

Оглавление (Draft 01.09.2020)

Введение	2
Система единиц	2
Обозначения	3
1 Классические поля	5
1.1 Лагранжев формализм	5
1.2 Гармонический осциллятор	14
1.3 Скалярное поле	22
1.4 Векторные поля	27
1.4.1 Электромагнитное поле	27
1.4.2 Массивное векторное поле	34
1.5 Спинорное поле. Матрицы Дирака и законы преобразований спинорных функций	35
2 Квантование свободных полей	55
2.1 Релятивистский метод квантования	55
2.2 Установление перестановочных соотношений	61
2.3 Квантование скалярного и массивного векторного полей	67
2.4 Квантование электромагнитного поля	69
2.5 Квантование спинорного поля	75
2.6 Инверсия координат и обращение времени	79
3 Матрица рассеяния	85
3.1 Взаимодействующие поля	85
3.2 Матрица рассеяния	94
3.3 Теоремы Вика	100
3.4 Функции Грина свободных полей	104
3.5 Правила Фейнмана для оператора S -матрицы	115
3.6 Правила Фейнмана для матричных элементов	119
3.7 Вычисление вероятностей процессов	132
3.8 Распад массивного векторного бозона	142
Предметный указатель	146

Введение

Система единиц

Мы будем работать в *естественной* (иногда говорят *натуральной*) системе единиц $\hbar = c = 1$. Единственная нетривиальная размерность при этом — это размерность массы. Длина и время имеют размерность обратной массы. Действительно,

$$[c] = \frac{L}{T} ; \quad [\hbar] = M \frac{L^2}{T} \Rightarrow L = T = \frac{1}{M} .$$

Физически $1/M$ — это комптоновская длина волны частицы массы M . Энергия и импульс также имеют размерность массы (т.к. скорость безразмерна). В физике частиц в качестве единицы измерения массы и (или) энергии принят электрон-вольт.

Электрон-вольт (эВ) — энергия, которую приобретает электрон, пройдя разность потенциалов в 1 В.

Задача 1 Найти в обычных единицах длину и время, соответствующую 1/грамм.

Задача 2 Найти размерность **E** и **H** (напряженностей электрического и магнитного полей) в системе единиц $\hbar = c = 1$. Сделать это в пространстве-времени размерности d .

Задача 3 а) Найти размерность электрического заряда в системе $\hbar = c = 1$. б) Найти численное значение величины $\alpha = \frac{e^2}{4\pi}$ (постоянной тонкой структуры), где e — заряд электрона. в) то же, что и в п. а), но в d -мерном пространстве-времени.

Задача 4 Найти связь между 1 граммом и 1эВ в системе $\hbar = c = 1$.

Задача 5 Найти, в обычных единицах, длину и время, соответствующие 1/ГэВ, где 1 ГэВ=10⁹ эВ.

Задача 6 Найти 1 Гаусс и 1 В/см (единицы измерения напряженностей магнитного и электрического полей) в системе $\hbar = c = 1$ и единицей массы 1 ГэВ.

Обозначения

Метрический тензор $g_{\mu\nu} = 0$ при $\mu \neq \nu$; $g_{00} = -g_{11} = -g_{22} = -g_{33} = 1$.

Контравариантные векторы $a = (a^0, a^1, a^2, a^3) = (a^0, \mathbf{a})$.

Скалярное произведение

$$ab \equiv \sum_{0 \leq \mu, \nu \leq 3} g_{\mu\nu} a^\mu b^\nu = a^0 b^0 - \mathbf{a} \mathbf{b}.$$

Ковариантные векторы

$$a_\mu = \sum_{0 \leq \nu \leq 3} g_{\mu\nu} a^\nu = (a^0, -\mathbf{a}).$$

В дальнейшем будем опускать знак суммирования, подразумевая суммирование по повторяющимся индексам (правило Эйнштейна). При этом индексы, обозначаемые буквами из середины греческого алфавита ($\mu, \nu, \rho, \lambda, \sigma, \dots$), являются четырехмерными, т.е. изменяются от 0 до 3. Индексы, обозначаемые буквами из середины латинского алфавита (i, j, k, l, m, \dots), являются пространственными, т.е. изменяются от 1 до 3. При этом мы *не будем* различать трехмерные векторы с верхним и нижним индексами, т.е. $a^i = a_i$. Таким образом, скалярное произведение запишется в следующем виде

$$ab = g_{\mu\nu} a^\mu b^\nu = a^\nu b_\nu = a_\nu b^\nu = a^0 b^0 - a_i b^i, \\ \mathbf{a} \mathbf{b} = a_i b_i = a^i b^i.$$

Помимо метрического тензора $g_{\mu\nu}$ с нижними индексами существует также метрический тензор с верхними индексами, определяемый равенством

$$g_{\mu\nu} g^{\nu\rho} = \delta_\mu^\rho,$$

где δ_μ^ρ — символ Кронекера. В пространстве Минковского $g^{\mu\nu}$ по виду совпадает с $g_{\mu\nu}$. С помощью $g^{\mu\nu}$ можно поднимать индексы: $a^\mu = g^{\mu\nu} a_\nu$.

Четырехмерный полностью антисимметричный тензор Леви-Чивиты определен как $\epsilon^{0123} = -\epsilon_{0123} = +1$.

Символ \hat{a} обозначает свертку вектора a с γ -матрицами Дирака: $\hat{a} \equiv a^\mu \gamma_\mu$. (Иногда, где это не приводит к недоразумениям, мы будем обозначать величиной с «крышкой» квантовомеханические операторы, например в следующей формуле \hat{p}_i — квантовомеханический оператор импульса).

Производную функции по x будем обозначать следующими способами

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x_\mu} = \left(\frac{\partial}{\partial x^0}, -\vec{\nabla} \right) f = \left(\frac{1}{i} \hat{p}^0, \frac{1}{i} \hat{p}^i \right) f = -i \hat{p}^\mu f = \partial^\mu f = f^{;\mu}, \\ \frac{\partial f(x)}{\partial x^\mu} = \left(\frac{\partial}{\partial x^0}, \vec{\nabla} \right) f = \left(\frac{1}{i} \hat{p}^0, -\frac{1}{i} \hat{p}^i \right) f = -i \hat{p}_\mu f = \partial_\mu f = f_{;\mu},$$

где $\hat{p}^i = -i \vec{\nabla}$ — обычный квантовомеханический оператор импульса в координатном представлении, а $\hat{p}_0 = i \partial_0$ по определению. Четырехмерная дивергенция в этих обозначениях имеет следующий вид $\partial^\mu a_\mu = \partial a = -i \hat{p} a$. Оператор Даламбера

$$\square = \partial_0^2 - \Delta = \partial^\mu \partial_\mu = \partial^2.$$

Индексы, обозначаемые буквами из начала алфавита (как греческого, так и латинского), будут относиться к внутренним симметриям или нести другой (оговоренный) смысл, например, часто буквами из начала греческого алфавита мы будем обозначать спинорные индексы. Для этих индексов также выполняется правило суммирования.

(Draft 01.09.2020) Глава 1

Классические поля

1.1 Лагранжев формализм

Поля и частицы. Квантовое поле – это фундаментальная физическая концепция, в рамках которой формулируются и описываются свойства элементарных частиц и их взаимодействия.

Метод квантовых полей позволяет описывать систему многих частиц единым физическим объектом — квантовым полем. При этом, в отличие от квантовой механики, квантовая теория поля позволяет описывать такое важное свойство частиц, как взаимодействие.

Гамильтонов и лагранжев формализм. В классической механике существует два способа описания систем — это *гамильтонов* или *канонический* и *лагранжев* формализмы. Гамильтонов формализм основан на введении обобщенных координат и импульсов. Лагранжев — на введении функции Лагранжа и принципе наименьшего (вообще говоря, стационарного) действия. При этом все сохраняющиеся динамические величины определяются из теоремы Нетер.

Для описания полей, как систем с бесконечным числом степеней свободы, можно также использовать как гамильтонов, так и лагранжев формализм. Однако гамильтонов формализм требует выделенной роли времени, что в свою очередь влечет за собой отсутствие явной релятивистской инвариантности. В лагранжевом формализме такой проблемы не возникает — время и координаты равноправны. Поэтому мы в дальнейшем будем в основном пользоваться лагранжевым формализмом.

Функция Лагранжа и принцип стационарного действия. Поскольку движение любой системы подчиняется некоторому закону (это следует, например, из повторяемости движения при одних и тех же условиях), то для количественного описания движения *всегда* можно ввести некоторую величину, которая для реализуемого движения принимает свое экстремальное значение. В классической механике, как и в теории поля, такая величина называется действием, и соответствующий (вообще говоря, достаточно тривиальный), сформулированный выше принцип называется принципом наименьшего (более точно стационарного) действия. Этот принцип формулируется следующим образом: для

истинного движения действие экстремально. Нетривиальным является способ построения действия. Для того чтобы его построить, необходимо прибегнуть к некоторым физическим соображениям. Во-первых, необходимо понять, какие характеристики, или динамические величины, описывают движение. В механике материальной точки — это зависящий от времени радиус вектор точки; в теории поля — это зависящая от координат и времени функция поля $u(x)$. Поэтому действие должно быть величиной, зависящей от этих динамических переменных. Заметим при этом, что действие не может быть функцией от этих величин, так как в этом случае для реализуемого движения эти характеристики были бы постоянны. Поэтому будем считать, что действие является функционалом от динамических переменных. Это утверждение в случае теории поля запишем следующим образом

$$S = \int dx \mathcal{L}(x) , \quad (dx \equiv d^4x \equiv dx^0 d\mathbf{x}) ,$$

где S — действие, \mathcal{L} — плотность функции Лагранжа или лагранжиан. Сама же функция Лагранжа дается следующим выражением

$$L(x^0) = \int d\mathbf{x} \mathcal{L}(x^0, \mathbf{x}) .$$

Обсудим теперь, каким может быть лагранжиан. Если лагранжиан $\mathcal{L}(x)$ зависит от состояния полей в бесконечно малой окрестности x , т.е. от значения функции $u(x)$ и конечного числа ее частных производных, взятых в точке x , то он называется *локальным*, а соответствующая теория — *локальной теорией*. Обычно считается, что любая разумная физическая теория является локальной. Это соответствует важному принципу — принципу близкодействия, который фактически означает, что информация не может передаваться со скоростью, большей скорости света. Таким образом, лагранжиан — это функция от полей и конечного числа их производных, взятых в одной точке. Далее, обычно, по аналогии со вторым законом Ньютона, требуют, чтобы уравнения движения не содержали производных выше второго порядка. Это, как мы увидим ниже, соответствует тому, что в общем случае в лагранжиане не содержится производных полей выше первой (с точностью до интегрирования по частям). Кроме того, считают, что лагранжиан не может зависеть явно от координат и времени, в противном случае, явная зависимость лагранжиана от x означала бы, что рассматриваемая система является частью некоторой более полной системы. Следующее требование, которое накладывают на лагранжиан, — это требование симметрии относительно различных преобразований, а именно, если рассматриваемая система обладает какой-либо симметрией, то действие не должно изменяться при соответствующих преобразованиях. При этом, благодаря теореме Нетер, такая инвариантность приводит к существованию некоторых сохраняющихся величин. В теории поля важным частным случаем таких возможных симметрий является *релятивистская инвариантность* или инвариантность относительно *полной неоднородной группы Лоренца*. Напомним в связи с этим определение группы Лоренца.

Как известно, *полной группой Лоренца* называется группа однородных линейных преобразований координат четырехмерного пространства-времени, которые оставляют инвариантной квадратичную форму x^2 и не меняют направления времени, т.е. она включает

вращения во всех плоскостях и отражения пространственных осей. При этом детерминанты преобразований поворотов равны $+1$, а детерминанты отражения осей -1 . Поэтому выделяют собственную группу Лоренца преобразований с детерминантом $+1$, включающую шесть поворотов и отражения относительно четного числа пространственных осей, сводящихся к поворотам.

Если полную группу Лоренца дополнить преобразованиями трансляций по всем четырём осям, то мы придем к полной неоднородной группе Лоренца или к *полной группе Пуанкаре*. Инвариантность относительно этой группы называется релятивистской или лоренцевой инвариантностью. Наконец, включение операции отражения времени приводит нас к общей группе Пуанкаре.

Вернемся теперь к обсуждению возможных лагранжианов. Итак, поскольку мы накладываем требование, что действие является лоренцевым инвариантом, а элемент объема d^4x так же является инвариантом для преобразований, не включающих отражение осей, то и лагранжиан должен быть также инвариантом.

Задача 7 Показать, что элемент объема d^4x является инвариантом.

Из теоремы Нетер следует, что лоренцевой инвариантности соответствует появление таких сохраняющихся наблюдаемых величин, как энергия, импульс и момент импульса. Поскольку эти величины выражаются через лагранжиан, то он должен быть действительной функцией, а в квантовом случае лагранжиан — это эрмитов оператор. Кроме того, лагранжиан должен приводить к ограниченному снизу функционалу энергии. Итак, подведем итог. Лагранжиан должен

- зависеть только от полей и их первых производных, взятых в одной точке

$$\mathcal{L}(x) = \mathcal{L}(u_a(x), \partial_\mu u_a(x)) ;$$

- быть (псевдо)скалярной относительно преобразований из полной группы Пуанкаре функцией;
- быть действительной функцией, в квантовом случае — эрмитовым оператором;
- обеспечивать ограниченность снизу энергии;
- приводить к действию, инвариантному относительно других возможных симметрий;
- обеспечивать перенормируемость соответствующей квантовой теории.

Последнее требование, которое не является обязательным, как в прочем и все остальные, мы здесь пояснять не будем. Скажем лишь, что для канонически нормированных полей (см. ниже) это требование практически всегда приводит к отсутствию в лагранжиане параметров с отрицательной (в единицах энергии) размерностью. В действительности, все эти требования достаточно сильно ограничивают число возможных лагранжианов. Примеры построения возможных лагранжианов мы обсудим в дальнейшем.

Таким образом,

$$S = \int dx \mathcal{L}(u_a(x), \partial_\mu u_a(x)) .$$

Принцип стационарного действия говорит, что для истинного движения вариация действия при вариации полей должна быть равна нулю

$$\frac{\delta S}{\delta u_a(x)} = 0 .$$

Отсюда, считая, что на границе интегрирования вариации полей исчезают, получаем уравнения Эйлера-Лагранжа

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_a(x)} - \frac{\partial}{\partial x^\mu} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{a;\mu}} = 0 , \quad (1.1)$$

которые и определяют (с учетом граничных условий) полевые функции $u_a(x)$.

Заметим здесь, что лагранжиан не является однозначным. К нему можно всегда добавлять дивергенцию от некоторого 4-вектора

$$\mathcal{L}(x) \rightarrow \mathcal{L}(x) + \partial^\mu F_\mu(x) ,$$

в частности, можно добавлять константу.

Задача 8 *Показать, что добавление 4-дивергенции к лагранжиану не изменяет уравнений движения.*

Трансформационные свойства полей. Как мы выше сказали, лагранжиан должен быть лоренцевым инвариантом и быть функцией от полей и их производных. Поэтому, для того чтобы научиться строить лагранжиан, необходимо установить трансформационные свойства полевых функций, т.е. установить законы преобразований полей при преобразованиях из группы Пуанкаре

$$x \rightarrow x' = Lx ,$$

$$x'^\mu = \Omega^\mu_\nu x^\nu + a^\mu = \Omega^{\mu\nu} x_\nu + a^\mu ; \quad g_{\mu\nu} \Omega^{\mu\lambda} \Omega^{\nu\rho} = g^{\lambda\rho} . \quad (1.2)$$

Переход от одной системы отсчета x к другой x' по закону (1.2) порождает однородное линейное преобразование компонент полевой функции

$$u(x) \rightarrow u'(x') = \Lambda u(x) .$$

Действительно, для малых полей должен выполняться принцип суперпозиции, который совместен только с линейными преобразованиями полей. Кроме того, если бы преобразования полей были бы неоднородны, то переход в другую систему отсчета порождал бы появление нефизического поля (если бы этот вклад был физическим, т.е. наблюдаемым, то существовала бы выделенная система отсчета, в которой поле бы исчезало, что противоречит принципу релятивистской инвариантности), которое, не теряя общности, можно положить равным нулю.

Матрица преобразования Λ целиком определяется матрицей лоренцева преобразования L : $\Lambda = \Lambda_L$, кроме того, единичному элементу группы L соответствует единичное

преобразование $\Lambda_1 = 1$, а произведению двух преобразований группы Лоренца соответствует произведение двух преобразований

$$\Lambda_{L_1 L_2} = \Lambda_{L_1} \Lambda_{L_2} .$$

Система операторов Λ с такими свойствами называется *линейным представлением группы*, а пространство, в котором действуют эти операторы — *пространством представления*. Оператор Λ можно представить в виде матрицы, ранг которой совпадает с числом компонент функции поля u . В случае, когда число компонент конечно, говорят о *конечномерном* представлении, в противном случае представление называется *бесконечномерным*. Обычно в физических теориях полевые функции принадлежат конечномерным представлениям, поэтому на них мы только и остановимся.

