку в качестве параметра вдоль экстремали выбрана ее длина, то касательный вектор  $\partial_0$  имеет единичную длину. Следовательно, в построенной системе координат  $g_{00} = 1$ . Тогда уравнения (5.110) примут вид  $\partial_0 g_{0\alpha} = 0$ , т.е. компоненты  $g_{0\mu}$  не зависят от времени. Кроме того, вектор скорости, по построению, перпендикулярен гиперповерхности на  $\mathbb{N}$ . Это значит, что в начальный момент времени  $t$  пространственно-временные компоненты метрики равны нулю,  $g_{0\mu}(t = 0) = 0$ . Поскольку они не зависят от времени, то это равенство выполнено всюду в  $\mathbb{U}$ . Тем самым построенная система координат является синхронной.  $\square$

Ниже мы докажем обратное утверждение: если метрика имеет блочно диагональный вид (5.108), то координатные линии, соответствующие времени, являются экстремалью. Это значит, что единственный произвол при построении синхронной системы отсчета – это выбор пространственного сечения  $\mathbb{N}$ , которое может быть произвольно, и выбор пространственных координат на  $\mathbb{N}$ .

Перейдем к вычислению явного вида основных геометрических объектов в синхронной системе координат. Прямые вычисления приводят к следующим выражениям для символов Кристоффеля (1.94):

$$\begin{aligned} \Gamma_{00}^0 &= \Gamma_{00}^\mu = \Gamma_{0\mu}^0 = \Gamma_{\mu 0}^0 = 0, \\ \Gamma_{0\mu}^\nu &= \Gamma_{\mu 0}^\nu = \frac{1}{2} g^{\nu\rho} \partial_0 g_{\mu\rho}, \\ \Gamma_{\mu\nu}^0 &= -\frac{1}{2} \partial_0 g_{\mu\nu}, \\ \Gamma_{\mu\nu}^\rho &= \hat{\Gamma}_{\mu\nu}^\rho, \end{aligned} \quad (5.111)$$

где  $\hat{\Gamma}_{\mu\nu}{}^\rho$  – символы Кристоффеля на пространственноподобном сечении  $x^0 = \text{const}$ , построенные только по метрике  $g_{\mu\nu}$ . В настоящем разделе знак тильды, который мы используем для обозначения геометрических объектов римановой геометрии при нулевых тензорах кручения и неметричности, для простоты, опущен.

Несложные вычисления приводят к следующим выражениям для компонент тензора кривизны со всеми опущенными индексами (1.122)

$$\begin{aligned} R_{0\mu 0\nu} &= \frac{1}{2}\partial_{00}^2 g_{\mu\nu} - \frac{1}{4}g^{\rho\sigma}\partial_0 g_{\mu\rho}\partial_0 g_{\nu\sigma}, \\ R_{0\mu\nu\rho} &= -R_{\mu 0\nu\rho} = \frac{1}{2}(\hat{\nabla}_\nu\partial_0 g_{\mu\rho} - \hat{\nabla}_\rho\partial_0 g_{\mu\nu}), \\ R_{\mu\nu\rho\sigma} &= \hat{R}_{\mu\nu\rho\sigma} + \frac{1}{4}(\partial_0 g_{\mu\rho}\partial_0 g_{\nu\sigma} - \partial_0 g_{\nu\rho}\partial_0 g_{\mu\sigma}), \end{aligned} \quad (5.112)$$

где  $\hat{\nabla}_\nu$  обозначает ковариантную производную на пространственноподобном сечении:

$$\hat{\nabla}_\nu\partial_0 g_{\mu\rho} := \partial_\nu\partial_0 g_{\mu\rho} - \hat{\Gamma}_{\nu\mu}{}^\sigma\partial_0 g_{\sigma\rho} - \hat{\Gamma}_{\nu\rho}{}^\sigma\partial_0 g_{\mu\sigma},$$

и  $\hat{R}_{\mu\nu\rho\sigma}$  – тензор кривизны пространственноподобного сечения  $t = \text{const}$ , построенный только по метрике  $g_{\mu\nu}$ . Свертка с обратной метрикой дает соответствующие тензор Риччи и скалярную кривизну:

$$\begin{aligned} R_{00} &= \frac{1}{2}g^{\mu\nu}\partial_{00}^2 g_{\mu\nu} - \frac{1}{4}g^{\mu\nu}g^{\rho\sigma}\partial_0 g_{\mu\rho}\partial_0 g_{\nu\sigma}, \\ R_{0\mu} &= R_{\mu 0} = \frac{1}{2}g^{\nu\rho}(\hat{\nabla}_\mu\partial_0 g_{\nu\rho} - \hat{\nabla}_\rho\partial_0 g_{\nu\mu}), \\ R_{\mu\nu} &= \hat{R}_{\mu\nu} + \frac{1}{2}\partial_{00}^2 g_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\rho\sigma}\partial_0 g_{\mu\rho}\partial_0 g_{\nu\sigma} + \frac{1}{4}\partial_0 g_{\mu\nu}g^{\rho\sigma}\partial_0 g_{\rho\sigma}, \\ R &= \hat{R} + g^{\mu\nu}\partial_{00}^2 g_{\mu\nu} - \frac{3}{4}g^{\mu\nu}g^{\rho\sigma}\partial_0 g_{\mu\rho}\partial_0 g_{\nu\sigma} + \frac{1}{4}(g^{\mu\nu}\partial_0 g_{\mu\nu})^2. \end{aligned} \quad (5.113)$$

Уравнения для экстремалей  $x^\alpha(\tau)$  во временной калибровке имеют вид

$$\ddot{x}^0 = \frac{1}{2}\partial_0 g_{\mu\nu}\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu, \quad (5.114)$$

$$\ddot{x}^\mu = -g^{\mu\nu}\partial_0 g_{\nu\rho}\dot{x}^0\dot{x}^\rho - \hat{\Gamma}_{\nu\rho}{}^\mu\dot{x}^\nu\dot{x}^\rho, \quad (5.115)$$

где точка обозначает дифференцирование по каноническому параметру  $\tau$ . Из вида уравнений сразу следует

**Предложение 5.12.3.** *Если выбрана синхронная система координат, то временные координатные линии ( $x^0 = t, x^\mu = \text{const}$ ) являются экстремалами.*

Из уравнений для времениподобных экстремалей, отличных от координатных линий  $x^0$ , можно исключить временную компоненту скорости. Для этого воспользуемся законом сохранения (2.14)

$$(\dot{x}^0)^2 - \dot{\mathbf{x}}^2 = C_0 = \text{const}, \quad (5.116)$$

где  $\dot{\mathbf{x}}^2 := -g_{\mu\nu}\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu > 0$ , и исключим производную  $\dot{x}^0$  из уравнения (5.115). В результате получим замкнутую систему уравнений только для пространственных координат экстремали:

$$\ddot{x}^\mu = -g^{\mu\nu}\partial_0 g_{\nu\rho}\dot{x}^\rho\sqrt{|C_0 + \dot{\mathbf{x}}^2|} - \hat{\Gamma}_{\nu\rho}{}^\mu\dot{x}^\nu\dot{x}^\rho.$$

Неоднозначность при извлечении корня несущественна, т.к. соответствует обращению времени  $x^0 \mapsto -x^0$ . Отсюда следует, что во временной калибровке пространственные компоненты экстремали  $(x^\mu(t))$  в общем случае не являются экстремальями для пространственной части метрики  $g_{\mu\nu}$ . В частном случае, когда пространственная метрика  $g_{\mu\nu}$  не зависит от времени  $x^0$ , проекция экстремали  $(x^\alpha(\tau)) \mapsto (c^0, x^\mu(\tau))$  на пространственное сечение  $x^0 = c^0 = \text{const}$  является экстремалью для метрики  $g_{\mu\nu}$  на этом сечении.

## Глава 6

# Сплетенные решения в общей теории относительности

В настоящей главе построены решения вакуумных уравнений общей теории относительности (5.4) с космологической постоянной в предположении, что четырехмерное пространство-время является *сплетенным произведением* двух поверхностей. При этом не делается никаких предположений о симметрии решений. Как следствие уравнений движения по крайней мере одна из двух поверхностей должна быть поверхностью постоянной кривизны. Отсюда вытекает, что метрика имеет по крайней мере три вектора Киллинга. Другими словами, свойства симметрии решений при таком подходе являются следствием самих уравнений движения. Построенные решения включают, в частности, сферически симметричные решения, которые соответствуют произведению некоторой лоренцевой поверхности на сферу. Многие глобальные решения имеют интересную физическую интерпретацию. В частности, построены решения, описывающие кротовые норы, доменные стенки сингулярностей кривизны, космические струны, космические струны, окруженные доменными стенками, решения с замкнутыми времениподобными кривыми и др. [?].

### 6.1 Сплетенное произведение

**Определение.** Пусть задано два многообразия  $\mathbb{M}_1$  и  $\mathbb{M}_2$  с метриками  $g$  и  $h$ , соответственно. Касательное пространство в каждой точке топологического произведения  $(x_1, x_2) \in \mathbb{M}_1 \times \mathbb{M}_2$  разлагается в прямую сумму:

$$\mathbb{T}_{(x_1, x_2)}(\mathbb{M}_1 \times \mathbb{M}_2) = \mathbb{T}_{x_1}(\mathbb{M}_1) \oplus \mathbb{T}_{x_2}(\mathbb{M}_2).$$

*Сплетенным произведением* (warped product) двух многообразий называется их топологическое произведение  $\mathbb{M}_1 \times \mathbb{M}_2$  с метрикой  $\hat{g}$ , которая определена следующим соотношением

$$\hat{g}(X, Y) := k(x_2)g(X_1, Y_1) + m(x_1)h(X_2, Y_2), \quad (6.1)$$

где  $k(x_2)$  и  $m(x_1)$  – достаточно гладкие отличные от нуля функции на многообразиях  $\mathbb{M}_2$  и  $\mathbb{M}_1$  и

$$\begin{aligned} \mathbb{T}(\mathbb{M}_1 \times \mathbb{M}_2) \ni \quad X &= X_1 \oplus X_2 && \in \mathbb{T}(\mathbb{M}_1) \oplus \mathbb{T}(\mathbb{M}_2), \\ \mathbb{T}(\mathbb{M}_1 \times \mathbb{M}_2) \ni \quad Y &= Y_1 \oplus Y_2 && \in \mathbb{T}(\mathbb{M}_1) \oplus \mathbb{T}(\mathbb{M}_2), \end{aligned}$$

– разложение векторных полей  $X, Y$ , касательных к  $\mathbb{M}_1 \times \mathbb{M}_2$ , в прямую сумму.  $\square$

Предположим, что четырехмерное пространство-время является сплетенным произведением двух поверхностей:  $\mathbb{M} = \mathbb{U} \times \mathbb{V}$ , где  $\mathbb{U}$  – поверхность с лоренцевой метрикой  $g$  и  $\mathbb{V}$  – поверхность с римановой метрикой  $h$ . Обозначим локальные координаты на  $\mathbb{U}$  и  $\mathbb{V}$ , соответственно, через  $x^\alpha$ ,  $\alpha = 0, 1$ , и  $y^\mu$ ,  $\mu = 2, 3$ . Тогда топологическому произведению  $\mathbb{U} \times \mathbb{V}$  соответствуют координаты  $(x^i) := (x^\alpha, y^\mu)$ ,  $i = 0, 1, 2, 3$ . В этой системе координат четырехмерная метрика имеет блочно-диагональный вид:

$$\hat{g}_{ij} = \begin{pmatrix} k(y)g_{\alpha\beta}(x) & 0 \\ 0 & t(x)h_{\mu\nu}(y) \end{pmatrix}, \quad (6.2)$$

где  $k(y)$  и  $t(x)$  – достаточно гладкие отличные от нуля функции на  $\mathbb{V}$  и  $\mathbb{U}$ , соответственно.

В настоящей главе шляпка над символом означает, что соответствующий геометрический объект относится ко всему четырехмерному пространству-времени  $\mathbb{M}$ , а символы без шляпки относятся к двумерным поверхностям  $\mathbb{U}$  или  $\mathbb{V}$ . Соответственно,  $g_{\alpha\beta}$  и  $h_{\mu\nu}$  являются метриками на  $\mathbb{U}$  и  $\mathbb{V}$ . Греческие буквы из начала ( $\alpha, \beta, \dots$ ) и середины ( $\mu, \nu, \dots$ ) алфавита всегда относятся к координатам на первой и второй поверхностям, соответственно.

В физике функции  $k(y)$  и  $t(x)$  часто называют *дилатонными* полями на поверхностях  $\mathbb{V}$  и  $\mathbb{U}$ .

Для определенности будем считать поверхность  $\mathbb{U}$  псевдоримановым многообразием с метрикой лоренцевой сигнатуры, а поверхность  $\mathbb{V}$  – римановым многообразием с положительно определенной метрикой. Тогда с точностью до перестановки первых двух координат сигнатура метрики на  $\mathbb{M}$  будет либо  $(+ - - -)$ , либо  $(- + + +)$  в зависимости от знака  $t$ . Эти метрики связаны между собой инверсией  $\hat{g}_{ij} \mapsto -\hat{g}_{ij}$ , относительно которой уравнения Эйнштейна при отсутствии полей материи и космологической постоянной инвариантны. Предположим также, что обе поверхности являются ориентируемыми.

Отметим, что относительно вида метрики (6.2) не делается никаких дополнительных предположений, связанных с симметрией. Однако в дальнейшем мы увидим, что уравнения Эйнштейна и требование полноты многообразий приводят к тому, что по крайней мере одна из поверхностей  $\mathbb{U}$  или  $\mathbb{V}$  должна быть поверхностью постоянной кривизны. То есть любое максимально продолженное решение уравнений Эйнштейна вида (6.2) допускает по крайней мере три вектора Киллинга. Следовательно, в рассматриваемом случае симметрия решений является следствием уравнений движения. В частном случае будут получены сферически симметричные решения, когда поверхность  $\mathbb{V}$  является сферой  $\mathbb{S}^2$ .

## 6.2 Двумерная редукция

Вид метрики (6.2) позволяет решить явно четырехмерные вакуумные уравнения Эйнштейна с космологической постоянной  $\Lambda$

$$\hat{R}_{ij} = \Lambda \hat{g}_{ij}, \quad (6.3)$$

и построить глобальные (максимально продолженные) решения.

Мы увидим, что уравнения Эйнштейна существенно ограничивают дилатонные поля: по крайней мере одно дилатонное поле должно быть постоянно. Поэтому все решения делятся на три основных класса: оба дилатонных поля постоянны (случай

А), только  $k = \text{const}$  (случай В) или  $m = \text{const}$  (случай С). В первом случае решение уравнений Эйнштейна представляет собой топологическое произведение двух поверхностей постоянной кривизны. В случае В риманова поверхность  $\mathbb{V}$  должна быть поверхностью постоянной кривизны. Сюда входят сферически симметричные решения, а также другие решения, когда поверхность  $\mathbb{V}$  представляет собой евклидову плоскость или плоскость Лобачевского (двуполостный гиперболоид). Последние решения соответствуют кротовым норам. В случае С поверхность  $\mathbb{U}$  должна быть поверхностью постоянной кривизны. Эти решения описывают космические струны и доменные стенки сингулярности кривизны.

Приступим к решению уравнений Эйнштейна (6.3). Метрика, обратная к (6.2), имеет вид

$$\hat{g}^{ij} = \begin{pmatrix} \frac{1}{k} g^{\alpha\beta} & 0 \\ 0 & \frac{1}{m} h^{\mu\nu} \end{pmatrix}, \quad (6.4)$$

где  $g^{\alpha\beta}$  и  $h^{\mu\nu}$  – матрицы, обратные, соответственно, к  $g_{\alpha\beta}$  и  $h_{\mu\nu}$ . Символы Кристоффеля (1.94) равны

$$\begin{aligned} \hat{\Gamma}_{\alpha\beta}^{\gamma} &= \Gamma_{\alpha\beta}^{\gamma}, \\ \hat{\Gamma}_{\alpha\beta}^{\mu} &= -\frac{1}{2} g_{\alpha\beta} \frac{h^{\mu\nu} \partial_{\nu} k}{m}, \\ \hat{\Gamma}_{\alpha\mu}^{\gamma} &= \hat{\Gamma}_{\mu\alpha}^{\gamma} = \frac{1}{2} \delta_{\alpha}^{\gamma} \frac{\partial_{\mu} k}{k}, \\ \hat{\Gamma}_{\alpha\mu}^{\nu} &= \hat{\Gamma}_{\mu\alpha}^{\nu} = \frac{1}{2} \delta_{\mu}^{\nu} \frac{\partial_{\alpha} m}{m}, \\ \hat{\Gamma}_{\mu\nu}^{\alpha} &= -\frac{1}{2} h_{\mu\nu} \frac{g^{\alpha\beta} \partial_{\beta} m}{k}, \\ \hat{\Gamma}_{\mu\nu}^{\rho} &= \Gamma_{\mu\nu}^{\rho}, \end{aligned} \quad (6.5)$$

где  $\Gamma_{\alpha\beta}^{\gamma}$  и  $\Gamma_{\mu\nu}^{\rho}$  – символы Кристоффеля на поверхностях  $\mathbb{U}$  и  $\mathbb{V}$ , соответственно.

Прямые вычисления приводят к следующим выражениям для компонент тензора Риччи (1.129)

$$\begin{aligned} \hat{R}_{\alpha\beta} &= R_{\alpha\beta} + \frac{\nabla_{\alpha} \nabla_{\beta} m}{m} - \frac{\nabla_{\alpha} m \nabla_{\beta} m}{2m^2} + \frac{g_{\alpha\beta} \nabla^2 k}{2m}, \\ \hat{R}_{\alpha\mu} &= \hat{R}_{\mu\alpha} = -\frac{\nabla_{\alpha} m \nabla_{\mu} k}{2mk}, \\ \hat{R}_{\mu\nu} &= R_{\mu\nu} + \frac{\nabla_{\mu} \nabla_{\nu} k}{k} - \frac{\nabla_{\mu} k \nabla_{\nu} k}{2k^2} + \frac{h_{\mu\nu} \nabla^2 m}{2k}, \end{aligned} \quad (6.6)$$

где  $R_{\alpha\beta}$  и  $R_{\mu\nu}$  – тензоры Риччи на  $\mathbb{U}$  и  $\mathbb{V}$  и, для краткости, введены обозначения

$$\nabla^2 m := g^{\alpha\beta} \nabla_{\alpha} \nabla_{\beta} m, \quad \nabla^2 k := h^{\mu\nu} \nabla_{\mu} \nabla_{\nu} k. \quad (6.7)$$

Здесь и далее в этой главе символ  $\nabla$  обозначает ковариантную производную с соответствующими символами Кристоффеля либо на  $\mathbb{U}$ , либо на  $\mathbb{V}$ . Четырехмерная скалярная кривизна равна

$$\hat{R} = \frac{1}{k} R^g + 2 \frac{\nabla^2 m}{km} - \frac{(\nabla m)^2}{2km^2} + \frac{1}{m} R^h + 2 \frac{\nabla^2 k}{km} - \frac{(\nabla k)^2}{2k^2 m}, \quad (6.8)$$



где введены обозначения

$$(\nabla m)^2 := g^{\alpha\beta} \partial_\alpha m \partial_\beta m, \quad (\nabla k)^2 := h^{\mu\nu} \partial_\mu k \partial_\nu k. \quad (6.9)$$

Скалярные кривизны поверхностей  $\mathbb{U}$  и  $\mathbb{V}$  обозначены через  $R^g$  и  $R^h$ , соответственно.

Таким образом, уравнения Эйнштейна (6.3) для метрики (6.2) принимают вид

$$R_{\alpha\beta} + \frac{\nabla_\alpha \nabla_\beta m}{m} - \frac{\nabla_\alpha m \nabla_\beta m}{2m^2} + \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} \left( \frac{\nabla^2 k}{m} - 2k\Lambda \right) = 0, \quad (6.10)$$

$$R_{\mu\nu} + \frac{\nabla_\mu \nabla_\nu k}{k} - \frac{\nabla_\mu k \nabla_\nu k}{2k^2} + \frac{1}{2} h_{\mu\nu} \left( \frac{\nabla^2 m}{k} - 2m\Lambda \right) = 0, \quad (6.11)$$

$$\frac{\nabla_\alpha m \nabla_\mu k}{mk} = 0. \quad (6.12)$$

Перепишем уравнения (6.10) и (6.11) в более удобном виде, выделив из них след, который определяет скалярные кривизны поверхностей:

$$R^g + \frac{\nabla^2 m}{m} - \frac{(\nabla m)^2}{2m^2} + \frac{\nabla^2 k}{m} - 2k\Lambda = 0, \quad (6.13)$$

$$R^h + \frac{\nabla^2 k}{k} - \frac{(\nabla k)^2}{2k^2} + \frac{\nabla^2 m}{k} - 2m\Lambda = 0. \quad (6.14)$$

Бесследовые части уравнений (6.10) и (6.11), умноженные на  $m$  и  $k$ , принимают простой вид

$$\nabla_\alpha \nabla_\beta m - \frac{\nabla_\alpha m \nabla_\beta m}{2m} - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} \left[ \nabla^2 m - \frac{(\nabla m)^2}{2m} \right] = 0, \quad (6.15)$$

$$\nabla_\mu \nabla_\nu k - \frac{\nabla_\mu k \nabla_\nu k}{2k} - \frac{1}{2} h_{\mu\nu} \left[ \nabla^2 k - \frac{(\nabla k)^2}{2k} \right] = 0. \quad (6.16)$$

Они не содержат слагаемые с кривизной вовсе, потому что в двух измерениях тензор Риччи полностью определяется скалярной кривизной (1.129) и не имеет бесследовой части.

Отметим, что наличие сингулярности у двумерной скалярной кривизны на поверхности означает в общем случае ее наличие в полном тензоре кривизны в соответствии с формулой (6.8).

Таким образом, четырехмерные уравнения Эйнштейна (6.3) для метрики вида (6.2) эквивалентны системе уравнений (6.12)–(6.16). Уравнения (6.15) и (6.16) содержат функции, зависящие только от координат  $x$  и  $y$ , соответственно. В то же время координаты различных поверхностей в уравнениях (6.12), (6.13) и (6.14) перемешаны.

