1. Гипотеза Паули, 1930 г.

Уравнение для нейтрино?

$n \to p + e^- + \tilde{\nu}$

$p \to n + e^+ + \nu$

$\tilde{\nu} \equiv \nu$?

2. Волновое уравнение

1. Нерелятивистская кв. механика

$$E = \frac{p^2}{2m}$$

$$E \to i\hbar \frac{\partial}{\partial t}, \quad \vec{p} \to \frac{\hbar}{i} \vec{\nabla}, \quad [x, \hat{p}] = i\hbar$$

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(x,t) = -\hbar^2 \frac{\vec{\nabla}^2}{2m} \psi(x,t)$$

Уравнение Шредингера

$\psi(x,t)$ – волновая функция

2. Релятивистская кв. механика

$$E = \sqrt{p^2 + m^2}$$

$$E^2 \to -\frac{\partial^2}{\partial t^2} \psi = \left(-\vec{\nabla}^2 + \frac{m^2}{\hbar^2}\right)\psi$$

$$\hbar = 1 \quad (\partial_\mu \partial^\mu + m^2)\psi = 0$$

уравнение Клейна-Гордона

3. Уравнение Дирака

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi = 0 \quad , \quad \gamma^\mu \partial_\mu = \gamma^0 \frac{\partial}{\partial t} + \vec{\gamma}\vec{\nabla}$$

В киральном представлении

$$\gamma_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \, , \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & -\sigma^i \\ \sigma^i & 0 \end{pmatrix}$$

$$\gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = 2g^{\mu\nu} \rightarrow E^2 = p^2 + m^2$$

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi$$

$$\bar{\psi} = \psi^+ \gamma^0$$

$U(1)$-симметрия (фазовая инвариантность)

$$\psi \to e^{i\alpha}\psi$$

4 степени свободы, 4-компонентная в.ф.

Лептонный заряд, $\tilde{\nu} \neq \nu$ (Дирак, 1930)

4. Нейтрино - дираковская частица?

Ферми, 1934. $\mathcal{L}^{weak}_{вз} \sim \bar{\psi}_1 \Gamma_\mu \psi_2 \, \bar{\psi}_3 \Gamma^\mu \psi_4$

5. Гипотеза Майораны, 1937г.

$$\tilde{\nu} \equiv \nu .$$

Нейтрино - майорановская частица (?)

Разложение Фурье для скалярного поля:

$$\psi = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4}\, 2\pi\,\delta(p^2-m^2)\left[\Theta(p_0)\,a(\vec{p})\,e^{-ipx} + \right.$$

$p_0 = \pm E$
$E = +\sqrt{\vec{p}^2+m^2}$

$$\left. + \Theta(-p_0)\,b^*(-\vec{p})\,e^{-ipx}\right] =$$

$$= \int \frac{d^3p}{2E\,(2\pi)^3}\left[a(\vec{p})\,e^{-ipx} + b^*(\vec{p})\,e^{+ipx}\right]$$

Если $b^*(\vec{p}) = a^*(p)$, то решение действительно, т.е. нет различия частиц и античастиц.

Представление Майораны для γ-матриц:

$$\tilde{\gamma}^0 = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^2 \\ \sigma^2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{\gamma}^2 = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^2 \\ -\sigma^2 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\tilde{\gamma}^1 = \begin{pmatrix} i\sigma^1 & 0 \\ 0 & i\sigma^1 \end{pmatrix}, \quad \tilde{\gamma}^3 = \begin{pmatrix} i\sigma^3 & 0 \\ 0 & i\sigma^3 \end{pmatrix}$$

В этом представлении γ-матрицы чисто мнимые, и решение ур-я Дирака может быть действительным.

$$\tilde{\psi}(x) = \sum_s \int \frac{d^3p}{2E}\left(a_s(\vec{p})\,\tilde{u}_s(\vec{p})\,e^{-ipx} + \right.$$

$$\left. + a_s^*(p)\,\tilde{u}_s^*(\vec{p})\,e^{ipx}\right).$$

В произвольном представлении γ-матриц

$$\gamma^\mu = U \tilde{\gamma}^\mu U^+ \qquad U \text{ - унитарная матрица}$$

$$\psi(x) = U \tilde{\psi}(x)$$

Можно проверить, что $\psi(x)$ записывается в виде

$$(*) \quad \psi(x) = \sum_s \int \frac{d^3p}{2E} \left(a_s(\vec{p}) u_s(p) e^{-ipx} + a_s^*(p) C\gamma_0 u_s^*(p) e^{ipx} \right)$$

$$C\gamma_0 \equiv UU^T$$

По определению,

$$\psi^c = C\gamma_0 \psi^* \quad \text{- Зарядово-сопряжённая волновая функция}$$

C - матрица зарядового сопряжения

Из (*) следует, что

$$\psi^c = \psi \qquad \underline{\text{Условие Майораны}}$$

В представлении Майораны

$$C\gamma_0 = 1, \quad \psi^c = \psi^*, \text{ и}$$

$$\psi = \psi^* \quad \text{условие Майораны в представлении Майораны}$$

В подходе Майораны частицы и античастицы не различаются. 2 степени свободы!

6. Киральная декомпозиция Дираковского спинора

Вейлевское (киральное) представление для γ-матриц даёт:

$$\gamma^5 = i\gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$P_{L,R} = \frac{1}{2}(1 \mp \gamma^5)$$

$$\psi_L = P_L\psi, \quad \psi_R = P_R\psi, \quad \psi = \psi_L + \psi_R$$

$$\psi_L = \begin{pmatrix} 0 \\ \eta \end{pmatrix}, \quad \psi_R = \begin{pmatrix} \xi \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \psi = \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}$$

$$(**) \begin{cases} (i\partial_0 + i\vec{\sigma}\vec{\nabla})\xi - m\eta = 0 \\ (i\partial_0 - i\vec{\sigma}\vec{\nabla})\eta - m\xi = 0 \end{cases} \quad \text{Ур-е Дирака}$$

7. Майорановский 4-спинор

$$\psi_M = \begin{pmatrix} \varepsilon\eta^* \\ \eta \end{pmatrix}, \quad \varepsilon = i\sigma^2$$

В вейлевском представлении $C = -i\gamma^2\gamma^0$

Легко проверить, что

$\psi_M^c = C\gamma_0\psi_M^* = \psi_M$, т.е. условие Майораны удовлетворяется.

С другой стороны, ψ_M удовлетворяет ур-ю Дирака

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi_M = 0,$$

и, сделав в (**) замену $\xi \to \varepsilon\eta^*$, получаем

$$\begin{cases} (i\partial_0 + i\vec{\sigma}\vec{\nabla})\varepsilon\eta^* - m\eta = 0 \\ (i\partial_0 - i\vec{\sigma}\vec{\nabla})\eta - m\varepsilon\eta^* = 0. \end{cases}$$

Эти два уравнения связаны комплексным сопряжением, так что достаточно рассмотреть одно из них

$$(***) \quad (i\partial_0 - i\vec{\sigma}\vec{\nabla})\eta - m\varepsilon\eta^* = 0$$

Уравнение Майораны для двухкомпонентного спинора η.

Если положить $m = 0$, то получаем

$$(i\partial_0 - i\vec{\sigma}\vec{\nabla})\eta = 0 \qquad \text{Уравнение Вейля}$$

Двухкомпонентное ур-е Майораны можно, казалось бы, положить в основу теории, обойдясь без ур-я Дирака и условия Майораны. P-симметрия?

Компактная запись ур-я Вейля

$$\partial_0 \to \sigma_0\partial_0, \quad \bar{\sigma}^\mu = (1, -\vec{\sigma})$$

$$\bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \eta = 0$$

Источники и детекторы нейтрино

1. Реакторные нейтрино

источник $n \to p + e^- + \nu$, $\mathcal{M}^{\ell}_{\mu} \sim \bar{u}_{e^-} \gamma_\mu (1-\gamma_5) \underline{\underline{v_\nu}}$

детектор $\nu + p \to n + e^+$, $\mathcal{M}^{\ell}_{\mu} \sim \underline{\underline{\bar{v}_\nu}} \gamma_\mu (1-\gamma_5) v_{e^+}$

$\nu + n \not\to p + e^-$, $\mathcal{M}^{\ell}_{\mu} \sim \bar{u}_{e^-} \gamma_\mu (1-\gamma_5) u_\nu$

2. Ускорительные и атмосферные нейтрино

источник $p + p \to \pi^+ + e^+ + \nu$, $\mathcal{M}^{\ell}_{\mu} \sim \underline{\underline{\bar{u}_\nu}} \gamma_\mu (1-\gamma_5) v_{e^+}$

детектор $\nu + n \to p + e^-$, $\mathcal{M}^{\ell}_{\mu} \sim \bar{u}_e \gamma_\mu (1-\gamma_5) \underline{\underline{u_\nu}}$

3. Солнечные нейтрино

источник $\left.\begin{array}{l} p + p \to d + e^+ + \nu \\ p \to n + e^+ + \nu \end{array}\right\}$, $\mathcal{M}^{\ell}_{\mu} \sim \underline{\underline{\bar{u}_\nu}} \gamma_\mu (1-\gamma_5) v_{e^+}$

детектор $\nu + n \to p + e^-$, $\mathcal{M}^{\ell}_{\mu} \sim \bar{u}_{e^-} \gamma_\mu (1-\gamma_5) \underline{\underline{u_\nu}}$

8. Массовые члены Лагранжиана

1) Дираковское нейтрино

$$\left(i\gamma^\mu\partial_\mu - m\right)\psi_D = 0 \quad , \psi_D = \psi_L + \psi_R$$

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}\left(i\gamma^\mu\partial_\mu - m\right)\psi \quad , \bar{\psi} = \psi^{*T}\gamma_0$$

$$\mathcal{L}_{mass} = -m\bar{\psi}\psi = -m\psi^+\gamma_0\psi = -m\psi^{*T}\gamma_0\psi =$$

$$= -m\psi_L^{*T}\gamma_0\psi_R + h.c.$$

Есть фазовая инвариантность, $\psi \to e^{i\alpha}\psi$

2) Майорановское нейтрино

$$\psi_M = \psi_L + (\psi_L)^c = \begin{pmatrix} 0 \\ \eta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varepsilon\eta^* \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{L}_{mass} = -m\,\overline{\psi_L^c}\,\psi_L + h.c.$$

$$\psi_L^c = c\gamma_0\psi_L^* \ , \ \overline{\psi_L^c} = -\psi_L^T C^{-1}$$

$$\mathcal{L}_{mass} = m\psi_L^T C^{-1}\psi_L + h.c.$$

<u>Нет фазовой инвариантности.</u>

Из теоремы Нётер следует, что в дираковском случае есть лептонный заряд, а в майорановском случае его нет. Число степеней свободы в майор. случае - 2 поэтому уравнения Майораны (***) достаточно.

<u>P - симметрия?</u>

9. Ковариантные уравнения и Лоренцевы преобразования спиноров.

При преобразовании Лоренца $x \to x'$ спинор преобразуется

$$\psi'(x') = S(\Lambda)\psi(x),$$

Λ - Лоренцева матрица, $x' = \Lambda x$; $S(\Lambda)$ - матрица преобразования спинора (представление группы Лоренца).

Волновое уравнение должно быть ковариантным, т.е. сохранять свою форму при преобр. Лоренца.

Общий вид волнового ур-я

$$\Pi_{kl}(m, i\partial^\mu)\psi_l(x) = 0$$

Например, ур-е Дирака

$$(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi(x) = 0,$$

преобразуется в

$$(i\gamma^\mu\partial'_\mu - m)\psi'(x') = 0,$$

т.е., является ковариантным.

Преобразование η спинора (левого)

$$\eta' = S^{(0,\frac{1}{2})}\eta, \quad S^{(0,\frac{1}{2})} = e^{-i(\vec{\varphi} - i\vec{\nu})\frac{\vec{\sigma}}{2}}$$

Преобразование ξ спинора (правого)

$$\xi' = S^{(\frac{1}{2},0)}\xi, \quad S^{(\frac{1}{2},0)} = e^{-i(\vec{\varphi} + i\vec{\nu})\frac{\vec{\sigma}}{2}}$$

При простр. инверсии $S^{(\frac{1}{2},0)} \longleftrightarrow S^{(0,\frac{1}{2})}$

Четырёхкомпонентный дираковский спинор $\begin{pmatrix}\xi\\ \eta\end{pmatrix}$ преобразуется по представлению $\left(S^{(0,\frac{1}{2})} \oplus S^{(\frac{1}{2},0)}\right)$, т.е. определённым образом преобразуется при инверсии.

Ур-е Дирака инвариантно относительно преобразования инверсии.

Для двухкомпонентных спиноров преобразования инверсии не существует.

Это объясняет, почему Майорана не использовал двухкомпонентные спиноры.

10. Экспериментальное обнаружение нейтрино, 1953-55 (Ф. Райнес, С. Коуэн)

Антинейтрино от реактора + водородсодержащая мишень

1) $\tilde{\nu} + p \to n + e^+$, $e^+ \to e^+ + e^- \to 2\gamma$; $n \to n + p \to D$

2) реакция $\tilde{\nu} + n \to p + e^-$ подавлена.

11. Обнаружение отсутствия P-симметрии слабого взаимодействия (1956-1957, By)

Распад поляризованных ядер Co^{60}, регистрация вылетающих электронов, корреляция направления вылета с направлением спинов Co^{60}.

$$\Gamma^\mu = \gamma^\mu(1-\gamma_5)$$

V-A - вариант слабого взаимодействия.

12. Двухкомпонентная теория нейтрино

(Ландау, Ли и Янг, Салам, 1957)

1) $m_\nu = 0$, $\psi_L = \begin{pmatrix} 0 \\ \eta \end{pmatrix} \to \eta$, $\psi_R = \begin{pmatrix} \xi \\ 0 \end{pmatrix} \to \xi$

η, ξ – двухкомпонентные спиноры.

2) ψ_R не участвует в слабом взаимодействии

η описывается ур-ем Вейля,

$$\bar\sigma^\mu \partial_\mu \eta = 0$$

Переход к двухкомпонентным спинорам оказывается возможным благодаря тому что не требуется P-симметрии спинорного уравнения.

Частицы и античастицы различаются спиральностью, они связаны CP-преобразованием ("комбинированная инверсия"). Лептонного числа нет.

Dirac ν ⋮ Majorana ν > Weyl ν

2 степени свободы у нейтрино, в обоих подходах – дираковском и майорановском.

13. <u>Опыты с нейтрино от ускорителей</u>, 1962 г.

Нейтрино имеет флэйвор

$$\nu \to \begin{matrix} \nu_e \\ \nu_\mu \end{matrix} \qquad pp \to \pi \to \mu + \nu_\mu, \quad \mu \to e + \nu_e$$

Лептонный заряд сохраняется по отдельности для каждого флэйвора (в общем случае массивных нейтрино).

14. <u>Опыты с нейтрино естественного происхождения</u> (с 1965 г)

Атмосферные нейтрино (Ф. Райнес, А. Вольфендейл)
Нейтрино от Солнца (Р. Дэвис)

15. <u>Детектирование нейтрино от Солнца → → массивные нейтрино</u>, 1968-69

Простейший массовый член Лагранжиана (в двухфлэйворном приближении)

$$m_\nu \to \begin{matrix} m_{\nu_e} \\ m_{\nu_\mu} \end{matrix}$$

$$\mathcal{L}^D_{mass} = -m_{\nu_e} \bar{\Psi}_{\nu_e,L} \Psi_{\nu_e,R} - m_{\nu_\mu} \bar{\Psi}_{\nu_\mu,L} \Psi_{\nu_\mu,R} + h.c. =$$

$$= -\left(\bar{\Psi}_{\nu_e,L}, \bar{\Psi}_{\nu_\mu,L} \right) \begin{pmatrix} m_{\nu_e} & 0 \\ 0 & m_{\nu_\mu} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Psi_{\nu_e,R} \\ \Psi_{\nu_\mu,R} \end{pmatrix} + h.c.$$

Опыты с солнечными нейтрино показывают, что возможны переходы между электронными и мюонными нейтрино, т.е.

$$\mathcal{L}^{D}_{mass} = -\left(\bar{\Psi}_{\nu_e,L}, \bar{\Psi}_{\nu_\mu,L}\right)\begin{pmatrix} m_{\nu_e\nu_e} & m_{\nu_e\nu_\mu} \\ m_{\nu_\mu\nu_e} & m_{\nu_\mu\nu_\mu}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\Psi_{\nu_e,R} \\ \Psi_{\nu_\mu,R}\end{pmatrix} + h.c.$$

Парциальные лептонные заряды не сохраняются, полный лептонный заряд сохраняется.

16. Расширение стандартной модели

$L_{eL} = \begin{pmatrix} \nu_{eL} \\ e_L \end{pmatrix}$	$L_{\mu L} = \begin{pmatrix} \nu_{\mu L} \\ \mu_L \end{pmatrix}$
e_R	μ_R
ν_{eR}	$\nu_{\mu R}$

$\mathcal{L}_H$ дополняется членом

$$\sum_{\alpha,\beta=e,\mu} Y^{\nu}_{\alpha\beta} L_{\alpha L} \tilde{\Phi}\, \nu_{\beta R}$$

$$\tilde{\Phi} = \varepsilon \Phi^*, \quad \Phi = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 \\ v + H\end{pmatrix}.$$

Состояния нейтрино с определённой массой — суперпозиция состояний с определённым флэйвором, и наоборот.

17. Осцилляции, (Понтекорво, 1969)

Флэйворные нейтрино, рожденные в источнике (в лаборатории) не имеют определённой энергии и их состояния нестационарны.

Преобразования Лоренца

Преобразование Лоренца — линейное преобразование координатных 4-векторов в пространстве Минковского, сохраняющее их длину.

Пространственно-временная точка ("событие") обозначается

$$x^\mu = (x^0, \vec{x})$$

$$\mu = 0,1,2,3 \;; \quad x^0 = t \; (c=1), \; x^i = \vec{x}$$

Пусть x_1^μ и x_2^μ — два события. Разница между двумя событиями определяет координатный 4-вектор,

$$a^\mu = x_1^\mu - x_2^\mu$$

(Длина)^2 4-вектора есть, по определению,

$$|a|^2 = (x_1^0 - x_2^0)^2 - (\vec{x}_1 - \vec{x}_2)^2$$

Координаты события x^μ тоже можно рассматривать как 4-вектор, считая, что второе событие есть точка $(0, \vec{0})$. Поэтому будем говорить о векторе x, а не о точке x.

С использованием метрического тензора $g_{\mu\nu}$, определение длины вектора x есть

$$|x|^2 = g_{\mu\nu} x^\mu x^\nu = x_0^2 - \vec{x}^2$$

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Преобразование 4-вектора

$$\boxed{x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\ \nu} x^{\nu}}$$

Инвариантность длины:

$$g_{\mu\nu} x'^{\mu} x'^{\nu} = g_{\rho\sigma} x^{\rho} x^{\sigma}.$$

Отсюда имеем важное соотношение:

$$\boxed{g_{\mu\nu} \Lambda^{\mu}_{\ \rho} \Lambda^{\nu}_{\ \sigma} = g_{\rho\sigma}}$$

Матрица Λ принадлежит группе $SO(1,3)$.

Обратное преобразование, от x' к x:

$$x^{\mu} = \left(\Lambda^{-1}\right)^{\mu}_{\ \nu} x'^{\nu}$$

$(\Lambda^{-1})^{\mu}_{\ \nu}$ вычисляется по формуле

$$\left(\Lambda^{-1}\right)^{\mu}_{\ \nu} = g_{\nu\alpha} \Lambda^{\alpha}_{\ \beta} g^{\beta\mu} \equiv \Lambda_{\nu}^{\ \mu},$$

которая следует из соотношения

$$\Lambda_{\nu}^{\ \mu} \Lambda^{\nu}_{\ \rho} = g_{\nu\alpha} \Lambda^{\alpha}_{\ \beta} g^{\beta\mu} \Lambda^{\nu}_{\ \rho} = \delta^{\mu}_{\rho} \qquad (\text{т.е. } \Lambda^{-1}\Lambda = 1)$$

(поскольку $g_{\beta\rho} g^{\beta\mu} = \delta^{\mu}_{\rho}$) $\qquad (g^{\mu\nu} = g_{\mu\nu})$

Ковариантный вектор преобразуется по формуле

$$\left(x_\mu = g_{\mu\nu} x^\nu \;,\; x^\mu = g^{\mu\nu} x_\nu \right)$$

$$\boxed{x'_\mu = \Lambda_\mu{}^\nu x_\nu}$$

С помощью ковариантных векторов удобно записывается длина координатного 4-вектора и скалярное произведение 4-векторов

$$|x|^2 = x^\mu x_\mu \;,\; xy = x^\mu y_\mu = x_\mu y^\mu .$$

$$x^\mu = (x^0, \vec{x})$$
$$x_\mu = (x^0, -\vec{x})$$

Действительно,

$$x'^\mu x'_\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu \Lambda_\mu{}^\sigma x_\sigma = \Lambda^\mu{}_\nu \Lambda_\mu{}^\sigma x^\nu x_\sigma =$$
$$= \delta^\sigma_\nu x^\nu x_\sigma = x^\nu x_\nu .$$

Преобразования производных

Ковариантная производная $\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \left(\frac{\partial}{\partial t}, \vec{\nabla}\right)$

Контравариантная производная $\partial^\mu = \frac{\partial}{\partial x_\mu} = \left(\frac{\partial}{\partial t}, -\vec{\nabla}\right)$

$$\partial^\mu = g^{\mu\nu}\partial_\nu \;,\; \partial_\nu = g_{\nu\mu}\partial^\mu .$$

$$\partial'_\mu = \frac{\partial}{\partial x'^\mu} = \Lambda_\mu{}^\nu \partial_\nu$$

$$\partial'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu \partial^\nu \qquad \partial'_\mu \partial'^\mu = \partial_\nu \partial^\nu \text{ - инвариант.}$$

Группа Лоренца как группа Ли.

1) Группа Ли есть группа, чьи элементы параметризуются набором непрерывных параметров ω_a, $a = 1 \dots n$

Группа Лоренца шестипараметрическая – матрицы Λ зависят от 6 параметров – трёх углов поворота и трёх скоростей (точнее, быстрот).

2) Представление S группы Лоренца на векторном пространстве V есть отображение всех элементов $\Lambda \in SO(1,3)$ на линейные преобразования $S(\Lambda)$ на V, таким образом, что имеется соответствие:

$$\Lambda_1 \Lambda_2 = \Lambda_3 \longrightarrow S(\Lambda_1) S(\Lambda_2) = S(\Lambda_1 \Lambda_2) = S(\Lambda_3)$$

V – "пространство представления" (4-векторы, спиноры)

Матрицы $S(\Lambda)$ действуют в этом пространстве.

3) Сама матрица Λ есть также представление группы движений в пространстве Минковского.

4) Матрица S любого представления может быть записана, для бесконечно малых значений параметров, ($S(\Lambda)$ можно записать в виде разложения в ряд в виде $S(\omega) = S(\omega_1, \omega_2 \dots \omega_n)$):

$$S(\omega) = 1 + \delta\omega_a \frac{\partial S(\omega)}{\partial \omega_a}\bigg|_{\omega=0} + \dots = 1 - i T_S^a \delta\omega_a.$$

T_S^a – генераторы представления

Число генераторов равно числу параметров исходной группы, т.е. группы Лоренца.

5) Генераторы образуют алгебру

$$[T_a, T_b] = i f_{abc} T_c \quad (\text{схематически})$$

Коммутационные соотношения алгебры одинаковы для всех представлений группы, хотя сами генераторы в каждом представлении свои.

<u>Разложение по генераторам матрицы Λ.</u>

Рассматриваем инфинитезимальное преобразование Лоренца

$$\Lambda^\mu{}_\nu(\delta\omega) = \delta^\mu_\nu + \delta\omega^\mu{}_\nu$$

$$g_{\mu\nu}\Lambda^\mu{}_\rho\Lambda^\nu{}_\sigma = g_{\mu\nu}(\delta^\mu_\rho + \delta\omega^\mu{}_\rho)(\delta^\nu_\sigma + \delta\omega^\nu{}_\sigma) =$$

$$= g_{\rho\sigma} + \delta\omega_{\sigma\rho} + \delta\omega_{\rho\sigma} = g_{\rho\sigma}$$

Отсюда следует антисимметричность $\delta\omega$,

$$\delta\omega_{\sigma\rho} = -\delta\omega_{\rho\sigma}.$$

$$\Lambda^\mu{}_\nu(\delta\omega) = \delta^\mu_\nu + \delta\omega_{\alpha\beta}\, g^{\alpha\mu}\delta^\beta_\nu = \delta^\mu_\nu - \frac{i}{2}\delta\omega_{\alpha\beta}(M^{\alpha\beta})^\mu{}_\nu$$

$$(M^{\alpha\beta})^\mu{}_\nu = i\left(g^{\alpha\mu}\delta^\beta_\nu - g^{\beta\mu}\delta^\alpha_\nu\right)$$

В матричных обозначениях:

$$\boxed{\Lambda(\delta\omega) = 1 - \frac{i}{2}\delta\omega_{\alpha\beta}M^{\alpha\beta}}$$

$M^{\alpha\beta}$ – генераторы представления

$M^{01}, M^{02}, M^{03}, M^{12}, M^{13}, M^{23}$ – 6 генераторов

M^{ij} (i,j – 1,2,3) – генераторы вращений в плоскости ij;

M^{0i} – генераторы бустов вдоль оси i.

Соответственно, $\delta\omega_{ij}$ – бесконечно малые углы поворота, $\delta\omega_{0i}$ – бесконечно малые быстроты (см. ниже).

Каждый генератор – <u>матрица</u>, действующая в пространстве Минковского, т.е. в пространстве 4-векторов.

<u>2 примера</u>

1) Вращение вокруг третьей оси на угол φ

$$\Lambda_D(\varphi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Lambda_D(\delta\varphi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\delta\varphi & 0 \\ 0 & \delta\varphi & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 1 - i\delta\varphi \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2) Буст вдоль третьей оси со скоростью $\vec{v}$.

$$t' = \gamma(t + v x^3)$$
$$x'^3 = \gamma(x^3 + vt)$$

$$\Lambda_B(\xi) = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & \gamma v \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \gamma v & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \operatorname{ch}\xi & 0 & 0 & \operatorname{sh}\xi \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \operatorname{sh}\xi & 0 & 0 & \operatorname{ch}\xi \end{pmatrix}$$

ξ – быстрота, $v = \operatorname{th}\xi$

$$\Lambda_B(\delta\xi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \delta\xi \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \delta\xi & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 1 - i\delta\xi \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Алгебра генераторов $M^{\alpha\beta}$ очень сложная:

$$[M^{\mu\nu}, M^{\rho\sigma}] = -i\left(g^{\mu\rho}M^{\nu\sigma} - g^{\mu\sigma}M^{\nu\rho} - g^{\nu\rho}M^{\mu\sigma} + g^{\nu\sigma}M^{\mu\rho}\right)$$

Удобнее перейти к другому набору генераторов,

$$J^k = \frac{1}{2}\varepsilon^{ijk}M^{ij}, \quad K^j = M^{0j},$$

тогда коммутационные соотношения алгебры упрощаются,

$$[J^i, J^j] = i\varepsilon^{ijk}J^k$$
$$[J^i, K^j] = i\varepsilon^{ijk}K^k$$
$$[K^i, K^j] = -i\varepsilon^{ijk}J^k$$

J^i – генераторы бесконечно малых вращений вокруг оси i,
K^i – генераторы бесконечно малых бустов в направлении оси i

В общем случае вращения на угол $\delta\varphi$ вокруг оси $\vec{n}$ генератор, как можно показать, записывается в виде суммы

$$J_n = \sum_i J_i n_i \quad (i - x, y, z)$$

Т.о.

$$\delta\varphi J_n = \delta\varphi \sum_i J_i n_i = \sum_i J_i \delta\varphi_i = \vec{\delta\varphi}\,\vec{J},$$

$$\text{где } \vec{\delta\varphi} \equiv \delta\varphi\,\vec{n}$$

Тогда имеем

$$\Lambda_D(\delta\varphi) = 1 - i\vec{\delta\varphi}\,\vec{J} = 1 - i\delta\varphi_i J^i$$

и аналогично

$$\Lambda_B(\delta\xi) = 1 - i\delta\vec{\xi}\vec{K} = 1 - i\delta\xi_i K^i .$$

Конечные преобразования получаются из бесконечно малых с помощью „экспоненциации".

$$S(\omega) = \lim_{n\to\infty}\left(1 - i\,\frac{\omega_a}{n}T_s^{\,a}\right)^n = \exp\left(-i\omega_a T_s^{\,a}\right).$$

Для матрицы Λ имеем

$$\Lambda_D(\vec{\varphi}) = \exp\left(-i\varphi_i J^i\right), \quad \Lambda_B(\vec{\xi}) = \exp\left(-i\xi_i K^i\right)$$

Для произвольного преобразования Лоренца:

$$\Lambda = \Lambda_B\Lambda_D = \exp\left(-i\xi_i K^i\right)\exp\left(-i\varphi_i J_i\right)$$

Пользуясь формулой

$$e^A e^B = e^{A+B+\frac{1}{2}[A,B]}$$

и коммутационными соотношениями для генераторов J_i, K_i, всегда можно произвольное движение записать в виде одной экспоненты

$$\Lambda = e^{-i(\xi_i K^i + \varphi_i J^i)} = e^{-\frac{i}{2}\omega_{\alpha\beta}M^{\alpha\beta}}$$

$$\omega_{0i} = \xi_i, \quad \omega_{ij} = -\varphi_k, \quad \omega_{\alpha\beta} = -\omega_{\beta\alpha}$$

$$\left(M^{\alpha\beta}\right)^{\mu}_{\ \nu} = i\left(g^{\alpha\mu}\delta^{\beta}_{\nu} - g^{\beta\mu}\delta^{\alpha}_{\nu}\right)$$

Инфинитезимально малые вращения на угол $\delta\varphi$ вокруг оси $\vec{n}$

$$\Lambda^\mu{}_\nu = 1 - \frac{i}{2}\,\delta\omega_{\alpha\beta}\left(M^{\alpha\beta}\right)^\mu{}_\nu$$

$$\delta\vec{\varphi} = \delta\varphi\,\vec{n}\ ,\quad \delta\vec{\varphi} = (\delta\varphi_1, \delta\varphi_2, \delta\varphi_3)\ ,\quad \delta\varphi_k = \delta\varphi\cdot n_k$$

$$\vec{n} = (n_1, n_2, n_3)\ ,\quad n_k = \cos(k\,\hat{}\,n)\ ,\quad \vec{k} = (\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})\ ,$$

$$\delta\omega_{ij} = -\delta\varphi_k\,.$$

$$\Lambda^\mu{}_\nu = 1 - i\,\delta\varphi_k J^k\ ,\quad J^k = \frac{1}{2}\varepsilon^{ijk}M^{ij}$$

$$\downarrow$$

$$\Lambda^\mu{}_\nu = 1 - i\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i\delta\varphi_3 & -i\delta\varphi_2 \\ 0 & i\delta\varphi_3 & 0 & -i\delta\varphi_1 \\ 0 & i\delta\varphi_2 & i\delta\varphi_1 & 0 \end{pmatrix} \equiv 1 - iB^\mu{}_\nu$$

Конечные вращения на угол φ вокруг оси $\vec{n}$

$$\delta\omega_{\alpha\beta} \to \omega_{\alpha\beta}\ ,\quad \delta\varphi_k \to \varphi_k\ ,$$

$$\Lambda^\mu{}_\nu = \left(e^{-iB}\right)^\mu{}_\nu\ ,$$

$$\Lambda^\mu{}_\nu = 1 - iB^\mu{}_\nu + \frac{i^2}{2}B^\mu{}_\alpha B^\alpha{}_\nu - \ldots$$

Представления группы Лоренца

1. Векторное представление

V^ρ – 4-вектор, элемент 4-мерного ($\rho = 0,1,2,3$) векторного пространства

$$V^\rho \xrightarrow[\Lambda]{} \Lambda^\rho{}_\sigma V^\sigma$$

$$\Lambda = \exp\left(-\tfrac{i}{2}\,\omega_{\alpha\beta}M^{\alpha\beta}\right),\quad \left(M^{\alpha\beta}\right)^\mu{}_\nu = i\left(g^{\alpha\mu}\delta^\beta_\nu - g^{\beta\mu}\delta^\alpha_\nu\right)$$

Матрица векторного представления совпадает с лоренцевой матрицей Λ.

2. Спинорное представление (левое)

$$\psi_\alpha \xrightarrow[\Lambda]{} \left(S_L\right)_{\alpha\beta}\psi_\beta$$

ψ_α – левокиральный вейлевский спинор ($\alpha = 1,2$)

$$S_L = \exp\left(-i\omega_{\mu\nu}S_L^{\mu\nu}/2\right)$$

$$S_L^{ij} \equiv \frac{1}{2}\varepsilon^{ijk}\sigma^k,\quad S_L^{0i} \equiv -\frac{i}{2}\sigma^i$$

3. Спинорное представление (правое)

$$\psi_\alpha \xrightarrow[\Lambda]{} \left(S_R\right)_{\alpha\beta}\psi_\beta$$

ψ_α – правокиральный вейлевский спинор ($\alpha = 1,2$)

$$\Lambda_R = \exp\left(-i\omega_{\mu\nu} S_R^{\mu\nu}/2\right),$$

$$S_R^{ij} \equiv \frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}\sigma^k, \quad S_R^{0i} \equiv \frac{i}{2}\sigma^i$$

4. Дираковское представление (биспинорное)

ψ_a - дираковский спинор $(a=1,2,3,4)$

$$\psi_a \underset{\Lambda}{\longrightarrow} (S_D)_{ab}\psi_b$$

$$S_D = \exp\left(-i\omega_{\mu\nu} S_D^{\mu\nu}/2\right)$$

$$S_D^{\mu\nu} = \frac{i}{4}\left[\gamma^\mu, \gamma^\nu\right] \quad - 4\times4\text{-матрицы.}$$

$$S_D^{ij} = \frac{1}{2}\varepsilon^{ijk}\begin{pmatrix}\sigma^k & 0\\ 0 & \sigma^k\end{pmatrix}, \quad S_D^{0i} = -\frac{i}{2}\begin{pmatrix}\sigma^i & 0\\ 0 & -\sigma^i\end{pmatrix}$$

Дираковский спинор преобразуется как

$$\begin{pmatrix}\psi_R\\ \psi_L\end{pmatrix},$$

где $\psi_{L,R}$ - лево (право) киральный вейлевский спинор.

Матрица параметров преобразования $\omega_{\mu\nu}$ везде одинакова, генераторы представлений различны, но их алгебры одинаковы.

Спинорные представления группы Лоренца

Вводим 4-мерные матрицы Паули

$$\sigma_\mu = \bar{\sigma}^\mu = (1, \vec{\sigma}) = \sigma_0, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$$

$$\bar{\sigma}_\mu = \sigma^\mu = (1, -\vec{\sigma})$$

С помощью произвольного 4-вектора x с контравариантными компонентами (x^0, x^1, x^2, x^3) конструируем 2×2 матрицу X,

$$X \equiv \sigma_\mu x^\mu = \begin{pmatrix} x^0 + x^3 & x^1 - ix^2 \\ x^1 + ix^2 & x^0 - x^3 \end{pmatrix},$$

X – эрмитова матрица

Важное свойство X – детерминант равен норме вектора x в пространстве Минковского,

$$\det X = x^{0\,2} - x^{1\,2} - x^{2\,2} - x^{3\,2} = x_\mu x^\mu.$$

Далее используем группу $SL(2,C)$ – группу всех комплексных матриц 2×2 с $\det = 1$.

Вводим преобразование $X \to X'$

$$X' = SXS^+, \quad S \in SL(2,C).$$

Видно, что X' – эрмитово и

$$\det X' = \det(SXS^+) = \det X,$$

т.е. X' опять можно записать в виде

$$X' = \sigma_\mu x'^\mu \quad \text{и} \quad x'^\mu x'_\mu = x^\mu x_\mu$$

Отсюда следует, что X' и X связаны преобразованием Лоренца,

$$x' = \Lambda x$$

и имеется соответствие

$$S \leftrightarrow \Lambda(S)$$

Это соответствие $2 \to 1$, т.к. S и $-S$ соответствуют тому же самому Лоренцеву преобразованию.

Преобразование обратное к $X = \sigma_\mu x^\mu$ есть

$$x^\mu = \frac{1}{2} \operatorname{tr}\left(X \bar{\sigma}^\mu\right),$$

$$x'^\mu = \frac{1}{2} \operatorname{tr}\left(X' \bar{\sigma}^\mu\right), \text{ т.е.}$$

$$x'^\mu = \frac{1}{2} \operatorname{tr}\left(S X S^+ \bar{\sigma}^\mu\right) = \frac{1}{2} \operatorname{tr}\left(S \sigma_\nu x^\nu S^+ \bar{\sigma}^\mu\right) =$$

$$= \frac{1}{2} \operatorname{tr}\left(S \sigma_\nu S^+ \bar{\sigma}^\mu\right) x^\nu = \Lambda(S)^\mu{}_\nu \, x^\nu, \text{ т.е.}$$

$$\boxed{\Lambda(S)^\mu{}_\nu = \frac{1}{2} \operatorname{tr}\left(S \sigma_\nu S^+ \bar{\sigma}^\mu\right)}$$

Имеем отображение.

$$S \in SL(2,C) \to \Lambda(S) \in SO(1,3),$$

$$S_1 S_2 = S \to \Lambda(S_1)^\mu{}_\nu \Lambda(S_2)^\nu{}_\rho = \Lambda(S_1 S_2)^\mu{}_\rho = \Lambda(S)$$

Группа $SL(2,C)$ - группа Ли, и матрицу S можно записать через генераторы. Число генераторов - 6, как в группе Лоренца.

Можно проверить, что

$$\Lambda = e^{-\frac{i}{2}\left(\vec{\varphi}\vec{J} + \vec{\zeta}\vec{K}\right)} \to S = e^{-\frac{i}{2}\vec{\sigma}\left(\vec{\varphi} + i\vec{\zeta}\right)};$$

($\vec{\varphi}, \vec{\zeta}$ — параметры преобразования)

т.е. генераторы S есть

$$\vec{J}\Big|_{SL(2,C)} = \frac{\vec{\sigma}}{2}, \quad \vec{K}\Big|_{SL(2,C)} = i\frac{\vec{\sigma}}{2} \qquad (*)$$

Группа Лоренца и группа $SL(2,C)$ имеют алгебры с одинаковыми перестановочными соотношениями

Алгебра $SO(1,3)$	Алгебра $SL(2,C)$
$[J_i, J_j] = i\varepsilon_{ijk} J_k$	$\left[\frac{1}{2}\sigma_i, \frac{1}{2}\sigma_j\right] = i\varepsilon_{ijk}\frac{\sigma_k}{2}$
$[J_i, K_j] = i\varepsilon_{ijk} K_k$	$\left[\frac{1}{2}\sigma_i, \pm\frac{i}{2}\sigma_j\right] = i\varepsilon_{ijk}\left(\pm i\frac{\sigma_k}{2}\right)$
$[K_i, K_j] = -i\varepsilon_{ijk} J_k$	$\left[\pm i\frac{\sigma_i}{2}, \pm i\frac{\sigma_j}{2}\right] = -i\varepsilon_{ijk}\frac{\sigma_k}{2}$

Вторая и третья строчки в алгебре $SL(2,C)$ сводятся к первой,

$$\left[\frac{1}{2}\sigma_i, \frac{1}{2}\sigma_j\right] = i\varepsilon_{ijk}\frac{\sigma_k}{2}.$$

Таким образом, в группе $SL(2,C)$ есть, кроме $(*)$, ещё один набор генераторов

$$\vec{J}\Big|_{SL(2,C)} = \frac{\vec{\sigma}}{2}, \quad \vec{K}\Big|_{SL(2,C)} = -i\frac{\vec{\sigma}}{2} \qquad (**)$$

Матрицы $SL(2,C)$ действуют в двумерном пространстве (комплексном). <u>Векторы этого пространства называются спинорами.</u>

В соответствии с существованием двух наборов генераторов, существует 2 типа спиноров, ξ и η, правокиральные и левокиральные.