Иногда оказывается, что пространство представления можно разбить на подпространства, инвариантные относительно действия представления. В этом случае представление называется *приводимым*, в противном случае представление называется *неприводимым*. Очевидно, что любое пространство, в котором действует данное приводимое представление может быть разбито на инвариантные подпространства, в котором представление уже неприводимо. Поэтому изучение представлений данной группы сводится к изучению ее неприводимых представлений. Мы не будем здесь на этом останавливаться, а лишь приведем результаты, касающиеся группы Лоренца.

Конечномерное представление группы Лоренца может быть *однозначным* или *двузначным*. Это связано с тем, что соответствие $L \rightarrow \Lambda$ не обязано быть однозначным, поскольку функции поля не являются непосредственными наблюдаемыми. Однако некоторые *билинейные* комбинации этих полей будут наблюдаемыми, поэтому они должны трансформироваться однозначно при преобразованиях Лоренца. Однозначные представления $L \rightarrow \Lambda_L$ называются *тензорными и псевдотензорными*, соответствующие функции поля называются *тензорами и псевдотензорами*. Двузначные представления $L \rightarrow \pm \Lambda$ называются *спинорными*, соответствующие величины — *спинорами*.

Закон преобразования (псевдо)тензора N -го ранга при преобразованиях координат имеет вид

$$T'^{\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_N}(x') = P \frac{\partial x'^{\mu_1}}{\partial x^{\nu_1}} \dots \frac{\partial x'^{\mu_N}}{\partial x^{\nu_N}} T^{\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_N}(x) = P \Omega^{\mu_1}_{\nu_1} \dots \Omega^{\mu_N}_{\nu_N} T^{\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_N}(x) ,$$

где

$$P = \begin{cases} 1 & \text{тензор} \\ \det L & \text{псевдотензор} \end{cases} .$$

В частности, при преобразованиях трансляций имеем

$$x'^{\mu} = x^{\mu} + a^{\mu} \quad u(x) \rightarrow u'(x') = u(x) . \quad (1.3)$$

Этот же закон трансляций справедлив и для спинорных полей. Однако, в случае $\Omega^{\mu\nu} \neq g^{\mu\nu}$ закон преобразований спинорных полей более сложен (см. раздел (1.5)).

Приведем теперь простейшие тензорные представления. Тензор нулевого ранга преобразуется по закону

$$u'(x') = Pu(x) , \quad (1.4)$$

и называется *скаляром* или *псевдоскаляром*. А именно, при отражении нечетного числа пространственных осей

$$u'(x') = \begin{cases} u(x) & \text{скаляр} \\ -u(x) & \text{псевдоскаляр} . \end{cases}$$

Тензор первого ранга преобразуется по закону

$$u'^{\mu}(x') = P\Omega^{\mu}_{\nu}u^{\nu}(x) ,$$

и называется *контравариантным вектором* (*псевдовектором*). *Ковариантный вектор*

$$u_{\mu} = g_{\mu\nu}u^{\nu}$$

преобразуется по закону

$$u'_{\mu}(x') = \Omega_{\mu}^{\nu}u_{\nu}(x) .$$

При этом при отражении нечетного числа пространственных осей соответствующие компоненты вектора меняют знак, а псевдовектора — нет. В частности для отражения трёх пространственных осей $u^0(x') = u^0(x)$, а

$$u^i(x') = \begin{cases} -u^i(x) & \text{вектор} \\ u^i(x) & \text{псевдовектор} . \end{cases}$$

Теорема Нетер. Мы уже упоминали, что симметрии системы порождают некоторые сохраняющиеся величины. Взаимосвязь между симметриями и сохраняющимися величинами дает известная теорема Нетер. Мы не будем приводить здесь доказательство этой теоремы, а лишь приведем ее формулировку.

Всякому конечно-параметрическому (зависящему от s постоянных параметров) непрерывному преобразованию функций поля и координат, обращающему в нуль вариацию действия (при условии выполнения уравнений движения), соответствует s динамически инвариантов, т.е. сохраняющихся во времени комбинаций функций поля и их производных. А именно, пусть

$$x^{\mu} \rightarrow x'^{\mu} = x^{\mu} + \delta x^{\mu} , \quad \delta x^{\mu} = \sum_{n=1}^s X^{\mu}_{(n)} \delta \omega_n ,$$

$$u_a(x) \rightarrow u'_a(x') = u_a(x) + \delta u_a(x) , \quad \delta u_a(x) = \sum_{n=1}^s \Psi_{a(n)} \delta \omega_n ,$$

где $\delta \omega_n$ являются инфинитесимальными параметрами преобразований, а $X^{\mu}_{(n)}$ и $\Psi_{a(n)}$ называются генераторами преобразований координат и полей соответственно. Тогда существуют сохраняющиеся токи

$$\Theta^{\mu}_{(n)}(x) = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_{\mu} u_a} (\Psi_{a(n)} - \partial_{\nu} u_a X^{\nu}_{(n)}) - \mathcal{L} \cdot X^{\mu}_{(n)} , \quad (1.5)$$

т.е.

$$\partial_{\mu} \Theta^{\mu}_{(n)}(x) = 0 ,$$

и соответствующие им сохраняющиеся заряды

$$Q_{(n)} = \int d\mathbf{x} \Theta_{(n)}^0(x) ,$$

$$\frac{dQ_{(n)}}{dt} = 0 .$$

Заметим, что токи (1.5) не являются однозначно определенными — к ним можно добавить дивергенцию от антисимметричного тензора второго ранга:

$$\Theta_{(n)}^\mu(x) \rightarrow \Theta'_{(n)}^\mu(x) = \Theta_{(n)}^\mu(x) + \partial_\nu f_{(n)}^{\mu\nu} ; \quad f_{(n)}^{\mu\nu} = -f_{(n)}^{\nu\mu} ,$$

что не влияет на их сохранение.

Рассмотрим один важный частный случай бесконечно малых трансляций. В этом случае

$$X_\mu^\nu = \delta_\mu^\nu , \quad \Psi_{a(\mu)} = 0 .$$

Подставляя эти выражения в ток (1.5), приходим к тензору второго ранга

$$T_\mu^\nu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{a;\nu}(x)} \partial_\mu u_a(x) - \mathcal{L} \delta_\mu^\nu , \quad (1.6)$$

или в полностью контравариантном виде

$$T^{\mu\nu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{a;\nu}(x)} \partial^\mu u_a(x) - \mathcal{L} g^{\mu\nu} .$$

Этот тензор называется *каноническим (или нётеровским) тензором энергии-импульса*. Заметим, что в общем случае он не является симметричным. Его можно сделать таковым, путем добавления дивергенции антисимметричного по двум индексам тензора третьего ранга. Существует другой способ получать сразу симметричный тензор энергии-импульса. Оказывается

$$T_E^{\mu\nu}(x) = 2 \frac{\delta S}{\delta g_{\mu\nu}(x)} \bigg|_{g_{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)} . \quad (1.7)$$

Такой тензор энергии-импульса называется *метрическим или эйнштейновским*. Сохраняющийся во времени заряд представляет собой 4-вектор импульса

$$P^\mu = \int d\mathbf{x} T^{\mu 0} . \quad (1.8)$$

Нулевая компонента этого вектора P^0 представляет собой в классической механике функцию Гамильтона, т.е. энергию — отсюда и название.

Задача 9 Как уже говорилось, к лагранжиану можно добавить произвольную константу. Согласно (1.7) это приведет к появлению вклада (даже в отсутствие вклада от полей), пропорционального $g_{\mu\nu}$, в тензор энергии-импульса u , соответственно (см. (1.8)), вклада в энергию P^0 . Так как P^0 – это нулевая компонента 4-х вектора P^μ , то, перейдя в движущуюся систему отсчета (сделав буст), можно получить **ненулевой** вектор \mathbf{P} , что, на первый взгляд, нарушает релятивистскую инвариантность: существует выделенная система отсчета, в которой, например, $\mathbf{P} = 0$. Действительно ли нарушается лоренц-инвариантность?

Рассмотрение инвариантности теории относительно собственных преобразований Лоренца сформулируем в виде следующих задач.

Задача 10 Рассмотрим бесконечно малые 4-вращения

$$x'^\mu = x^\mu + x_\nu \delta\omega^{\mu\nu}.$$

Лагранжиан инвариантен относительно таких преобразований. Показать, что соответствующий сохраняющийся ток, называемый тензором момента, равен

$$J_{\mu\nu}^{\cdot\rho} = (x_\nu T_{\mu}^{\cdot\rho} - x_\mu T_{\nu}^{\cdot\rho}) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\rho u_a} \Sigma_{a\mu\nu}^b u_b, \quad (1.9)$$

где $T_{\mu}^{\cdot\rho}$ дается выражением (1.6), а $\Sigma_{a\mu\nu}^b$ – генератор 4-вращений в представлении, по которому преобразуется поле при преобразованиях Лоренца,

$$\delta u_a(x) = \frac{1}{2} \Sigma_{a\mu\nu}^b u_b(x) \delta\omega_{\mu\nu}.$$

Сохраняющемуся току $J^{\mu\nu,\rho}$ соответствует сохраняющийся заряд

$$J^{\mu\nu} = \int d\mathbf{x} J^{\mu\nu,0},$$

который мы также будем называть тензором момента. Показать, что если u – скалярное поле, то $\Sigma_{a\mu\nu}^b = 0$, если же векторное, то $\Sigma_{\lambda\mu\nu}^\sigma = g_{\lambda\mu} \delta_\nu^\sigma - g_{\lambda\nu} \delta_\mu^\sigma$.

Величина, стоящая в круглых скобках в (1.9), называется тензором орбитального момента поля $L_{\mu\nu}^{\cdot\rho}$, второй член в (1.9)

$$S_{\mu\nu}^{\cdot\rho} = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\rho u_a} \Sigma_{a\mu\nu}^b u_b,$$

характеризует поляризационные свойства поля и соответствует спиновому моменту частиц. Так, трехмерный вектор орбитального момента и вектор спина соответственно равны

$$L_i = -\frac{1}{2} \epsilon_{ijk} \int d\mathbf{x} L_{jk}^0, \quad (1.10)$$

$$S_i = -\frac{1}{2} \epsilon_{ijk} \int d\mathbf{x} S_{jk}^0. \quad (1.11)$$

Объяснить выбор знаков в (1.10), (1.11).

Задача 11 В силу антисимметрии по индексам μ, ν тензор момента (1.9) при $\rho = 0$ имеет шесть компонент. Три из них $J_{ij}^{\cdot 0}$, соответствующие симметрии относительно трёхмерных поворотов, приводят к хорошо известному сохраняющемуся (псевдо)вектору углового момента $J_i = L_i + S_i$. Какой сохраняющейся величине соответствуют оставшиеся три компонента $J_{0i}^{\cdot 0}$, соответствующие бустам? Используются ли они в физике?

Задача 12 Показать, что в общем случае тензоры орбитального момента и спина не сохраняются по отдельности. Показать, что необходимым и достаточным условием сохранения орбитального момента (и, тем самым, спина) является условие симметричности нетеровского тензора энергии-импульса.

Как следует из результатов задачи 12 спин поля в общем случае не сохраняется. Однако в некоторых случаях можно получить сохраняющуюся величину, характеризующую поляризационные свойства поля. Действительно, рассмотрим вектор

$$W_\mu = -\frac{1}{2}\epsilon_{\mu\nu\lambda\rho}J^{\nu\lambda}P^\rho. \quad (1.12)$$

Этот вектор, очевидно, сохраняется, так как составлен из сохраняющихся величин. Как можно увидеть на конкретных примерах, для конфигураций полей, распространяющихся в определенном направлении, характеризующемся вектором p^μ , плотность импульса поля $T^{\mu 0} \sim p^\mu$ и сам импульс $P^\mu \sim p^\mu$, поэтому вклад орбитального момента в (1.12) исчезает, и W_μ становится сохраняющейся величиной, характеризующий поляризационные свойства поля. Для полей с $P_\mu^2 > 0$, которые, как мы увидим в дальнейшем, описывают массивные частицы, вместо (1.12) обычно рассматривают сохраняющийся вектор Паули-Любанского $W_\mu/\sqrt{P^2}$, который в системе покоя $\mathbf{P} = 0$ совпадает с вектором спина (1.11) и поэтому может рассматриваться как релятивистское обобщение понятия спина.

Задача 13 Показать, что вектор Паули-Любанского в системе покоя совпадает с вектором спина (1.11).

Применение теоремы Нетер в случае наличия других симметрий иллюстрируют следующие задачи.

Задача 14 Рассмотрим теорию одного комплексного поля u . Как уже говорилось, лагранжиан должен быть действительной функцией. Это может быть достигнуто, если потребовать, чтобы он оставался инвариантным относительно (глобальных, т.е. не зависящих от координат) фазовых вращений поля

$$u' = ue^{i\alpha}. \quad (1.13)$$

Найти соответствующий нетеровский ток и показать, что он действительно сохраняется на уравнениях движения.

Задача 15 Рассмотрим теорию действительного скалярного поля с лагранжианом

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu\varphi)^2.$$

Как мы увидим в дальнейшем, такая теория описывает безмассовое скалярное поле. Найти максимально возможное количество непрерывных симметрий этой теории и построить соответствующие нетеровские токи. Проверить, что эти токи действительно сохраняются.

1.2 Гармонический осциллятор

Для того чтобы построить квантовую теорию поля, полезно вспомнить схему квантования гармонического осциллятора. Для этого, чтобы проследить аналогию с квантованием полей, рассмотрим теорию одного действительного поля $\varphi(t)$ в пространстве-времени с единственным временным измерением. В таком пространстве полная группа Пуанкаре сводится только к трансляциям по времени, поле φ преобразуется по закону (1.3) и является скаляром. Мы ограничимся рассмотрением свободного (невзаимодействующего) поля, т.е. поля, уравнение движения которого линейны. Из уравнения Эйлера-Лагранжа (1.1) в этом случае следует, что лагранжиан должен быть квадратичной функцией полей и их первых производных, наиболее общий вид которой

$$\mathcal{L} = a\dot{\varphi}^2 + b\dot{\varphi} + c\varphi\dot{\varphi} + d\varphi^2 + e\varphi + f, \quad (1.14)$$

где a, \dots, f – константы. В выражении (1.14) мы учли, что теория должна быть инвариантна по отношению к сдвигам времени, и, следовательно, лагранжиан не должен явно зависеть от t . Слагаемые, пропорциональные b и c , являются полными производными и не влияют на уравнения движения. Поэтому, не теряя общности, можно считать $b = c = 0$. Последние три слагаемых в (1.14) при $d \neq 0$ можно сгруппировать

$$d\left(\varphi + \frac{e}{2d}\right)^2 + f - \frac{e^2}{4d}. \quad (1.15)$$

Переопределяя поле

$$\varphi + \frac{e}{2d} \rightarrow \varphi,$$

что не влияет на вид первого слагаемого в (1.14), и опуская постоянные слагаемые, не влияющие на уравнения движения, приходим к наиболее общему виду лагранжиана такой теории

$$\mathcal{L} = a\dot{\varphi}^2 + d\varphi^2. \quad (1.16)$$

Так как теория трансляционно-инвариантна, то в ней имеется сохраняющийся ток – тензор энергии-импульса (1.6), – имеющий единственный компонент, совпадающий с энергией,

$$T^{00} = E = a\dot{\varphi}^2 - d\varphi^2. \quad (1.17)$$

Требование ограниченности снизу энергии приводит к следующим ограничениям на параметры a и d : $a > 0$, $d \leq 0$. Чтобы убедиться в этом прежде всего заметим, что случай $a = 0$ физически неинтересен: решением уравнения движения будет $\varphi = 0$ и поле не является динамическим. Далее найдем общее решение уравнения движения, следующего из лагранжиана (1.16) (смотрите вывод уравнений движения ниже и сравните с (1.20), (1.21)). При $d \neq 0$ решение имеет вид

$$\varphi = c^+ \exp\left(\sqrt{\frac{d}{a}}t\right) + c^- \exp\left(-\sqrt{\frac{d}{a}}t\right),$$

где c^\pm произвольные амплитуды (константы интегрирования). Подставляя это решение в выражение для энергии (1.17), находим

$$E = -4d \cdot c^+ c^-. \quad (1.18)$$

Если отношение $d/a > 0$, то c^\pm – две произвольные несвязанные никаким соотношением действительные константы. Поэтому произведение c^+c^- закононеопределено, и энергия (1.18) неограничена снизу. Если $d/a < 0$, то из условия действительности поля следует $c^+ = (c^-)^*$, а значит $c^+c^- = |c^+|^2 > 0$. Следовательно, чтобы энергия была ограничена снизу, необходимо, чтобы $d < 0$, а значит $a > 0$. Аналогично можно рассмотреть случай $d = 0$ и получить ограничение $a > 0$.

