

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
(ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)

УТВЕРЖДАЮ
Проректор по учебной работе
Д.А. Зубцов
10 декабря 2015 г.

ПРОГРАММА

по дисциплине: **Теоретическая физика**

по направлению подготовки:

010900 «Прикладные математика и физика»

факультет: **ФПФЭ**

кафедра: **теоретической физики**

курс: IV

семестр: 8

Трудоемкость: базовая часть – 3 зач. ед.

вариативная часть – 1 зач. ед.

по выбору студента – 1 зач. ед.

лекции – 32 часа

Экзамен – 8 семестр

практические (семинарские)

занятия – 32 часа

Зачет – нет

лабораторные занятия – нет

Самостоятельная работа – 2 часа в неделю

ВСЕГО ЧАСОВ — 68

Программу и задание составил д.ф.-м.н., проф. А.А. Пухов

Программа принята на заседании

кафедры теоретической физики

26 ноября 2015 года

Заведующий кафедрой

Ю.М. Белоусов

СТАТИСТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

I. ТЕРМОДИНАМИКА

Замкнутые системы. Термодинамические величины. Температура. Термодинамическое равновесие. Энтропия. Неравновесная энтропия и второй закон термодинамики. Термодинамические тождества и неравенства. Принцип минимальности термодинамических потенциалов. Термодинамические потенциалы в магнитном поле. Термодинамические флуктуации. Принцип Больцмана.

II. ОСНОВНЫЕ ПРИНЦИПЫ СТАТИСТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Макроскопические системы. Средние значения. Эргодическая гипотеза. Статистическая независимость и закон больших чисел. Термодинамический предел. Число состояний, плотность числа состояний. Статистическая энтропия Больцмана. Функция распределения и матрица плотности. Уравнение Лиувилля. Распределение Гиббса (канонический ансамбль). Эквивалентность канонического и микроканонического распределений в термодинамическом пределе. Флуктуация энергии в ансамбле Гиббса. Статистическая сумма. Основная формула статистической физики $F = -T \ln Z$. Информационная энтропия Гиббса. О законе возрастания энтропии как потере информации. Теорема Нернста. Представление чисел заполнения. Вторичное квантование бозе- и ферми-газа. Гамильтонианы идеальных газов в представлении чисел заполнения.

III. ИДЕАЛЬНЫЕ ФЕРМИ- И БОЗЕ-ГАЗЫ

Больцмановский газ, вычисление его термодинамических величин. Ионизация и диссоциация. Большой канонический ансамбль. Температура вырождения. Идеальный ферми-газ. Химический потенциал, давление и теплоемкость электронов в металле. Парамагнетизм Паули. Диамагнетизм Ландау. Эффект де Гааза–ван Альфена. Идеальный бозе-газ. Бозе-конденсация, теплоемкость, уравнение состояния бозе-газа. Концепция квазичастиц. Фотоны и фононы. Химический потенциал, давление и теплоемкость черного излучения и твердого тела.

IV. НИЗКОТЕМПЕРАТУРНЫЕ СВОЙСТВА КОНДЕНСИРОВАННЫХ СРЕД

Микроскопическая теория ферромагнетизма в приближении самосогласованного поля. Гамильтониан Гейзенберга. Магноны. Закон

Блоха. Микроскопическая теория сверхтекучести неидеального бозе-газа. Преобразование Боголюбова. Элементарные возбуждения. Критерий сверхтекучести Ландау. Микроскопическая теория сверхпроводимости неидеального ферми-газа. Гамильтониан БКШ. Неустойчивость Купера. Энергетическая щель. Термодинамика сверхпроводника, скачок теплоемкости. Теория Гинзбурга–Ландау. Сверхпроводящий ток. Уравнение Лондонов. Эффект Мейсснера. Сверхпроводники I и II рода. Вихри Абрикосова. Верхнее и нижнее критические магнитные поля. Квантование магнитного потока. Эффект Джозефсона.

V. ФАЗОВЫЕ ПЕРЕХОДЫ И КРИТИЧЕСКИЕ ЯВЛЕНИЯ

Условия равновесия фаз. Химическое равновесие. Формула Саха. Фазовые переходы I и II рода. Изменение симметрии фазы. Параметр порядка. Теория фазовых переходов II рода (теория «среднего поля») в применении к ферромагнетику и сверхпроводнику. Флуктуации параметра порядка и корреляционная длина. Флуктуационная теплоемкость. Критерий применимости теории «среднего поля». Масштабная инвариантность. Критические индексы.

Литература

1. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Статистическая физика. Часть 1. – М.: Физматлит, 2002.
2. *Лифшиц Е.М., Питаевский Л.П.* Статистическая физика. Часть 2. – М.: Физматлит, 2001.
3. *Белоусов Ю.М., Бурмистров С.Н., Тернов А.И.* Задачи по теоретической физике. – Долгопрудный: ИД «Интеллект», 2012.
4. *Белоусов Ю.М., Кузнецов В.П., Смилга В.П.* Практическая математика. Руководство по математике для начинающих изучать теоретическую физику. – Долгопрудный: ИД «Интеллект», 2009.
5. *Зайцев Р.О., Михайлова Ю.В.* Метод вторичного квантования для систем многих частиц: учеб. пособие. – М.: МФТИ, 2008.
6. *Горелкин В.Н.* Методы теоретической физики. Часть 2. Статистическая физика и физическая кинетика: учеб. пособие. – М.: МФТИ, 2010.
7. *Зайцев Р.О.* Введение в современную статистическую физику. – М.: Едиториал УРСС, 2005.
8. *Максимов Л.А., Михеенков А.В., Полищук И.Я.* Лекции по статистической физике: Уч. пос. – М.: МФТИ, 2011.

9. *Садовский М.В.* Лекции по статистической физике. – Москва–Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2006.
10. *Базаров И.П., Геворкян Э.В., Николаев П.Н.* Термодинамика и статистическая физика. Теория равновесных систем. – М.: Изд. МГУ, 1986.
11. *Румер Ю.Б., Рывкин М.Ш.* Термодинамика, статистическая физика и кинетика. – М.: Наука, 1977.
12. *Коткин Г.Л.* Лекции по статистической физике. – Москва–Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2006.
13. *Кубо Р.* Статистическая механика. – М.: Мир, 1967.
14. *Хуанг К.* Статистическая механика. – М.: Мир, 1966.
15. *Исихара А.* Статистическая физика. – М.: Мир, 1973.
16. *Квасников И.А.* Термодинамика и статистическая физика. Т. 2. – М.: Едиториал УРСС, 2002.
17. *Кондратьев А.С., Райгородский И.П.* Задачи по термодинамике, статистической физике и кинетической теории. – М.: Физматлит, 2007.
18. *Кондратьев А.С., Романов В.П.* Задачи по статистической физике. – М.: Наука, 1992
19. *Базаров И.П., Геворкян Э.В., Николаев П.Н.* Задачи по термодинамике и статистической физике. – М.: Высшая школа, 1996.
20. *Беляев С.Т., Бычков Ю.А., Гордюнин С.А. и др.* Теория конденсированного состояния: учеб. пособие. – М.: МФТИ, 1982.
21. *Брандт Н.Б., Кульбачинский В.А.* Квазичастицы в физике конденсированного состояния. – М.: Физматлит, 2005.
22. *Шмидт В.В.* Введение в физику сверхпроводников. – М.: МЦНМО, 2000.