По определению, они преобразуются при преобразованиях Лоренца по 2-м представлениям группы Лоренца, S_R и S_L:

$$\xi' = S_R \xi , \quad \eta' = S_L \eta$$

$$S_R = e^{-\frac{i}{2}\vec{\sigma}(\vec{\varphi}+i\vec{\zeta})} = S , \quad S_L = e^{-\frac{i}{2}\vec{\sigma}(\vec{\varphi}-i\vec{\zeta})}$$

Легко проверить, что имеет место соотношение

$$S_L = \varepsilon S_R^* \varepsilon^{-1} , \quad \varepsilon \equiv i\sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Т.о., левый и правый спиноры преобразуются по комплексно сопряжённым представлениям.

<u>Преобразования полей</u>

Пусть спиноры ξ, η - функции точки в пространстве Минковского,

$$\eta = \eta(x) , \quad \xi = \xi(x)$$

Общее обозначение поля - $\psi(x)$, $\psi = \xi, \eta$.

Эти функции могут быть классическими полями (которые потом квантуются методом канонического квантования) или волновыми одночастичными уравнениями (уравнениями Шредингера), используемыми в кв. теории поля с помощью методики вторичного квантования.

1) Если поле скалярное, то, при преобразовании Лоренца, имеем связь

$$\varphi'(x') = \varphi(x) \quad \text{или}$$

$$\varphi'(x) = \varphi(\Lambda^{-1} x)$$

$\varphi'(x) - \varphi(x)$ — изменение формы функции при преобразовании. Его легко вычислить.

$$\varphi'(x) = \varphi(\Lambda^{-1}x) = \varphi\left(x^\mu + \frac{i}{2}\delta\omega_{\alpha\beta}(M^{\alpha\beta})^\mu{}_\nu x^\nu + \dots\right) =$$

$$= \varphi(x) + \frac{i}{2}\delta\omega_{\alpha\beta}(M^{\alpha\beta})^\mu{}_\nu x^\nu \partial_\mu \varphi(x) + \dots$$

Мы знаем, из предыдущих лекций, что

$$(M^{\alpha\beta})^\mu{}_\nu = i\left(g^{\alpha\mu}\delta^\beta_\nu - g^{\beta\mu}\delta^\alpha_\nu\right).$$

Используя эту формулу, находим

$$\varphi'(x) = \varphi(x) + \frac{i}{2}\delta\omega_{\alpha\beta}\, i\left(x^\beta\partial^\alpha - x^\alpha\partial^\beta\right)\varphi(x) + \dots =$$

$$= \varphi(x) - \frac{i}{2}\delta\omega_{\alpha\beta}L^{\alpha\beta}\varphi(x) + \dots$$

$$L^{\alpha\beta} \equiv i\left(x^\beta\partial^\alpha - x^\alpha\partial^\beta\right)$$

Для конечного преобразования имеем, окончательно,

$$\varphi'(x) = \varphi(\Lambda^{-1}x) = e^{-\frac{i}{2}\omega_{\alpha\beta}L^{\alpha\beta}}\varphi(x)$$

Т.о., форма функции меняется при преобразовании Лоренца, даже если поле скалярное.

2) Если поле векторное (4-векторное), то

$$\psi'^{\mu}(x') = \Lambda^{\mu}{}_{\nu}\,\psi^{\nu}(x),$$

$$\Lambda^{\mu}{}_{\nu} = e^{-\frac{i}{2}\omega_{\alpha\beta}(M^{\alpha\beta})^{\mu}{}_{\nu}}$$

$\mu,\nu = 0,1,2,3$
$\alpha,\beta = 0,1,2,3$

Изменение формы функции есть:

$$\psi'^{\mu}(x) = \Lambda^{\mu}{}_{\nu}\,\psi^{\nu}(\Lambda^{-1}x) =$$
$$= e^{-\frac{i}{2}\omega_{\alpha\beta}(M^{\alpha\beta}+L^{\alpha\beta})^{\mu}{}_{\nu}}\,\psi^{\nu}(x)$$

3) Если поле спинорное, то

$$\psi'_{\mu}(x') = (S_{L,R})_{\mu\nu}\,\psi_{\nu}(x)$$

$$S_{L,R} = e^{-\frac{i}{2}\vec{\sigma}(\vec{\varphi}\mp i\vec{\zeta})}$$

$\mu,\nu = 1,2$

4) Если поле дираковское (биспинорное), то

$$\psi'_{\mu}(x') = (S_D)_{\mu\nu}\,\psi_{\nu}$$

$$S_D = e^{-\frac{i}{2}\omega_{\alpha\beta}(S^{\alpha\beta})_{\mu\nu}}$$

$\mu,\nu = 1,2,3,4$
$\alpha,\beta = 0,1,2,3$

$$S^{\alpha\beta} = \frac{i}{4}[\gamma^{\alpha},\gamma^{\beta}].$$

Ковариантные уравнения (на примере ур-я Дирака)

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi(x) = 0$$

Матрицы γ^μ ($\mu = 0,1,2,3$) удовлетворяют соотношению

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu} \qquad (*)$$

Перейдем к штрихованным координатам, пользуясь соотношением

$$\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \Lambda^\alpha{}_\mu \frac{\partial}{\partial x'^\alpha} = \Lambda^\alpha{}_\mu \partial'_\alpha$$

Тогда получим

$$(i\gamma^\mu \Lambda^\alpha{}_\mu \partial'_\alpha - m)\psi(\Lambda^{-1}x') = 0$$

Вводим γ' соотношением

$$\gamma'^\alpha = \Lambda^\alpha{}_\mu \gamma^\mu$$

и вычисляем антикоммутатор

$$\{\gamma'^\alpha, \gamma'^\beta\} = \Lambda^\alpha{}_\mu \Lambda^\beta{}_\nu \{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} =$$

$$= 2\Lambda^\alpha{}_\mu \Lambda^\beta{}_\nu g^{\mu\nu} = 2\Lambda^\alpha{}_\mu \Lambda^{\beta\mu} = 2g^{\alpha\beta}$$

Здесь использовано соотношение

$$\Lambda^\alpha{}_\mu \Lambda^{\beta\mu} = \Lambda^\alpha{}_\mu \Lambda^\mu{}_\gamma g^{\beta\gamma} = \delta_{\alpha\gamma} g^{\beta\gamma} = g^{\beta\alpha}.$$

Существует теорема Паули, согласно которой если есть два набора матриц, $\{\gamma^\mu\}$ и $\{\gamma'^\mu\}$, удовлетворяющих алгебре Клиффорда (*), то существует несингулярная матрица S, такая, что

$$\boxed{\gamma'^\alpha = \Lambda^\alpha{}_\mu \gamma^\mu = S^{-1}\gamma^\alpha S}$$ ← Определение S

Используем эту теорему.

$$\left(i\gamma^\mu \Lambda^\alpha{}_\mu \partial'_\alpha - m\right)\psi(\Lambda^{-1}x') =$$

$$= \left(iS^{-1}\gamma^\alpha S\partial'_\alpha - m\right)\psi(\Lambda^{-1}x') =$$

$$= \left(iS^{-1}\gamma^\alpha S\partial'_\alpha - S^{-1}Sm\right)\psi(\Lambda^{-1}x') =$$

$$= S^{-1}\left(i\gamma^\alpha\partial'_\alpha - m\right)S\psi(\Lambda^{-1}x') = 0$$

Вводим преобразованное дираковское поле ψ' соотношением

$$\boxed{\psi'(x') = S\psi(x)}, \quad x = \Lambda^{-1}x'$$

Отсюда

$$S^{-1}\left(i\gamma^\alpha\partial'_\alpha - m\right)\psi'(x') = 0, \text{ т.е.}$$

$$\left(i\gamma^\alpha\partial'_\alpha - m\right)\psi'(x') = 0$$

Видим, что ур-е Дирака ковариантно, т.к. оно одинаково по форме до и после преобразования Лоренца.

Уравнения Вейля

Образуем дифференциальный оператор $\hat{\sigma}$ соотношением

$$\hat{\sigma} \equiv \sigma_\mu \partial^\mu = \begin{pmatrix} \partial^0 + \partial^3 & \partial^1 - i\partial^2 \\ \partial^1 + i\partial^2 & \partial^0 - \partial^3 \end{pmatrix}$$

$$\partial^\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x_\mu} = \left(\frac{\partial}{\partial t}, -\vec{\nabla}\right) \quad ; \quad \sigma_\mu \partial^\mu = \sigma_0 \partial^0 - \vec{\sigma}\vec{\nabla}$$

Как преобразуется $\hat{\sigma}$ при преобразованиях Лоренца?

$$\hat{\sigma} \to \hat{\sigma}' = \sigma_\mu (\partial^\mu)'$$

$$(\partial^\mu)' = \Lambda^\mu{}_\nu \partial^\nu$$

$$\hat{\sigma}' = \sigma_\mu \Lambda^\mu{}_\nu \partial^\nu = \sigma_\nu \Lambda^\nu{}_\mu \partial^\mu = S\sigma_\mu S^+ \partial^\mu =$$

$$= S\sigma_\mu \partial^\mu S^+ = S\hat{\sigma} S^+.$$

Здесь мы воспользовались соотношением

$$\sigma_\nu \Lambda^\nu{}_\mu = S\sigma_\mu S^+ , \qquad (*)$$

которое доказывается так:

$$X' = SXS^+ = \underbrace{S\sigma_\mu x^\mu S^+} = \sigma_\mu x'^\mu = \sigma_\mu \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu = \underbrace{\sigma_\nu \Lambda^\nu{}_\mu} x^\mu$$

Соотношение $(*)$ аналогично соотношению $\Lambda^\alpha{}_\mu \gamma^\mu = S^{-1}\gamma^\alpha S$, использованному в теореме Паули в предыдущей лекции.

(1

Вводим двухкомпонентный спинор

$$\eta(x) = \begin{pmatrix} \eta_1(x) \\ \eta_2(x) \end{pmatrix}$$

и дифференциальное уравнение

$$\hat{\sigma}\,\eta(x) = 0 \qquad \text{"Левое уравнение Вейля"}$$

Как должно преобразовываться $\eta(x)$ чтобы это уравнение было ковариантным? Покажем, что $\eta(x)$ должно преобразовываться так:

$$\boxed{\eta'(x') = \varepsilon S^* \varepsilon^{-1} \eta(x)}$$

Доказательство:

$$\hat{\sigma}'\eta'(x') = S\hat{\sigma}S^+ \varepsilon S^* \varepsilon^{-1} \eta(x) =$$

$$= S\hat{\sigma}S^+ (S^+)^{-1} \eta(x) = S\hat{\sigma}\,\eta(x) = 0, \text{ т.е.}$$

$$\hat{\sigma}'\eta'(x') = 0$$

Здесь использовано соотношение

$$\varepsilon S^* \varepsilon^{-1} = (S^+)^{-1}, \quad \varepsilon = i\sigma_2 \qquad (*)$$

которое проверяется непосредственно, т.к. S известно,

$$S = e^{-\frac{i}{2}\vec{\sigma}(\vec{\varphi} + i\vec{\xi})}$$

Далее, вводим спинор

$$\xi(x) = \begin{pmatrix} \xi_1(x) \\ \xi_2(x) \end{pmatrix}$$

и дифференциальный оператор $\check{\sigma}$,

$$\check{\sigma} \equiv \varepsilon \hat{\sigma} \varepsilon^{-1}$$

Дифференциальное уравнение для спинора $\xi(x)$:

$$\check{\sigma}^T \xi(x) = 0, \qquad \text{"Правое ур-е Вейля"}$$

$$(\sigma_0 \partial^0 + \vec{\sigma}\vec{\nabla})\xi(x) = 0$$

Покажем, что, если $\xi(x)$ преобразуется так:

$$\xi'(x') = S\xi(x),$$

то уравнение

$$\check{\sigma}^T \xi(x) = 0$$

ковариантно.

$$\check{\sigma}^T \xi(x) \to \xi^T(x)\check{\sigma}, \quad [\xi'(x')]^T = [S\xi(x)]^T = \xi^T(x) S^T.$$

$$\xi'^T \check{\sigma}' = \xi^T S^T \varepsilon \hat{\sigma}' \varepsilon^{-1} = \xi^T \underline{S^T \varepsilon S} \hat{\sigma} S^+ \varepsilon^{-1} =$$

$$= \xi^T \varepsilon \hat{\sigma} \varepsilon^{-1} \varepsilon S^+ \varepsilon^{-1} = \xi^T \check{\sigma} \underline{\varepsilon S^+ \varepsilon^{-1}} =$$

$$= \xi^T \check{\sigma} (S^*)^{-1} = 0$$

Здесь использованы 2 соотношения

$$S^T \varepsilon S = \varepsilon \qquad (**)$$

$$\varepsilon S^+ \varepsilon^{-1} = (S^*)^{-1} \qquad (***)$$

Все три соотношения, $(*)$, $(**)$ и $(***)$, связаны между собой, поэтому достаточно проверить одно из них.

Итак, имеем 2 уравнения Вейля:

$$\left(\sigma_0 \frac{\partial}{\partial t} - \vec{\sigma}\vec{\nabla}\right)\eta(x) = 0 \quad , \quad \eta'(x') = \varepsilon S^* \varepsilon^{-1} \eta(x)$$

$$\left(\sigma_0 \frac{\partial}{\partial t} + \vec{\sigma}\vec{\nabla}\right)\xi(x) = 0 \quad , \quad \xi'(x') = S\xi(x)$$

Ранее были введены обозначения

$$S_R = S \ , \quad S_L = \varepsilon S^* \varepsilon^{-1}$$

Как добавить массовый член в эти уравнения, чтобы они оставались ковариантными?

Покажем, что уравнение для $\eta(x)$ с массовым членом,

$$\left(\sigma_0 \frac{\partial}{\partial t} - \vec{\sigma}\vec{\nabla}\right)\eta - im\varepsilon^{-1}\eta^* = 0 ,$$

или
$$\hat{\sigma}\eta - im\varepsilon^{-1}\eta^* = 0 ,$$

ковариантно.

Сопряжённый спинор η^* преобразуется так:

$$\eta^{*\prime}(x') = \varepsilon S \varepsilon^{-1} \eta^*(x) ,$$

поэтому имеем

$$\hat{\sigma}'\eta' - im\varepsilon^{-1}\varepsilon S \varepsilon^{-1}\eta^* = S\hat{\sigma}S^{+}\underbrace{\varepsilon S^* \varepsilon^{-1}}_{(S^+)^{-1}}\eta - imS\varepsilon^{-1}\eta^* =$$

$$= s\hat{\sigma}\eta - ims\varepsilon^{-1}\eta^* = s(\hat{\sigma}\eta - im\varepsilon^{-1}\eta^*) = 0, \text{ т.е.}$$

$$\hat{\sigma}'\eta' - im\varepsilon^{-1}\eta^{*'} = 0$$

Аналогично проверяется ковариантность второго ур-я,

$$\left(\sigma_0\frac{\partial}{\partial t} + \vec{\sigma}\vec{\nabla}\right)\xi(x) + im\varepsilon^{-1}\xi^*(x) = 0$$

Ур-я Вейля с добавленными массовыми членами,

$$\left(\sigma_0\frac{\partial}{\partial t} - \vec{\sigma}\vec{\nabla}\right)\eta(x) - im\varepsilon^{-1}\eta^*(x) = 0,$$

$$\left(\sigma_0\frac{\partial}{\partial t} + \vec{\sigma}\vec{\nabla}\right)\xi(x) + im\varepsilon^{-1}\xi^*(x) = 0,$$

называются <u>уравнениями Майораны</u>.

<u>Почему ур-е Вейля для $\eta(x)$ называется левым?</u>

Перепишем ковариантное ур-е Вейля в нековариантном виде, т.е. в виде одночастичного уравнения Шредингера:

$$\frac{i\hbar\,\partial\eta(x)}{\partial t} = H\eta(x) = i\hbar c\vec{\sigma}\vec{\nabla}\eta(x)$$

$H = i\hbar c\vec{\sigma}\vec{\nabla}$ — Гамильтониан свободной частицы.

Решение этого уравнения для плоской волны:

$$\eta(x) = e^{-ipx} u(p)$$

$$p_0 u(p) = -\vec{\sigma}\vec{p}\, u(p)$$

Умножая обе части этого уравнения на $\vec{\sigma}\vec{p}$, получим

$$(p_0^2 - \vec{p}^{\,2})\, u(p) = 0, \text{ т.е. } p_0 = \pm|\vec{p}|$$

Решение с положительной энергией, $p_0 = |\vec{p}|$, описывается

спинором

$$u(p) = -\frac{\vec{\sigma}\vec{p}}{|\vec{p}|} u(p),$$

т.е. $u(p)$ – собственная функция оператора спиральности

$\frac{\vec{\sigma}\vec{p}}{|\vec{p}|}$ с собственным значением (-1).

Частица "левовинтовая", у неё <u>спин антипараллелен</u>

<u>импульсу</u>.

Ещё раз, кратко, о спинорных представлениях и спинорных уравнениях.

1. Связь между Λ и матрицами S группы $SL(2,C)$

$$\Lambda(S)^{\mu}{}_{\nu} = \frac{1}{2}\mathrm{Tr}\left(S\sigma_{\nu}S^{+}\bar{\sigma}_{\mu}\right), \quad S \equiv S_R$$

2. S_R – матричный оператор в пространстве, элементами которого являются правые 2-х компонентные спиноры ξ

$$\begin{pmatrix} \xi_1' \\ \xi_2' \end{pmatrix} = S_R \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix}$$

3. Соответствие $\Lambda \leftrightarrow S_R$ взаимно однозначно, с точностью до знака.

$$\Lambda_1 \to S_{1R}, \quad \Lambda_2 \to S_{2R}$$

$$\Lambda_1 \Lambda_2 = \Lambda_3 \to S_{1R} S_{2R} = S_{3R}$$

Говорят, что спиноры ξ преобразуются по представлению S_R группы Лоренца; S_R - матрица представления

4. Запись S_R через генераторы представления и параметры преобразования Лоренца

$$S_R = e^{-i(\vec{\varphi}\vec{J} + \vec{\zeta}\vec{K})}; \quad \vec{J} = \frac{\vec{\sigma}}{2}, \quad \vec{K} = i\frac{\vec{\sigma}}{2}$$

Коммутационные соотношения между J_i и K_i такие же, как комм. соотношения между генераторами группы Лоренца.

5. Вводим спинорное поле, $\xi \to \xi(x)$,

и уравнения движения поля (дифф. ур.)

$$\check{\sigma}^T \xi(x) = 0 .$$

6. Ур-е движения должно быть ковариантным,

$$\xi'(x') = S_R \xi(x) \rightarrow (\check{\sigma}^T)' \xi'(x') = 0 .$$

(Лоренц-инвариантность физической теории).

7. При выводе связи между Λ и матрицами группы $SL(2,C)$ можно использовать σ^*_ν вместо σ_ν,

$$\sigma_\nu^* = \varepsilon \sigma_\nu \varepsilon^{-1} \quad , \; \varepsilon = i\sigma_2 .$$

Тогда получим соотношение

$$\Lambda(S_L)^\mu{}_\nu = \frac{1}{2} \mathrm{Tr}\left(S_L \sigma_\nu^* S_L^+ \bar{\sigma}_\mu^*\right),$$

$$S_L = \varepsilon S_R^* \varepsilon^{-1}$$

S_L - оператор в пространстве <u>левых спиноров</u> η

$$\begin{pmatrix} \eta_1' \\ \eta_2' \end{pmatrix} = S_L \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix}$$

Спиноры η преобразуются по представлению S_L группы Лоренца, S_L - матрица представления.

$$S_L = e^{-i(\vec{\varphi}\vec{J} + \vec{\xi}\vec{K})} \; ; \; \vec{J} = \frac{\vec{\sigma}}{2} \; , \; K = -i\frac{\vec{\sigma}}{2}$$

Спинорное поле - $\eta(x)$, уравнение движения -

$$\hat{\sigma}\,\eta(x)=0.$$

Ковариантность требует, чтобы было справедливо ур-е

$$(\hat{\sigma})'\,\eta'(x')=0.$$

8. Паули показал, что всегда существует матрица S_D, удовлетворяющая соотношению

$$\Lambda^{\alpha}{}_{\mu}\gamma^{\mu}=S_D^{-1}\gamma^{\alpha}S_D\,,$$

где γ^{μ} - набор матриц, удовлетворяющих алгебре Клиффорда.

Если ввести <u>Дираковское поле</u>, преобразующееся по формуле

$$\psi'(x')=S_D\psi(x)\,,$$

то можно убедиться, что уравнение

$$\left(i\gamma^{\alpha}\partial_{\alpha}-m\right)\psi(x)=0$$

является ковариантным, т.е. имеет место уравнение

$$\left(i\gamma^{\alpha}\partial'_{\alpha}-m\right)\psi'(x')=0.$$

ψ - <u>биспинор Дирака</u> (4-х компонентный)

Лагранжиан майорановского поля

$$\mathcal{L} = i\hbar\eta^\dagger(\sigma_0\partial_0 - \vec{\sigma}\vec{\nabla})\eta - \frac{mc}{2}\eta^\dagger\varepsilon\eta^* + \frac{mc}{2}\eta^T\varepsilon\eta \qquad \varepsilon = i\sigma^2$$

Лагранжиан эрмитов. Каждый член инвариантен относительно преобразования Лоренца

$$\eta \to S_L\eta, \quad S_L = e^{-i\frac{\vec{\sigma}}{2}(\vec{\varphi} - i\vec{\xi})} = \varepsilon S^*\varepsilon^{-1},$$

Например,

$$(\eta^\dagger\varepsilon\eta^*)' = \eta'^\dagger\varepsilon\eta'^* = (\varepsilon S^*\varepsilon^{-1}\eta)^\dagger\varepsilon(\varepsilon S^*\varepsilon^{-1}\eta)^* = \eta^\dagger\varepsilon\eta^*$$

(использовано $S^T\varepsilon S = \varepsilon$ и свойства ε).

Уравнение Эйлера-Лагранжа получается варьированием $\mathcal{L}$ (скажем, по η^*)

$$\delta\mathcal{L} = (\delta\eta^*)^T i\hbar(\sigma_0\partial_0 - \vec{\sigma}\vec{\nabla})\eta - \frac{mc}{2}(\delta\eta^*)^T\varepsilon\eta^*\cdot 2 = 0$$

Здесь использовано соотношение

$$(\eta^\dagger\varepsilon\eta^*)^\dagger = \underset{\substack{\uparrow\\ \text{грассмановость!}}}{-}\eta^{*T}\varepsilon^T\eta^* = \eta^{*T}\varepsilon\eta^* = \eta^\dagger\varepsilon\eta^*.$$

Классические майорановские поля - антикоммутирующие (грассмановы) числа.

Уравнение Эйлера-Лагранжа:

$$i\hbar(\sigma_0\partial_0 - \vec{\sigma}\vec{\nabla})\eta - mc\,\varepsilon\eta^* = 0.$$

Это левое ур-е Вейля, если положить $m = 0$.

Вводим спиноры Паули с определённой поляризацией,

$$\vec{p} = |\vec{p}|\left(\sin\theta\cos\varphi, \sin\theta\sin\varphi, \cos\theta\right)$$

$$f^+ = \begin{pmatrix} e^{-\frac{i\varphi}{2}}\cos\frac{\theta}{2} \\ e^{\frac{i\varphi}{2}}\sin\frac{\theta}{2} \end{pmatrix}, \quad f^- = \begin{pmatrix} -e^{-i\frac{\varphi}{2}}\sin\frac{\theta}{2} \\ e^{i\varphi/2}\cos\frac{\theta}{2} \end{pmatrix}$$

$$\vec{\sigma}\vec{n}\, f^+ = +f^+, \quad \vec{\sigma}\vec{n}\, f^- = -f^-, \quad \vec{n} = \vec{p}/|\vec{p}|$$

Спиноры Паули - собственные состояния $(\vec{\sigma}\vec{n})$ с собственными значениями ± 1.

Разложим поле $\eta(x)$ в интеграл Фурье по импульсу,

$$\eta(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2E}\Big\{\left[a(p)f^- + b(p)f^+\right]e^{-ipx} + \left[c(p)f^- + d(p)f^+\right]e^{ipx}\Big\}$$

Аналогичное разложение можно записать для $\eta^*(x)$. Подставляя эти разложения в уравнение Вейля, получим связи между коэффициентами a, b, c, d. Результат имеет вид:

$$\eta(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2E}\Big\{\left[\sqrt{E+p}\,a_-(p)f^- + \sqrt{E-p}\,a_+(p)f^+\right]e^{-ipx} + \left[\sqrt{E+p}\,a_+^*(p)f^- - \sqrt{E-p}\,a_-^*(p)f^+\right]e^{ipx}\Big\}.$$

2 коэффициента - $a_-(p)$ и $a_+(p)$ и их комплексно сопряжённые.

Из этого разложения следует, что, в пределе $m=0$, когда $\sqrt{E-p}=0$, функция $\eta(x)$ содержит только члены с f^-. В квантовой теории поля $\eta(x)$ становится оператором, и этот оператор, в пределе $m \to 0$, содержит только операторы уничтожения частиц с отрицательной спиральностью и операторы рождения частиц с положительной спиральностью.

С малой вероятностью $\left(\sim m^2/E^2\right)$ разрешено рождение и уничтожение частиц с противоположными спиральностями.

В $\eta(x)$ входят как операторы уничтожения, так и операторы рождения тех же частиц (в этом отличие от случая дираковского поля).

Аналогично можно записать Лагранжиан правого майорановского поля $\xi(x)$: $\hbar = c = 1$

$$\mathcal{L} = i\xi^+\left(\sigma_0\partial_0 + \vec{\sigma}\vec{\nabla}\right)\xi + \frac{m}{2}\xi^+\varepsilon\xi^* - \frac{m}{2}\xi^T\varepsilon\xi,$$

$$\xi \to S_R\xi, \quad S_R = S = e^{-\frac{i\vec{\sigma}}{2}(\vec{\varphi}+i\vec{\zeta})}$$

Соответствующее ур-е Эйлера есть:

$$i\left(\sigma_0\partial_0 + \vec{\sigma}\vec{\nabla}\right)\xi + m\varepsilon\xi^* = 0$$

В общем случае массы разные

$$m \to M_L \left(\text{для } \eta(x)\right) \text{ и } m \to M_R \left(\text{для } \xi(x)\right)$$

Лагранжиан суммы двух майорановских полей

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_\eta + \mathcal{L}_\xi$$

Дополним этот Лагранжиан смешивающими массовыми членами:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_\eta + \mathcal{L}_\xi - M_D\left(\eta^+\xi + \xi^+\eta\right)$$

Легко проверить, что добавленные члены инвариантны относительно преобразований Лоренца.

Например,

$$(\eta^+\xi)' = \eta^{+\prime}\xi' = (\eta')^+\xi' = (\varepsilon S^*\varepsilon^{-1}\eta)^+ S\xi =$$
$$= \eta^+(\varepsilon^{-1})^+ S^{*+}\varepsilon^+ S\xi = -\eta^+\varepsilon\underbrace{S^T\varepsilon S}_{\varepsilon}\xi = \eta^+\xi.$$

M_D - "дираковская" масса, в отличие от "майорановских" масс M_L и M_R.

Вводим 4-компонентные майорановские спиноры

$$\nu_L = \begin{pmatrix} 0 \\ \eta \end{pmatrix}, \quad \nu_R \equiv \begin{pmatrix} \xi \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Если $M_L = M_R = 0$, то ν_L, ν_R - 4-компонентные Вейлевские спиноры.

Пользуясь введённым выше определением операции зарядового сопряжения,

$$C = -i\gamma^2\gamma^0$$

(в представлении Вейля), вычислим зарядово-сопряженные спиноры $(\nu_L)^C$ и $(\nu_R)^C$.

$$\nu_L{}^C = C\gamma^0 \nu_L^* = -i\gamma^2 \nu_L^* = -i\begin{pmatrix} 0 & -\sigma^2 \\ \sigma^2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ \eta^* \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & \varepsilon \\ -\varepsilon & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ \eta^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon\eta^* \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Аналогично,

$$\nu_R{}^C = \begin{pmatrix} 0 & \varepsilon \\ -\varepsilon & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \xi^* \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\varepsilon\xi^* \end{pmatrix}$$

Вводим майорановские спиноры ν_1^M и ν_2^M:

$$\nu_1{}^M = \nu_L + \nu_L{}^C = \begin{pmatrix} \varepsilon\eta^* \\ \eta \end{pmatrix} \; ; \; (\nu_1{}^M)^C = \nu_1{}^M.$$

$$\nu_2{}^M = \nu_R + \nu_R{}^C = \begin{pmatrix} \xi \\ -\varepsilon\xi^* \end{pmatrix} \; ; \; (\nu_2{}^M)^C = \nu_2{}^M.$$

Покажем, что спиноры ν^M удовлетворяют уравнению Дирака.

$$i\gamma^\mu\partial_\mu = i(\gamma^0\partial_0 + \vec{\gamma}\vec{\nabla}) = i\begin{pmatrix} 0 & \sigma_0\partial_0 - \vec{\sigma}\vec{\nabla} \\ \sigma_0\partial_0 + \vec{\sigma}\vec{\nabla} & 0 \end{pmatrix}$$

$$i\gamma^\mu \partial_\mu \nu_1^M = i\begin{pmatrix} 0 & \sigma_0\partial_0 - \vec{\sigma}\vec{\nabla} \\ \sigma_0\partial_0 + \vec{\sigma}\vec{\nabla} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \varepsilon\eta^* \\ \eta \end{pmatrix} = M_L \begin{pmatrix} \varepsilon\eta^* \\ \eta \end{pmatrix} = M_L \nu_1^M$$

Здесь 2 уравнения:

1) $i(\sigma_0\partial_0 - \vec{\sigma}\vec{\nabla})\eta = M_L \varepsilon\eta^*$ Ур-е Майораны

2) $i(\sigma_0\partial_0 + \vec{\sigma}\vec{\nabla})\varepsilon\eta^* = M_L\eta.$

Эти уравнения связаны операцией комплексного сопряжения.

<u>Разложение по операторам рождения-уничтожения 4-компонентного майорановского поля.</u>

$$\nu_M = \begin{pmatrix} +\varepsilon\eta^* \\ \eta \end{pmatrix}$$

Интеграл Фурье по импульсу для $\varepsilon\eta^*$ можно найти аналогично тому как это делалось для функции $\eta(x)$

$$\varepsilon\eta^*(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2E} \Big\{ \left[\sqrt{E+p}\, a_-^*(p) f^+ - \sqrt{E-p}\, a_+^*(p) f^-\right] e^{ipx} + \\ + \left[\sqrt{E+p}\, a_+(p) f^+ + \sqrt{E-p}\, a_-(p) f^-\right] e^{-ipx} \Big\}$$

Имея разложения для η и $\varepsilon\eta^*$, составляем ν_M:

$$\nu_M = \begin{pmatrix} \varepsilon\eta^*(x) \\ \eta(x) \end{pmatrix} = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2E} \Big\{ \left[a_-(p) u^-(p) + a_+(p) u^-(p)\right] e^{-ipx} + \\ + \left[a_-^*(p) v^-(p) + a_+^*(p) v^+(p)\right] e^{ipx} \Big\}. \quad (*)$$

Здесь использованы следующие обозначения:

$$u^-(p) = \begin{pmatrix} \sqrt{E-p}\,\xi^- \\ \sqrt{E+p}\,\xi^- \end{pmatrix} \xrightarrow[M_L \to 0]{} \sqrt{2E} \begin{pmatrix} \frac{M_L}{2E}\xi^- \\ \xi^- \end{pmatrix},$$

$$u^+(p) = \begin{pmatrix} \sqrt{E+p}\,\xi^+ \\ \sqrt{E-p}\,\xi^+ \end{pmatrix} \xrightarrow[M_L \to 0]{} \sqrt{2E} \begin{pmatrix} \xi^+ \\ \frac{M_L}{2E}\xi^+ \end{pmatrix},$$

$$v^-(p) = \begin{pmatrix} \sqrt{E+p}\,\xi^+ \\ -\sqrt{E-p}\,\xi^+ \end{pmatrix} \xrightarrow[M_L \to 0]{} \sqrt{2E} \begin{pmatrix} \xi^+ \\ -\frac{M_L}{2E}\xi^+ \end{pmatrix},$$

$$v^+(p) = \begin{pmatrix} -\sqrt{E-p}\,\xi^- \\ \sqrt{E+p}\,\xi^- \end{pmatrix} \xrightarrow[M_L \to 0]{} \sqrt{2E} \begin{pmatrix} -\frac{M_L}{2E}\xi^- \\ \xi^- \end{pmatrix}.$$

Введём перевёрнутые спиноры $\xi_П^+$ и $\xi_П^-$:

$$\xi_П^+ \equiv \varepsilon\,\xi^{+*} = -\xi^- \; ; \quad \xi_П^- \equiv \varepsilon\,\xi^{-*} = \xi^+$$

и перепишем с их помощью выражения для $v^\pm(p)$:

$$v^-(p) = \begin{pmatrix} \sqrt{E+p}\,\xi_П^- \\ -\sqrt{E-p}\,\xi_П^- \end{pmatrix} \to \sqrt{2E} \begin{pmatrix} \xi_П^- \\ -\frac{M_L}{2E}\xi_П^- \end{pmatrix},$$

$$v^+(p) = \begin{pmatrix} \sqrt{E-p}\,\xi_П^+ \\ -\sqrt{E+p}\,\xi_П^+ \end{pmatrix} \to \sqrt{2E} \begin{pmatrix} \frac{M_L}{2E}\xi_П^+ \\ -\xi_П^+ \end{pmatrix}.$$

Физический смысл использования понятия перевернутого спинора прост - решение с отрицательной частотой, $\sim e^{ipx}$, со спинором с отрицательной спиральностью, χ^-, соответствует частице с положительной спиральностью, и наоборот, спинору χ^+ соответствует частица с отрицательной спиральностью. То-есть, в решениях с e^{ipx} спинор χ имеет перевернутую спиральность, противоположную спиральности частицы.

Можно легко проверить, что для дираковской частицы фурье-разложение имеет аналогичный вид, <u>содержащий те же функции $u^{\pm}(p)$, $v^{\pm}(p)$</u>:

$$\psi_D(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2E} \left\{ \left[a_-(p)u^-(p) + a_+(p)u^+(p)\right] e^{-ipx} + \left[b^*_-(p)v^-(p) + b^*_+(p)v^+(p)\right] e^{ipx} \right\} \qquad (**)$$

Сравнивая (**) и (*) видим что отличие в том, что у дираковского решения отрицательно-частотная часть имеет другие функции $b_{\mp}(p)$, отличные от $a_{\mp}(p)$, соответственно тому, что в квантовой теории эта часть описывает рождение <u>античастиц</u>

Зарядовое сопряжение связывает $u_{\pm}(p)$ и $v_{\pm}(p)$:

$$[v^{\pm}(p)]^c = -i\gamma^2 [v^{\pm}(p)]^* = u^{\mp}(p)$$

$$[u^{\pm}(p)]^c = v^{\mp}(p)$$

Используя эти соотношения, легко увидеть, что

$$\left[\Psi_D(x)\right]^C = -i\gamma^2 \Psi_D^*(a \leftrightarrow b).$$

Соответственно, в случае майорановского нейтрино

$$\left[\Psi_M(x)\right]^C = -i\gamma^2 \Psi_M^*(x) = \Psi_M(x),$$

поскольку в этом случае $a = b$.

Массовый член полного Лагранжиана, рассмотренного выше, содержащего 2 майорановского поля $\eta(x)$ и $\xi(x)$ с массами M_L и M_R, а также смешивающие массовые члены, пропорциональные M_D, можно записать через 4-компонентные величины

$$\mathcal{L}_M = \mathcal{L}_\eta^{(M_L)} + \mathcal{L}_\xi^{(M_R)} - M_D\left(\eta^+\xi + \xi^+\eta\right) =$$

$$= -\frac{1}{2}\left(\bar{\nu}_1^M, \bar{\nu}_2^M\right)\begin{pmatrix} M_L & M_D \\ M_D & M_R \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \nu_1^M \\ \nu_2^M \end{pmatrix}.$$

Если отсутствуют смешивающие члены, пропорциональные M_D, то

$$\mathcal{L}_M(M_D = 0) = -\left(\frac{M_L}{2}\bar{\nu}_1^M \nu_1^M + \frac{M_R}{2}\bar{\nu}_2^M \nu_2^M\right).$$

В этом случае имеем два независимых майорановских поля - левое и правое.

$$\bar{\nu}_1^M = \nu_1^{M+}\gamma_0 = \left(-\eta^T\varepsilon^T, \eta^+\right)\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \left(\eta^+, -\eta^T\varepsilon\right).$$

$$\bar{\nu}_2^M = \nu_2^{M+}\gamma_0 = \left(-\xi^T\varepsilon,\ \xi^+\right).$$

Если $M_D \neq 0$, т.е. имеется смешивание, то нужно произвести операцию диагонализации массовой матрицы.

$\nu_{1,2}^{M\prime}$ – линейные комбинации полей $\nu_{1,2}^M$ с определенными массами $m_{1,2}$

$$\begin{pmatrix} \nu_1^{M\prime} \\ \nu_2^{M\prime} \end{pmatrix} = U \begin{pmatrix} \nu_1^M \\ \nu_2^M \end{pmatrix},$$

$$\left(\bar{\nu}_1^M,\ \bar{\nu}_2^M\right)\begin{pmatrix} M_L & M_D \\ M_D & M_R \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \nu_1^M \\ \nu_2^M \end{pmatrix} = \left(\bar{\nu}_1^{M\prime},\ \bar{\nu}_2^{M\prime}\right)\begin{pmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \nu_1^{M\prime} \\ \nu_2^{M\prime} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{pmatrix} = U^T \begin{pmatrix} M_L & M_D \\ M_D & M_R \end{pmatrix} U;$$

$$U = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}, \quad \mathrm{tg}\, 2\theta = \frac{2M_D}{M_R - M_L},$$

$$m_{1,2} = \frac{M_L + M_R}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{M_L - M_R}{2}\right)^2 + M_D^2}.$$

Другая форма записи Лагранжиана:

$$\mathcal{L}_M = -\frac{M_L}{2}\left(\bar{\nu}_L^c \nu_L + \bar{\nu}_L \nu_L^c\right) - \frac{M_R}{2}\left(\bar{\nu}_R^c \nu_R + \bar{\nu}_R \nu_R^c\right) -$$

$$- M_D\left(\bar{\nu}_R \nu_L + \bar{\nu}_L \nu_R\right).$$

Что делать, если $m_2<0$?

$\nu_2^{M'} = -\sin\theta\, \nu_1^M + \cos\theta\, \nu_2^M$ Стационарное состояние с массой m_2.

$(\nu_2^{M'})^C = -\sin\theta (\nu_1^M)^C + \cos\theta (\nu_2^M)^C = \nu_2^{M'}$ Нейтрино майорановское.

$(\nu_2^{M'})_L = P_L \nu_2^{M'}$, $P_L = \frac{1}{2}(1-\gamma^5)$ – лево-киральная часть $\nu_2^{M'}$.