Уравнение (6.12) накладывает жесткие ограничения. Как следствие, имеем, что либо поле дилатона  $k$ , либо поле дилатона  $m$ , либо  $k$  и  $m$  одновременно должны быть постоянны. Соответственно, возможны три случая:

$$\begin{aligned} \text{A :} & \quad k = \text{const} \neq 0, & m = \text{const} \neq 0, \\ \text{B :} & \quad k = \text{const} \neq 0, & \nabla_\alpha m \neq 0, \\ \text{C :} & \quad \nabla_\mu k \neq 0, & m = \text{const} \neq 0. \end{aligned} \quad (6.17)$$

Рассмотрим эти случаи подробно.

### 6.3 Произведение поверхностей постоянной кривизны

Наиболее симметричные решения вакуумных уравнений Эйнштейна (6.3) в виде топологического произведения двух поверхностей постоянной кривизны возникают, когда оба дилатонных поля  $k$  и  $m$  постоянны (случай А в (6.17)). Если  $k$  и  $m$  постоянны, то уравнения (6.12), (6.15), и (6.16) удовлетворяются, и скалярные кривизны обеих поверхностей  $\mathbb{U}$  и  $\mathbb{V}$  должны быть постоянны как следствие уравнений (6.13), (6.14), которые принимают следующий вид:

$$R^g = 2k\Lambda, \quad R^h = 2m\Lambda. \quad (6.18)$$

Если  $\Lambda = 0$ , то обе поверхности  $\mathbb{U}$  и  $\mathbb{V}$  имеют нулевую кривизну, и все пространство-время  $\mathbb{M}$  представляет пространство Минковского или его фактор пространство (цилиндр или тор) по группе преобразований, действующей свободно и собственноразрывно, с метрикой Лоренца

$$\hat{g}_{ij} = \text{diag}(+ - - -) \quad \text{или} \quad \hat{g}_{ij} = \text{diag}(- + + +). \quad (6.19)$$

При ненулевой космологической постоянной  $\Lambda \neq 0$  обе поверхности  $\mathbb{U}$  и  $\mathbb{V}$  имеют постоянную ненулевую кривизну. Если  $\mathbb{U}$  является полной псевдоримановой поверхностью ненулевой кривизны  $R^g = -2K^g = \text{const}$ , то она представляет собой однополостный гиперboloид  $\mathbb{L}^2$ , вложенный в трехмерное пространство Минковского, с индуцированной метрикой или его универсальной накрывающей. Его группой симметрии является группа Лоренца  $\mathbb{SO}(1, 2)$ . В стереографических координатах метрика однополостного гиперboloида  $\mathbb{L}^2$  имеет хорошо известный вид

$$ds_{\mathbb{L}}^2 = g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta = \frac{dt^2 - dx^2}{\left[1 + \frac{K^g}{4}(t^2 - x^2)\right]^2}, \quad (6.20)$$

где введены обозначения  $t := x^0$  и  $x := x^1$ . В отличие от риманова случая псевдориманова поверхность постоянной кривизны одна и та же как для положительной, так и для отрицательной кривизны  $K^g$ , при этом меняется только общий знак метрики (6.20), что соответствует перестановке координат  $t \leftrightarrow x$ .

При  $K^g = 0$  метрика (6.20) совпадает с обычной двумерной метрикой Минковского, и соответствующая поверхность представляет собой плоскость Минковского  $\mathbb{R}^{1,1}$  с группой Пуанкаре  $\mathbb{IO}(1, 1)$  в качестве группы симметрии.

Положительно определенная метрика на двумерной римановой поверхности постоянной кривизны  $R^h = -2K^h \neq 0$  в стереографических координатах имеет вид

$$ds_{\mathbb{H}}^2 = h_{\mu\nu} dy^\mu dy^\nu = \frac{dy^2 + dz^2}{\left[1 + \frac{K^h}{4}(y^2 + z^2)\right]^2}, \quad (6.21)$$

где  $y := y^1$  и  $z := y^2$ . Эта метрика отличается от (6.20) только знаками.

Для положительных  $K^h > 0$  она соответствует сфере  $\mathbb{S}^2$ . При  $K^h = 0$  метрика (6.21) соответствует евклидовой плоскости  $\mathbb{R}^2$ , или цилиндру, или тору. При отрицательных  $K^h < 0$  мы имеем плоскость Лобачевского (гиперболическую плоскость)  $\mathbb{H}^2$  или компактную риманову поверхность рода два или выше. Группами симметрии сферы  $\mathbb{S}^2$ , евклидовой плоскости  $\mathbb{R}^2$ , и плоскости Лобачевского  $\mathbb{H}^2$  являются, соответственно, группы  $\mathbb{O}(3)$ ,  $\mathbb{IO}(2)$  и  $\mathbb{O}(1, 2)$ .

При ненулевой постоянной кривизне всегда можно произвести растяжку координат таким образом, чтобы  $K^{g,h} = \pm 1$ .

Если скалярные кривизны постоянны (6.18), то решение для ненулевой космологической постоянной  $\Lambda \neq 0$  является топологическим произведением двух поверхностей постоянной кривизны с метрикой

$$ds^2 = k \frac{dt^2 - dx^2}{\left[1 - \frac{k\Lambda}{4}(t^2 - x^2)\right]^2} + m \frac{dy^2 + dz^2}{\left[1 - \frac{m\Lambda}{4}(y^2 + z^2)\right]^2}. \quad (6.22)$$

В данном случае можно не говорить о сплетенном произведении поверхностей, т.к. дилатонные поля постоянны. Растягивая координаты, всегда можно добиться выполнения равенств  $k = \pm 1$ ,  $m = \pm 1$ . Выберем  $k = 1$  и  $m = -1$  с тем, чтобы метрика имела сигнатуру  $(+ - - -)$ . Тогда возможны три качественно отличных случая, соответствующих положительной, нулевой и отрицательной космологической постоянной:

$$\begin{aligned} \Lambda < 0 : & \quad K^g = +|\Lambda|, & K^h = -|\Lambda|, & \quad \mathbb{M} = \mathbb{L}^2 \times \mathbb{H}^2, \\ \Lambda = 0 : & \quad K^g = 0, & K^h = 0, & \quad \mathbb{M} = \mathbb{R}^{1,1} \times \mathbb{R}^2 = \mathbb{R}^{1,3}, \\ \Lambda > 0 : & \quad K^g = -|\Lambda|, & K^h = +|\Lambda|, & \quad \mathbb{M} = \mathbb{L}^2 \times \mathbb{S}^2, \end{aligned} \quad (6.23)$$

где  $K^g$  и  $K^h$  – гауссовы кривизны, соответственно, поверхностей  $\mathbb{U}$  и  $\mathbb{V}$ .

Напомним, что вакуумные уравнения Эйнштейна (6.3) допускают решение в виде пространства-времени постоянной кривизны, которое называется пространством-временем (анти-)де Ситтера. Это пространство-время имеет максимальное число – десять – векторов Киллинга. Хотя полная (четырёхмерная) скалярная кривизна для решения в виде произведения двух поверхностей постоянной кривизны с метрикой (6.22) (впрочем, как и для всех других решений вакуумных уравнений Эйнштейна (6.3)) постоянна,  $\hat{R} = 4\Lambda$ , решения (6.23) при  $\Lambda \neq 0$  не совпадают с решением (анти-)де Ситтера. Действительно, каждая из поверхностей  $\mathbb{L}^2$ ,  $\mathbb{H}^2$  и  $\mathbb{S}^2$  имеет по три вектора Киллинга, и можно показать (см. например [?]), что четырёхмерное пространство-время имеет всего шесть векторов Киллинга. Поэтому решения в виде произведения двух поверхностей не совпадают с решением (анти-)де Ситтера.

## 6.4 Пространственно симметричные решения

Во втором случае В (6.17) дилатонное поле  $k$  постоянно. Не ограничивая общности, положим  $k = 1$ . Тогда вся система уравнений Эйнштейна (6.12)–(6.16) сводится к следующей системе:

$$\nabla_\alpha \nabla_\beta m - \frac{\nabla_\alpha m \nabla_\beta m}{2m} - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} \left[ \nabla^2 m - \frac{(\nabla m)^2}{2m} \right] = 0, \quad (6.24)$$

$$R^h + \nabla^2 m - 2m\Lambda = 0, \quad (6.25)$$

$$R^g + \frac{\nabla^2 m}{m} - \frac{(\nabla m)^2}{2m^2} - 2\Lambda = 0. \quad (6.26)$$

Уравнение (6.25) представляет собой сумму двух слагаемых, зависящих от координат на разных поверхностях,  $x \in \mathbb{U}$  и  $y \in \mathbb{V}$ , которая должна быть равна нулю. Это значит, что каждое слагаемое равно некоторой постоянной. Зафиксируем эту постоянную следующим уравнением  $R^h = -2K^h = \text{const}$ . Таким образом, в случае В

поверхность  $\mathbb{V}$  – это поверхность постоянной кривизны. При этом возможны три случая, когда гауссова кривизна  $K^h$  римановой поверхности  $\mathbb{V}$  положительна,  $\mathbb{V} = \mathbb{S}^2$ , равна нулю,  $\mathbb{V} = \mathbb{R}^2$ , или отрицательна,  $\mathbb{V} = \mathbb{H}^2$ . Тогда соответствующие решения вакуумных уравнений Эйнштейна инвариантны относительно групп преобразований  $\mathcal{O}(3)$ ,  $\mathcal{IO}(2)$  или  $\mathcal{O}(1, 2)$ , которые являются группами изометрий поверхностей  $\mathbb{S}^2$ ,  $\mathbb{R}^2$  и  $\mathbb{H}^2$ . Соответствующее четырехмерное пространство-время представляет собой сплетенное произведение поверхности  $\mathbb{U}$  с одной из поверхностей  $\mathbb{S}^2$ ,  $\mathbb{R}^2$  или  $\mathbb{H}^2$ , где  $\mathbb{U}$  представляется диаграммой Картера–Пенроуза. В частности, при  $K^h = 1$  возникают сферически симметричные решения. Таким образом, в рассматриваемом случае группа симметрии пространства-времени возникает как следствие уравнений движения.

При  $K^h = \text{const}$  уравнение (6.25) принимает вид

$$\nabla^2 m - 2(m\Lambda + K^h) = 0. \quad (6.27)$$

Исключая случай А, рассмотренный в предыдущем разделе, двинемся дальше, считая, что  $\nabla_\alpha m \neq 0$ .

**Предложение 6.4.1.** Уравнение (6.27) является первым интегралом уравнений (6.24) и (6.26).

*Доказательство.* Продифференцируем уравнение (6.27), используем тождество

$$[\nabla_\alpha, \nabla_\beta] A_\gamma = -R_{\alpha\beta\gamma}^{\delta} A_\delta,$$

где  $A_\alpha$  – компоненты произвольного ковекторного поля, для изменения порядка ковариантных производных и используем уравнение (6.24) три раза для исключения вторых производных от  $m$ . После небольших алгебраических выкладок мы получим уравнение (6.26).  $\square$

Из доказательства предложения следует, что достаточно решить только уравнения (6.24) и (6.27), при этом уравнение (6.26) будет удовлетворено автоматически.

**Замечание.** Исходное действие Гильберта–Эйнштейна инвариантно относительно общих преобразований координат, и, согласно второй теореме Нетер, между уравнениями движения существует линейная зависимость. Поэтому зависимость уравнений (6.24)–(6.26) не является чем то удивительным и связана с инвариантностью исходного действия.  $\square$

Для явного решения уравнений движения (6.24) и (6.27) зафиксируем конформную калибровку для метрики  $g_{\alpha\beta}$  на лоренцевой поверхности  $\mathbb{U}$ :

$$g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta = \Phi d\xi d\eta, \quad \Phi \neq 0, \quad (6.28)$$

где  $\Phi(\xi, \eta)$  – конформный множитель, который зависит от координат светового конуса  $\xi, \eta$  на  $\mathbb{U}$ . Соответствующая четырехмерная метрика примет вид

$$ds^2 = \Phi d\xi d\eta + m d\Omega, \quad (6.29)$$

где  $d\Omega$  – метрика на римановой поверхности постоянной кривизны  $\mathbb{V} = \mathbb{S}^2$ ,  $\mathbb{R}^2$  или  $\mathbb{H}^2$ . Знак конформного множителя  $\Phi$  пока не фиксируем.

При  $\Phi > 0$  и  $m < 0$  сигнатура метрики (6.29) равна  $(+---)$ . Если изменить знак  $m > 0$ , то сигнатура метрики станет  $(+--+)$ . Такое же преобразование сигнатуры можно получить, изменив общий знак метрики,  $\hat{g}_{ij} \mapsto -\hat{g}_{ij}$ , и переставив первые

две координаты. Вакуумные уравнения Эйнштейна (6.3) инвариантны относительно одновременного изменения знаков метрики и космологической постоянной. Поскольку в дальнейшем мы построим глобальные решения для всех возможных значений космологической постоянной,  $\Lambda \in \mathbb{R}$ , то, не ограничивая общности, достаточно рассмотреть случай  $m < 0$ . При отрицательных  $m$  удобно ввести параметризацию

$$m := -q^2, \quad q(\xi, \eta) > 0. \quad (6.30)$$

Символы Кристоффеля для метрики (6.28) в конформной калибровке имеют только две ненулевые компоненты:

$$\Gamma_{\xi\xi}^{\xi} = \frac{\partial_{\xi}\Phi}{\Phi}, \quad \Gamma_{\eta\eta}^{\eta} = \frac{\partial_{\eta}\Phi}{\Phi}, \quad (6.31)$$

и уравнения (6.24), (6.27) принимают простой вид

$$-\partial_{\xi\xi}^2 q + \frac{\partial_{\xi}\Phi\partial_{\xi}q}{\Phi} = 0, \quad (6.32)$$

$$-\partial_{\eta\eta}^2 q + \frac{\partial_{\eta}\Phi\partial_{\eta}q}{\Phi} = 0, \quad (6.33)$$

$$-2\frac{\partial_{\xi\eta}^2 q^2}{\Phi} - (K - \Lambda q^2) = 0. \quad (6.34)$$

Таким образом, полная система уравнений (6.24)–(6.26) в конформной калибровке (6.28) сводится к трем уравнениям на две неизвестные функции  $q$  и  $\Phi$ . Первые два уравнения являются обыкновенными дифференциальными уравнениями, и определяют функции  $q$  и  $\Phi$  с точностью до умножения на произвольную постоянную. Система уравнений (6.32)–(6.34) переопределена и может быть проинтегрирована явно.

**Предложение 6.4.2.** *Условия  $\partial_{\xi}q = 0$  и  $\partial_{\eta}q = 0$  эквивалентны.*

*Доказательство.* Если  $\partial_{\xi}q = 0$ , то из уравнения (6.34) следует  $q^2 = K/\Lambda = \text{const}$  и, следовательно,  $\partial_{\eta}q = 0$ . Обратное утверждение верно по той же причине.  $\square$

Поскольку  $q = \text{const}$  соответствует уже рассмотренному случаю А, то предположим, что  $\partial_{\xi}q \neq 0$  и  $\partial_{\eta}q \neq 0$ . Тогда, разделив уравнения (6.32) и (6.33), соответственно, на  $\partial_{\xi}q$  и  $\partial_{\eta}q$ , они легко интегрируются:

$$-\ln|\partial_{\xi}q| + \ln|\Phi| = \tilde{G}(\eta), \quad (6.35)$$

$$-\ln|\partial_{\eta}q| + \ln|\Phi| = \tilde{F}(\xi). \quad (6.36)$$

При этом возникают две произвольные функции  $\tilde{F}(\xi)$  и  $\tilde{G}(\eta)$ . Введем монотонные функции  $F(\eta)$  и  $G(\xi)$  при помощи дифференциальных уравнений

$$F' := \frac{dF}{d\eta} = C e^{\tilde{F}} > 0, \quad G' := \frac{dG}{d\xi} = C e^{\tilde{G}} > 0,$$

где  $C > 0$  – некоторая положительная постоянная, которую мы зафиксируем чуть позже. Тогда разность уравнений (6.35) и (6.36) примет вид

$$\frac{|\partial_{\xi}q|}{F'} = \frac{|\partial_{\eta}q|}{G'}. \quad (6.37)$$

Конформная калибровка для двумерной метрики (6.28) определена с точностью до конформных преобразований. Воспользуемся этой свободой и перейдем к новым координатам  $\xi, \eta \mapsto F, G$ . Это всегда можно сделать, т.к. якобиан преобразования координат отличен от нуля,  $F'G' \neq 0$ . При конформном преобразовании координат конформный множитель преобразуется по правилу  $\Phi \mapsto \Phi/(F'G')$ , что следует из вида метрики в конформной калибровке (6.28).

**Предложение 6.4.3.** Уравнения (6.32)–(6.34) ковариантны относительно конформных преобразований

$$\xi, \eta \mapsto F, G, \quad \Phi \mapsto \tilde{\Phi} = \frac{\Phi}{F'G'}. \quad (6.38)$$

*Доказательство.* Прямая проверка.  $\square$

Таким образом, произвольные функции  $\tilde{F}(\xi)$  и  $\tilde{G}(\eta)$ , возникшие в первых интегралах (6.35), (6.36), соответствуют конформным преобразованиям.

Перейдем к новым координатам  $\xi, \eta \mapsto F, G$ .

**Предложение 6.4.4.** Если  $\partial_\xi q \partial_\eta q > 0$ , то в новых координатах функция  $q(\tau)$  зависит только от временной координаты  $\tau := \frac{1}{2}(F + G)$ . Если  $\partial_\xi q \partial_\eta q < 0$ , то функция  $q(\sigma)$  зависит только от пространственной координаты  $\sigma := \frac{1}{2}(F - G)$ .

*Доказательство.* Из-за знаков модулей в уравнении (6.37), возможны два случая.

Если  $\partial_\xi q \partial_\eta q > 0$ , то справедливо равенство

$$\frac{\partial q}{\partial(F - G)} = \partial_\xi q \frac{\partial \xi}{\partial(F - G)} + \partial_\eta q \frac{\partial \eta}{\partial(F - G)} = \frac{\partial_\xi q}{F'} - \frac{\partial_\eta q}{G'} = 0. \quad (6.39)$$

Последнее равенство вытекает из уравнения (6.37). Поэтому, переходя к координатам  $F, G \mapsto \tau, \sigma$ , получаем сделанное утверждение.

Аналогично, если  $\partial_\xi q \partial_\eta q < 0$ , то выполнено равенство

$$\frac{\partial q}{\partial(F + G)} = \partial_\xi q \frac{\partial \xi}{\partial(F + G)} + \partial_\eta q \frac{\partial \eta}{\partial(F + G)} = \frac{\partial_\xi q}{F'} + \frac{\partial_\eta q}{G'} = 0. \quad \square \quad (6.40)$$

Теперь из каждого из двух уравнений (6.35) или (6.36) следует одно и то же равенство

$$|\Phi| = \frac{1}{2C} F' G' |q'|,$$

где  $q'$  обозначает производную функции  $q$  либо по  $\tau := \frac{1}{2}(F + G)$ , либо по  $\sigma := \frac{1}{2}(F - G)$ . Постоянная  $C$  соответствует растяжке новых координат  $F, G$ , и, для упрощения последующих формул, положим  $C = 1/2$ . При конформном преобразовании конформный множитель преобразуется по правилу (6.38). Поэтому после конформного преобразования (6.38) будет выполнено равенство

$$|\tilde{\Phi}| = |q'|. \quad (6.41)$$

В дальнейшем знак тильды у конформного множителя мы, для краткости, опустим.

Таким образом, координаты всегда можно выбрать таким образом, чтобы функции  $q$  и  $\Phi$  зависели одновременно только от времениподобной или пространственно-подобной координаты

$$\zeta := \frac{1}{2}(F \pm G) =: \begin{cases} \tau, & \partial_\xi q \partial_\eta q > 0, \\ \sigma, & \partial_\xi q \partial_\eta q < 0. \end{cases} \quad (6.42)$$

Это значит, что двумерная метрика (6.28) обладает вектором Киллинга,  $\partial_\sigma$  или  $\partial_\tau$ , как следствие уравнений (6.32) и (6.33). Назовем эти решения, соответственно, однородными и статическими, хотя это и относится только к определенной системе координат. Существование вектора Киллинга является обобщением *теоремы Бирхгоффа* [?], утверждающей, что произвольное сферически симметричное решение вакуумных уравнений Эйнштейна должно быть статическим. (Это утверждение было опубликовано ранее в статье [?].) Обобщение заключается в том, что наличие вектора Киллинга доказано не только для сферически симметричных решений ( $K = 1$ ), но и для решений, инвариантных относительно групп преобразований  $\mathbb{IO}(2)$  ( $K = 0$ ) и  $\mathbb{SO}(1, 2)$  ( $K = -1$ ).

Окончательно, решением уравнений (6.32), (6.33) в фиксированной системе координат является равенство (6.41) и утверждение о том, что функции  $q$  и  $\Phi$  зависят только от одной переменной  $\zeta$  (6.42). Осталось решить только одно уравнение (6.34).

В статическом,  $q = q(\sigma)$ , и однородном,  $q = q(\tau)$ , случаях уравнение (6.34) принимает вид

$$(q^2)'' = 2(K^h - \Lambda q^2)\Phi, \quad q = q(\sigma), \quad (6.43)$$

$$(q^2)'' = -2(K^h - \Lambda q^2)\Phi, \quad q = q(\tau). \quad (6.44)$$

Чтобы проинтегрировать полученные уравнения, необходимо выразить  $\Phi$  через  $q$  с помощью уравнения (6.41), а для этого необходимо раскрыть знаки модулей.