ОСНОВНЫЕ ФОРМУЛЫ И ПОНЯТИЯ СТАТИСТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

I. Основы термодинамики

Термодинамические потенциалы

$$\begin{aligned}
 dE &= TdS - PdV + \mu dN - \mathcal{M}d\mathcal{H} - \mathcal{P}d\mathcal{E}, \\
 dW &= TdS + VdP + \mu dN - \mathcal{M}d\mathcal{H} - \mathcal{P}d\mathcal{E}, \\
 dF &= -SdT - PdV + \mu dN - \mathcal{M}d\mathcal{H} - \mathcal{P}d\mathcal{E}, \\
 d\Phi &= -SdT + VdP + \mu dN - \mathcal{M}d\mathcal{H} - \mathcal{P}d\mathcal{E}, \\
 d\Omega &= -SdT - PdV - Nd\mu - \mathcal{M}d\mathcal{H} - \mathcal{P}d\mathcal{E},
 \end{aligned}$$

$$C_{V;P} = T \left(\frac{\partial S}{\partial T} \right)_{V;P}, \quad \Phi = \mu N, \quad \Omega = -PV.$$

Термодинамические неравенства

$$C_V > 0, \quad \left(\frac{\partial P}{\partial V} \right)_T < 0, \quad \left(\frac{\partial \mathcal{B}}{\partial \mathcal{H}} \right)_T > 0.$$

Флуктуации, принцип Больцмана

$$\begin{aligned} w(\chi) &\sim \exp \{ S_{\Pi}(\chi) - S_{\Pi}(\bar{\chi}) \} = e^{-\Delta\Omega/T}, \\ w &\sim \exp \left\{ -\frac{1}{2T} (\Delta S \Delta T - \Delta P \Delta V + \Delta \mu \Delta N) \right\}, \\ \overline{\Delta T^2} &= \frac{T^2}{C_V}, \quad \overline{\Delta V^2} = -T \left(\frac{\partial V}{\partial P} \right)_T, \quad \overline{\Delta N^2} = -\frac{TN^2}{V^2} \left(\frac{\partial V}{\partial P} \right)_T. \end{aligned}$$

Термодинамические соотношения

$$\begin{aligned} \partial(TS) &= \partial(PV), \quad \partial(E\chi) = T\partial(S\chi) - P\partial(V\chi), \\ \partial(SV) &= \frac{C_V}{T}\partial(TV), \quad \partial(SP) = \frac{C_P}{T}\partial(TP). \end{aligned}$$

II. Равновесие фаз и фазовые переходы

Равновесие двух подсистем. Фазовое равновесие.

$$T_1 = T_2, \quad P_1 = P_2, \quad \mu_1 = \mu_2.$$

Химическое равновесие, формула Саха

$$\sum_i \nu_i \mu_i = 0, \quad \frac{C_a}{C_i C_e} = n \frac{g_a}{g_e g_i} \left(\frac{2\pi \hbar^2}{mT} \right)^{3/2} e^{J/T}.$$

Уравнение Клапейрона–Клаузиуса

$$\frac{dP}{dT} = \frac{s_1 - s_2}{v_1 - v_2}, \quad P \approx AT^{s_1}.$$

Теория «среднего поля» фазовых переходов II рода

$$\Omega = \Omega_0 + \int d^D \mathbf{r} \left[\alpha \eta^2 + \frac{b}{2} \eta^4 + c(\nabla \eta)^2 - \eta h \right], \quad \alpha = a(T - T_c), \quad a, b, c > 0,$$

$$\eta_0^2 = \begin{cases} -\alpha/b, & T < T_c, \\ 0, & T > T_c. \end{cases} \quad \Delta C = \frac{a^2}{b} T_c.$$

Флуктуации параметра порядка, восприимчивость

$$\overline{\Delta\eta^2} = T_c \chi \xi^{-3}(T), \quad \chi = \begin{cases} V/(2\alpha), & T > T_c \\ -V/(4\alpha), & T < T_c. \end{cases}$$

Корреляционный радиус флуктуаций $\xi(T) = (c/\alpha)^{1/2} \sim |T - T_c|^{-1/2}$.

Флуктуационная теплоемкость $\Delta C_\Phi \sim |T - T_c|^{-1/2}$.

Критерий применимости теории «среднего поля», число Гинзбурга-Леванюка

$$Gi = T_c b^2 / ac^3 \ll 1.$$

III. Основные соотношения

Энтропия Больцмана и Гиббса

$$S = \ln \Delta\Gamma = - \sum_n \rho_n \ln \rho_n.$$

Распределение Гиббса по состояниям и по энергиям

$$\rho_n = \rho(E_n) = e^{\frac{F-E_n}{T}}, \quad w(E) = \rho(E) \frac{\partial \Gamma}{\partial E}.$$

Статистическая сумма

$$F = -T \ln Z, \quad Z = \sum_n e^{-E_n/T}.$$

Схема вычислений

$$(E_n, \hat{H}) \rightarrow Z \rightarrow F(T, V, N) \rightarrow (S, P, \mu).$$

Распределение с переменным числом частиц

$$\rho_{nN} = e^{\frac{\Omega + \mu N - E_{nN}}{T}}, \quad \Omega = -T \ln \Xi, \quad \Xi = \sum_{n, N} e^{\frac{\mu N - E_{nN}}{T}}.$$

IV. Матрица плотности

$$\langle n | \hat{\rho} | m \rangle = \sum_\alpha c(n, \alpha, t) c^*(m, \alpha, t), \quad |\psi\rangle = \sum_{n, \alpha} c(n, \alpha, t) |n\rangle |\alpha\rangle.$$

$$\langle \hat{A} \rangle = \sum_{n, m} \langle m | \hat{A} | n \rangle \langle n | \hat{\rho} | m \rangle = \text{Sp } \hat{A} \hat{\rho},$$

$$\hat{\rho} = \hat{\rho}^+, \quad \text{Sp } \hat{\rho} = 1, \quad \langle n | \hat{\rho} | n \rangle = \rho_n > 0.$$

Для чистого состояния $\hat{\rho}^2 = \hat{\rho}$.