Киральная декомпозиция:

$$\nu_2^{M'} = (\nu_2^{M'})_L + (\nu_2^{M'})_R \quad , \quad (\nu_2^{M'})_R = P_R \nu_2^{M'}.$$

Очевидно, что
$$(\nu_2^{M'})_R = (\nu_{2\,L}^{M'})^C$$

Определим новое поле $\nu_2^{M''}$ соотношением:

$$\bar\nu_2^{M'} \nu_2^{M'} = \rho_2^2 \bar\nu_2^{M''} \nu_2^{M''},$$

$$\rho_2^2 = \begin{cases} +1, & \text{если } m_2>0 \\ -1, & \text{если } m_2<0 \end{cases}$$

Новое поле можно записать в виде

$$\nu_2^{M''} = (\nu_2^{M'})_L + \rho_2^2 (\nu_{2\,L}^{M'})^C,$$

откуда следует, что

$$(\nu_2^{M''})^C = \begin{cases} \nu_2^{M''}, & \text{если } m_2>0 \\ -\nu_2^{M''}, & \text{если } m_2<0 \end{cases}$$

Окончательно,
$$m_2 \bar\nu_2^{M'} \nu_2^{M'} = \rho_2^2 m_2 \bar\nu_2^{M''} \nu_2^{M''}$$

Новая масса, $\rho_2^2 m_2$, всегда положительна.

Дираковское представление группы Лоренца (1

$$S_D = \exp\left(-\frac{i\omega_{\mu\nu}}{2} S_D^{\mu\nu}\right) = \exp\left(-i\vec{\varphi}\vec{J}_D - i\vec{\zeta}\vec{K}_D\right)$$

$$S_D^{\mu\nu} = \frac{i}{4}\left[\gamma^\mu, \gamma^\nu\right] \; ; \; \omega_{0i} = \zeta_i \, , \, \omega_{ij} = \varphi_k$$

В случае правого и левого спиноров Вейля имеем:

$$S_{R,L}^{ij} = \frac{\sigma^k}{2} \, , \quad S_{R,L}^{0i} = \pm \frac{i}{2}\sigma^i$$

Непосредственно проверяется, что

$$S_D^{ij} = \begin{pmatrix} S_R^{ij} & 0 \\ 0 & S_L^{ij} \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \sigma^k & 0 \\ 0 & \sigma^k \end{pmatrix},$$

$$S_D^{0i} = \begin{pmatrix} S_R^{0i} & 0 \\ 0 & S_L^{0i} \end{pmatrix} = \frac{i}{2}\begin{pmatrix} \sigma^i & 0 \\ 0 & -\sigma^i \end{pmatrix}$$

Таким образом, 4-компонентный дираковский спинор („биспинор")

$$\psi_D = \begin{pmatrix} \psi_R \\ \psi_L \end{pmatrix}$$

преобразуется как спинор

$$\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}.$$

Действительно, $\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} S_R \xi \\ S_L \eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_R & 0 \\ 0 & S_L \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}$

Говорят, что Ψ_D преобразуется по приводимому представлению группы Лоренца,

$$\Psi_D \to \Psi_D' = \begin{pmatrix} S_R & 0 \\ 0 & S_L \end{pmatrix} \Psi_D$$

<u>Ур-е Дирака (вывод и 2-компонентного Лагранжиана)</u>

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_\xi + \mathcal{L}_\eta - M_D\left(\eta^+\xi + \xi^+\eta\right).$$

Положим в $\mathcal{L}$

$$M_L = M_R = 0,$$

(т.е., предположим, что майорановские массы отсутствуют).
Варьированием Лагранжиана получим систему двух уравнений Эйлера-Лагранжа:

$$\begin{cases} i\left(\sigma_0\partial_0 - \vec{\sigma}\vec{\nabla}\right)\eta = M_D\xi, \\ i\left(\sigma_0\partial_0 + \vec{\sigma}\vec{\nabla}\right)\xi = M_D\eta. \end{cases}$$

Эту систему можно записать в виде одного уравнения, вводя биспинор $\begin{pmatrix}\xi\\ \eta\end{pmatrix}$,

$$i\begin{pmatrix} 0 & \sigma_0\partial_0 - \vec{\sigma}\vec{\nabla} \\ \sigma_0\partial_0 + \vec{\sigma}\vec{\nabla} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix}\xi\\ \eta\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M_D & 0 \\ 0 & M_D\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\xi\\ \eta\end{pmatrix}$$

Вводя гамма-матрицы Дирака,

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0\end{pmatrix}, \quad \vec{\gamma} = \begin{pmatrix} 0 & -\vec{\sigma} \\ \vec{\sigma} & 0\end{pmatrix},$$

получаем:

$$\left(i\gamma^\mu\partial_\mu - M\right)\psi = 0 \quad , \quad M = \begin{pmatrix} M_D & 0 \\ 0 & M_D \end{pmatrix}$$

$$\partial_\mu = \left(\frac{\partial}{\partial t}, \vec{\nabla}\right) \quad , \quad \gamma^\mu\partial_\mu = \gamma^0\partial_0 + \vec{\gamma}\vec{\nabla}$$

Очевидно, что ψ преобразуется по закону

$$\psi \to \psi' = \begin{pmatrix} \xi' \\ \eta' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_R & 0 \\ 0 & S_L \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}$$

Определение из теории представлений группы Лоренца:

$$S_R \equiv S_{\left(\frac{1}{2}, 0\right)} \quad ; \quad S_L \equiv S_{\left(0, \frac{1}{2}\right)} .$$

Дискретные симметрии уравнения Дирака

1. C-симметрия

$$\psi \xrightarrow[C]{} \psi' = \eta_c \psi^c = \eta_c C \bar{\psi}^T \qquad |\eta_c| = 1$$

$$\psi^c = C\bar{\psi}^T = -i\gamma^2\gamma^0\left(\psi^+\gamma^0\right)^T = -i\gamma^2\gamma^0\gamma^0\psi^* = -i\gamma^2\psi^*$$

Уравнение Дирака для электрона в электромагнитном поле

$$i\gamma^\mu\left(\partial_\mu + ieA_\mu\right)\psi - m\psi = 0 \quad , \quad e < 0$$

Для позитрона должно существовать уравнение

$$i\gamma^\mu\left(\partial_\mu - ieA_\mu\right)\psi^c - m\psi^c = 0$$

Если $A=0$, то
$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi^c = 0,$$
т.е. ψ^c должно удовлетворять ур-нию Дирака.
$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi^c = -(i\gamma^\mu \partial_\mu - m) i\gamma^2 \psi^*.$$
Умножим это уравнение на γ^2 слева и воспользуемся соотношением
$$\gamma^2 \gamma^\mu \gamma^2 = \gamma^{*\mu},$$
которое проверяется непосредственно.
$$\gamma^2 (i\gamma^\mu \partial_\mu - m) i\gamma^2 \psi^* = -\gamma^{*\mu} \partial_\mu \psi^* + im\psi^* =$$
$$= -i\left(-i\gamma^{*\mu} \partial_\mu \psi^* - m\psi^*\right) = 0,$$
т.к. $\quad (-i\gamma^{\mu *} \partial_\mu - m)\psi^* = \left[(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi\right]^* = 0$

Отсюда
$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi^c = 0.$$

2. P-симметрия

При отражении пространственных осей
$$\vec{x} \to \vec{x}' = -\vec{x}, \quad t \to t$$
биспинор Дирака преобразуется так:
$$\psi'(x') = S_p \psi(x), \quad S_p = \gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

При этом уравнение Дирака не меняется, т.к.

$$\left(i\gamma^\mu \partial'_\mu - m\right)\psi'(x') = 0.$$

Проверим это.

$$(i\gamma^\mu \partial'_\mu - m)\psi'(x') = (i\gamma^\mu \partial'_\mu - m) S_p \psi(x) =$$

$$= \left(i\gamma^\mu \partial'_\mu - m\right)\gamma_0 \psi(x).$$

$$\gamma^\mu \partial'_\mu = \gamma^0 \partial_0 - \vec{\gamma}\vec{\nabla}, \quad \vec{\gamma}\gamma^0 = -\gamma^0\vec{\gamma}.$$

$$\left(i\gamma^\mu \partial'_\mu - m\right)\gamma_0 \psi(x) = \left(i\gamma^0\partial_0 - i\vec{\gamma}\vec{\nabla} - m\right)\gamma_0\psi(x) =$$

$$= \gamma_0\left(i\gamma^0\partial_0 + i\vec{\gamma}\vec{\nabla} - m\right)\psi(x) = \gamma^0\left(i\gamma^\mu\partial_\mu - m\right)\psi = 0.$$

3. <u>CP-симметрия</u>

$$\psi(x) \xrightarrow[CP]{} \psi'(x') = \gamma^0(-i\gamma^2)\psi^*(x) = \gamma^0 C \bar{\psi}^T(x) = \psi^{CP}(x')$$

$$\left(i\gamma^\mu \partial'_\mu - m\right)\psi^{CP}(x') = 0.$$

<u>Дискретная симметрия 2-компонентных спиноров.</u>

По-отдельности C- и P-симметрий у Вейлевских спиноров нет.

Допустим, например, что P-симметрия ур-я Вейля есть.

$$\eta \to \eta'(x') = S_P\, \eta(x)$$

Тогда уравнение $\left(\sigma_0\partial_0 - \vec{\sigma}\vec{\nabla}\right)\eta(x) = 0$

переходит при P-преобразовании в

$$\left(\sigma_0 \partial_0 + \vec{\sigma}\vec{\nabla}\right) S_p \eta = 0 .$$

Чтобы доказать равенство нулю левой части этого ур-я, нужно найти такую матрицу S_p, которая удовлетворяет соотношению

$$\sigma^k S_p = - S_p \sigma^k \quad , \quad k = 1,2,3$$

Таких матриц не существует (матриц 2×2). В 4-компонентном же случае имеем

$$\gamma^k S_p = - S_p \gamma^k ,$$

если $S_p = \gamma^0$, т.е. для существования P-симметрии спинорного уравнения число компонент спинора должно быть, как минимум, равно 4.

Однако, некоторая дискретная симметрия, которую можно отождествить с CP-симметрией, у двух-компонентных майорановских и вейлевских полей все же есть.

Пусть $\psi(x)$ удовлетворяет уравнению

$$\left(\sigma_0 \partial_0 - \vec{\sigma}\vec{\nabla}\right)\psi(x) - i m \varepsilon^{-1} \psi^*(x) = 0 \quad , \ \varepsilon = i\sigma^2 .$$

Введём преобразование

$$\psi(x) \longrightarrow \psi'(x') = \eta \varepsilon \psi^*(x) \qquad |\eta| = 1 .$$

Легко проверить, что, если фазовый множитель η равен $\pm i$, то преобразованное уравнение сохраняет свой вид, т.е.

$$(\sigma_0\partial_0-\vec{\sigma}\vec{\nabla}')\psi'(x')-im\varepsilon^{-1}\left(\psi'(x')\right)^*=0. \qquad (*)$$

При доказательстве используем соотношение

$$\varepsilon\sigma^*=-\sigma\varepsilon.$$

Имеем, из $(*)$, для $\eta=i$,

$$i(\sigma_0\partial_0+\vec{\sigma}\vec{\nabla})\varepsilon\psi^*-im\varepsilon^{-1}\left(-i\varepsilon\psi\right)=$$

$$=i(\sigma_0\partial_0+\vec{\sigma}\vec{\nabla})\varepsilon\psi^*-m\psi=0.$$

Комплексное сопряжение этого уравнения и умножение левой части на ε^{-1} даёт:

$$-i(\sigma_0\partial_0+\vec{\sigma}^*\vec{\nabla})\varepsilon\psi-m\psi^*=$$

$$=\varepsilon^{-1}(\sigma_0\partial_0+\vec{\sigma}^*\vec{\nabla})\varepsilon\psi-im\varepsilon^{-1}\psi^*=0.$$

Отсюда

$$(\sigma_0\partial_0-\vec{\sigma}\vec{\nabla})\psi-im\varepsilon^{-1}\psi^*=0.$$

Доказано, таким образом, что ур-е $(*)$ справедливо.

Преобразованный спинор $\psi^{CP}(x')=\pm i\varepsilon\psi^*(x)$ (назовём его, по аналогии с 4-компонентным случаем, CP-сопряжённым спинором) удовлетворяет исходному ур-ю Вейля.

$$(\sigma_0\partial^0-\vec{\sigma}\vec{\nabla}')\psi^{CP}(x')-im\varepsilon^{-1}\left(\psi^{CP}(x')\right)^*=0.$$

CP-симметрия 4-компонентных майорановских нейтрино.

Как и в случае дираковских нейтрино, имеем

$$\psi(x) \xrightarrow[CP]{} \psi'(x') = \eta_{CP}\gamma^0\psi^c(x)$$

$$\psi^c = C\bar{\psi}^T$$

Отличие только в том, что фазовый множитель η_{CP} теперь равен $\pm i$, как мы увидим.

$$\nu_M = \nu_L + \nu_L^c \;; \quad \nu_M^c = \nu_M .$$

$$(\nu_L)' = \eta_{CP}\gamma^0\nu_L^c \;; \quad (\nu_L^c)' = (-i\gamma^2\nu_L^*)' = -i\gamma^2(\nu_L')^* =$$

$$= -i\gamma^2\left(\eta_{CP}\gamma^0\nu_L^c\right)^* = -i\gamma^2\eta_{CP}^*\gamma^0\left[(-i\gamma^2\nu_L^*)\right]^* = -i^2\gamma^2\eta_{CP}^*\gamma^0\gamma^2\nu_L =$$

$$= -\eta_{CP}^*\gamma^0\nu_L .$$

$$\nu_M' = \nu_L' + (\nu_L^c)' = \eta_{CP}\gamma^0\nu_L^c - \eta_{CP}^*\gamma^0\nu_L$$

С другой стороны, $\nu_M' = \eta^{CP}\gamma^0\nu_M$,

Отсюда

$$\eta^{CP}\gamma^0(\nu_L^c + \nu_L) = \eta_{CP}\gamma^0\nu_L^c - \eta_{CP}^*\gamma^0\nu_L$$

Это равенство справедливо, если

$$\eta^{CP} = \pm i$$

Аналогично получаем для дираковски-сопряжённых спиноров:

$$(\bar{\nu}_L)' = \eta^*_{CP}\,\overline{\nu^c_L}\,\gamma^0\,, \quad (\overline{\nu^c_L})' = -\eta^{CP}\,\bar{\nu}_L\,\gamma^0\,.$$

Массовый член Лагранжиана есть (см выше)

$$\mathcal{L}^M(x) = -\frac{M_L}{2}\left[\overline{\nu^c_L}\,\nu_L + \bar{\nu}_L\,\nu^c_L\right]$$

Теория CP-симметрична, если

$$(\mathcal{L}^M)' = \mathcal{L}$$

При CP-преобразовании массовый член Лагранжиана преобразуется следующим образом:

$$\mathcal{L}' = -\frac{M_L}{2}\left[-(\eta^{CP})^2\,\bar{\nu}_L\,\nu^c_L - (\eta^{CP*})^2\,\overline{\nu^c_L}\,\nu_L\right],$$

откуда ещё раз следует, что должно быть

$$\eta^{CP} = \pm i.$$

В общем случае (см. выше) $\eta^{CP} = (\pm i)\rho^2$, $\rho^2 = \begin{cases} +1, \text{ если } m>0 \\ -1, \text{ если } m<0 \end{cases}$.

<u>Массовый член Лагранжиана нейтринных полей в общем случае</u> (нейтрино - 4-компонентные)

Три вида лептонов $l - e, \mu, \tau$

Соответственно, три вида нейтрино, участвующих в слабых взаимодействиях $- \nu_e, \nu_\mu, \nu_\tau$. <u>В стандартной модели эти нейтрино - левые</u>, (в смысле группы Лоренца),

$$\nu_{lL} = \{\nu_{eL}, \nu_{\mu L}, \nu_{\tau L}\}.$$

Кроме того, в общем случае должны существовать правые нейтрино

$$\nu_{SR} = \{\nu_{S_1R}, \nu_{S_2R}, \nu_{S_3R} \dots\}$$

Эти частицы "стерильны", они не участвуют в слабых взаимодействиях.

В пределе нулевой массы (т.е. в вейлевском пределе) спиноры $\nu_{\ell L}$ имеют левую киральность, т.е.

$$P_L \nu_{\ell L} = \nu_{\ell L}, \quad P_L = \frac{1}{2}(1-\gamma_5),$$

в то время как спиноры ν_{SR} имеют правую киральность,

$$P_R \nu_{SR} = \nu_{SR}, \quad P_R = \frac{1}{2}(1+\gamma_5).$$

В общем случае имеем

$$\mathcal{L}_m^{(D+M)} = \mathcal{L}_m^L + \mathcal{L}_m^R + \mathcal{L}_m^D,$$

$$\mathcal{L}_m^D = -\sum_{s,\ell} \bar{\nu}_{SR} M_{s\ell}^D \nu_{\ell L} + h.c.$$

$$\mathcal{L}_m^L = -\frac{1}{2}\sum_{\ell,\ell'} \overline{\nu^c_{\ell L}} M^L_{\ell\ell'} \nu_{\ell' L} + h.c.$$

$$\mathcal{L}_m^R = -\frac{1}{2}\sum_{s,s'} \overline{\nu^c_{sR}} M^R_{ss'} \nu_{s'R} + h.c.$$

M^D, M^L, M^R – массовые матрицы нейтрино – комплексные матрицы 3×3 (если количество стерильных нейтрино – 3).

Зарядовосопряжённые поля определены как раньше,

$$(\nu_{eL})^c = C\bar{\nu}_{eL}^T \quad , \quad (\nu_{SR})^c = C\bar{\nu}_{SR}^T$$

$$C = -i\gamma^2\gamma^0 = \begin{pmatrix} \varepsilon & 0 \\ 0 & -\varepsilon \end{pmatrix} \quad , \quad \varepsilon = i\sigma^2 .$$

Лагранжиан взаимодействия нейтрино имеет вид:

$$\mathcal{L}_D^{C.C.} = \frac{g}{\sqrt{2}} \sum_e \left\{ \bar{\nu}_{eL}\gamma^\rho l_L W_\rho^+ + \bar{l}_L\gamma^\rho \nu_{eL} W_\rho^- \right\}$$

$$l_L = \frac{1}{2}(1-\gamma^5)l \quad , \quad l = e, \mu, \tau$$

$$\nu_{eL} = \frac{1}{2}(1-\gamma^5)\nu_e \quad , \quad \nu_e = \nu_e, \nu_\mu, \nu_\tau$$

В вейлевском пределе (пределе нулевой массы) в слабом взаимодействии участвуют только решения ур-я Дирака с $u^-(p)$ и $v^+(p)$, поскольку

$$u^-(p) \sim \begin{pmatrix} \frac{m}{2E}\chi^- \\ \chi^- \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 \\ \chi^- \end{pmatrix} ,$$

$$v^+(p) \sim \begin{pmatrix} -\frac{m}{2E}\chi^- \\ \chi^- \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 \\ \chi^- \end{pmatrix}$$

$u^-(p)$ описывает нейтрино с отрицательной спиральностью. ~~(в дираковском подходе) или~~

$v^+(p)$ описывает антинейтрино (в дираковском подходе) или нейтрино с положительной спиральностью (в майорановском подходе).

В случае нестационарности ν_e (т.е., в случае отсутствия у них определённой массы) лагранжиан взаимодействия видоизменяется

$$\mathcal{L}_D^{c.c.} = \frac{g}{\sqrt{2}} \sum_e \sum_{k=1}^{3} \left\{ U_{ek}^* \bar{\nu}_{ke} \gamma^\rho e_L W_\rho^+ + \right.$$

$$\left. + \bar{e}_L \gamma^\rho U_{ek} \nu_{ke} W_\rho^- \right\}$$

Здесь использовано соотношение

$$\nu_e = \sum_{k=1}^{3} U_{ek} \nu_e .$$

U - "матрица смешивания нейтрино".

Это соотношение будет обосновано ниже, при рассмотрении вопроса об осцилляциях нейтрино.

Индекс "D" у $\mathcal{L}_D^{c.c.}$ можно опустить если мы работаем в вейлевском пределе и не рассматриваем процессов, идущих во втором порядке по слабому взаимодействию. В этом случае дираковский и майорановский подходы не различаются. (Мы пока не рассматриваем процессы типа двойного β-распада).

Уравнение Вейля – решение в виде плоской волны

$\sigma_\mu \partial^\mu \eta(x) = 0$, $\eta(x) = e^{-ikx}\begin{pmatrix}\eta_1\\ \eta_2\end{pmatrix}$, k – 4-импульс,

$kx = k^0x^0 - \vec{k}\vec{x}$

Для спинора $\begin{pmatrix}\eta_1\\ \eta_2\end{pmatrix}$ имеем:

$$\left(\sigma_0 k^0 + \vec{\sigma}\vec{k}\right)\begin{pmatrix}\eta_1\\ \eta_2\end{pmatrix} = 0$$

, т.е. систему уравнений для η_1, η_2 ,

$$\begin{pmatrix} k^0+k^3 & -(k^1-ik^2) \\ -(k^1+ik^2 & k^0-k^3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix}\eta_1\\ \eta_2\end{pmatrix} = 0.$$

Детерминант 2×2-матрицы в скобках должен быть равен 0,

т.е.

$$(k^0)^2 - (k^3)^2 - (k^2)^2 - (k^1)^2 = (k^0)^2 - \vec{k}^2 = k^2 = 0.$$

Отсюда следует, что частица безмассова.

Вводим вектор $\vec{n} = \dfrac{k}{k^0} = \dfrac{\vec{k}}{|\vec{k}|}$, тогда имеем

$$\left(\sigma_0 + \vec{\sigma}\vec{n}\right)\begin{pmatrix}\eta_1\\ \eta_2\end{pmatrix} = 0$$

Пусть $\vec{n}$ направлено вдоль оси z , т.е. $\vec{n} = \vec{n}_z = (0,0,1)$.

Тогда

$$\left[\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix}\eta_1\\ \eta_2\end{pmatrix} = 0 \ ; \begin{pmatrix}2&0\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\eta_1\\ \eta_2\end{pmatrix} = 0,$$

т.е.

$$\begin{pmatrix}\eta_1\\ \eta_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}$$

В общем случае $\vec{n} = (\sin\theta\cos\varphi, \sin\theta\sin\varphi, \cos\theta)$.

Этот вектор можно получить вращением $\vec{n}_z$ сначала вокруг оси y на угол θ, затем вокруг оси z на угол φ, т.е.

$$\vec{n} = R_z(\varphi) R_y(\theta) \vec{n}_z$$

Соответственно, спинор $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, соответствующий $\vec{n}_z$, нужно подвергнуть тому же вращению, т.е.

$$\begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix} = e^{-i\frac{\sigma_z}{2}\varphi} e^{-i\frac{\sigma_y}{2}\theta} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Мы используем здесь генераторы вращений группы Лоренца, полученные ранее.

Экспоненты разлагаем в ряд:

$$e^{-i\frac{\sigma_y}{2}\theta} = 1 - i\sigma_y \frac{\theta}{2} - \frac{1}{2!}\sigma_y^2\left(\frac{\theta}{2}\right)^2 + i\frac{1}{3!}\sigma_y^3\left(\frac{\theta}{2}\right)^3 + \ldots =$$

$$= \cos\frac{\theta}{2} - i\sin\frac{\theta}{2}\cdot\sigma_y ,$$

$$e^{-i\frac{\sigma_z}{2}\varphi} = \cos\frac{\varphi}{2} - i\sin\frac{\varphi}{2}\sigma_z .$$

Используя эти формулы, получаем, окончательно,

$$\begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\frac{\varphi}{2} - i\sin\frac{\varphi}{2} & 0 \\ 0 & \cos\frac{\varphi}{2} + i\sin\frac{\varphi}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2} & -\sin\frac{\theta}{2} \\ \sin\frac{\theta}{2} & \cos\frac{\theta}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} e^{-\frac{i\varphi}{2}} & 0 \\ 0 & e^{\frac{i\varphi}{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\sin\frac{\theta}{2} \\ \cos\frac{\theta}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -e^{-\frac{i\varphi}{2}} \sin\frac{\theta}{2} \\ e^{\frac{i\varphi}{2}} \cos\frac{\theta}{2} \end{pmatrix} \equiv \chi^-$$

Аналогично можно показать, что, для правого уравнения Вейля, соответствующий спинор, χ^+, имеет вид

$$\chi^+ = \begin{pmatrix} e^{-\frac{i\varphi}{2}} \cos\frac{\theta}{2} \\ e^{\frac{i\varphi}{2}} \sin\frac{\theta}{2} \end{pmatrix}$$

Легко проверяется, что

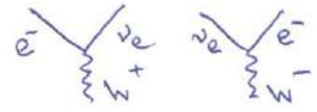
$$\vec{\sigma}\vec{n}\,\chi^+ = \chi^+ , \quad \vec{\sigma}\vec{n}\,\chi^- = -\chi^- , \quad \vec{n} = \frac{\vec{k}}{|\vec{k}|}.$$

Фурье-разложение для $\eta(x)$ (масса частицы равна нулю!):

$$\eta(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2E} \left\{ \sqrt{2E}\, a_-(p)\, \chi^- e^{-ipx} + \sqrt{2E}\, a_+^*(p)\, \chi^- e^{ipx} \right\}.$$

Мы видим, что в разложении фигурирует только один спинор, χ^-, поскольку решение ур-я Вейля только одно. При квантовании, однако, возникнет и квантовое состояние с положительной спиральностью, т.е. квантовых состояний два (в дираковском случае это нейтрино и антинейтрино).

Нарушение C и P симметрий в Лагранжиане слабого взаимодействия



$$\mathcal{L}_{c.c.} = -\frac{g}{2\sqrt{2}}\left\{\left[\bar{\nu}_e\gamma^\mu(1-\gamma_5)e\right]W^+_\mu + \left[\bar{e}\gamma^\mu(1-\gamma_5)\nu_e\right]W^-_\mu\right\} \equiv$$

$$\equiv -\frac{g}{2\sqrt{2}}\left\{\left(V^\mu_{\nu_e e} - A^\mu_{\nu_e e}\right)W^+_\mu + \left(V^\mu_{e\nu_e} - A^\mu_{e\nu_e}\right)W^-_\mu\right\}.$$

Здесь использованы обозначения

$$\psi_{\nu_e} = \nu_e\,, \quad \psi_e = e\,,$$

и, для краткости,

$$\bar{\nu}_e\gamma^\mu e \equiv V_{\nu_e e}\,, \quad \bar{\nu}_e\gamma^\mu\gamma_5 e \equiv A_{\nu_e e}$$

Рассмотрим, сначала, C-преобразование Лагранжиана.

$$\psi(x) \xrightarrow{C} \psi^C(x) = C\bar{\psi}^T(x)$$

$$\bar{\psi}(x) \to -\psi^T C^+$$

$$\mathcal{L}_{c.c.} \xrightarrow[C]{} -\frac{g}{2\sqrt{2}}\left\{\left(V^\mu_{e\nu_e} + A^\mu_{e\nu_e}\right)W^-_\mu + \left(V^\mu_{\nu_e e} + A^\mu_{\nu_e e}\right)W^+_\mu\right\}$$

Здесь использованы формулы

$$C(\gamma_\mu\gamma_5)^T C^{-1} = \underline{\underline{+\gamma_\mu\gamma_5}}\ ; \quad C\gamma_\mu^T C^{-1} = \underline{\underline{-\gamma_\mu}}$$

В случае P-преобразования имеем

$$\psi(x) \xrightarrow[P]{} \psi^P(x_p) = \gamma^0 \psi(x)$$

$$\bar{\psi}(x) \xrightarrow[P]{} \overline{\psi}^P(x_p) = \bar{\psi}(x)\gamma^0$$

$$\mathcal{L}_{c.c.} \xrightarrow[P]{} = -\frac{g}{2\sqrt{2}}\left\{\left(V_\mu^{\nu_e e} + A_\mu^{\nu_e e}\right)W^{+\mu} + \left(V_\mu^{e\nu_e} + A_\mu^{e\nu_e}\right)W^{-\mu}\right\}$$

Использованы формулы:

$$\gamma^0\gamma^\mu\gamma^0 = \underline{\underline{\gamma_\mu}} \quad ; \quad \gamma^0\gamma^\mu\gamma_5\gamma^0 = \underline{\underline{-}}\gamma_\mu\gamma_5$$

$$\gamma_\mu = g_{\mu\nu}\gamma^\nu .$$

Нарушение C-инвариантности означает, что в распадах

$$\pi^- \to \mu^- + \tilde{\nu}_e$$

$$\pi^+ \to \mu^+ + \nu_e$$

угловые корреляции между лептонами различны.

Нарушение P-инвариантности означает наличие P-нечётных корреляций. Например, при распадах ориентированных (поляризованных) ядер электроны вылетают в направлении, коррелирующем с направлением спина ядра.

Осцилляции в квантовой механике (двухуровневые системы)

Ур-е Шредингера

$$i\hbar \frac{d}{dt}|\psi(t)\rangle = (H_0 + W)|\psi(t)\rangle$$

W – возмущение

$H_0|\varphi_1\rangle = E_1|\varphi_1\rangle$
$H_0|\varphi_2\rangle = E_2|\varphi_2\rangle$ пространство состояний двумерно

$H|\psi_+\rangle = E_+|\psi_+\rangle$
$H|\psi_-\rangle = E_-|\psi_-\rangle$ стационарные состояния

Произвольное решение ур-я Шредингера может быть разложено по базису $(|\varphi_1\rangle, |\varphi_2\rangle)$ нестационарных состояний

$$|\psi(t)\rangle = a_1(t)|\varphi_1\rangle + a_2(t)|\varphi_2\rangle$$

$$a_1(t) = \langle\varphi_1|\psi(t)\rangle, \quad a_2(t) = \langle\varphi_2|\psi(t)\rangle$$

Для коэффициентов разложения получаем:

$$\begin{cases} i\hbar \frac{d}{dt} a_1(t) = (E_1 + W_{11})a_1(t) + W_{12}a_2(t) \\ i\hbar \frac{d}{dt} a_2(t) = W_{21}a_1(t) + (E_2 + W_{22})a_2(t) \end{cases}$$

Эту систему уравнений можно записать в матричном виде:

$$i\hbar \frac{d}{dt}\begin{pmatrix} a_1(t) \\ a_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_1 + W_{11} & W_{12} \\ W_{21} & E_2 + W_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1(t) \\ a_2(t) \end{pmatrix}$$

$W_{ij} = \langle\varphi_i|W|\varphi_j\rangle$ – матрица возмущений.

В дальнейшем положим (для простоты)

$$W_{11} = W_{22} = 0\ ;\quad W_{12} = W_{21} \equiv V\ .$$ V-действительно.

Решение $|\psi(t)\rangle$ можно разложить и по базису $|\psi_\pm\rangle$:

$$|\psi(t)\rangle = b_2(t)|\psi_+\rangle + b_1(t)|\psi_-\rangle\ ,$$

$$i\hbar \frac{d}{dt}\begin{pmatrix} b_1(t) \\ b_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_- & 0 \\ 0 & E_+ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_1(t) \\ b_2(t) \end{pmatrix}$$

Очевидно, что $\quad b_{1,2}(t) \sim e^{-E_\mp t}$.

Для нахождения $E_\pm$ и связи между базисами $|\varphi_{1,2}\rangle$ и $|\psi_\pm\rangle$ нужно диагонализировать матрицу

$$\begin{pmatrix} E_1 & V \\ V & E_2 \end{pmatrix}.$$

Для диагонализации вводим унитарную матрицу U:

$$\begin{pmatrix} E_- & 0 \\ 0 & E_+ \end{pmatrix} = U^+ \begin{pmatrix} E_1 & V \\ V & E_2 \end{pmatrix} U^*,$$ Более точно, U - ортогональная матрица, $U = U^*$.

$$U = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}, \quad UU^+ = 1.$$

Угол смешивания θ и собственные значения $E_\pm$ находятся из соотношений

$$\operatorname{tg} 2\theta = \frac{2V}{E_2 - E_1}\ , \quad E^\pm = \frac{E_1 + E_2}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{E_1 - E_2}{2}\right)^2 + V^2}\ .$$

[Согласно известной теореме алгебры, диагонализация реальной симметричной 2x2 матрицы осуществляется с помощью ортогональной матрицы 2x2. Такая матрица, как известно, имеет только один параметр, т.е. можно записать

$$U = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

Исходная матрица:

$$\begin{pmatrix} E_1 & V \\ V & E_2 \end{pmatrix},$$

Собственные значения находятся из решения характеристического уравнения

$$\mathrm{Det}\begin{pmatrix} E_1 - E & V \\ V & E_2 - E \end{pmatrix} = 0,$$

т.е.

$$(E_1 - E)(E_2 - E) = V^2,$$

$$E^{\pm} = \frac{E_1 + E_2}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{E_1 - E_2}{2}\right)^2 + V^2}.$$

Параметр θ находится из соотношения

$$\begin{pmatrix} E_- & 0 \\ 0 & E_+ \end{pmatrix} = U^T \begin{pmatrix} E_1 & V \\ V & E_2 \end{pmatrix} U,$$

например, из

$$\left\{ U^T \begin{pmatrix} E_1 & V \\ V & E_2 \end{pmatrix} U \right\}_{12} = 0$$

легко получаем: $\mathrm{tg}\, 2\theta = 2V/(E_2 - E_1)$.]

Связь базисов:

$$\begin{pmatrix} |\varphi_1\rangle \\ |\varphi_2\rangle \end{pmatrix} = U \begin{pmatrix} |\psi_-\rangle \\ |\psi_+\rangle \end{pmatrix},$$

$$\begin{cases} |\varphi_1\rangle = \cos\theta\,|\psi_-\rangle + \sin\theta\,|\psi_+\rangle \\ |\varphi_2\rangle = -\sin\theta\,|\psi_-\rangle + \cos\theta\,|\psi_+\rangle \end{cases} \qquad (**)$$

Предположим, что в начальный момент времени, $t=0$, имеет место соотношение

$$|\psi(t=0)\rangle = |\varphi_1\rangle$$

Обозначим волновую функцию с таким начальным условием через $|\psi_1(t)\rangle$.

Выразим теперь φ_1 через базис $|\psi_\pm\rangle$:

$$|\psi_1(0)\rangle = \cos\theta\,|\psi_-\rangle + \sin\theta\,|\psi_+\rangle .$$

Очевидно, что временная эволюция $|\psi_1(t)\rangle$ имеет вид:

$$(***) \qquad |\psi_1(t)\rangle = \cos\theta\, e^{-iE_-t}|\psi_-\rangle + \sin\theta\, e^{-iE_+t}|\psi_+\rangle$$

Действительно, это есть разложение по базису стационарных состояний, записанное выше в виде

$$|\psi(t)\rangle = b_1(t)|\psi_-\rangle + b_2(t)|\psi_+\rangle ,$$

причём, в данном случае,

$$b_1(t) = \cos\theta\, e^{-iE_-t} \; ; \; b_2(t) = \sin\theta\, e^{-iE_+t} .$$

Мы хотим определить, какова вероятность того, что в произвольный момент времени t система "перейдет в состояние $|\varphi_2\rangle$".
Вероятность перехода есть квадрат модуля амплитуды $\langle\varphi_2|\psi_1(t)\rangle$

$$\mathcal{P}_{12}(t) = \left|\langle\varphi_2|\psi_1(t)\rangle\right|^2 .$$

Для нахождения амплитуды $\langle\varphi_2|\psi_1(t)\rangle$ воспользуемся опять связью базисов:

$$\langle\varphi_2|\psi_1(t)\rangle = \cos\theta\, e^{-iE_-t}\langle\varphi_2|\psi_-\rangle + \sin\theta\, e^{-iE_+t}\langle\varphi_2|\psi_+\rangle .$$

Из (**) находим

$$\begin{cases} |\psi_-\rangle = \cos\theta|\varphi_1\rangle - \sin\theta|\varphi_2\rangle \\ |\psi_+\rangle = \sin\theta\,|\varphi_1\rangle + \cos\theta\,|\varphi_2\rangle . \end{cases}$$

Отсюда
$$\langle\varphi_2|\psi_-\rangle = -\sin\theta , \quad \langle\varphi_2|\psi_+\rangle = \cos\theta .$$

Окончательно получаем

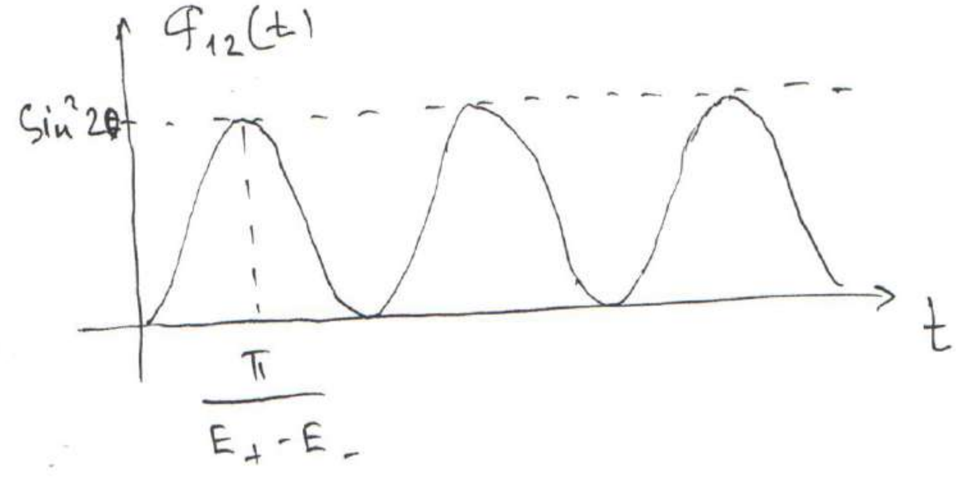
$$\langle\varphi_2|\psi_1(t)\rangle = \cos\theta\sin\theta\left(e^{-iE_+t} - e^{-iE_-t}\right),$$

$$\mathcal{P}_{12}(t) = \frac{1}{2}\sin^2 2\theta\left[1-\cos(E_+-E_-)t\right] =$$

$$= \sin^2 2\theta\,\sin^2\left(\frac{E_+-E_-}{2}\cdot t\right), \qquad \text{ф-ла Раби}$$

$$\sin^2 2\theta = \frac{4V^2}{4V^2+(E_2-E_1)^2}$$

Вероятность перехода осциллирует во времени



Частота осцилляций, $\frac{E_+ - E_-}{\hbar}$, и максимальное значение вероятности перехода, $\sin^2 2\theta$, являются функциями параметров матричного гамильтониана, V и $E_2 - E_1$.

Переобозначения (на будущее):

$|\varphi_1\rangle, |\varphi_2\rangle \to |\varphi_\alpha\rangle$ ← или $|\varphi_\ell\rangle, \ell = e,\mu,\tau$

$|\psi_-\rangle, |\psi_+\rangle \to |\psi_i\rangle$, $i = 1,2$ ← или $|\psi_k\rangle$

Ниже: $|\varphi_\alpha\rangle \to |\nu_\alpha\rangle$, $|\psi_i\rangle \to |\nu_i\rangle$.

$$\begin{pmatrix} |\varphi_1\rangle \\ |\varphi_2\rangle \end{pmatrix} = U \begin{pmatrix} |\psi_-\rangle \\ |\psi_+\rangle \end{pmatrix} \to |\varphi_\alpha\rangle = \sum_i U_{\alpha i} |\psi_i\rangle .$$

Ненулевая вероятность перехода означает, что в разложении $|\psi_\alpha(t)\rangle$, введённом выше,

$$|\psi_\alpha(t)\rangle = a_\alpha(t)|\varphi_\alpha\rangle + a_\beta(t)|\varphi_\beta\rangle ,$$

$$a_\alpha(0) = 1, \; a_\beta(0) = 0 ,$$

в момент t имеется ненулевое значение $a_\beta(t)$; $\mathcal{P}_{\alpha\beta} = |a_\beta(t)|^2$.