Задача 16 *Стартуя с формулы (1.14), повторить приведенный выше анализ в случае $d = 0$.*

Заметим, что общий множитель в лагранжиане не влияет на уравнения движения. В теории поля удобно выбрать каноническую нормировку

$$a = \frac{1}{2}, \quad d = -\frac{\omega^2}{2}.$$

Тогда лагранжиан примет вид

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\dot{\varphi}^2 - \frac{\omega^2}{2}\varphi^2.$$

Однако можно сделать и любой другой выбор констант. Например, $a = m/2$, а $d = -k/2$. Тогда мы приходим к хорошо известному лагранжиану, описывающему колебания груза на пружинке. Таким образом мы видим, что одномерная теория поля эквивалентна гармоническому осциллятору.

Кратко напомним здесь, как получаются уравнения Эйлера-Лагранжа. Для этого явно проварируем действие по φ , задавая вариацию поля $\delta\varphi$,

$$\delta S = S[\varphi + \delta\varphi] - S[\varphi] = \int_{t_1}^{t_2} dt (\dot{\varphi} \cdot \partial_t(\delta\varphi) - \omega^2 \varphi \delta\varphi + \mathcal{O}((\delta\varphi)^2)).$$

Производная от вариации поля в первом не является независимой. Чтобы избавиться от нее в первом слагаемом мы проинтегрируем первое слагаемое по частям, используя частный одномерный случай формулы Гаусса – формулу Ньютона-Лейбница. Тогда вариация действия примет вид

$$\delta S = \dot{\varphi} \delta\varphi \Big|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} dt (\ddot{\varphi} + \omega^2 \varphi) \delta\varphi + \mathcal{O}(\delta\varphi)^2. \quad (1.19)$$

Первое слагаемое – поверхностный или граничный член – исчезает в силу того, что при постановке вариационной задачи граничные (начальные) условия заданы, и, следовательно, вариация поля на границе тождественно равна нулю. Принцип наименьшего действия требует, чтобы вариация действия обращалась в ноль. Поскольку вариация поля является произвольной (малой) функцией, то интеграл в (1.19) обращается в ноль тогда и только тогда, когда выражение в скобках тождественно равно нулю, что приводит к уравнению Эйлера-Лагранжа

$$\ddot{\varphi} + \omega^2 \varphi = 0. \quad (1.20)$$

Задача 17 Добавим к лагранжиану (1.14) всевозможные квадратичные по полю слагаемые, содержащие вторую производную $\ddot{\varphi}$. Получить уравнения поля и найти тензор энергии-импульса. Показать, что требование отсутствия в уравнениях движения старших (выше второй) производных и ограниченности снизу энергии приводит к теории, эквивалентной (1.20). Откажемся от требования отсутствия старших производных в уравнении движения. Найти общее решение полученного таким образом уравнения движения. Найти энергию такого решения и исследовать, при каких значениях параметров энергия ограничена снизу.

Общее решение уравнения (1.20) имеет вид

$$\varphi = \frac{1}{\sqrt{2\omega}} (a^+ e^{i\omega t} + a^- e^{-i\omega t}). \quad (1.21)$$

Условие действительности поля φ приводит к требованию

$$(a^+)^* = a^-. \quad (1.22)$$

Для того чтобы канонически проквантовать поле φ нам необходимо развить гамильтонов формализм. Для этого выберем в качестве обобщенной координаты q поле φ : $q = \varphi$, тогда канонически сопряженный обобщенный импульс

$$p = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} = \dot{q}, \quad (1.23)$$

и гамильтониан системы

$$H = p\dot{q} - \mathcal{L} = \frac{p^2 + \omega^2 q^2}{2}, \quad (1.24)$$

где во втором равенстве мы выразили с помощью (1.23) скорость через обобщенный импульс и координату. Заметим, что в общем случае нескольких динамических переменных уравнения, аналогичные (1.23), позволяющие выразить скорости через координаты и импульсы, могут не иметь решения. Такие системы называются системами со связями и требуют особого рассмотрения. Многие теоретико-полевые модели являются такими системами.

Для произвольной системы с N степенями свободы, допускающей гамильтоново описание, уравнениями движения являются уравнения Гамильтона (считаем, что H не зависит от времени)

$$\dot{q}_a = \{H, q_a\}, \quad \dot{p}_a = \{H, p_a\}, \quad a, b \dots = 1, \dots, N, \quad (1.25)$$

и в общем случае для произвольной функции от координаты и импульса

$$\frac{dA(p, q)}{dt} = \{H, A\}, \quad (1.26)$$

где фигурными скобками обозначены скобки Пуассона, определенные как

$$\{A, B\} = \sum_{a=1}^N \frac{\partial A}{\partial p_a} \frac{\partial B}{\partial q_a} - \frac{\partial A}{\partial q_a} \frac{\partial B}{\partial p_a}. \quad (1.27)$$

В частности, скобки Пуассона координат и импульсов имеют вид

$$\{p_a, q_b\} = \delta_{ab}, \quad \{p_a, p_b\} = \{q_a, q_b\} = 0. \quad (1.28)$$

Возвращаясь к рассматриваемому нами гармоническому осциллятору и подставляя (1.21) в (1.23) и (1.24) найдем сопряженный импульс

$$p = i\sqrt{\frac{\omega}{2}} (a^+ e^{i\omega t} - a^- e^{-i\omega t}) \quad (1.29)$$

и гамильтониан

$$H = \frac{\omega}{2} (a^+ a^- + a^- a^+), \quad (1.30)$$

где в последнем равенстве мы учли, что при квантовании амплитуды a^+ и a^- становятся некоммутирующими операторами.

Уравнения (1.21) и (1.29) можно обратить и выразить амплитуды a^+ и a^- через координату и импульс

$$a^\pm = \frac{e^{\mp i\omega t}}{\sqrt{2\omega}} (\omega q \mp ip) \quad (1.31)$$

и вычислить скобки Пуассона между амплитудами

$$\{a^-, a^+\} = i, \quad \{a^-, a^-\} = \{a^+, a^+\} = 0. \quad (1.32)$$

Прежде чем переходить к квантованию рассмотрим важное для дальнейшего обобщение на случай нескольких полей φ_a , $a, b = 1, \dots, M$. Рассуждения, приведшие нас к (1.16), остаются в силе. Поэтому наиболее общий вид лагранжиана в этом случае

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \dot{\varphi}_a K_{ab} \dot{\varphi}_b - \frac{1}{2} \varphi_a \Omega_{ab} \varphi_b, \quad (1.33)$$

где подразумевается суммирование по повторяющимся индексам. Требования ограниченности снизу энергии и того, чтобы все M степеней свободы были динамическими, приводят к условию положительной определенности квадратичной формы K_{ab} и неотрицательной определенности формы Ω_{ab} . В этом случае известная теорема алгебры утверждает, что эти формы могут быть диагонализированы одновременным преобразованием, причем форма K_{ab} может быть приведена к единичной матрице. Собственные значения формы Ω неотрицательны, поэтому наиболее общий вид лагранжиана M полей сводится к сумме лагранжианов каждого поля (мы сохраняем те же обозначения для преобразованных полей)

$$\mathcal{L} = \sum_{a=1}^M \mathcal{L}_a = \sum_{a=1}^M \left(\frac{1}{2} \dot{\varphi}_a^2 - \frac{\omega_a^2}{2} \varphi_a^2 \right). \quad (1.34)$$

Задача 18 *Сформулировать теорему об одновременной диагонализации двух квадратичных форм и продемонстрировать схему получения лагранжиана (1.34).*

Формулы, приведенные выше и относящиеся к случаю одного осциллятора, остаются в силе: необходимо лишь приписать соответствующим величинам индексы, нумерующие степени свободы и просуммировать по этим индексам там, где это необходимо. В частности, гамильтониан системы представляет собой сумму гамильтонианов каждого осциллятора, а нетривиальная скобка Пуассона для амплитуд принимает вид

$$\{a_a^-, a_b^+\} = i\delta_{ab}.$$

Каноническое квантование. Формально каноническое квантование классической системы проводится следующим образом. Динамическим переменным p и q ставятся в соответствие операторы: $p \mapsto \hat{p}$, $q \mapsto \hat{q}$, действующие на постоянные во времени вектора состояния $|\psi\rangle$, принадлежащие гильбертову пространству. При этом любая функция $A(p, q)$ также становится оператором. Между операторами устанавливаются коммутационные соотношения, а именно, скобка Пуассона двух величин $\{A, B\}$ заменяется на коммутатор двух операторов:

$$\{A, B\} \mapsto \frac{i}{\hbar}[\hat{A}, \hat{B}] = \frac{i}{\hbar}(\hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A}) , \quad (1.35)$$

(в этой формуле мы восстановили постоянную Планка \hbar ; далее мы снова будем ее опускать). Тогда

$$[\hat{p}, \hat{q}] = -i , \quad [\hat{p}, \hat{p}] = [\hat{q}, \hat{q}] = 0 ,$$

и уравнение Гамильтона становится уравнением Гейзенберга

$$i \frac{d\hat{A}(\hat{p}, \hat{q})}{dt} = [\hat{A}, \hat{H}] . \quad (1.36)$$

Таким образом мы приходим к картине Гейзенберга, в которой зависящий от времени оператор действует на не зависящий от времени вектор состояния. Среднее значение наблюдаемой A , соответствующей оператору \hat{A} , дается следующим выражением

$$A(t) = \langle \psi | \hat{A}(t) | \psi \rangle . \quad (1.37)$$

Заметим, что уравнение (1.36) можно формально проинтегрировать. Легко убедиться, что оператор

$$\hat{A}(t) = e^{i\hat{H}t} \hat{A}(0) e^{-i\hat{H}t} \quad (1.38)$$

является решением уравнения (1.36). Тогда среднее значения любой величины (1.37) можно переписать в виде

$$A(t) = \langle \psi | e^{i\hat{H}t} \hat{A}(0) e^{-i\hat{H}t} | \psi \rangle \equiv \langle \psi(t) | \hat{A}(0) | \psi(t) \rangle , \quad (1.39)$$

где по определению

$$|\psi(t)\rangle = e^{-i\hat{H}t} |\psi(0)\rangle . \quad (1.40)$$

Сравнивая (1.39) и (1.37), видим что среднее для любой величины можно находить, либо вычисляя среднее от зависящего от времени оператора по не зависящим от времени векторам состояния (1.37) (представление Гейзенберга), либо вычисляя среднее от не зависящего от времени оператора по зависящим от времени векторам состояния (1.39) (представление Шредингера). Из определения (1.40) можно получить уравнение для нахождения вектора состояния $|\psi(t)\rangle$. Продифференцируем (1.40) по времени и получим

$$i \frac{\partial |\psi(t)\rangle}{\partial t} = \hat{H} |\psi(t)\rangle . \quad (1.41)$$

Это шредингеровская форма уравнений движения. Чтобы получить хорошо известное волновое уравнение Шредингера, необходимо ввести понятие волновой функции. С этой

целью рассмотрим полный набор коммутирующих наблюдаемых λ и построим волновую функцию в *представлении* λ

$$\psi_\lambda(t) = \langle \lambda | \psi(t) \rangle.$$

Тогда уравнение (1.41) принимает вид уравнения Шредингера для волновой функции

$$i \frac{\partial \psi_\lambda(t)}{\partial t} = \hat{H}_\lambda \psi_\lambda(t),$$

где гамильтониан H_λ взят в представлении λ . В дальнейшем мы не будем различать понятия вектора состояния и волновой функции, так как последняя по сути представляет собой координаты вектора состояния в некотором выбранном базисе $\langle \lambda |$. Квадрат модуля волновой функции, как обычно, дает вероятность того, что в данном состоянии наблюдаемая λ имеет определенное значение или лежит в определенном малом промежутке.

Представление чисел заполнения. Для того чтобы проводить дальнейшие вычисления необходимо выбрать какой-либо удобный базис в гильбертовом пространстве и тем самым фиксировать представления операторов. Выбор базиса в первую очередь определяется удобством вычислений и прозрачностью интерпретации. Существует один чрезвычайно полезный в квантовой теории поля выбор базиса – *представление чисел заполнения*, обобщением которого на случай КТП является *фоковское представление*. Чтобы построить это представление рассмотрим вектор $|E\rangle$, являющийся собственным вектором гамильтониана

$$\hat{H} = \omega \hat{a}^+ \hat{a}^- + \frac{\omega}{2} \quad (1.42)$$

с собственным значением E

$$\hat{H}|E\rangle = E|E\rangle. \quad (1.43)$$

При получении (1.42) мы использовали правило перехода (1.35), приводящее к ненулевому коммутатору (см. (1.32))

$$[\hat{a}^-, \hat{a}^+] = 1, \quad (1.44)$$

и классическое выражение для гамильтониана (1.30).

Подействуем на вектор $|E\rangle$ оператором \hat{a}^- и выясним, используя (1.44), состояние с какой энергией описывает полученный вектор:

$$\hat{H} \hat{a}^- |E\rangle = (E - \omega) \hat{a}^- |E\rangle.$$

Видим, что вектор $\hat{a}^- |E\rangle$ представляет собой собственный вектор гамильтониана (с точностью до постоянного множителя) $|E - \omega\rangle$ с собственным значением $E - \omega$, т.е. оператор \hat{a}^- понижает энергию системы и называется *понижающим оператором* или *оператором уничтожения*. Аналогично можно убедиться, что \hat{a}^+ повышает энергию: $\hat{a}^+ |E\rangle = |E + \omega\rangle$ и называется *повышающим оператором* или *оператором рождения*. Поскольку энергия системы ограничена снизу, должен существовать вектор $|0\rangle$ с наименьшей энергией. Действуя на этот вектор оператором \hat{a}^- , мы получим либо вектор с меньшей энергией, что противоречит предположению о том, что $|0\rangle$ является состоянием с наименьшей энергией, либо 0, т.е. вектор $|0\rangle$ *аннигилируется* оператором уничтожения. Таким образом мы

приходим к математическому определению *вакуума* (состояния с наименьшей энергией):

$$\begin{aligned}\hat{a}^-|0\rangle &= 0, \\ \langle 0|\hat{a}^+ &= 0, \\ \langle 0|0\rangle &= 1,\end{aligned}\tag{1.45}$$

где второе уравнение следует из (1.22), а третье представляет условие нормировки.

Имея в распоряжении вакуумный вектор и используя интерпретацию повышающего оператора, легко построить все собственные векторы гамильтониана. Действительно, используя коммутационное соотношение для операторов рождения и уничтожения (1.44), легко проверить, что векторы

$$|n\rangle = \left| \frac{\omega(2n+1)}{2} \right\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}}(\hat{a}^+)^n|0\rangle\tag{1.46}$$

являются ортонормированными,

$$\langle m|n\rangle = \delta_{mn},\tag{1.47}$$

собственными векторами оператора Гамильтона с собственными значениями $\omega(n+1/2)$

$$\hat{H}|n\rangle = \omega\left(n + \frac{1}{2}\right)|n\rangle.\tag{1.48}$$

Построенные векторы, образующие базис в гильбертовом пространстве, также являются собственными векторами оператора *чисел заполнения* $\hat{N} = \hat{a}^+\hat{a}^-$, очевидно коммутирующего с гамильтонианом,

$$\hat{N}|n\rangle = n|n\rangle,\tag{1.49}$$

аналогом которого в КТП является оператор числа частиц. Полученное представление в квантовой механике называется *представлением чисел заполнения*.

Задача 19 Показать справедливость равенств (1.47), (1.48), (1.49). Показать, что не существует других собственных векторов гамильтониана, т.е., действительно, набор (1.46) является базисом.

Обобщение на случай нескольких степеней свободы, характеризуемых частотами ω_a ($a, b \dots = 1, \dots, M$) очевидно. Так, оператор чисел заполнения и гамильтониан системы имеют вид

$$\begin{aligned}\hat{N} &= \sum_{a=1}^M \hat{N}_a = \sum_{a=1}^M \hat{a}_a^+ \hat{a}_a^-, \\ \hat{H} &= \sum_{a=1}^M \hat{H}_a = \sum_{a=1}^M \omega_a \left(\hat{a}_a^+ \hat{a}_a^- + \frac{1}{2} \right) = \sum_{a=1}^M \omega_a \left(\hat{N}_a + \frac{1}{2} \right),\end{aligned}$$

где повышающие и понижающие операторы имеют следующие коммутационные соотношения

$$[\hat{a}_a^-, \hat{a}_b^+] = \delta_{ab}, \quad [\hat{a}_a^+, \hat{a}_b^+] = [\hat{a}_a^-, \hat{a}_b^-] = 0.\tag{1.50}$$

Нормированный вектор, описывающий состояние, в котором a -ая степень свободы (мода) имеет число заполнения n_a , с полной энергией

$$E = \sum_{a=1}^M \omega_a \left(n_a + \frac{1}{2} \right), \quad (1.51)$$

имеет вид

$$|n_1, n_2, \dots, n_M\rangle = \prod_{a=1}^M \otimes |n_a\rangle = \prod_{a=1}^M \frac{1}{\sqrt{n_a!}} (\hat{a}_a^+)^{n_a} |0\rangle. \quad (1.52)$$

Заметим, что в этом выражении некоторые n_a могут принимать нулевые значения. О таких модах говорят, что они находятся в вакууме (или не возбуждены), хотя сам вектор состояния не является вакуумным.

Обсуждение. Прежде чем переходить к изучению полноценной (многомерной) квантовой теории поля сделаем несколько замечаний.