Рассмотрим подробно статический случай  $q = q(\sigma)$ ,  $\Phi > 0$  и  $q' > 0$ . Тогда уравнение (6.43) с учетом (6.41) примет вид

$$(q^2)'' = 2(K^h - \Lambda q^2)q'.$$

Его легко проинтегрировать

$$(q^2)' = 2 \left( K^h q - \frac{\Lambda q^3}{3} - 2M \right),$$

где  $M = \text{const}$  – постоянная интегрирования. В дальнейшем мы увидим, что она совпадает с массой в решении Шварцшильда. Выполнив дифференцирование в левой части и поделив на  $2q > 0$ , получим уравнение

$$q' = K^h - \frac{2M}{q} - \frac{\Lambda q^2}{3}.$$

Поскольку в рассматриваемом случае  $q' = \Phi$ , то отсюда следует выражение для конформного множителя через переменную  $q$ :

$$\Phi(q) = K^h - \frac{2M}{q} - \frac{\Lambda q^2}{3}. \quad (6.45)$$

Если  $q = q(\sigma)$ ,  $\Phi > 0$  и  $q' < 0$ , то аналогичное интегрирование приводит к уравнению

$$q' = -\Phi(q),$$

где в правой части стоит тот же самый конформный множитель (6.45). Этот случай можно объединить с предыдущим, записав уравнение для  $q$  в виде

$$|q'| = \Phi(q), \quad q = q(\sigma), \quad \Phi > 0. \quad (6.46)$$

Аналогично интегрируется статический случай при  $\Phi < 0$ :

$$|q'| = -\Phi(q), \quad q = q(\sigma), \quad \Phi < 0. \quad (6.47)$$

Если решение однородно,  $q = q(\tau)$  и  $\Phi > 0$ ,  $q' > 0$ , то интегрирование уравнения (6.44) приводит к равенству

$$q' = - \left( K^h - \frac{2M}{q} - \frac{\Lambda q^2}{3} \right).$$

То есть в этом случае конформный множитель надо отождествить с правой частью

$$\hat{\Phi} = - \left( K^h - \frac{2M}{q} - \frac{\Lambda q^2}{3} \right). \quad (6.48)$$

Поскольку выражение конформного множителя в однородном случае через  $q$  отличается знаком, то мы поместили его шляпкой. Таким образом, однородные решения уравнений Эйнштейна можно записать в виде

$$|q'| = \hat{\Phi}(q), \quad q = q(\tau), \quad \hat{\Phi} > 0. \quad (6.49)$$

$$|q'| = -\hat{\Phi}(q), \quad q = q(\tau), \quad \hat{\Phi} < 0. \quad (6.50)$$

Если конформный множитель отрицателен, то сигнатура метрики равна  $(-+--)$ . В этом случае, сделав замену  $\tau \leftrightarrow \sigma$ , мы вернемся к прежней сигнатуре метрики  $(+---)$ . Это преобразование позволяет объединить стационарные и однородные решения, написав знак модуля у конформного множителя в выражении для метрики (6.29). Тогда общее решение вакуумных уравнений Эйнштейна (6.3) в соответствующей системе координат примет вид

$$ds^2 = |\Phi|(d\tau^2 - d\sigma^2) - q^2 d\Omega, \quad (6.51)$$

где конформный множитель  $\Phi$  имеет вид (6.45). При этом переменная  $q$  зависит либо от  $\sigma$  (статическое локальное решение), либо от  $\tau$  (однородное локальное решение) через дифференциальное уравнение

$$\left| \frac{dq}{d\zeta} \right| = \pm \Phi(q), \quad (6.52)$$

где выполнено правило знаков:

$$\begin{aligned} \Phi > 0 : \quad \zeta &= \sigma, & \text{знак } + & \text{(статическое локальное решение)}, \\ \Phi < 0 : \quad \zeta &= \tau, & \text{знак } - & \text{(однородное локальное решение)}. \end{aligned} \quad (6.53)$$

Таким образом, из четырехмерных уравнений Эйнштейна вытекает, что на поверхности  $\mathbb{U}$  возникает метрика с одним вектором Киллинга. Теперь с помощью метода конформных блоков [?] можно построить глобальные (максимально продолженные вдоль экстремалей) решения вакуумных уравнений Эйнштейна. Число особенностей и нулей конформного множителя (6.45) зависит от соотношения между постоянными  $K$ ,  $M$  и  $\Lambda$ . Поэтому возможно существование многих существенно различных глобальных решений, некоторые из которых мы рассмотрим в следующих разделах.

Поскольку конформный множитель  $\Phi(q)$  является гладкой функцией при  $q > 0$ , то все возникающие лоренцевы поверхности  $\mathbb{U}$  и метрика на них, являются гладкими.



Используя уравнения (6.26), (6.30) и (6.43), нетрудно вычислить скалярную кривизну поверхности  $\mathbb{U}$ :

$$R^g = \frac{2}{3}\Lambda + \frac{4M}{q^3}. \quad (6.54)$$

Она не зависит от гауссовой кривизны  $K^h$  римановой поверхности  $\mathbb{V}$  и сингулярна при  $q = 0$ , если  $M \neq 0$ . Отметим, что сингулярная часть двумерной скалярной кривизны (6.54) пропорциональна собственному значению четырехмерного тензора Вейля (см., например, [?]):

$$\frac{1}{48}\hat{C}_{ijkl}\hat{C}^{ijkl} = \left(-\frac{M}{q^3}\right)^2. \quad (6.55)$$

Теперь перейдем к описанию пространственно симметричных глобальных решений вакуумных уравнений Эйнштейна.

### 6.4.1 Сферически симметричные решения $K^h = 1$

При  $K^h = 1$  риманова поверхность  $\mathbb{V}$  представляет собой сферу  $\mathbb{S}^2$ , и все решения сферически симметричны. Для сферы единичного радиуса метрику (6.21) запишем в сферических координатах

$$d\Omega = d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2. \quad (6.56)$$

Сферически симметричную метрику пространства-времени, которая удовлетворяет уравнениям Эйнштейна, можно записать в виде

$$ds^2 = |\Phi(q)|(d\tau^2 - d\sigma^2) - q^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2), \quad (6.57)$$

где

$$\Phi(q) = 1 - \frac{2M}{q} - \frac{\Lambda q^2}{3}. \quad (6.58)$$

Переменная  $q$  связана с  $\sigma$  или  $\tau$  дифференциальным уравнением (6.52), где выполнено правило знаков (6.53).

**Определение.** Координаты  $\tau, \sigma$ , в которых записана сферически симметричная метрика (6.57), называются *черепашьими*. Это название, по-видимому, произошло потому что диаграммы Картера–Пенроуза чем то напоминают рисунок панциря черепахи.  $\square$

Обобщение решения Шварцшильда на случай ненулевой космологической постоянной (6.57) было получено Коттлером [?] и называется *решением Коттлера*.

В рассматриваемом случае все решения параметризуются двумя постоянными: космологической постоянной  $\Lambda$  и массой  $M$ . Вторую постоянную мы будем называть массой, хотя она и не имеет физического смысла массы для большинства решений, отличных от решения Шварцшильда.

### Пространство-время Минковского $\Lambda = 0, M = 0$

Наиболее простое сферически симметричное решение получается при  $\Lambda = 0$  и  $M = 0$ . В этом случае  $\Phi = 1$ , и метрика принимает вид

$$ds^2 = d\tau^2 - dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2), \quad r \in (0, \infty), \quad (6.59)$$

где мы переобозначили  $\sigma \mapsto r$ . Точка  $r = 0$  является координатной сингулярностью. Переходя к декартовым координатам в четырехмерном пространстве-времени и добавляя мировую линию начала сферической системы координат  $r = 0$ , мы получим пространство-время Минковского  $\mathbb{R}^{1,3}$ . При этом пространственная координата  $r$  естественным образом отождествляется с радиусом сферической системы координат. В этом случае пространство-время нельзя представить в виде топологического произведения  $\mathbb{U} \times \mathbb{S}^2$ .

### Черная дыра Шварцшильда $\Lambda = 0$ , $M > 0$

Решение Шварцшильда соответствует нулевой космологической постоянной  $\Lambda = 0$  и положительной массе  $M > 0$ . В этом случае конформный множитель (6.58) имеет один простой нуль в точке  $q_1 = 2M$  и, следовательно, один горизонт. Это решение будет подробно рассмотрено в разделе 7.

### Решение де Ситтера $\Lambda > 0$ , $M = 0$

Решение де Ситтера соответствует положительной космологической постоянной и нулевой массе. При этом пространство-время представляет собой многообразие постоянной (в наших обозначениях положительной) скалярной кривизны и может быть представлено, как четырехмерный гиперболоид, вложенный в пятимерное пространство Минковского  $\mathbb{R}^{1,4}$ , с индуцированной метрикой. Его группой симметрии является группа Лоренца  $\mathbb{O}(1, 4)$ , а метрика имеет максимальное число – десять – векторов Киллинга, что совпадает с размерностью группы симметрии. Конформный множитель (6.58) имеет один простой положительный нуль, соответствующий горизонту.

Статические и однородные решения в координатах Шварцшильда имеют вид

$$ds^2 = \left(1 - \frac{\Lambda}{3}r^2\right) d\tau^2 - \frac{dr^2}{1 - \frac{\Lambda}{3}r^2} - r^2 d\Omega^2, \quad (6.60)$$

$$\begin{aligned} 0 < r < \sqrt{\frac{3}{\Lambda}}, \quad -\infty < \tau < \infty, \\ ds^2 = -\frac{dt^2}{1 - \frac{\Lambda}{3}t^2} + \left(1 - \frac{\Lambda}{3}t^2\right) d\sigma^2 - t^2 d\Omega^2, \\ \sqrt{\frac{3}{\Lambda}} < t < \infty, \quad -\infty < \sigma < \infty. \end{aligned} \quad (6.61)$$

Поскольку уравнение (6.52) в этом случае интегрируется явно, то двумерную часть метрики можно записать также в конформно плоском виде

$$ds^2 = \frac{1}{\text{ch}^2\left(\sqrt{\frac{\Lambda}{3}}\sigma\right)} (d\tau^2 - d\sigma^2) - \frac{3}{\Lambda} \text{th}^2\left(\sqrt{\frac{\Lambda}{3}}\sigma\right) d\Omega^2, \quad (6.62)$$

$$ds^2 = \frac{1}{\text{sh}^2\left(\sqrt{\frac{\Lambda}{3}}\tau\right)} (d\tau^2 - d\sigma^2) - \frac{3}{\Lambda} \text{cth}^2\left(\sqrt{\frac{\Lambda}{3}}\tau\right) d\Omega^2, \quad (6.63)$$

соответственно, для статического и однородного случая. Область определения  $r \in (0, \sqrt{3/\Lambda})$  переходит в  $\sigma \in (0, \infty)$ , а  $t \in (\sqrt{3/\Lambda}, \infty)$  – в  $\tau \in (0, \infty)$ .

**Решение анти-де Ситтера  $\Lambda < 0$ ,  $M = 0$** 

Изменение знака космологической постоянной в уравнениях Эйнштейна приводит к качественному изменению решений. При нулевой массе мы получаем решение анти-де Ситтера. Соответствующее пространство-время представляет собой многообразие постоянной отрицательной кривизны, которое можно представить в виде четырехмерного гиперboloида, вложенного в плоское пространство  $\mathbb{R}^{2,3}$  с метрикой  $\eta_{\alpha\beta} := \text{diag}(1, 1, -1, -1, -1)$ . Метрика анти-де Ситтера симметрична относительно действия группы вращений  $\mathbb{O}(2, 3)$  и имеет также максимальное число – десять – векторов Киллинга. Конформный множитель (6.58) не имеет нулей и всегда положителен. Поэтому решение статично и не имеет горизонтов. В координатах Шварцшильда метрика имеет тот же вид (6.60), что и для решения де Ситтера, однако из-за отрицательного знака  $\Lambda$  область изменения  $r$  совпадает со всем положительным интервалом  $(0, \infty)$ . Если двумерная часть метрики является конформно плоской, то метрика анти-де Ситтера принимает вид

$$ds^2 = \frac{1}{\cos^2 \left( \sqrt{\frac{|\Lambda|}{3}} \sigma \right)} (d\tau^2 - d\sigma^2) - \frac{3}{|\Lambda|} \text{th}^2 \left( \sqrt{\frac{|\Lambda|}{3}} \sigma \right) d\Omega. \quad (6.64)$$

При этом координата  $\sigma$  меняется в конечном интервале  $\sigma \in \left( 0, \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{3}{|\Lambda|}} \right)$ . Это решение неполно на крае  $r = 0$  и не может быть продолжено, что является следствием выбора сферической системы координат. Для получения полного решения анти-де Ситтера мировую линию  $r = 0$  необходимо добавить к многообразию, что можно сделать путем перехода к другой системе координат.

**6.4.2 Планарные решения  $K^h = 0$** 

В случае  $K^h = 0$  метрика на римановой поверхности  $\mathbb{V}$  (6.21) становится евклидовой

$$d\Omega_p := dy^2 + dz^2. \quad (6.65)$$

Это значит, что соответствующая максимально продолженная поверхность  $\mathbb{V}$  является либо евклидовой плоскостью  $\mathbb{R}^2$  с группой симметрии Пуанкаре  $\mathbb{IO}(2)$ , либо ее компактификацией (цилиндр, тор). Будем называть соответствующие четырехмерные глобальные решения вакуумных уравнений Эйнштейна *планарными*. Для решений этого типа метрика в координатах Шварцшильда имеет вид

$$ds^2 = \Phi(q) d\zeta^2 - \frac{dq^2}{\Phi(q)} - q^2 \Omega_p, \quad (6.66)$$

где

$$\Phi(q) = -\frac{2M}{q} - \frac{\Lambda q^2}{3}. \quad (6.67)$$

Координаты  $q$  и  $\zeta$  определены в (6.52). Множество планарных решений так же, как и в сферически симметричном случае, параметризуется двумя постоянными: космологической постоянной  $\Lambda$  и массой  $M$ .

**Замечание.** Для планарных решений координата  $q$  не может быть интерпретирована, как радиус пространства. Поэтому мы с самого начала отказались от ее обозначения через  $r$ , т.к. решение Шварцшильда является лишь частным случаем описываемого общего подхода.  $\square$

Физическая интерпретация планарных решения весьма интересна. Например, при  $\mathbb{V} = \mathbb{T}^2$  трехмерное пространство представляет собой прямое произведение тора  $\mathbb{T}^2$  и прямой  $\mathbb{R}$ . Это пространство содержит нестягиваемые замкнутые пространственноподобные кривые, т.е. имеет нетривиальную фундаментальную группу. С физической точки зрения такие пространства описывают кротовые норы. В этом случае все горизонты также представляют собой торы.

### 6.4.3 Гиперболические глобальные решения $K^h = -1$

При  $K = -1$  поверхность  $\mathbb{V}$  представляет собой двуполостный гиперболоид  $\mathbb{H}^2$  (плоскость Лобачевского). Точнее, верхнюю полу двуполостного гиперболоида. После компактификации  $\mathbb{H}^2$  в качестве поверхности  $\mathbb{V}$  получится компактная риманова поверхность рода два и выше. Отметим, что группой изометрий однополостного гиперболоида  $\mathbb{H}^2$  является группа преобразований Лоренца  $\mathbb{O}(1, 2)$ . То есть возникают решения вакуумных уравнений Эйнштейна симметричные относительно действия группы Лоренца  $\mathbb{O}(1, 2)$  не в пространстве-времени, а на пространственных сечениях  $t = \text{const}$ .

Метрика двуполостного гиперболоида (6.21) единичного радиуса в гиперболической системе координат имеет вид

$$d\Omega_{\text{H}} = d\theta^2 + \text{sh}^2\theta d\varphi^2. \quad (6.68)$$

Соответствующее вакуумное решение уравнений Эйнштейна можно записать в координатах Шварцшильда

$$ds^2 = \Phi(q)d\zeta^2 - \frac{dq^2}{\Phi(q)} - q^2 d\Omega_{\text{H}}, \quad (6.69)$$

где конформный множитель имеет вид

$$\Phi(q) = -1 - \frac{2M}{q} - \frac{\Lambda q^2}{3}. \quad (6.70)$$

Чтобы описать глобальные гиперболические решения, заметим, что конформный множитель  $\Phi$  общего вида (6.45), меняет знак на противоположный при преобразовании всех постоянных:

$$K^h \mapsto -K^h, \quad \Lambda \mapsto -\Lambda, \quad M \mapsto -M.$$

Это означает, что все глобальные решения в случае  $K = -1$ , можно получить из сферически симметричных решений, если поменять пространственную и временную координату  $\tau \leftrightarrow \sigma$  на поверхности  $\mathbb{U}$ , а также изменить знак космологической постоянной и массы.

## 6.5 Лоренц-инвариантные решения

В настоящем разделе мы рассмотрим случай С (6.17), когда второе дилатонное поле в сплетенном произведении (6.2) постоянно,  $m = \text{const}$ . В этом случае, как будет показано ниже, псевдориманова поверхность  $\mathbb{U}$  должна быть поверхностью постоянной кривизны. Следовательно, она представляет собой однополостный гиперболоид,  $\mathbb{U} = \mathbb{L}^2$  или его универсальную накрывающую. В этом случае глобальные решения вакуумных уравнений Эйнштейна имеют вид топологического произведения

$\mathbb{M} = \mathbb{L}^2 \times \mathbb{V}$ . Второй сомножитель  $\mathbb{V}$  представляет собой максимально продолженную риманову поверхность с одним вектором Киллинга. Поверхность  $\mathbb{V}$  может иметь конечные сингулярности или сингулярности кривизны вдоль края поверхности  $\mathbb{V}$ . С физической точки зрения этим сингулярностям соответствуют космические струны или сингулярные доменные стенки, которые эволюционируют во времени.

Случай С похож на пространственно симметричные решения, рассмотренные в случае В, однако имеет также несколько существенно новых черт. Во-первых, мы не можем ограничить себя только положительно определенными метриками  $h_{\mu\nu}$  на  $\mathbb{V}$ , потому что уравнения Эйнштейна (6.14) неинвариантны относительно преобразования  $h_{\mu\nu} \mapsto -h_{\mu\nu}$  при заданном  $m$ . Отметим, что при  $k = \text{const}$  преобразование  $g_{\alpha\beta} \mapsto -g_{\alpha\beta}$  всегда можно дополнить перестановкой пространственной и временной координаты на  $\mathbb{U}$ ,  $\tau \leftrightarrow \sigma$ , что вместе оставляют уравнение (6.13) инвариантным. В случае евклидовой метрики на  $\mathbb{V}$  это невозможно. Поэтому, не ограничивая общности, мы зафиксируем  $m = 1$ , но допустим, что метрика  $h_{\mu\nu}$  может быть как положительно, так и отрицательно определена. В обоих случаях сигнатура четырехмерной метрики будет лоренцевой: либо  $(+ - - -)$ , либо  $(+ - ++)$ .

Решение уравнений (6.13)–(6.16) проводится так же, как и для метрики лоренцевой сигнатуры, при этом необходимо функцию  $m$  заменить на  $k$  и метрику  $g_{\alpha\beta}$  на  $h_{\mu\nu}$ . Поэтому мы только кратко обозначим основные этапы вычислений, подчеркнув те моменты, которые специфичны для евклидовой сигнатуры.

При  $m = 1$  полная система вакуумных уравнений Эйнштейна (6.13)–(6.16) принимает вид

$$\nabla_\mu \nabla_\nu k - \frac{\nabla_\mu k \nabla_\nu k}{2k} - \frac{1}{2} h_{\mu\nu} \left[ \nabla^2 k - \frac{(\nabla k)^2}{2k} \right] = 0, \quad (6.71)$$

$$R^g + \nabla^2 k - 2k\Lambda = 0, \quad (6.72)$$

$$R^h + \frac{\nabla^2 k}{k} - \frac{(\nabla k)^2}{2k^2} - 2\Lambda = 0. \quad (6.73)$$

Как и в случае В, в уравнение (6.72) входит сумма функций от разных аргументов:  $R^g = R^g(x)$  и  $k = k(y)$ . Поэтому скалярная кривизна поверхности  $\mathbb{U}$  должна быть постоянна,  $R^g = -2K^g = \text{const}$ . Отсюда вытекает, что поверхность  $\mathbb{U}$  является однополостным гиперboloидом  $\mathbb{L}^2$  или его универсальной накрывающей.

Это – очень важное следствие вакуумных уравнений Эйнштейна, т.к. в рассматриваемом случае С все решения должны быть  $\mathcal{O}(1, 2)$  инвариантны, где группа преобразований Лоренца  $\mathcal{O}(1, 2)$  действует на однополостном гиперboloиде. Поэтому глобальные решения класса С названы лоренц-инвариантными.

Тогда уравнение (6.72) принимает вид

$$\nabla^2 k - 2(k\Lambda + K^g) = 0. \quad (6.74)$$

Как и в случае В уравнение (6.73) является следствием уравнений (6.71) и (6.74). Поэтому для нахождения решений вакуумных уравнений Эйнштейна достаточно решить уравнения (6.71) и (6.74).

Следующий шаг состоит в фиксировании координат на поверхности  $\mathbb{V}$ . Конформно-евклидова метрика на поверхности  $\mathbb{V}$  имеет вид

$$h_{\mu\nu} dy^\mu dy^\nu = \Phi dz d\bar{z} = \Phi(d\sigma^2 + d\rho^2), \quad \Phi \neq 0. \quad (6.75)$$

Здесь  $\Phi(z, \bar{z})$  является функцией комплексных координат

$$z := \sigma + i\rho, \quad \bar{z} = \sigma - i\rho, \quad (6.76)$$

где  $\sigma = y^2$ ,  $\rho = y^3$ . При этом метрика всего четырехмерного пространства-времени равна

$$ds^2 = kd\Omega_L + \Phi dzd\bar{z}, \quad (6.77)$$

где  $d\Omega_L$  – метрика постоянной кривизны на однополостном гиперболоиде  $\mathbb{L}^2$ , заданная, например, уравнением (6.20).

Не ограничивая общности, рассмотрим положительные  $k > 0$ . В противном случае можно просто переставить первые две координаты. Тогда удобно ввести параметризацию

$$k = q^2, \quad q > 0.$$

Для двух неизвестных функций  $q$  и  $\Phi$  вместо уравнений (6.32)–(6.34) возникает следующая система уравнений

$$\partial_{zz}^2 q - \frac{\partial_z \Phi \partial_z q}{\Phi} = 0, \quad (6.78)$$

$$\partial_{\bar{z}\bar{z}}^2 q - \frac{\partial_{\bar{z}} \Phi \partial_{\bar{z}} k}{\Phi} = 0, \quad (6.79)$$

$$2 \frac{\partial_z \partial_{\bar{z}} q^2}{\Phi} - (K^g + \Lambda q^2) = 0. \quad (6.80)$$

Аналогично случаю В, решением уравнений (6.78) и (6.79) являются функции одного аргумента:  $q = q(z \pm \bar{z})$  и  $\Phi = \Phi(z \pm \bar{z})$ , при этом функция  $\Phi$  определяется уравнением

$$|\Phi| = |q'|, \quad (6.81)$$

где штрих обозначает дифференцирование по соответствующему аргументу. В полученной формуле нижний и верхний знаки соответствуют положительно и отрицательно определенной римановой метрике на  $\mathbb{V}$ . Таким образом, функции  $q$  и  $\Phi$  зависят либо от координаты  $\sigma$ , либо от  $i\rho$ . Поскольку, благодаря вращательной  $\mathcal{O}(2)$  симметрии конформно евклидовой метрики (6.75), оба выбора равнозначны, то для определенности мы предположим, что функции  $q(\sigma)$  и  $\Phi(\sigma)$  зависят от  $\sigma$ .