[Пример двух-уровневой системы в квантовой механике — — спин в магнитном поле.

Уравнение Паули — обобщение уравнения Шредингера на случай, когда частица находится в магнитном поле (1927 г.)

$$\left[\frac{1}{2m}\left(\vec{\sigma}(\vec{p}-q\vec{A})\right)^2+q\Phi\right]|\psi\rangle = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}|\psi\rangle \quad , \vec{p}=-i\hbar\vec{\nabla}.$$

q — заряд частицы ; $\vec{A}, \Phi$ — электромагнитные потенциалы.

Гамильтониан — матрица (недиагональная, в общем случае), волновая функция — двух-компонентный столбец,

$$|\psi\rangle \to \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$$

$(\vec{\sigma}\vec{a})(\vec{\sigma}\vec{b}) = \vec{a}\vec{b} + i\vec{\sigma}(\vec{a}\times\vec{b})$ — тождество. Отсюда — $(\vec{\sigma}\vec{p})^2 = \vec{p}^{\,2}$.

$$\left[(\vec{p}-q\vec{A})\times(\vec{p}-q\vec{A})\right]\psi = iq\hbar\vec{B}\psi \quad , \quad \vec{B} = \vec{\nabla}\times\vec{A} \, ,$$

Мы интересуемся только спиновой степенью свободы частицы, поэтому уравнение Паули очень сильно упрощается,

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}|\psi\rangle = \mu_B\vec{\sigma}\vec{B}|\psi\rangle$$

$\frac{e\hbar}{2m} = \mu_B$ — магнетон Бора,

$$\vec{\sigma}\vec{B} = \begin{pmatrix} B_z & B_x - iB_y \\ B_x + iB_y & -B_z \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} B_z & B_x \\ B_x & -B_z \end{pmatrix}$$

Если $B_x = 0$, то гамильтониан диагонален, и имеется два стационарных уровня — "спин вверх" и "спин вниз".

Введем обозначения,

$$\omega_0 = \frac{\mu_B}{\hbar}B_z \quad , \quad \omega_1 = \frac{\mu_B}{\hbar}B_x .$$

В этих обозначениях гамильтониан записывается в виде

$$H = \hbar \begin{pmatrix} \omega_0 & \omega_1 \\ \omega_1 & -\omega_0 \end{pmatrix}$$

$$|\psi(t)\rangle = a_1(t)|\uparrow\rangle + a_2(t)|\downarrow\rangle$$

Начальное условие:

$$a_2(0) = 1, \quad a_1(0) = 0 \quad \text{"Спин вниз"}.$$

Если $B_x \neq 0$, то возникает ненулевая вероятность того, что в момент времени $t \neq 0$ при измерении спинового состояния частицы обнаружится, что спин направлен вверх ("перескок спина").

Вероятность перескока:

$$P_\uparrow = |a_2(t)|^2 = \frac{\omega_1^2}{\omega_1^2 + \omega_0^2} \sin^2\left(\sqrt{\omega_1^2 + \omega_0^2}\, t\right)$$

В наших обозначениях:

$$\hbar\omega_0 \to E_1, \quad -\hbar\omega_0 \to E_2, \quad \hbar\omega_1 \to V$$

$$H = \begin{pmatrix} E_1 & V \\ V & E_2 \end{pmatrix}$$

Энергии стационарных состояний:

$$E_\pm = \pm\hbar\sqrt{\omega_1^2 + \omega_0^2},$$

$$P_\uparrow = \frac{V^2}{V^2 + \left(\frac{E_1 - E_2}{2}\right)^2} \cdot \sin^2\left(\frac{E_+ - E_-}{2} t\right),$$

$$\sin^2 2\theta = \frac{V^2}{V^2 + \left(\frac{E_1 - E_2}{2}\right)^2} \quad]$$

Диагонализация массового члена лагранжиана (дираковские нейтрино)

$$\mathcal{L}_m^D = -\sum_{s,l} \bar{\nu}_{sR} M^D_{sl} \nu_{lL} + h.c. \qquad \begin{array}{l} l = e, \mu, \tau \\ s = s_1, s_2, s_3 \to e, \mu, \tau \end{array}$$

M^D - комплексная (в общем случае, когда CP не сохраняется) 3x3 матрица. Существенно то, что она недиагональна. Именно поэтому возникает необходимость диагонализации.

Теорема. Для любой комплексной (или реальной) матрицы M существуют такие унитарные матрицы V и U, что

$$M^D = V \hat{m} U^+ \,, \quad \hat{m} \text{ - диагональная матрица},$$

причём $\hat{m}_{kj} = m_k \delta_{kj}$, $m_k \geqslant 0$ (реальны и положительны)

После диагонализации имеем:

$$\mathcal{L}_m^D = -\sum_{k=1}^{3} m_k \bar{\nu}_k \nu_k \,, \quad \nu_k = \nu_{kL} + \nu_{kR}.$$

Новые поля ν_k соответствуют частицам с определённой массой. Эти поля связаны с исходными полями Лагранжиана соотношениями

$$\nu_{lL} = \sum_{k=1}^{3} U_{lk} \nu_{kL} \,, \quad \nu_{sR} = \sum_{k=1}^{3} V_{sk} \nu_{kR}$$

Новые поля, ν_{kL}, вводятся в Лагранжиан слабого взаимодействия:

$$\mathcal{L}_D^{int} = \frac{g}{\sqrt{2}} \sum_l \sum_{k=1}^{3} \left\{ \underline{U^*_{lk} \bar{\nu}_{kL}} \gamma^\rho l_L W^+_\rho + \bar{l}_L \gamma^\rho \underline{U_{lk} \nu_{kL}} W^-_\rho \right\}$$

U_{lk}, V_{sk} – "матрицы смешивания".

Соответственно тому, что появляются новые поля, с определённой массой, вводятся нейтринные состояния с определённой массой:

$|\nu_e\rangle, |\nu_\mu\rangle$ – состояния с определённым флэйвором;

$|\nu_1\rangle, |\nu_2\rangle$ – состояния с определённой массой.

Также как в квантовой механике, имеем 2 базиса – флэйворный базис и базис состояний с определённой массой. Так же как в кв. механике, базисы связаны матрицей, в данном случае матрицей смешивания.

Смешивание нейтринных состояний

Для полей имеем $\nu_\alpha = \sum_{k=1}^{3} U_{\alpha k} \nu_k$.

Покажем, что для состояний связь базисов имеет вид:

$$|\nu_\alpha\rangle = \sum_{k=1}^{3} U^*_{\alpha k} |\nu_k\rangle .$$

$|f\rangle = S|i\rangle$ S – матрица рассеяния в квантовой теории.

3

$|f\rangle = \sum_{k=1}^{n} A_k |f_k\rangle$ — разложение по ортогональным состояниям с определённой массой.

$$A_k = \langle f_k | f\rangle = \langle f_k | S | i\rangle.$$

В нашем случае

$$Z_i \to Z_f + \ell_\alpha^+ + \nu_\alpha$$

$$\nearrow |i\rangle \qquad \nearrow \langle f|$$

$$|\nu_\alpha, \ell_\alpha^+, Z_f\rangle = \frac{1}{N_\alpha} \cdot \sum_{k=1}^{3} A_{\alpha k} |\nu_k, \ell_\alpha^+, Z_f\rangle, \qquad (*)$$

$$A_{\alpha k} = \langle \nu_k, \ell_\alpha^+, Z_f | f\rangle = \langle \nu_k, \ell_\alpha^+, Z_f | S | i\rangle$$

$$S = 1 - i\int d^4x\, \mathcal{H}_I^{CC}(x)$$

$$\mathcal{H}_I^{CC}(x) = \frac{G_F}{\sqrt{2}} \sum_{\alpha = e,\mu,\tau} \bar\nu_\alpha(x)\gamma^\rho(1-\gamma_5)\ell_\alpha(x) J_\rho^{Z_i \to Z_f}(x) + \text{h.c.} =$$

$$= \frac{G}{\sqrt{2}} \sum_{\alpha = e,\mu,\tau} \sum_{k=1}^{3} U_{\alpha k}^* \bar\nu_k(x)\gamma^\rho(1-\gamma_5)\ell_\alpha(x) J_\rho^{Z_i \to Z_f} + \text{h.c.}$$

$$A_{\alpha k} \equiv U_{\alpha k}^* \mathcal{M}_{\alpha k},$$

$$\mathcal{M}_{\alpha k} = -i\frac{G}{\sqrt{2}} \int d^4x \langle \nu_k, \ell_\alpha^+, Z_f | \bar\nu_k(x)\gamma^\rho(1-\gamma_5)\ell_\alpha J_\rho(x) | i\rangle.$$

Нормировочный множитель в $(*)$ равен

$$N_\alpha = \sqrt{\sum_{k=1}^{3} |A_{\alpha k}|^2}.$$

Запишем уравнение (*) в виде

$$|Z_f, \ell_\alpha^+\rangle|\nu_\alpha\rangle = |Z_f, \ell_\alpha^+\rangle\left(\sum_{k=1}^{3}|A_{\alpha k}|^2\right)^{-1/2}\cdot\sum_{k=1}^{3}A_{\alpha k}|\nu_k\rangle,$$

вводя, тем самым, состояние нейтрино с определённым флэйвором α,

$$|\nu_\alpha\rangle = \left(\sum_{k=1}^{3}|A_{\alpha k}|^2\right)^{-1/2}\sum_{k=1}^{3}A_{\alpha k}|\nu_k\rangle.$$

Подставляя выражение $A_{\alpha k}$ через $\mathcal{M}_{\alpha k}$, получаем

$$|\nu_\alpha\rangle = \sum_{k=1}^{3}\frac{\mathcal{M}_{\alpha k}}{\sqrt{\sum_{j=1}^{3}|U_{\alpha j}|^2|\mathcal{M}_{\alpha j}|^2}}\,U_{\alpha k}^*|\nu_k\rangle.$$

Если $\mathcal{M}_{\alpha k}$ не зависит от k, то получаем, окончательно,

$$|\nu_\alpha\rangle = \sum_{k=1}^{3}U_{\alpha k}^*|\nu_k\rangle,$$

поскольку $\mathcal{M}_{\alpha k} = \mathcal{M}_{\alpha j}$ и $\sum_{j=1}^{3}|U_{\alpha j}|^2 = 1$, вследствие унитарности матрицы U.

Таким образом, нейтринные состояния с определённым флэйвором связаны с нейтринными состояниями с определённой массой посредством той же матрицы U, которая связывает поля ν_α и ν_k,

$$\nu_\alpha = \sum_{k=1}^{3}U_{\alpha k}\nu_k\ ; \quad |\nu_\alpha\rangle = \sum_{k=1}^{3}U_{\alpha k}^*|\nu_k\rangle$$

Осцилляции в формализме плоских волн

Как было показано в нашем примере из квантовой механики если волновая функция $|\psi(t)\rangle$ в момент $t=0$ равна $|\psi_\alpha\rangle$, то её значение в момент t равно $(|\psi_i\rangle \to |\nu_i\rangle)$

$$|\psi(t)\rangle \equiv |\psi_\alpha(t)\rangle = \sum_i U^*_{\alpha i} e^{-iE_i t} |\nu_i\rangle$$

(см ***). Здесь α - флэйворный индекс. $|\psi_\alpha\rangle \to |\nu_\alpha\rangle$

Вероятность того, что в момент t система будет в состоянии $|\nu_\beta\rangle$, равна

$$\langle\nu_\beta|\psi_\alpha(t)\rangle = \sum_k \langle k| U_{\beta k} \sum_i U^*_{\alpha i} e^{-iE_i t} |\nu_i\rangle =$$

$$= \sum_i U_{\beta i} U^*_{\alpha i} e^{-iE_i t}.$$

Энергии всех стационарных состояний вычисляем по формуле

$$E_i = \sqrt{p^2 + m_i^2} \approx p + \frac{m_i^2}{2E} \quad ; \quad E \cong p.$$

При этом импульс у всех состояний считаем одним и тем же.

Вероятность перехода

$$P_{\nu_\alpha \to \nu_\beta} = \left|\sum_i U_{\beta i} U^*_{\alpha i} e^{-iE_i t}\right|^2 =$$

$$= \left|\sum_i U_{\beta i} U^*_{\alpha i} e^{-i\frac{m_i^2}{2E}t}\right|^2. \qquad t \to L$$

$$P_{\nu_\alpha \to \nu_\beta}(L) = \sum_i |U_{\alpha i}|^2 |U_{\beta i}|^2 + 2\mathrm{Re} \sum_{k>i} U^*_{\alpha k} U_{\beta k} U_{\alpha i} U^*_{\beta i} e^{-i\frac{\Delta m^2_{ki}}{2E}L}.$$

$$\Delta m^2_{ki} = m_k^2 - m_i^2.$$

В квантовой механике эволюция волновой функции во времени описывается уравнением

$$|\psi(t)\rangle = e^{-iHt}|\psi(0)\rangle = e^{-iEt}|\psi(0)\rangle.$$

В кв. теории поля нужно использовать оператор эволюции

$$e^{-iHt + i\hat{\vec{P}}\vec{x}}$$

где $\hat{\vec{P}}$ - генератор трансляций (перемещений в пространстве). Соответственно

$$e^{-iHt+i\hat{\vec{P}}\vec{x}}|\psi(0)\rangle = e^{-iEt+\vec{p}\vec{x}}|\psi(0)\rangle,$$

если используется приближение плоских волн. Отсюда имеем

$$|\psi_\alpha(t,x)\rangle = \sum_i U_{\alpha i}^* e^{-iE_it+p_ix}|\nu_i\rangle. \qquad (*)$$

Попрежнему будем считать, что $t \approx x = L$. При этом имеем в виду, что в реальности движущееся нейтрино описывается волновым пакетом, а не плоской волной, причём центр пакета движется со скоростью близкой к скорости света. Фаза экспоненты в $(*)$ равна

$$\varphi_i = -E_it + p_iL \simeq -(E_i - p_i)L = -\frac{E_i^2 - p_i^2}{E_i+p_i}L = -\frac{m_i^2}{E_i+p_i}L.$$

Попрежнему предполагаем, что $p_i = p \simeq E$, тогда

$$\varphi_i \simeq -\frac{m_i^2}{2E}L,$$

в результате, формула для осцилляций остаётся той же,

$$\mathcal{P}_{\nu_\alpha \to \nu_\beta} = \left|\sum_i U_{\beta i}U_{\alpha i}^* e^{-\frac{im_i^2}{2E}t}\right|^2.$$

Энергия E - это энергия нейтрино в приближении $m_i = 0$. Её можно посчитать, если известна реакция, в которой рождается нейтрино и энергия материнской частицы.

Если энергия E или расстояние L не измеряются, то осцилляционный член усредняется, и только усреднённая вероятность перехода определяется из эксперимента:

$$\mathcal{P}_{\nu_\alpha\to\nu_\beta}(\bar{L}) = \sum_i |U_{\alpha i}|^2 |U_{\beta i}|^2.$$

Здесь $\alpha\neq\beta$ (эксперимент "на появление").

В простейшем случае двух флэйворов (скажем, ν_e и ν_μ) матрица смешивания имеет вид

$$U = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

Формула для вероятности перехода:

$$\mathcal{P}_{\nu_\alpha\to\nu_\beta}(L) = \sin^2 2\theta \sin^2 \frac{\Delta m^2 L}{4E} =$$

$$= \sin^2 2\theta \sin^2\left(1{,}27\ \frac{\frac{\Delta m^2}{eV^2}\cdot L/km}{E/GeV}\right)$$

$\frac{L}{E} \lesssim 1\, eV^{-2}$ - эксперименты с короткой базой

$\frac{L}{E} \lesssim 10^4\text{-}10^5\, eV^{-2}$ - эксперименты с длинной базой.

Вероятность выживания флэйвора:

$$\mathcal{P}_{\nu_e\to\nu_e} = 1 - \sin^2 2\theta \sin^2 \frac{\Delta m^2 L}{4E}.$$

$$L_0 = \frac{4E}{\Delta m^2}\pi \text{ - "период осцилляций"}, \quad \frac{\Delta m^2}{4E} = \frac{\pi}{L_0}.$$

Уравнения эволюции нейтринных состояний

1. Базис стационарных состояний

$$|\psi(t)\rangle = b_1(t)|\nu_1\rangle + b_2(t)|\nu_2\rangle$$

Ур-е Шредингера:

$$i\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} b_1(t) \\ b_2(t) \end{pmatrix} = H\begin{pmatrix} b_1(t) \\ b_2(t) \end{pmatrix}, \quad H = \begin{pmatrix} E_1 & 0 \\ 0 & E_2 \end{pmatrix}$$

Решение

$$\begin{pmatrix} b_1(t) \\ b_2(t) \end{pmatrix} = e^{-i\begin{pmatrix} E_1 & 0 \\ 0 & E_2 \end{pmatrix}t} \begin{pmatrix} b_1(0) \\ b_2(0) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} e^{-iE_1 t} & 0 \\ 0 & e^{-iE_2 t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_1(0) \\ b_2(0) \end{pmatrix}$$

$$b_1(t) = \langle \nu_1|\psi(t)\rangle \; ; \; b_2(t) = \langle \nu_2|\psi(t)\rangle$$

2. Базис флэйворных состояний

$$|\psi(t)\rangle := a_e(t)|\nu_e\rangle + a_\mu(t)|\nu_\mu\rangle$$

$$i\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} a_e(t) \\ a_\mu(t) \end{pmatrix} = H'\begin{pmatrix} a_e(t) \\ a_\mu(t) \end{pmatrix}$$

$$H' = U\begin{pmatrix} E_1 & 0 \\ 0 & E_2 \end{pmatrix}U^T, \quad U = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

$$H' = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_1 & 0 \\ 0 & E_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} E_1\cos^2\theta + E_2\sin^2\theta & (-E_1+E_2)\cos\theta\sin\theta \\ (-E_1+E_2)\sin\theta\cos\theta & E_1\sin^2\theta + E_2\cos^2\theta \end{pmatrix}$$

$$E_1 = p + \frac{m_1^2}{2E}, \quad E_2 = p + \frac{m_2^2}{2E}, \quad E \cong p \quad ; (H')_{diag} = p + \frac{m_1^2 + m_2^2}{4E}.$$

$$(H')_{nondiag} = \frac{\Delta m^2}{4E} \begin{pmatrix} -\cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & \cos 2\theta \end{pmatrix}, \quad \Delta m^2 = m_2^2 - m_1^2$$

Решение ур-я Шредингера:

$$\begin{pmatrix} a_e(t) \\ a_\mu(t) \end{pmatrix} = e^{-i\frac{\Delta m^2}{4E}\begin{pmatrix} -\cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & \cos 2\theta \end{pmatrix} t} \begin{pmatrix} a_e(0) \\ a_\mu(0) \end{pmatrix}$$

$$a_e(t) = \langle \nu_e | \psi(t) \rangle, \quad a_\mu(t) = \langle \nu_\mu | \psi(t) \rangle.$$

Это решение можно записать в виде:

$$\langle \nu_\alpha | \psi(t) \rangle = (U^э)_{\alpha\beta} \langle \nu_\beta | \psi(0) \rangle.$$

здесь $U^э$ - оператор эволюции,

$$U^э = e^{-i(H')_{nondiag} t}.$$

Предположим, что начальное условие таково:

$$\langle \nu_e | \psi(0) \rangle = a_e(0) = 1; \quad \langle \nu_\mu | \psi(0) \rangle = 0.$$

Амплитуда выживания $|\nu_e\rangle$ в момент t:

$$\langle \nu_e | \psi(t) \rangle = U^{\mathcal{F}}_{ee} \langle \nu_e | \psi(0) \rangle + U^{\mathcal{F}}_{e\mu} \langle \nu_\mu | \psi(0) \rangle =$$

$$= U^{\mathcal{F}}_{ee} \langle \nu_e | \psi(0) \rangle = U^{\mathcal{F}}_{ee}$$

Амплитуда перехода $|\nu_e\rangle \to |\nu_\mu\rangle$ в момент t:

$$\langle \nu_\mu | \psi(t) \rangle = U^{\mathcal{F}}_{\mu e} \langle \nu_e | \psi(0) \rangle + U^{\mathcal{F}}_{\mu\mu} \langle \nu_\mu | \psi(0) \rangle =$$

$$= U^{\mathcal{F}}_{\mu e} \langle \nu_e | \psi(0) \rangle = U^{\mathcal{F}}_{\mu e}$$

$$U^{\mathcal{F}}(t) = \exp\left(-i \frac{\Delta m^2}{4E} \begin{bmatrix} -\cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & \cos 2\theta \end{bmatrix} t \right) =$$

$$= \begin{pmatrix} \cos \frac{\Delta m^2}{4E} t + i \sin \frac{\Delta m^2}{4E} t \cdot \cos 2\theta & -i \sin \frac{\Delta m^2}{4E} t \cdot \sin 2\theta \\ -i \sin \frac{\Delta m^2}{4E} t \cdot \sin 2\theta & \cos \frac{\Delta m^2}{4E} t - i \sin \frac{\Delta m^2}{4E} t \cos 2\theta \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} U^{\mathcal{F}}_{ee} & U^{\mathcal{F}}_{e\mu} \\ U^{\mathcal{F}}_{\mu e} & U^{\mathcal{F}}_{\mu\mu} \end{pmatrix}.$$

Вероятность перехода $\nu_e \to \nu_\mu$:

$$\mathcal{P}_{\nu_e \to \nu_\mu} = \left| U^{\mathcal{F}}_{\mu e} \right|^2 = \sin^2 2\theta \sin^2 \frac{\Delta m^2}{4E} t.$$

$$\mathcal{P}_{\nu_e \to \nu_e} = 1 - \mathcal{P}_{\nu_e \to \nu_\mu} = 1 - \sin^2 2\theta \sin^2 \frac{\Delta m^2}{4E} t.$$

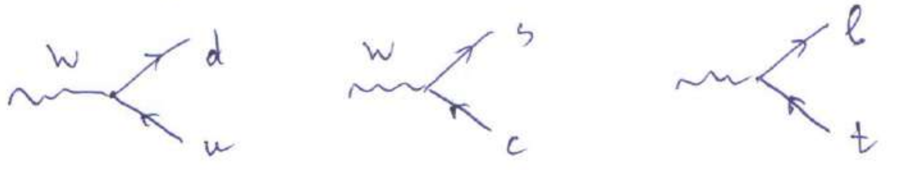
↖ вероятность выживания ν_e.

Нейтрино в Стандартной модели. Смешивание флэйворных состояний и полей. Нарушение CP

$u \; c \; t$ — 6 флэйворов кварков, 3 поколения.
$d \; s \; b$

$\nu_e \; \nu_\mu \; \nu_\tau$ — 6 флэйворов лептонов, 3 поколения.
$e \; \mu \; \tau$

Слабое взаимодействие кварков осуществляется через обмен промежуточными бозонами W. Это взаимодействие, на первый взгляд, связывает только кварковые пары $u \leftrightarrow d$, $c \leftrightarrow s$, $t \leftrightarrow b$.



Но, в реальности, во взаимодействиях с W кварковые поколения смешиваются,

$$d' = V_{ud}\cdot d + V_{us}\cdot s + V_{ub}\cdot b$$

Говорят, что "флэйворные состояния" (т.е. d, s, b) повернуты по отношению к "слабым состояниям" (d', s', b'). "Слабые состояния" входят в лагранжиан взаимодействия кварков.

Поскольку ν участвуют только в слабых взаимодействиях, флэйворные состояния определяются как те состояния, которые взаимодействуют с W (т.е. ν_e, ν_μ, ν_τ).

Оказывается, что флэйворные состояния повёрнуты относительно "массовых состояний", т.е. состояний с определённой массой.

$$\nu_e = U_{e1}\nu_1 + U_{e2}\nu_2 + U_{e3}\nu_3$$

В обеих случаях имеются <u>матрицы смешивания</u>.

$$\begin{pmatrix} d' \\ s' \\ b' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_{ud} & V_{us} & V_{ub} \\ V_{cd} & V_{cs} & V_{cb} \\ V_{td} & V_{ts} & V_{tb} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d \\ s \\ b \end{pmatrix}$$

V - CKM-матрица (матрица Кабиббо - Кобаяши - Маскава)

$$\begin{pmatrix} \nu_e \\ \nu_\mu \\ \nu_\tau \end{pmatrix}_L = \begin{pmatrix} U_{e1} & U_{e2} & U_{e3} \\ U_{\mu 1} & U_{\mu 2} & U_{\mu 3} \\ U_{\tau 1} & U_{\tau 2} & U_{\tau 3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \\ \nu_3 \end{pmatrix}_L$$

U - PMNS-матрица (матрица Понтекорво - Маки - Накагава - Сакаты).

<u>Нейтринные мультиплеты Стандартной модели</u>

$$L_{eL} \equiv \begin{pmatrix} \nu_{eL} \\ e_L \end{pmatrix} \qquad L_{\mu L} \equiv \begin{pmatrix} \nu_{\mu L} \\ \mu_L \end{pmatrix} \qquad L_{\tau L} = \begin{pmatrix} \nu_{\tau L} \\ \tau_L \end{pmatrix}$$

$$e_R \qquad \mu_R \qquad \tau_R$$

$$\nu_{eR} \qquad \nu_{\mu R} \qquad \nu_{\tau R}$$

Частицы, описываемые левыми спинорами, объединяются в калибровочные дублеты, правыми спинорами - в калибровочные синглеты.

Для сравнения, кварковые мультиплеты:

$$Q_{1L} \equiv \begin{pmatrix} u_L \\ d_L \end{pmatrix} \qquad Q_{2L} \equiv \begin{pmatrix} c_L \\ s_L \end{pmatrix} \qquad Q_{3L} = \begin{pmatrix} t_L \\ b_L \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} u_R & & c_R & & t_R \\ d_R & & s_R & & b_R \end{matrix}$$

<u>Взаимодействие лептонов и кварков с хиггсовскими бозонами</u>

Хиггсовский дублет: $\Phi(x) = \begin{pmatrix} \Phi^+(x) \\ \Phi^0(x) \end{pmatrix}$.

Поле Хиггса имеет ненулевое среднее по вакууму и, после спонтанного нарушения симметрии, может быть записано в виде

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ v + H(x) \end{pmatrix}; \quad \langle \Phi \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix}.$$

Взаимодействие с нейтрино описывается лагранжианом

$$\mathcal{L}_{H,L} = -y^{\nu} \overline{L}_L \tilde{\Phi} \nu_R + h.c.$$

y^{ν} - константа связи, $\tilde{\Phi} = i\sigma_2 \Phi^* = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} v + H(x) \\ 0 \end{pmatrix}$

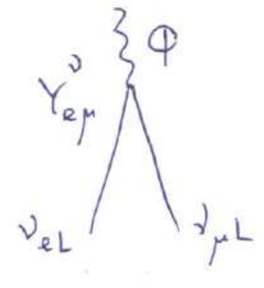
В случае 3-х поколений лептонов:

$$\mathcal{L}_{H,L} = -\sum_{\alpha,\beta = e,\mu,\tau} Y^{\nu}_{\alpha\beta} \overline{L}_{\alpha L} \tilde{\Phi} \nu_{\beta R} + h.c.$$

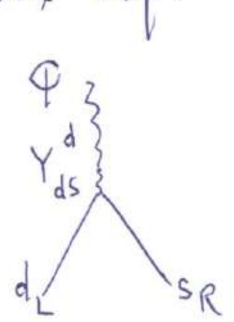
Здесь $Y^{\nu}_{\alpha\beta}$ - матрица констант связи. Окончательно имеем:

$$\mathcal{L}_{H,L} = -\left(\frac{v+H}{\sqrt{2}}\right)\sum_{\alpha,\beta=e,\mu,\tau} Y^{\nu}_{\alpha\beta}\,\bar{\nu}_{\alpha L}\,\nu_{\beta R} + h.c.$$

Видно, что, в результате этого взаимодействия возникает смешивание нейтринных флэйворов



Аналогично, в случае кварков возникает смешивание флэйворов из разных поколений кварковых пар:



Опуская поле $H(x)$, получаем лагранжиан, описывающий массы нейтрино:

$$\mathcal{L}_{H,L} = -\frac{v}{\sqrt{2}}\,\bar{\nu}_L Y^{\nu} \nu_R + h.c. = -\bar{\nu}_L M^{\nu} \nu_R + h.c.$$

$$M^{\nu} = \frac{v}{\sqrt{2}} Y^{\nu}\ ; \qquad \nu_L \equiv \begin{pmatrix} \nu_{eL} \\ \nu_{\mu L} \\ \nu_{\tau L} \end{pmatrix}, \quad \nu_R \equiv \begin{pmatrix} \nu_{eR} \\ \nu_{\mu R} \\ \nu_{\tau R} \end{pmatrix}$$

$$Y^{\nu} = \begin{pmatrix} Y^{\nu}_{ee} & Y^{\nu}_{e\mu} & Y^{\nu}_{e\tau} \\ Y^{\nu}_{\mu e} & Y^{\nu}_{\mu\mu} & Y^{\nu}_{\mu\tau} \\ Y^{\nu}_{\tau e} & Y^{\nu}_{\tau\mu} & Y^{\nu}_{\tau\tau} \end{pmatrix}$$

Массовая матрица недиагональна. Это матрица в "пространстве флэйворов". Диагонализация проводится с помощью биунитарного преобразования.

$$U_L^{+} Y^{\nu} U_R = y_k^{\nu} \delta_{kj} \quad (k, j = 1, 2, 3)$$

$$U_L^{+} \nu_L = \begin{pmatrix} \nu_{1L} \\ \nu_{2L} \\ \nu_{3L} \end{pmatrix}, \quad U_R^{+} \nu_R = \begin{pmatrix} \nu_{1R} \\ \nu_{2R} \\ \nu_{3R} \end{pmatrix}$$

В результате диагонализации имеем:

$$\mathcal{L}_{H,L} = -\frac{v}{\sqrt{2}} \sum_{k=1}^{3} y_k^{\nu} \bar{\nu}_{kL} \nu_{\nu R} + h.c.$$

Вводим 4-х компонентные поля

$$\nu_k = \nu_{kL} + \nu_{kR} \quad (k = 1, 2, 3)$$

и имеем, окончательно, массовый член:

$$\mathcal{L}_{H,L} = -\sum_{k=1}^{3} \frac{y_k^{\nu} v}{\sqrt{2}} \bar{\nu}_k \nu_k = -\sum_{k=1}^{3} m_k \bar{\nu}_k \nu_k$$

Связь лептонов и бозонов Хиггса приводит к появлению масс лептонов.

Переходя к лагранжиану слабого взаимодействия лептонов и трансформируя в нем флэйворные состояния нейтрино в массовые состояния, получим

$$\mathcal{L}_{c.c.} = \frac{g}{\sqrt{2}} \overline{(e\,\mu\,\tau)}_L \gamma^\mu U \begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \\ \nu_3 \end{pmatrix}_L W^-_\mu + h.c. \qquad U \equiv U_L$$

U - PMNS - матрица смешивания

Аналогично, в случае кварков:

$$\mathcal{L}_{c.c.} = \frac{g}{\sqrt{2}} \overline{(u\,c\,t)}_L \gamma^\mu V \begin{pmatrix} d \\ s \\ b \end{pmatrix}_L W^+_\mu + h.c. ,$$

V - CKM - матрица смешивания.

Условия нарушения CP-инвариантности.

Напишем полностью выражение для $\mathcal{L}_{H,L}$ (нейтринную часть):

$$\mathcal{L}_{H,L} = -\sum_{\alpha,\beta} \left(Y^\nu_{\alpha\beta} \bar{L}_{\alpha L} \tilde{\Phi} \nu_{\beta R} + Y^{\nu *}_{\alpha\beta} \bar{\nu}_{\beta R} \tilde{\Phi}^\dagger L_{\alpha L} \right)$$

CP преобразование первого слагаемого дает:

$$CP\left(\bar{L}_{\alpha L} \tilde{\Phi} \nu_{\beta R} \right) = \bar{\nu}_{\beta R} \tilde{\Phi}^\dagger L_{\alpha L}.$$

Отсюда следует, что CP-инвариантность имеет место если

$$Y^\nu_{\alpha\beta} = Y^{\nu *}_{\alpha\beta}.$$

Таким образом, для того чтобы в "лептонном секторе" Стандартной модели была CP-инвариантность, необходимо, чтобы матрица констант связи лептонов с бозонами была действительной (точнее, не матрица а матрицы, поскольку для заряженных лептонов нужно проводить такое же рассмотрение).

Аналогично, если искать условие CP-инвариантности лагранжиана взаимодействия, $\mathcal{L}_{cc}$, то легко убедиться, что это условие сводится к требованию действительности матрицы PMNS,

$$U_{PMNS} = U^{*}_{PMNS}.$$

Поскольку эта матрица диагонализирует матрицу констант связи Y^{ν} (точнее, участвует в диагонализации) то комплексность Y^{ν}-матрицы, скорее всего, приведёт к комплексности U_{PMNS}, т.е. CP-неинвариантность $\mathcal{L}_{H,L}$ приведёт к CP-неинвариантности $\mathcal{L}_{cc}$.

Осцилляции майорановских нейтрино
(случай одного поколения)

Используем наиболее общий майорановский массовый член Лагранжиана:

$$\mathcal{L}_m^{D+M} = \left(-m_D \bar{\nu}_R \nu_L + h.c.\right) +$$
$$+ \left(-\frac{1}{2} m_L \overline{\nu_L^c} \nu_L + h.c.\right) + \left(-\frac{1}{2} m_R \overline{\nu_R^c} \nu_R + h.c.\right).$$

Вводим столбец лево-киральных полей,

$$N_L = \begin{pmatrix} \nu_L \\ (\nu_R)^c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \nu_L \\ C \bar{\nu}_R^T \end{pmatrix}.$$

Лагранжиан записывается в виде

$$\mathcal{L}_m^{D+M} = -\overline{N_L^c} M N_L + h.c.$$

$$M = \begin{pmatrix} m_L & m_D \\ m_D & m_R \end{pmatrix}$$

Диагонализация Лагранжиана:

$$n_L = U^{\dagger} N_L = \begin{pmatrix} \nu_{1L} \\ \nu_{2L} \end{pmatrix}$$

$$U^T M U = \begin{pmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{pmatrix}, \quad m_k \geq 0$$

Здесь используется Теорема: симметричная комплексная матрица может быть диагонализирована с помощью унитарного преобразования.

В результате диагонализации получаем:

$$\mathcal{L}_m^{D+M} = -\frac{1}{2}\sum_{k=1,2} m_k \bar{\nu}_k \nu_k$$

$$\nu_k = \nu_{kL} + \nu_{kL}^c \quad , \text{т.е. } \nu_k = \nu_k^c$$

Имеем два майорановских нейтрино с определёнными массами.

Пусть массовая матрица M вещественна (можно показать, что в этом случае CP сохраняется).

<u>Теорема</u>: вещественная симметричная матрица может быть диагонализирована с помощью ортогонального преобразования

$$O = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix},$$

$$O^T M O = \begin{pmatrix} m_1' & 0 \\ 0 & m_2' \end{pmatrix}, \quad tg 2\theta = \frac{2m_D}{m_R - m_L},$$

$$m_{2,1}' = \frac{1}{2}\left[m_L + m_R \pm \sqrt{(m_L - m_R)^2 + 4m_D^2}\right]$$

Одна из масс (m_1') может принимать отрицательные значения. Перейти к положительным массам можно введением <u>матрицы фаз</u> ρ,

$$\rho = \begin{pmatrix} \rho_1 & 0 \\ 0 & \rho_2 \end{pmatrix}, \quad \rho_k = \pm 1. \quad U = O\rho$$

$$U^T M U = \rho^T O^T M O \rho = \begin{pmatrix} \rho_1^2 m_1' & 0 \\ 0 & \rho_2^2 m_2' \end{pmatrix},$$

$$m_k = \rho_k^2 m_k'.$$

m_2' всегда положительно:

$$m_2 = m_2' = \frac{1}{2}\left[m_L + m_R + \sqrt{(m_L - m_R)^2 + 4m_D^2}\right].$$

1) Если $m_L m_R \geq m_D^2$, то $m_1' \geq 0$ и $\rho_1^2 = 1$

$$m_1 = \frac{1}{2}\left[m_L + m_R - \sqrt{(m_L - m_R)^2 + 4m_D^2}\right]$$

$$\rho_1 = 1 \text{ и } \rho_2 = 1 \to U = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

2) Если $m_L m_R < m_D^2$, то $m_1' < 0$ и $\rho_1^2 = -1$.

$$m_1 = \frac{1}{2}\left[\sqrt{(m_L - m_R)^2 + 4m_D^2} - (m_L + m_R)\right],$$

$$\rho_1 = i \text{ и } \rho_2 = 1 \to U = \begin{pmatrix} i\cos\theta & \sin\theta \\ -i\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

Если $\Delta m^2 = m_2^2 - m_1^2$ мало, тогда имеют место осцилляции между активными нейтрино $\nu_{акт.}$, генерируемыми ν_L, и стерильными нейтрино ν_S, генерируемыми ν_R^C.

Вероятность перехода:

$$P_{\nu_a \to \nu_S}(L, E) = \sin^2 2\theta \sin^2\left(\frac{\Delta m^2 L}{4E}\right),$$

$$\Delta m^2 = m_2^2 - m_1^2 = (m_L + m_R)\sqrt{(m_L - m_R)^2 + 4m_D^2}$$

$$\operatorname{tg} 2\theta = \frac{2m_D}{m_R - m_L}$$

Если $m_D = 0$, то осцилляций нет.

Как показано выше, в пределе нулевых масс имеем:

$$\nu_L(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ \eta(x) \end{pmatrix}, \quad \eta(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2E} \left\{ \left[\sqrt{2E}\, a_-(p) f e^{-ipx} + \sqrt{2E}\, a_+^*(p) f e^{ipx} \right] \right\}$$

т.е. $$\nu_L = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 \sqrt{2E}} \left\{ \underline{a_-(p) \begin{pmatrix} 0 \\ f_- \end{pmatrix} e^{-ipx}} + \underline{a_+^*(p) \begin{pmatrix} 0 \\ f_- \end{pmatrix} e^{ipx}} \right\}$$

Соответственно,

$$\nu_L^c = \begin{pmatrix} \varepsilon \eta^* \\ 0 \end{pmatrix} = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 \sqrt{2E}} \left\{ a_-^*(p) \begin{pmatrix} f^+ \\ 0 \end{pmatrix} e^{ipx} + a_+(p) \begin{pmatrix} f^+ \\ 0 \end{pmatrix} e^{-ipx} \right\}.$$

Аналогично имеем для правокирального нейтрино:

$$\nu_R(x) = \begin{pmatrix} \xi(x) \\ 0 \end{pmatrix} = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 \sqrt{2E}} \left\{ b_+(p) \begin{pmatrix} f^+ \\ 0 \end{pmatrix} e^{-ipx} + b_-^*(p) \begin{pmatrix} f^+ \\ 0 \end{pmatrix} e^{ipx} \right\},$$

$$\nu_R^c = \begin{pmatrix} 0 \\ -\varepsilon \xi^* \end{pmatrix} = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 \sqrt{2E}} \left\{ \underline{b_+^*(p) \begin{pmatrix} 0 \\ f_- \end{pmatrix} e^{ipx}} + \underline{b_-(p) \begin{pmatrix} 0 \\ f_- \end{pmatrix} e^{-ipx}} \right\}.$$

Осцилляции $\nu_L \leftrightarrow \nu_R^c$ возможны благодаря тому, что у подчёркнутых членов одинаковы киральности и спиральности, и тому, что благодаря $m_D \neq 0$, в лагранжиане есть связь правокиральных и левокиральных нейтрино:

$$m_D \left(\bar{\nu}_R \nu_L + \bar{\nu}_R \nu_L \right).$$

В принципе одинаковость киральностей необязательна, т.к. киральность не сохраняется во времени. Но осцилляции со сменой киральности сильно подавлены малостью отношения m_ν / E_ν.