Уравнение фон Неймана и Линдблада, равновесная матрица плотности

$$i\hbar \frac{\partial \hat{\rho}}{\partial t} = [\hat{H}, \hat{\rho}] + \hat{\mathcal{L}}\hat{\rho}, \quad \hat{\rho}_0 = \exp\left(\frac{\Omega + \mu\hat{N} - \hat{H}}{T}\right).$$

V. Представление чисел заполнения

Вторичное квантование бозонов

$$\begin{aligned} \langle \dots, n_p - 1, \dots | \hat{a}_p | \dots, n_p, \dots \rangle &= \\ &= \langle \dots, n_p, \dots | \hat{a}_p^+ | \dots, n_p - 1, \dots \rangle = \sqrt{n_p}, \\ [\hat{a}_p, \hat{a}_{p'}] &= [\hat{a}_p^+, \hat{a}_{p'}^+] = 0, \quad [\hat{a}_p, \hat{a}_{p'}^+] = \delta_{pp'}. \end{aligned}$$

Вторичное квантование фермионов

$$\begin{aligned} \langle \dots, 0_p, \dots | \hat{a}_p | \dots, 1_p, \dots \rangle &= \langle \dots, 1_p, \dots | \hat{a}_p^+ | \dots, 0_p, \dots \rangle = \pm 1, \\ \{\hat{a}_p, \hat{a}_{p'}\} &= \{\hat{a}_p^+, \hat{a}_{p'}^+\} = 0, \quad \{\hat{a}_p, \hat{a}_{p'}^+\} = \delta_{pp'}. \end{aligned}$$

Координатное представление

$$\begin{aligned} \hat{\psi}(x) &= \sum_p \psi_p(x) \hat{a}_p, \quad \hat{\psi}^+(x) = \sum_p \hat{a}_p^+ \psi_p^*(x), \\ \{\hat{\psi}(x), \hat{\psi}(x')\} &= 0, \quad \{\hat{\psi}^+(x), \hat{\psi}^+(x')\} = 0, \quad \{\hat{\psi}(x), \hat{\psi}^+(x')\} = \delta(x - x'), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \hat{N} &= \int dx \hat{\psi}^+(x') \hat{\psi}(x) = \sum_p \hat{a}_p^+ \hat{a}_p, \\ \hat{T} &= \int dx \hat{\psi}^+(x) \frac{\hat{\mathbf{p}}^2}{2m} \hat{\psi}(x) = \sum_p \frac{\hat{\mathbf{p}}^2}{2m} \hat{a}_p^+ \hat{a}_p, \\ \hat{U} &= \int dx \hat{\psi}^+(x) U(x) \hat{\psi}(x) = \sum_{pp'} U_{pp'} \hat{a}_p^+ \hat{a}_{p'}, \\ \hat{V} &= \frac{1}{2} \int dx_1 dx_2 \hat{\psi}^+(x_1) \hat{\psi}^+(x_2) V(x_1 - x_2) \hat{\psi}(x_2) \hat{\psi}(x_1) = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{p_1 + p_2 = p'_1 + p'_2} V_{p'_2 p'_1 p_2 p_1} \hat{a}_{p'_1}^+ \hat{a}_{p'_2}^+ \hat{a}_{p_2} \hat{a}_{p_1}. \end{aligned}$$

VI. Идеальные газы

Больцмановский газ

$$F = -NT \ln \frac{ez_1}{N}, \quad z_1 = \frac{V}{(2\pi\hbar)^3} (2\pi mT)^{3/2} \sum_k e^{-\varepsilon_k/T},$$

$$\mu = -T \ln \left\{ \frac{V}{N} \left(\frac{mT}{2\pi\hbar^2} \right)^{3/2} \sum_k e^{-\varepsilon_k/T} \right\} \sim -T \ln T.$$

Ферми-газ

$$p = (\mathbf{p}, \sigma), \quad p_i = \frac{2\pi\hbar}{L} n_i, \quad V = L^3, \quad \sigma = \pm 1,$$

$$\hat{H} = \sum_{\mathbf{p}, \sigma} \varepsilon_{\mathbf{p}} \hat{a}_{\mathbf{p}\sigma}^+ \hat{a}_{\mathbf{p}\sigma}, \quad \varepsilon_{\mathbf{p}} = \frac{\mathbf{p}^2}{2m},$$

$$\sum_{\mathbf{p}, \sigma} n_{\mathbf{p}\sigma} = 2 \int \frac{V d^3 \mathbf{p}}{(2\pi\hbar)^3} n(\varepsilon_{\mathbf{p}}) = V \int_0^\infty d\varepsilon \nu(\varepsilon) n(\varepsilon),$$

плотность состояний

$$\nu(\varepsilon) = \frac{2^{1/2} m^{3/2} \varepsilon^{1/2}}{\pi^2 \hbar^3}, \quad \nu(\varepsilon_F) = \nu_F = \frac{3}{2\varepsilon_F} \frac{N}{V},$$

$$\Omega = -T \sum_k \ln \left(1 + e^{(\mu - \varepsilon_k)/T} \right),$$

$$\langle \hat{a}_{\mathbf{p}\sigma}^+ \hat{a}_{\mathbf{p}\sigma} \rangle = \bar{n}_p = \left(1 + e^{(\varepsilon_p - \mu)/T} \right)^{-1}, \quad PV = \frac{2}{3} E,$$

$N = \sum_p \bar{n}_p$ — уравнение, задающее $\mu = \mu(T)$; при $T = 0$

$$\mu = \varepsilon_F = \frac{p_F^2}{2m}, \quad N = \frac{V p_F^3}{3\pi^2 \hbar^3}, \quad E = \frac{3}{5} \varepsilon_F N.$$

Условие вырождения $T \ll \varepsilon_F$, теплоемкость $C_V \sim NT/\varepsilon_F$.

Магнетон Бора $\mu_B = \frac{e\hbar}{2mc} \approx 10^{-20}$ эрг/Гс.