Во-первых, заметим, что существуют (не классические) системы, в которых последовательно накладывать не коммутационные соотношения по правилу (1.35), а *антикоммутационные*

$$\{A, B\} \mapsto \frac{i}{\hbar} \{\hat{A}, \hat{B}\} = \frac{i}{\hbar} (\hat{A}\hat{B} + \hat{B}\hat{A}). \quad (1.53)$$

Такие системы подчиняются *статистике Ферми-Дирака* (в отличие от “обычных” систем, подчиняющихся *статистике Бозе-Эйнштейна*), а соответствующие степени свободы называются *фермионными*. В действительности любая классическая система является некоторой квантовой системой в пределе $\hbar \rightarrow 0$. Поэтому последовательно рассматривать фермионные степени свободы даже в “классическом” случае (т.е. когда динамические величины не рассматриваются как операторы), описывая их *антикоммутирующими* переменными. В частности, последовательно считать, что “классические” координаты и импульсы (не операторы) должны антикоммутировать, например, $p_a q_b = -q_b p_a$, $q_a q_b = -q_b q_a$. Такие величины называются *грассмановыми*. Тогда относительный знак “ $-$ ” в выражении (1.27) для скобок Пуассона изменится на “ $+$ ”, что согласуется с предписанием (1.53).

Следствием антикоммутационных соотношений (1.53) является то, что для любого фермионного (антикоммутирующего) оператора $\hat{A}^2 = 0$. Следовательно, максимальное число заполнения в a -ой моде может быть только единицей: $|1_a\rangle = \hat{a}_a^+ |0\rangle$, что, однако, не противоречит заполнению двух мод

$$|2\rangle = \hat{a}_a^+ \hat{a}_b^+ |0\rangle = -|2'\rangle = -\hat{a}_b^+ \hat{a}_a^+ |0\rangle. \quad (1.54)$$

Отметим здесь, что, как следует из (1.54), векторы состояний с полным числом заполнения большим единицы определены с точностью до знака. Этот знак не имеет физического значения, однако за ним необходимо следить при вычислениях, например, в вычислениях типа

$$(\hat{A} + \hat{B})|2\rangle = \hat{A}|2\rangle + \hat{B}|2\rangle \neq \hat{A}|2\rangle + \hat{B}|2'\rangle.$$

Во-вторых, как мы вскоре увидим, многомерная квантовая теория поля представляет собой систему с бесконечным числом степеней свободы. Эти степени свободы (помимо

других возможных индексов) нумеруются непрерывным импульсом \mathbf{k} . Соответствующие суммы по номерам мод заменяются при этом интегралами. Наличие бесконечного числа степеней свободы зачастую приводит к расходимостям в некоторых величинах. Так, например, энергия вакуума (см. (1.51)) становится бесконечной. Эта энергия не зависит от динамики системы, представляет собой аддитивную нефизическую добавку и, следовательно, может быть отброшена (в пренебрежении гравитационными взаимодействиями или другими эффектами, чувствительными к абсолютному значению энергии). Вычитание бесконечной энергии вакуума представляет собой простейшую *перенормировку*.

В-третьих, наличие непрерывного параметра, нумерующего моды, приводит к следующему определению вектора состояния, в котором заполнены моды с импульсами $\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \dots$

$$|\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \dots\rangle = \prod_i \hat{a}_{\mathbf{k}_i}^+ |0\rangle.$$

Обратим внимание на отсутствие в этом выражении нормировочного множителя $1/\sqrt{n!}$, характерного для бозонных степеней свободы (1.52) (как обсуждалось выше, для фермионных степеней свободы этот множитель всегда равен $1 = 1/\sqrt{1!}$). Это обусловлено тем фактом, что моды с разными импульсами (даже если другие индексы одинаковы) являются разными. Если же несколько импульсов (и другие индексы) совпадают, то, строго говоря, для *нормированного* вектора состояния необходимо учитывать этот фактор. Это, однако, неудобно и, кроме того, состояния с равными импульсами представляют собой множество меры нуль в пространстве состояний и их практически невозможно изготовить. Поэтому этот множитель обычно не пишут. Однако его необходимо учитывать при вычислении интегральных величин, таких как полная вероятность какого-либо процесса (см. раздел 3.7), когда область интегрирования по импульсам включает в себя подобласти, в которых импульсы совпадают.

1.3 Скалярное поле

Лагранжиан свободного действительного скалярного поля. Рассмотрим наиболее простое однокомпонентное действительное скалярное поле. Это поле описывается функцией $\varphi(x)$, преобразующейся по закону (1.4) при преобразованиях Лоренца. В этой главе мы ограничимся случаем свободного поля, т.е. поля уравнения движения которого являются линейными. Тогда, согласно уравнениям Эйлера-Лагранжа (1.1), лагранжиан должен содержать степени полей и их первых производных не выше второй. Наиболее общий лагранжиан такого вида, являющийся лоренцевым инвариантом, можно написать в следующей форме

$$\mathcal{L} = a(\partial\varphi)^2 + b\varphi^2 + c\varphi + d, \quad (1.55)$$

где a, b, c — некоторые действительные постоянные. В этом выражении при $b \neq 0$ можно изгнать линейное по полю слагаемое путем переопределения φ :

$$\varphi + \frac{c}{2b} \mapsto \varphi.$$

Кроме того, постоянный член, получающийся в результате такой замены, так же как и постоянная d в (1.55), не влияют на уравнения движения, поэтому их можно опустить. В

результате приходим к следующему общему выражению

$$\mathcal{L} = a(\partial\varphi)^2 + b\varphi^2 .$$

Для того чтобы фиксировать постоянные a и b , найдем плотность энергии поля. Согласно формуле (1.6)

$$T^{00} = a((\partial_0\varphi)^2 + (\partial_i\varphi)^2) - b\varphi^2 . \quad (1.56)$$

Из этой формулы видно, что, для того чтобы энергия была ограничена снизу, необходимо и достаточно, чтобы постоянная a была строго больше нуля (если $a = 0$, то уравнения движения не содержат производных от поля), а постоянная b была неположительна. Действительно, рассмотрим сначала случай $\varphi = \text{const}$. Тогда первый член в (1.56) обращается в нуль, второй член будет ограничен снизу только, если $b \leq 0$. Рассмотрим теперь случай, когда φ мало по величине, но достаточно быстро меняется в пространстве-времени. Тогда преобладать будет первый член в (1.56). Поэтому энергия будет ограничена снизу только при $a > 0$.

Заметим далее, что общий множитель в лагранжиане не изменяет уравнений движения. Удобно поэтому выбрать $a = 1/2$, а $b = -m^2/2$ ($m^2 \geq 0$). Таким образом, мы приходим к наиболее общему лагранжиану свободного скалярного поля, обеспечивающему ограниченную снизу энергию.

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial\varphi)^2 - \frac{1}{2}m^2\varphi^2 . \quad (1.57)$$

Скажем здесь сразу, что требование $m^2 \geq 0$ необходимо и достаточно для ограниченности энергии только в случае свободного поля, для взаимодействующего поля это уже не так (см. раздел 3.1).

Задача 20 *Найти размерность поля φ и параметра m в пространстве-времени размерности d .*

Уравнение Клейна-Гордона и его решения. Из лагранжиана (1.57) следует известное уравнение Клейна-Гордона для скалярного поля

$$\partial^2\varphi + m^2\varphi = 0 . \quad (1.58)$$

Для того чтобы найти общее решение этого уравнения, сделаем преобразование Фурье, или, как говорят, перейдем в импульсное представление:

$$\varphi(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int dk e^{ikx} \tilde{\varphi}(k) . \quad (1.59)$$

Из действительности поля следует, что

$$\tilde{\varphi}^*(k) = \tilde{\varphi}(-k) .$$

Подставим (1.59) в (1.58) и получим

$$(k^2 - m^2)\tilde{\varphi}(k) = 0 .$$

Решением этого уравнения является функция

$$\tilde{\varphi}(k) = \delta(k^2 - m^2)\varphi(k) .$$

Подставляя это выражение в (1.59), приходим к

$$\varphi(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int dk \delta(k^2 - m^2) e^{ikx} \varphi(k) . \quad (1.60)$$

В этом выражении можно с помощью δ -функции снять одно интегрирование. Удобней всего выполнить интегрирование по k^0 , при этом

$$k^0 = \pm \sqrt{\mathbf{k}^2 + m^2} . \quad (1.61)$$

Связь между положительным k_0 (верхний знак в (1.61)) и $|\mathbf{k}|$ называется законом дисперсии. Для того чтобы проинтегрировать по k_0 , разобьем поле $\varphi(x)$ на две части

$$\varphi(x) = \varphi^+(x) + \varphi^-(x) ,$$

$$\varphi^\pm(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int dk \delta(k^2 - m^2) e^{\pm ikx} \varphi^\pm(k) , \quad (1.62)$$

где

$$\varphi^\pm = \theta(k^0) \varphi(\pm k) .$$

Соответственно введенным индексам будем называть функции $\varphi^+(x)$ и $\varphi^-(x)$ *положительно частотной* и *отрицательно частотной* частями функции $\varphi(x)$. Из действительности поля φ следует, что

$$(\varphi^\pm(k))^* = \varphi^\mp(k) .$$

Итак, интегрируя по k^0 в (1.62), получаем

$$\varphi^\pm(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{d\mathbf{k}}{2k^0} e^{\pm i k x} \varphi^\pm(k) \Big|_{k^0 = \pm \sqrt{\mathbf{k}^2 + m^2}} . \quad (1.63)$$

Задача 21 Показать, что преобразования, обратные к (1.63), имеют следующий вид

$$\varphi^\pm(k) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d\mathbf{x} e^{\mp i k x} (k^0 \varphi(x) \mp i \dot{\varphi}(x)) \Big|_{k^0 = \pm \sqrt{\mathbf{k}^2 + m^2}} . \quad (1.64)$$

Далее нам понадобятся трехмерные фурье-амплитуды

$$\varphi^\pm(\mathbf{k}) = \frac{\varphi^\pm(k)}{\sqrt{2k^0}} \Big|_{k^0 = \pm \sqrt{\mathbf{k}^2 + m^2}} . \quad (1.65)$$

Подставляя полученные выражения в формулу (1.8), где $T^{\mu 0}$ — компоненты тензора энергии-импульса скалярного поля, получим

$$P^\mu = \frac{1}{2} \int d\mathbf{k} \cdot k^\mu (\varphi^+(\mathbf{k})\varphi^-(\mathbf{k}) + \varphi^-(\mathbf{k})\varphi^+(\mathbf{k})) , \quad (1.66)$$

или в явно ковариантном виде

$$P^\mu = \frac{1}{2} \int dk \cdot k^\mu \theta(k^0) \delta(k^2 - m^2) (\varphi^+(k)\varphi^-(k) + \varphi^-(k)\varphi^+(k)) . \quad (1.67)$$

(в формулах (1.66), (1.67) мы предположили, что φ^+ и φ^- не коммутируют — это нам потребуется при квантовании). Из выражения (1.66) виден смысл нормировки в (1.65). Трехмерные амплитуды выбраны так, чтобы произведения $\varphi^+(\mathbf{k})\varphi^-(\mathbf{k})$ могли быть истолкованы как плотности средних чисел частиц, обладающих импульсом \mathbf{k} , энергией k^0 и массой $m = \sqrt{(k^0)^2 - \mathbf{k}^2}$ и не имеющих заряда и спина.

Задача 22 Получить выражения (1.66), (1.67).

Задача 23 Рассмотреть теорию одного комплексного скалярного поля. Построить лагранжиан, инвариантный относительно фазовых вращений (1.13). Получить уравнения движения и решить их. Найти выражения для динамических инвариантов: тензора энергии-импульса, момента импульса и тока, соответствующего фазовым вращениям. Найти также эти выражения в импульсном пространстве.

Поле как система с бесконечным числом степеней свободы. Сравнивая формулы, полученные выше в этом разделе с формулами, полученными при обсуждении гармонического осциллятора (раздел 1.2), можно заметить некоторую аналогию. Например, уравнение движения осциллятора (1.20) и уравнение Клейна-Гордона (1.58) совпадают, если φ не зависит от пространственных координат. Эта аналогия не случайна. В действительности, как мы сейчас увидим, поле — это классическая механическая система с бесконечным числом степеней свободы, или, как иногда говорят, с бесконечным числом осцилляторов. Поэтому весь анализ раздела 1.2, в том числе квантование, практически без труда переносится на этот случай.

Чтобы это продемонстрировать рассмотрим теорию одного свободного скалярного поля с лагранжианом (1.57),

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial\varphi)^2 - \frac{m^2}{2}\varphi^2 . \quad (1.68)$$

Разобьем все пространство на N ячеек с объемом ΔV_a или, как иногда говорят, «посадим систему на решетку». Будем считать, что значение поля в пределах одной ячейки одинаково. Введем обобщенные координаты

$$q_a(t) \equiv \varphi(\mathbf{x}_a, t) .$$

В непрерывном пределе лагранжиан (1.68) содержит квадрат пространственного градиента $-(\partial_i\varphi)^2/2$. При переходе к дискретному случаю это слагаемое, во-первых, не содержит

производных по времени, во-вторых, зависит от полей, значения которых взято в разных ячейках, т.е. от $q_a(t)$ и $q_b(t)$, и, в-третьих, имеет тот же знак, что и слагаемое, пропорциональное m^2 . Поэтому это слагаемое (первое свойство: не содержит производных по времени) следует объединить со слагаемым $m^2 q_a^2/2$. В результате мы получим недиагональную (второе свойство) неотрицательно определенную (третье свойство) квадратичную форму $q_a \Omega_{ab} q_b/2$. После чего мы приходим к лагранжиану (1.33) с $K_{ab} \sim \delta_{ab}$, который следует диагонализировать. В результате функция Лагранжа поля принимает вид (мы используем те же обозначения для преобразованных в результате диагонализации обобщенных координат)

$$L(t) = \int d^3x \mathcal{L}(\mathbf{x}, t) = \sum_{a=1}^N \mathcal{L}(q_a(t), \dot{q}_a(t)) \Delta V_a .$$

Из этой формулы видно, что действительно теория поля в пределе $N \rightarrow \infty$ превращается в классическую систему с бесконечным числом степеней свободы. Введем канонически сопряженный импульс

$$p_a(t) = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_a} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_a} \Delta V_a ,$$

а также плотность импульса

$$\pi(\mathbf{x}, t) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}(\mathbf{x}, t)} , \quad p_a = \pi_a \Delta V_a .$$

Функцией Гамильтона нашей системы является

$$H = \sum_a T^{00}(\mathbf{x}_a, t) \Delta V_a = \sum_a p_a(t) \dot{q}_a(t) - L(t) \stackrel{N \rightarrow \infty}{=} \int d^3x (\pi \dot{\varphi} - \mathcal{L}) .$$

Согласно процедуре канонического квантования, классическим величинам q_a и p_a мы должны сопоставить операторы, подчиняющиеся следующим перестановочным соотношениям:

$$[\hat{p}_a(t), \hat{q}_b(t)] = -i \delta_{ab}$$

или

$$[\hat{\pi}(\mathbf{x}_a, t), \hat{q}(\mathbf{x}_b, t)] = -i \frac{\delta_{ab}}{\Delta V_b} \stackrel{N \rightarrow \infty}{=} -i \delta^3(\mathbf{x}_a - \mathbf{x}_b) .$$

Таким образом, в пределе непрерывного пространства получаем следующие *одновременные* коммутационные соотношения:

$$[\hat{\pi}(\mathbf{x}, t), \hat{\varphi}(\mathbf{y}, t)] = [\hat{\varphi}(\mathbf{x}, t), \hat{\varphi}(\mathbf{y}, t)] = -i \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}) , \quad (1.69)$$

$$[\hat{\pi}(\mathbf{x}, t), \hat{\pi}(\mathbf{y}, t)] = 0 , \quad [\hat{\varphi}(\mathbf{x}, t), \hat{\varphi}(\mathbf{y}, t)] = 0 .$$

Квантовые уравнения движения в представлении Гейзенберга имеет вид (1.36). Далее, можно выяснить смысл частотных функций поля, построить амплитуду одночастичного состояния и т.п., однако, мы это делать не будем.

Задача 24 Найти, используя закон коммутации (1.69), перестановочные соотношения для частотных функций поля $\varphi^\pm(x)$ и $\varphi^\pm(\mathbf{k})$.

Фактически с помощью процедуры канонического квантования можно проквантовать любую систему. Однако, эта процедура имеет один основной недостаток. В ней отсутствует *явная* релятивистская инвариантность, которую, конечно, можно восстановить.

Итак, мы видим, что поле (не только скалярное) представляет собой бесконечный набор осцилляторов. Его можно проквантовать теми же методами, что используются в квантовой механике. В частности, не используя решения уравнений движения, можно установить канонические коммутационные соотношения (1.69). Однако чтобы построить базис в пространстве состояний (что необходимо для проведения дальнейших вычислений) необходимо, как и в случае гармонического осциллятора, иметь явный вид решений классических уравнений, к нахождению которых для разных типов полей мы и переходим.