После этого уравнение (6.80) упростится:

$$\frac{1}{2}(q^2)'' = (K^g + \Lambda q^2)\Phi, \quad (6.82)$$

где штрих обозначает дифференцирование по  $\sigma$ . Чтобы его проинтегрировать, в уравнении (6.81) необходимо раскрыть знаки модулей.

Рассмотрим случай  $\Phi q' > 0$ . Тогда уравнение (6.82) с учетом (6.81) примет вид

$$\frac{1}{2}(q^2)'' = (K^g + \Lambda q^2)q',$$

и его легко проинтегрировать:

$$q' = K^g - \frac{2M}{q} + \frac{\Lambda q^2}{3}, \quad (6.83)$$

где  $M$  – произвольная постоянная интегрирования. Хотя в рассматриваемом случае ее нельзя интерпретировать как массу, мы будем использовать старые обозначения, чтобы облегчить сравнение. Учитывая уравнение (6.81) получаем выражение для конформного множителя

$$\Phi(q) = K^g - \frac{2M}{q} + \frac{\Lambda q^2}{3} \quad (6.84)$$

Случай  $\Phi q' < 0$  интегрируется аналогично.

Окончательно, общее решение вакуумных уравнений Эйнштейна в случае С имеет вид

$$ds^2 = q^2 d\Omega_L + \Phi(q)(d\sigma^2 + d\rho^2), \quad (6.85)$$

где конформный множитель задан уравнением (6.84) и функция  $q = q(\sigma)$  определяется уравнением (6.81). Таким образом, метрика на поверхности  $\mathbb{V}$  имеет один вектор Киллинга  $\partial_\rho$ .

Выбирая функцию  $q(\sigma)$  в качестве одной из координат, метрику (6.85) можно записать в виде, напоминающем метрику Шварцшильда,

$$ds^2 = q^2 d\Omega_L + \frac{dq^2}{\Phi(q)} + \Phi(q) d\sigma^2. \quad (6.86)$$

Результирующая метрика имеет три вектора Киллинга, соответствующих группе симметрии  $\mathbb{O}(1, 2)$  однополостного гиперboloида постоянной кривизны  $\mathbb{L}^2$ , и один дополнительный вектор Киллинга  $\partial_\rho$  на поверхности  $\mathbb{V}$ .

Вычисления, аналогичные случаю  $k = 1$ , приводят к следующему выражению для скалярной кривизны поверхности  $\mathbb{V}$

$$R^h = \frac{2}{3}\Lambda + \frac{4M}{q^3}.$$

При этом для инвариантного собственного значения четырехмерного тензора Вейля мы получаем то же выражение (6.55), что и в случае В.

### 6.5.1 Лоренц-инвариантные решения $K^g = 1$

Прежде всего отметим, что случаи  $K^g = 1$  и  $K^g = -1$  связаны между собой перестановкой первых двух координат  $\tau \leftrightarrow \sigma$ . Мы выберем значение  $K^g = 1$ , чтобы выражение для конформного множителя  $\Phi$  имело, с точностью до изменения знака космологической постоянной, тот же вид, что и для сферически симметричного случая. Поэтому четырехмерная метрика пространства-времени в координатах Шварцшильда запишется следующим образом

$$ds^2 = q^2(d\theta^2 - \text{ch}^2\theta d\varphi^2) + \frac{dq^2}{\Phi(q)} + \Phi(q)d\rho^2, \quad (6.87)$$

где конформный множитель,

$$\Phi = 1 - \frac{2M}{q} + \frac{\Lambda q^2}{3}, \quad (6.88)$$

имеет тот же вид, что и в решении Коттлера [?], но в рассматриваемом случае этот нетривиальный конформный множитель входит в евклидову часть метрики.

На поверхности  $\mathbb{V}$  метрика может быть как отрицательно ( $\Phi < 0$ ), так и положительно ( $\Phi > 0$ ) определена. Для отрицательно определенной метрики сигнатура метрики пространства-времени равна  $(+ - - -)$ , и роль времени играет координата  $\theta$ . Поэтому времениподобная координата принимает значения на всей вещественной оси  $\theta \in \mathbb{R}$ , и трехмерное пространство представляет собой произведение окружности  $\varphi \in [0, 2\pi)$  и поверхности  $\mathbb{V}$ , которая будет построена ниже. Если в качестве  $\mathbb{U}$  выбрать универсальную накрывающую однополостного гиперboloида  $\mathbb{L}^2$ , то трехмерное

пространство будет представлять произведение  $\mathbb{R} \times \mathbb{V}$ . Эволюция этих пространств во времени длится вечно, и если поверхность  $\mathbb{V}$  имеет сингулярность, то ей будет соответствовать времениподобная кривая.

Для положительно определенной метрики на  $\mathbb{V}$  сигнатура четырехмерной метрики равна  $(+ - ++)$ , и времениподобной координатой является угол  $\varphi$ . При  $\mathbb{U} = \mathbb{L}^2$  он принимает значения на окружности  $\varphi \in [0, 2\pi)$ , и трехмерное пространство представляет собой произведение прямой  $\theta \in \mathbb{R}$  и поверхности  $\mathbb{V}$ . Соответствующее пространство-время содержит замкнутые времениподобные кривые (включая экстремали), если только в качестве поверхности  $\mathbb{U}$  не выбрано универсальное накрывающее пространство для  $\mathbb{L}^2$ .

Все глобальные решения для этого случая описаны в статье [?].

### 6.5.2 Итоги главы

Таким образом, найдены и классифицированы все глобальные вакуумные решения уравнений Эйнштейна с космологической постоянной, которые имеют вид сплетенного произведения двух поверхностей. Явное построение и классификация решений проведена в зависимости от значений постоянной скалярной кривизны одной из поверхностей, значения космологической постоянной  $\Lambda$  и единственной постоянной интегрирования  $M$ , которая для решения Шварцшильда имеет физический смысл массы черной дыры. Мы видим, что требование максимального продолжения решений практически однозначно определяет глобальную структуру пространства-времени. Важно отметить, что при решении уравнений движения мы не ставим никаких граничных условий. Подчеркнем, что решение уравнений Эйнштейна в какой-то фиксированной системе координат само по себе дает не так уж много. Для того, чтобы дать физическую интерпретацию решений необходимо знать глобальную структуру пространства-времени. Эта задача сложна, но обойти ее, по-видимому, невозможно.

Предположение о том, что метрика пространства-времени имеет вид сплетенного произведения метрик двух поверхностей влечет за собой симметрию метрики, если потребовать выполнения вакуумных уравнений Эйнштейна. Например, для решения Шварцшильда мы не требовали сферической симметрии метрики – она возникла в процессе решения уравнений Эйнштейна.

Построенные решения представляют значительный физический интерес. Мы показали, что вакуумные решения уравнений Эйнштейна описывают черные дыры, космические струны, кротовые норы, доменные стенки сингулярностей кривизны и другие. В настоящей монографии мы лишь кратко обсудили свойства построенных глобальных решений.



## Глава 7

# Решение Шварцшильда

В настоящем разделе мы детально рассмотрим решение Шварцшильда, т.к. оно играет важную роль в физических приложениях. Фактически, основные наблюдательные данные, подтверждающие общую теорию относительности, основаны на предсказаниях, полученных для этого решения.

Вскоре после создания общей теории относительности К. Шварцшильд нашел точное статическое сферически симметричное решение вакуумных уравнений Эйнштейна [?]. Это же решение было также независимо найдено Дж. Дросте [?, ?, ?], который был учеником Г. Лоренца. Позже было доказано, что любое сферически симметричное решение вакуумных уравнений Эйнштейна вне горизонта имеет дополнительный времениподобный вектор Киллинга, т.е. существует такая система координат, что вне горизонта решение является статическим. Это утверждение означает, что условие статичности при получении решения Шварцшильда является излишним и известно, как теорема Бирхгоффа [?, ?].

Решение Шварцшильда уже было найдено нами в разделе 6.4.1, где также было построено его максимальное продолжение вдоль экстремалей. В том числе было доказано существование дополнительного вектора Киллинга, который вне горизонта времениподобен, а под горизонтом пространственноподобен. Глобальное (максимально продолженное вдоль экстремалей) решение Шварцшильда описывает черную дыру – новый объект, предсказанный общей теорией относительности, который отсутствует в теории гравитации Ньютона. В настоящее время астрономические наблюдения говорят о возможном существовании черных дыр во вселенной, в частности, в центре нашей галактики. Метрика для решения Шварцшильда вне горизонта успешно используется для описания гравитационного поля звезд, а также солнечной системы.

## 7.1 Координаты Шварцшильда

Метрика Шварцшильда в координатах Шварцшильда  $(x^\alpha) = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (t, \rho, \theta, \varphi)$ , имеет хорошо известный вид

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2M}{\rho}\right) dt^2 - \frac{d\rho^2}{1 - \frac{2M}{\rho}} - \rho^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2), \quad (7.1)$$

где  $M = \text{const}$  – интеграл движения, который имеет физический смысл массы, сосредоточенной в некоторой области, вне которой решаются вакуумные уравнения Эйнштейна. Это – сферически симметричное решение вакуумных уравнений Эйнштейна с нулевой космологической постоянной, которое было получено в разделе

6.4.1. Последнее слагаемое представляет собой метрику сферы радиуса  $\rho$ , которая индуцирована вложением  $\mathbb{S}^2 \hookrightarrow \mathbb{R}^3$  и взята с обратным знаком. Группа вращений  $\mathbb{O}(3)$  действует обычным образом на азимутальный и полярный углы  $\theta$  и  $\varphi$ . Метрика (7.1) определена при

$$-\infty < t < \infty, \quad 0 < \theta < \pi, \quad 0 < \varphi < 2\pi.$$

При  $\rho = \rho_s := 2M$  компоненты метрики вырождаются. Радиус  $\rho_s$  называется *радиусом Шварцшильда* или *гравитационным радиусом*. Ему соответствует сфера радиуса  $\rho_s$ , которая называется *горизонтом*. При этом координата  $\rho$ , которая предполагается положительной, меняется либо в пределах  $2M < \rho < \infty$  (вне горизонта  $\rho_s$ ), либо  $0 < \rho < 2M$  (под горизонтом).

Метрика (7.1) вырождена при  $\rho = 0, 2M$  и  $\theta = 0, \pi$ . Вырождение метрики при  $\theta = 0, \pi$  связано с выбором координат на сфере  $\mathbb{S}^2$ . Это – хорошо известная особенность сферической системы координат, которую мы обсуждать не будем. Особенности метрики при  $\rho = 0, 2M$  мы обсудим подробно.

Несмотря на то, что компоненты метрики на сфере Шварцшильда вырождаются, ее определитель не имеет нулей при  $\rho > 0$ :

$$\det g_{\alpha\beta} = -\rho^4 \sin^2 \theta,$$

за исключением особенности сферической системы координат при  $\theta = 0, \pi$ .

Координата  $\rho$  при  $\rho > 2M$  является аналогом радиальной координаты в сферической системе координат трехмерного евклидова пространства  $\mathbb{R}^3$ . Координата  $t$  при  $\rho > 2M$  играет роль времени. Вне горизонта метрика Шварцшильда в координатах Шварцшильда является статической. При  $0 < \rho < 2M$  смысл координат  $t$  и  $\rho$  меняется:  $t$  становится пространственноподобной координатой, а  $\rho$  – времениподобной. Поэтому координата  $\rho$  под горизонтом никакого отношения к радиусу не имеет.

Если на многообразии задана какая-либо метрика, то первое, что хочется сделать – это вычислить компоненты соответствующего тензора кривизны и его инварианты. Поскольку метрика Шварцшильда является решением вакуумных уравнений Эйнштейна с нулевой космологической постоянной, то тензор Риччи и скалярная кривизна пространства-времени равны нулю. Однако полный тензор кривизны отличен от нуля. Поскольку тензор Риччи и скалярная кривизна равны нулю, то тензор кривизны в рассматриваемом случае совпадает с тензором Вейля. Перейдем к вычислениям.

Метрика (7.1) задает в пространстве-времени символы Кристоффеля (1.94), из которых выпишем только линейно независимые и нетривиальные:

$$\begin{aligned} \Gamma_{00}^1 &= \frac{M}{\rho^2} \left(1 - \frac{2M}{\rho}\right), & \Gamma_{22}^1 &= -\rho \left(1 - \frac{2M}{\rho}\right), \\ \Gamma_{01}^0 &= \frac{M}{\rho^2 \left(1 - \frac{2M}{\rho}\right)}, & \Gamma_{33}^1 &= -\rho \left(1 - \frac{2M}{\rho}\right) \sin^2 \theta, \\ \Gamma_{11}^1 &= -\frac{M}{\rho^2 \left(1 - \frac{2M}{\rho}\right)}, & \Gamma_{23}^3 &= \frac{\cos \theta}{\sin \theta}, \\ \Gamma_{12}^2 &= \Gamma_{13}^3 = \frac{1}{\rho}, & \Gamma_{33}^2 &= -\sin \theta \cos \theta. \end{aligned} \tag{7.2}$$

“Линейно независимые” означает, что мы не выписали нетривиальные компоненты, которые получаются из приведенных выше простой перестановкой индексов. Например,  $\Gamma_{10}^0 = \Gamma_{01}^0$ .

Прямые довольно громоздкие вычисления приводят к следующим нетривиальным линейно независимым компонентам тензора кривизны (1.119) для метрики (7.1):

$$\begin{aligned} R_{0101} &= -\frac{2M}{\rho}, & R_{1212} &= -\frac{M}{\rho \left(1 - \frac{2M}{\rho}\right)}, \\ R_{0202} &= \frac{M}{\rho} \left(1 - \frac{2M}{\rho}\right), & R_{1313} &= -\frac{M}{\rho \left(1 - \frac{2M}{\rho}\right)} \sin^2 \theta, \\ R_{0303} &= \frac{M}{\rho} \left(1 - \frac{2M}{\rho}\right) \sin^2 \theta, & R_{2323} &= 2M\rho \sin^2 \theta. \end{aligned} \quad (7.3)$$

Компоненты тензора кривизны можно либо вычислить в лоб, воспользовавшись формулой (1.119), либо воспользоваться формулами из раздела 6.1 для сплетенного произведения двух многообразий, т.к. метрика Шварцшильда (7.1) имеет именно такой вид. В обозначениях этого раздела следует положить

$$\begin{aligned} k &= 1, & m &= -\rho^2, \\ g_{\alpha\beta} &= \begin{pmatrix} 1 - \frac{2M}{\rho} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{1 - \frac{2M}{\rho}} \end{pmatrix}, & h_{\mu\nu} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sin^2 \theta \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

В таком случае вычисления несколько упрощаются.

Мы видим, что компоненты тензора кривизны вырождены в нуле  $\rho = 0$  и на горизонте  $\rho = \rho_s$ . Само по себе это только указывает на возможные особенности геометрических объектов (в рассматриваемом случае метрики), т.к. компоненты тензора не являются геометрическими инвариантами. Чтобы прояснить ситуацию, вычислим квадрат тензора кривизны, который инвариантен относительно преобразований координат:

$$\begin{aligned} R_{\alpha\beta\gamma\delta} R^{\alpha\beta\gamma\delta} &= 4 \left[ R_{0101}^2 (g^{00} g^{11})^2 + R_{0202}^2 (g^{00} g^{22})^2 + R_{0303}^2 (g^{00} g^{33})^2 + \right. \\ &\quad \left. + R_{1212}^2 (g^{11} g^{22})^2 + R_{1313}^2 (g^{11} g^{33})^2 + R_{2323}^2 (g^{22} g^{33})^2 \right] = \frac{48M^2}{\rho^6}. \end{aligned} \quad (7.4)$$

Хотя тензор Риччи и скалярная кривизна равны нулю, геометрия нетривиальна, т.к. квадрат тензора кривизны, который в данном случае совпадает с квадратом тензора Вейля, отличен от нуля. Он определен при всех  $\rho > 0$  и имеет только одну особенность при  $\rho = 0$ .

При  $\rho \rightarrow \infty$  кривизна пространства-времени стремится к нулю. Это значит, что пространство-время является асимптотически плоским на больших расстояниях. Этот факт следовал также из вида метрики, поскольку метрика (7.1) стремится к метрике Лоренца при  $\rho \rightarrow 0$ .

На горизонте,  $\rho = \rho_s$ , кривизна никакой особенности не имеет. Это указывает на то обстоятельство, что особенность метрики (7.1) на горизонте может быть связана с неудачным выбором координат, т.е. является координатной. Действительно, ниже мы увидим, что в координатах Крускала–Секереша метрика Шварцшильда на горизонте регулярна. Конечно, преобразование координат Шварцшильда к координатам Крускала–Секереша вырождено при  $\rho = \rho_s$ .

Особенность метрики при  $\rho = 0$  является неустранимой. Подчеркнем, что значение  $\rho = 0$  не соответствует началу сферической системы координат, т.к. координата

$\rho$  под горизонтом является времениподобной. Ниже мы увидим, что пространственноподобная особенность  $\rho = 0$  соответствует черной и белой дырам.

Метрика (7.1) сферически симметрична, при этом группа вращений  $\mathbb{O}(3)$  действует только на угловые координаты  $\theta$  и  $\varphi$ . Сферической симметрии метрики (7.1) соответствуют три векторных поля Киллинга, которые имеют нетривиальные компоненты только относительно базисных векторных полей  $\partial_\theta$  и  $\partial_\varphi$ . Кроме этого имеется четвертое векторное поле Киллинга, которое в координатах Шварцшильда имеет вид  $\partial_t$ . Оно соответствует статичности метрики Шварцшильда вне горизонта в координатах Шварцшильда.

Наличие четвертого векторного поля Киллинга для любого сферически симметричного решения вакуумных уравнений Эйнштейна известно как *теорема Бирхгоффа* [?, ?]. В разделе 6 мы доказали аналогичное утверждение в более общем случае. А именно, четвертый вектор Киллинга появляется в любом решении вакуумных уравнений Эйнштейна с космологической постоянной, которое имеет вид сплетенного произведения двух поверхностей. При этом мы не требовали симметрии метрики относительно какой-либо группы преобразований. Группа симметрии возникает автоматически при решении уравнений Эйнштейна. Это может быть либо группа вращений  $\mathbb{SO}(3)$ , либо группа Лоренца  $\mathbb{SO}(1, 2)$ , либо группа Пуанкаре  $\mathbb{IO}(2)$ , которые действуют на сечениях  $t = \text{const}$ . Глобальная структура всех таких решений была найдена и классифицирована в статье [?].

Ясно, что в метрике Шварцшильда (7.1) можно произвольно менять радиальную координату  $\rho \mapsto \rho'(\rho)$ , при этом метрика также будет удовлетворять вакуумным уравнениям Эйнштейна. Обычно в пользу выбора радиальной координаты Шварцшильда  $\rho$  приводят следующий “аргумент”. Площадь поверхности сферы  $\mathbb{S}^2$ , определяемой уравнением  $\rho = \text{const} > 2M$ , такая же, как и в евклидовом пространстве  $4\pi\rho^2$ . Соответственно, длина окружности, лежащей в экваториальной плоскости сферы, равна  $2\pi\rho$ . У этого “аргумента” нет никаких математических или физических оснований. Заметим также, что “центр” у сферы отсутствует, т.к. при  $\rho = 0$  сфера вырождается в точку, которой соответствует пространственноподобная, а не времениподобная кривая в плоскости  $t, \rho$ .

Важным является то обстоятельство, что постоянная  $M$ , входящая в решение Шварцшильда, является постоянной интегрирования, и вообще не содержится в вакуумных уравнениях Эйнштейна. С математической точки зрения постоянная  $M$  может принимать произвольные значения  $M \in \mathbb{R}$ . Однако, если предположить, что решение Шварцшильда описывает гравитационное поле вне точечной массивной частицы или некоторого сферически симметричного распределения масс, то сравнение с законом всемирного тяготения Ньютона на больших расстояниях, которое было проведено в разделе 5.7, говорит о том, что постоянная интегрирования  $M$  – это масса частицы, которая, следовательно, должна быть положительной.

Допустим, что решение Шварцшильда описывает солнечную систему, когда в качестве источника гравитационного поля рассматривается Солнце, а планеты и другие тела – в качестве пробных частиц, движущихся по экстремалиям (геодезическим) в гравитационном поле Солнца. Тогда возникает естественный и нетривиальный вопрос: какому значению координаты  $\rho$  соответствует орбита, например, Земли? Более общо, какое отношение имеет координата  $\rho$ , входящая в решение Шварцшильда, к расстоянию до Солнца, которое мы измеряем? Как было отмечено выше, в решении Шварцшильда мы можем произвести произвольную замену радиальной координаты  $\rho \mapsto \rho'(\rho)$ , не меняющую асимптотики на бесконечности. Новая метрика также будет удовлетворять вакуумным уравнениям Эйнштейна и будет асимптотически плоской.

При этом с законом тяготения Ньютона будет все в порядке, поскольку он определяется только асимптотикой при  $\rho \rightarrow \infty$ . Возможный ответ на этот вопрос заключается в измерении площади поверхности сферы  $S_r$  достаточно большого радиуса  $r$  или длины окружности  $L_r$  того же радиуса. Площадь поверхности и длина окружности являются геометрическими инвариантами и, следовательно, не зависят от выбора системы координат. После этого надо вычислить отношения  $S_r/r^2$  и  $L_r/r$ , где  $r$  – измеренный радиус. Если отношения будут равны  $4\pi$  и  $2\pi$ , соответственно, то можно утверждать, что измеряемый радиус – это действительно радиальная координата Шварцшильда,  $r = \rho$ .

Другой способ. Посылаем космический корабль со скоростью света к горизонту (Солнцу) и обратно. После возвращения, смотрим на показания часов, находящихся на корабле. Это будет собственное время, которое равно удвоенному значению канонического параметра для светоподобной экстремали от Земли до горизонта, и которое является геометрическим инвариантом. Из этого условия можно найти значение наблюдаемого радиуса  $r$ .