Парамагнетизм Паули

$$\chi_P = \frac{3}{2} \frac{N}{\varepsilon_F} \mu_B^2, \quad \text{при } T \ll \varepsilon_F; \quad \chi_P = \frac{\mu_B^2 N}{T}, \quad \text{при } T \gg \varepsilon_F.$$

Диамагнетизм Ландау

$$\chi_L = -\frac{1}{2} \frac{N}{\varepsilon_F} \mu_B^2, \quad \text{при } T \ll \varepsilon_F; \quad \chi_L = -\frac{1}{3} \frac{N}{T} \mu_B^2, \quad \text{при } T \gg \varepsilon_F.$$

Бозе-газ

$$\Omega = T \sum_k \ln \left(1 - e^{(\mu - \varepsilon_k)/T} \right),$$

$$\langle \hat{a}_{\mathbf{p}}^+ \hat{a}_{\mathbf{p}} \rangle = \bar{n}_p = \left(e^{(\varepsilon_p - \mu)/T} - 1 \right)^{-1}, \quad \mu < 0.$$

Бозе-конденсация

$$N_0 = N \left(1 - \left(\frac{T}{T_B} \right)^{3/2} \right), \quad T_B \sim \frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{N}{V} \right)^{2/3}, \quad C_V \sim N \left(\frac{T}{T_B} \right)^{3/2}.$$

Фононы

$$\hat{H} = \sum_{\mathbf{k}\lambda} \hbar \omega_{\mathbf{k}\lambda} \left(\hat{b}_{\mathbf{k}\lambda}^+ \hat{b}_{\mathbf{k}\lambda} + \frac{1}{2} \right), \quad \bar{n}_{\mathbf{k}\lambda} = \langle \hat{b}_{\mathbf{k}\lambda}^+ \hat{b}_{\mathbf{k}\lambda} \rangle = \frac{1}{e^{\hbar \omega_{\mathbf{k}\lambda}/T} - 1}, \quad \mu = 0,$$

$$\omega_{\mathbf{k}\lambda}^2 = c_\lambda^2 \mathbf{k}^2, \quad c_{1,2} = c_t, \quad c_3 = c_l, \quad \sum_{\mathbf{k}\lambda} 1 = \int_0^{\omega_D} g(\omega) d\omega = 3N.$$

Плотность состояний, температура Дебая

$$g(\omega) = \frac{3\omega^2}{2\pi^2 \bar{c}^3}, \quad \Theta_D = \hbar \omega_D = \hbar \bar{c} k_D, \quad 3\bar{c}^{-3} = 2c_t^{-3} + c_l^{-3}.$$

Теплоемкость решетки, законы Дебая и Дюлонга-Пти

$$C_V = \begin{cases} \frac{12N\pi^4}{5} \left(\frac{T}{\Theta_D} \right)^3, & T \ll \Theta_D, \\ 3N, & T > \Theta_D. \end{cases}$$

Среднеквадратичное отклонение атома от положения равновесия

$$\langle \mathbf{u}^2 \rangle = \frac{\hbar^2}{2m} \begin{cases} 1/\Theta_D + \text{const} \frac{T^2}{\Theta_D^3}, & T \ll \Theta_D, \\ T/\Theta_D^2, & T \geq \Theta_D. \end{cases}$$

Критерий плавления Линдемана

$$\langle \mathbf{u}^2 \rangle \approx 0,1 (V/N)^{1/3}.$$

VII. Микроскопическая теория ферромагнетизма

Гамильтониан Гейзенберга

$$\hat{H} = -\frac{1}{2} \sum_{\mathbf{R}_1 \neq \mathbf{R}_2} J(\mathbf{R}_1 - \mathbf{R}_2) \hat{\mathbf{S}}_{\mathbf{R}_1} \hat{\mathbf{S}}_{\mathbf{R}_2} - 2\mu_B \mathbf{B} \sum_{\mathbf{R}} \hat{\mathbf{S}}_{\mathbf{R}},$$

$$T_c = \frac{1}{3} S(S+1) z J, \quad J_{\mathbf{q}} = \sum_{\mathbf{R}} J(\mathbf{R}) e^{-\mathbf{q}\mathbf{R}}, \quad J_0 = zJ.$$

Спектр и масса магнонов

$$\hbar\omega(q) = 2\mu_B B + (J_0 - J_q)S, \quad m^* = \frac{\hbar^2}{2JSa^2}.$$

Закон Блоха для спиновых волн

$$C(T) \sim \left(\frac{T}{J_0}\right)^{3/2}, \quad [\mathcal{M}(0) - \mathcal{M}(T)] \sim \left(\frac{T}{J_0}\right)^{3/2}.$$

VIII. Микроскопическая теория сверхтекучести

Гамильтониан неидеального бозе-газа при $T = 0$

$$\hat{H} - \mu\hat{N} = \sum_{\mathbf{p}} \left(\frac{\mathbf{p}^2}{2m} - \mu \right) \hat{a}_{\mathbf{p}}^+ \hat{a}_{\mathbf{p}} + \frac{g}{2V} \sum_{\mathbf{p}, \mathbf{p}'} \hat{a}_{\mathbf{p}}^+ \hat{a}_{\mathbf{p}'}^+ \hat{a}_{\mathbf{p}} \hat{a}_{\mathbf{p}'}.$$

Преобразования Боголюбова

$$\hat{a}_0^+ \approx \hat{a}_0 \approx \sqrt{N_0}, \quad \hat{a}_{\mathbf{p}}^+ = u_p \hat{b}_{\mathbf{p}}^+ + v_p \hat{b}_{-\mathbf{p}}, \quad \hat{a}_{\mathbf{p}} = u_p \hat{b}_{\mathbf{p}} + v_p \hat{b}_{-\mathbf{p}}^+,$$

где $\hat{b}_{\mathbf{p}}^+$ и $\hat{b}_{\mathbf{p}}$ — операторы рождения и уничтожения квазичастиц со спектром возбуждений

$$\mathcal{E}_{\mathbf{p}} = \sqrt{\left(\frac{p^2}{2m} - g\frac{N}{V}\right)^2 - \left(g\frac{N}{V}\right)^2} \approx cp \quad \text{при } p \rightarrow 0,$$

g — фурье-образ парного потенциала при $q \ll \hbar/a$.