1.4 Векторные поля

1.4.1 Электромагнитное поле

Лагранжиан электромагнитного поля. Калибровочная инвариантность. Электромагнитное поле (далее ЭМП) в вакууме описывается двумя пространственными векторами $\mathbf{E}(x)$ и $\mathbf{H}(x)$ — электрическим и магнитным полями. Эти поля образуют четырехмерный антисимметричный тензор напряженности поля $F_{\mu\nu}$

$$F_{0i} = -F_{i0} = E_i ; \quad F_{ij} = -\epsilon_{ijk} H_k ;$$

$$H_i = -\frac{1}{2} \epsilon_{ijk} F_{jk} ;$$

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & E_1 & E_2 & E_3 \\ -E_1 & 0 & -H_3 & H_2 \\ -E_2 & H_3 & 0 & -H_1 \\ -E_3 & -H_2 & H_1 & 0 \end{pmatrix} .$$

Однако, описание ЭМП в терминах полей \mathbf{E} и \mathbf{H} не очень удобно, т.к. при этом теряется *явная* релятивистская инвариантность. Поэтому удобно ввести вектор-потенциал A_μ и считать его динамической переменной:

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu ; \quad (1.70)$$

$$\mathbf{E} = -\vec{\nabla} A_0 - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x_0} , \quad \mathbf{H} = \text{rot} \mathbf{A} .$$

Действие ЭМП имеет вид

$$S = -\frac{1}{4} \int dx F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} . \quad (1.71)$$

Задача 25 Выразить действие (1.71) в терминах полей \mathbf{E} и \mathbf{H} .

Из этого действия следуют обычные уравнения Максвелла

$$\frac{\delta S}{\delta A_\mu} = \partial_\nu F^{\nu\mu} = 0 . \quad (1.72)$$

Задача 26 Получить уравнение (1.72) и показать, что оно эквивалентно паре уравнений

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = 0$$

$$\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} - \operatorname{rot} \mathbf{H} = 0 .$$

Вторая пара уравнений Максвелла

$$\operatorname{div} \mathbf{H} = 0$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = 0 .$$

следует из определения (1.70).

Задача 27 Показать, что вторую пару уравнений Максвелла можно записать в лоренц-ковариантной форме

$$\epsilon_{\mu\nu\lambda\rho} \partial^\nu F^{\lambda\rho} = 0 .$$

Это равенство носит название тождества Бьянки для тензора ЭМП и является следствием определения $F^{\lambda\rho}$ через A^λ (1.70)

В действительности, действие, записанное в форме (1.71), не является единственно возможным лоренцевым скаляром. Можно построить еще один (псевдо)скаляр, содержащий только $F_{\mu\nu}$, а именно,

$$\epsilon_{\mu\nu\lambda\rho} F^{\mu\nu} F^{\lambda\rho} = 2 F^{\mu\nu} \tilde{F}_{\mu\nu} ,$$

где

$$\tilde{F}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \epsilon_{\mu\nu\lambda\rho} F^{\lambda\rho}$$

— дуальный тензор. Однако, этот скаляр равен полной дивергенции от некоторого вектора и поэтому не влияет на уравнения движения.

Задача 28 1) Выразить дуальный тензор через поля \mathbf{E} и \mathbf{H} . 2) Показать, что $F_{\mu\nu} \tilde{F}^{\mu\nu}$ — псевдоскаляр, при условии, что A_μ — вектор, и выразить его через поля \mathbf{E} и \mathbf{H} . Показать, что $F_{\mu\nu} \tilde{F}^{\mu\nu} = \partial_\mu K^\mu$, найти K^μ .

Кроме того, можно было бы строить действие в терминах A_μ :

$$a \partial_\mu A_\nu \partial^\mu A^\nu + b \partial_\mu A_\nu \partial^\nu A^\mu + c \epsilon_{\mu\nu\lambda\rho} \partial^\mu A^\nu \partial^\lambda A^\rho + m^2 A_\mu A^\mu , \quad (1.73)$$

где a, b, c, m — произвольные коэффициенты. Однако в общем случае такое действие не обладает важным свойством калибровочной инвариантности. Более того, член $m^2 A_\mu A^\mu$ приводит к массе фотона, что противоречит современным экспериментальным данным: $m_\gamma < 10^{-18} \text{ЭВ}$. Калибровочная инвариантность дает естественное объяснение отсутствию массы фотона.

Задача 29 Найти энергию поля, описываемого лагранжианом (1.73). Показать, что в общем случае энергия не ограничена снизу. Найти соотношения между параметрами при которых энергия становится ограниченной.

Принцип калибровочной инвариантности требует, чтобы все наблюдаемые величины (\mathbf{E} , \mathbf{H} , энергия, импульс и т.д.) были инвариантны относительно преобразований вектора-потенциала

$$A_\mu \mapsto A'_\mu = A_\mu + \partial_\mu \alpha(x) ,$$

где $\alpha(x)$ — произвольная дважды дифференцируемая функция. Такие преобразования называются *калибровочными* или *градиентными*. Тензор напряженности является калибровочным инвариантом

$$F_{\mu\nu} \mapsto F'_{\mu\nu} = \partial_\mu(A_\nu + \partial_\nu \alpha) - \partial_\nu(A_\mu + \partial_\mu \alpha) = F_{\mu\nu} + \partial_\mu \partial_\nu \alpha - \partial_\nu \partial_\mu \alpha = F_{\mu\nu} .$$

Поскольку энергия должна быть калибровочным инвариантом, то и действие должно быть таковым, а значит, должно быть построено из $F_{\mu\nu}$. Таким образом, мы практически однозначно фиксируем действие (1.71). Выбор общего множителя $-1/4$ продиктован требованием ограниченности энергии снизу и следующими из действия уравнениями Максвелла.

Здесь стоит отметить, что постулат калибровочной инвариантности не требует, чтобы все наблюдаемые величины выражались бы только через \mathbf{E} и \mathbf{H} . В электродинамике можно построить еще один инвариант

$$\oint dx^\mu A_\mu : \\ \oint dx^\mu A'_\mu = \oint dx^\mu (A_\mu + \partial_\mu \alpha) = \oint dx^\mu A_\mu .$$

В односвязном пространстве-времени (без «дырок») эта величина сводится к векторам напряженности. Однако в пространстве-времени, имеющем «дырку» (например, в (3+1)-мерном пространстве имеется бесконечный цилиндр), может быть так, что $\mathbf{E} = \mathbf{H} = 0$ почти всюду, но величина $\oint_C dx_i A_i \neq 0$ и может быть измерена.

Динамические инварианты. По общей формуле (1.6) из действия (1.71) можно получить тензор энергии-импульса

$$T^{\mu\nu} = -\partial^\mu A^\rho F_{\rho}^\nu + \frac{1}{4} g^{\mu\nu} F_{\rho\lambda} F^{\rho\lambda} . \quad (1.74)$$

Задача 30 Получить формулу (1.74).

Однако нетеровский тензор (1.74) не симметричен. Его можно симметризовать, добавив к нему величину $\partial^\rho R_{\rho\mu\nu}$; $R_{\rho\mu\nu} = -R_{\nu\mu\rho}$.

Задача 31 Найти $R_{\rho\mu\nu}$ и симметризовать $T_{\mu\nu}$.

%Ответ: $R_{\rho\mu\nu} = A_\mu F_{\nu\rho}$; $T^{\mu\nu} = -F^{\mu\rho} F_{\rho}^\nu + 1/4 g^{\mu\nu} F_{\rho\lambda} F^{\rho\lambda}$

Сразу получить симметричный тензор энергии-импульса можно, воспользовавшись определением

$$2 \frac{\delta S}{\delta g_{\mu\nu}} = T^{\mu\nu} . \quad (1.75)$$

Задача 32 Получить тензор энергии-импульса, воспользовавшись формулой (1.75).

Задача 33 Найти энергию ЭМП в терминах полей напряженности. Показать, что энергия ограничена снизу.

Задача 34 Найти тензор спина ЭМП. %**Ответ:** $S_{\mu\nu}^{\cdot\cdot\rho} = F_{\nu}^{\rho} A_{\mu} - F_{\mu}^{\rho} A_{\nu}$.

Общее решение уравнений Максвелла. Запишем уравнение (1.72) в терминах вектор-потенциала:

$$\partial^2 A_{\nu} - \partial^{\mu} \partial_{\nu} A_{\mu} = 0 . \quad (1.76)$$

Перейдем в импульсное представление

$$A_{\mu}(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int dk e^{ikx} A_{\mu}(k) .$$

Подставляя это выражение в (1.76), получаем

$$k^2 A_{\nu}(k) - k_{\nu}(k A(k)) = 0 . \quad (1.77)$$

Рассмотрим случай $k^2 \neq 0$, тогда

$$A_{\nu}(k) = k_{\nu} b(k) ,$$

где $b(k)$ — произвольная функция. Действительно, подставляя это выражение в (1.77), получим

$$k^2 \cdot k_{\nu} b - k_{\nu} \cdot k^2 b \equiv 0 .$$

Пусть теперь $k^2 = 0$ ($k_{\nu} \neq 0$), тогда уравнение (1.77) сводится к условию четырехмерной поперечности:

$$k_{\mu} A^{\mu}(k) = 0 . \quad (1.78)$$

Имеется три линейно независимых вектора, ортогональных (в четырехмерном смысле) к k^{μ} . Один из них — сам k_{μ} , два других, $e_{\mu}^{(\alpha)}(k)$, $\alpha = 1, 2$, можно выбрать чисто пространственными и ортогональными (в трехмерном смысле) вектору \mathbf{k} и друг к другу:

$$e_0^{(\alpha)} = 0 ; \quad e_i^{(\alpha)} k_i = 0 ; \quad e_i^{(\alpha)} e_i^{(\beta)} = \delta^{\alpha\beta} .$$

Тогда вектор, удовлетворяющий условию поперечности (1.78) при $k^2 = 0$ можно записать в виде

$$A_{\mu}(k) = (k_{\mu} b'(k) + e_{\mu}^{(\alpha)}(k) a_{\alpha}(k)) \delta(k^2) .$$

Объединяя два случая $k^2 = 0$ и $k^2 \neq 0$, получаем

$$A_\mu(x) = A_\mu^\perp(x) + A_\mu^\parallel(x) ,$$

где

$$\begin{aligned} A_\mu^\perp(x) &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int dk e^{ikx} \delta(k^2) e_\mu^{(\alpha)}(k) a_\alpha(k) \Big|_{\alpha=1,2} , \\ A_\mu^\parallel(x) &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int dk e^{ikx} k_\mu c(k) , \\ c(k) &= b(k) + \delta(k^2) b'(k) . \end{aligned} \tag{1.79}$$

Поле A_μ^\parallel является чистой калибровкой

$$A_\mu^\parallel(x) = \partial_\mu \alpha(x) ; \quad \alpha(x) = -\frac{i}{(2\pi)^{3/2}} \int dk e^{ikx} c(k) .$$

Таким образом, решение, как и следовало ожидать, содержит произвольную функцию: если A_μ — решение, то и $(A_\mu + \partial_\mu \alpha)$ — решение. Видно, что ЭМП описывается двумя функциями $a_\alpha(k)$, которые можно фиксировать наложением граничных условий, поэтому говорят, что ЭМП имеет две степени свободы. Эти две степени свободы соответствуют двум возможным поляризациям ЭМП, что, в свою очередь, соответствует двум возможным проекциям спина фотона ± 1 на направление движения.

Для дальнейшего нам будет удобно записать решения уравнений поля в несколько другом виде. Однако, для этого мы сначала избавимся от калибровочной свободы путем наложения на A_μ дополнительного условия, иначе говоря, *фиксируем калибровку*. Существует множество способов фиксации калибровки. Нам будет удобно пользоваться явно лоренц-инвариантной калибровкой:

$$\partial A = 0$$

— так называемая калибровка Лоренца. Калибровка Лоренца фиксирует решение с точностью до суммы продольных волн $\partial_\mu \alpha$, распространяющихся со скоростью света. Действительно,

$$\left. \begin{aligned} A_\mu &\mapsto A'_\mu = A_\mu + \partial_\mu \alpha \\ \partial A &= \partial A' = 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \partial^2 \alpha = 0 .$$

Это означает, что в (1.79) $c(k) = \delta(k^2) \tilde{c}(k)$. Тогда решение можно записать в следующей форме

$$A_\mu(k) = \delta(k^2) (k_\mu \tilde{c}(k) + a_\alpha(k) e_\mu^\alpha) \Big|_{\alpha=1,2} . \tag{1.80}$$

Удобно эту формулу переписать, распространив суммирование по α от 0 до 3. С этой

целью введем *локальный репер*:

$$e_\mu^\alpha = \begin{cases} e_\mu^\alpha & \alpha = 1, 2 \\ e_\mu^3 = \left(0, -\frac{\mathbf{k}}{|\mathbf{k}|}\right) & \alpha = 3 \\ e_\mu^0 = \delta_{\mu 0} & \alpha = 0 . \end{cases} \quad (1.81)$$

Легко проверить, что четверка (тетрада) векторов e_μ^α обладает следующим свойством ортонормированности:

$$e_\mu^\alpha e^{\beta\mu} = g^{\alpha\beta} .$$

Здесь уместно подчеркнуть, что индексы α, β и т.д., нумерующие тетрадные векторы, не являются тензорными, и $g^{\alpha\beta}$ не является тензором, а является лишь матрицей, совпадающей с метрикой. Для того чтобы это понять, достаточно посмотреть, что происходит с e_μ^3 при пространственных вращениях. Поскольку этот вектор в любой системе координат сонаправлен с импульсом \mathbf{k} , то $e_\mu^3(k') = \Omega_\mu^\nu e_\nu^3(k)$, где Ω_μ^ν — матрица пространственных вращений. С другой стороны, если бы индекс α был бы тензорным, то e_μ^3 преобразовывался бы следующим образом: $e_\mu^3(k') = \Omega_\alpha^\beta \Omega_\mu^\nu e_\nu^\alpha(k)$, что очевидно противоречит правильному закону преобразования.

Наряду с четверкой векторов e_μ^α введем четверку *взаимных* с ними векторов с нижними индексами, определенных условиями

$$e_\mu^\alpha e_\beta^\mu = \delta_\beta^\alpha . \quad (1.82)$$

Из этого уравнения следует, что

$$e_\nu^\alpha e_\alpha^\mu = \delta_\nu^\mu . \quad (1.83)$$

Кроме того, имеем правила поднимания и опускания тетрадных индексов

$$e_\mu^\alpha = g^{\alpha\beta} e_{\beta\mu} , \quad e_{\alpha\mu} = g_{\alpha\beta} e_\mu^\beta . \quad (1.84)$$

Задача 35 Пользуясь определением (1.82), найти взаимный репер.

Задача 36 Получить формулы (1.83), (1.84).

Пользуясь определением локального репера, можно написать

$$A_\mu(k) = \delta(k^2) a_\alpha(k) e_\mu^\alpha(k)$$

$$A_\mu(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int dk e^{ikx} \delta(k^2) a_\nu(k) e_\mu^\nu(k) . \quad (1.85)$$

Задача 37 Найти связь между a_α и коэффициентами в уравнении (1.80).

Далее, так же как и в случае скалярного поля, выражение (1.85) можно проинтегрировать по k^0 , разбив при этом интеграл на отрицательно и положительно частотные части¹

$$A_\mu(x) = A_\mu^+(x) + A_\mu^-(x) ,$$

$$A_\mu^\pm(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int dk \delta(k^2) A_\mu^\pm(k) e^{\pm i k x} = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int dk \delta(k^2) a_\alpha^\pm(k) e_\mu^\alpha(k) e^{\pm i k x} \Big|_{k^0 > 0} =$$

$$\frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{d\mathbf{k}}{\sqrt{2k^0}} A_\mu^\pm(\mathbf{k}) e^{\pm i \mathbf{k} x} \Big|_{k^0 = |\mathbf{k}|} = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{d\mathbf{k}}{\sqrt{2k_0}} a_\alpha^\pm(\mathbf{k}) e_\mu^\alpha(k) e^{\pm i \mathbf{k} x} \Big|_{k^0 = |\mathbf{k}|} , \quad (1.86)$$

где

$$A_\mu^\pm(k) = \theta(k^0) A_\mu(\pm k) , \quad (A_\mu^\pm(k))^* = A_\mu^\mp(k) ,$$

$$A_\mu^\pm(\mathbf{k}) = \frac{A_\mu^\pm(k)}{\sqrt{2k^0}} , \quad a_\mu^\pm(\mathbf{k}) = \frac{a_\mu^\pm(k)}{\sqrt{2k^0}} , \quad k_0 = |\mathbf{k}| .$$

Подставляя решение (1.86) в выражение для вектора импульса, получаем

$$P_\mu = - \int d\mathbf{k} k_\mu [A_\nu^+(\mathbf{k}) A^{\nu-}(\mathbf{k})] = - \int d\mathbf{k} k_\mu a_\nu^+(\mathbf{k}) a^{\nu-}(\mathbf{k}) . \quad (1.87)$$

Задача 38 Проверить формулу (1.87).