В общей теории относительности мы требуем, чтобы пространство-время было максимально продолжено вдоль экстремалей (геодезических). Это означает, что любую экстремаль на псевдоримановом многообразии  $(M, g)$  можно либо продолжить до бесконечного значения канонического параметра в обе стороны, либо при конечном значении канонического параметра она попадет в сингулярную точку, где какой-либо из геометрических инвариантов обратится в бесконечность. Более подробно этот вопрос обсуждался в разделе 5.2. Метрика Шварцшильда в координатах Шварцшильда (7.1) геодезически не полна на горизонте, и многообразие (пространство-время) можно продолжить, например, перейдя к координатам Крускала–Секереша.

В сферически симметричном случае четырехмерное пространство-время представляет собой топологическое произведение  $M = U \times S^2$  двумерной лоренцевой поверхности  $U$  на сферу  $S^2$ . Максимально продолженные вдоль геодезических поверхности  $U$  удобно изображать в виде диаграмм Картера–Пенроуза, которые были описаны в главе ???. Чтобы пояснить смысл диаграмм и ввести обозначения, рассмотрим

**Пример 7.1.1. Плоскость Минковского.** Рассмотрим плоскость Минковского  $\mathbb{R}^{1,1}$  с декартовыми координатами  $t, x$ . Введем светоподобные координаты

$$u := t + x, \quad v := t - x$$

и отображим всю плоскость на квадрат вдоль светоподобных направлений, например, положим

$$U := \arctg u \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right), \quad V := \arctg v \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right), \quad (7.5)$$

который изображен на рис.7.1.

Этот квадрат представляет собой диаграмму Картера–Пенроуза для плоскости Минковского  $\mathbb{R}^{1,1}$ . На диаграмме буквы  $i^+$  и  $i^-$  обозначают пространственноподобные бесконечности будущего и прошлого, соответственно. Они изображены закрашенными кружками, что означает их геодезическую полноту. Буквы  $J^\pm$  обозначают светоподобные бесконечности будущего и прошлого. Они изображены жирными прямыми линиями, т.к. геодезически полны. Буквы  $i^0$  обозначают левую и правую времениподобные пространственные бесконечности. Они также геодезически полны и поэтому изображены закрашенными кружками.

Пространство-время Минковского  $\mathbb{R}^{1,1}$  является геодезически полным многообразием. Геодезическими являются прямые линии и только они на плоскости  $t, x$ .



которые входят в метрику (7.1), и соответствующей двумерной частью метрики

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2M}{\rho}\right) dt^2 - \frac{d\rho^2}{1 - \frac{2M}{\rho}}. \quad (7.6)$$

Эта двумерная метрика имеет один вектор Киллинга  $\partial_t$ . Общий подход к построению максимально продолженных лоренцевых поверхностей с одним вектором Киллинга описан в [?].

Максимально продолженная вдоль экстремалей лоренцева поверхность  $\mathbb{U}$  изображается в виде диаграммы Картера–Пенроуза, показанной на рис.7.2. В квадрат-

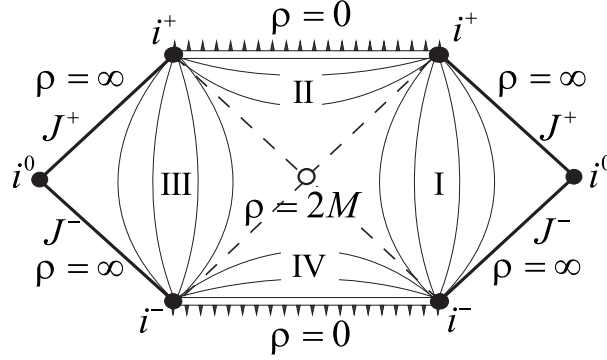


Рис. 7.2: Диаграмма Картера–Пенроуза для решения Шварцшильда.

ных статических конформных блоках I и III координата  $\rho$  меняется в пределах  $2M < \rho < \infty$ , пространственноподобна и является аналогом радиальной координаты сферической системы координат. В блоке I координата  $\rho$  возрастает слева направо, а в блоке III — справа налево. В треугольных однородных конформных блоках II и IV координата  $\rho$  меняется в пределах  $0 < \rho < 2M$  и является времениподобной. В блоке II она возрастает сверху вниз, а в блоке IV — снизу вверх. Конформные блоки на диаграмме Картера–Пенроуза склеены вдоль горизонтов, соответствующих радиусу Шварцшильда  $\rho_s = 2M$ , которые показаны на диаграмме пунктирными линиями. Центральная точка (место пересечения горизонтов), которая на диаграмме Картера–Пенроуза помечена окружностью, является седловой точкой для координаты  $\rho$  и геодезически не полна.

На диаграмме Картера–Пенроуза пространственноподобные бесконечности будущего и прошлого  $i^+$  и  $i^-$ , левая и правая времениподобные пространственные бесконечности  $i^0$  являются геодезически полными и изображены закрашенными кружками. Светоподобные бесконечности будущего и прошлого  $J^+$  и  $J^-$  геодезически полны и показаны жирными прямыми. Горизонты обозначены пунктирными линиями внутри диаграммы, поскольку не являются геодезически полными. Сингулярные края, соответствующие  $\rho = 0$ , геодезически не полны.

Пространственноподобные края конформных блоков II и IV соответствуют значению  $\rho = 0$ , являются сингулярностями кривизны и геодезически не полны.

Наглядность диаграммы Картера–Пенроуза заключается в том, что световые конусы в каждой внутренней точке образованы двумя пересекающимися прямыми, идущими под углами  $\pm\pi/4$  так же, как и на плоскости Минковского  $\mathbb{R}^{1,1}$ . Отсюда сразу следует, что никакая времениподобная или светоподобная экстремаль (геодезическая), которая начинается внутри блока II, не может попасть в области I или III, и с необходимостью попадет на сингулярность  $\rho = 0$ , расположенную сверху, при

конечном значении канонического параметра. По этой причине верхнюю сингулярность  $\rho = 0$  называют сингулярностью черной дыры, а область II под горизонтом – внутренностью черной дыры.

Максимально продолженное решение Шварцшильда описывает две вселенные: I и III. Мы находимся либо во вселенной I, либо в III. Эти вселенные между собой не связаны причинно: никакой наблюдатель из вселенной I не может попасть во вселенную III и наоборот, т.к. никакие их точки нельзя соединить времени- или светоподобной кривой. При этом у наблюдателя из вселенной I есть две возможности: либо жить вечно, чему соответствуют времениподобные кривые, уходящие в пространственноподобную бесконечность будущего  $i^+$  (она изображена закрашенным кружком в верхнем правом углу диаграммы), либо за конечное собственное время угодить в черную дыру  $\rho = 0$  после пересечения горизонта.

Заметим, что с точки зрения внешнего наблюдателя, который измеряет координаты Шварцшильда, приближение к горизонту займет бесконечное время  $t$ . Это легко видеть для радиальных светоподобных экстремалей, которые определяются условием  $ds^2 = 0$ . Действительно, для метрики (7.6) радиальные светоподобные экстремали определяются уравнением

$$\left(1 - \frac{2M}{\rho}\right) dt^2 - \frac{d\rho^2}{1 - \frac{2M}{\rho}} = 0.$$

Отсюда следует равенство

$$t = \int \frac{\rho d\rho}{\rho - 2M}.$$

Этот интеграл логарифмически расходится на горизонте при  $\rho = 2M$ . Следовательно, радиальные светоподобные экстремали с точки зрения внешнего наблюдателя приближаются к горизонту бесконечно долго. Аналогичный анализ можно провести и для времениподобных экстремалей. То есть внешний наблюдатель никогда не увидит прохождения чего-либо через горизонт. С точки зрения же падающего наблюдателя он благополучно пересечет горизонт при конечном значении собственного времени и продолжит падение на черную дыру, пока не достигнет сингулярности  $\rho = 0$  при конечном значении канонического параметра (собственного времени).

Светоподобные экстремали из вселенной I попадают либо в правую светоподобную бесконечность будущего  $J^+$  при бесконечном значении канонического параметра, либо достигают сингулярности черной дыры при конечном значении канонического параметра.

Из внутренности белой дыры (область IV) времениподобные экстремали могут попасть во все три области I, II и III. Однако никакой наблюдатель из вселенной I или III не может попасть внутрь белой дыры.

Времениподобные пространственные бесконечности слева и справа  $i^0$  можно соединить с внутренней точкой диаграммы Картера–Пенроуза только пространственноподобной кривой при условии, что тип кривой не меняется от точки к точке.

С точки зрения задачи Коши, решение волнового уравнения в области I определяется начальными данными вблизи сингулярности белой дыры  $\rho = 0$ , правой пространственноподобной бесконечности прошлого  $i^-$  и правой светоподобной бесконечности прошлого  $J^-$ .

Диаграмма Картера–Пенроуза для решения Шварцшильда представляет собой гладкую двумерную лоренцеву поверхность с гладкой метрикой. При этом лоренцева поверхность с метрикой (7.6) при  $-\infty < t < \infty$  и  $2M < \rho < \infty$  изометрична области



I и области III. Лоренцева поверхность с координатами  $-\infty < t < \infty$  и  $0 < \rho < 2M$  изометрична области II и области IV.

Векторное поле Киллинга  $\partial_t$  времениподобно в блоках I и III (метрика статична) и пространственноподобно в блоках II и IV (метрика однородна). Соответствующие траектории Киллинга показаны на диаграмме Картера–Пенроуза тонкими сплошными линиями внутри блоков. Горизонты на поверхности  $\mathbb{U}$  являются светоподобными траекториями Киллинга. Это становится ясным, когда метрика Шварцшильда (7.6) записана в координатах Эддингтона–Финкельстейна или Крускала–Секереша.

Таким образом, координаты Шварцшильда не покрывают всю лоренцеву поверхность  $\mathbb{U}$  и, следовательно, не являются глобальными.

## 7.2 Координаты Эддингтона–Финкельстейна

Для того, чтобы доказать дифференцируемость метрики при склейке конформных блоков вдоль горизонтов используются координаты Эддингтона–Финкельстейна, которые первоначально были введены именно для решения Шварцшильда [?, ?]. Перейдем от координат Шварцшильда к координатам Эддингтона–Финкельстейна  $t, \rho \mapsto \xi, \rho$ , где

$$t := \xi - \int \frac{\rho}{1 - \frac{2M}{r}} dr = \xi - \rho - 2M \ln|\rho - 2M|. \quad (7.7)$$

Это преобразование временной координаты определено при  $0 < \rho < 2M$  и  $2M < \rho < \infty$ . Постоянная интегрирования соответствует сдвигу  $t$ , и мы, для простоты, положили ее равной нулю. Для соответствующих дифференциалов справедливо равенство

$$dt = d\xi - \frac{d\rho}{1 - \frac{2M}{\rho}},$$

и метрика Шварцшильда (точнее, ее двумерная  $t, \rho$  часть) в новых координатах принимает вид

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2M}{\rho}\right) d\xi^2 - 2d\xi d\rho. \quad (7.8)$$

Эта метрика невырождена,  $\det g_{\alpha\beta} = -1$ , и определена при всех значениях координат

$$-\infty < \xi < \infty, \quad 0 < \rho < \infty, \quad (7.9)$$

т.е. на полуплоскости  $\xi, \rho$ .

Преобразование координат Шварцшильда к координатам Эддингтона–Финкельстейна (7.7) хорошо определено при  $0 < \rho < 2M$  и  $2M < \rho < \infty$ , однако вырождено на горизонте  $\rho_s := 2M$ . Таким образом внутренность конформных блоков I и II отображается на две непересекающиеся области полуплоскости (7.9), которые гладко склеены вдоль горизонта  $\rho_s$ . Эта полуплоскость на диаграмме Картера–Пенроуза (см. рис.7.3 слева) изображена в виде диагональной цепочки конформных блоков, идущих сверху слева вниз направо. Вдоль этой цепочки координата  $\rho$  увеличивается от нуля до бесконечности, а  $\xi$  меняется от  $-\infty$  до  $+\infty$ . Напомним, что горизонт  $\rho_s$  достигается при бесконечном значении  $t$ , как было показано в предыдущем разделе.

Координаты Шварцшильда не различают конформные блоки типа I и III, а также блоки типа II и IV. Поэтому метрике (7.8) соответствует также вторая диагональная цепочка конформных блоков, идущая снизу справа наверх налево (возрастание координаты  $\rho$ ).

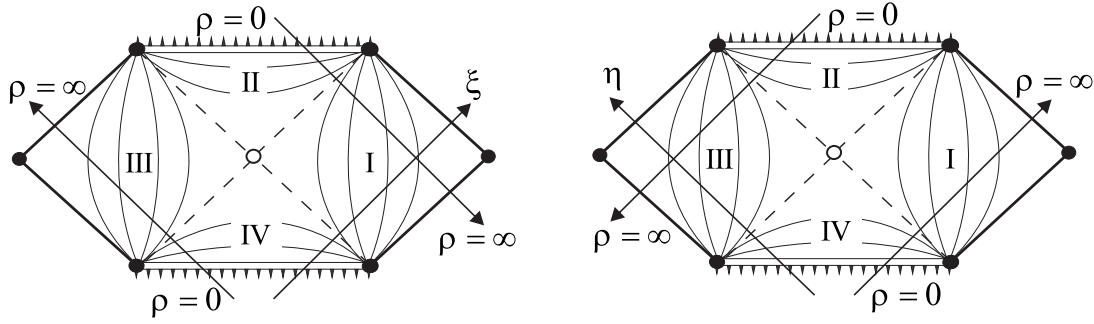


Рис. 7.3: Координаты Эддингтона–Финкельштейна  $\xi, \rho$  (слева) и  $\eta, \rho$  (справа) на диаграмме Картера–Пенроуза для решения Шварцшильда.

Введенные координаты Эддингтона–Финкельштейна склеивают конформные блоки I–II и III–IV. Можно также ввести другие координаты Эддингтона–Финкельштейна  $t, \rho \mapsto \eta, \rho$ , которые склеивают блоки I–IV и II–III. Формула соответствующего преобразования имеет вид

$$t := \eta + \int^{\rho} \frac{dr}{1 - \frac{2M}{r}} = \eta + \rho + 2M \ln|\rho - 2M|,$$

где, как и раньше,  $0 < \rho < 2M$  или  $2M < \rho < \infty$ . Метрика в этих координатах примет вид

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2M}{\rho}\right) d\eta^2 + 2d\eta d\rho.$$

Полученная метрика невырождена и определена на полуплоскости

$$-\infty < \eta < \infty, \quad 0 < \rho < \infty.$$

На диаграмме Картера–Пенроуза (см. рис.7.3 справа) эта полуплоскость изображается в виде диагональных цепочек конформных блоков, которые идут либо снизу слева вверх направо, либо сверху справа вниз налево, что соответствует возрастанию координаты  $\rho$ .

Двумерная поверхность с метрикой (7.8) не является максимально продолженной. Можно показать, что экстремали на полуплоскости (7.9) неполны при  $\xi \rightarrow -\infty$  для цепочки конформных блоков I–II и при  $\xi \rightarrow \infty$  для цепочки конформных блоков II–IV. Чтобы ввести глобальные координаты на всей диаграмме Картера–Пенроуза введем координаты Крускала–Секереша.

### 7.3 Координаты Крускала–Секереша

Координаты Крускала–Секереша  $U, V$  являются глобальными, покрывают всю лоренцеву поверхность  $\mathbb{U}$  и вводятся следующим образом. Для ясности, введем координаты Крускала–Секереша в несколько этапов. Во-первых, запишем двумерную часть метрики Шварцшильда (7.6) в *черепаших координатах*  $t, \rho \mapsto t, r$  (для определенности мы рассмотрим область вне горизонта  $\rho > 2M$ ),

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2M}{\rho}\right) (dt^2 - dr^2), \quad (7.10)$$

где новая координата  $r$  связана со старой  $\rho$  дифференциальным уравнением

$$\frac{d\rho}{dr} = \pm \left(1 - \frac{2M}{\rho}\right). \quad (7.11)$$

В этом уравнении знак “+” соответствует статическому блоку I, а знак “−” – статическому блоку III. Это соответствует преобразованию  $r \mapsto -r$ . В обоих случаях новая координата  $r$ , если ее изобразить на диаграмме Картера–Пенроуза, возрастает слева направо. Уравнение (7.11) легко решается:

$$r = \pm (\rho + 2M \ln|\rho - 2M|), \quad (7.12)$$

где мы положили несущественную постоянную интегрирования, которая соответствует сдвигу  $r$ , равной нулю.

Если радиальная координата  $\rho \in (2M, \infty)$ , то пространственная координата  $r$  меняется от  $-\infty$  до  $\infty$ . Тем самым внешнее решение Шварцшильда изометрично всей плоскости  $t, r$  с метрикой (7.10).

Теперь на плоскости  $t, r$  введем конусные координаты  $t, r \mapsto \xi, \eta$ , где

$$\xi := t + r, \quad \eta := t - r.$$

Тогда метрика примет вид

$$ds^2 = \Phi d\xi d\eta,$$

где

$$\Phi := 1 - \frac{2M}{\rho}$$

– конформный множитель, в котором  $\rho$  рассматривается как неявная функция от  $\xi$  и  $\eta$ .

### Область I

Введем координаты Крускала–Секереша, совершив конформное преобразование  $\xi, \eta \mapsto U, V$ , где

$$U := 2e^{\frac{\xi}{4M}} > 0, \quad V := -2e^{-\frac{\eta}{4M}} < 0. \quad (7.13)$$

Отсюда следуют связи между дифференциалами:

$$d\xi = 4M \frac{dU}{U}, \quad d\eta = -4M \frac{dV}{V}.$$

Поэтому метрика (7.10) принимает следующий вид

$$ds^2 = -16M^2 \Phi \frac{dU dV}{UV}. \quad (7.14)$$

Поскольку

$$r = \frac{1}{2}(\xi - \eta) = 2M \ln \left( -\frac{UV}{4} \right), \quad (7.15)$$

то

$$-\frac{UV}{4} = e^{\frac{r}{2M}}.$$

Учитывая связь радиальных координат (7.12), где для области I выбирается знак “+”, метрику (7.14) запишем в виде

$$ds^2 = \frac{4M^2}{\rho} e^{-\frac{\rho}{2M}} dU dV, \quad (7.16)$$

где радиальная координата Шварцшильда  $\rho$  является неявной функцией произведения  $UV$ , которая определяется формулами (7.12) и (7.15):

$$-\frac{UV}{4} = |\rho - 2M| e^{\frac{\rho}{2M}}. \quad (7.17)$$

Простые вычисления приводят к следующему выражению для временной координаты Шварцшильда

$$-\frac{U}{V} = e^{\frac{t}{2M}}. \quad (7.18)$$

Это значит, что постоянному времени  $t = \text{const}$  в координатах Крускала–Секереша соответствуют прямые линии на плоскости  $U, V$ , проходящие через начало координат.

Поскольку координаты  $\xi, \eta$  меняются на всей плоскости, то координаты Крускала–Секереша (7.13) меняются в квадранте  $U > 0, V < 0$ . Таким образом внешнее решение Шварцшильда изометрично отображено на квадрант I, изображенный на рис.7.4.

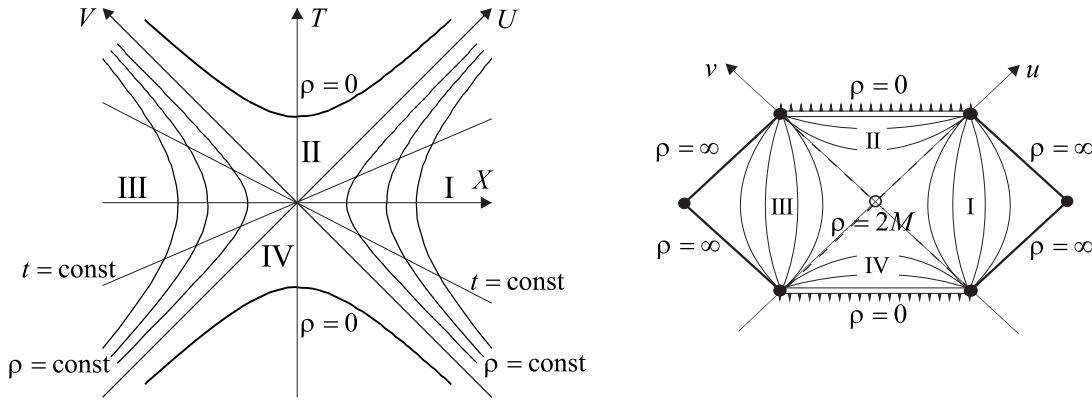


Рис. 7.4: Координаты Крускала–Секереша  $U, V$  для решения Шварцшильда (слева) и диаграмма Картера–Пенроуза (справа).

### Область III

Теперь на плоскости  $\xi, \eta$  введем новые координаты

$$U := -2e^{-\frac{\xi}{4M}} < 0, \quad V := 2e^{\frac{\eta}{4M}} > 0.$$

Такие же вычисления, как и в области I, приводят к той же метрике (7.16). Однако теперь, на плоскости  $U, V$  она определена в квадранте III. Области III в уравнении (7.12) соответствует знак “−” и поэтому связь радиальной координаты Шварцшильда  $\rho$  с координатами Крускала–Секереша задается тем же уравнением (7.17). Таким образом мы изометрично отобразили внешнее решение Шварцшильда на квадрант III.

Простые вычисления приводят к тому же выражению (7.18) для временной координаты Шварцшильда, что и в области I.

## Область II

Преобразование координаты (7.12) определено также при  $0 < \rho < 2M$ , что соответствует внутреннему решению Шварцшильда. Разница заключается в том, что теперь координаты  $r, t$  определены не на всей плоскости, а только на половине. Если в уравнении выбран знак “+”, то координата  $r$  меняется от  $r = 2M \ln 2M$  при  $\rho = 0$  до  $-\infty$  при  $\rho = 2M$ . Если выбран знак “−”, то  $\rho \in (-2M \ln 2M, \infty)$ .

Выберем в уравнении (7.12) знак “+”. Поскольку под горизонтом временная и пространственная координаты меняются местами, то введем конусные координаты следующим образом:

$$\xi := r + t, \quad \eta := r - t. \quad (7.19)$$

что соответствует повороту плоскости  $r, t$  на  $90^\circ$  градусов. Теперь перейдем к координатам Крускала–Секереша

$$U := 2e^{\frac{\xi}{4M}} > 0, \quad V := 2e^{\frac{\eta}{4M}} > 0.$$

Тогда внутренняя область отобразится в квадрант II. Причем сверху образ внутренней области на  $U, V$  плоскости будет определяться уравнением  $UV < 8M$ , т.е. будет ограничен гиперболой  $UV = 8M$ . Таким образом внутренняя область решения Шварцшильда отображена в квадрант II. При этом метрика, как легко проверить, будет иметь тот же вид, что и в первом квадранте (7.16). Связь радиальной координаты Шварцшильда с координатами Крускала–Секереша задается равенством

$$\frac{UV}{4} = |\rho - 2M| e^{\frac{\rho}{2M}}. \quad (7.20)$$

Это уравнение отличается знаком от уравнения (7.17) для статичных областей, поскольку в квадранте II произведение  $UV > 0$ .