Скорость боголюбовского звука

$$c = \sqrt{\frac{gN}{mV}}.$$

Критерий сверхтекучести Ландау

$$v < v_c = \min \frac{\mathcal{E}_{\mathbf{p}}}{p}.$$

IX. Микроскопическая теория сверхпроводимости

Гамильтониан неидеального ферми-газа БКШ

$$\hat{H} - \mu\hat{N} = \sum_{\mathbf{p}, \sigma} \xi_p \hat{a}_{\mathbf{p}, \sigma} \hat{a}_{\mathbf{p}, \sigma}^+ - \frac{g}{V} \sum_{\mathbf{p}, \mathbf{p}'} \hat{a}_{\mathbf{p}\uparrow}^+ \hat{a}_{-\mathbf{p}\downarrow}^+ \hat{a}_{-\mathbf{p}'\downarrow} \hat{a}_{\mathbf{p}'\uparrow}.$$

Преобразования Боголюбова

$$\hat{a}_{\mathbf{p},\sigma}^+ = u_p \hat{a}_{\mathbf{p},\sigma}^+ + \sigma v_p \hat{a}_{-\mathbf{p},-\sigma}, \quad \hat{a}_{\mathbf{p},\sigma} = u_p \hat{a}_{\mathbf{p},\sigma} + \sigma v_p \hat{a}_{-\mathbf{p},-\sigma}^+,$$

где $\hat{a}_{\mathbf{p},\sigma}^+$ и $\hat{a}_{\mathbf{p},\sigma}$ — операторы рождения и уничтожения квазичастиц с энергетическим спектром

$$\mathcal{E}_{\mathbf{p}} = \sqrt{\xi_p^2 + \Delta^2}, \quad \xi_p = \frac{p^2}{2m} - \mu = v_F(|\mathbf{p}| - p_F),$$

g — константа взаимодействия электронов вблизи поверхности Ферми $|\xi_p| < \hbar\omega_D$. При $T = 0$

$$\Delta_0 = 2\hbar\omega_D \exp\left(-\frac{1}{g\nu_F}\right),$$

при $T \simeq T_c$

$$\Delta = \left[\frac{8\pi^2 T_c (T_c - T)}{7\zeta(3)} \right]^{1/2},$$

где $\pi T_c = \gamma \Delta_0$, $\nu_F = \frac{mp_F}{2\pi^2 \hbar^2}$, $\gamma \approx 1.78$ — постоянная Эйлера.

Х. Теория сверхпроводимости Гинзбурга–Ландау

Функционал Гинзбурга–Ландау

$$\Omega_s = \Omega_n + \int \left\{ \alpha |\psi|^2 + \frac{b}{2} |\psi|^4 + \frac{\hbar^2}{4m} \left| \left(\nabla - \frac{2ie}{\hbar c} \mathbf{A} \right) \psi \right|^2 + \frac{\mathbf{B}^2}{8\pi} \right\} dV,$$

$$\alpha = a(T - T_c), \quad a > 0, \quad b > 0, \quad |T - T_c| \ll T_c,$$

$$|\psi_0|^2 = \frac{n_s}{2} = -\frac{\alpha}{b} \quad \text{при} \quad T < T_c.$$

Уравнения Гинзбурга–Ландау

$$-\frac{\hbar^2}{4m} \left(\nabla - \frac{2ie}{\hbar c} \mathbf{A} \right)^2 \psi + \alpha \psi + b |\psi|^2 \psi = 0,$$

$$\text{rot } \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}_s, \quad \mathbf{j}_s = \frac{e\hbar}{2mi} (\psi^* \nabla \psi - \psi \nabla \psi^*) - \frac{2e^2}{mc} |\psi|^2 \mathbf{A}.$$

Плотность сверхпроводящего тока

$$\psi = |\psi| e^{i\varphi}, \quad \mathbf{j}_s = \frac{c |\psi / \psi_0|^2}{4\pi \lambda^2} \left(\frac{\Phi_0}{2\pi} \nabla \varphi - \mathbf{A} \right).$$

Квантование потока

$$\Phi = n\Phi_0, \quad \Phi_0 = \frac{\pi\hbar c}{e} \approx 2 \cdot 10^{-7} \text{ Гс} \cdot \text{см}^2.$$

Глубина проникновения, длина когерентности

$$\lambda^2 = \frac{mc^2b}{8\pi e^2|\alpha|}, \quad \xi^2 = \frac{\hbar^2}{4m|\alpha|}, \quad \xi, \lambda \sim (T_c - T)^{-1/2}.$$

Критические магнитные поля

$$H_{c1} = \frac{\Phi_0}{4\pi\lambda^2} \ln \frac{\lambda}{\xi}, \quad H_c = \frac{1}{2^{3/2}\pi} \frac{\Phi_0}{\lambda\xi}, \quad H_{c2} = \frac{1}{2\pi} \frac{\Phi_0}{\xi^2}.$$

Критерий применимости теории $Gi = (T_c/\varepsilon_F)^4 \ll 1$.

ФОРМУЛЫ, ИЗВЕСТНЫЕ ИЗ ПРЕДШЕСТВУЮЩИХ КУРСОВ

Якобианы

$$\frac{\partial(AB)}{\partial(xy)} = \left(\frac{\partial A}{\partial x}\right)_y \left(\frac{\partial B}{\partial y}\right)_x - \left(\frac{\partial A}{\partial y}\right)_x \left(\frac{\partial B}{\partial x}\right)_y, \quad \left(\frac{\partial A}{\partial x}\right)_y = \frac{\partial(Ay)}{\partial(xy)},$$

$$\partial(AB) = -\partial(BA), \quad \partial(AB)\partial(CD) = \partial(CD)\partial(AB), \\ \partial(AB)\partial(CD) = \partial(AC)\partial(BD) - \partial(AD)\partial(BC).$$

Факториал

$$N! = \int_0^\infty x^N e^{-x} dx, \quad \left(\frac{1}{2}\right)! = \frac{\sqrt{\pi}}{2}, \quad \left(\frac{3}{2}\right)! = \frac{3\sqrt{\pi}}{4}.$$

Формула Стирлинга

$$N! = \sqrt{2\pi N} \left(\frac{N}{e}\right)^N \left(1 + \frac{1}{12N} + \dots\right).$$

Объем и поверхность N -мерной сферы единичного радиуса

$$V_N = \frac{\pi^{N/2}}{(N/2)!}, \quad S_N = NV_N.$$

Бозе- и ферми-интегралы

$$\int_0^\infty \frac{x^{n-1} dx}{e^x \mp 1} = (n-1)! \zeta(n) \begin{cases} 1, \\ 1 - 2^{1-n}. \end{cases}$$

Дзета-функция Римана

$$\zeta(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}, \quad \zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}, \quad \zeta(3) = 1,20, \quad \zeta(4) = \frac{\pi^4}{90},$$

$$\zeta(3/2) = 2,61, \quad \zeta(5/2) = 1,34.$$

Формула суммирования Эйлера–Маклорена для медленно меняющихся функций

$$\sum_{n=0}^{\infty} F\left(n + \frac{1}{2}\right) = \int_0^{\infty} F(x)dx + \frac{1}{24}F'(0).$$

Формула Сохоцкого

$$\frac{1}{z - i0} = \mathcal{P}\frac{1}{z} + i\pi\delta(z).$$

Преобразование Фурье

$$\varphi(\mathbf{r}, t) = \int e^{-i(\omega t - \mathbf{k}\mathbf{r})} \varphi(\mathbf{k}, \omega) \frac{d\mathbf{k}d\omega}{(2\pi)^4},$$

$$\varphi(\mathbf{k}, \omega) = \int e^{i(\omega t - \mathbf{k}\mathbf{r})} \varphi(\mathbf{r}, t) d\mathbf{r}dt.$$