Из формулы (1.87) следует, что энергия ЭМП не ограничена снизу. Однако вспомним, что у нас в распоряжении есть условие Лоренца

$$k^\mu A_\mu^+(\mathbf{k}) = k^\mu A_\mu^-(\mathbf{k}) = 0 .$$

Отсюда следует, что

$$|\mathbf{k}| a_3^\pm(\mathbf{k}) - k^0 a_0^\pm(\mathbf{k}) = 0 ,$$

а это в свою очередь, с учетом $k^0 = |\mathbf{k}|$, означает

$$a_3^+ a_3^- - a_0^+ a_0^- = 0 ,$$

т.е. плотность средних чисел «временных» фотонов равна плотности «продольных» фотонов, а их вклады в P_μ сокращаются

$$P_\mu = \int d\mathbf{k} k_\mu a_\nu^+ a_\nu^- \quad (\nu = 1, 2) ,$$

и энергия становится неотрицательной.

Задача 39 Найти вектор спина ЭМП в импульсном пространстве.

¹Здесь стоит отметить, что локальный репер необязательно выбирать действительным. Тогда в ниже-следующих формулах будет входить и эрмитово сопряженный репер. Чтобы сохранить свойства эрмитова сопряжения ЭМП, необходимо писать $a_\sigma^- e_\mu^\sigma$ и $a_\sigma^+ e_\mu^{\sigma*}$

1.4.2 Массивное векторное поле

Массивное векторное поле описывается четырехвектором $B_\mu(x)$. Однако если $B_\mu(x) = \partial_\mu \phi(x)$, т.е. является градиентом некоторого скалярного поля, то не имеет смысла говорить о векторном поле. Другими словами, любое векторное поле можно разделить на поперечную часть $B_\mu^\perp(x)$ и градиент некоторого скалярного поля

$$\begin{aligned} B_\mu &= B_\mu^\perp + \partial_\mu \phi , \\ \partial^\mu B_\mu^\perp &= 0 . \end{aligned} \quad (1.88)$$

Поперечное поле B_μ^\perp не сводится к скалярному полю, и именно оно представляет интерес. Далее, для массивного скалярного поля мы получили закон дисперсии (1.61). Желательно получить такой же закон и для массивного векторного поля. Это может быть достигнуто, если каждая компонента поля B_μ^\perp будет удовлетворять уравнению Клейна-Гордона,

$$\partial^2 B_\mu^\perp + m^2 B_\mu^\perp = 0 . \quad (1.89)$$

Такое уравнение называется уравнением Клейна-Гордона-Фока-Прока. Действие, приводящее к (1.89) имеет вид

$$S = \int dx \left(-\frac{1}{4} B_{\mu\nu} B^{\mu\nu} + \frac{m^2}{2} B_\mu B^\mu \right) , \quad (1.90)$$

где $B_{\mu\nu} = \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu$. Действительно, из действия (1.90) следуют уравнения движения

$$\partial^\mu B_{\mu\nu} + m^2 B_\nu = 0 . \quad (1.91)$$

Продифференцируем это уравнение по x_ν и учтем антисимметричность тензора $B_{\mu\nu}$. Получаем

$$m^2 \partial B = 0 ,$$

т.е. при $m^2 \neq 0$ условие поперечности (1.88). Далее, используя определение $B_{\mu\nu}$ и условие поперечности, получаем из (1.91)

$$\partial^2 B_\nu - \partial_\nu \partial B + m^2 B_\nu = \partial^2 B_\nu + m^2 B_\nu .$$

Таким образом, уравнения (1.91) эквивалентны системе

$$\begin{aligned} \partial^2 B_\nu + m^2 B_\nu &= 0 \\ \partial B &= 0 . \end{aligned} \quad (1.92)$$

Задача 40 Найти общее решение системы (1.92). Найти энергию массивного векторного поля и вектор спина (в импульсном пространстве) и объяснить выбор знаков в (1.90).

1.5 Спинорное поле. Матрицы Дирака и законы преобразований спинорных функций

Уравнение Дирака в квантовой механике. В этом разделе мы рассмотрим простейшее спинорное поле, которое описывает заряженные частицы со спином $1/2$. Как мы уже отмечали выше, спинорные поля преобразуются по спинорным представлениям группы Лоренца, которые не являются однозначными. С этим связан тот факт, что спинорные поля не могут быть классическими. Это, в частности, означает, что спинорное поле не может быть непосредственно измерено — наблюдаемыми являются лишь некоторые билинейные формы, составленные из этих полей. Однако, это не может помешать нам выписать релятивистски ковариантные уравнения, которым подчиняются спинорные поля, исследовать их решения, а также развить лагранжев формализм и выписать динамические инварианты. Этим мы и займемся в этом разделе. Вопросы физической интерпретации мы будем рассматривать только после квантования этих полей.

Уравнения, которым подчиняется спинорное поле, были написаны Дираком. Он попытался придать квантовой механике релятивистски ковариантный вид. Напомним, что обычное уравнение Шредингера, описывающее движение свободной частицы массы m , является нековариантным из-за выделенной роли времени (мы временно восстановим постоянную Планка и скорость света)

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \hat{H} \psi = \frac{\hat{\mathbf{p}}^2}{2m} \psi = -\hbar^2 \frac{\Delta}{2m} \psi . \quad (1.93)$$

В этом уравнении ψ — это волновая функция частицы. Уравнение (1.93) можно попытаться записать в релятивистски ковариантном виде, если воспользоваться известной связью между энергией и импульсом в релятивистской механике $E = \sqrt{\mathbf{p}^2 c^2 + m^2 c^4}$. Тогда аналогом уравнения (1.93) будет

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \sqrt{\hat{\mathbf{p}}^2 c^2 + m^2 c^4} \psi . \quad (1.94)$$

Однако, это уравнение обладает одним недостатком: оно содержит все степени импульса, или в координатном пространстве все степени производных, т.е. оно является нелокальным. Чтобы избавиться от этой трудности, можно «возвести это уравнение в квадрат», т.е. воспользоваться тем, что $E^2 = \mathbf{p}^2 c^2 + m^2 c^4$. Имеем,

$$-\hbar^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = (\hat{\mathbf{p}}^2 c^2 + m^2 c^4) \psi , \quad (1.95)$$

— это хорошо известное нам уравнение Клейна-Гордона (1.58). Как мы видели, оно обладает двумя типами решений: с положительной и отрицательной частотой, в данном случае это означает наличие решений с положительной и отрицательной энергией. В квантовой механике невозможно интерпретировать решения уравнения Шредингера с неограниченной отрицательной энергией, так как в этом случае система (свободная частица) смогла бы переходить на все низшие и низшие уровни, излучая при этом энергию. В теории поля это не так, так интерпретация поля φ в уравнении (1.58) совсем иная, чем

волновой функции ψ в уравнении (1.95). Однако, если мы все же остановимся на уравнении (1.95) и будем интерпретировать функцию ψ в нем как квантовое поле, то мы ничего нового по сравнению с квантовым скалярным полем не получим. Кроме того, остается проблема релятивизации квантовой механики. Дирак пошел по другому пути. Ясно, что решения с отрицательной энергией возникли в результате «возведения в квадрат» уравнения (1.94), поэтому Дирак решил стартовать с уравнения, содержащего только первые производные по времени, при этом, поскольку искомое уравнение должно быть локальным (т.е. не содержать производные любого порядка) и лоренц-ковариантным, то в нем должны присутствовать только первые производные по координатам. Такое уравнение можно записать в виде

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{\hbar c}{i} \left(\alpha_1 \frac{\partial \psi}{\partial x^1} + \alpha_2 \frac{\partial \psi}{\partial x^2} + \alpha_3 \frac{\partial \psi}{\partial x^3} \right) + \beta m c^2 \psi \equiv \hat{H} \psi ,$$

где α_i и β некоторые постоянные коэффициенты. Переходя обратно к системе единиц $c = \hbar = 1$ и вводя новые обозначения $\gamma^0 = 1/\beta$, $\gamma^i = \alpha^i/\beta$, $p_\mu = i\partial_\mu$, получаем уравнение Дирака

$$p_\mu \gamma^\mu \psi - m \psi = 0 . \quad (1.96)$$

Заметим, что из этого уравнения должна следовать обычная связь между энергией и импульсом, поэтому ψ должно также удовлетворять уравнению Клейна-Гордона. Из этого условия можно определить коэффициенты γ^μ . С этой целью подействуем на уравнение (1.96) оператором $p_\mu \gamma^\mu + m$. Получаем,

$$(p_\nu \gamma^\nu + m)(p_\mu \gamma^\mu - m)\psi = (p_\nu p_\mu \gamma^\nu \gamma^\mu - m^2)\psi = 0 .$$

Для того чтобы это уравнение совпало с уравнением Клейна-Гордона

$$(p^2 - m^2)\psi = 0 ,$$

необходимо потребовать, чтобы

$$p_\nu p_\mu \gamma^\nu \gamma^\mu \equiv \frac{1}{2} p_\nu p_\mu (\{\gamma^\nu \gamma^\mu\} + [\gamma^\nu \gamma^\mu]) = p^2 , \quad (1.97)$$

где

$$\begin{aligned} \{\gamma^\nu \gamma^\mu\} &\equiv \gamma^\nu \gamma^\mu + \gamma^\mu \gamma^\nu && - \text{антикоммутатор} \\ [\gamma^\nu \gamma^\mu] &\equiv \gamma^\nu \gamma^\mu - \gamma^\mu \gamma^\nu && - \text{коммутатор} . \end{aligned}$$

Поскольку коммутатор, стоящий в круглых скобках в (1.97), антисимметричен по индексам ν и μ , то при свертке с симметричным по индексам тензором $p_\nu p_\mu$ он дает нуль. Следовательно, для того чтобы уравнение (1.97) выполнялось, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось равенство

$$\{\gamma^\mu \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu} . \quad (1.98)$$

Это уравнение и есть определение коэффициентов γ^μ . Из него в частности следует, что γ^μ не являются обычными числами. В действительности, они являются гиперкомплексными числами, которые удобно выбрать в виде матриц, при этом ψ является многокомпонентной волновой функцией. Кроме того, операторы $\hat{p} - m$ и $\hat{p} + m$ ($\hat{p} \equiv \gamma^\mu p_\mu$) коммутируют.

Это значит, что знак перед m в уравнении (1.96) не фиксирован: ψ может удовлетворять одному из двух уравнений:

$$(i\hat{\partial} - m)\psi = 0 \quad \text{либо} \quad (i\hat{\partial} + m)\psi = 0 .$$

Прежде чем продолжить, заметим что из того, что ψ удовлетворяет уравнению Клейна-Гордона, следует, что нам вряд ли удастся избежать проблемы интерпретации состояний с отрицательной энергией. Такие состояния действительно существуют, и Дирак на основании этого выдвинул гипотезу о существовании античастиц. Мы не будем здесь обсуждать этого. Главную цель — отыскать уравнение, отличное от уравнения Клейна-Гордона, — мы достигли, и далее продолжим его изучение, как уравнения на волновое поле ψ (но не как уравнение на волновую функцию ψ). Интерпретацию частиц, описываемых таким волновым полем, мы отложим до квантования этого поля.

Алгебра матриц Дирака. Вернемся к изучению матриц Дирака. Нашей ближайшей целью будет построение *алгебры* γ -матриц над полем комплексных чисел, т.е. такой совокупности элементов, внутри которой определены операции сложения элементов, умножение элементов и умножение элементов на комплексные числа. При этом мы конечно требуем, что четыре γ -матрицы принадлежат этой алгебре и что у этой алгебры существует конечномерное матричное представление (т.е. гиперкомплексные числа γ^μ можно действительно выбрать в виде конечномерных матриц). Очевидно, что указанными свойствами обладает совокупность элементов, включающая в себя сами γ -матрицы, их всевозможные (в том числе и многократные) произведения, и все линейные комбинации полученных таким образом элементов. Кроме того, если у алгебры существует неприводимое конечномерное матричное представление, то не сложно убедиться, что размерность алгебры, т.е. число линейно независимых элементов, D_a связано с рангом представления (с рангом матриц) r простым соотношением

$$D_a = r^2 .$$

В случае квадратных матриц это является отражением того факта, что число линейно независимых квадратных матриц ранга r равно числу их элементов.

Определим число D_a . Из четырех матриц γ^μ можно построить следующие 16 линейно независимых матриц:

единичную матрицу	$\mathbf{I} = g^{\mu\mu} \gamma^\mu \gamma^\mu$ (нет суммирования) ;
четыре матрицы	γ^μ ($\mu = 0, 1, 2, 3$) ;
шесть матриц	$\sigma^{\mu\nu} = i \frac{\gamma^\mu \gamma^\nu - \gamma^\nu \gamma^\mu}{2}$ ($\mu < \nu$) ;
одну матрицу	$\gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = -\frac{i}{24}\epsilon_{\mu\nu\lambda\rho}\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\lambda\gamma^\rho$ ($\epsilon^{0123} = -\epsilon_{0123} = +1$) ;
четыре матрицы	$D^\mu = \gamma^\mu \gamma^5$ ($\mu = 0, 1, 2, 3$) .

(1.99)

Эти матрицы образуют полный набор в алгебре, т.е. они являются линейно независимыми и любой элемент алгебры может быть представлен как линейная комбинация этих матриц.

Задача 41 Показать, что система матриц (1.99) является полной.

Задача 42 Показать, что матрицы (1.99) линейно независимы.

Задача 43 Построить алгебру γ -матриц в двумерном и трехмерном пространстве времени.

Итак, размерность алгебры равна 16, и, следовательно, размерность γ -матриц равна 4. Заметим, что этот же результат можно получить несколько другим способом. Для этого воспользуемся антикоммутационными соотношениями (1.98). А именно, заметим, что квадрат γ^0 равен 1. Это означает, что собственные значения γ^0 равны ± 1 . Для матриц γ^i собственные значения равны $\pm i$. Отсюда следует, что матрица γ^0 — эрмитова, а матрицы γ^i — антиэрмитовы. Матрицы γ^i можно сделать «эрмитовыми», если условие эрмитового сопряжения определить следующим образом

$$\gamma^{\mu\dagger} = g_{\mu\nu} \gamma^\nu \equiv \gamma_\mu . \quad (1.100)$$

При таком способе эрмитового сопряжения матрицы, как это следует из (1.98), являются унитарными:

$$\gamma^{\mu\dagger} \gamma^\mu = \gamma_\mu \gamma^\mu = \mathbf{I} \quad (\text{нет суммирования по } \mu) . \quad (1.101)$$

Выпишем еще одну полезную формулу, следующую из (1.98) и (1.100),

$$\gamma_\mu \gamma_0 = \gamma_0 \gamma_\mu^\dagger = \gamma_0 \gamma^\mu . \quad (1.102)$$

Задача 44 Доказать (1.102).

Далее, след любой матрицы равен сумме ее собственных значений. Вычислим след матрицы γ^ν . Имеем, ($\mu \neq \nu$, нет суммирования по μ)

$$\text{Tr} \gamma^\nu \stackrel{(1.101)}{=} \text{Tr} \gamma_\mu \gamma^\mu \gamma^\nu \stackrel{(1.98)}{=} -\text{Tr} \gamma_\mu \gamma^\nu \gamma^\mu \stackrel{\text{цикл.}}{=} -\text{Tr} \gamma^\mu \gamma_\mu \gamma^\nu \stackrel{(1.101)}{=} -\text{Tr} \gamma^\nu .$$

Таким образом след γ -матрицы равен 0. Это означает, что γ -матрицы имеют четную размерность, поскольку из ± 1 (или из $\pm i$) можно получить 0 только если их четное число. Следовательно, минимальная размерность γ -матриц равна 2, однако это число не подходит, т.к. в этом случае γ -матрицами будут хорошо известные 3 матрицы Паули (нам же необходимо по крайней мере 4 бесследовых матрицы). Случай, когда размерность γ -матриц равна 4 нам подходит, и именно он и реализуется.

Задача 45 Показать, что след произведения нечетного числа γ -матриц равен 0.

Легко убедиться, что для матрицы γ^5 имеют место следующие свойства

$$\{\gamma^5 \gamma_\mu\} = 0 , \quad \gamma_5^2 = 1 , \quad (1.103)$$

поэтому в закон антикоммутации γ -матриц (1.98) можно включить также матрицу γ^5 :

$$\{\gamma^\mu \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu} , \quad \mu, \nu = 0, \dots, 5 ,$$

$$g^{55} \equiv +1 .$$

При этом формулы (1.100), (1.101) остаются в силе, а (1.102) — нет.

Задача 46 Доказать свойства (1.103).