Предел максимального смешивания, $\Theta = 45°$.

$\vartheta = 45$ если $m_L = m_R$. В этом случае

$$m'_{2,1} = m_L \pm m_D$$

$\rho_1^2 = 1$, $m_1 = m_L - m_D$, если $m_L \geqslant m_D$

$\rho_1^2 = -1$, $m_1 = m_D - m_L$, если $m_L < m_D$

$$m_2 = m_L + m_D$$

Если $m_L < m_D$, то

$$\begin{pmatrix} \nu_{1L} \\ \nu_{2L} \end{pmatrix} = U^+ \begin{pmatrix} \nu_L \\ \nu_R^c \end{pmatrix} = (O\rho)^+ \begin{pmatrix} \nu_L \\ \nu_R^c \end{pmatrix} =$$

$$= \left[\begin{pmatrix} \cos\Theta & \sin\Theta \\ -\sin\Theta & \cos\Theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right]^+ \begin{pmatrix} \nu_L \\ \nu_R^c \end{pmatrix}$$

$$\nu_{1L} = -\frac{i}{\sqrt{2}}\left(\nu_L - \nu_R^c\right) \; ; \; \nu_{2L} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\nu_L + \nu_R^c\right)$$

$$\nu_1 = \nu_{1L} + \nu_{1L}^c = -\frac{i}{\sqrt{2}}\left[\left(\nu_L + \nu_R\right) - \left(\nu_L^c + \nu_R^c\right)\right],$$

$$\nu_2 = \nu_{2L} + \nu_{2L}^c = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\left(\nu_L + \nu_R\right) + \left(\nu_L^c + \nu_R^c\right)\right].$$

Дираковский предел

$$m_L = m_R = 0$$

$$m'_{2,1} = \pm m_D \longrightarrow \begin{cases} \rho_1^2 = -1 \; , & m_1 = m_D \\ \rho_2^2 = +1 \; , & m_2 = m_D \end{cases}$$

2 майорановских поля ν_1 и ν_2 могут быть объединены в одно дираковское поле

$$\nu = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(i\nu_1 + \nu_2\right) = \nu_L + \nu_R .$$

Механизм See-Saw

В стандартной модели левокиральный массовый член,

$$-\frac{1}{2} m_L \nu_L^c \nu_L + h.c.,$$

запрещен, т.е. нужно положить $m_L = 0$. Это связано с тем, что такой член калибровочно неинвариантен, если в стандартной модели хиггсовское поле является дублетом. Из произведения трёх дублетов нельзя организовать инвариантную величину.

Если $m_L = 0$, то

$$m_1' = \frac{1}{2}\left[m_R - \sqrt{m_R^2 + 4m_D^2}\right], \quad m_2' = \frac{1}{2}\left[m_R + \sqrt{m_R^2 + 4m_D^2}\right].$$

Допустим, что

$$m_R \gg m_D,$$

тогда

$$m_1' \simeq -\frac{m_D^2}{m_R}, \quad m_2' \simeq m_R.$$

$$\begin{cases} \rho_1^2 = -1 \\ \rho_2^2 = +1 \end{cases} \rightarrow \quad \begin{matrix} m_1 \simeq \frac{m_D^2}{m_R}, \\ m_2 \simeq m_R. \end{matrix} \qquad \begin{matrix} tg 2\Theta = \frac{2m_D}{m_R - m_L} \ll 1, \\ \Theta \ll 1. \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} \nu_{1L} \\ \nu_{2L} \end{pmatrix} = (U_\rho)^+ \begin{pmatrix} \nu_L \\ \nu_R^c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\Theta & -\sin\Theta \\ \sin\Theta & \cos\Theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_L \\ \nu_R^c \end{pmatrix}$$

$$\nu_{1L} = -i\cos\Theta \cdot \nu_L + i\sin\Theta\, \nu_R^c \simeq -i\nu_L$$

$$\nu_{2L} = \sin\Theta\, \nu_L + \cos\Theta\, \nu_R^c \simeq \nu_R^c.$$

Таким образом, поле ν_2 состоит из стерильных полей, ν_R и ν_R^c. Чем больше масса частиц этого поля, m_R, тем меньше масса активного нейтрино ν_1.

Осцилляции майорановских нейтрино
(3 поколения)

Попрежнему используем столбец $N_L = \begin{pmatrix} \nu_L \\ \nu_R^c \end{pmatrix}$, но теперь ν_L и ν_R^c – тоже столбцы

$$\nu_L = \begin{pmatrix} \nu_{eL} \\ \nu_{\mu L} \\ \nu_{\tau L} \end{pmatrix}, \quad \nu_R^c = \begin{pmatrix} \nu_{s_1R}^c \\ \nu_{s_2R}^c \\ \nu_{s_3R}^c \end{pmatrix}.$$

В этом случае массовая матрица нейтрино имеет размерность 6×6,

$$M = \begin{pmatrix} M^L & (M^D)^T \\ M^D & M^R \end{pmatrix}$$

Диагонализация проводится аналогично случаю одного поколения:

$$N_L = V n_L, \qquad V \text{ – унитарная матрица } 6\times 6$$

$$n_L = \begin{pmatrix} \nu_{1L} \\ \vdots \\ \nu_{6L} \end{pmatrix}$$

$$V^T M V = \mathrm{diag}(m_1 \dots m_6)$$

$$\mathcal{L}^{D+M} = -\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{6} m_k \overline{\nu_{kL}^c}\, \nu_{kL} + h.c.$$

Лагранжиан есть сумма 6 членов. Каждый член – майорановское поле

$$\nu_k = \nu_{kL} + \nu_{kL}^c \quad (k = 1, 2 \dots 6)$$

$$\nu_{\alpha L} = \sum_{k=1}^{6} V_{\alpha k}\nu_{kL} \quad (\alpha = e, \mu, \tau); \quad \nu_{sR}^c = \sum_{k=1}^{6} V_{sk}\nu_{kL} \quad (s = s_1, s_2, s_3).$$

Активные и стерильные нейтрино есть линейные комбинации одних и тех же массивных нейтринных полей.

19

Это означает, как и в рассмотренном выше случае одного типа нейтрино, что должны иметь место осцилляции между активными и стерильными нейтрино.

Опять предположим, что $M_L = 0$, в соответствии с калибровочными симметриями Стандартной Модели. Предположим, далее, что собственные значения матрицы M_R много больше собственных значений матрицы M_D, в соответствии с предположением, что майорановский массовый член,

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}\sum_{s,s'} \overline{\nu^c_{sR}} M_R \nu_{s'R} + h.c.,$$

генерируется при очень высоких энергиях. В этом случае можно записать матрицу смешивания V в виде

$$V = WU_1 ,$$

где W и U_1 унитарны, и матрица W используется для приближённой блоковой диагонализации массовой матрицы M. W можно записать в виде экспоненты от антиэрмитовой матрицы,

$$W = \exp\begin{pmatrix} 0 & B \\ -B^+ & 0 \end{pmatrix}.$$

Предполагая, что B "мала", получим, разлагая экспоненту в ряд:

$$W = \begin{pmatrix} 1-\frac{1}{2}BB^+ & B \\ -B^+ & 1-\frac{1}{2}B^+B \end{pmatrix} + O(B^3).$$

Пусть

$$B^* = M_D M_R^{-1},$$

тогда, как легко проверить,

$$W^T M W = \begin{pmatrix} M_{light} & 0 \\ 0 & M_{heavy} \end{pmatrix},$$

$$M_{light} = -M_D M_R^{-1} M_D^T, \quad M_{heavy} = M_R$$

Далее, представим U_1 в виде

$$U_1 = \begin{pmatrix} U & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

где U и 1 - матрицы 3×3, U унитарна. Считаем, для простоты, что матрица M_R диагональна.

Окончательно получаем для V:

$$V^T M V = U_1^T W^T M W U_1 =$$

$$= U_1^T \begin{pmatrix} M_{light} & 0 \\ 0 & M_{heavy} \end{pmatrix} U_1 =$$

$$= \begin{pmatrix} U^T M_{light} U & 0 \\ 0 & M_{heavy} \end{pmatrix},$$

$$U^T M_{light} U = diag(m_1, m_2, m_3),$$

где m_1, m_2, m_3 - три массы, соответствующие трём массовым состояниям лёгких нейтрино. U - матрица смешивания,

$$\nu_{\alpha L} = \sum_{k=1}^{3} U_{\alpha k} \nu_{kL} \quad (\alpha = e, \mu, \tau),$$

$\nu_{1L}, \nu_{2L}, \nu_{3L}$ - левокиральные компоненты трёх лёгких массивных майорановских нейтринных полей.

Если не пренебрегать смешиванием в секторе тяжелых частиц, то

$$V = W U_1 \,, \quad U_1 = \begin{pmatrix} U & 0 \\ 0 & U_N \end{pmatrix}$$

Диагонализация:

$$V^T M V = \begin{pmatrix} U^T M_{eight} U & 0 \\ 0 & U_N^T M_R U_N \end{pmatrix}$$

$$U^T M_{eight} U = \mathrm{diag}(m_1, m_2, m_3)\,; \quad U_N^T M_R U_N = \mathrm{diag}(M_1, M_2, M_3)$$

$$V = W U_1 \cong \begin{pmatrix} 1 & B \\ -B^+ & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U & 0 \\ 0 & U_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U & B U_N \\ -B^+ U & U_N \end{pmatrix}$$

Связь базисов:

$$\begin{pmatrix} \nu_{\alpha L} \\ \nu^c_{sR} \end{pmatrix} = V \begin{pmatrix} \nu_{iL} \\ \nu^c_{iR} \end{pmatrix} \;; \quad \nu_{\alpha L} = \begin{pmatrix} \nu_{eL} \\ \nu_{\mu L} \\ \nu_{\tau L} \end{pmatrix} \,, \quad \alpha = e, \mu, \tau \;;$$

$$\nu^c_{sR} = \begin{pmatrix} \nu^c_{s_1 R} \\ \nu^c_{s_2 R} \\ \nu^c_{s_3 R} \end{pmatrix} , \quad s = s_1, s_2, s_3 \;; \quad \nu_{iL} = \begin{pmatrix} \nu_{1L} \\ \nu_{2L} \\ \nu_{3L} \end{pmatrix} \;; \quad \nu^c_{iR} = \begin{pmatrix} \nu^c_{1R} \\ \nu^c_{2R} \\ \nu^c_{3R} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \nu_{eL} \\ \nu_{\mu L} \\ \nu_{\tau L} \\ \nu^c_{s_1 R} \\ \nu^c_{s_2 R} \\ \nu^c_{s_3 R} \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|c} U & B U_N \\ \hline -B^+ U & U_N \end{array}\right) \begin{pmatrix} \nu_{1L} \\ \nu_{2L} \\ \nu_{3L} \\ \nu^c_{1R} \\ \nu^c_{2R} \\ \nu^c_{3R} \end{pmatrix}$$

Для лёгких нейтрино с определённым флэйвором имеем:

$$\begin{pmatrix} \nu_{eL} \\ \nu_{\mu L} \\ \nu_{\tau L} \end{pmatrix} = U \begin{pmatrix} \nu_{1L} \\ \nu_{2L} \\ \nu_{3L} \end{pmatrix} + B U_N \begin{pmatrix} \nu_{1R}^C \\ \nu_{2R}^C \\ \nu_{3R}^C \end{pmatrix}$$

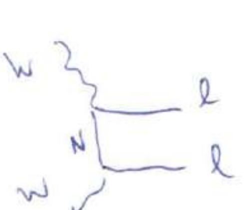
Напомним, что матрица B пропорциональна $M_D M_R^{-1}$, то-есть "мала", поскольку предполагается что $M_i \gg m_i$, а m_i получается диагонализацией $M_{light} = -M_D M_R^{-1} M_D^T$.

В результате, в лагранжиане взаимодействия появляется дополнительное слагаемое,

$$\mathcal{L}_{cc} = \frac{g}{\sqrt{2}} \left[\overline{(e, \mu, \tau)_L} \, \gamma^\mu U \begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \\ \nu_3 \end{pmatrix}_L W_\mu^- + \right.$$

$$\left. + \overline{(e, \mu, \tau)_L} \, \gamma^\mu B U_N \begin{pmatrix} \nu_{1R}^C \\ \nu_{2R}^C \\ \nu_{3R}^C \end{pmatrix} W_\mu^- \right] + h.c.$$

„Стерильность" тяжелых правых нейтрино проявляется в том, что их взаимодействие с W-бозонами сильно подавлено, поскольку пропорционально B. Но оно есть и его надо учитывать при расчёте процессов, идущих с нарушением лептонного числа, например, при расчёте вероятности двойного β-распада (безнейтринного),



N – тяжёлое майорановское нейтрино.

Параметризация матрицы смешивания.

Комплексная 3×3 матрица имеет 18 параметров. Учёт условия унитарности, $UU^+=1$, уменьшает число параметров до 9 – 3 угла смешивания и 6 фаз.

Произвольная унитарная матрица может быть представлена в виде

$$U = e^{i\varphi} P \tilde{U} Q,$$

где $P = \mathrm{diag}\left(1, e^{i\varphi_1}, e^{i\varphi_2} \ldots\right)$, $Q = \mathrm{diag}\left(1, e^{i\alpha}, e^{i\beta} \ldots\right)$ – диагональные фазовые матрицы, с числом фаз $(N-1)$ каждая, $\tilde{U}$ – унитарная матрица, параметризуемая $\frac{1}{2}N(N-1)$ углами и $\frac{1}{2}(N-2)(N-1)$ фазами, т.е. в нашем случае $(N=3)$ – одной фазой и 3 углами.

В случае $N=2$ имеем:

$$U = e^{i\varphi}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\alpha} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\beta} \end{pmatrix}.$$

Внутренняя матрица зависит только от угла смешивания, и не зависит от фаз.

Операторы полей лептонов входят в лагранжиан слабого взаимодействия в выражения для токов J_μ,

$$J_\mu = \bar{\nu}_\alpha \gamma_\mu (1-\gamma_5) l_\alpha .$$

Переходя к состояниям с определённой массой, имеем для тока выражение

$$J_\mu = \bar{\nu}_k U^*_{\alpha k} \gamma_\mu (1-\gamma_5) l_\alpha .$$

Пользуясь тем, что заряженные лептоны — дираковские частицы и, следовательно, их лагранжианы инвариантны относительно фазовых преобразований, проводим эти преобразования:

$$\begin{pmatrix} l_e \\ l_\mu \\ l_\tau \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} e^{i\varphi_e} l_e \\ e^{i\varphi_\mu} l_\mu \\ e^{i\varphi_\tau} l_\tau \end{pmatrix} = e^{i\varphi_e} \begin{pmatrix} l_e \\ e^{i(\varphi_\mu - \varphi_e)} l_\mu \\ e^{i(\varphi_\tau - \varphi_e)} l_\tau \end{pmatrix} =$$

$$= e^{i\varphi_e} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & e^{i(\varphi_\mu - \varphi_e)} & 0 \\ 0 & 0 & e^{i(\varphi_\tau - \varphi_e)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_e \\ l_\mu \\ l_\tau \end{pmatrix}$$

Предположим, вначале, что нейтрино — дираковские частицы. Тогда можно аналогично записать:

$$\begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \\ \nu_3 \end{pmatrix} \to e^{i\varphi_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & e^{i(\varphi_2 - \varphi_1)} & 0 \\ 0 & 0 & e^{i(\varphi_3 - \varphi_1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \\ \nu_3 \end{pmatrix}$$

Для тока получаем выражение:

$$e^{i(\varphi_e - \varphi_1)} \overline{\begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \\ \nu_3 \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-i(\varphi_2 - \varphi_1)} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-i(\varphi_3 - \varphi_1)} \end{pmatrix} U^*_{\alpha k} \gamma_\mu (1 - \gamma_5) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & e^{i(\varphi_\mu - \varphi_e)} & 0 \\ 0 & 0 & e^{i(\varphi_\tau - \varphi_e)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_e \\ l_\mu \\ l_\tau \end{pmatrix}$$

Представляя $U^+_{\alpha k}$ в виде матрицы U предыдущей страницы, можно избавиться от фаз $(\varphi_2 - \varphi_1)$, $(\varphi_3 - \varphi_1)$, $(\varphi_\mu - \varphi_e)$, $(\varphi_\tau - \varphi_e)$. В результате получим:

$$e^{i(\varphi_e - \varphi_1 + \Phi)} \overline{\begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \\ \nu_3 \end{pmatrix}} \tilde{U} \gamma_\mu (1 - \gamma_5) \begin{pmatrix} l_e \\ l_\mu \\ l_\tau \end{pmatrix}$$

Внутри $\tilde{U}$ — одна фаза и 3 угла.

12

В случае, когда нейтрино майорановские, нет "фазовой свободы". Соответственно, матрица U будет содержать дополнительные 2 фазы ("майорановские фазы").

Общий вид матрицы смешивания:

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c_{23} & s_{23} \\ 0 & -s_{23} & c_{23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{13} & 0 & s_{13}e^{-i\delta} \\ 0 & 1 & 0 \\ -s_{13}e^{i\delta} & 0 & c_{13} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{12} & s_{12} & 0 \\ -s_{12} & c_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & e^{i\lambda_1} & 0 \\ 0 & 0 & e^{i\lambda_2} \end{pmatrix}.$$

$c_{ij} \equiv \cos\theta_{ij}$; $s_{ij} \equiv \sin\theta_{ij}$;

δ - "дираковская фаза", $\lambda_{1,2}$ - "майорановские фазы".

$$U = \begin{pmatrix} U_{e1} & U_{e2} & U_{e3} \\ U_{\mu 1} & U_{\mu 2} & U_{\mu 3} \\ U_{\tau 1} & U_{\tau 2} & U_{\tau 3} \end{pmatrix}. \qquad \nu_\alpha = \sum_i U_{\alpha i} \nu_i .$$

Вероятность перехода в процессе осцилляций:

$$P_{\nu_\alpha \to \nu_\beta} = \left| \sum_i U_{\beta i} U^*_{\alpha i} e^{-iE_i t} \right|^2 .$$

При квадрировании возникают экспоненциальные множители

$$e^{-i \frac{\Delta m^2_{ki}}{2E} L} , \quad \Delta m^2_{ki} = m_k^2 - m_i^2 .$$

Общепринятые обозначения:

$\Delta_a \equiv \frac{\Delta m_a^2 L}{4E}$; $\Delta_s \equiv \frac{\Delta m_s^2 L}{4E}$; $\Delta m_a^2 = m_3^2 - m_1^2$; $\Delta m_s^2 = m_2^2 - m_1^2$;

$\theta_{12} \equiv \theta_s$; $\theta_{13} \equiv \theta_x$; $\theta_{23} \equiv \theta_a$. a - "atmospheric"
s - "solar"

Пример точного выражения для вероятности перехода:

$$\mathcal{P}_{\nu_e\to\nu_e} = 1-\sin^2 2\theta_x\cdot\sin^2\Delta_a-\left(c_x^4\sin^2 2\theta_s+s_s^2\sin^2 2\theta_x\right)\sin^2\Delta_s+$$
$$+s_s^2\sin^2 2\theta_x\left(\frac{1}{2}\sin 2\Delta_s\sin 2\Delta_a+2\sin^2\Delta_a\sin^2\Delta_s\right)$$

Здесь $c_x\equiv\cos\theta_x$, $s_s\equiv\sin\theta_s$, как и в выражении для U.

Известно из экспериментов, что угол $\theta_{13}=\theta_x$ относительно мал. Если его положить равным нулю, в первом приближении, то осцилляции нейтрино естественного происхождения разбиваются на осцилляции солнечных и осцилляции атмосферных нейтрино. При этом, в потоке нейтрино от Солнца происходят переходы $\nu_e\leftrightarrow\nu_\mu$, а в пучках атмосферных нейтрино - $\nu_\mu\leftrightarrow\nu_\tau$.

Приближенные формулы для вероятностей переходов $(\theta_x=0)$:

$$\left.\begin{aligned}\mathcal{P}_{\nu_e\to\nu_e}&\cong 1-\sin^2 2\theta_s\sin^2\Delta_s\\ \mathcal{P}_{\nu_e\to\nu_\mu}&\cong C_a^2\sin^2 2\theta_s\sin^2\Delta_s\end{aligned}\right\}$$

Если положить $C_a=1$, то эти формулы совпадают с выведенными выше для случая двух флэйворов.

$$\left.\begin{aligned}\mathcal{P}_{\nu_\mu\to\nu_\tau}&\cong\sin^2 2\theta_a\sin^2\Delta_a\\ \mathcal{P}_{\nu_\mu\to\nu_\mu}&\cong 1-\sin^2 2\theta_a\sin^2\Delta_a\end{aligned}\right\}$$

То же, что в случае двух флэйворов.

Эксперименты показали, что $\Delta_a\gg\Delta_s$. Поэтому, изучая осцилляции <u>атмосферных нейтрино</u>, можно, отбрасывая члены с Δ_s измерять малый угол θ_x:

$$\mathcal{P}_{\nu_e\to\nu_e}\simeq 1-\sin^2 2\theta_x\sin^2\Delta_a.$$

Если же изучаются осцилляции солнечных нейтрино, то, поскольку $|\Delta_a| \gg 1$, то члены с Δ_a усредняются. Поэтому, имеем, например,

$$\mathcal{P}_{\nu_e \to \nu_e} \simeq 1 - \frac{1}{2}\sin^2 2\theta_x - c_x^4 \sin^2 2\theta_s \sin^2 \Delta_s ,$$

$$\sin^2 \Delta_a \to \frac{1}{2}.$$

Непосредственная демонстрация существования осцилляций — эксперимент KamLAND (2008) – $\mathcal{P}_{\nu_e - \nu_e} \simeq f(L/E)$.

$$\Delta_s \sim \frac{L}{E}, \quad \mathcal{P}_{\nu_e \to \nu_e} = f(L/E).$$

Четко показано, что максимумы и минимумы функции $\mathcal{P}\left(\frac{L}{E}\right)$ соответствуют значениям Δ_s, равным π, $\frac{3}{2}\pi$, 2π, как и должно быть.

В этом же эксперименте найдены значения параметров:

$$\Delta m^2_{12} = 7.66 \cdot 10^{-5}\ eV^2, \quad tg^2\theta_{12} = 0.52$$

Если дираковская фаза δ отлична от нуля, то матрица смешивания комплексна, в общем случае. Можно показать, что, если $\sin\delta \neq 0$, то имеет место CP-нарушение в слабых взаимодействиях, и оно проявляется в осцилляциях нейтрино. Майорановские фазы, в отличие от дираковской, вклад в осцилляции не дают, они проявляются в процессах типа двойного β-распада.

Для дальнейшего удобно переписать формулу для вероятности перехода в виде:

$$\mathcal{P}_{\nu_\alpha \to \nu_\beta}(L,E) = \delta_{\alpha\beta} - 4\sum_{k>j} Re\left[U^*_{\alpha k} U_{\beta k} U_{\alpha j} U^*_{\beta j}\right] \cdot \sin^2\left(\frac{\Delta m^2_{kj} L}{4E}\right) +$$

$$+ 2\sum_{k>j} Im\left[U^*_{\alpha k} U_{\beta k} U_{\alpha j} U^*_{\beta j}\right] \cdot \sin\left(\frac{\Delta m^2_{kj} L}{4E}\right).$$

Выше была получена формула для вероятности перехода:

$$\mathcal{P}_{\nu_\alpha\to\nu_\beta}(L,E) = \sum_{k,j} U^*_{\alpha k} U_{\beta k} U_{\alpha j} U^*_{\beta j} \exp\left[-i\frac{\Delta m^2_{kj} L}{2E}\right] = \qquad (*)$$

$$= \sum_k |U_{\alpha k}|^2 |U_{\beta k}|^2 + 2\mathrm{Re}\sum_{k>j} U^*_{\alpha k} U_{\beta k} U_{\alpha j} U^*_{\beta j} \exp\left[-2\pi i \frac{L}{L^{kj}_{osc}}\right],$$

где введена новая величина - осцилляционная длина L_{osc},

$$L^{osc}_{kj} \doteq \frac{4\pi E}{\Delta m^2_{kj}}$$

Из унитарности матрицы смешивания, $UU^+ = 1$, следует соотношение

$$\sum_k U_{\alpha k} U^*_{\beta k} = \delta_{\alpha\beta}, \qquad (**)$$

откуда, в частности, следует, что, как и должно быть,

$$\mathcal{P}_{\nu_\alpha\to\nu_\beta}(L=0,E) = \delta_{\alpha\beta}.$$

Из соотношения $(**)$ следует, как легко проверить, что

$$\sum_k |U_{\alpha k}|^2 |U_{\beta k}|^2 = \delta_{\alpha\beta} - 2\sum_{k>j} \mathrm{Re}\left[U^*_{\alpha k} U_{\beta k} U_{\alpha j} U_{\beta j}\right]$$

Пользуясь этим, формула $(*)$ переписывается в виде

$$\mathcal{P}_{\nu_\alpha\to\nu_\beta}(L,E) = \delta_{\alpha\beta} - 2\sum_{k>j} \mathrm{Re}\left[U^*_{\alpha k} U_{\beta k} U_{\alpha j} U^*_{\beta j}\right]\left[1-\cos\left(\frac{\Delta m^2_{kj} L}{2E}\right)\right] +$$

$$+2\sum_{k>j} \mathrm{Im}\left[U_{\alpha k}^{*} U_{\beta k} U_{\alpha j} U_{\beta j}^{*}\right] \sin\left(\frac{\Delta m_{kj}^{2} L}{2E}\right) =$$

$$= \delta_{\alpha\beta} - 4\sum_{k>j} \mathrm{Re}\left[U_{\alpha k}^{*} U_{\beta k} U_{\alpha j} U_{\beta j}^{*}\right] \sin^{2} \frac{\Delta m_{kj}^{2} L}{4E} +$$

$$+2\sum_{k>j} \mathrm{Im}\left[U_{\alpha k}^{*} U_{\beta k} U_{\alpha j} U_{\beta j}^{*}\right] \sin \frac{\Delta m_{kj}^{2} L}{2E} .$$

Для вероятности выживания в формулу входит произведение

$$U_{\alpha k}^{*} U_{\alpha k} U_{\alpha j} U_{\alpha j}^{*} ,$$

которое реально. Поэтому имеем

$$\mathcal{P}_{\nu_\alpha \to \nu_\alpha}(L, E) = 1 - 4\sum_{k>j} |U_{\alpha k}|^{2} |U_{\alpha j}|^{2} \sin^{2} \frac{\Delta m_{kj}^{2} L}{4E} .$$

Вероятности перехода и выживания зависят от отношения $\frac{L}{E}$. Экспериментально невозможно обеспечить точную фиксацию этой величины. Поэтому необходимо производить усреднение формул для вероятностей $\mathcal{P}_{\nu_\alpha \to \nu_\beta}$ по некоторому распределению $f_{exp}\left(\frac{L}{E}\right)$. Усреднённая вероятность равна

$$\left\langle \mathcal{P}_{\nu_\alpha \to \nu_\beta}(L, E) \right\rangle = \frac{1}{2} \sin^{2} 2\theta \left[1 - \left\langle \cos \frac{\Delta m^{2} L}{2E} \right\rangle \right] ,$$

$$\left\langle \cos \frac{\Delta m^{2} L}{2E} \right\rangle = \int \cos \frac{\Delta m^{2} L}{2E} f_{exp}\left(\frac{L}{E}\right) d\left(\frac{L}{E}\right) .$$

$$f_{exp}\left(\frac{L}{E}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_{L/E}^2}} \exp\left[\frac{\left(\frac{L}{E} - \left\langle\frac{L}{E}\right\rangle\right)^2}{2\sigma_{L/E}^2}\right],$$

$$\sigma_{L/E} = \text{const}\left\langle\frac{L}{E}\right\rangle$$

Гауссово распределение (пример)

Первый максимум кривой зависимости $\langle P\rangle$ от $\left\langle\frac{L}{E}\right\rangle$ – в районе

$$\left\langle\frac{L}{E}\right\rangle \Delta m^2 \sim 1$$

(см. рисунок).

В то же время $\frac{L^{osc}}{E}\Delta m^2 = 4\pi$.

Таким образом, периодическая структура кривой вероятности перехода видна при $\frac{L}{E} < \frac{L^{osc}}{E}$, т.е. $L < L^{osc}$.

$$L^{osc}_{kj} = \frac{4\pi E}{\Delta m^2_{kj}} = 2{,}47 \cdot \frac{E\,[\text{GeV}]}{\Delta m^2\,[\text{eV}^2]}\ \text{km}$$

Известный пример, когда периодическая структура видна – эксперимент KamLAND.

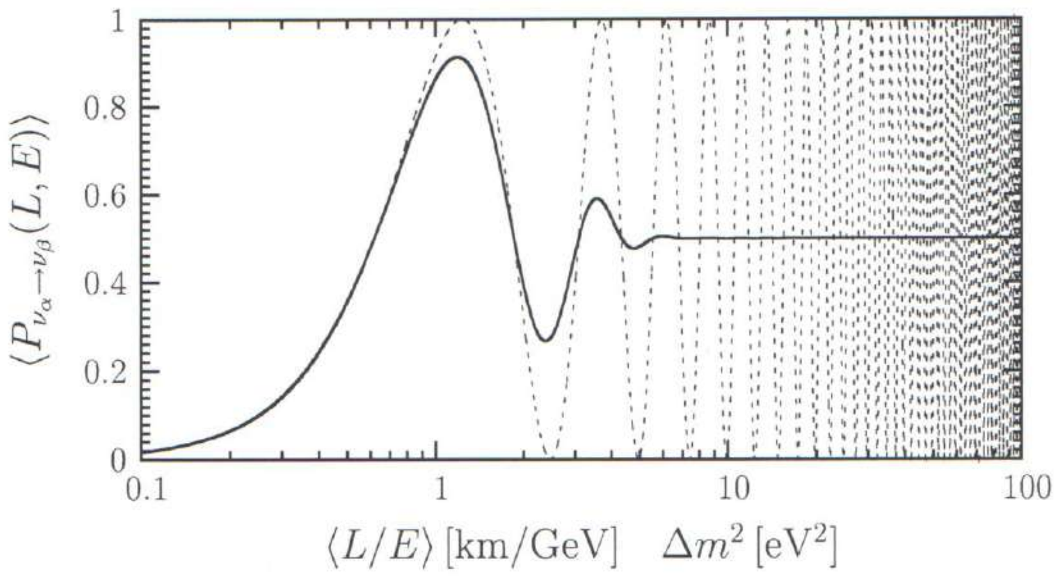


FIG. 7.2. Probability of $\nu_\alpha \to \nu_\beta$ transitions for $\sin^2 2\vartheta = 1$ as a function of $\langle L/E\rangle$ [km/GeV] Δm^2 [eV^2]. The average ratio $\langle L/E\rangle$ can also be expressed in units [m/MeV]. Solid line: transition probability averaged over a Gaussian L/E distribution with $\sigma_{L/E} = 0.2\,\langle L/E\rangle$ (see eqn (7.93)). Dashed line: unaveraged transition probability (see eqn (7.70)), with $L/E = \langle L/E\rangle$.

and comparing it with the expected one. Since, even in the absence of oscillations, the number of detected events has statistical fluctuations, it is very difficult to reveal a small disappearance. Therefore, in this type of experiment, it is hard to measure small values of the mixing angle.

In the simplest case of two-neutrino mixing, an important characteristic of neutrino oscillations is that the transitions to different flavors cannot be measured if

$$\frac{\Delta m^2 L}{2E} \ll 1\,. \tag{7.77}$$

On the other hand, for

$$\frac{\Delta m^2 L}{2E} \gg 1 \tag{7.78}$$

only the average transition probability in eqn (7.73) is observable, yielding information only on $\sin^2 2\vartheta$.

Since the value of Δm^2 is fixed by nature, different experiments can be designed in order to be sensitive to different values of Δm^2, by choosing appropriate values of the ratio L/E. The so-called *sensitivity* to Δm^2 of an experiment is the value of Δm^2 for which

$$\frac{\Delta m^2 L}{2E} \sim 1\,. \tag{7.79}$$

Different types of neutrino oscillation experiments are traditionally classified depending on the average value of the ratio L/E for an experiment, which determines its sensitivity to Δm^2 through eqn (7.79) (see Table 7.1):

S. Abe et al, Phys. Rev. Lett. 100. 221803 (2008)

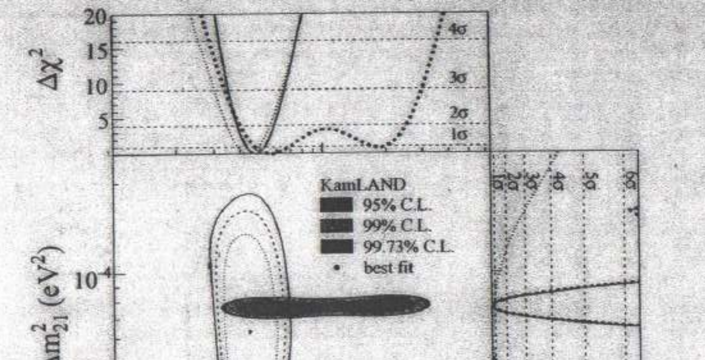


FIG. 2: Allowed region for neutrino oscillation parameters from KamLAND and solar neutrino experiments. The side-panels show the $\Delta\chi^2$-profiles for KamLAND (dashed) and solar experiments (dotted) individually, as well as the combination of the two (solid).

rameters using the KamLAND and solar data. There is a strong anti-correlation between the U and Th-decay chain geo-neutrinos and an unconstrained fit of the individual contributions does not give meaningful results. Fixing the Th/U

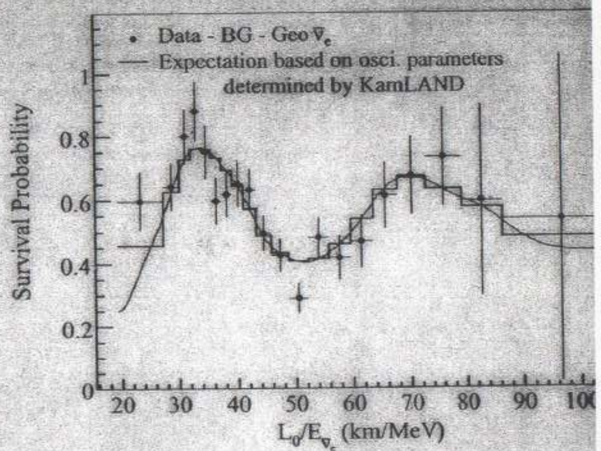


FIG. 3: Ratio of the background and geo-neutrino-subtract spectrum to the expectation for no-oscillation as a funct L_0/E. L_0 is the effective baseline taken as a flux-weighted age (L_0 = 180 km). The energy bins are equal probability bins best-fit including all backgrounds (see Fig. 1). The histogra curve show the expectation accounting for the distances to th vidual reactors, time-dependent flux variations and efficiencie error bars are statistical only and do not include, for example, lated systematic uncertainties in the energy scale.

$$P_{\nu_e \to \nu_e} \simeq 1 - \sin^2 2\theta_s \cdot \sin^2 \Delta_s$$

* Present address: Center of Quantum Universe, Okayam

www.nu-fit.org

NuFIT 3.2 (2018)

	Normal Ordering (best fit)		Inverted Ordering ($\Delta\chi^2 = 4.14$)		Any Ordering
	bfp $\pm 1\sigma$	3σ range	bfp $\pm 1\sigma$	3σ range	3σ range
$\sin^2\theta_{12}$	$0.307^{+0.013}_{-0.012}$	$0.272 \to 0.346$	$0.307^{+0.013}_{-0.012}$	$0.272 \to 0.346$	$0.272 \to 0.346$
$\theta_{12}/^\circ$	$33.62^{+0.78}_{-0.76}$	$31.42 \to 36.05$	$33.62^{+0.78}_{-0.76}$	$31.43 \to 36.06$	$31.42 \to 36.05$
$\sin^2\theta_{23}$	$0.538^{+0.033}_{-0.069}$	$0.418 \to 0.613$	$0.554^{+0.023}_{-0.033}$	$0.435 \to 0.616$	$0.418 \to 0.613$
$\theta_{23}/^\circ$	$47.2^{+1.9}_{-3.9}$	$40.3 \to 51.5$	$48.1^{+1.4}_{-1.9}$	$41.3 \to 51.7$	$40.3 \to 51.5$
$\sin^2\theta_{13}$	$0.02206^{+0.00075}_{-0.00075}$	$0.01981 \to 0.02436$	$0.02227^{+0.00074}_{-0.00074}$	$0.02006 \to 0.02452$	$0.01981 \to 0.02436$
$\theta_{13}/^\circ$	$8.54^{+0.15}_{-0.15}$	$8.09 \to 8.98$	$8.58^{+0.14}_{-0.14}$	$8.14 \to 9.01$	$8.09 \to 8.98$
$\delta_{CP}/^\circ$	234^{+43}_{-31}	$144 \to 374$	278^{+26}_{-29}	$192 \to 354$	$144 \to 374$
$\frac{\Delta m^2_{21}}{10^{-5}\ \mathrm{eV}^2}$	$7.40^{+0.21}_{-0.20}$	$6.80 \to 8.02$	$7.40^{+0.21}_{-0.20}$	$6.80 \to 8.02$	$6.80 \to 8.02$
$\frac{\Delta m^2_{3\ell}}{10^{-3}\ \mathrm{eV}^2}$	$+2.494^{+0.033}_{-0.031}$	$+2.399 \to +2.593$	$-2.465^{+0.032}_{-0.031}$	$-2.562 \to -2.369$	$\begin{bmatrix} +2.399 \to +2.593 \\ -2.536 \to -2.395 \end{bmatrix}$

Параметризация матрицы смешивания

U - унитарная матрица 3×3. 9 параметров

Почему некоторые параметры называются углами, а некоторые - фазами? В нашем случае 3 угла и 6 фаз.

Случай 2×2

Если нет комплексности, то унитарная матрица ортогональна

$$O=\begin{pmatrix} p & t \\ q & u \end{pmatrix} \quad \text{условия ортогональности:} \begin{cases} p^2+k^2=1 \\ q^2+u^2=1 \\ pq+tu=0 \end{cases}$$

Положим $\begin{cases} p=\cos\Theta, & t=-q \\ q=-\sin\Theta, & u=p \end{cases}$

Тогда $O=\begin{pmatrix} \cos\Theta & \sin\Theta \\ -\sin\Theta & \cos\Theta \end{pmatrix}$ $\Theta \equiv$ угол поворота или, в нашем случае, угол смешивания.

В общем случае унитарная матрица комплексна

$$U=\begin{pmatrix} a & b \\ -e^{i\varphi}b^* & e^{i\varphi}a^* \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} |a|^2+|b|^2=1 \\ \det U = e^{i\varphi} \end{matrix} \leftarrow \text{условие унитарности}$$

$$U=e^{i\varphi/2}\begin{pmatrix} e^{i\psi} & 0 \\ 0 & e^{-i\psi} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\Theta & \sin\Theta \\ -\sin\Theta & \cos\Theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{i\Delta} & 0 \\ 0 & e^{-i\Delta} \end{pmatrix}$$

4 параметра - 3 фазы и 1 угол.