Шпуры

$$\text{Sp } \hat{A} = \sum_n A_{nn}, \quad \text{Sp } \hat{A}\hat{B}\hat{C} = \text{Sp } \hat{B}\hat{C}\hat{A} = \text{Sp } \hat{C}\hat{A}\hat{B},$$

$$\text{Sp } \hat{A}[\hat{B}, \hat{C}] = \text{Sp } \hat{C}[\hat{A}, \hat{B}] = \text{Sp } \hat{B}[\hat{A}, \hat{C}].$$

Теорема Гельмана–Фейнмана

$$\left\langle n \left| \frac{\partial \hat{H}}{\partial \lambda} \right| n \right\rangle = \frac{\partial E_n}{\partial \lambda}, \quad \left\langle \left\langle \frac{\partial \hat{H}}{\partial \lambda} \right\rangle \right\rangle = \left(\frac{\partial \Omega}{\partial \lambda} \right)_{T, V, \mu}.$$

Эффект Зеемана в слабом магнитном поле

$$E_m = -\mu_B g_J M, \quad M - \text{проекция полного момента } J \text{ на ось } z,$$

$$g_J = 1 + \frac{J(J+1) + S(S+1) - L(L+1)}{2J(J+1)} - \text{фактор Ланде.}$$

Уровни Ландау в однородном магнитном поле и кратность их вырождения

$$E_n = 2\mu_B B \left(n + \frac{1}{2} \right) + \frac{p_z^2}{2m}, \quad \Delta g = \frac{e}{c} \frac{BL_x L_y L_z}{(2\pi\hbar)^2} \Delta p_z.$$

ЗАДАЧИ

Первое задание

1. **Двухуровневые атомы.** Определить энтропию S и температуру T газа N невзаимодействующих двухуровневых атомов (разность энергий уровней ε) при заданной энергии E . Показать, что T может быть отрицательной. Что произойдет, если две такие одинаковые системы с $T_1 < 0$ и $T_2 > 0$ привести в тепловой контакт? Вычислить температурную зависимость теплоемкости газа $C(T)$. Найти характерные температуру T_* и ширину ΔT_* пика теплоемкости (аномалия Шоттки) в случае сильного вырождения верхнего уровня $\ln g \gg 1$. (2)
2. **Осцилляторы.** Определить энтропию S и температуру T газа N невзаимодействующих осцилляторов (разность энергий уровней $\hbar\omega$) с энергией E . Обсудить отличие температурного поведения теплоемкости системы $C(T)$ от предыдущей задачи. Сравнить низкотемпературное ($T \ll \hbar\omega$) поведение $C(T)$ с предыдущей задачей. (1)
3. **Парамагнитный газ.** Газ атомов с моментом J , спином S и орбитальным моментом L помещен в слабое магнитное поле B , температура и расщепление в магнитном поле малы по сравнению с интервалом тонкой структуры. Найти свободную энергию, вычислить χ и исследовать случаи расщепления в магнитном поле $\gg T$ и расщепления в магнитном поле $\ll T$. (1)
4. **Адиабатическое размагничивание.** Вычислить величину магнитокалорического эффекта $(\partial T / \partial \mathcal{H})_S$ для парамагнетика с магнитной восприимчивостью $\chi = A/T$ и теплоемкостью $C_{\mathcal{H}} = B T^3$. Каков знак эффекта? Предсказать величину охлаждения ΔT парамагнетика при адиабатическом размагничивании от \mathcal{H}_0 до нуля при $T \rightarrow 0$. Оценить предельную температуру, до которой можно охладить электронные, ядерные спины. (1)
5. **Ионизация $a \rightleftharpoons i + e$.** Найти температурную зависимость степени ионизации $\alpha(T)$ одноатомного идеального больцмановского газа (формула Саха) с энергией ионизации I . Определить характерную температуру T_I , выше которой газ существенно ионизирован. Учитывая, что температура вырождения газа $T_{\text{выр}} = \hbar^2 (N/V)^{2/3} / m$ крайне мала $\ln I / T_{\text{выр}} \gg 1$, определить соотношение между T_I и I . (2)

6. **Статистическая физика резины.** Макромолекула резины состоит из $N \gg 1$ звеньев длины a , которые могут свободно располагаться вдоль или против линии молекулы. Вычислить энтропию $S(x)$ макромолекулы с длиной $0 < x < Na$. При заданной температуре T длина молекулы x поддерживается силой натяжения f . Поскольку звенья поворачиваются свободно, внутренняя энергия молекулы $E(x)$ не зависит от x , и f определяется только энтропийной частью свободной энергии $F(x)$. Найти зависимость f от x , в линейном приближении $x \ll Na$ получить закон Гука для молекулы. Объяснить высокую эластичность резины при $N \rightarrow \infty$ и эффект Гуха–Джоуля: при нагревании резинового жгута, на который подвешен грузик, он будет подниматься или опускаться? (2)
7. **Изохоры, изобары, изотермы.** Построить изохоры, изобары, изотермы и нарисовать температурную зависимость химического потенциала для идеальных бозе- и ферми-газов. (3)
8. **2D бозе- и ферми-газы.** Вычислить теплоемкость двумерного вырожденного идеального бозе-газа (ферми-газа). (2)
9. **Комикс теплоемкостей.** Сравнить низкотемпературное поведение теплоемкостей идеальных бозе- и ферми-газов, черного излучения и твердого тела, парамагнетика и ферромагнетика, неидеального бозе-газа и, наконец, сверхпроводника. (2)
10. **Парамагнетизм Паули.** Найти спиновую магнитную восприимчивость вырожденного электронного газа при $\mu_B B \ll \varepsilon_F$. Найти поправку к этой формуле для низких температур $T \ll \varepsilon_F$. (1)
11. **Диамагнетизм Ландау.** Вычислить диамагнитную восприимчивость газа свободных электронов в классическом $T \gg \varepsilon_F$ и квантовом $\varepsilon_F \gg T \gg \mu_B B$ пределах. (1)
12. **Эффект де Гааза–ван Альфена.** Рассмотреть осцилляции магнитного момента двумерного вырожденного электронного газа в квантующем магнитном поле $\varepsilon_F \gg \mu_B B > T$. Объяснить связь периода осцилляций с площадью сечения поверхности Ферми. (2)
13. **Представление Мацубары.** Используя операторы рождения и уничтожения в представлении

$$\hat{a}(\tau) = e^{\tau \hat{H}} \hat{a} e^{-\tau \hat{H}}, \quad \hat{a}^+(\tau) = e^{\tau \hat{H}} \hat{a}^+ e^{-\tau \hat{H}},$$