Простые вычисления приводят к следующему выражению для временной координаты Шварцшильда

$$\frac{U}{V} = e^{\frac{t}{2M}}, \quad (7.21)$$

что отличается знаком от (7.18).

## Область IV

Выберем в уравнении (7.12) знак “−”. Поскольку нас интересует внутренняя область решения Шварцшильда, то введем координаты светового конуса (7.19) и перейдем к координатам Крускала–Секереша:

$$U := -2e^{-\frac{\xi}{4M}} < 0, \quad V := -2e^{-\frac{\eta}{4M}} < 0.$$

Поскольку координаты  $r, t$  определены на полуплоскости, то внутренняя область решения Шварцшильда отображается в квадрант IV, причем на координаты Крускала–Секереша наложено условие  $UV < 8M$ , т.е. образ внутренней области ограничен снизу гиперболой  $UV = 8M$ . Метрика, как и прежде, будет иметь вид (7.16). Нетрудно также проверить, что координата  $\rho$  связана с координатами Крускала–Секереша тем же соотношением, что и в области II (7.20).

Простые вычисления приводят к тому же выражению (7.21) для временной координаты Шварцшильда, что и в области II.

Заметим, что связь координаты  $\rho$  с координатами Крускала–Секереша во всех четырех областях можно записать в виде одного уравнения

$$-\frac{UV}{4} = (\rho - 2M) e^{\frac{\rho}{2M}}, \quad (7.22)$$

опустив знак модуля.

Таким образом, мы отобразили два экземпляра внешней области решения Шварцшильда  $\rho > 2M$  на квадранты I, III и два экземпляра внутреннего решения – в квадранты II, IV, которые ограничены условием  $UV < 8M$ . Во всех четырех квадрантах метрика имеет вид (7.16). При этом связь координаты  $\rho$  с координатами Крускала–Секереша определяется уравнением (7.22). Метрика в координатах Крускала–Секереша (7.16) определена на части плоскости  $U, V$ , которая ограничена сверху и снизу двумя ветвями гиперболы  $UV = 8M$ , как показано на рис.7.4. Горизонтам соответствуют координатные линии  $U = 0$  и  $V = 0$ .

На плоскости  $U, V$  можно ввести координаты  $T, X$ :

$$U := T + X, \quad V := T - X, \quad (7.23)$$

где  $T$  – глобальное время и  $X$  – глобальная пространственная координата.

Для того, чтобы из метрики Шварцшильда в координатах Крускала–Секереша получить диаграмму Картера–Пенроуза, необходимо отобразить конусные координаты  $U \in \mathbb{R}$  и  $V \in \mathbb{R}$  на конечные интервалы вещественной оси  $(-a, a) \subset \mathbb{R}$ . Это можно сделать, например, с помощью преобразования координат

$$u := \operatorname{arctg} U \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right), \quad v := \operatorname{arctg} V \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right).$$

Тогда на плоскости  $u, v$  мы получим диаграмму Картера–Пенроуза. Для полного счастья функции  $u(U)$  и  $v(V)$  нужно подобрать таким образом, чтобы гиперболы  $UV = 8M$  отображались в горизонтальные прямые на плоскости  $u, v$ . Ясно, что это всегда можно сделать.

## 7.4 Мост Эйнштейна–Розена

В 1935 году Эйнштейн и Розен предложили следующую модификацию решения Шварцшильда (7.1) [?]. Если решение Шварцшильда рассматривать вне горизонта  $\rho > 2M$ , то можно ввести новую “радиальную” координату  $\rho \mapsto u(\rho)$  с помощью уравнения

$$\frac{1}{2}u^2 = \rho - 2M > 0. \quad (7.24)$$

Прямые вычисления приводят к следующей метрике в новых координатах

$$ds^2 = \frac{u^2}{u^2 + 4M} dt^2 - (u^2 + 4M) du^2 - \frac{1}{4}(u^2 + 4M)^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2). \quad (7.25)$$

Преобразование радиальной координаты (7.24) проведено таким образом, что если  $\rho$  увеличивается от  $2M$  до бесконечности, то новая координата либо увеличивается от 0 до  $\infty$ , либо уменьшается от 0 до  $-\infty$ .

Поскольку метрика (7.25) получена преобразованием координат из решения Шварцшильда, то она также удовлетворяет уравнениям Эйнштейна по крайней мере в областях  $u > 0$  и  $u < 0$ . Эта метрика определена для всех значений  $u \in \mathbb{R}$ . При этом

два экземпляра внешнего решения Шварцшильда, которым соответствуют положительные и отрицательные значения  $u$  сшиты на гиперповерхности  $u = 0$ , которая представляет собой топологическое произведение прямой  $t \in \mathbb{R}$  на сферу  $\theta, \varphi \in \mathbb{S}^2$ . Компоненты метрики (7.25) являются гладкими функциями, поэтому можно предположить, что уравнения Эйнштейна удовлетворяются при всех значениях  $u$ . Однако здесь надо проявить осторожность. Дело в том, что при  $u = 0$  метрика Эйнштейна–Розена вырождена, ее обратная не определена, и поэтому сами уравнения Эйнштейна требуют доопределения. Мы отложим этот вопрос до конца раздела.

Метрика (7.25), очевидно, инвариантна относительно инверсии  $u \mapsto -u$ .

В своей оригинальной работе Эйнштейн и Розен дали следующую физическую интерпретацию метрики (7.25). Они предположили, что точечная массивная частица массы  $M$  покоится в “центре” сферической системы координат  $u = 0$ , а пространство-время вокруг нее описывается двумя листами  $u < 0$  и  $u > 0$  с метрикой (7.25). При этом оба листа описывают одну и ту же вселенную.

В настоящее время мосту Эйнштейна–Розена принято давать другую физическую интерпретацию. С этой целью проведем следующее построение. Мы видим, что метрика (7.25) описывает два внешних решения Шварцшильда, которые гладко сшиты вдоль гиперповерхности  $u = 0$ . Поэтому рассмотрим движение пробных частиц в экваториальной плоскости  $\theta = \pi/2$ . Они движутся в трехмерном пространстве-времени с метрикой

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2M}{\rho}\right) dt^2 - \frac{d\rho^2}{1 - \frac{2M}{\rho}} - \rho^2 d\varphi^2, \quad \rho > 2M,$$

которую мы записали в координатах Шварцшильда. Для таких пробных частиц пространством являются сечения  $t = \text{const}$ . То есть в данном случае пространство – это двумерное многообразие (поверхность) с метрикой

$$dl^2 = \frac{d\rho^2}{1 - \frac{2M}{\rho}} + \rho^2 d\varphi^2, \quad \rho > 2M, \quad (7.26)$$

где мы, для наглядности, изменили знак метрики. Будем считать, что  $\rho$  и  $\varphi$  – это обычные полярные координаты на евклидовой плоскости.

Для того, чтобы лучше представить себе поверхность с метрикой (7.26) вложим ее в трехмерное евклидово пространство [?]. Пусть  $\rho, \varphi, z$  – цилиндрические координаты в  $\mathbb{R}^3$  с евклидовой метрикой

$$ds_0^2 := d\rho^2 + \rho^2 d\varphi^2 + dz^2.$$

Допустим, что вращательно симметричное вложение задается некоторой функцией  $z(\rho)$ . Тогда индуцированная метрика на вложенной поверхности будет иметь вид

$$dl^2 = \left[1 + \left(\frac{dz}{d\rho}\right)^2\right] d\rho^2 + \rho^2 d\varphi^2.$$

Для того, чтобы эта метрика совпала с метрикой (7.26) необходимо положить

$$\left(\frac{dz}{d\rho}\right)^2 = \frac{1}{\frac{\rho}{2M} - 1}.$$

Это уравнение может быть выполнено только для внешнего решения Шварцшильда  $\rho > 2M$ . Его общее решение имеет вид

$$z = \int \frac{d\rho}{\sqrt{\frac{\rho}{2M} - 1}} = 4M \sqrt{\frac{\rho}{2M} - 1} + \text{const.} \quad (7.27)$$

Постоянная интегрирования соответствует сдвигу координаты  $z$ , и мы положим ее равной нулю. Отсюда следует, что поверхность с метрикой (7.26) можно вложить в трехмерное евклидово пространство  $\mathbb{R}^3$ , которая задана уравнением

$$\frac{\rho}{2M} = 1 + \left(\frac{z}{4M}\right)^2.$$

Это – параболоид вращения, который называется *параболоидом Фламма* и изображен на рис.7.5а. При этом вложении верхняя ( $z > 0$ ) и нижняя ( $z < 0$ ) части параболоида изометричны экваториальным сечениям ( $\theta = \pi/2$ ,  $t = \text{const}$ ) внешнего решения Шварцшильда. Эти сечения гладко сшиты вдоль горловины  $z = 0$ , которая соответствует горизонту  $\rho_s = 2M$ .

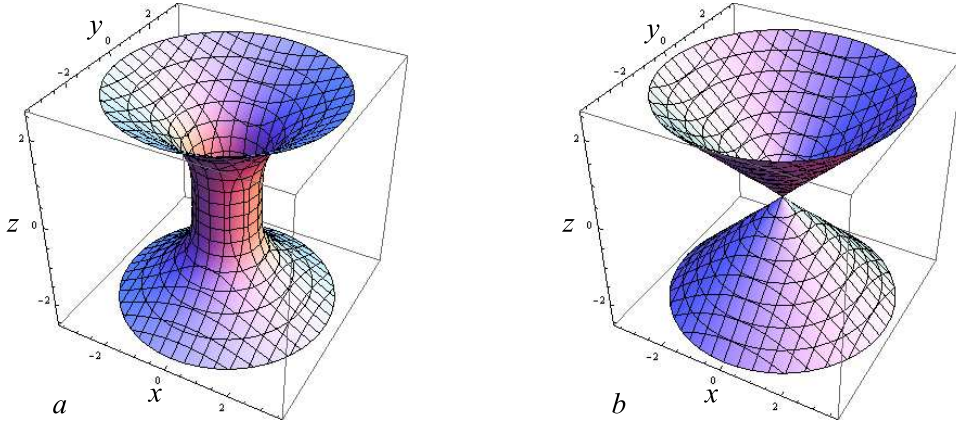


Рис. 7.5: Параболоид Фламма в координатах  $\rho^2 = x^2 + y^2$  (а). Та же поверхность в координатах  $u^2 = x^2 + y^2$  (б).

Параболоид Фламма глобально изометричен экваториальным сечениям  $\theta = \pi/2$ ,  $t = \text{const}$  моста Эйнштейна–Розена. В координатах  $u, \varphi$  (7.24) вложение задается уравнением

$$z^2 = 4Mu^2 \Leftrightarrow z = \pm \sqrt{4Mu}.$$

То есть параболоид превращается в два конуса, и горловина моста стягивается в точку (см. рис.7.5б).

Проведенное построение позволяет дать следующую физическую интерпретацию моста Эйнштейна–Розена. Мы имеем две вселенные, которые соответствуют положительным и отрицательным значениям координаты  $z$ . Обе вселенные являются асимптотически плоскими на больших расстояниях  $\rho \rightarrow \infty$ . В “центре”  $\rho = 2M \Leftrightarrow u = 0$  вселенные склеены. Такую конфигурацию называют *кротовой норой*, поскольку через нее мы имеем возможность попасть из одной вселенной в другую.

Теперь рассмотрим как ведет себя тензор кривизны для моста Эйнштейна–Розена. Матрица Якоби преобразования координат  $(t, u, \theta, \varphi) \mapsto (t, \rho, \theta, \varphi)$  диагональна,

$$\frac{\partial(t, \rho, \theta, \varphi)}{\partial(t, u, \theta, \varphi)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & u & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$



Поэтому при преобразовании координат Шварцшильда к координатам Эйнштейна–Розена меняются только те компоненты тензора кривизны, которые содержат индекс  $1 = “u”$ . Из формул (7.3) следуют явные выражения для компонент тензора кривизны моста Эйнштейна–Розена:

$$\begin{aligned} R_{0u0u} &= -\frac{2Mu^2}{\left(\frac{1}{2}u^2 + 2M\right)^3}, & R_{u2u2} &= -2M, \\ R_{0202} &= \frac{Mu^2}{2\left(\frac{1}{2}u^2 + 2M\right)^2}, & R_{u3u3} &= -2M \sin^2 \theta, \\ R_{0303} &= \frac{Mu^2}{2\left(\frac{1}{2}u^2 + 2M\right)^2} \sin^2 \theta, & R_{2323} &= 2M \left(\frac{1}{2}u^2 + 2M\right) \sin^2 \theta. \end{aligned} \quad (7.28)$$

Квадрат тензора кривизны (=тензора Вейля) для моста Эйнштейна–Розена имеет вид

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta}R^{\alpha\beta\gamma\delta} = \frac{48M^2}{\left(\frac{1}{2}u^2 + 2M\right)^6}.$$

Отметим, что и компоненты тензора кривизны, и квадрат тензора кривизны являются гладкими функциями при  $u = 0$ , где сшиваются два внешних решения Шварцшильда.

Мы видим, что, несмотря на то, что метрика (7.25) вырождена при  $u = 0$  и компонента обратной метрики  $g^{00}$  в этой точке имеет полюс, компоненты ковариантного тензора кривизны определены (полюс сокращается). Сокращение полюса происходит также в тензоре Риччи и скалярной кривизне. Поэтому можно считать, что вакуумные уравнения Эйнштейна

$$R_{\alpha\beta} = 0$$

выполнены во всем пространстве-времени  $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{S}^2$ , где  $t, u \in \mathbb{R}^2$ .

В заключение раздела отметим, что аналогичным образом можно сшить два внутренних решения Шварцшильда. При  $0 < \rho < 2M$  совершим преобразование координаты

$$\frac{1}{2}u^2 := 2M - \rho > 0. \quad (7.29)$$

В новых координатах метрика примет вид

$$ds^2 = \frac{u^2}{u^2 - 4M} dt^2 - (u^2 - 4M) du^2 - \frac{1}{4}(u^2 - 4M)(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2). \quad (7.30)$$

При этом два внутренних решения Шварцшильда отображаются на положительные и отрицательные значения координаты  $u$ :

$$0 < \rho < 2M \quad \Leftrightarrow \quad 0 < |u| < 2\sqrt{M}.$$

Для метрики (7.30) координата  $t$  является пространственноподобной, а  $u$  – времениподобной.

## 7.5 Изотропные координаты

Приведем пространственную часть метрики Шварцшильда

$$ds^2 = -\frac{d\rho^2}{1 - \frac{2M}{\rho}} - \rho^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2)$$

к конформно плоскому виду. С этой целью совершим преобразование радиальной координаты  $\rho \mapsto \rho(r)$ . Тогда пространственная часть метрики примет вид

$$ds^2 = -\frac{\rho'^2 dr^2}{1 - \frac{2M}{\rho}} - \rho^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2),$$

где штрих обозначает дифференцирование по  $r$ . Для того, чтобы эта метрика была конформно плоской необходимо и достаточно, чтобы функция  $\rho(r)$  удовлетворяла уравнению

$$\frac{\rho^2}{r^2} = \frac{\rho'^2}{1 - \frac{2M}{\rho}}.$$

Рассмотрим область вне горизонта  $2M < \rho < \infty$  и предположим, что  $\rho' > 0$ , т.е. радиальные координаты возрастают одновременно. Тогда функция  $\rho(r)$  удовлетворяет уравнению

$$\frac{\rho}{r} = \frac{\rho'}{\sqrt{1 - \frac{2M}{\rho}}}.$$

Общее решение этого уравнения имеет вид

$$Cr = \sqrt{\rho^2 - 2M\rho} + \rho - M \quad \Leftrightarrow \quad \rho = \frac{(Cr + M)^2}{2Cr},$$

где  $C > 0$  – постоянная интегрирования.

Пространственная часть метрики Шварцшильда в новых координатах является конформно евклидовой:

$$ds^2 = -\Phi[dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2)],$$

где

$$\Phi(r) := \frac{(Cr + M)^4}{4C^2r^4}$$

– конформный множитель. Потребуем, чтобы полученная метрика была асимптотически евклидовой, т.е.

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \Phi(r) \rightarrow 1.$$

Отсюда находится постоянная интегрирования:  $C = 2$ , что мы и предположим. Тогда преобразование радиальной координаты примет вид

$$\rho := r \left(1 + \frac{M}{2r}\right)^2. \quad (7.31)$$

Теперь нетрудно вычислить компоненту  $g_{00}$  метрики Шварцшильда:

$$1 - \frac{2M}{\rho} = \left(\frac{1 - \frac{M}{2r}}{1 + \frac{M}{2r}}\right)^2.$$

Таким образом, метрика Шварцшильда в новой системе координат принимает вид

$$ds^2 = \left(\frac{1 - \frac{M}{2r}}{1 + \frac{M}{2r}}\right)^2 dt^2 - \left(1 + \frac{M}{2r}\right)^4 [dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2)]. \quad (7.32)$$

Если перейти к декартовой системе координат на пространственных сечениях  $t = \text{const}$ , то при  $M > 0$  эта метрика определена всюду в  $\mathbb{R}^4$  за исключением мировой линии начала сферической системы координат,

$$-\infty < t < \infty, \quad 0 < r < \infty, \quad 0 < \theta < \pi, \quad 0 < \varphi < 2\pi.$$

Очевидно, что полученная метрика является гладкой в остальной части  $\mathbb{R}^4$ .

Поскольку данная метрика получена из решения Шварцшильда преобразованием координат (7.31), то она удовлетворяет вакуумным уравнениям Эйнштейна всюду в  $\mathbb{R}^4$  за исключением мировой линии начала сферической системы координат.

Каждое сечение постоянного времени  $t = \text{const}$  является конформно плоским и, следовательно, изотропным. Поэтому координаты  $t, r, \theta, \varphi$  называют *изотропными*. Изотропные координаты для метрики Шварцшильда давно и хорошо известны (см., например, [?], §100, задача 4).

Определитель метрики (7.32) равен

$$\det g_{\alpha\beta} = - \left(1 - \frac{M}{2r}\right)^2 \left(1 + \frac{M}{2r}\right)^{10} r^4 \sin^2 \theta. \quad (7.33)$$

Следовательно, эта метрика вырождена на сфере радиуса

$$r_* := \frac{M}{2}, \quad (7.34)$$

который соответствует горизонту  $\rho_s = 2M$  в решении Шварцшильда, и на оси  $z$  ( $\theta = 0, \pi$ ). Вырождение на оси  $z$  связано со сферической системой координат при  $z \neq 0$ .

Мы уже показали, что все геометрические инварианты для метрики Шварцшильда, построенные из тензора кривизны, не имеют особенностей на горизонте, и, следовательно, на сфере радиуса  $r_*$  в изотропных координатах.

Преобразование координат (7.31) показано на рис.7.6. Когда радиус  $r$  убывает от бесконечности до критического значения  $r_* := M/2$ , то радиальная координата Шварцшильда  $\rho$  убывает от  $\infty$  до горизонта  $\rho_s := 2M$ . Затем, по мере убывания  $r$  от  $r_*$  до нуля, радиус  $\rho$  возрастает от  $\rho_s$  до  $\infty$ . Таким образом два экземпляра метрики Шварцшильда вне горизонта  $2M < \rho < \infty$  отображаются на две различные области в  $\mathbb{R}^4$ :  $0 < r < r_*$  и  $r_* < r < \infty$ . На сфере  $r = r_*$  они гладко сшиваются. При этом пространственная часть метрики невырождена. Заметим, что площадь поверхности сферы при приближении к началу координат стремится к бесконечности. Это связано с тем, что компоненты пространственной части метрики (7.32) расходятся при  $r \rightarrow 0$ .

Легко вычислить пространственную асимптотику нулевой компоненты метрики (7.32)

$$g_{00} \approx 1 - \frac{2M}{r}, \quad r \rightarrow \infty.$$

Она такая же, как и у метрики Шварцшильда в координатах Шварцшильда. Это неудивительно, т.к.  $\rho \rightarrow r$  при  $r \rightarrow \infty$ . Это означает, что с законом тяготения Ньютона для метрики (7.32) все в порядке, поскольку он определяется асимптотикой при  $r \rightarrow \infty$ .

Метрика Шварцшильда в изотропных координатах (7.32) инвариантна относительно следующего преобразования радиальной координаты

$$r \mapsto r' := \frac{M^2}{4r} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{2r'}{M} = \frac{M}{2r}. \quad (7.35)$$

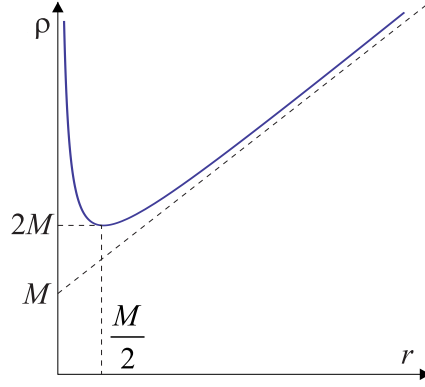


Рис. 7.6: Преобразование от координат Шварцшильда к изотропным координатам.

Это утверждение легко проверяется. При таком преобразовании координат точки пространства-времени отражаются относительно критической сферы. Сама критическая сфера  $r_* = M/2$  остается неподвижной. Начало координат  $r = 0$  отображается в бесконечно удаленную точку  $r' = \infty$ , и, наоборот, бесконечно удаленная точка  $r = \infty$  отображается в начало координат  $r' = 0$ .

Заметим, что шварцшильдowska радиальная координата (7.31) при преобразовании (7.35) не меняется:

$$\rho = r \left( 1 + \frac{M}{2r} \right)^2 = r' \left( 1 + \frac{M}{2r'} \right)^2.$$

То есть одной и той же точке внешнего решения Шварцшильда соответствует две точки пространства-времени с метрикой (7.32): одна – внутри критической сферы, а другая – снаружи. Преобразование координат (7.35) меняет эти точки местами.