В общем случае 3×3 комплексной матрицы будем искать экономную параметризацию с помощью введения генераторов и экспоненцирования (аналогично тому как это делалось в случае матрицы преобразования Лоренца)

$$\Lambda = e^{-\frac{i}{2}\omega_{\alpha\beta}M^{\alpha\beta}}$$

$M^{\alpha\beta}$ — матрица генераторов

$\omega_{\alpha\beta}$ — матрица параметров преобразования

Матрица генераторов A^{ab} $a,b=1,2,3$ — 9 генераторов

$$[A^{ab}]_{rs} = \delta_{ar}\delta_{bs}$$

$$A^{11} = \begin{pmatrix} 1&0&0 \\ 0&0&0 \\ 0&0&0 \end{pmatrix}, \quad A^{12} = \begin{pmatrix} 0&1&0 \\ 0&0&0 \\ 0&0&0 \end{pmatrix}, \quad A^{21} = \begin{pmatrix} 0&0&0 \\ 1&0&0 \\ 0&0&0 \end{pmatrix} \text{ и т.д.}$$

В случае преобразования Лоренца:

$$\left(M^{\alpha\beta}\right)^{\mu}_{\ \nu} = i\left(g^{\alpha\mu}\delta^{\beta}_{\nu} - g^{\beta\mu}\delta^{\alpha}_{\nu}\right)$$

Вводим унитарные матрицы (экспоненцирование)

$$W^{ab}(\theta_{ab}, \eta_{ab}) = W^{ab}(\zeta_{ab}) =$$

$$= \exp\left(\zeta_{ab}A^{ab} - \zeta^{*}_{ab}A^{ba}\right), \quad a \neq b. \quad (\ldots) \text{ - антиэрмитова матрица.}$$

Обозначения наших параметров: θ_{ab} - углы, η_{ab} - фазы,

$$\zeta_{ab} \equiv \theta_{ab} e^{i\eta_{ab}} \qquad \underline{\underline{a \neq b}}!$$

В случае преобразования Лоренца имеем, аналогично,

$$\Lambda_{\text{вращ.}} = e^{-i\varphi_k J^k}, \quad J^k = \frac{1}{2}\varepsilon^{ijk}M^{ij}.$$

Например, $J^3 = \frac{1}{2}\left(M^{12} - M^{21}\right)$.

В "диагональном" случае, когда $a=b$, генераторы A^{ab} дают, после экспоненцирования, диагональные унитарные матрицы,

$$e^{i\omega_1 A^{11}}, \quad e^{i\omega_2 A^{22}}, \quad e^{i\omega_3 A^{33}},$$

ω_i - тоже фазы, как и η_{ab}.

Экспоненты W^{ab} нужно понимать как разложения в ряд:

$$W^{ab}(\Theta_{ab}, \eta_{ab}) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k)!}\left(\zeta_{ab} A^{ab} - \zeta^*_{ab} A^{ba}\right)^{2k} +$$

$$+ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)!}\left(\zeta_{ab} A^{ab} - \zeta^*_{ab} A^{ba}\right)^{2k+1}$$

Можно показать, что

$$\left(\zeta_{ab} A^{ab} - \zeta^*_{ab} A^{ba}\right)^{2k} \sim (-1)^k \Theta_{ab}^{2k},$$

$$\left(\zeta_{ab} A^{ab} - \zeta^*_{ab} A^{ba}\right)^{2k+1} \sim (-1)^k \Theta_{ab}^{2k+1}$$

В результате, можно свернуть ряды по степеням в косинусы и синусы. Например, для W^{12} получаем, окончательно,

$$W^{12}(\Theta_{12}, \eta_{12}) = \begin{pmatrix} \cos\Theta_{12} & \sin\Theta_{12} e^{i\eta_{12}} & 0 \\ -\sin\Theta_{12} e^{-i\eta_{12}} & \cos\Theta_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Это "комплексное вращение" в 12-плоскости, при $\eta_{12} = 0$ это "реальное вращение".

Произвольная унитарная 3×3-матрица есть произведение

$$U = D(\omega)\left[\prod_{a<b} W^{ab}(\Theta_{ab}, \eta_{ab})\right] \quad ; \; a, b = 1,2,3$$

$$D(\omega) = \mathrm{diag}\left(e^{i\omega_1}, e^{i\omega_2}, e^{i\omega_3}\right) =$$

$$= \exp\left(i \sum_{a=1}^{3} \omega_a A^{aa}\right)$$

Введём, далее, вспомогательные фазы $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ и запишем

$$U = D(\omega-\varphi)\left[\prod_{a<b} D(\varphi) W^{ab}(\theta_{ab}, \eta_{ab}) D^{+}(\varphi)\right] D(\varphi) \quad *$$

$$D(\varphi) = \exp\left(i \sum_{a=1}^{3} \varphi_a A^{aa}\right), \quad DD^{+} = 1.$$

В квадратных скобках в (*) стоит выражение

$$[\ldots] = D W^{23} D^{+} D W^{13} D^{+} D W^{12} D^{+}$$

Далее используем тождество

$$D(\varphi) W^{ab}(\theta_{ab}, \eta_{ab}) D^{+}(\varphi) = W^{ab}(\theta_{ab}, \eta_{ab} + \varphi_a - \varphi_b)$$

В результате получаем

$$U = D(\omega-\varphi)\left[\prod_{a<b} W^{ab}(\theta_{ab}, \eta_{ab} + \varphi_a - \varphi_b)\right] D(\varphi). \quad (**)$$

Подбираем произвольные фазы φ_a так, чтобы фазы в W^{12} и W^{23} стали равными нулю, т.е. полагаем

$$\eta_{12} + \varphi_1 - \varphi_2 = 0, \quad \eta_{23} + \varphi_2 - \varphi_3 = 0$$

Убрать таким же образом фазу в W^{13} не удаётся, поскольку теперь имеем

$$\varphi_1 - \varphi_3 = -\eta_{12} - \eta_{23}.$$

Таким образом, в W^{13} имеем "неубираемую" фазу

$$\eta_{13} + \varphi_1 - \varphi_3 = \eta_{13} - \eta_{12} - \eta_{23} \equiv -\delta$$

После этих манипуляций имеем, в выражении (**),

$$W^{12}(\Theta_{12}, 0) = R^{12}, \quad W^{23}(\Theta_{23}, 0) = R^{23}$$

и, следовательно,

$$U = D(\omega - \varphi) R^{23} W^{13} R^{12} D(\varphi)$$

Можно положить фазу φ_2 равной нулю, тогда имеем

$$\varphi_1 = -\eta_{12}, \quad \varphi_3 = \eta_{23}$$

$D(\omega - \varphi)$ и $D(\varphi)$ – фазовые множители:

$$D(\varphi) = \mathrm{diag}\left(e^{-i\eta_{12}}, 1, e^{i\eta_{23}}\right),$$
$$D(\omega - \varphi) = \mathrm{diag}\left(e^{i(\omega_1 + \eta_{12})}, e^{i\omega_2}, e^{i(\omega_3 - \eta_{23})}\right).$$

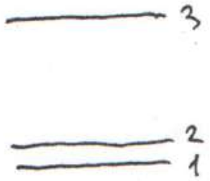
Окончательно получаем, после "убирания" лишних фаз,

$$U = R^{23} W^{13} R^{12} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\Theta_{23} & \sin\Theta_{23} \\ 0 & -\sin\Theta_{23} & \cos\Theta_{23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\Theta_{13} & 0 & \sin\Theta_{13} e^{-i\delta} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\Theta_{13} e^{i\delta} & 0 & \cos\Theta_{13} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\Theta_{12} & \sin\Theta_{12} & 0 \\ -\sin\Theta_{12} & \cos\Theta_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Иерархии нейтринных масс.

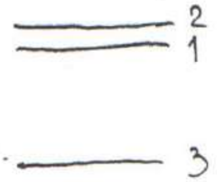
Будем считать установленным, что $m_2 > m_1$, так что $\Delta m^2_{21} > 0$.



$m_1 < m_2 < m_3$ $\qquad$ $\Delta m^2_{31} = \Delta m^2_{32} + \Delta m^2_{21}$

"Нормальная иерархия"

$\Delta m^2_{31} \approx \Delta m^2_{32} \gg \Delta m^2_{21}$



$m_3 < m_1 < m_2$

"Обратная иерархия"

попрежнему $\Delta m^2_{31} \approx \Delta m^2_{32} \gg \Delta m^2_{21}$.

При извлечении параметров осцилляций из эксперимента приходится делать предположение об иерархии масс.

<u>Данные 2018 года</u> (P. de Salas et al, Phys. Lett. B782, 633

$\Delta m^2_{21} = 7{,}55 \cdot 10^{-5}\,eV^2$, $\Theta_{12} = 34{,}5^\circ$;

$$\Delta m^2_{31} = \begin{matrix} 2{,}5 \cdot 10^{-3}\,eV^2 \ (NI), \\ 2{,}42 \cdot 10^{-3}\,eV^2 \ (II), \end{matrix} \qquad \begin{matrix} \Theta_{13} = 8{,}45^\circ \ (NI) \\ \Theta_{13} = 8{,}53 \ (II) \end{matrix}$$

$\Theta_{23} = 47{,}7^\circ$ (NI),

$\Theta_{23} = 47{,}9^\circ$ (II),

$$\delta_{CP} = 281^{+23}_{-27}, \quad \begin{matrix} (229^\circ - 328^\circ) - 2\sigma\text{-value}, \\ (202 - 349) - 3\sigma\text{-value}, \end{matrix}$$

$$\delta_{CP}(\text{best value}) = \begin{matrix} 1{,}32\pi \ (NI) \\ 1{,}56\pi \ (II) \end{matrix}, \quad \delta \sim \frac{3}{2}\pi .$$

Осцилляции антинейтрино

Лагранжиан взаимодействия нейтрино с лептонами:

$$\mathcal{H}^{c.c.}_{int} = \frac{G_F}{\sqrt{2}} \sum_{\alpha = e,\mu,\tau} \Big\{ \bar{\nu}_\alpha(x)\gamma^\rho(1-\gamma_5) l_\alpha(x) J_\rho(x) + $$
$$+ \bar{l}_\alpha(x)\gamma^\rho(1-\gamma_5)\nu_\alpha(x) J^+_\rho(x) \Big\}$$

Первый член в этом выражении описывает рождение нейтрино и аннигиляцию антинейтрино, второй — рождение антинейтрино и аннигиляцию нейтрино, поскольку

$$\nu_\alpha(x) = \sum_k U_{\alpha k}\nu_k(x) = \sum_k \left\{ U_{\alpha k} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2E} \sum_h \left[a^{(h)}_{\nu_k}(p) u^{(h)}_{\nu_k}(p) e^{-ipx} + b^{(h)+}_{\nu_k}(p) v^{(h)}_{\nu_k}(p) e^{ipx} \right] \right\},$$

$$\bar\nu_\alpha(x) = \sum_k U^*_{\alpha k}\bar\nu_k(x) = \sum_k \left\{ U^*_{\alpha k} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2E} \sum_h \left[a^{(h)+}_{\nu_k}(p) \bar u^{(h)}_{\nu_k}(p) e^{ipx} + b^{(h)}_{\nu_k}(p) \bar v^{(h)}_{\nu_k}(p) e^{-ipx} \right] \right\}.$$

Таким образом, для вычисления амплитуд процессов с антинейтрино в результате осцилляций нужно в формулах для амплитуд переходов нейтрино сделать замены

$$U_{\alpha k} \to U^*_{\alpha k}\ ;\ U^*_{\alpha k} \to U_{\alpha k}.$$

Для нейтринных переходов имеем формулу (см выше)

$$A_{\nu_e \to \nu_\mu} = U^{э}_{\mu e}\ ,\quad U^{э}(t) = e^{-iH't}\ ,$$

$$H' = UHU^+\ ,\quad H = \begin{pmatrix} E_1 & 0 \\ 0 & E_2 \end{pmatrix}.$$

Для антинейтринных переходов будем иметь:

$$A_{\bar\nu_\alpha \to \bar\nu_\beta} = \left[e^{-i\tilde H' t} \right]_{\beta\alpha}\ ,\quad \tilde H' = U^* H U^{*+} = U^{+T} H U^T = (UHU^+)^T = (H')^T$$

$$A_{\bar\nu_\alpha \to \bar\nu_\beta} = \left[e^{-i(H')^T t} \right]_{\beta\alpha} = \left[\left[e^{-iH't} \right]^T \right]_{\beta\alpha} = \left[e^{-iH't} \right]_{\alpha\beta}$$

Вероятность перехода $\mathcal{P} = |A|^2$. Отсюда:

$$\mathcal{P}_{\bar\nu_\alpha \to \bar\nu_\beta} = \mathcal{P}_{\nu_\beta \to \nu_\alpha}$$

При выводе этой формулы предполагалось, что массовые матрицы нейтрино и антинейтрино одинаковы. Это - требование CPT-теоремы

$$H = \begin{pmatrix} m_1^2 & 0 \\ 0 & m_2^2 \end{pmatrix} \frac{1}{2p} = \tilde{H} = \begin{pmatrix} \tilde{m}_1^2 & 0 \\ 0 & \tilde{m}_2^2 \end{pmatrix} \frac{1}{2p}.$$

Из требования T-инвариантности следует:

$$\mathcal{P}_{\nu_\alpha \to \nu_\beta} = \mathcal{P}_{\nu_\beta \to \nu_\alpha}.$$

Следовательно, требование CP-инвариантности (считая, что CPT-инвариантность имеет место) есть:

$$\mathcal{P}_{\bar\nu_\alpha \to \bar\nu_\beta} = \mathcal{P}_{\nu_\alpha \to \nu_\beta}.$$

Выше уже приводилась формула для вероятности перехода $\alpha \to \beta$:

$$\mathcal{P}_{\nu_\alpha \to \nu_\beta}(L,E) = \delta_{\alpha\beta} - 4\sum_{k>j} \mathrm{Re}\left[U_{\alpha k}^* U_{\beta k} U_{\alpha j} U_{\beta j}^*\right] \sin^2 \frac{\Delta m_{kj}^2 L}{4E} +$$

$$+ 2\sum_{k>j} \mathrm{Im}\left[U_{\alpha k}^* U_{\beta k} U_{\alpha j} U_{\beta j}^*\right] \sin \frac{\Delta m_{kj}^2 L}{2E}.$$

Очевидно, что в случае CP-инвариантности последний член равен нулю. Если же CP нарушается, то имеем формулу для асимметрии:

$$\mathcal{P}_{\nu_\alpha \to \nu_\beta} - \mathcal{P}_{\bar\nu_\alpha \to \bar\nu_\beta} = 4\sum_{k>j} \mathrm{Im}\left[U_{\alpha k}^* U_{\beta k} U_{\alpha j} U_{\beta j}^*\right] \sin \frac{\Delta m_{kj}^2 L}{2E}.$$

Можно показать, что справедливо соотношение

$$\mathrm{Im}\left[U^*_{\alpha k} U_{\beta k} U_{\alpha j} U^*_{\beta j}\right] = J_{CP} \cdot s_{\alpha\beta;kj}$$

$$J_{CP} = \frac{1}{8} \cos\theta_{13} \sin 2\theta_{12} \sin 2\theta_{23} \sin 2\theta_{13} \sin\delta_{CP}$$

Например, если $\alpha = e$, $\beta = \mu$, то

$$\begin{cases} k=2,\ j=1 & - \ s_{e\mu;21} = 1 \\ k=3,\ j=1 & - \ s_{e\mu;31} = -1 \\ k=3,\ j=2 & - \ s_{e\mu;32} = 1 \end{cases},$$

Окончательная формула для асимметрии имеет вид:

$$A_{\alpha\beta} = P_{\nu_\alpha \to \nu_\beta} - P_{\bar\nu_\alpha \to \bar\nu_\beta} = 4 J_{CP} \cdot \sum_{k>j} s_{\alpha\beta;kj} \sin \frac{\Delta m^2_{kj} L}{2E}.$$

$$\alpha \neq \beta; \quad A_{e\mu} = A_{\mu\tau} = A_{\tau e} = -A_{\mu e} = -A_{\tau\mu} = -A_{e\tau}.$$

Сохранение лептонного числа

Лагранжиан для свободной дираковской частицы:

$$\mathcal{L} = i\bar\psi \gamma_\mu \partial^\mu \psi - m\bar\psi\psi, \quad \hbar = c = 1.$$

Вводим глобальное калибровочное (фазовое) преобразование

$$\psi' = e^{i\lambda}\psi, \quad \bar\psi' = \bar\psi e^{-i\lambda}, \quad \lambda = \mathrm{const}$$

$$\mathcal{L}' = i\bar\psi' \gamma_\mu \partial^\mu \psi' - m\bar\psi'\psi' = \mathcal{L}.$$

По теореме Нётер, должна существовать сохраняющаяся величина, ассоциированная с этой симметрией

$$\delta \mathcal{L} = 0 = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi}\delta\psi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \frac{\partial \psi}{\partial x_\mu}}\delta\frac{\partial\psi}{\partial x_\mu}, \quad \text{т.к. } \mathcal{L} = \mathcal{L}\left(\psi, \frac{\partial\psi}{\partial x_\mu}\right)$$

В нашем случае

$$\psi' = e^{i\lambda}\psi \approx (1+i\lambda)\psi$$

$$\delta\psi = \psi' - \psi = i\lambda\psi, \quad \delta\frac{\partial\psi}{\partial x_\mu} = \frac{\partial}{\partial x_\mu}\delta\psi = i\lambda\frac{\partial\psi}{\partial x_\mu}$$

Подставляя эти вариации в уравнение $\delta L = 0$, имеем

$$\delta L = 0 = \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi} - \frac{\partial}{\partial x_\mu}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\frac{\partial\psi}{\partial x_\mu}}\right)\right]\delta\psi + \frac{\partial}{\partial x_\mu}\left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\frac{\partial\psi}{\partial x_\mu}}\delta\psi\right]$$

Этот член равен нулю (уравнение Эйлера - Лагранжа).

Второе слагаемое даёт уравнение непрерывности:

$$\frac{\partial}{\partial x_\mu}\left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\frac{\partial\psi}{\partial x_\mu}}\delta\psi\right] = \frac{\partial}{\partial x_\mu}\left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\frac{\partial\psi}{\partial x_\mu}}i\lambda\psi\right] \equiv \lambda\frac{\partial J^\mu}{\partial x_\mu} = 0$$

$$J^\mu = i\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\frac{\partial\psi}{\partial x_\mu}}\psi \quad - \text{ \underline{Сохраняющийся ток}}$$

Дираковский лагранжиан даёт выражение для тока:

$$J^\mu = -\bar{\psi}\gamma^\mu\psi$$

Теорема Гаусса:

$$\int_V \operatorname{div} \vec{F}\, dv = \oint_\Sigma \vec{F}\, d\vec{S}$$

$\vec{\nabla}\vec{J}$

В нашем случае эта теорема даёт:

$$\frac{\partial}{\partial t}\int J^0 d^3x = 0. \qquad \int \frac{\partial}{\partial \vec{x}} \vec{J}\, d^3x = 0$$

$$Q = \int J^0 d^3x \text{ -- "заряд".}$$ <u>Q сохраняется во времени.</u>

$$J^0 = -\bar{\psi}\gamma^0\psi = -\psi^+\psi.$$

Q, по определению, "лептонное число".

Здесь мы рассматривали только свободный лагранжиан, в отсутствие взаимодействия.

J^μ - сохраняющийся ток, в том смысле, что 4-дивергенция тока равна нулю,

$$\partial_\mu J^\mu = (\partial_\mu\bar{\psi})\gamma^\mu\psi + \bar{\psi}\gamma^\mu(\partial_\mu\psi) = im\bar{\psi}\psi - im\bar{\psi}\psi = 0.$$

Уравнение Эйлера-Лагранжа, в нашем случае есть уравнение Дирака:

$$\frac{\partial L}{\partial\psi} - \frac{\partial}{\partial x_\mu}\left(\frac{\partial L}{\partial \frac{\partial\psi}{\partial x_\mu}}\right) = 0$$

$$\downarrow$$

$$i\partial_\mu\bar{\psi}\gamma^\mu = -m\bar{\psi}$$

$$\downarrow$$

$$i\partial_\mu\gamma^\mu\psi = m\psi.$$

В стандартной модели (расширенной) массы лептонов записываются в виде (дираковские нейтрино):

$$\mathcal{L}_m = -\sum_\alpha M_\alpha \bar{l}_{\alpha L} l_{\alpha R} - \sum_{\alpha,\beta} M_{\alpha\beta} \bar{\nu}_{\alpha L} \nu_{\beta R} + h.c.$$

$$\nu_{\alpha L} = \begin{pmatrix} \nu_{eL} \\ \nu_{\mu L} \\ \nu_{\tau L} \end{pmatrix}, \quad \nu_{\alpha R} = \begin{pmatrix} \nu_{eR} \\ \nu_{\mu R} \\ \nu_{\tau R} \end{pmatrix},$$

$$l_{\alpha L} = \begin{pmatrix} e_L \\ \mu_L \\ \tau_L \end{pmatrix}, \quad l_{\alpha R} = \begin{pmatrix} e_R \\ \mu_R \\ \tau_R \end{pmatrix}.$$

$$l_{\alpha L} = \frac{1}{2}(1-\gamma_5) l_\alpha \; ; \quad l_{\alpha R} = \frac{1}{2}(1+\gamma_5) l_\alpha$$

$$\nu_{\alpha L} = \frac{1}{2}(1-\gamma_5) \nu_\alpha \; ; \quad \nu_{\alpha R} = \frac{1}{2}(1+\gamma_5) \nu_\alpha$$

Образуем линейные комбинации киральных полей

$$l_\alpha = l_{\alpha L} + l_{\alpha R}, \quad \alpha = e, \mu, \tau$$

После диагонализации $M_{\alpha\beta}$ получаем

$$\sum_{\alpha,\beta} M_{\alpha\beta} \bar{\nu}_{\alpha L} \nu_{\beta R} + h.c. \to \sum_{k=1}^{3} m_k \bar{\nu}_{kL} \nu_{kR} + h.c.$$

и, соответственно,

$$\nu_k = \nu_{kL} + \nu_{kR}.$$

В терминах l_α, ν_k массовый лагранжиан переписывается в виде

$$\mathcal{L}_m = -\sum_{\alpha=e,\mu,\tau} M_\alpha \bar{l}_\alpha l_\alpha - \sum_{k=1}^{3} m_k \bar{\nu}_k \nu_k$$

Поля ν_α, <u>по определению</u>, – поля с определённым флэйвором. Они входят в выражение для <u>лагранжиана взаимодействия</u>:

Этот лагранжиан записан выше. Здесь мы перепишем его в виде:

$$\mathcal{L}_{int}^{c.c.} = -\frac{g}{2\sqrt{2}}\, j_W^{\rho} W_{\rho} + h.c.,$$

$$j_W^{\rho} = 2\sum_{\alpha=e,\mu,\tau} \bar{\nu}_{\alpha L}\gamma^{\rho} l_{\alpha L} = 2\sum_{k=1}^{3} U_{\alpha k}^{*}\,\bar{\nu}_{kL}\gamma^{\rho} l_{\alpha L}$$

"лептонный ток".

Лептонный ток инвариантен относительно фазового преобразования

$$l_{\alpha L} \to e^{i\varphi_\alpha} l_{\alpha L}, \quad \nu_{\alpha L} \to e^{i\varphi_\alpha}\nu_{\alpha L}. \quad \alpha = e,\mu,\tau.$$

Допустим, для начала, что все массы нейтрино равны нулю,

$$m_k = 0, \quad k = 1,2,3.$$

Тогда $\mathcal{L}_m$ будет также инвариантно относительно этого фазового преобразования, поскольку, в этом случае

$$\mathcal{L}_m = -\sum_{\alpha} M_{\alpha}^{l}\,\bar{l}_{\alpha L} l_{\alpha R}.$$

По теореме Нётер, соответствующий сохраняющийся ток равен

$$j_\alpha^{\rho} = \bar{\nu}_{\alpha L}\gamma^{\rho}\nu_{\alpha L} + \bar{l}_{\alpha}\gamma^{\rho} l_{\alpha}. \quad \partial_{\rho} j_\alpha^{\rho} = 0.$$

$L_\alpha = \int d^3x\, j_\alpha^0(x)$ – лептонное число,

$\partial_0 L_\alpha = 0$ – сохранение лептонного числа

Напомним, что для каждого поля вклад в j^0 равен $\psi^{+}\psi$.

Пользуясь выражениями для полей в виде интегралов Фурье по импульсам, запишем формулу для лептонного числа, соответствующего определённому флэйвору α:

$$L_\alpha = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2E}\left[a^{(-)+}_{\nu_\alpha}(p)\, a^{(-)}_{\nu_\alpha}(p) - b^{(+)+}_{\nu_\alpha}(p)\, b^{(+)}_{\nu_\alpha}(p)\right] +$$

$$+ \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2E}\sum_{h=\pm 1}\left[a^{(h)+}_{e_\alpha}(p)\, a^{(h)}_{e_\alpha}(p) - b^{(h)+}_{e_\alpha}(p)\, b^{(h)}_{e_\alpha}(p)\right].$$

Почему в этой формуле нет суммирования по спиральностям в нейтринном слагаемом? Это связано с тем, что мы предположили, что нейтрино безмассовы и с тем, что в выражение для j^ρ_W входят только левые проекции нейтринных полей. В этом случае из четырех функций $u^\pm(p)$ и $v^\pm(p)$, входящих в Фурье-интегралы для нейтринного поля, выживают только две. Именно, дают вклад только $u^-(p)$ и $v^+(p)$:

$$u^-(p) = \sqrt{2E}\begin{pmatrix} 0 \\ \chi^- \end{pmatrix}, \quad v^+(p) = \sqrt{2E}\begin{pmatrix} 0 \\ \chi^- \end{pmatrix},$$

т.е. выживают только нейтрино с отрицательной спиральностью и антинейтрино с положительной спиральностью. Это непосредственно видно в выражении для L_α.

Поскольку $\partial_0 L_\alpha = 0$, то L_α "сохраняется". Легко убедиться, что собственные значения оператора L_α есть не что иное, как числа частиц в данном квантовом состоянии (точнее, число частиц минус число античастиц).

Пусть, например, $\alpha = e$ и в состоянии $|A\rangle$ имеется 3 электрона, 5 нейтрино, 1 позитрон и 3 антинейтрино. Тогда

$$L_e|A\rangle = \left[(3+5)-(1+3)\right]|A\rangle = 4|A\rangle.$$

Таблица лептонных чисел

	L_e	L_μ	L_τ
ν_e, e^-	$+1$	0	0
ν_μ, μ^-	0	$+1$	0
ν_τ, τ^-	0	0	$+1$

	L_e	L_μ	L_τ
$\bar\nu_e, e^+$	-1	0	0
$\bar\nu_\mu, \mu^+$	0	-1	0
$\bar\nu_\tau, \tau^+$	0	0	-1

L_α называют ещё парциальными лептонными числами. Отдельно, как мы видим, сохраняются электронное, мюонное и таонное числа. Запрещены реакции типа распадов

$$\mu \to e + \gamma, \quad \mu \to 3e.$$

Если дираковские нейтрино массивны, то-есть, если $m_k \neq 0$, то нет инвариантности массового лагранжиана $\mathcal{L}_m$ относительно преобразования $l_\alpha \to e^{i\varphi_\alpha} l_\alpha$, $\nu_{\alpha L} \to e^{i\varphi_\alpha}\nu_{\alpha L}$ и, соответственно, нет сохранения парциальных лептонных чисел. Но, в этом случае, сохраняется полное лептонное число,

$$L_{tot} = L_e + L_\mu + L_\tau,$$

вследствие инвариантности лагранжиана относительно преобразования

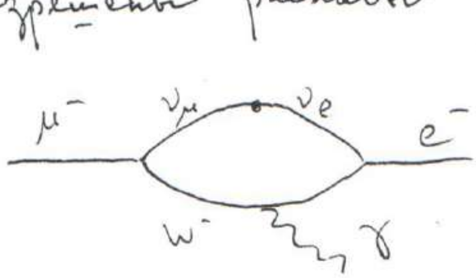
$$\nu_{kL} \to e^{i\varphi}\nu_{kL}, \quad \nu_{kR} \to e^{i\varphi}\nu_{kR}, \quad k = 1,2,3.$$

$$l_{\alpha L} \to e^{i\varphi} l_{\alpha L}, \quad l_{\alpha R} \to e^{i\varphi} l_{\alpha R}, \quad \alpha = e, \mu, \tau.$$

Для полного лептонного числа можно записать выражение

$$L_{tot} = \sum_{k=1}^{3} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2E} \sum_{h=\pm1} \Big[a^{(h)+}_{\nu_k}(p)\, a^{(h)}_{\nu_k}(p) - b^{(h)+}_{\nu_k}(p)\, b^{(h)}_{\nu_k}(p) \Big] + \sum_{\alpha=e,\mu,\tau} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2E} \cdot \sum_{h=\pm1} \Big[a^{(h)+}_{e_\alpha}(p)\, a^{(h)}_{e_\alpha}(p) - b^{(h)+}_{e_\alpha}(p)\, b^{(h)}_{e_\alpha}(p) \Big].$$

В этом случае разрешены распады $\mu \to e\gamma$, $\mu \to 3e$



Отметим, что, если пренебрегается массами нейтрино, то понятие лептонного числа можно использовать и в том случае, когда нейтрино майорановские. Дело в том, что если масса нейтрино равна нулю, то, как показано выше, вместо лептонного числа можно говорить о спиральности частицы (у нейтрино спиральность отрицательна, у антинейтрино – положительна). Поэтому, в случае майорановского нейтрино, иногда говорят, что майорановское нейтрино с положительной спиральностью – аналог антинейтрино. То-есть, майорановское нейтрино с отр. спиральностью имеет лептонное число (+1), а с положительной спиральностью – (−1).

Могут ли осциллировать заряженные лептоны (например, $e^+ \to \mu^+$)? Нет, поскольку лептоны с данным флэйвором имеют строго определённую массу (в отличие от нейтрино с данным флэйвором).

Эффективная майорановская масса нейтрино

$$\mathcal{L}^M = -\frac{1}{2} m \overline{\nu_L^c} \nu_L + h.c.$$

В стандартной модели такая масса отсутствует, в соответствии с калибровочной инвариантностью (нет изоспинового триплета с $Y=-2$). Майорановская масса появляется при добавлении к стандартной модели новых частиц. При этом теория поля становится неперенормируемой

$$\int d^4x\, \mathcal{L}(x) \text{ - безразмерно}, \quad \mathcal{L}(x) \sim [E]^4$$

Лагранжиан С. Вайнберга (1979):

$$\mathcal{L}_5 = \frac{g}{M}\left(L_L^T \sigma_2 \Phi\right) C^+ \left(\Phi^T \sigma_2 L_L\right).$$

Здесь L_L - дублет из стандартной модели, например $L_{eL} = \begin{pmatrix} \nu_{eL} \\ e_L \end{pmatrix}$,

Φ - дублет Хиггса,

$$\Phi(x) = \begin{pmatrix} \varphi_+ \\ \varphi_0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{breaking}]{\text{symmetry}} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ v+H \end{pmatrix}.$$

В результате нарушения симметрии имеем:

$$\mathcal{L}_5 = \frac{1}{2} \frac{g v^2}{M} \nu_L^T C^+ \nu_L + h.c.$$

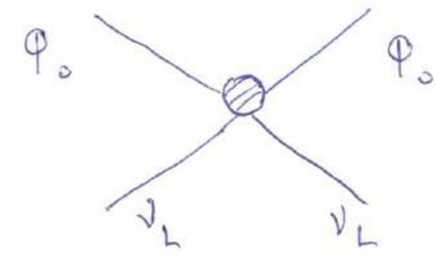
M - константа размерности массы, $M \gg v$.

Стандартная модель в этом подходе - эффективная низкоэнергетическая теория, работает при $E_\nu \ll M$. Пример - модель seesaw, в которой

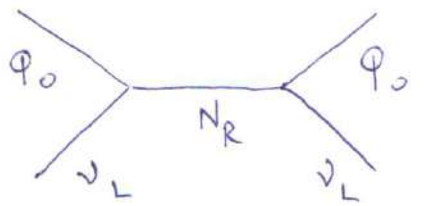
$$m_\nu \sim \frac{m_D^2}{M_R}, \quad m_D \sim v \sim 10^2 \text{ GeV}, \quad M \sim 10^{15} \text{ GeV},$$

$$m_\nu \sim 10^{-2} \text{ eV}.$$

Общая диаграмма

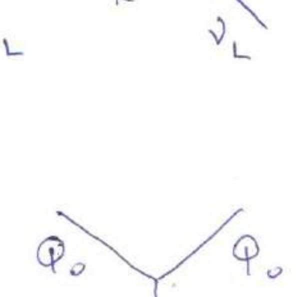


Seesaw I



N_R - тяжёлые правые нейтрино

Seesaw II



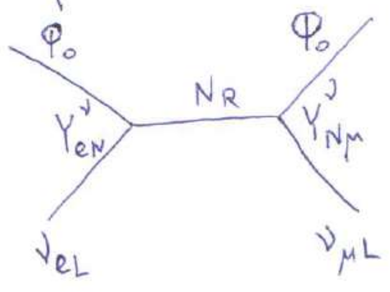
Δ - триплет скалярного поля

Seesaw III

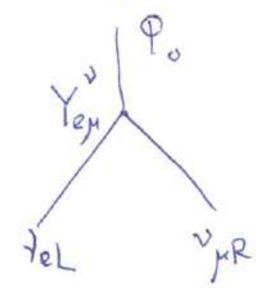
Σ - фермионный триплет.

Взаимодействие нейтрино с бозонами Хиггса, происходящее с обменом тяжёлыми частицами N, Δ, Σ, имеет место при очень высоких температурах, в ранней Вселенной. При низких энергиях пропагаторы тяжёлых частиц дают в $\mathcal{L}_5$ постоянный множитель $\frac{1}{M}$, при температурах меньше v бозоны Хиггса дают в $\mathcal{L}_5$ множитель v^2. По определению, ν_L - "эффективное" майорановское поле, точнее, майорановское поле с эффективной массой $\sim v^2/M$.

В общем случае $3^х$ флэйворов нейтрино и смешивания имеем, для seesaw I, диаграммы типа



Для сравнения, в случае дираковских нейтрино имеем:



Здесь, как и выше, Y^ν - константы связи хиггсовского бозона с нейтрино. Массы нейтрино пропорциональны этим константам связи.

В дираковском случае матрица констант связи есть

$$Y^\nu = \begin{pmatrix} Y^\nu_{ee} & Y^\nu_{e\mu} & Y^\nu_{e\tau} \\ Y^\nu_{\mu e} & Y^\nu_{\mu\mu} & Y^\nu_{\mu\tau} \\ Y^\nu_{\tau e} & Y^\nu_{\tau\mu} & Y^\nu_{\tau\tau} \end{pmatrix}$$

и, соответственно, матрица масс есть

$$M^D_\nu = \frac{v}{\sqrt{2}} Y^\nu = \begin{pmatrix} m^D_{ee} & m^D_{e\mu} & m^D_{e\tau} \\ m^D_{\mu e} & m^D_{\mu\mu} & m^D_{\mu\tau} \\ m^D_{\tau e} & m^D_{\tau\mu} & m^D_{\tau\tau} \end{pmatrix}$$

Массовый член Лагранжиана, в дираковском случае:

$$\mathcal{L}^{D}_{mass} = -\begin{pmatrix} \bar{\nu}_{eL} & \bar{\nu}_{\mu L} & \bar{\nu}_{\tau L} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M^{D}_{\nu} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_{eR} \\ \nu_{\mu R} \\ \nu_{\tau R} \end{pmatrix} + h.c.$$

В майорановском случае имеем:

$$\left(M^{M}_{\nu}\right)_{\alpha\beta} = \frac{v^2}{M_R} \left(y^{\nu}_{\alpha N}\right)^{T} y^{\nu}_{N\beta} ,$$

$$\mathcal{L}^{M}_{mass} = -\frac{1}{2} \sum_{\alpha,\beta = e,\mu,\tau} \left(\overline{\nu^{c}_{\alpha L}} M^{M}_{\nu\alpha\beta} \nu_{\beta L} \right) + h.c.$$

В общем случае константы связи $Y^{\nu}_{\alpha\beta}$ и $Y^{\nu}_{\alpha N}$ <u>комплексны.</u>
Соответственно, <u>комплексны массовые матрицы нейтрино.</u>
После диагонализации массовых матриц M^{D}_{ν} и M^{M}_{ν} эта комплексность переходит в матрицу смешивания U, поскольку собственные значения m_k, получаемые в результате диагонализации, реальны. Комплексность массовых матриц приводит к нарушению CP-инвариантности лагранжиана, поскольку матрица смешивания U присутствует в той части этого лагранжиана, который описывает взаимодействие нейтрино с промежуточными бозонами слабого взаимодействия.

CP-инвариантность Лагранжиана майорановского поля

Выше было показано, что 4-х-компонентные майорановские поля при CP-преобразовании преобразуются так:

$$\psi(x) \xrightarrow[CP]{} \psi^{CP}(x_P) = \eta_{CP}\gamma^0 C\bar{\psi}^T(x).$$

Эта формула выведена для классических полей. Квантованные поля преобразуются чуть-чуть иначе:

$$U_{CP}\psi(x)U_{CP}^{-1} \equiv \psi^{CP}(x) = \eta_{CP}\gamma^0 C\bar{\psi}^T(x_P).$$

В обоих формулах $\eta_{CP} = \pm i$ - "CP-чётность" нейтрино.

$$x = (x_0, \vec{x}), \quad x_P = (x_0, -\vec{x}).$$

Выше было показано, что при $\eta_{CP} = \pm i$ лагранжиан свободного поля (точнее, массовый член лагранжиана) инвариантен относительно CP-преобразования. Поэтому достаточно рассмотреть только лагранжиан взаимодействия.

$$\mathcal{L}^{CC} = -\frac{g}{\sqrt{2}}\sum_{\alpha=e,\mu,\tau}\sum_{k=1}^{3}\left(U_{\alpha k}^*\bar{\nu}_{kL}\gamma^\rho l_{\alpha L}W_\rho + U_{\alpha k}\bar{l}_{\alpha L}\gamma^\rho \nu_{kL}W_\rho^+\right)(x)$$

При CP-преобразовании массивные поля ν_{kL} преобразуются, как только что показано, по формуле

$$U_{CP}\nu_{kL}(x)U_{CP}^{-1} = \eta_k i\gamma^0 C\bar{\nu}_{kL}^T(x_P), \quad \eta_k = \pm 1,$$

а дираковские поля заряженных лептонов - по формуле

$$U_{CP}l_\alpha U_{CP}^{-1} = \eta_{l_\alpha}^{CP}\gamma^0 C\bar{l}_\alpha^T \quad (\text{фаза } \eta_{l_\alpha}^{CP} \text{ произвольна}).$$

Промежуточные бозоны слабого взаимодействия преобразуются по формуле

$$U_{CP} W_\mu U_{CP}^{-1} = -W^{\mu +}.$$

Используя соотношение

$$\gamma^{\mu +} = \gamma_\mu ,$$

получаем

$$U_{CP} \mathcal{L}^{cc} U_{CP}^{-1} = -\frac{g}{\sqrt{2}} \sum_{\alpha = e, \mu, \tau} \sum_{k=1}^{3} \Big(-U^*_{\alpha k} \eta_k i \eta^{CP}_{e_\alpha} \bar{\ell}_{\alpha L} \gamma^\rho \nu_{kL} W^+_\mu + \qquad (**)$$

$$+ U_{\alpha k} \eta_k i \eta^{CP *}_{e_\alpha} \bar{\nu}_{kL} \gamma^\rho \ell_{\alpha L} W_\rho \Big).$$

Сравнивая $(**)$ с $(*)$, получаем, что CP-инвариантность реализуется, если

$$U_{\alpha k} \eta_k i \eta^{CP*}_{e_\alpha} = U^*_{\alpha k} . \qquad (***)$$

Вспоминаем, что матрица смешивания записывается в виде

$$U = U^D D^M ,$$

$$D^M = \mathrm{diag}\left(1, e^{i\lambda_2}, e^{i\lambda_3}\right)$$

Используя это, получаем из $(***)$

$$U^D_{\alpha k} e^{2i\lambda_k} \eta_k i \eta^{CP*}_{e_\alpha} = U^{D\,*}_{\alpha k} \qquad (****)$$

Поскольку дираковская фаза в U^D не может быть устранена, <u>необходимое</u> условие CP-сохранения таково:

$$U^D = U^{D*} = O,$$

O - ортогональная матрица, $O^T = O^{-1}$,

и, следовательно,
$$\delta = 0, \pi.$$

После этого получаем из $(****)$:
$$\eta_k = -i\eta^{CP}_{e\alpha} e^{-2i\lambda_k}.$$

Если теперь положить
$$\eta^{CP}_{e\alpha} = i,$$

то имеем, окончательно,
$$\eta_k = e^{-2i\lambda_k}; \quad \eta_k = \pm 1.$$

Результат можно записать в виде таблицы:

η_k	λ_k	$e^{i\lambda_k}$
$+1$	$0, \pi$	± 1
-1	$\pi/2, 3\pi/2$	$\pm i$

Таким образом, если майорановские фазы имеют значения, указанные в таблице, то CP сохраняется, даже несмотря на то, что матрица смешивания необязательно реальна. Некоторые столбцы матрицы смешивания могут быть чисто мнимы.