Далее, поскольку ранг γ -матриц равен 4, то след единичной матрицы из (1.99) равен 4:

$$\text{Tr} \mathbf{I} = 4 .$$

Принимая во внимание перечисленные выше свойства, легко вычислять следы произведений γ -матриц. Имеем, (все индексы изменяются от 0 до 5)

$$\begin{aligned} \text{Tr} \gamma^\mu &= 0 \\ \text{Tr} \gamma^\nu \gamma^\mu \gamma^\rho &= 0 \\ \text{Tr} \gamma^\mu \gamma^\nu &= 4g^{\mu\nu} \\ \text{Tr} \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\lambda &= 4g^{\mu\nu} g^{\rho\lambda} + 4g^{\mu\lambda} g^{\nu\rho} - 4g^{\mu\rho} g^{\nu\lambda} , \end{aligned} \quad (1.104)$$

и т.д. для следа произведения четного числа γ -матриц. А также имеем следующие соотношения (все индексы изменяются от 0 до 3)

$$\begin{aligned} \text{Tr} \underbrace{\gamma^{\nu_1} \dots \gamma^{\nu_n}}_{n - \text{нечет}} &= 0 \\ \text{Tr} \gamma^5 \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\lambda &= 4i\epsilon^{\mu\nu\rho\lambda} . \end{aligned} \quad (1.105)$$

Задача 47 Доказать справедливость равенств (1.104) и (1.105).

В заключение отметим, что свойство антикоммутируемости (1.98), а также все остальные полученные свойства, которые следуют из (1.98), инвариантны относительно преобразования

$$\gamma^\mu \mapsto U \gamma^\mu U^{-1} , \quad (1.106)$$

где U — произвольная неособенная матрица, которую можно считать унитарной. Это означает, что γ -матрицы определены с точностью до унитарного преобразования, и конкретное их представление может быть выбрано различными способами. Существует два наиболее распространенных представления γ -матриц. Первое представление называется *стандартным* или представлением *Дирака*. Это представление удобно тем, что в нем γ^0 является диагональной:

$$\gamma^0 = \gamma_0 = \begin{pmatrix} \mathbf{I} & 0 \\ 0 & -\mathbf{I} \end{pmatrix} , \quad \gamma^i = -\gamma_i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ -\sigma_i & 0 \end{pmatrix} , \quad \gamma^5 = \gamma_5 = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{I} \\ \mathbf{I} & 0 \end{pmatrix} , \quad (1.107)$$

где

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} , \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} , \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} ,$$

— известные матрицы Паули. Второе представление называется *спинорным*, *спиральным*, *киральным* или *Вейлевским*. Оно удобно тем, что в нем γ_5 диагональна:

$$\gamma^0 = \gamma_0 = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{I} \\ \mathbf{I} & 0 \end{pmatrix} , \quad \gamma^i = -\gamma_i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ -\sigma_i & 0 \end{pmatrix} , \quad \gamma^5 = \gamma_5 = \begin{pmatrix} -\mathbf{I} & 0 \\ 0 & \mathbf{I} \end{pmatrix} . \quad (1.108)$$

γ -матрицы в этом представлении можно также записать в другом виде. Именно, введем двухрядную матрицу σ^0 ,

$$\sigma^0 = \sigma_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

а также контравариантный вектор $\sigma^\mu = (\sigma^0, \sigma^i)$ и ковариантный вектор $\sigma_\mu = (\sigma_0, -\sigma_i)$. Тогда четыре γ^μ матрицы можно записать в виде

$$\gamma^\mu = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^\mu \\ \sigma_\mu & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma_\mu = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_\mu \\ \sigma^\mu & 0 \end{pmatrix}.$$

Задача 48 Построить аналог кирального представления в d -мерном пространстве времени при $d = 2, 3, 5, 6$.

Скажем здесь несколько слов по поводу представления (1.108). В нем четырехкомпонентное дираковское спинорное поле ψ (см., например, (1.96)) расщепляется на два независимых двухкомпонентных, так называемых вейлевских, спинора:

$$\psi = \begin{pmatrix} \chi_\alpha \\ \bar{\xi}^{\dot{\alpha}} \end{pmatrix}, \quad (\alpha, \dot{\alpha} = 1, 2). \quad (1.109)$$

Эти спиноры не только независимы, но и преобразуются по различным представлениям группы Лоренца: если один спинор реализует спинорное представление группы Лоренца (см. ниже), чему соответствует индекс α в (1.109), то второй реализует сопряженное представление, т.е. лежит в сопряженном пространстве по отношению к первому спинору, чему соответствует индекс $\dot{\alpha}$ и черта над спинором в (1.109). Причем, индексы α и $\dot{\alpha}$ принимают свои значения совершенно независимо (в силу того, что они нумеруют компоненты спиноров, лежащих в разных пространствах). Матрицы σ^μ и σ_μ действуют по разному на различные двухкомпонентные спиноры, лежащие каждые в своем пространстве. Именно, матрицы σ^μ имеют следующую структуру индексов

$$\sigma^\mu = \sigma^\mu_{\alpha\dot{\alpha}},$$

т.е. действует на сопряженный спинор слева, а на нормальный — справа, тогда как матрицы σ_μ имеет противоположную структуру индексов

$$\sigma_\mu = \sigma_\mu^{\dot{\alpha}\alpha},$$

т.е. действует на нормальный спинор слева, а на сопряженный — справа. Для, того чтобы подчеркнуть это различие, матрицы σ_μ часто обозначают следующим образом:

$$\sigma_\mu^{\dot{\alpha}\alpha} \equiv \bar{\sigma}^{\mu\dot{\alpha}\alpha},$$

т.е. $\bar{\sigma}^\mu \equiv (\sigma^0, -\sigma_i)$. При этом γ -матрицы имеют следующую форму:

$$\gamma^\mu = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^\mu \\ \bar{\sigma}^\mu & 0 \end{pmatrix}.$$

Мы больше не будем останавливаться на этом, скажем лишь, что киральное представление часто используется в суперсимметричных теориях.

Задача 49 Найти унитарную матрицу U , переводящую γ -матрицы из стандартного представления в киральное.

Уравнение Дирака и трансформационные свойства спинорного поля. Вернемся к изучению уравнения Дирака. Как уже говорилось, знак перед массовым членом в уравнении Дирака не фиксирован. Обычно знак выбирается таким образом, чтобы уравнение Дирака имело следующий вид

$$(i\hat{\partial} - m)\psi = 0. \quad (1.110)$$

В качестве гиперкомплексных чисел γ , входящих в это уравнение, можно выбрать четыре антикоммутирующие четырехрядные матрицы. Тогда поле ψ можно (хотя и необязательно) рассматривать как столбец, состоящий из четырех, вообще говоря, комплексных компонент. Таким образом, уравнение (1.110) в действительности является системой из четырех уравнений на восемь действительных функций. Очевидно, что такая система недоопределена, и для того чтобы ее доопределить, необходимо рассмотреть еще систему из четырех сопряженных уравнений. Беря эрмитово сопряжение от (1.110) и вспоминая, что матрица γ^0 — эрмитова, а γ^i — антиэрмитовы, запишем эту систему в виде

$$-i\partial_\mu\psi^\dagger\gamma^{\dagger\mu} - m\psi^\dagger = -i\sum_\mu g^{\mu\mu}\partial_\mu\psi^\dagger\gamma^\mu - m\psi^\dagger = 0. \quad (1.111)$$

Такая форма записи не очень удобна, так как в ней явно присутствует множитель $g^{\mu\mu}$. Для того чтобы от него избавиться, умножим справа уравнение (1.111) на γ^0 и воспользуемся соотношениями коммутации (1.98). Получаем,

$$-i\sum_\mu g^{\mu\mu}\partial_\mu\psi^\dagger\gamma^\mu\gamma^0 - m\psi^\dagger\gamma^0 = -i\partial_\mu\psi^\dagger\gamma^0\gamma^\mu - m\psi^\dagger\gamma^0 = 0. \quad (1.112)$$

Введем *дираковски-сопряженный спинор*

$$\bar{\psi} \equiv \psi^\dagger\gamma^0.$$

Тогда уравнение (1.112) примет следующую форму:

$$i\bar{\psi} \overset{\leftarrow}{\hat{\partial}} + m\bar{\psi} \equiv i\hat{\partial}\bar{\psi} + m\bar{\psi} = 0. \quad (1.113)$$

Итак, теперь в нашем распоряжении система из восьми уравнений ((1.110) и (1.113)) на восемь действительных функций. Перейдем теперь к изучению трансформационных свойств поля ψ при преобразованиях Лоренца. Для этого потребуем, чтобы уравнение (1.110) было ковариантным относительно этих преобразований. Это означает, во-первых, что должно существовать явное правило, по которому наблюдатель O' мог бы, зная поле $\psi(x)$, относящееся к наблюдателю O , найти поле $\psi'(x')$, описывающее то же самое состояние, что и $\psi(x)$, и относящееся к наблюдателю O' . Во-вторых, это означает, что функция $\psi'(x')$ должна быть решением уравнения Дирака в штрихованной системе координат:

$$\left(i\gamma'^\mu\frac{\partial}{\partial x'^\mu} - m\right)\psi'(x') = 0. \quad (1.114)$$

Как мы ранее видели, единственное условие, накладываемое на матрицы γ'^μ , является условие антикоммутативности (1.98). При этом, поскольку все четырехрядные матрицы,

удовлетворяющие соотношениям (1.98), эквивалентны с точностью до унитарного преобразования (1.106), то можно считать, что $\gamma'^\mu = \gamma^\mu$. Таким образом, в штрихованной системе отсчета O' уравнение Дирака можно записать в виде

$$(i\hat{\partial}' - m)\psi'(x') = 0 \quad (\hat{\partial}' \equiv \gamma^\mu \partial'_\mu) .$$

Потребуем далее, чтобы преобразования от $\psi(x)$ к $\psi'(x')$ было линейным. Пусть преобразование от x к x' имеет вид

$$x \rightarrow x' = Lx ,$$

$$x'^\mu = \Omega^\mu_{\nu} x^\nu + a^\mu = \Omega^{\mu\nu} x_\nu + a^\mu ; \quad g_{\mu\nu} \Omega^{\mu\lambda} \Omega^{\nu\rho} = g^{\lambda\rho} , \quad (1.115)$$

тогда преобразование для полей запишем в следующем виде

$$\psi'(x') = \psi'(Lx) = \Lambda(L)\psi(x) = \Lambda(L)\psi(L^{-1}x') . \quad (1.116)$$

Очевидно, что четырехрядная матрица $\Lambda(L)$ должна обладать обратной для того чтобы наблюдатель O , зная функцию $\psi'(x')$, мог бы найти функцию $\psi(x)$:

$$\psi(x) = \Lambda^{-1}(L)\psi'(x') = \Lambda^{-1}\psi'(Lx) . \quad (1.117)$$

С другой стороны, из (1.116) следует, что

$$\psi(x) = \Lambda(L^{-1})\psi'(Lx) . \quad (1.118)$$

Из этого равенства и из равенства (1.117) следует, что

$$\Lambda(L^{-1}) = \Lambda^{-1}(L) . \quad (1.119)$$

Аналогично можно показать, что имеют место следующие равенства

$$\Lambda(1) = 1 , \quad \Lambda(L_1 L_2) = \Lambda(L_1) \Lambda(L_2) . \quad (1.120)$$

Задача 50 Показать справедливость равенств (1.120).

Таким образом, матрицы Λ реализуют некоторое представление группы Пуанкаре. Для того чтобы построить это представление, вернемся к уравнениям Дирака. Имеем,

$$i\hat{\partial}\psi(x) - m\psi(x) \stackrel{((1.118), (1.119))}{=} i\hat{\partial}\Lambda^{-1}\psi'(x') - m\Lambda^{-1}\psi'(x') = 0 . \quad (1.121)$$

Примем во внимание, что, согласно (1.115),

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu} = \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\mu} \frac{\partial}{\partial x'^\nu} = \Omega^\nu_{\mu} \frac{\partial}{\partial x'^\nu} ,$$

и умножим (1.121) на Λ слева. Имеем,

$$\left(i\Lambda(L)\gamma^\mu\Lambda^{-1}(L)\Omega^\nu_{\mu} \frac{\partial}{\partial x'^\nu} - m \right) \psi'(x') = 0 .$$

Для того чтобы придать этому уравнению вид (1.114), необходимо и достаточно потребовать, чтобы

$$\Lambda(L)\gamma^\mu\Lambda^{-1}(L)\Omega_{\cdot\mu}^\nu = \gamma^\nu ,$$

или

$$\gamma^\mu\Omega_{\cdot\mu}^\nu = \Lambda^{-1}\gamma^\nu\Lambda . \quad (1.122)$$

В частном случае $\Omega_\nu^\mu = \delta_\nu^\mu$, что соответствует сдвигам $x'^\mu = x^\mu + a^\mu$, это равенство сводится к унитарным преобразованиям (1.106), не зависящим от параметров a^μ . Поэтому, без ограничения общности, в этом случае можно считать $\Lambda = 1$ и, как и ожидалось, закон преобразования поля ψ имеет вид

$$\psi'(x') = \psi(x) .$$

Рассмотрим теперь случай лоренцевых вращений. Будем рассматривать инфинитесимальные преобразования

$$\Omega_{\cdot\mu}^\nu = \delta_\mu^\nu + \omega_{\cdot\mu}^\nu .$$

Так как $\Omega_{\cdot\nu}^\mu\Omega_{\cdot\rho}^\nu = \delta_\rho^\mu$, то тензор $\omega^{\mu\nu}$ антисимметричен:

$$\omega^{\mu\nu} = -\omega^{\nu\mu} .$$

Из (1.122) получаем

$$\gamma^\nu + \gamma^\mu\omega_{\cdot\mu}^\nu = \Lambda^{-1}\gamma^\nu\Lambda . \quad (1.123)$$

Пусть теперь

$$\Lambda = 1 + \lambda^{\mu\nu}\omega_{\mu\nu} , \quad \lambda^{\mu\nu} = -\lambda^{\nu\mu} .$$

Подставляя это разложение в (1.123), находим

$$\gamma^\nu + \gamma^\mu\omega_{\cdot\mu}^\nu = (1 - \lambda^{\mu\rho}\omega_{\mu\rho})\gamma^\nu(1 + \lambda^{\lambda\sigma}\omega_{\lambda\sigma}) = \gamma^\nu + \omega_{\mu\rho}[\gamma^\nu\lambda^{\mu\rho}] + \mathcal{O}(\omega^2) .$$

Отсюда находим

$$\gamma^\mu\omega_{\cdot\mu}^\nu = \gamma^\mu\omega_{\rho\mu}g^{\rho\nu} = \gamma^\mu g^{\rho\nu} \frac{(\omega_{\rho\mu} - \omega_{\mu\rho})}{2} = \frac{[\gamma^\mu g^{\rho\nu} - \gamma^\rho g^{\mu\nu}]\omega_{\rho\mu}}{2} = \omega_{\mu\rho}[\gamma^\nu\lambda^{\mu\rho}] ,$$

или, т.к. $\omega_{\mu\rho}$ — произвольный (но антисимметричный) тензор,

$$\gamma^\rho g^{\mu\nu} - \gamma^\mu g^{\rho\nu} = 2[\gamma^\nu\lambda^{\mu\rho}] . \quad (1.124)$$

С учетом антикоммутационных соотношений (1.98), а также явной антисимметрии левой части по индексам μ и ρ , левую часть этого равенства можно переписать

$$\gamma^\rho g^{\mu\nu} - \gamma^\mu g^{\rho\nu} = \frac{\gamma^\nu(\gamma^\mu\gamma^\rho) - (\gamma^\mu\gamma^\rho)\gamma^\nu}{2} = \frac{\gamma^\nu[\gamma^\mu\gamma^\rho] - [\gamma^\mu\gamma^\rho]\gamma^\nu}{4} = \frac{[\gamma^\nu[\gamma^\mu\gamma^\rho]]}{4} .$$

Приравнявая это выражение к правой части (1.124), получаем (см. (1.99))

$$\lambda^{\mu\rho} = \frac{[\gamma_\mu\gamma_\rho]}{8} = -\frac{i}{4}\sigma^{\mu\rho} ,$$

и, соответственно,

$$\Lambda = 1 - \frac{i}{4} \sigma^{\mu\nu} \omega_{\mu\nu} ,$$

Это и есть выражение для Λ в инфинитезимальной форме. Из этой формулы легко получить Λ и для конечных преобразований. Для этого рассмотрим поворот в какой-нибудь одной плоскости $x_\mu x_\nu$ на угол $\phi + d\phi$: $\omega_{\mu\nu} = -\omega_{\nu\mu} = \phi + d\phi$. Поскольку Λ образует представление группы Лоренца, то имеем

$$\Lambda(\phi + d\phi) = \Lambda(\phi) \Lambda(d\phi) , \quad \frac{\Lambda(\phi + d\phi) - \Lambda(\phi)}{d\phi} = \Lambda(\phi) \frac{\Lambda(d\phi) - 1}{d\phi} .$$

Эти равенства можно переписать в виде дифференциального уравнения

$$\frac{d\Lambda(\phi)}{d\phi} = 2\Lambda(\phi) \lambda_{\mu\nu} ,$$

с начальным условием $\Lambda(0) = 1$. Решая это уравнение, находим

$$\Lambda^{\mu\nu}(\phi) = e^{-i\sigma^{\mu\nu} \frac{\phi}{2}} .$$

Это равенство надо понимать как оператор вращения в плоскости $(\mu\nu)$ на угол ϕ от оси x_μ к оси x_ν . Его можно переписать в другом виде, если ввести генератор вращения вектора вокруг оси с направлением n :

$$\omega_{\nu}^{\mu} = \phi (I_n)^{\mu}_{\nu} .$$

Тогда имеем

$$\Lambda(\phi) = e^{-i\sigma^{\mu\nu} (I_n)_{\mu\nu} \frac{\phi}{4}} .$$

Закон преобразования поля имеет вид

$$\begin{aligned} \psi'(x') &= e^{-i\sigma^{\mu\nu} (I_n)_{\mu\nu} \frac{\phi}{4}} \psi(x) , \\ x'^{\mu} &= (e^{\phi I_n})^{\mu}_{\nu} x^{\nu} + a^{\mu} . \end{aligned} \tag{1.125}$$