Метрика Шварцшильда в изотропных координатах глобально изометрична метрике моста Эйнштейна–Розена. Изометрия задается преобразованием

$$u = \sqrt{2r} \left( 1 - \frac{M}{2r} \right), \quad r > 0. \quad (7.36)$$

При этом два внешних решения Шварцшильда, соответствующих положительным и отрицательным значениям  $u$ , отображаются во внешность и внутренность сферы критического радиуса  $r_* := M/2$ :

$$\begin{aligned} u &> 0, & r_* < r < \infty, \\ u &= 0, & r = r_*, \\ u &< 0, & 0 < r < r_*. \end{aligned}$$

Качественное поведение функции  $u(r)$  показано на рис.7.7.

Инвариантности метрики Эйнштейна–Розена относительно инверсии  $u \mapsto u' := -u$  соответствует инвариантность метрики Шварцшильда в изотропных координатах относительно преобразования радиальной координаты (7.35), поскольку справедлива формула

$$u = \sqrt{2r} \left( 1 - \frac{M}{2r} \right) = -\sqrt{2r'} \left( 1 - \frac{M}{2r'} \right),$$

в чем можно убедиться прямой проверкой.

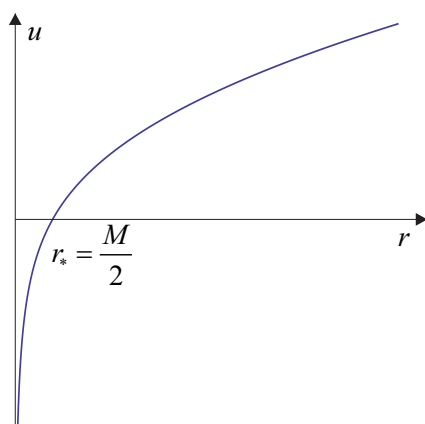


Рис. 7.7: Качественное поведение функции  $u(r)$ .

# Глава 8

## Космология

В настоящей главе мы рассмотрим простейшие космологические модели в рамках общей теории относительности. Это направление исследований составляет классический раздел теории гравитации и в настоящее время стало очень актуальным в связи с накоплением большого количества наблюдательных данных.

Основные космологические модели основаны на космологическом принципе, согласно которому вселенная однородна и изотропна. При этом обычно предполагают, что вся вселенная заполнена сплошной средой (жидкостью или газом).

Заметим, что если евклидово пространство  $\mathbb{R}^3$  заполнено веществом с однородной плотностью, то ньютонов гравитационный потенциал равен нулю. Это значит, что при отсутствии других взаимодействий однородная модель вселенной в механике Ньютона является статической. В общей теории относительности, как мы увидим ниже, ситуация другая: однородные и изотропные модели вселенной не статичны, что хорошо согласуется с наблюдательными данными.

### 8.1 Вселенная Фридмана

Во вселенной очень много объектов, типичными представителями которых являются звезды, вокруг которых вращаются планеты. Звезды объединены в галактики, которые, в свою очередь, образуют скопления галактик. Кроме этого во вселенной присутствует электромагнитное излучение, метеориты, кометы и множество других объектов, о которых мы в настоящее время, вполне возможно, и не догадываемся. К настоящему времени человечество накопило довольно много данных, полученных в результате наблюдений за звездным небом.

Согласно современным наблюдательным данным трехмерное пространство, которое нас окружает, в каждый момент времени  $t := x^0$  в крупном масштабе является однородным и изотропным. Правильнее сказать, что современные данные не противоречат предположению об однородности и изотропии вселенной, которые являются естественными с физической точки зрения по крайней мере в главном приближении. Физически однородность пространства означает, что свойства вселенной не зависят от того, какая точка выбрана в качестве начала системы координат, а изотропия — что свойства вселенной не зависят от направления, выбранного в каждой точке пространства. Однородность и изотропию вселенной часто называют *космологическим принципом*. Слова “в крупном масштабе” следует понимать по аналогии с однородностью газа: нельзя говорить об однородности в малых областях вселенной; она однородна только после усреднения по достаточно большим областям пространства,

включающим много скоплений галактик.

Об изотропии вселенной говорит изотропия реликтового микроволнового излучения, которое было открыто А. Пензиасом и Р. Вилсоном в 1965 году [?]. За это открытие они получили Нобелевскую премию. Впоследствии реликтовое излучение было измерено в широком диапазоне частот. С высокой степенью точности оно является изотропным и неполяризованным, а его спектр соответствует излучению абсолютно черного тела с температурой около  $2,7^\circ K$ .

Для построения модели вселенной в рамках общей теории относительности слов “однородная и изотропная вселенная” недостаточно. Определение и математический смысл этим словам был дан в разделе 3.3. Там было доказано, что однородное и изотропное многообразие является пространством постоянной кривизны. Верно также обратное утверждение: если (псевдо)риманово многообразие является пространством постоянной кривизны в смысле определения (3.23) при  $R = \text{const}$ , то оно является однородным и изотропным. Для построения космологической модели мы требуем, чтобы все сечения пространства-времени, соответствующие постоянному времени, и которые мы предполагаем пространственноподобными, были однородными и изотропными, т.е. пространствами постоянной кривизны, которые имеют максимально возможное число (шесть) векторов Киллинга. При этом в каждой точке пространства три векторных поля Киллинга генерируют группу вращений  $\mathbb{O}(3)$  (изотропия вселенной) и три векторных поля Киллинга – симметрию относительно “трансляций” (однородность вселенной).

### 8.1.1 Метрика однородной и изотропной вселенной

При рассмотрении моделей вселенных Фридмана мы предполагаем, что пространство-время с топологической точки зрения представляет собой топологическое произведение  $M = \mathbb{R} \times S$ , где  $t \in \mathbb{R}$  – временная ось и  $x = (x^\mu) \in S$ ,  $\mu = 1, 2, 3$ , – трехмерное пространство постоянной кривизны с отрицательно определенной метрикой. Это требование означает, в частности, что все пространственные сечения  $M$ , соответствующие постоянному времени  $t = \text{const}$ , являются пространствами постоянной кривизны  $S$ . Мы также предполагаем, что пространство-время является геодезически полным, т.е. любую геодезическую (экстремаль) можно продолжить до бесконечного значения канонического параметра. Это требование необходимо для того, чтобы, например, рассматривать в качестве пространства постоянной кривизны всю сферу целиком, а не какую-либо ее часть.

В дальнейшем мы увидим, что космологические решения уравнений Эйнштейна часто имеют сингулярности, и решение определено не на всей оси времени, а на полуоси или на конечном интервале. Для таких решений пространство-время не является геодезически полным. В настоящем разделе мы рассматриваем только кинематические свойства метрики, т.е. без учета уравнений движения, и, для простоты, будем считать, что метрика определена на всей вещественной оси  $t \in \mathbb{R}$ .

Прежде чем дать определение однородной и изотропной вселенной, напомним некоторые свойства пространств постоянной кривизны. В рассматриваемом случае под пространством постоянной кривизны мы понимаем пару  $(S, \overset{\circ}{g})$ , где  $S$  – трехмерное многообразие и  $\overset{\circ}{g}$  – заданная на нем метрика, которая удовлетворяет равенству

$$\overset{\circ}{R}_{\mu\nu\rho\sigma} = \overset{\circ}{K} \left( \overset{\circ}{g}_{\mu\rho}\overset{\circ}{g}_{\nu\sigma} - \overset{\circ}{g}_{\mu\sigma}\overset{\circ}{g}_{\nu\rho} \right), \quad (8.1)$$

где  $\overset{\circ}{R}_{\mu\nu\rho\sigma}$  – тензор кривизны для метрики  $\overset{\circ}{g}_{\mu\nu}$  и  $\overset{\circ}{K} \in \mathbb{R}$  – некоторая постоянная (нор-

мированная скалярная кривизна). Напомним, что на пространственных сечениях мы выбираем отрицательно определенную метрику, и поэтому для пространств положительной кривизны  $\overset{\circ}{K} < 0$ . Соответствующий тензор Риччи и скалярная кривизна имеют вид

$$\overset{\circ}{R}_{\mu\nu} = 2\overset{\circ}{K}\overset{\circ}{g}_{\mu\nu}, \quad \overset{\circ}{R} = 6\overset{\circ}{K}. \quad (8.2)$$

Координаты на  $\mathbb{S}$  можно масштабировать таким образом, что гауссова кривизна  $\overset{\circ}{K}$  будет принимать только три значения:  $\overset{\circ}{K} = 1, 0, -1$ . Следовательно, возможны три случая:  $\overset{\circ}{K} = -1$ ,  $\mathbb{S} \approx \mathbb{S}^3$  – трехмерная сфера (пространство положительной кривизны, замкнутая вселенная);  $\overset{\circ}{K} = 0$ ,  $\mathbb{S} \approx \mathbb{R}^3$  – трехмерное евклидово пространство (пространство нулевой кривизны, открытая вселенная) и  $\overset{\circ}{K} = 1$ ,  $\mathbb{S} \approx \mathbb{H}^3$  – трехмерное гиперболическое пространство или псевдосфера (пространство отрицательной кривизны, открытая вселенная). При этом под пространством  $\mathbb{H}^3$  мы понимаем верхнюю полудвуполостного гиперboloида, вложенного в пространство Минковского:  $\mathbb{H}^3 \hookrightarrow \mathbb{R}^{1,3}$ . Все три пространства постоянной кривизны  $\mathbb{S} = \{\mathbb{S}^3, \mathbb{R}^3, \mathbb{H}^3\}$  являются связными и односвязными.

Если кривизна пространственных сечений равна нулю или отрицательна, то вселенная также может быть замкнута, если евклидово  $\mathbb{R}^3$  или гиперболическое  $\mathbb{H}^3$  пространства факторизовать по группе преобразований, действующей свободно и собственнo разрывно. Например, для евклидова пространства  $\mathbb{R}^3$  после факторизации мы получим трехмерный цилиндр или тор. Дальнейшее рассмотрение мы, для определенности, ограничим только универсальными накрывающими  $\mathbb{S} = \{\mathbb{S}^3, \mathbb{R}^3, \mathbb{H}^3\}$ .

Любое пространство постоянной кривизны является однородным и изотропным (см. раздел 3.3). Это значит, что на пространственных сечениях определена шести-параметрическая группа преобразований

$$\mathbb{G} = \begin{cases} \text{SO}(4), & \mathbb{S} = \mathbb{S}^3 & \text{– сфера,} \\ \text{ISO}(3), & \mathbb{S} = \mathbb{R}^3 & \text{– евклидово пространство,} \\ \text{SO}(3, 1), & \mathbb{S} = \mathbb{H}^3 & \text{– гиперboloид.} \end{cases} \quad (8.3)$$

Следовательно, на каждом трехмерном пространстве постоянной кривизны  $\mathbb{S}$  определены шесть линейно независимых векторных полей Киллинга  $K_i = K_i^\mu(x)\partial_\mu$ ,  $i = 1, \dots, 6$ . В каждой точке  $x \in \mathbb{S}$  три векторных поля Киллинга соответствуют трансляциям (однородность), а три – вращениям (изотропия).

Поскольку пространство-время четырехмерно, а группа преобразований определена только на пространственных сечениях  $\mathbb{S} \hookrightarrow \mathbb{M}$ , то ее действие надо доопределить на всем  $\mathbb{M}$ . Будем считать, что группа преобразований не действует на время (см. раздел 3.5):

$$\begin{aligned} t &\mapsto t' = t, \\ x^\mu &\mapsto x'^\mu = x^\mu + \epsilon^i K_i^\mu + o(\epsilon), \quad \epsilon^i \ll 1. \end{aligned} \quad (8.4)$$

Тогда соответствующие векторные поля Киллинга на  $\mathbb{M}$  имеют равную нулю временную компоненту,  $(K_i^\alpha) = (0, K_i^\mu)$ , где пространственные компоненты  $K_i^\mu(t, x)$  в общем случае зависят от времени. Ясно, что алгебра Ли группы преобразований осталась прежней, т.к. время  $t$  входит в компоненты векторных полей Киллинга  $K_i$  как параметр.



Теперь у нас есть пространство-время  $(\mathbb{M}, g)$ , на котором определена группа преобразований, порожденная инфинитезимальными преобразованиями (8.4), и мы в состоянии дать

**Определение.** Вселенная  $(\mathbb{M}, g)$  называется *однородной и изотропной*, если

- 1) многообразие  $\mathbb{M}$  представляет собой топологическое произведение  $\mathbb{M} = \mathbb{R} \times \mathbb{S}$ , где  $t \in \mathbb{R}$  – время и  $\mathbb{S}$  – трехмерное пространство постоянной кривизны с отрицательно определенной метрикой;
- 2) метрика  $g$  на  $\mathbb{M}$  инвариантна относительно преобразований (8.4), порожденных преобразованиями симметрии для  $\mathbb{S}$ .  $\square$

Из теорем 3.5.1 и 3.5.2 вытекает, что с точностью до преобразования координат наиболее общий вид метрики однородной и изотропной вселенной следующий

$$ds^2 = dt^2 + a^2 \overset{\circ}{g}_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu, \quad (8.5)$$

где  $\overset{\circ}{g}_{\mu\nu}(x)$  – отрицательно определенная метрика на  $\mathbb{S}$ , не зависящая от времени. Выражение “наиболее общий” означает, что любая метрика однородной и изотропной вселенной приводится к виду (8.5) с помощью преобразования координат. Функция времени  $a(t) > 0$  предполагается достаточно гладкой и называется *масштабным множителем*. При этом векторные поля Киллинга не зависят от времени. Как видим, требование однородности и изотропии вселенной приводит к тому, что вся зависимость метрики от времени содержится в масштабном множителе, который определяется уравнениями Эйнштейна.

Впервые метрику вида (8.5) для космологических моделей вселенных рассмотрел А. Фридман [?, ?], и она называется *метрикой Фридмана*.

**Замечание.** Напомним, что из изотропии вселенной следует ее однородность (теорема 3.3.1), поэтому можно было бы просто говорить об изотропной вселенной. Тем не менее мы будем употреблять термин “однородная и изотропная вселенная”, поскольку эпитет “однородная” отражает важные физические свойства вселенной, и это также принято в современной литературе.  $\square$

Из вида метрики (8.5) следует, что однородная и изотропная вселенная является сплетенным произведением вещественной прямой  $\mathbb{R}$  и пространства постоянной кривизны  $\mathbb{S}$ , которое было определено в разделе 6.1.

Метрика (8.5) имеет блочно диагональный вид, и, в соответствии с результатами раздела 5.12.2, часы во всей вселенной можно синхронизировать. Поэтому система координат  $(t, x^\mu)$  является синхронной, и координата  $t$  называется *космологическим временем*. Ситуация здесь аналогична тому, что имеет место в механике Ньютона: наблюдаемое время  $t$  едино для всех точек вселенной. Сравнение наблюдательных космологических данных с теорией проводится, как правило, с использованием метрики в виде (8.5). К сожалению, эта процедура не является инвариантной, т.к. вид метрики зависит от выбора системы отсчета.

Метрика Фридмана (8.5) допускает по крайней мере шестипараметрическую группу симметрии (8.3), которая действует на пространственных сечениях  $t = \text{const}$ . Масштабный множитель находится из уравнений Эйнштейна, и в некоторых случаях группа симметрии пространства-времени может быть шире.

Вычислим геометрические характеристики метрики (8.5), не фиксируя координат на пространствах постоянной кривизны. Простые вычисления показывают, что

только четыре символа Кристоффеля отличны от нуля:

$$\begin{aligned}\Gamma_{0\mu}{}^\nu &= \Gamma_{\mu 0}{}^\nu = \frac{\dot{a}}{a}\delta_\mu^\nu, \\ \Gamma_{\mu\nu}{}^0 &= -a\dot{a}\overset{\circ}{g}_{\mu\nu}, \\ \Gamma_{\mu\nu}{}^\rho &= \overset{\circ}{\Gamma}_{\mu\nu}{}^\rho,\end{aligned}\tag{8.6}$$

где  $\overset{\circ}{\Gamma}_{\mu\nu}{}^\rho$  – символы Кристоффеля для метрики  $\overset{\circ}{g}_{\mu\nu}$  и точка обозначает дифференцирование по  $t$ . Тензор кривизны имеет только две отличные от нуля независимые компоненты:

$$\begin{aligned}R_{0\mu 0\nu} &= a\ddot{a}\overset{\circ}{g}_{\mu\nu}, \\ R_{\mu\nu\rho\sigma} &= a^2\overset{\circ}{R}_{\mu\nu\rho\sigma} + a^2\dot{a}^2(\overset{\circ}{g}_{\mu\rho}\overset{\circ}{g}_{\nu\sigma} - \overset{\circ}{g}_{\mu\sigma}\overset{\circ}{g}_{\nu\rho}),\end{aligned}\tag{8.7}$$

где  $\overset{\circ}{R}_{\mu\nu\rho\sigma}$  – тензор кривизны (8.1) трехмерных пространственных сечений для метрики  $\overset{\circ}{g}_{\mu\nu}$ . Теперь вычислим тензор Риччи и скалярную кривизну:

$$\begin{aligned}R_{00} &= 3\frac{\ddot{a}}{a}, & R_{0\mu} &= R_{\mu 0} = 0, \\ R_{\mu\nu} &= \left(a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2\overset{\circ}{K}\right)\overset{\circ}{g}_{\mu\nu}, \\ R &= \frac{6}{a^2}(a\ddot{a} + \dot{a}^2 + \overset{\circ}{K}),\end{aligned}\tag{8.8}$$

где мы воспользовались выражением для тензора Риччи пространства постоянной кривизны (8.2).

Заметим, что скалярная кривизна (8.8), которая является геометрическим инвариантом, не зависит от пространственных координат. Это находится в согласии с требованием инвариантности скалярных полей относительно действия транзитивных групп преобразований.

Конкретный вид метрики пространства постоянной кривизны  $\overset{\circ}{g}_{\mu\nu}$  зависит от системы координат, выбранной на  $\mathbb{S}$ . Часто используются безразмерные сферические координаты  $\chi, \theta, \varphi$ , в которых метрика (положительно определенная) имеет вид

$$\overset{\circ}{g}_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu = \begin{cases} d\chi^2 + \sin^2\chi(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2), & \mathbb{S}^3, \\ d\chi^2 + \chi^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2), & \mathbb{R}^3, \\ d\chi^2 + \text{sh}^2\chi(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2), & \mathbb{H}^3. \end{cases}\tag{8.9}$$

В стереографических координатах на сечениях  $t = \text{const}$  метрика Фридмана примет вид

$$g_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{a^2\eta_{\mu\nu}}{(1+bx^2)^2} \end{pmatrix},\tag{8.10}$$

где  $\eta_{\mu\nu} := \text{diag}(- - -)$  – отрицательно определенная евклидова метрика, и постоянная  $b$  связана с нормированной скалярной кривизной простым соотношением  $\overset{\circ}{K} = 4b$  (напомним, что, поскольку метрика  $\eta_{\mu\nu}$  на пространственных сечениях отрицательно определена, то  $x^2 := x^\mu x^\nu \eta_{\mu\nu} \leq 0$ ). Метрике (8.10) соответствует интервал

$$ds^2 = dt^2 + a^2 \frac{\eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu}{(1+bx^2)^2}.$$

Для пространств положительной ( $b < 0$ ) и нулевой ( $b = 0$ ) кривизны стереографические координаты определены во всем евклидовом пространстве  $x \in \mathbb{R}^3$ . Для пространств отрицательной кривизны ( $b > 0$ ) координаты определены внутри шара  $|x^2| < 1/b$ .

Стереографические координаты удобны для проведения вычислений. Поэтому вычислим геометрические характеристики для метрики Фридмана в виде (8.10). Отличные от нуля символы Кристоффеля равны

$$\begin{aligned}\Gamma_{0\mu}{}^\nu &= \Gamma_{\mu 0}{}^\nu = \frac{\dot{a}}{a}\delta_\mu^\nu, \\ \Gamma_{\mu\nu}{}^0 &= -\frac{\dot{a}a}{(1+bx^2)^2}\eta_{\mu\nu}, \\ \Gamma_{\mu\nu}{}^\rho &= \overset{\circ}{\Gamma}_{\mu\nu}{}^\rho.\end{aligned}\tag{8.11}$$

Прямые вычисления показывают, что только две независимые компоненты тензора кривизны отличны от нуля:

$$\begin{aligned}R_{0\mu 0\nu} &= \frac{\ddot{a}a}{(1+bx^2)^2}\eta_{\mu\nu}, \\ R_{\mu\nu\rho\sigma} &= a^2\overset{\circ}{R}_{\mu\nu\rho\sigma} + \frac{\dot{a}^2 a^2}{(1+bx^2)^2}(\eta_{\mu\rho}\eta_{\nu\sigma} - \eta_{\mu\sigma}\eta_{\nu\rho}),\end{aligned}\tag{8.12}$$

где  $\overset{\circ}{R}_{\mu\nu\rho\sigma}$  – тензор кривизны (8.1), построенный по метрике  $\overset{\circ}{g}_{\mu\nu}$ .

Выпишем отличные от нуля компоненты тензора Риччи и скалярную кривизну в стереографических координатах:

$$\begin{aligned}R_{00} &= 3\frac{\ddot{a}}{a}, & R_{0\mu} &= R_{\mu 0} = 0, \\ R_{\mu\nu} &= \frac{\ddot{a}a + 2\dot{a}^2 - 8b}{(1+bx^2)^2}\eta_{\mu\nu}, \\ R &= \frac{6\ddot{a}a + 6\dot{a}^2 - 24b}{a^2}.\end{aligned}\tag{8.13}$$

В дальнейшем метрика Фридмана, как правило, будет использоваться в общем виде (8.5) без использования конкретной системы координат на пространственных сечениях. Этого оказывается достаточно для анализа уравнений Эйнштейна.

Для исследования свойств метрики Фридмана часто используется другая система координат в пространстве-времени, в которой метрика Фридмана конформно эквивалентна некоторой статической метрике. А именно, совершив преобразование временной координаты  $t \mapsto \eta$ , где монотонная функция  $t = t(\eta)$  определяется дифференциальным уравнением

$$dt = a(t)d\eta.\tag{8.14}$$

Это уравнение при достаточно общих предположениях имеет единственное решение с точностью до сдвига новой временной координаты:  $\eta \mapsto \eta + \text{const}$ . После преобразования временной координаты интервал принимает вид

$$ds^2 = a^2 \left( d\eta^2 + \overset{\circ}{g}_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \right),\tag{8.15}$$

где  $a = a(t(\eta))$  – функция нового времени  $\eta$ . Метрика, стоящая в скобках, статична, и вся зависимость от времени вынесена в общий конформный множитель. В таком виде удобно исследовать причинную структуру пространства-времени, т.к. световые конусы для метрики  $g_{\alpha\beta}$  те же, что и для статической метрики, стоящей в скобках.