где $\hat{H} = \sum_{\mathbf{p}, \sigma} (\varepsilon_{\mathbf{p}} - \mu) \hat{a}_{\mathbf{p}\sigma}^+ \hat{a}_{\mathbf{p}\sigma}$, мнимое время $\tau = 1/T$, найти ферми- и бозе-распределения

$$n_{\mathbf{p}\sigma} = \langle \hat{a}_{\mathbf{p}\sigma}^+ \hat{a}_{\mathbf{p}\sigma} \rangle = \frac{\text{Sp} \left(e^{-\tau \hat{H}} \hat{a}_{\mathbf{p}\sigma}^+ \hat{a}_{\mathbf{p}\sigma} \right)}{\text{Sp} \left(e^{-\tau \hat{H}} \right)}. \quad (1)$$

Второе задание

14. **Фактор Дебая–Уоллера.** Используя представление оператора смещения гармонического осциллятора $\hat{x} = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}(\hat{a}^+ + \hat{a})$, получить для равновесного случая $\langle \hat{a}^+ \hat{a} \rangle = (e^{\frac{\hbar\omega}{T}} - 1)^{-1}$ формулу

$$\langle e^{ik\hat{x}} \rangle = \exp \left(-\frac{k^2 \hbar}{4m\omega} \text{cth} \frac{\hbar\omega}{2T} \right).$$

Показать, что при $T = 0$ она переходит в выражение $\langle 0|e^{ikx}|0 \rangle$ для амплитуды эффекта Мессбауэра. (2)

15. **°Флуктуации.** Используя принцип Больцмана, найти флуктуации $\overline{\Delta E^2}$, $\overline{\Delta N^2}$, $\overline{\Delta S^2}$, $\overline{\Delta P^2}$, $\overline{\Delta S \Delta P}$, $\overline{\Delta V \Delta P}$, $\overline{\Delta S \Delta T}$, $\overline{\Delta T^2}$, $\overline{\Delta V^2}$, $\overline{\Delta T \Delta V}$, $\overline{\Delta T \Delta P}$, $\overline{\Delta S \Delta V}$. (2)
16. **°Гармоническая ловушка.** Найти температуру конденсации T_B (энергию Ферми ε_F) идеального бозе-газа (ферми-газа), находящегося в гармонической ловушке $U(\mathbf{r}) = m\omega^2 r^2/2$. Вычислить теплоемкость газа и долю конденсатных частиц при $T < T_B$. Какова точность Вашего расчета? (2)
17. **Модель Изинга.** Система N изинговых спинов $\sigma_i = \pm 1$ образует кольцо $\sigma_{N+1} = \sigma_N$ с гамильтонианом

$$H = -J \sum_{i=1}^N \sigma_i \sigma_{i+1} - \mu_B g B \sum_{i=1}^N \sigma_i.$$

Показать, что при $B = 0$ точным выражением для свободной энергии системы является формула $F = NT \ln \left(2 \text{ch} \frac{J}{T} \right)$. Найти теплоемкость и магнитную восприимчивость при $N \gg 1$. Объяснить причину отсутствия фазового перехода. (3)

18. **°Модель Гейзенберга.** Для ферромагнетика в модели Гейзенберга в приближении самосогласованного поля определить температуру Кюри T_c , температурную зависимость магнитной восприимчивости χ и спонтанной намагниченности \mathbf{M} вблизи T_c . (1)

19. **Закон Блоха.** Для ферромагнетика в модели Гейзенберга при $T \ll T_c$ определить спектр возбуждений (магнонов) и найти температурную зависимость намагниченности и теплоемкости спиновых волн. (2)
20. **Фотоны и фононы.** Найти равновесную плотность и теплоемкость акустических фононов в кристалле при температурах выше $T \gg \Theta_D$ и ниже $T \ll \Theta_D$ дебаевской. Сравнить с равновесной плотностью и теплоемкостью фотонов. (1)
21. **Боголюбовский звук.** Показать, что фазовая скорость элементарных возбуждений конденсата неидеального бозе-газа равна гидродинамической скорости звука в нем. (2)
22. **«Истоечение» конденсата.** Найти распределение частиц по импульсам и полное число надконденсатных частиц в неидеальном бозе-газе при низких температурах. (1)
23. **Модель БКШ.** Определить скачок теплоемкости при $T = T_c$ и плотность сверхпроводящих электронов $n_s(T)$ в предельных случаях $T \ll T_c$ и $T \lesssim T_c$. (2)
24. **Эффект Мейснера. Квантование потока.** Из функционала Гинзбурга–Ландау получить выражение для плотности сверхпроводящего тока в магнитном поле, уравнение Лондонов и условие квантования магнитного потока в сверхпроводящем кольце. (3)
25. **Абрикосовский вихрь.** Используя уравнения Гинзбурга–Ландау, найти верхнее H_{c2} и нижнее H_{c1} критические магнитные поля для сверхпроводника II рода. Сравнить с термодинамическим критическим магнитным полем H_c . (1)
26. **Флуктуационная теплоемкость.** Определить корреляционный радиус флуктуации параметра порядка в нулевом внешнем поле вблизи точки фазового перехода II рода. Найти флуктуационную поправку к теплоемкости при $T \simeq T_c$ в теории Гинзбурга–Ландау. (2)

ДОПОЛНИТЕЛЬНОЕ ЗАДАНИЕ

27. **Биномиальное распределение.** N молекул идеального бoльцмановского газа находятся в объеме V . Определить вероятность