<u>Можно ли отличить дираковское нейтрино от майорановского?</u>

Лагранжиан слабого взаимодействия ("заряженные токи")

$$\mathcal{L}_{cc} = \frac{g}{\sqrt{2}}\left\{\left(\bar{\nu}_e\gamma^\mu P_L e\right)W_\mu^+ + \left(\bar{e}\gamma^\mu P_L \nu_e\right)W_\mu^-\right\}$$

e – заряженный лептон (электрон или позитрон)

$P_L = \frac{1}{2}(1-\gamma^5)$ – оператор проектирования

$$\langle f|\mathcal{L}_{cc}|i\rangle \to M_{lept} \equiv \bar{u}_f(p_f)\gamma^\mu P_L u_i(p_i) =$$

$$= \frac{1}{2}u_f^{*T}(1-\gamma_5)\gamma_0\gamma^\mu u_i = \frac{1}{2}\left[u_f^{*T}(1-\gamma_5)\gamma_0\gamma^\mu u_i\right]^T =$$

$$= \frac{1}{2}u_i^T\gamma^{\mu T}\gamma_0(1-\gamma_5)u_f^* = u_i^T\gamma^{\mu T}\gamma_0 P_L u_f^*.$$

Фермионы, участвующие в слабом взаимодействии, описываются спинорами левой киральности,

$$u_{i,f} = \begin{pmatrix} 0 \\ a_{i,f} \end{pmatrix}.$$

Это - следствие V-A-структуры Лагранжиана слабого взаимодействия.

Выше было показано, что квантовые поля дираковского и майорановского нейтрино записываются в виде следующих разложений в интеграл Фурье по импульсам:

$$(\nu_e)_D = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2E} \left\{ \left(a_-(p) u^-(p) + a_+(p) \right) e^{-ipx} + \right.$$
$$\left. + \left(b^+_-(p) v^-(p) + b^+_+(p) v^+(p) \right) e^{ipx} \right\},$$

$$(\nu_e)_M = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2E} \left\{ \left(a_-(p) u^-(p) + a_+(p) u^+(p) \right) e^{-ipx} + \right.$$
$$\left. + \left(a^+_-(p) v^-(p) + a^+_+(p) v^+(p) \right) e^{ipx} \right\},$$

$a_\pm(p)$, $b_\pm(p)$ - операторы уничтожения частиц со спиральностями ± 1; $a^+_\pm(p)$, $b^+_\pm(p)$ - операторы рождения. В Майорановском случае нет различия нейтрино и антинейтрино. $u(p)$ и $v(p)$ — $4^х$-компонентные спиноры. В слабом взаимодействии участвуют лишь $u^-(p)$ и $v^+(p)$ (в пределе массы нейтрино, равной нулю), поскольку

$$u^-(p) \approx \sqrt{2E} \begin{pmatrix} \frac{M}{2E} f^- \\ f^- \end{pmatrix} \xrightarrow[E \to \infty]{} \sqrt{2E} \begin{pmatrix} 0 \\ f^- \end{pmatrix},$$

$$v^+(p) \approx \sqrt{2E} \begin{pmatrix} -\frac{M}{2E} f^- \\ f^- \end{pmatrix} \xrightarrow[E \to \infty]{} \sqrt{2E} \begin{pmatrix} 0 \\ f^- \end{pmatrix}.$$

В Лагранжиан слабого взаимодействия входят также дираковски сопряженные поля $\bar{\nu}_e$ и $\bar{e}$,

$$(\bar{\nu}_e)_D = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2E} \left\{ \left(a^+_-(p) \bar{u}^-(p) + a^+_+(p) \bar{u}^+(p) \right) e^{ipx} + \right.$$
$$\left. + \left(b_-(p) \bar{v}^-(p) + b_+(p) \bar{v}^+(p) \right) e^{-ipx} \right\},$$

$$(\bar{\nu}_e)_M = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2E} \left\{ \left(a_-^+(p)\,\bar{u}^-(p) + a_+^+(p)\,\bar{u}^+(p) \right) e^{ipx} + \right.$$
$$\left. + \left(a_-(p)\,\bar{v}^-(p) + a_+(p)\,\bar{v}^+(p) \right) e^{-ipx} \right\}.$$

Выражения для полей заряженных лептонов аналогичны.

Рассмотрим сначала процесс рождения позитрона нейтрино.

$$(*) \quad \langle e^+ | \bar{\nu}_e \gamma^\mu P_L | \nu_e \rangle \to \langle e^+ | \ldots b_{(\nu)} b^+_{(e)} \ldots | \nu_e \rangle \qquad \text{(дираковский случай)}$$

Здесь символически показано, какие операторы рождения и уничтожения дают ненулевой вклад в этот процесс. Действительно, начальное и конечное состояния можно записать в виде

$$\langle e^+ | = \langle 0 | b_{(e)} \quad ; \quad |\nu_e\rangle = b^+_{(\nu)} |0\rangle .$$

С учётом этого, все операторы выстраиваются нужным образом,

$$\langle 0 | b_{(e)} b^+_{(e)} b_{(\nu)} b^+_{(\nu)} | 0 \rangle \neq 0 .$$

Напомним, что в квантовой теории поля постулируются коммутационные соотношения для операторов рождения-уничтожения:

$$\{ a_\pm(p) a^+_\pm(p') \} = \delta(\vec{p} - \vec{p}') \ , \quad \{ b_\pm(p) b^+_\pm(p') \} = \delta(\vec{p} - \vec{p}') .$$

Сравнивая $(*)$ с выражением для $(\bar{\nu}_e)_D$, убеждаемся, что вклад в процесс даёт слагаемое

$$b_+(p)\,\bar{v}^+(p)\,e^{-ipx} .$$

Слагаемое с $b_-(p)$ не даёт вклада, поскольку спинор $v^-(p)$

имеет неправильную киральность,

$$v^-(p) \xrightarrow[E\to\infty]{} \approx \sqrt{2E}\begin{pmatrix}\chi^+\\ 0\end{pmatrix}.$$

В майорановском случае аналогичное рассмотрение даёт

$$\langle e^+|\bar{\nu}_e\gamma^\mu P_L e|\nu_e\rangle \to \langle e^+\dots a_{(\nu)} b^+_{(e)}\dots\rangle$$

$$\langle e^+| = \langle 0|b_{(e)} \; ; \; |\nu_e\rangle = a^+_{(\nu)}|0\rangle$$

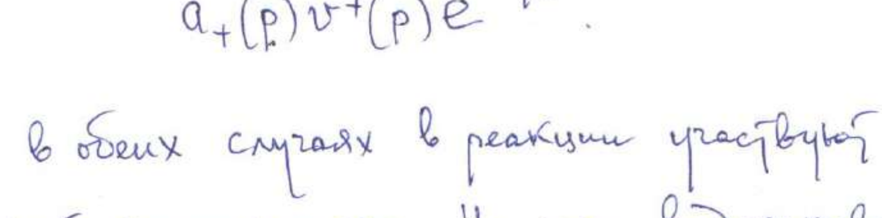
$$\langle 0|b_{(e)} b^+_{(e)} a_{(\nu)} a^+_{(\nu)}|0\rangle \neq 0,$$

и, соответственно, вклад в процесс рождения позитрона даёт слагаемое

$$a_+(p)\bar{v}^+(p)e^{-ipx}.$$

Видим, что в обоих случаях в реакции участвуют частицы с положительной спиральностью. Но если в дираковском случае это антинейтрино ($|\nu_e\rangle = b^+_{(\nu)}|0\rangle$), то в майорановском случае это "нейтрино с положительной спиральностью", $|\nu_e\rangle = a^+_{(\nu)}|0\rangle$.

Теперь рассмотрим процесс рождения позитрона и нейтрино при распаде π^+-мезона.



Аналогично предыдущему, имеем:

$$\langle e^+\nu_e|\bar\nu_e\gamma^\mu P_L e|0\rangle \to \langle e^+\nu_e|\ldots b^+_{(e)} a^+_{(\nu)}\ldots|0\rangle$$

$$\langle e^+\nu_e| = \langle 0|b_{(e)}a_{(\nu)}\,,\quad \langle 0|b_{(e)}b^+_{(e)}a_{(\nu)}a^+_{(\nu)}|0\rangle \neq 0.$$

В дираковском случае, так же как и в майорановском, вклад дает слагаемое

$$a^+_-(p)\bar u^-(p)e^{ipx}.$$

Видно, что в реакции распада π^+-мезона вылетает нейтрино с отрицательной спиральностью (в пределе нулевой массы). В дираковском случае это нейтрино (т.е. не антинейтрино), в майорановском случае это нейтрино с отрицательной спиральностью.

Ещё один вывод из рассмотренного: в π^+-распаде вылетает частица, ν_e, которая не может взаимодействовать с мишенью, рождая позитрон, т.е., например,

$$\nu_e + p \not\to n + e^+, \qquad (*)$$

поскольку спиральность ν_e, возникшей в π^+-распаде, отрицательна, а в реакции $(*)$ спиральность нейтрино, как мы убедились выше, положительна. Это "запрет по спиральности", который приводит к тем же правилам отбора, что и требование сохранения лептонного числа. Источник запретов по спиральности – V-A-структура слабого взаимодействия.

Поскольку запреты по спиральности одинаково справедливы и для дираковских и для майорановских нейтрино, различить эти две возможности в реакциях с заряженными токами нельзя.

Случай нейтральных токов

Рассмотрим, например, нейтринную часть матричного элемента рассеяния нейтрино на какой-нибудь мишени

$$M_w^\mu \sim \bar{u}_f(p_f)\gamma^\mu(1-\gamma_5)u_i(p_i).$$

в дираковском случае. Антинейтрино нет.

В ультрарелятивистском приближении, как показано выше, имеем

$$u^-(p) \approx \sqrt{2E}\begin{pmatrix} 0 \\ f^- \end{pmatrix}, \quad u^+(p) \approx \sqrt{2E}\begin{pmatrix} f^+ \\ 0 \end{pmatrix}$$

Таким образом, вклад в рассеяние даёт только $u^-(p)$. Поскольку

$\gamma_5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ и $\gamma_5 u^- = -u^-$, имеем

$$M_w^\mu \sim 2\bar{u}_f\gamma^\mu u_i.$$

В случае майорановского нейтрино необходимо учесть вклад отрицательно-частотной части, поскольку дырочные операторы отличаются от частичных операторов лишь знаком энергии.

$$M_w^\mu \simeq \bar{u}_f(p_f)\gamma^\mu(1-\gamma_5)u_i(p_i) - \bar{v}_i(p_i)\gamma^\mu(1-\gamma_5)v_f(p_f).$$

Знак минус возникает из-за того, что фермиевские операторы антикоммутируют (операторы рождения и уничтожения дырок необходимо переставить, с тем, чтобы оператор уничтожения стоял справа).

Воспользуемся двумя соотношениями

$$\bar{v}_i \gamma^\mu v_f = \bar{u}_f \gamma^\mu u_i \ ;$$

$$\bar{v}_i \gamma^\mu \gamma_5 v_f = -\bar{u}_f \gamma^\mu \gamma_5 u_i$$

При выводе этих соотношений используется связь между u и v спинорами,

$$v = u^c = C\gamma^0 u^* = C\bar{u}^T ,$$

C - матрица зарядового сопряжения, $C = -i\gamma^2\gamma^0$.

С учётом этих двух соотношений получаем

$$M^\mu_w = 2\bar{u}_f \gamma^\mu u ,$$

т.е. убеждаемся, что, как и в случае реакций с заряженными токами, нет различия между случаями дираковского и майорановского нейтрино.

<u>Окончательно</u>, в пределе $m_\nu = 0$ отличить майорановское нейтрино от дираковского невозможно. Если не полагать $m_\nu = 0$, то, разумеется, различия будут. Но, если учитывать закон сохранения лептонного числа, то, в дираковском случае учет массы нейтрино ничего нового не даёт. В майорановском случае "включение" массы приводит к появлению осцилляций нейтрино - "антинейтрино" (т.е. осцилляций нейтрино с изменением спиральности) и, вообще, к появлению реакций, идущих с нарушением лептонного числа.

1

Нейтринные волновые пакеты и осцилляции нейтрино

Ароматное нейтринное состояние $|\nu_\alpha\rangle$ - суперпозиция состояний с определенной массой $|\nu_i\rangle$. Состояние $|\nu_i\rangle$ в общем случае немонохроматическое.

$$|\nu_\alpha\rangle = \sum_i U_{\alpha i}^* |\nu_i\rangle = \sum_i U_{\alpha i} \int d^3p\, |\vec{p}\rangle\langle\vec{p}|\nu_i\rangle =$$

$$= \sum_i U_{\alpha i}^* \int d^3p\, \psi_i(\vec{p})|\vec{p}\rangle ,$$

$\psi_i(\vec{p}) = \langle\vec{p}|\nu_i\rangle$ - волновая функция нейтрино с массой m_i в импульсном представлении.

Состояние $|\nu_\alpha\rangle$ эволюционирует во времени:

$$|\nu_\alpha(t)\rangle = \sum U_{\alpha i}^* \int d^3p\, \psi_i(\vec{p})\, e^{-iE_i(p)t} |\vec{p}\rangle$$

Переходим к координатному пространству, вводя в этот интеграл интегрирование по d^3x,

$$\int |x\rangle\langle x|\, d^3x$$

и пользуясь тем, что

$$\langle x|p\rangle = e^{i\vec{p}\vec{x}} ,$$

$$|\nu_\alpha(t)\rangle = \sum_i U_{\alpha i}^* \int d^3x\, \psi_i(\vec{x},t)\, |\vec{x}\rangle , \text{ где}$$

$$\psi_i(\vec{x},t) = \int d^3p\, \psi_i(\vec{p})\, e^{i\vec{p}\vec{x} - iE_i(\vec{p})t} .$$

Массовое состояние $|\nu_i\rangle$ записалось в виде:

$$|\nu_i\rangle = \int d^3x\, \psi_i(\vec{x},t)\,|x\rangle$$

Подействуем на это состояние оператором смещения (пространственно-временной эволюции).

$$|\nu_i\rangle \to e^{i\hat{P}x_p}|\nu_i\rangle\ , \quad \hat{P} = (H,\hat{\vec{P}})\ , \ x_p = (t_p, \vec{x}_p).$$

Индекс p (production) соответствует точке и времени рождения нейтрино в источнике. После этого сдвига волновая функция (волновой пакет) принимает вид

$$\psi_i^p(\vec{x},t;\vec{x}_p,t_p) = \int d^3p\, \psi_i^p(\vec{p})\, e^{i\vec{p}(\vec{x}-\vec{x}_p) - iE_i(t-t_p)}\ .$$

Это волновой пакет нейтрино, родившегося в точке $\vec{x}_p$ во время t_p, как функция $\vec{x}$ и t. В момент рождения и в точке рождения, т.е. когда $\vec{x}=\vec{x}_p$ и $t=t_p$, волновой пакет имеет максимальную амплитуду. $\vec{x}_p$ - центр волнового пакета в момент t_p.

В приближении плоских волн имеем, очевидно

$$\psi_i(\vec{p}) = \delta(\vec{p}-\vec{p}_i)$$

$$\psi_i(x, x_p, t, t_p) = e^{i\vec{p}_i(\vec{x}-\vec{x}_p) - iE_i(t-t_p)}\ .$$

Предположим, что $\psi_i^p(\vec{p})$ имеет гауссову форму ("гауссовый волновой пакет")

$$\psi_i^p(\vec{p}) = \frac{1}{(2\pi\sigma_{pP})^{3/4}}\, e^{-\frac{(\vec{p}-\vec{p}_i)^2}{4\sigma_{pP}^2}}$$

Здесь σ_{pP} — ширина пакета в импульсном пространстве. Ширина возникает вследствие неопределённостей процесса рождения нейтрино. $\vec{\bar{p}}_i$ — средний импульс волнового пакета.

Воспользуемся приближённым соотношением

$$E_i(p) = \bar{E}_i + (\vec{p} - \vec{\bar{p}}_i)\vec{\bar{v}}_i .$$

$$\bar{E}_i = \sqrt{\bar{p}_i^2 + m_i^2}\ , \quad \vec{v}_i = \frac{\vec{\bar{p}}_i}{\bar{E}_i}$$

v_i — групповая скорость волнового пакета. С учётом этих соотношений получаем, интегрируя $\psi_i^P(\vec{x},t;\vec{x}_P,t_P)$ по p,

$$\psi_i^P(\vec{x},t;\vec{x}_P,t_P) = \frac{1}{(2\pi\sigma_{xP}^2)^{3/4}}\, e^{i\vec{\bar{p}}_i(\vec{x}-\vec{x}_P) - i\bar{E}_i(t-t_P)}$$

$$\cdot \exp\left[-\frac{[(\vec{x}-\vec{x}_P) - \vec{\bar{v}}_i(t-t_P)]^2}{4\sigma_{xP}^2}\right]$$

$$\sigma_{xP} \cdot \sigma_{pP} = \frac{1}{2} .$$

Волновую функцию нейтрино в области детектирования (D) запишем в виде

$$\psi_i^D(\vec{x},t;\vec{x}_D,t_D) \sim e^{i\vec{\bar{p}}_i(\vec{x}-\vec{x}_D) - i\bar{E}_i(t-t_D)}$$

$$\cdot \exp\left[-\frac{(\vec{x}-\vec{x}_D)^2}{4\sigma_{xD}^2} - \frac{(t-t_D)^2}{4\sigma_{tD}^2}\right]$$

Эта функция имеет максимум при $\vec{x}=\vec{x}_D$, $t=t_D$, аналогично тому, что ψ_i^P имеет максимум при $\vec{x}=\vec{x}^P$, $t=t_P$.

Амплитуда перехода $\nu_\alpha \to \nu_\beta$:

$$A(\alpha\to\beta; L, T) = \int dt \left\langle \nu_\beta^D(t) \middle| \nu_\alpha(t) \right\rangle$$

$$\vec{L} = \vec{x}_D - \vec{x}_P \quad ; \quad T = t_D - t_P$$

$$A(\alpha\to\beta; L, T) =$$
$$= \sum_i U_{\beta i} U_{\alpha i}^* \int dt\, d^3x\, \psi_i^{D*}(\vec{x}, t; \vec{x}_D, t_D)\, \psi_i^P(\vec{x}, t; \vec{x}_P, t_P)$$

Интегрируя по t и $\vec{x}$, с использованием гауссовых интегралов типа

$$\int_0^\infty x^{\nu-1} e^{-\beta x^2 - \gamma x} dx = \left(\frac{1}{\sqrt{2\beta}}\right)^\nu \exp\left(\frac{\gamma^2}{8\beta}\right) D_{-1}\left(\frac{\gamma}{\sqrt{2\beta}}\right),$$

$$D_{-1}(z) \simeq e^{\frac{z^2}{4}} \cdot \sqrt{\frac{\pi}{2}},$$

получаем для амплитуды перехода выражение

$$A(\nu_\alpha\to\nu_\beta) \sim \sum_i U_{\beta i} U_{\alpha i}^* e^{i\vec{p}_i\vec{L} - \bar{E}_i T} \cdot \exp\left[-\frac{(\vec{L}-\vec{v}_i T)^2}{4\sigma_{xi}^2}\right],$$

$$\sigma_{xi}^2 = \sigma_{xP}^2 + \sigma_{xD}^2 + \vec{v}_i^2 \sigma_{tD}^2$$

Вероятность перехода $\nu_\alpha \to \nu_\beta$ получается квадрированием амплитуды перехода, как обычно.

$$\mathcal{P}(\nu_\alpha \to \nu_\beta; L, T) \sim$$

$$\sim \sum_{i,j} U_{\beta i} U^*_{\alpha i} U^*_{\beta j} U_{\alpha j} \, e^{i(\bar{\vec{p}}_i - \bar{\vec{p}}_j)L - i(\bar{E}_i - \bar{E}_j)T} .$$

$$\cdot \exp\left[- \frac{(\vec{L} - \bar{\vec{v}}_i T)}{4\sigma_x^2} - \frac{(L - \bar{\vec{v}}_j T)^2}{4\sigma_x^2} \right],$$

$$\sigma_x^2 = \sigma_{xP}^2 + \sigma_{xD}^2 + \sigma_{tD}^2 .$$

Для сравнения, в приближении плоских волн имеем выражение

$$\mathcal{P}(\nu_\alpha \to \nu_\beta; L, T) = \sum_i |U_{\beta i}|^2 |U_{\alpha i}|^2 +$$

$$+ 2\mathrm{Re}\left[\sum_{i<j} U_{\beta i} U^*_{\alpha i} U^*_{\beta j} U_{\alpha j} \exp\left[i(\vec{p}_i - \vec{p}_j)L - i(E_i - E_j)T \right] \right]$$

Осцилляционная фаза

$$\varphi \equiv (p_i - p_j)L - (E_i - E_j)T$$

Как убрать T – неизмеряемую величину? Сначала рассмотрим случай плоских волн.

Основное предположение – $p_i = p_j = p$

Используя это предположение, получаем для фазы:

$$\varphi = -(E_i - E_j)T = -\frac{E_i^2 - E_j^2}{E_i + E_j} T = \frac{m_j^2 - m_i^2}{E_i + E_j} \cdot T =$$

$$= \frac{m_j^2 - m_i^2}{2\bar{E}} \cdot T ; \quad \bar{E} = \frac{E_i + E_j}{2} .$$

В релятивистском пределе можно записать:

$$E_i = \sqrt{p^2 + m_i^2} = p_0 + \frac{m_i^2}{2p_0} + O\left(\frac{m_i^4}{p_0^3}\right),$$

где p_0 - импульс и энергия безмассового нейтрино.

L и T связаны формулой

$$\frac{L}{T} = v_i = \frac{p_0}{E_i} = 1 - \frac{m_i^2}{2p_0^2}.$$

Таким образом, в окончательной формуле для вероятности перехода остаётся только $p_0 \equiv E$ (импульс и энергия безмассового нейтрино) и L.

В случае волновых пакетов эти формулы неприменимы, поскольку в формулах средние значения $\bar{p}_i$ и $\bar{E}_i$. Поэтому единственный способ избавиться от T - проинтегрировать по нему. При интегрировании используем приближённые соотношения:

$$\vec{\bar{p}}_i \approx \vec{p}_0 ; \quad \bar{E}_i \approx p_0 + \frac{m_i^2}{2p_0} ; \quad \vec{\bar{v}}_i \approx \frac{\vec{p}_0}{p_0}\left(1 - \frac{m_i^2}{2p_0^2}\right)$$

; p_0 - то же, что и выше.

Результат интегрирования по T:

$$P(\nu_\alpha \to \nu_\beta, \vec{L}) = \sum_{i,j} U_{\beta i} U^*_{\alpha i} U^*_{\beta j} U_{\alpha j} \cdot$$

$$\cdot \exp\left[-2\pi i \frac{L}{L_{ij}^{osc}} - 2\pi^2 \left(\frac{\sigma_x}{L_{ij}^{osc}}\right)^2 - \left(\frac{L}{L_{ij}^{coh}}\right)^2\right]$$

$L_{ij}^{osc} = \frac{4\pi E}{m_i^2 - m_j^2}$ - длина осцилляции - та же формула и в случае плоских волн.

$L_{ij}^{coh} = \frac{4\sqrt{2}E^2}{m_k^2 - m_j^2} \cdot \sigma_x$ - "длина когерентности".

Длина когерентности определяется как расстояние

$$\left| \frac{x_1 + x_2}{2} - x_p \right|$$

от источника, при котором два волновых пакета расходятся на расстояние $\sim 2\sigma_x$, т.е.

$$\begin{cases} L^{ij}_{coh} = \frac{v_1+v_2}{2}\Delta t \\ (v_i - v_j)\Delta t \approx 2\sigma_x \end{cases} \rightarrow L^{ij}_{coh} = \frac{|\vec{v}_1+\vec{v}_2|}{|\vec{v}_1-\vec{v}_2|}\cdot\sigma_x .$$

Если $L \gg L^{ij}_{coh}$ для всех $i \neq j$, то все осцилляционные члены в $P(\alpha \to \beta, L)$ подавлены. При этом получаем для P выражение

$$P(\alpha \to \beta) = \sum_i |U_{\alpha i}|^2 |U_{\beta i}|^2 ,$$

т.е. нет зависимости вероятности перехода от длины пути, пройденной нейтрино, вылетевшего из источника.

Если $\sigma_x \gg L^{ij}_{osc}$, то осцилляции подавлены. Для существования осцилляционной картины необходимо, чтобы размер ~~детектора~~ источника был много меньше длины осцилляции.

Если выполняются два условия:

$$L \ll L^{ij}_{coh} , \quad \sigma_x \ll L^{ij}_{osc} ,$$

то приближение плоских волн удовлетворительно.

Волновой пакет в x-пространстве (пусть $x_p = t_p = 0$), для i-состояния

$$\psi_i(\vec{x}, t) \sim e^{i\vec{p}_i\vec{x} - iE_i t} \cdot \exp\left[-\frac{(\vec{x} - \vec{v}_i t)^2}{4\sigma_x^2}\right].$$

"Огибающая" волнового пакета (для флэйворного состояния):

$$\sum_i U_{\alpha i}^* \exp\left[\frac{-(\vec{x} - \vec{v}_i t)^2}{4\sigma_x^2}\right].$$

$$L_{ik}^{coh} = \frac{4\sqrt{2}E^2}{|\Delta m_{ik}|^2}\sigma_x =$$

$$= 7347\,\text{км}\left(\frac{E}{MeV}\right)^2 \cdot \left(\frac{7{,}7\cdot 10^{-3}\,eV^2}{\Delta m_{ik}^2}\right) \cdot \frac{\sigma_x}{\text{Å}}.$$

Для реакторных экспериментов:

$$10^{-3}\,\text{Å} \lesssim \sigma_x < 10^1\,\text{Å}$$

$$100\,\text{км} < L_{21}^{coh} \lesssim 10^6\,\text{км}$$

Чем больше σ_x, тем больше длина когерентности.

$$\sigma_p \sim \frac{1}{\sigma_x}.$$

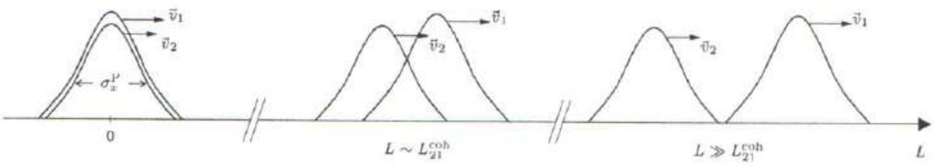


FIG. 8.3. Schematic illustration of the separation of two wave packets with different group velocities, produced coherently at $L = 0$ with widths $\sigma_x^{\rm P}$ determined by the coherence size of the production process. The coherence size of the detection process is assumed to be negligible.

Since $|\vec{\varepsilon}_L|^2 \ll 1$, the effect of $\vec{\varepsilon}_L$ is negligible in the damping terms in the expression in eqn (8.99) for the oscillation probability. The effect of $\vec{\varepsilon}_L$ could be relevant only for the oscillation phase, which is given, at first order in $|\vec{\varepsilon}_L|$, by

$$-\left[\left(\tilde{E}_k - \tilde{E}_j\right)\frac{\vec{v}_k + \vec{v}_j}{v_k^2 + v_j^2} - \left(\tilde{\vec{p}}_k - \tilde{\vec{p}}_j\right)\right] \cdot \vec{L} \simeq -\frac{\Delta m_{kj}^2 L}{2E}\left(1 - \vec{\varepsilon}_L \cdot \vec{\xi}\right). \tag{8.111}$$

However, as discussed in section 8.1.3, such effect of $\vec{\varepsilon}_L$ is negligible when the oscillation phase is measurable, i.e. $\Delta m_{kj}^2 L/2E \sim 1$. In this case, the oscillation probability at the lowest order in the small quantities m_k^2/E^2 is given by

$$P_{\nu_\alpha \to \nu_\beta}(\vec{L}) = \sum_{k,j} U_{\alpha k}^* U_{\alpha j} U_{\beta k} U_{\beta j}^* \exp\left[-2\pi i \frac{L}{L_{kj}^{\rm osc}} - \left(\frac{L}{L_{kj}^{\rm coh}}\right)^2 - 2\pi^2\left(1 - \frac{\vec{L}\cdot\vec{\xi}}{L}\right)^2\left(\frac{\sigma_x}{L_{kj}^{\rm osc}}\right)^2\right], \tag{8.112}$$

with the standard oscillation lengths in eqn (7.31) and the coherence lengths

$$L_{kj}^{\rm coh} = \frac{4\sqrt{2}E^2}{|\Delta m_{kj}^2|}\,\sigma_x\,. \tag{8.113}$$

As remarked at the end of subsection 8.2.1, in the limit of negligible wave packet effects, i.e. for $L \ll L_{kj}^{\rm coh}$ and $\sigma_x \ll L_{kj}^{\rm osc}$, the oscillation probability in the wave packet approach reduces to the standard one in eqn (7.23), obtained in the plane wave approximation.

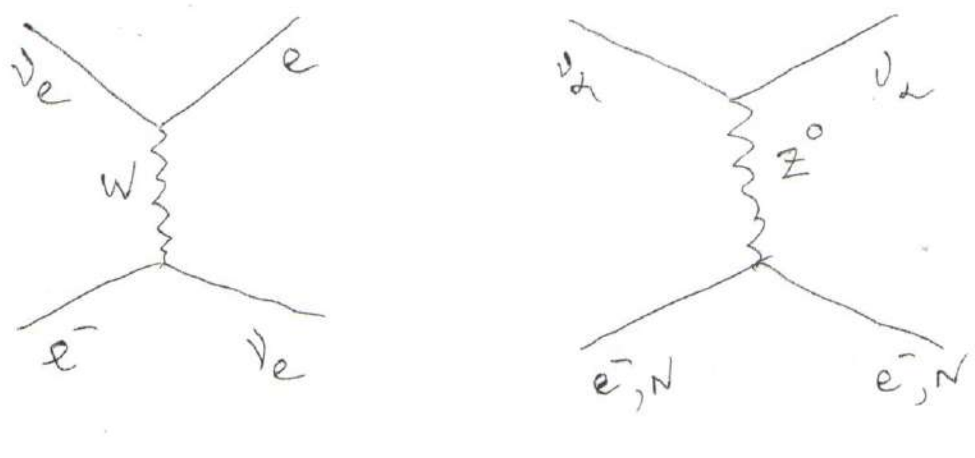
Let us discuss the physical meaning of the *localization term*

$$\exp\left[-2\pi^2\left(1 - \frac{\vec{L}\cdot\vec{\xi}}{L}\right)^2\left(\frac{\sigma_x}{L_{kj}^{\rm osc}}\right)^2\right], \tag{8.114}$$

and the *coherence term*

$$\exp\left[-\left(\frac{L}{L_{kj}^{\rm coh}}\right)^2\right], \tag{8.115}$$

Осцилляции при распространении нейтрино в веществе



$\alpha = e, \mu, \tau$

Эффективное четырехфермионное взаимодействие при низких энергиях:

$$H_w = \frac{G_F}{\sqrt{2}}\left[J^{(+)\alpha}(x)\,J^{(-)}_\alpha(x) + \frac{1}{4} J^{(N)\alpha}(x)\,J^{(N)}_\alpha(x)\right]$$

$$J^{(+)}_\alpha(x) = \bar{\nu}_e(x)\gamma_\alpha(1-\gamma_5)e(x)$$

$$J^{(-)}_\alpha(x) = \bar{e}(x)\gamma_\alpha(1-\gamma_5)\nu_e(x)$$

$$J^{(N)}_\alpha = \bar{\nu}_e(x)\gamma_\alpha(1-\gamma_5)\nu_e(x) - \bar{e}(x)\left[\gamma_\alpha(1-\gamma_5) - 4\sin^2\Theta_w\gamma_\alpha\right]e(x) + \bar{p}(x)\left[\gamma_\alpha(1-\gamma_5\cdot g_A^{(p)}) - 4\sin^2\Theta_w\gamma_\alpha\right]p(x) - \bar{n}(x)\gamma_\alpha(1-\gamma_5\cdot g_A^{(n)})n(x),$$

$g_A^{(n,p)}$ – аксиальные константы связи.

Рассмотрим только эффект вещества за счет заряженных токов.

Вклад электронов в гамильтониан:

$$\mathcal{H}_{cc}^{(e)} = \frac{G_F}{\sqrt{2}} \int d^3p_e\, f(E_e, T) \cdot$$

$$\cdot \left\langle \langle e(s,p_e)| \bar{e}(x)\gamma^\alpha(1-\gamma_5)\nu_e(x)\bar{\nu}_e(x)\gamma_\alpha(1-\gamma_5)e(x)|e\rangle \right\rangle =$$

$$= \frac{G_F}{\sqrt{2}} \bar{\nu}_e(x)\gamma_\alpha(1-\gamma_5)\nu_e(x) \int d^3p_e\, f(E_e, T) \cdot$$

$$\cdot \left\langle \langle e(s,p_e)| \bar{e}(x)\gamma_\alpha(1-\gamma_5)e(x)|e(s,p_e)\rangle \right\rangle .$$

Здесь s - спин электрона, p_e - импульс. Распределение по энергиям электронов в веществе предполагается однородным и изотропным, т.е.

$$\int d^3p_e\, f(E_e,T) = 1 \; , \; \int d^3p_e\, \vec{p}_e f(E_e,T) = 0 .$$

$\langle \ldots \rangle$ - усреднение по спинам электронов и суммирование по всем электронам среды. s, p_e одинаковы для электронов в начале и конце взаимодействия.

Разлагая $e(x)$ по плоским волнам, получим

$$\langle e(s,p_e)|\bar{e}(x)\gamma_\alpha(1-\gamma_5)e(x)|e(s,p_e)\rangle =$$

$$= \frac{1}{V} \langle e(s,p_e)|\bar{u}_s(p_e)a_s^+(p_e)\gamma_\alpha(1-\gamma_5)a_s(p_e)u_s(p_e)|e(s,p_e)\rangle .$$

V - нормировочный объём. Усреднение даёт:

$$\frac{1}{V} \left\langle \langle e(s,p_e)|a_s^+(p_e)a_s(p_e)|e(s,p_e)\rangle \right\rangle = N_e(p_e)\, \frac{1}{2}\sum_s$$

Здесь $N_e(p_e)$ - плотность электронов с импульсом p_e.

Здесь использовано то, что $a_s^+(p_e)a_s(p_e)$ - оператор числа частиц. Окончательно имеем:

$$\langle\langle e(s,p_e)|\bar{e}(x)\gamma_\alpha(1-\gamma_5)e(x)|e(s,p_e)\rangle\rangle =$$

$$= N_e(p_e)\frac{1}{2}\sum_s \bar{u}_s(p_e)\gamma_\alpha(1-\gamma_5)u_s(p_e) =$$

$$= N_e(p_e)\cdot\frac{1}{2}\,\mathrm{Tr}\left[\frac{m+\not{p}}{2E}\gamma_\alpha(1-\gamma_5)\right] = N_e(p_e)\frac{p_e^\alpha}{E_e} \qquad (*)$$

Вследствие вышеупомянутой изотропии только p^0-член дает вклад,

$$\int d^3p_e\, f(E_e,T)N_e(p_e) = N_e.$$

N_e - плотность электронов в веществе.

Подставляя $(*)$ в исходное выражение для $H_{cc}^{(e)}$, получим

$$H_{cc}^{(e)} = \frac{G_F N_e}{\sqrt{2}}\bar{\nu}_e(x)\gamma_0(1-\gamma_5)\nu_e(x).$$

Эффективный потенциал для ν_e, индуцированный CC-взаимодействием электронов в среде равен

$$V_c = \langle\nu_e|\int d^3x\, H_{cc}^{(e)}|\nu_e\rangle =$$

$$= \frac{G_F N_e}{\sqrt{2}}\cdot\frac{2}{V}\int d^3x\, u_\nu^+ u_\nu = \sqrt{2}G_F N_e$$

Как показано выше, нейтринное состояние есть, в общем случае суперпозиция, например, в случае 2х флэйворов имеем:

$$|\psi(t)\rangle = a_1(t)|\nu_e\rangle + a_2(t)|\nu_\mu\rangle$$

Зависимость $a_{1,2}$ от времени определяется ур-ем Шредингера:

$$i\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} a_1(t) \\ a_2(t) \end{pmatrix} = H'\begin{pmatrix} a_1(t) \\ a_2(t) \end{pmatrix}$$

$$H' = U\begin{pmatrix} E_1 & 0 \\ 0 & E_2 \end{pmatrix}U^{-1}, \quad U = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

$$H' = \frac{\Delta m^2}{4E}\begin{pmatrix} -\cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & \cos 2\theta \end{pmatrix}, \quad \Delta m^2 = m_2^2 - m_1^2$$

Соответственно, используя базис состояний с определённой массой, имеем суперпозицию

$$|\psi(t)\rangle = b_1(t)|\nu_1\rangle + b_2(t)|\nu_2\rangle$$

и уравнение Шредингера для коэффициентов $b_{1,2}$

$$i\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} b_1(t) \\ b_2(t) \end{pmatrix} = H\begin{pmatrix} b_1(t) \\ b_2(t) \end{pmatrix}, \quad H = \begin{pmatrix} E_1 & 0 \\ 0 & E_2 \end{pmatrix}.$$

Введём новые обозначения, для краткости записи:

$$a_1(t) = \langle\nu_e|\psi(t)\rangle \equiv \nu_e(t); \quad a_2(t) = \langle\nu_\mu|\psi(t)\rangle \equiv \nu_\mu(t).$$

$$b_1(t) = \langle\nu_1|\psi(t)\rangle \equiv \nu_1(t); \quad b_2(t) = \langle\nu_2|\psi(t)\rangle \equiv \nu_2(t)$$

$$\begin{pmatrix} \nu_e(t) \\ \nu_\mu(t) \end{pmatrix} = U\begin{pmatrix} \nu_1(t) \\ \nu_2(t) \end{pmatrix}.$$

Ещё одно обозначение:

$$H' \equiv \frac{M^2}{2E}, \quad M^2 \equiv \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -\Delta m^2\cos 2\theta & \Delta m^2\sin 2\theta \\ \Delta m^2\sin 2\theta & \Delta m^2\cos 2\theta \end{pmatrix}.$$

Вводим полученный выше эффективный потенциал для нейтрино в среде в выражение для H'

$$H' \to H'_m = \frac{M^2}{2E} + \begin{pmatrix} V_e & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \frac{M_m^2}{2E},$$

$$M_m^2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -\Delta m^2 \cos 2\theta + 2A & \Delta m^2 \sin 2\theta \\ \Delta m^2 \sin 2\theta & \Delta m^2 \cos 2\theta \end{pmatrix},$$

$$A \equiv 2\sqrt{2}\, E\, G_F N_e .$$

Теперь перепишем выражение для H'_m в виде, подобном H':

$$H'_m = \frac{\Delta m_m^2}{4E}\begin{pmatrix} -\cos 2\theta_m & \sin 2\theta_m \\ \sin 2\theta_m & \cos 2\theta_m \end{pmatrix}.$$

Такая форма записи позволяет записать вероятность перехода для нейтрино в среде в виде известной формулы

$$\mathcal{P}(\nu_e \to \nu_\mu) = \sin^2 2\theta_m \sin^2 \frac{\Delta m_m^2 L}{4E},$$

где

$$\Delta m_m^2 = C\,\Delta m^2, \quad \sin^2 2\theta_m = \frac{1}{C}\sin 2\theta,$$

$$C = \sqrt{\left(\cos 2\theta - A/\Delta m^2\right)^2 + \sin^2 2\theta}.$$

Таким образом, мы ввели "угол смешивания в среде", θ_m, и разность квадратов эффективных масс в среде, Δm_m^2.