### 8.1.2 Космологическое красное смещение

Если масштабный множитель меняется со временем,  $\dot{a} \neq 0$ , то расстояние между двумя наблюдателями, имеющими фиксированные пространственные координаты, скажем,  $\mathbf{x}_1$  и  $\mathbf{x}_2$ , также меняется со временем. Это приводит к смещению частот световых сигналов. Если вселенная расширяется,  $\dot{a} > 0$ , то, как мы увидим, возникает красное смещение спектральных линий.

Свет распространяется вдоль нулевых экстремалей  $(t(\tau), x^\mu(\tau))$ ,  $\tau \in \mathbb{R}$ , при этом 4-вектор скорости  $(t', x^{\mu'})$ , где штрих обозначает дифференцирование по каноническому параметру  $\tau$  (точка зарезервирована для дальнейших обозначений), представляет собой 4-импульс фотона. Нулевая компонента импульса является энергией фотона и, следовательно, пропорциональна частоте фотона  $\omega$ :

$$t' = \hbar\omega,$$

где  $\hbar$  – постоянная Планка. При этом длина волны фотона  $\lambda$  связана с частотой равенством

$$\lambda\omega = 2\pi c,$$

где  $c$  – скорость света.

Допустим, что мы находимся в точке  $x_0$  и наблюдаем световой сигнал, испущенный кем-то в точке  $x_1$ . Тогда величина красного смещения  $z$  определяется относительным смещением длин волн

$$z := \frac{\lambda_0 - \lambda_1}{\lambda_1},$$

что можно выразить через нулевую компоненту скорости:

$$z = \frac{\omega_1 - \omega_0}{\omega_0} = \frac{t'_1 - t'_0}{t'_0}. \quad (8.16)$$

Фотоны распространяются в пространстве-времени вдоль нулевых экстремалей  $t(\tau), x^\mu(\tau)$ . Уравнения для экстремалей определяются символами Кристоффеля (8.6) и имеют вид

$$\begin{aligned} t'' &= a\dot{a}g_{\mu\nu}x^{\mu'}x^{\nu'}, \\ x^{\mu''} &= -2\frac{\dot{a}}{a}x^{\mu'}t' - \overset{\circ}{\Gamma}_{\nu\rho}{}^{\mu}x^{\nu'}x^{\rho'}, \end{aligned} \quad (8.17)$$

где точка обозначает дифференцирование по  $t$ . Поскольку фотоны распространяются вдоль нулевых экстремалей, то для них выполнено равенство

$$t'^2 + a^2\overset{\circ}{g}_{\mu\nu}x^{\mu'}x^{\nu'} = 0.$$

Подстановка этого выражения в правую часть первого уравнения (8.17) приводит к равенству

$$t'' + \frac{\dot{a}}{a}t'^2 = 0.$$

Разделим полученное соотношение на  $t'$  и проинтегрируем вдоль экстремали. В результате получим условие на нулевую компоненту 4-скорости фотона:

$$at' = \text{const.}$$

Отсюда следует, что красное смещение можно выразить через масштабный множитель:

$$z = \frac{a_0 - a_1}{a_1}. \quad (8.18)$$

Это – универсальная и точная формула для красного смещения. Она определяется масштабным множителем  $a_1$  в момент испускания света и  $a_0$  в момент наблюдения, и не зависит от истории сигнала в промежуточные моменты времени. Из полученной формулы вытекает, что относительное смещение длин волн положительно, если вселенная расширяется, и отрицательно – если сжимается.

Другое важное следствие из вида метрики Фридмана – это связь красного смещения с расстоянием до объекта. Для света, испущенного и полученного в близких пространственно-временных точках, справедливо равенство

$$ds^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad dt^2 = dl^2, \quad c = 1,$$

где  $dl$  – пространственное расстояние между событиями:

$$dl^2 := -a^2 g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu.$$

Поэтому из формулы (8.18) следуют равенства:

$$z := \frac{d\lambda}{\lambda} = \frac{da}{a} = \frac{\dot{a} dt}{a} = \frac{\dot{a}}{a} dl.$$

Введем *параметр Хаббла*

$$H := \left. \frac{\dot{a}}{a} \right|_{t=t_0}. \quad (8.19)$$

Тогда красное смещение спектральных линий в настоящее время  $t_0$  определяется *законом Хаббла*

$$\frac{d\lambda}{\lambda} = H dl. \quad (8.20)$$

Содержание этого закона состоит в том, что относительное красное смещение спектральных линий прямо пропорционально расстоянию до объекта. Этот закон получен для бесконечно близких событий. На практике он приближенно справедлив для конечных расстояний,  $dl \mapsto \Delta l$ . Ранее точность измерений была невысока, и считалось, что параметр Хаббла является постоянным. Поэтому до сих пор его часто называют *постоянной Хаббла*. Современные наблюдательные данные показывают, что параметр Хаббла зависит от времени и “постоянная Хаббла” не является постоянной.

Если параметр Хаббла является постоянным, как долго считалось в середине 20-го века, то из уравнения (8.19) следует экспоненциальное поведение масштабного множителя

$$a = C e^{Ht}, \quad C > 0.$$

Если  $H > 0$ , то происходит экспоненциальный рост. Для решения некоторых космологических проблем, которые мы обсуждать не будем, предполагают, что масштабный множитель, по крайней мере на ранних этапах эволюции вселенной, экспоненциально растет. Такой экспоненциальный рост масштабного множителя называется

*инфляцией*. Предположение об инфляционной стадии развития вселенной в настоящее время широко распространено. Космологических моделей, приводящих к инфляции, не так много. Позже мы увидим, что это происходит, например, в решении де Ситтера (??).

Наша интуиция основана на механике Ньютона. Поэтому посмотрим на наблюдаемое красное смещение спектральных линий с другой точки зрения. Пусть галактики движутся в плоском пространстве-времени Минковского  $\mathbb{R}^{1,3}$ . Если галактика удаляется, то наблюдаемая длина волны светового сигнала будет увеличиваться, а частота – уменьшаться (красное смещение). Это явление известно как эффект Доплера. В нерелятивистском пределе  $V/c \ll 1$  частота в первом порядке меняется по правилу

$$\omega_1 = \omega_0 \left( 1 + \frac{V}{c} \right),$$

где  $V$  – скорость галактики, и  $c$  – скорость света. Подстановка этого выражения в формулу для красного смещения (8.16) приводит к равенству

$$z = \frac{V}{c}. \quad (8.21)$$

Дальнейшее сравнение с законом Хаббла позволяет найти скорость галактики

$$V = cH\Delta l,$$

где  $\Delta l$  – расстояние между галактиками. Мы видим, что наблюдаемая скорость разбегания галактик прямо пропорциональна расстоянию.

В заключение вычислим наблюдаемую скорость разбегания галактик из других соображений. Согласно предложению 8.1.1, которое будет доказано в следующем разделе, в однородной и изотропной вселенной частицы среды (галактики) движутся вдоль экстремалей, совпадающих с координатными линиями времени. То есть пространственные координаты галактик  $x^\mu$  остаются неизменными. Поэтому наблюдаемое расстояние до галактики примерно равно

$$\Delta l = a(t) \sqrt{-\overset{\circ}{g}_{\mu\nu} \Delta x^\mu \Delta x^\nu},$$

где  $\Delta x^\mu := x_1^\mu - x_0^\mu$  – разность пространственных координат галактик. Это расстояние меняется только благодаря наличию масштабного множителя. Вычислим наблюдаемую скорость

$$V := \frac{d}{dt} \Delta l = c \dot{a} \sqrt{-\overset{\circ}{g}_{\mu\nu} \Delta x^\mu \Delta x^\nu} = c \frac{\dot{a}}{a} \Delta l = cH \Delta l, \quad (8.22)$$

где мы восстановили скорость света,  $x^0 := ct$ , и  $\dot{a} := da/dx^0$ . Как видим, полученная формула совпадает с той, что была получена из закона Хаббла.

### 8.1.3 Уравнения движения

Масштабный множитель, входящий в метрику Фридмана, находится из уравнений Эйнштейна и зависит от выбора модели для полей материи. В дальнейшем мы рассмотрим несколько моделей вселенной, для которых масштабный множитель имеет явное аналитическое выражение.

Прежде всего получим уравнения Эйнштейна. Из компонент тензора Риччи и скалярной кривизны (8.8) составляем тензор Эйнштейна. Он имеет следующие компоненты:

$$\begin{aligned} G_0^0 &= -3\frac{\epsilon + \dot{a}^2}{a^2}, \\ G_0^\mu &= 0, \quad G_\mu^0 = 0, \\ G_\mu^\nu &= -\frac{2a\ddot{a} + \dot{a}^2 + \epsilon}{a^2}\delta_\mu^\nu, \end{aligned} \quad (8.23)$$

где постоянная  $\epsilon$ , которая введена для удобства, равна нормированной скалярной кривизне с обратным знаком, что соответствует положительно, а не отрицательно определенной метрике на пространственных сечениях:

$$\epsilon := -\overset{\circ}{K} = -4b. \quad (8.24)$$

Постоянная  $b$  была определена стереографическими координатами (8.10). Пространственные сечения  $t = \text{const}$  при этом являются сферой  $\mathbb{S}^3$  ( $\epsilon > 0$ ), евклидовым пространством  $\mathbb{R}^3$  ( $\epsilon = 0$ ) или гиперboloидом  $\mathbb{H}^3$  ( $\epsilon < 0$ ).

Мы записываем компоненты тензора Эйнштейна (8.23) с одним ковариантным и одним контравариантным индексом. Это удобно, т.к. в этом случае тензор энергии-импульса полей материи, как мы увидим, является диагональным.

Следующий шаг состоит в выборе тензора энергии-импульса материи. При построении моделей вселенной мы используем космологический принцип, который состоит из двух независимых требований:

- Метрика пространства-времени должна быть однородна и изотропна.
- Тензор энергии-импульса материи должен быть однороден и изотропен.

Первому требованию мы уже удовлетворили, выбрав метрику Фридмана (8.5).

Наиболее общий вид однородных и изотропных функций, векторов и тензоров второго ранга был установлен в разделе 3.4. В общей теории относительности тензор энергии-импульса  $T_{\alpha\beta}$  является четырехмерным симметричным тензором второго ранга. Группа изометрий действует только на пространственных сечениях, и по отношению к ее действию тензор энергии-импульса разлагается на три неприводимые компоненты:

$$\begin{aligned} T_{00} & \quad - \quad \text{скаляр}, \\ T_{\mu 0} = T_{0\mu} & \quad - \quad \text{вектор}, \\ T_{\mu\nu} & \quad - \quad \text{симметричный тензор второго ранга}. \end{aligned} \quad (8.25)$$

Из результатов, полученных в разделе 3.4, следует, что наиболее общий вид инвариантных компонент следующий

$$T_{00} = \mathcal{E}(t), \quad T_{0\mu} = T_{\mu 0} = 0, \quad T_{\mu\nu} = -\mathcal{P}(t)\overset{\circ}{g}_{\mu\nu},$$

где  $\mathcal{E}$  и  $\mathcal{P}$  – некоторые функции (скалярные поля). Сравнение этих компонент с тензором энергии-импульса сплошной среды

$$T^{\alpha\beta} = (\mathcal{E} + \mathcal{P})u^\alpha u^\beta - \mathcal{P}g^{\alpha\beta}, \quad (8.26)$$

показывает, что  $\mathcal{E}$  и  $\mathcal{P}$  есть ни что иное как плотность энергии и давление материи, соответственно, и тензор энергии-импульса записан в сопутствующей системе координат  $u = (1, 0, 0, 0)$ .

**Предложение 8.1.1.** *Если  $u$  метрика, и тензор энергии-импульса среды однородны и изотропны, то линии тока непрерывной среды являются геодезическими (экстремальными).*

*Доказательство.* Зафиксируем систему координат так, чтобы метрика была метрикой Фридмана (8.5) и тензор энергии-импульса имел вид (8.25). Символы Кристоффеля были вычислены ранее (8.6), и уравнения для экстремалей имеют вид (8.17). Ясно, что координатные линии  $x^0 = \tau$ ,  $x^\mu = \text{const}$  являются экстремальными, где  $\tau \in \mathbb{R}$  – канонический параметр. С другой стороны, эти координатные линии представляют собой линии тока для векторного поля скорости  $u = (1, 0, 0, 0)$ .  $\square$

Таким образом, в рассматриваемой космологической модели выбрана синхронная система координат, в которой метрика имеет вид (8.5), и каждая точка сплошной среды движется вдоль экстремали, которая совпадает с координатной линией  $x^0 := t$ . Точки среды покоятся в том смысле, что пространственные координаты имеют постоянные значения  $x^\mu = \text{const}$ . При этом наблюдаемое расстояние между частицами среды может увеличиваться или уменьшаться в зависимости от поведения масштабного множителя.

Здесь возникает вопрос. Если присутствует давление, то в общем случае частицы среды не будут двигаться по экстремальям, т.к. присутствуют не только гравитационные силы. Тем не менее рассматриваемая модель является самосогласованной. Действительно, поскольку давление зависит только от времени, то градиент давления параллелен вектору скорости. Следовательно, согласно уравнениям релятивистской гидродинамики (5.79), (5.80), движение частиц происходит вдоль экстремалей. Причиной этого является требование однородности и изотропии тензора энергии-импульса полей материи.

Приведенные выше аргументы однозначно фиксируют однородный и изотропный тензор энергии-импульса материи. С одним контра- и одним ковариантным индексом он всегда диагонален:

$$T_\alpha{}^\beta = \begin{pmatrix} \mathcal{E} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\mathcal{P} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\mathcal{P} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\mathcal{P} \end{pmatrix}. \quad (8.27)$$

Уравнения релятивистской гидродинамики  $\nabla_\beta T_\alpha{}^\beta = 0$ , выполнение которых необходимо для разрешимости уравнений Эйнштейна, для метрики Фридмана (8.10) принимают вид

$$\dot{\mathcal{E}} + \frac{3\dot{a}}{a}(\mathcal{E} + \mathcal{P}) = 0. \quad (8.28)$$

Если подставить выражение для тензора энергии-импульса (8.27) в уравнения Эйнштейна с космологической постоянной  $\Lambda$ ,

$$\Phi_\alpha{}^\beta := G_\alpha{}^\beta + \delta_\alpha^\beta \Lambda + \frac{1}{2} T_\alpha{}^\beta = 0,$$

где мы для простоты положили гравитационную постоянную равной единице,  $\kappa = 1$ , и учесть явный вид тензора Эйнштейна (8.23), то получим два уравнения:

$$-3\frac{\dot{a}^2 + \epsilon}{a^2} + \Lambda + \frac{1}{2}\mathcal{E} = 0, \quad (8.29)$$

$$-\frac{2a\ddot{a} + \dot{a}^2 + \epsilon}{a^2} + \Lambda - \frac{1}{2}\mathcal{P} = 0. \quad (8.30)$$



Продифференцируем уравнение (8.29) по времени  $t$  и учтем уравнение совместности (8.28). В результате получим, что уравнение (8.30) тождественно удовлетворяется. Можно проверить, что это свойство является следствием линейной зависимости уравнений Эйнштейна (вторая теорема Нетер)

$$\nabla_\beta \Phi_\alpha{}^\beta = 0,$$

вытекающей из ковариантности (см. раздел 5.5).

Таким образом, у нас есть два независимых обыкновенных дифференциальных уравнения (8.29) и (8.28) на три неизвестные функции  $a(t)$ ,  $\mathcal{E}(t)$  и  $\mathcal{P}(t)$ . Чтобы замкнуть систему уравнений будем считать, что давление среды связано с плотностью энергии уравнением состояния. Для баротропной жидкости уравнение состояния имеет вид

$$\mathcal{P} = \mathcal{P}(\mathcal{E}), \quad (8.31)$$

где  $\mathcal{P}(\mathcal{E})$  – некоторая достаточно гладкая функция. Это равенство корректно, т.к. плотность энергии и давление – скалярные поля (функции).

Следовательно, для вселенной Фридмана мы имеем два независимых обыкновенных дифференциальных уравнения на две независимые функции: масштабный множитель  $a$  и плотность энергии  $\mathcal{E}$ , которые мы запишем в следующем виде

$$\dot{a}^2 = \frac{a^2}{3} \left( \frac{1}{2} \mathcal{E} + \Lambda \right) - \epsilon, \quad (8.32)$$

$$\frac{d\mathcal{E}}{\mathcal{E} + \mathcal{P}(\mathcal{E})} = -3 \frac{da}{a}. \quad (8.33)$$

Это и есть полная система уравнений для космологических моделей Фридмана.

Таким образом, при заданном уравнении состояния (8.31), решая уравнение (8.33), мы находим зависимость плотности энергии от масштабного множителя:  $\mathcal{E} = \mathcal{E}(a)$ . Подставляя эту функцию в уравнение (8.32), мы получаем одно обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка на масштабный множитель. Это уравнение является основным в стандартных моделях однородной и изотропной вселенной.

Для интегрирования уравнения (8.32) удобно ввести временную координату  $\eta = \eta(t)$ , определенную равенством (8.14). Тогда уравнение (8.32) можно формально проинтегрировать

$$\eta = \pm \int \frac{da}{a \sqrt{\frac{1}{6} \mathcal{E} a^2 + \frac{1}{3} \Lambda a^2 - \epsilon}}. \quad (8.34)$$

Постоянная интегрирования соответствует сдвигу временной координаты  $\eta \mapsto \eta + \text{const}$  и является несущественной. Знак  $\pm$  соответствует выбору направления течения времени: если функция  $a(t)$  является решением уравнений Фридмана, то  $a(-t)$  – также решение. Зависимость плотности энергии от масштабного множителя,  $\mathcal{E} = \mathcal{E}(a)$ , находится из уравнения (8.33). Это решает поставленную задачу в общем виде. На практике, уравнения (8.33) и (8.34) решаются в явном виде далеко не всегда.

Не смотря на то, что одно из уравнений Эйнштейна (8.30) было отброшено как следствие остальных, из него можно сделать важные выводы. Перепишем уравнение (8.30) в виде

$$\ddot{a} = -\frac{a}{12}(\mathcal{E} + 3\mathcal{P}) + \frac{a\Lambda}{3}, \quad (8.35)$$

где мы использовали уравнение (8.29) для исключения  $\dot{a}^2 + \epsilon$ . Пусть  $\Lambda = 0$  и  $\mathcal{E} > 0$  и  $\mathcal{P} \geq 0$ , что соответствует обычной материи. По предположению, масштабный

множитель положителен,  $a > 0$ , и, следовательно,  $\ddot{a} < 0$ . Это означает, что функция  $a(t)$  вогнутая. Допустим, что в настоящее время  $t_0$  вселенная расширяется,  $\dot{a}(t_0) > 0$ , что соответствует современным наблюдательным данным. Качественное поведение масштабного множителя в этом случае показано на рис. 8.1. Мы видим, что при

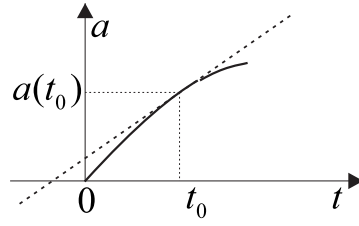


Рис. 8.1: Качественное поведение масштабного множителя  $a(t)$  в предположении, что вселенная в настоящее время расширяется,  $\dot{a}(t_0) > 0$ .

конечном значении времени  $t$  масштабный множитель должен обратиться в нуль, что соответствует большому взрыву. Этот вывод является довольно общим, т.к. не зависит от уравнения состояния материи и не использует какое-либо из решений уравнений Эйнштейна. В космологии принято отсчитывать наблюдаемое время  $t$  от большого взрыва при  $t = 0$ .

Из уравнений Эйнштейна (8.29), (8.30) следует, что наличие космологической постоянной можно трактовать как поля материи с диагональным тензором энергии-импульса

$$T_{\Lambda\alpha}{}^{\beta} := 2\Lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Эта материя необычна, т.к. при  $\Lambda > 0$  плотность энергии положительна, а давление отрицательно. Материя, обладающая таким свойством, называется *темной энергией*.

Понятие темной энергии играет важную роль в космологии. В 1998 году Сол Перлмуттер [?], Брайан П. Шмидт и Адам Рисс [?] открыли, что в настоящее время вселенная не просто расширяется, а расширяется с ускорением. За это открытие они получили Нобелевскую премию в 2011 году. Если принять модель вселенной Фридмана за основу, то из уравнения (8.35) вытекает, что обычная материя,  $\mathcal{E} > 0$  и  $\mathcal{P} > 0$ , приводит к замедлению, а положительная космологическая постоянная – к ускорению. Таким образом, к ускорению приводит либо положительная космологическая постоянная, либо какая-то другая материя с отрицательным давлением (плотность энергии всегда считается положительной), которая была названа темной энергией. В настоящее время к темной энергии относят положительную космологическую постоянную и (или) другие модели материи, обсуждение которых выходит за рамки тех ограничений, которые поставил перед собой автор этих строк. Наличие темной энергии приводит к антигравитации: отталкиванию вместо притяжения. Это отталкивание и приводит к ускоренному расширению вселенной.

Существующие в настоящее время наблюдательные данные не противоречат представлению о темной энергии, как о положительной космологической постоянной. Поэтому данная точка зрения считается стандартной в современной космологии.

**Замечание.** Помимо темной энергии в космологии используется понятие *темной материи*. Это – гипотетическая материя, которая не взаимодействует с электромагнитным полем и, следовательно, не видна, т.к. не излучает и не отражает фотонов.

Понятие темной материи стало обсуждаться с 1922 года, когда Джеймс Джинс [?] и Якобус Каптейн [?] пришли к выводу, что большая часть вещества в нашей галактике (Млечный Путь) невидима, т.к. гравитационного поля всех видимых звезд явно недостаточно для удержания звезд, находящихся на периферии. Впоследствии нехватка видимого вещества была подтверждена для многих других галактик. Кандидатов на роль темной материи много, и мы их обсуждать не будем.

В настоящее время наблюдательные данные указывают на то, что темная энергия составляет более 70% всего вещества вселенной, а темная материя – более 20%. Если учесть еще межгалактический газ, то на нашу долю (звезды, планеты и др.) остается меньше половины процента всего вещества вселенной.  $\square$