- того, что в объеме $v < V$ находится n молекул. Найти \bar{n} и $\overline{\Delta n^2}$. Рассмотреть приближения $v \ll V$, $\bar{n} = \text{const}$ (распределение Пуассона) и $v \ll V$, $\bar{n} \gg 1$ (распределение Гаусса). (2)
28. **Ближайший сосед.** В однородном газе с плотностью молекул n найти среднее расстояние до ближайшей молекулы и его относительную флуктуацию. (1)
29. **Многомерная сфера.** N молекул идеального больцмановского газа находятся в объеме V . Найти число состояний (фазовый интеграл) и получить уравнение состояния (Менделеева–Клапейрона) и теплоемкость газа (закон равнораспределения). (1)
30. **Термодинамический предел.** На примере системы, состоящей из N молекул идеального больцмановского газа, показать, что каноническое распределение Гиббса по энергиям в пределе $N \gg 1$ переходит в микроканоническое распределение. (1)
31. **Диссоциация $a_2 \rightleftharpoons 2a$.** Определить температурную зависимость степени диссоциации $\alpha(T)$ двухатомного идеального газа с энергией диссоциации D при столь высоких температурах $T \gg T_{\text{выр}}$, $T \gg T_{\text{вр}}, T_{\text{кол}}$, когда теплоемкость газа можно считать постоянной. Найти характерную температуру T_D , выше которой газ существенно диссоциирован. Учитывая, что $T_{\text{выр}} = \hbar^2 (N/V)^{2/3} / m \approx 10^{-2}$ К, $T_{\text{вр}} = \hbar^2 / 2J \approx 10$ К, $T_{\text{кол}} = \hbar\omega \approx 10^3$ К, а $D \approx 10^4$ К, определить соотношение между T_D и D . (2)
32. **Изотерма Ленгмюра.** Идеальный газ находится в контакте с поверхностью, содержащей узлы, которые могут адсорбировать отдельные атомы газа. Показать, что доля поверхностных узлов f , занятых атомами, определяется уравнением $f = P/(P_0 + P)$, где P — давление газа, P_0 — константа, зависящая от температуры, но не от давления. (2)
33. **Орто- и параводород.** Вычислить вращательную теплоемкость чистых орто- и параводорода, а также их термодинамически равновесной смеси. Сравнить с теплоемкостью смеси при заданных концентрациях орто- и параводорода. Как изменится ответ для дейтерия? (1)
34. **Теплоемкость атмосферы.** Найти теплоемкость идеального больцмановского газа без внутренних степеней свободы, помещенного в однородное гравитационное поле в сосуде высоты h . Рассмотреть случаи $mgh \ll T$ и $mgh \gg T$. (1)

35. **Термодинамика резины.** Прimitивная модель молекулы резины (задача 6), тем не менее, «улавливает» необычную зависимость длины молекулы от температуры: изобарический коэффициент объемного расширения резины отрицателен $(\partial V/\partial T)_P < 0$. Определить знак адиабатического коэффициента объемного расширения $(\partial V/\partial T)_S$. Объяснить эффект П.Н. Лебедева: быстро растянутый и приложенный к губам резиновый жгут покажется теплым или прохладным? (1)
36. **Теорема Бора–ван Леевен.** Доказать, что магнитная восприимчивость системы, подчиняющейся классической механике и классической статистике, строго равна нулю. (1)
37. **Расширение в пустоту.** Вычислить изменение температуры при расширении в пустоту: равновесного черного излучения, вырожденного ферми-газа, вырожденного бозе-газа. Объяснить знак эффекта. Сравнить с результатом для классического бoльцмановского газа. Показать, что при расширении в пустоту
- $$C_E - C_V = -T C_V (\partial P/\partial T)_V / (\partial E/\partial V)_T. \quad (2)$$
38. **Закон Майера.** Вычислить $C_P - C_V$ в переменных V, T и P, T . Определить $C_P - C_V$ для бoльцмановского газа, газа Ван-дер-Ваальса, ферми- и бозе-газа и черного излучения. (1)
39. **Предел Чандрасекара.** Вычислить давление вырожденного релятивистского электронного газа. Используя полученное выражение, оценить максимальную массу «белого карлика», состоящего из нейтральной плазмы ядер гелия He^{+2} и электронов e^- . (3)
40. **Сила Казимира.** Вычислить силу притяжения $f(T)$ двух идеально проводящих параллельных пластин, обусловленную вакуумными флуктуациями электромагнитного поля между ними при $T = 0$. Показать, что флуктуации имеют планковское распределение с температурой $T_c = \pi \hbar c/a$, где a – расстояние между пластинами. Найти $f(T)$ при $T \ll T_c$ и при $T \gg T_c$. (2)
41. **Неустойчивость Купера.** Найти энергию связи 2Δ двух электронов куперовской пары над заполненной ферми-сферой. Обсудить аналитичность ответа по константе связи g . (2)
42. **Эффект Джозефсона.** Вычислить бездиссипативный туннельный ток j_s между двумя сверхпроводниками, разделенными тонким диэлектрическим слоем. Найти частоту джозефсоновской генерации ω при напряжении на контакте V . (2)

43. **Бозе-конденсация газа с внутренними степенями свободы.** N двухуровневых атомов идеального бозе-газа находятся в объёме V . Энергии уровней атомов 0 и ε . Найти температуру бозе-конденсации газа $T_B(\varepsilon)$ в предельных случаях $\varepsilon \ll T_B(0)$ и $\varepsilon \gg T_B(0)$. Чему равно отношение $T_B(\infty)/T_B(0)$? (1)
44. **Скорость звука в вырожденном электронном газе.** N электронов вырожденного $T \ll \varepsilon_F$ электронного газа занимают объём V . Найти отношение числа квазичастиц этого газа к числу частиц. Вычислить скорость звука s в этом газе. В каком соотношении s находится со скоростью Ферми v_F ? (2)
45. **Сверхтекучий вихрь.** Найти циркуляцию скорости Γ вокруг вихря в сверхтекучей жидкости и его линейное натяжение. Вычислить силу взаимодействия $F(a)$ между такими вихрями, расположенными на расстоянии a друг от друга. (2)
46. **Вариационный принцип Боголюбова.** Доказать, что $F[H_0 + V] \leq F[H_0] + \langle V \rangle_{H_0}$. Использовать свойство выпуклости экспоненты $\langle e^F \rangle \geq e^{\langle F \rangle}$. (1)
47. **Температура ядра и испарение нейтронов.** Простой моделью ядра является представление о идеальных и вырожденных $N \approx 100$ нуклонах, заключенных в сферу радиуса $R \approx 10^{-12}$ см. Вычислите температуру T и энтропию S ядра с энергией возбуждения $E \approx 10$ MeV. Проверьте вырожденность газа нуклонов $T \ll \varepsilon_F$. Полагая энергию выхода нейтрона $e \approx 8$ MeV, оцените вероятность испарения нейтрона из ядра в единицу времени и среднюю энергию вылетевших нейтронов. (2)

Срок сдачи задач 1—13: 08.03–13.03 2016 г.

1-я контрольная работа – первая половина марта

Срок сдачи задач 14—26: 03.05–08.05 2016 г.

2-я контрольная работа – первая половина мая

Подписано в печать 11.01.2015. Формат 60x84¹/₁₆.

Усл. печ. л. 1,25. Тираж 90 экз. Заказ № 1.

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего профессионального образования

«Московский физико-технический институт (государственный университет)»

Отдел оперативной полиграфии «Физтех-полиграф»

141700, Московская обл., г. Долгопрудный, Институтский пер., 9