Если $\cos 2\theta = A/\Delta m^2$, то $C = \sin 2\theta$ и, соответственно, $\sin 2\theta_m = 1$, $\theta_m = \pi/4$ (максимальное смешивание). Это MSW-резонанс. Независимо от угла смешивания в ваку-

цие, Θ, имеет место существенное усиление амплитуды осцил- 16
ляций, в точке, где выполняется условие резонанса.

$$L_\nu = \frac{4\pi E}{\Delta m^2}$$ - длина осцилляций в вакууме,

$$L_e = \frac{4\pi}{2\sqrt{2}G_F N_e}$$ - длина взаимодействия ν_e в среде.

Условие резонанса - $L_\nu = L_e \cos 2\Theta$

В центре Солнца $\rho(\text{core}) \sim 100 \frac{g}{cm^3}$, $N_e(\text{core}) \sim 3\cdot 10^{31} m^{-3}$,

$L_e(\text{core}) \sim 3\cdot 10^5 m$, $R_\odot \sim 10^9 m$.

Солнечное нейтрино с энергией, превышающей

$$E_{min} = \Delta m^2 \frac{\cos 2\Theta}{2\sqrt{2}G_F N_e(\text{core})}$$

всегда проходят область резонанса при своём движении от центра.

Если $\Theta_S \sim 30°$, $\Delta m^2_S \sim 8\cdot 10^{-5} eV^2$, то $E_{min} \sim 1 MeV$.

В случае вакуума гамильтониан H равен $\begin{pmatrix} E_1 & 0 \\ 0 & E_2 \end{pmatrix}$. Но, если его получать из $H' = \frac{M^2}{2E}$ с помощью преобразования

$$H = U^{-1} H' U,$$

то получится

$$H = \frac{1}{4E}\begin{pmatrix} -\Delta m^2 & 0 \\ 0 & \Delta m^2 \end{pmatrix}.$$

Это связано с тем, что из H' выделена диагональная часть, как объяснялось выше. Аналогично, в случае среды получим

7

$$H_m = U_m^{-1} H_m' U_m \;, \quad U_m = \begin{pmatrix} \cos\Theta_m & \sin\Theta_m \\ -\sin\Theta_m & \cos\Theta_m \end{pmatrix}$$

$$H_m' = \frac{M_m^2}{2E} \;, \quad H_m = \frac{1}{4E}\begin{pmatrix} -\Delta m_m^2 & 0 \\ 0 & \Delta m_m^2 \end{pmatrix}.$$

Здесь $\Delta m_m^2 = m_{2m}^2 - m_{1m}^2$

Разумеется, можно легко найти и по-отдельности m_{1m}^2 и m_{2m}^2, если проводить диагонализацию точно, без выделения диагональных частей. Ответ такой:

$$m_{1m,2m}^2 = \frac{A}{2} \mp \frac{1}{2}\sqrt{\left(A - \Delta m^2 \cos 2\Theta\right)^2 + \left(\Delta m^2\right)^2 \sin^2 2\Theta}\,.$$

Из этой формулы видно, что эффективные значения квадратов масс в среде зависят от A, то есть от плотности электронов в среде. Проблема (вычислительная) в том, что A меняется при движении нейтрино через среду, поскольку плотность электронов в среде меняется от точки к точке. От A зависит и угол смешивания в среде, Θ_m.

Уравнение Шредингера для флэйворных состояний $(z = t)$:

$$i\frac{d}{dz}\begin{pmatrix} \nu_e(z) \\ \nu_\mu(z) \end{pmatrix} = \frac{M_m^2}{2E}\begin{pmatrix} \nu_e(z) \\ \nu_\mu(z) \end{pmatrix}.$$

Запишем аналогичное уравнение в базисе состояний с определённой массой m_m (для движения в среде). Воспользуемся связью волновых функций:

$$\begin{pmatrix} \nu_e(z) \\ \nu_\mu(z) \end{pmatrix} = U_m \begin{pmatrix} \nu_{1m}(z) \\ \nu_{2m}(z) \end{pmatrix} , \quad U_m = \begin{pmatrix} \cos\Theta_m & \sin\Theta_m \\ -\sin\Theta_m & \cos\Theta_m \end{pmatrix}$$

Введем обозначения:

$$\begin{pmatrix} \nu_e(z) \\ \nu_\mu(z) \end{pmatrix} \equiv \nu_\alpha(z) \;; \quad \begin{pmatrix} \nu_{1m}(z) \\ \nu_{2m}(z) \end{pmatrix} \equiv \nu_{im}(z)$$

$$i\frac{d}{dz}\nu_\alpha(z) = i\frac{d}{dz}\left[U_m \nu_{im}(z)\right] = H'_m \nu_\alpha(z), \quad H'_m = \frac{M_m^2}{2E}$$

$$i\frac{d}{dz}\nu_\alpha(z) = i\frac{dU_m}{dz}\nu_{im}(z) + iU_m\frac{d\nu_{im}(z)}{dz},$$

Отсюда $$i\frac{d\nu_{im}(z)}{dz} = -iU_m^{-1}\frac{dU_m}{dz}\nu_{im}(z) + U_m^{-1}H'_m U_m \nu_{im}(z) =$$

$$= H_m \nu_{im}(z) - iU_m^{-1}\frac{dU_m}{dz}\nu_{im}(z)$$

$$\frac{dU_m}{dz} = \frac{dU_m}{d\Theta_m}\frac{d\Theta_m}{dz} = \begin{pmatrix} -\sin\Theta_m & \cos\Theta_m \\ -\cos\Theta_m & -\sin\Theta_m \end{pmatrix}\frac{d\Theta_m}{dz}; \quad U_m^{-1} = \begin{pmatrix} \cos\Theta_m & -\sin\Theta_m \\ \sin\Theta_m & \cos\Theta_m \end{pmatrix}$$

$$U_m^{-1}\frac{dU_m}{dz} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{d\Theta_m}{dz} \\ -\frac{d\Theta_m}{dz} & 0 \end{pmatrix}.$$ Отсюда следует ур-е Михеева-Смирнова:

$$i\frac{d}{dz}\begin{pmatrix} \nu_{1m} \\ \nu_{2m} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\Delta m_m^2}{4E} & -i\frac{d\Theta_m}{dz} \\ i\frac{d\Theta_m}{dz} & \frac{\Delta m_m^2}{4E} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \nu_{1m} \\ \nu_{2m} \end{pmatrix}.$$

Из этого уравнения следует, что, с учетом зависимости $\Theta_m(z)$, матрица в правой части недиагональна, т.е. возможны переходы между состояниями, имеющими в среде массы m_{1m} и m_{2m} (эти состояния нестационарны). Если пренебречь недиагональными членами, содержащими $d\Theta_m/dz$, то, хотя массы m_{1m} и m_{2m} меняются с изменением z, пересечений траекторий $m_{1m}(z)$ и $m_{2m}(z)$ не будет. Это так называемое <u>адиабатическое приближение</u>.

Вспомним теперь условие резонанса

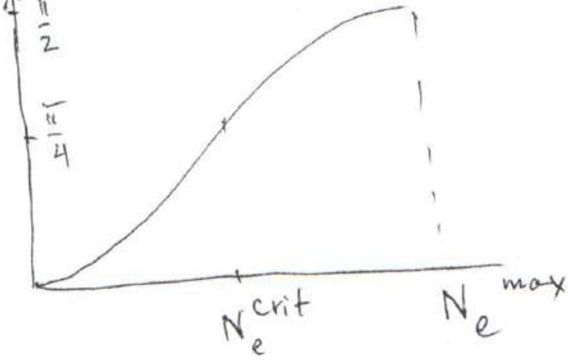
$$A = \Delta m^2\cos 2\Theta, \quad A = 2\sqrt{2}EG_F N_e$$

При этом $$\sin^2 2\Theta_m = 1, \quad \Theta_m = \frac{\pi}{4}.$$

Если $A \gg \Delta m^2 \cos 2\Theta$, то $\Theta_m \gg \frac{\pi}{4}$. В пределе $A \to \infty$

$$\Theta_m \to \frac{\pi}{2}, \quad \sin 2\Theta_m \to 0.$$

Поскольку $A \sim N_e$, то A максимально в центре Солнца. При движении нейтрино от центра к периферии угол Θ_m уменьшается от $\frac{\pi}{2}$ к нулю, переходя через $\frac{\pi}{4}$ в точке резонанса



$$N_e^{crit} = \frac{1}{2\sqrt{2}G_F} \cdot \frac{\Delta m^2}{E} \cos 2\Theta$$

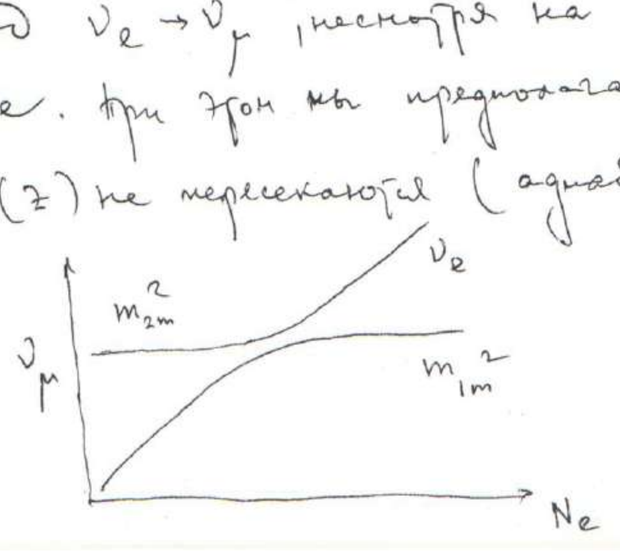
При выходе из среды (Солнца) $\Theta_m \to \Theta$. Предположим, что Θ мало. Тогда имеем

$$\begin{pmatrix} \nu_e \\ \nu_\mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\Theta_m & \sin\Theta_m \\ -\sin\Theta_m & \cos\Theta_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_{1m} \\ \nu_{2m} \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_{1m} \\ \nu_{2m} \end{pmatrix}$$

В то же время при рождении нейтрино ν_e в центре имеем

$$\begin{pmatrix} \nu_e \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_{1m} \\ \nu_{2m} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \nu_{2m} \\ \nu_{1m} \end{pmatrix}.$$

Отсюда следует, что при рождении $\nu_e \approx \nu_{2m}$, а при вылете из среды $\nu_{2m} \approx \nu_\mu$. Таким образом, происходит, вследствие резонанса, почти полный переход $\nu_e \to \nu_\mu$, несмотря на малость угла смешивания в вакууме. При этом мы предполагали, что траектории $m_{1m}(z)$ и $m_{2m}(z)$ не пересекаются (адиабатическое приближение).



В области резонанса сильно увеличивается длина осцилляций. В вакууме эта длина равна

$$L^{v}_{осц} = \frac{4\pi E}{\Delta m^2},$$

а в среде

$$L^{m}_{осц} = \frac{4\pi E}{\Delta m_m^2} = \frac{L^{v}_{osc}}{\sqrt{\left(\cos 2\theta - \frac{A}{\Delta m^2}\right)^2 + \sin^2 2\theta}}$$

В резонансе

$$L^{m}_{осц} = \frac{L^{v}_{ose}}{\sin 2\theta}.$$

Вероятность выживания (в адиабатическом приближении)

$$P_{\nu_e\to\nu_e}(t) = \cos^2\theta_m \cos^2\theta + \sin^2\theta_m \sin^2\theta + \frac{1}{2}\sin 2\theta_m \sin 2\theta \cos\frac{\delta(t)}{2E},$$

$$\delta(t) = \int_{t_0}^{t} \sqrt{\left(\Delta m^2 \cos 2\theta - A\right)^2 + \left(\Delta m^2 \sin 2\theta\right)^2}\, dt'$$

Если $\delta(t) \gg E$, то последний член можно отбросить. Тогда

$$P_{\nu_e\to\nu_e}(t) = \frac{1}{2}\left[1 + \cos 2\theta_m \cos 2\theta\right].$$

В этих формулах θ_m – угол смешивания <u>в точке рождения</u>.

Учет неадиабатических эффектов приводит к формуле

$$P_{\nu_e\to\nu_e} = \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2} - P_f\right)\cos 2\theta \cos 2\theta_m.$$

Здесь P_f – вероятность "перескока" $\nu_{2m} \to \nu_{1m}$,

$$P_f = \exp\left(-\frac{\pi}{2}\gamma\right),$$

$$\gamma = \frac{\Delta m^2 \sin^2 2\theta}{2E \cos 2\theta \frac{1}{N_e}\cdot\frac{dN_e}{dZ}}$$

Массы нейтрино в расширенной Стандартной Модели.

I. Почему в СМ масса нейтрино равна 0?

1) в СМ нет правых нейтрино (ν_R)
2) в СМ есть только хиггсовский дублет H и лептонные дублеты L,

$$H = \begin{pmatrix} H^{(+)} \\ H^{(0)} \end{pmatrix}, \quad L_{\alpha L} = \begin{pmatrix} \nu_{\alpha L} \\ \alpha_L \end{pmatrix},$$

$$\alpha = e, \mu, \tau$$

3) в лагранжиане СМ отсутствуют неперенормируемые члены типа

$$\mathcal{L}^{eff} = \frac{1}{\Lambda} \sum_{\alpha', \alpha} \left(\bar{L}_{\alpha' L} \tilde{H} Y_{\alpha' \alpha} \tilde{H}^T (L_{\alpha L})^c \right) + h.c.$$

$$\tilde{H} = i\sigma_2 H^*,$$

Λ - константа размерности энергии.

Если $\tilde{H} \to \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} v \\ 0 \end{pmatrix}$ - (спонтанное нарушение электрослабой симметрии), то

$$\mathcal{L}^{eff} \to \mathcal{L}^M = -\frac{1}{2} \sum_{\alpha', \alpha} \bar{\nu}_{\alpha' L} M^L_{\alpha' \alpha} (\nu_{\alpha L})^c + h.c.$$

$$M^L_{\alpha' \alpha} = \frac{v^2}{\Lambda} Y_{\alpha' \alpha}.$$

После диагонализации имеем:

$$\mathcal{L}^M = -\frac{1}{2}\sum_k m_k \bar{\nu}_k \nu_k \quad , m_k \sim \frac{v^2}{\Lambda},$$

$$\nu_k = \nu_k^c ,$$

т.е. ν_k - оператор поля майорановского нейтрино массы m_k.

Пример с $\mathcal{L}^{eff}$, добавленным к лагранжиану СМ, показывает, как можно, расширяя СМ, снабдить нейтрино массой. В этом примере используются только те поля, которые имеются в СМ (не добавлено ν_R или новые хиггсовские бозоны).

II. Нейтрино - дираковская или майорановская частица?

Если майорановская, то

$$\mathcal{L}_L^M = M^L \bar{\nu}_L \nu_L^c + h.c.$$

или

$$\mathcal{L}_R^M = M^R \bar{\nu}_R \nu_R^c + h.c.$$

(Лептонное число не сохраняется).

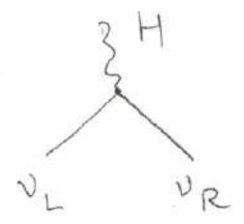
Кроме того, есть член

$$\mathcal{L}^D = M^D \bar{\nu}_R \nu_L + h.c.$$

Если же нейтрино дираковское, то $\mathcal{L}_L^M$ и $\mathcal{L}_R^M$ запрещены законом сохранения лептонного числа.

III. Если нейтрино дираковское, то

$$M_D \sim \lambda_\nu v \bar{\nu}_L \nu_R$$



$H \to v$

$v \sim 200$ GeV, $M_D \lesssim 0{,}1$ eV,

$$\lambda_\nu \sim \frac{0.1\,\text{eV}}{2\cdot 10^{11}\,\text{eV}} \sim 10^{-12}$$

Нейтринные модели, в которых нейтрино - дираковская частица, должны объяснить 2 вещи: почему константа λ_ν так мала и каков механизм, запрещающий майорановские массы, $\mathcal{L}^M_{L,R}$. Такие модели есть (например, модели с дополнительной симметрией $U(1)_{B-L}$).

IV. Если нейтрино майорановское, то нужно учесть, что $\mathcal{L}^M_L$ запрещено (оно калибровочно неинвариантно - требуется триплет Хиггса),

а $\mathcal{L}^M_R$ - разрешено.

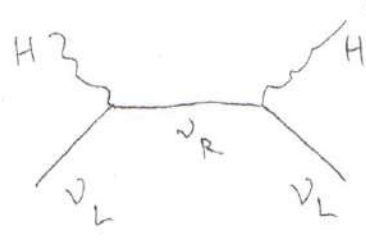
$$\mathcal{L}^M_R = M_R \overline{\nu^c_R} \nu_R + h.c.$$

(соответствующее взаимодействие <u>не связано</u> с электрослабым хиггсовским бозоном). ν_R - синглет по $SU(2)$-группе, в отличие от ν_L. M_R - масса ν_R ($\sim 10^{16}$ GeV).

Кроме этого, разрешено взаимодействие

$$\mathcal{L} = \sum_{\alpha,k} Y_{\alpha k} \bar{L}_{\alpha L} \nu_{kR} \tilde{H} + h.c.$$

Масса лёгкого нейтрино возникает во втором порядке:



Пропагатор ν_R даёт множитель $\frac{1}{M_R}$, что соответствует $\frac{1}{v}$ в лагранжиане $\mathcal{L}^{eff}$ (см. выше). Таким образом, реализовался лагранжиан, введённый выше как "эффективный". Это произошло благодаря добавлению к лагранжиану СМ члена $\mathcal{L}_R^M$, содержащего правые нейтрино.

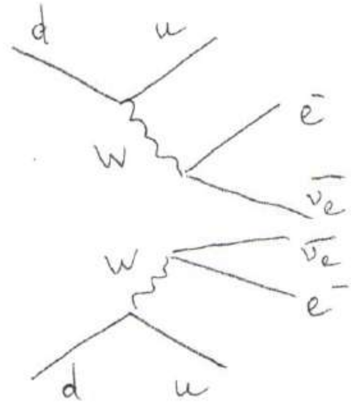
Масса лёгкого нейтрино, по порядку величины, равна

$$m_{\nu_L} \sim \lambda_\nu \cdot \frac{v^2}{M_R} \sim \lambda_\nu \cdot 10^{-3}\, eV.$$

($M_R \sim 10^{16}$ GeV – такие массы характерны для теорий "великого объединения").

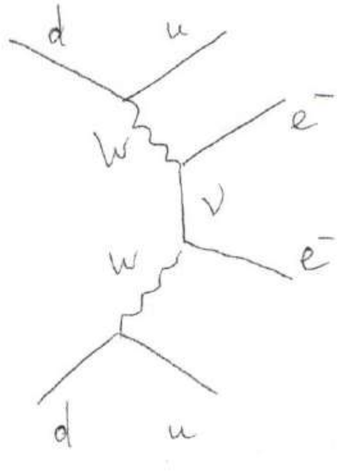
Безнейтринный двойной β-распад

$$N(A,Z) \to N(A,Z+2) + e^- + e^- + \bar{\nu}_e + \bar{\nu}_e \qquad \Delta L = 0$$



Нейтрино - дираковское или майорановское

$$N(A,Z) \to N(A,Z+2) + e^- + e^- \qquad \Delta L = 2$$



Нейтрино майорановское

$p = uud$
$n = udd$: $2n \to 2p$

Распад W-бозона в дираковском случае:

$$W^- \to e^- + \bar{\nu}_e \qquad \bar{\nu}_e \neq \nu_e .$$

Взаимодействие ν_e с W-бозоном:

$$\nu_e + W^- \to e^- .$$

Матричный элемент $(0\nu\beta\beta)$-распада имеет вид:

$$\langle f|S^{(2)}|i\rangle \sim \left(\frac{G_F}{\sqrt{2}}\right)^2 \int d^4x_1 d^4x_2 \cdot$$

$$\cdot \sum_i \bar{u}_L(p_1) e^{ip_1x_1} \gamma_\alpha U_{ei} \langle 0|T\left(\nu_{iL}(x_1)\nu_{iL}^T(x_2)\right)|0\rangle \cdot$$

$$\cdot \gamma_\beta^T U_{ei} \bar{u}_L^T(p_2) e^{ip_2x_2} \langle N_f|T\left(J^\alpha(x_1) J^\beta(x_2)\right)N_i\rangle$$

Пропагатор майорановского нейтрино.

$$\langle 0|T\left(\nu_{iL}(x_1)\nu_{iL}^T(x_2)\right)|0\rangle = \qquad \nu_i^T = -\bar{\nu}_i C$$

$$= \frac{1-\gamma_5}{2}\langle 0|T\left(\nu_i(x_1)\nu_i^T(x_2)\right)|0\rangle \frac{1-\gamma_5}{2}^T =$$

$$= -\frac{1-\gamma_5}{2}\langle 0|T\left(\nu_i(x_1)\bar{\nu}_i(x_2)\right)|0\rangle \frac{1-\gamma_5}{2} C =$$

$$= -m_i i \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \cdot \frac{e^{-ip(x_1-x_2)}}{p^2-m_i^2} \cdot \frac{1-\gamma_5}{2} C.$$

Масса нейтрино входит в комбинации

$$m_{\beta\beta} \equiv \sum_i U_{ei}^2 m_i.$$

Используя выражение для матрицы смешивания U, получим

$$m_{\beta\beta} = \cos^2\theta_{12}\cos^2\theta_{13} m_1 + e^{2i\lambda_1}\sin^2\theta_{12}\cos^2\theta_{13} m_2 + e^{2i(\lambda_2-\delta)}\sin^2\theta_{13} m_3 .$$

$\lambda_{1,2}$ - майорановские фазы, δ - дираковская фаза.

<u>Классический эксперимент по поиску массы нейтрино</u>

$$(Z,A) \to (Z+1,A) + e^- + \bar{\nu}_e$$

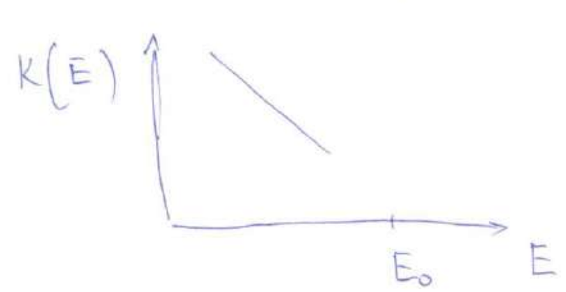
$$E_0 = M_i - M_f$$

Спектр электронов от β-распада

$$\frac{dN}{dE} \sim F(Z,E)\, pE(E_0-E)\left[(E_0-E)^2 - m_\nu^2\right]^{1/2}$$ без смешивания

$$K(E) = \sqrt{\frac{\frac{dN}{dE}}{pE\,F(Z,E)}} \sim \left\{(E_0-E)\left[(E_0-E)^2-m_\nu^2\right]^{1/2}\right\}^{1/2} \to$$

$$\xrightarrow[m_\nu \to 0]{} E_0 - E .$$



Если есть смешивание, то

$$K(E) \sim \left\{ (E_0 - E) \sum_k |U_{ek}|^2 \left[(E_0 - E)^2 - m_k^2 \right]^{1/2} \right\}^{1/2}$$

Приближённо можно записать:

$$K(E) \approx \left\{ (E_0 - E) \sqrt{(E_0 - E)^2 - m_\beta^2} \right\}^{1/2}$$

$$m_\beta^2 \cong \sum_i |U_{ei}|^2 m_i^2$$

Из эксперимента $m_\beta \lesssim 1\,eV$.

"<u>Осцилляции нейтрино-антинейтрино</u>"

В случае майорановских нейтрино сохранение лептонного числа имеет место только в приближении равных нулю масс частиц. Поэтому можно сохранить понятие антинейтрино - это просто нейтрино с положительной спиральностью.

Пусть в источнике создаётся пучок нейтрино от распада π^+-мезонов

$$\pi^+ \to \mu^+ + \nu_\mu .$$

В приближении $m_\nu = 0$ эти нейтрино имеют строго отрицательную спиральность. В источнике их "приготовляют" с этой спиральностью.

В детекторе (отдалённом) этот пучок регистрируется, используя реакцию рождения позитрона (или положительного мюона). В приближении $m_\nu = 0$ для рождения μ^+ нужна частица с положительной спиральностью (т.е., на Дираковском языке – антинейтрино). Поэтому, на пути от источника до детектора должны происходить "осцилляции нейтрино - антинейтрино".

Амплитуды таких переходов:

$$A(\nu_\alpha \to \bar{\nu}_\beta) = \sum_i \left[U^*_{\alpha i} U^*_{\beta i} \frac{m_i}{E} \exp\left(-i \frac{m_i^2}{2E} L\right) \right] K,$$

$$A(\bar{\nu}_\alpha \to \nu_\beta) = \sum_i \left[U_{\alpha i} U_{\beta i} \frac{m_i}{E} \exp\left(-i \frac{m_i^2}{2E} L\right) \right] \bar{K},$$

$K, \bar{K}$ – кинематические факторы, определяемые процессами в источнике и детекторе

Вероятность перехода:

$$P(\nu_\alpha \to \bar{\nu}_\beta) = \frac{|K|^2}{E^2} \left[|\langle m \rangle_{\alpha\beta}|^2 - 4 \sum_{i<j} m_i m_j C^{ij}_{\alpha\beta} \sin^2 \varphi_{ji} + 2 \sum_{i<j} m_i m_j V^{ij}_{\alpha\beta} \sin 2\varphi_{ji} \right]$$

$$\langle m \rangle_{\alpha\beta} \equiv \sum_i m_i U_{\alpha i} U_{\beta i}, \quad \varphi_{ji} \equiv \Delta m^2_{ji} L / 4E,$$

$$C^{ij}_{\alpha\beta} \equiv \mathrm{Re}\left(U_{\alpha i} U_{\beta i} U^*_{\alpha j} U^*_{\beta j} \right),$$

$$V^{ij}_{\alpha\beta} \equiv \mathrm{Im}\left(U_{\alpha i} U_{\beta i} U^*_{\alpha j} U^*_{\beta j} \right).$$

Примеры процессов, идущих с несохранением лептонного флэйвора (парциального лептонного числа)

$$\mu \to e\gamma \; ; \; \mu \to eee \, , \quad \text{Конверсия } \mu^- \to e^-$$

Процессы, идущие с несохранением полного лептонного числа:

$$K^- \to \pi^+ e^- e^- \; ; \; A(Z) \to A(Z-2) + 2e^+ \, ,$$

$$e^-_{Bound} + A(Z) \to A(Z-2) + e^+ \quad (e\text{-захват})$$

<u>Заключение</u>

Как было показано, что на Солнце происходят переходы $\nu_e \leftrightarrow \nu_\mu$. Это было сделано с помощью детектора SNO (Канада), работающего на тяжёлой воде (D_2O)

Электронные нейтрино регистрировались по реакции

$$\nu_e + d \to e + p + p \quad , \; E_{пор} = 1{,}4 \text{ MeV}.$$

Нейтрино всех типов (включая электронные) - по реакции

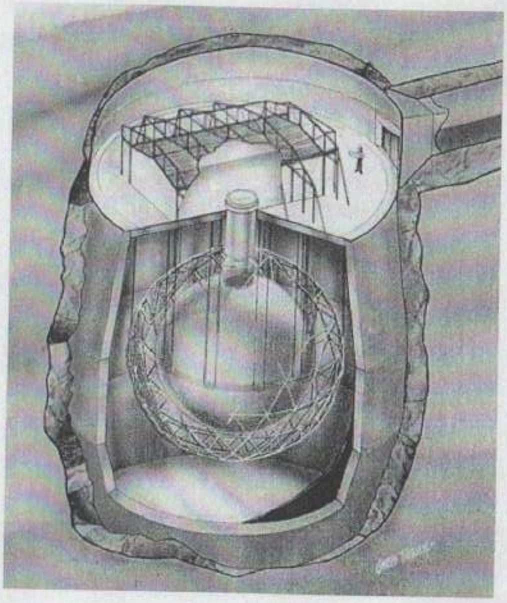
$$\nu_x + d \to \nu_x + n + p \quad , \; E_{пор} = 2{,}2 \text{ MeV}.$$

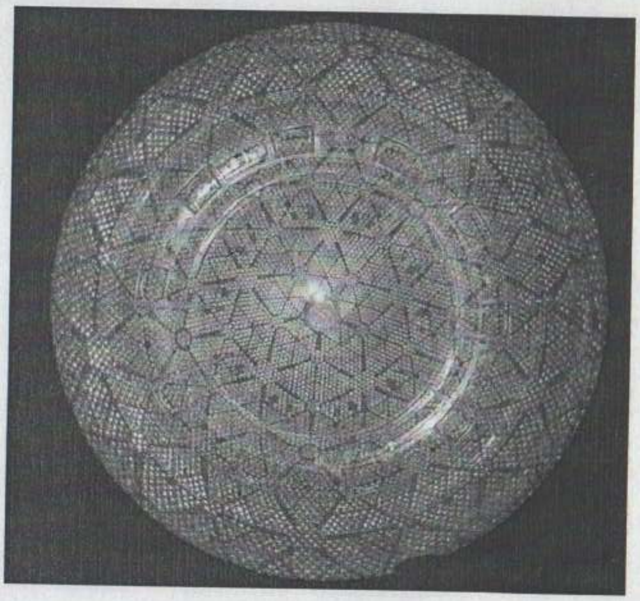
Сравнивая эти две реакции, было непосредственно продемонстрировано, что нейтрино меняет флэйвор.

Нейтрино с $E > 2$ MeV рождаются в центре Солнца в реакции

$$^8B \to {}^8Be + e^+ + \nu_e .$$

The Sudbury Neutrino Observatory: Observation of Flavor Change for Solar Neutrinos.





Art McDonald, Professor Emeritus

Queen's University, Kingston, Ontario, Canada

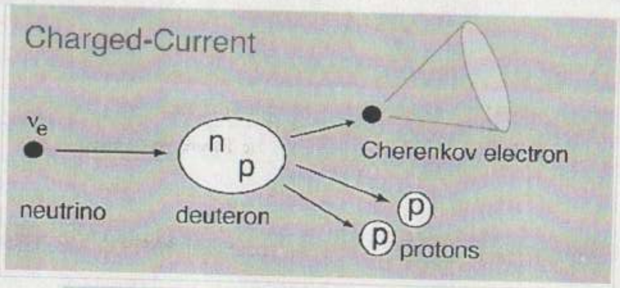
Unique Signatures in SNO (D_2O)

(1 in 6400 molecules in ordinary water are D_2O. We used >99.75% D_2O)

Electron Neutrinos (CC)

$\nu_e + d \rightarrow e^- + p + p$

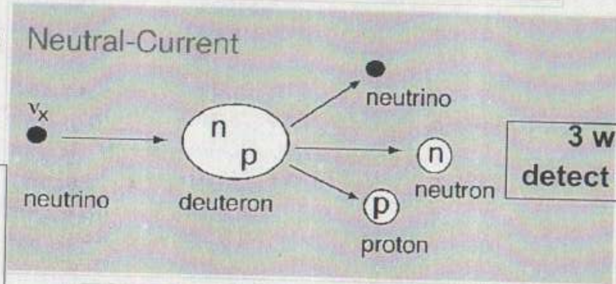
$E_{thresh} = 1.4$ MeV



Equal Sensitivity All Types (NC)

$\nu_x + d \rightarrow \nu_x + n + p$

$E_{thresh} = 2.2$ MeV



3 ways to detect neutrons

Comparing these two reactions tells if electron neutrinos have changed their type.

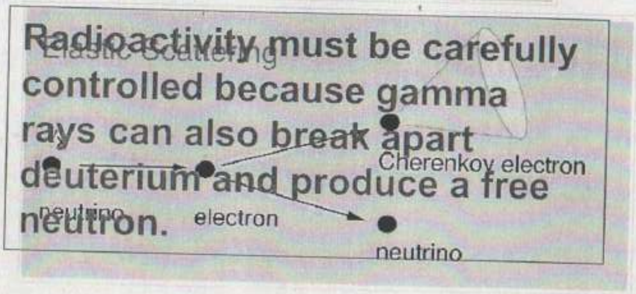
Elastic Scattering from Electrons

$\nu_x + e^- \rightarrow \nu_x + e^-$

ν_x, but enhanced for ν_e x 6

10 times lower count rate

Points away from the Sun



Radioactivity must be carefully controlled because gamma rays can also break apart deuterium and produce a free neutron.

[Диагонализация флэйворных матриц майорановского нейтрино

$$\mathcal{L}_L^{mass} = -\frac{1}{2}\sum_{\alpha,\beta} \overline{\nu^c_{\alpha L}} M^L_{\alpha\beta} \nu_{\beta L} + h.c. = \qquad \alpha = e, \mu, \tau$$

$$= \frac{1}{2} \nu_L^T C^+ M^L \nu_L + h.c. \qquad \nu_L = \begin{pmatrix} \nu_{eL} \\ \nu_{\mu L} \\ \nu_{\tau L} \end{pmatrix}$$

1. $M^L_{\alpha\beta}$ - симметричная матрица

Действительно, после транспонирования получаем

$$\sum_{\alpha,\beta} \nu^T_{\alpha L} C^+ M^L_{\alpha\beta} \nu_{\beta L} = -\sum_{\alpha,\beta} \nu^T_{\beta L} M^L_{\alpha\beta} (C^+)^T \nu_{\alpha L}$$

(знак минус - вследствие антикоммутативности фермионных полей). Поскольку $C^T = -C$, имеем

$$\sum_{\alpha,\beta} \nu^T_{\alpha L} C^+ M^L_{\alpha\beta} \nu_{\beta L} = \sum_{\alpha,\beta} \nu^T_{\beta L} C^+ M^L_{\alpha\beta} \nu_{\alpha L} \xrightarrow[\alpha \rightleftarrows \beta]{}$$

$$\sum_{\alpha,\beta} \nu^T_{\alpha L} C^+ M^L_{\beta\alpha} \nu_{\beta L}.$$ Следовательно, $M^L_{\alpha\beta} = M^L_{\beta\alpha}$

2. Диагонализация "по кускам".

$$V_L^T M^L V_L = M, \quad M_{kj} = m_k \delta_{kj}$$

$$(k, j) = 1, 2, 3$$

Вводим столбец $n_L = \begin{pmatrix} \nu_{1L} \\ \nu_{2L} \\ \nu_{3L} \end{pmatrix}$; $\nu_L = \begin{pmatrix} \nu_{eL} \\ \nu_{\mu L} \\ \nu_{\tau L} \end{pmatrix} = V n_L$.

$$\mathcal{L}_L^{mass} = -\frac{1}{2}\, \overline{n_L^c}\, M\, n_L + h.c. = -\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{3} m_k\, \overline{\nu_{kL}^c}\, \nu_{kL} + h.c.$$

$$\nu_k = \nu_{kL} + \nu_{kL}^c .$$

3. В случае общего лагранжиана $(D+M)$ вводим, для диагонализации суммы левых и правых нейтрино ("не флэйворная" диагонализация), столбец

$$N_L = \begin{pmatrix} \nu_L \\ \nu_R^c \end{pmatrix},$$

ν_L, как и выше, 3-столбец, т.е. $\nu_L = \begin{pmatrix} \nu_{eL} \\ \nu_{\mu L} \\ \nu_{\tau L} \end{pmatrix}$, а ν_R^c — аналогичный столбец правых нейтрино с определённым флэйвором.

Получаем: $$\mathcal{L}_{D+M}^{mass} = \frac{1}{2} N_L^T C^\dagger M N_L + h.c.$$

$$M = \begin{pmatrix} M_L & M_D \\ M_D & M_R \end{pmatrix}$$

M - симметричная матрица, поскольку, как показано выше, матрицы M_L и M_R симметричны.

Диагонализация (в случае одного флэйвора):

$$N_L = U n_L, \quad n_L = \begin{pmatrix} \nu_{1L} \\ \nu_{2L} \end{pmatrix},$$

$$U^T M U = \begin{pmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{pmatrix}, \quad m_k \geq 0$$

]

Вопросы для экзамена по курсу " Физика нейтрино".

1. Лагранжиан поля Дирака и уравнение Дирака. Представление Майораны для гамма-матриц. Условие Майораны. Киральная декомпозиция дираковского спинора.

2.Преобразования Лоренца. Генераторы преобразования и их алгебра. Разложение лоренцевой матрицы по генераторам (для инфинитезимального и конечного преобразований).

3. Представления группы Лоренца. Преобразования полей (как функций точки пространства-времени) при преобразованиях Лоренца.

4.Ковариантные уравнения (на примере уравнения Дирака).

5. Уравнения Вейля. Проверка их ковариантности. Запись в виде уравнения Шредингера. Уравнения Майораны.

6.Лагранжиан майорановского поля. 4-компонентные майорановские спиноры.

7. Дираковское представление группы Лоренца. Дискретные симметрии уравнения Дирака.

8. CP - симметрия в случае майорановских полей (2-компонентных и 4-компонентных).

9. Общий вид массового члена Лагранжиана нейтринного поля.

10. Осцилляции в квантовой механике (двух-уровневые системы).

11.Диагонализация массового члена Лагранжиана (дираковские нейтрино). Смешивание нейтринных состояний.

12.Осцилляции нейтрино в приближении плоских волн. Общая формула для вероятности переходов.

13. Осцилляции майорановских нейтрино. Модель качелей (случаи одного и трёх поколений).

14.Параметризация матрицы смешивания. Различия для дираковского и майорановского нейтрино.

15.Осцилляции антинейтрино. CP - симметрия и формулы для вероятности переходов.

16.Осцилляции при распространении нейтрино в веществе. Нейтринный потенциал. Изменение формул для вероятности переходов при учёте вещества.

17.Уравнение Михеева-Смирнова. Резонансное усиление осцилляций при движении нейтрино от центра Солнца к его периферии.

18.Понятие о нейтринных волновых пакетах. Длина когерентности.

19.Сохранение лептонного числа. Полное и парциальные лептонные числа.

20. Двойной бета - распад . Пропагатор майорановского нейтрино. Эксперименты по поиску массы нейтрино.