Рассмотрим некоторые частные случаи преобразований (1.125). Во-первых, рассмотрим сначала чисто пространственные вращения. Получаем

$$\Lambda_{ij} = \cos \frac{\phi}{2} - i\sigma_{ij} \sin \frac{\phi}{2} . \tag{1.126}$$

Из этой формулы видно, что при повороте на угол 2π поле ψ не переходит в себя, как можно было бы ожидать, а меняет знак. Для того чтобы вернуть ψ в себя необходимо повернуть систему координат на угол 4π . Это означает, что наблюдаемыми могут быть только четные степени поля ψ . Таким образом, представление группы Лоренца, найденное нами, не является однозначным, и является спинорным. В связи с этим поле ψ называют *спинорным* или *биспинорным*. Кроме того, в случае чисто пространственных вращений матрица Λ унитарна:

$$\Lambda_{ij}^{\dagger} = \Lambda_{ij}^{-1} . \tag{1.127}$$

Перейдем теперь к случаю лоренцевых бустов, т.е. вращений в плоскости $(x_0 x_i)$ на “угол” η , называемый *быстротой*. В этом случае из (1.125) получаем

$$\Lambda_{0i} = \text{ch} \frac{\eta}{2} - i\sigma_{0i} \text{sh} \frac{\eta}{2} . \quad (1.128)$$

Видно, что матрица Λ_{0i} не унитарна, однако для нее выполняется следующее равенство

$$\Lambda_{0i}^{-1} = \gamma_0 \Lambda_{0i}^\dagger \gamma_0 .$$

Это равенство можно объединить с (1.127) и записать их в виде

$$\Lambda_{\mu\nu}^{-1} = \gamma_0 \Lambda_{\mu\nu}^\dagger \gamma_0 . \quad (1.129)$$

Задача 51 Найти преобразование векторов при бусте, характеризуемом быстротой η . Показать, что при двух последовательных бустах (в одном направлении) быстроты складываются, т.е. представляют собой аддитивную величину. Выразить быстроту через скорость относительного движения систем отсчета.

Задача 52 Продемонстрировать справедливость равенств (1.126), (1.128), (1.129).

Задача 53 Показать, что в киральном представлении γ -матриц две верхних компоненты спинора преобразуются независимо от двух нижних компонент. Построить проекционный оператор, который выделяет из полного спинора его две верхних компоненты и две нижних компоненты. Таким образом, мы можем разделить приводимое спинорное представление группы Лоренца на два неприводимых. Чтобы подчеркнуть указанную возможность разделения спинорного представления на два неприводимых, иногда четырех-компонентный дираковский спинор называют биспинором, а его двух-компонентные составляющие просто спинорами или вейлевскими спинорами.

Задача 54 Пусть Γ_{d+1} – аналог матрицы γ_5 в d -мерном пространстве времени. Пусть $\psi_\pm = (1 \pm \Gamma_{d+1})/2 \cdot \psi$. Показать, что при $d = 4$ ψ_- преобразуется по представлению, эквивалентному сопряженному ψ_+ , а при $d = 2, 6$ представления ψ_+ и ψ_+^* эквивалентны.

Рассмотрим теперь несобственные преобразования Лоренца. А именно, рассмотрим пространственные отражения. Поскольку отражения четного числа осей сводятся к поворотам, то рассмотрим отражение всех трех пространственных осей: $\mathbf{x}' = -\mathbf{x}$. В этом случае преобразование (1.125) уже не верно, так как оно построено из инфинитезимальных преобразований. Однако, уравнение (1.122) все еще справедливо. При этом матрица преобразований формально по виду совпадает с метрикой,

$$\Omega_{\nu}^{\mu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = g^{\mu\nu} .$$

Введем для оператора инверсии координат обозначение $P = \Lambda$. Тогда уравнение (1.122) примет вид (нет суммирования по μ)

$$P^{-1} \gamma^{\mu} P = g^{\mu\mu} \gamma^{\mu} .$$

Его можно удовлетворить, если положить

$$P = e^{i\phi} \gamma_0 . \quad (1.130)$$

Фазовый множитель в этом равенстве не представляет интереса, и его значения сводятся либо к ± 1 , либо к $\pm i$, что соответствует тому, что при четырехкратной инверсии спинор должен переходить в себя. Очевидно, что оператор P унитарен и удовлетворяет уравнению (1.129). Итак, из (1.130) следует, что

$$\psi'(x') = \psi'(t, -\mathbf{x}) = e^{i\phi} \gamma_0 \psi(t, \mathbf{x}) .$$

Как мы только что показали, спинорное представление не является однозначным, и наблюдаемые величины должны являться четными степенями полей ψ . В простейшем случае, наблюдаемые должны быть билинейными формами. Для того чтобы научиться строить эти формы необходимо еще рассмотреть закон преобразования дираковски-сопряженного спинора. Этот закон легко получить, взяв эрмитово сопряжение, из (1.125) с учетом (1.129). Имеем,

$$\bar{\psi}'(x') = \psi'^{\dagger}(x') \gamma^0 = \psi^{\dagger}(x) \Lambda^{\dagger} \gamma^0 = \psi^{\dagger}(x) \gamma^0 \gamma^0 \Lambda^{\dagger} \gamma^0 = \bar{\psi}(x) \Lambda^{-1} .$$

Из этого равенства видно, что важен именно дираковски-, а не эрмитово-сопряженный спинор (так как он преобразуется по обратному закону к (1.125)).

Теперь мы можем легко строить билинейные формы различной тензорной размерности. В частности, имеем

$$\bar{\psi}\psi \text{ — скаляр ,} \quad (1.131)$$

$$i\bar{\psi}\gamma^5\psi \text{ — псевдоскаляр ,}$$

$$\bar{\psi}\gamma^{\mu}\psi \text{ — вектор ,}$$

$$\bar{\psi}\gamma^5\gamma^{\mu}\psi \text{ — псевдовектор ,}$$

$$\bar{\psi}\sigma^{\mu\nu}\psi \text{ — антисимметричный тензор второго ранга .} \quad (1.132)$$

Задача 55 Показать справедливость утверждений (1.131) — (1.132). Исследовать поведение этих величин относительно эрмитового сопряжения.

Задача 56 Преобразования Фирца. Пусть у нас имеются четыре различных спинора ψ_i , $i = 1, \dots, 4$. Обозначим за Γ^A любую из 16 матриц (1.99). Нормируем их условием

$$Tr(\Gamma^A \Gamma^B) = 4\delta^{AB} .$$

Запишем общее тождество Фирца²

$$(\bar{\psi}_1 \Gamma^A \psi_2)(\bar{\psi}_3 \Gamma^B \psi_4) = \sum_{C,D} C_{CD}^{AB} (\bar{\psi}_1 \Gamma^C \psi_4)(\bar{\psi}_3 \Gamma^D \psi_2) ,$$

²В приведенных ниже формулах предполагается, что ψ_i коммутирующие C -числовые функции. Если считать, что ψ_i являются операторозначными обобщенными функциями (которыми они становятся после квантования), подчиняющимися антикоммутационным соотношениям (2.67), то, во-первых, под произведением ψ_i надо понимать нормальное произведение полей (см. стр. 67), а, во-вторых, в правой части формулы Фирца необходимо написать знак минус, возникающий вследствие антикоммутации фермионных полей под знаком нормального произведения.

с неизвестными коэффициентами C_{CD}^{AB} . Используя условие полноты Γ -матрицы, показать, что

$$C_{CD}^{AB} = \frac{1}{16} \text{Tr}(\Gamma^C \Gamma^A \Gamma^D \Gamma^B) .$$

Найти преобразования Фирца для

$$\begin{aligned} & (\bar{\psi}_1 \psi_2)(\bar{\psi}_3 \psi_4) , \\ & (\bar{\psi}_1 \gamma_\mu \psi_2)(\bar{\psi}_3 \gamma^\mu \psi_4) , \\ & \bar{\psi}_1 \gamma_\mu \frac{(1 - \gamma_5)}{2} \psi_2 \bar{\psi}_3 \gamma^\mu \frac{(1 - \gamma_5)}{2} \psi_4 . \end{aligned}$$

Лагранжев формализм и динамические инварианты. Теперь, после того как мы научились строить из спинорных функций билинейные формы различной тензорной природы, мы готовы перейти к построению лагранжева формализма. Согласно общим принципам, лагранжиан свободной теории является действительной (псевдо)скалярной функцией полей. Кроме того, он является полиномом второй степени по полям и содержит только первые производные. Рассмотрим случай только скалярного лагранжиана. Из вышеприведенных билинейных форм мы можем построить следующий скаляр, удовлетворяющий нашим требованиям:

$$\mathcal{L} = a \partial_\mu \bar{\psi} \sigma^{\mu\nu} \partial_\nu \psi + b \partial_\mu \bar{\psi} \partial_\mu \psi + i c \bar{\psi} \hat{\partial} \psi - i c \bar{\psi} \overset{\leftarrow}{\hat{\partial}} \psi - m \bar{\psi} \psi .$$

Первый член в этом выражении равен полной дивергенции (в силу того, что $\sigma^{\mu\nu}$ — антисимметричный тензор), второе слагаемое приводит к неограниченной снизу энергии.

Задача 57 Показать, что член $\partial_\mu \bar{\psi} \partial^\mu \psi$ приводит к неограниченной снизу энергии.

Остаются три последних члена. Если положить $c = 1/2$, то лагранжиан спинорного поля примет вид

$$\mathcal{L} = \frac{i}{2} (\bar{\psi} \hat{\partial} \psi - \bar{\psi} \overset{\leftarrow}{\hat{\partial}} \psi) - m \bar{\psi} \psi . \quad (1.133)$$

Из этого лагранжиана после независимой вариации по полям ψ и $\bar{\psi}$ можно получить уравнения Дирака (1.110), (1.113). Удобно также переписать лагранжиан (1.133) в несколько другом виде:

$$\mathcal{L} = i \bar{\psi} \hat{\partial} \psi - m \bar{\psi} \psi \equiv \bar{\psi} (i \hat{\partial} - m) \psi . \quad (1.134)$$

Эта форма лагранжиана отличается от (1.133) на полную производную, поэтому она приводит к тем же уравнениям движения, что и (1.133). Из (1.134) и (1.133) видно, что лагранжиан обращается в нуль на уравнениях движения.

Задача 58 Найти размерности поля ψ и параметра m в пространстве-времени произвольной размерности.

Из лагранжиана (1.134) обычным путем можно получить тензор энергии-импульса:

$$T^{\mu\nu} = i\bar{\psi}\gamma^\nu\partial^\mu\psi ; \quad (1.135)$$

вектор тока

$$j^\mu = \bar{\psi}\gamma^\mu\psi ; \quad (1.136)$$

и тензор спинового момента

$$S^{\mu\nu,\rho} = -\frac{1}{2}\bar{\psi}\gamma^\rho\sigma^{\mu\nu}\psi . \quad (1.137)$$

Задача 59 Получить формулы (1.135), (1.136) и (1.137) из (1.133) и из (1.134).

Задача 60 Как мы уже отмечали, матрицы (1.99) образуют полный набор. Выразить произведение $\gamma^\rho\sigma^{\mu\nu}$ в (1.137) в виде линейной комбинации матриц (1.99).

Из (1.137) можно получить трехмерный вектор спина. В стандартном представлении для γ -матриц он имеет вид

$$S_i = \frac{1}{4}\epsilon_{ijk}\int d\mathbf{x}\bar{\psi}\gamma^0\sigma^{jk}\psi = -\frac{1}{2}\int d\mathbf{x}\psi^\dagger\gamma^5\gamma^i\gamma^0\psi$$

Задача 61 Получить выражение для вектора спина в стандартном (1.107) и в спиральном (1.108) представлениях γ -матриц.

В силу того, что тензор энергии-импульса (1.135) не симметричен, вектор спина не сохраняется. Однако, если спинорные функции $\bar{\psi}$ и ψ не зависят от некоторых координат, то можно добиться сохранения некоторых проекций вектора спина. Так, полагая, что $\bar{\psi}$ и ψ не зависят от x_1 и x_2 , получаем, что

$$\frac{\partial S^{12,\rho}}{\partial x^\rho} = 0 ,$$

и следовательно

$$S_3 = \int d\mathbf{x}S^{21,0} \quad (1.138)$$

сохраняется во времени. В импульсном представлении (см. ниже) это соответствует сохранению проекции вектора спина на направление движения.

Решения уравнения Дирака. Перейдем теперь к решению уравнения Дирака

$$(i\hat{\partial} - m)\psi = 0 .$$

По построению функция ψ должна также удовлетворять уравнению Клейна-Гордона:

$$(\partial^2 + m^2)\psi = 0 .$$

Поэтому мы можем сразу написать решение для ψ (см. (1.60)):

$$\psi(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int dk e^{ikx} \delta(k^2 - m^2) \psi(k) ,$$

причем функция $\psi(k)$ должна удовлетворять следующему матричному уравнению

$$(\hat{k} + m)\psi(k) \Big|_{k^2=m^2} = 0 . \quad (1.139)$$

Для того чтобы решить это уравнение, разобьем функцию $\psi(x)$ на положительно и отрицательно частотную части,

$$\psi(x) = \psi^+(x) + \psi^-(x) ;$$

$$\psi^\pm(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int dk e^{ikx} \delta(k^2 - m^2) \theta(\pm k^0) \psi(k) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{d\mathbf{k}}{\sqrt{2k_0}} e^{\pm i k x} \psi^\pm(\mathbf{k}) \Big|_{k^0=\sqrt{\mathbf{k}^2+m^2}} ,$$

где

$$\psi^\pm(\mathbf{k}) = \frac{\psi(\pm k)}{\sqrt{2k^0}} .$$

Для функций $\psi^\pm(\mathbf{k})$ уравнение (1.139) принимает следующий вид

$$(\pm \hat{k} + m)\psi^\pm(\mathbf{k}) = 0 . \quad (1.140)$$

Это уравнение легко решить, воспользовавшись лоренцевой инвариантностью. Поскольку $m \neq 0$ мы можем перейти в систему покоя (случай $m = 0$ рассматривается отдельно). Имеем,

$$(\gamma^0 k^0 + m)\psi(k^0) \Big|_{k_0^2=m^2} = 0 ,$$

или

$$(\gamma^0 \pm 1)\psi^\pm(\mathbf{0}) = 0 .$$

В стандартном представлении для γ -матриц решения этих уравнений имеют вид:

$$\psi^- = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} , \quad \psi^+ = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ c_3 \\ c_4 \end{pmatrix} . \quad (1.141)$$

Из этого выражения видно удобство стандартного представления γ -матриц. В этом представлении в системе покоя положительно и отрицательно частотные части функции ψ расщепляются.

Решение в произвольной системе отсчета может быть получено из (1.141) с помощью преобразований Лоренца. При этом, функции ψ^+ и ψ^- удовлетворяют следующим уравнениям

$$(\pm\gamma^0 k^0 - \gamma_i k_i + m)\psi^\pm(\pm\mathbf{k}) = 0, \quad k^0 = \sqrt{\mathbf{k}^2 + m^2}.$$

Как следует из (1.141), каждое из приведенных уравнений (знак \pm) обладает двумя линейно независимыми решениями при фиксированном k . При этом видно, что уравнение для ψ^- получается из уравнения для ψ^+ заменой $k^0 \mapsto -k^0$. Поэтому при фиксированном значении k , а именно, при фиксированном знаке k^0 , уравнение Дирака для ψ обладает лишь двумя линейно независимыми комплексными решениями. Соответственно, уравнение Дирака для $\bar{\psi}$ также обладает двумя линейно независимыми решениями. Из комплексности решений следует, что частицы, описываемые уравнением Дирака, должны нести положительный или отрицательный заряд (см. выражение для тока (1.136)), а из того, что решения два, следует, что частицы могут находиться в двух различных состояниях, отличающихся знаком проекции спина на направление движения (см. (1.138)).

Разложение по спиновым состояниям. В дальнейшем нам будет удобно представлять любое решение уравнения Дирака в виде его разложения по некоторому полному набору решений этого уравнения. А именно, обозначим два линейно независимых нормированных решения для $k^0 > 0$, т.е. для уравнения (1.140) со знаком "+", через $v^{n,+}(\mathbf{k})$, а для $k^0 < 0$, т.е. для уравнения (1.140) со знаком "-", через $v^{n,-}(\mathbf{k})$, где $n = 1, 2$. Тогда любое решение можно представить в виде разложения по *спиновым состояниям* ($\alpha = 1, \dots, 4$ — спинорный индекс):

$$\psi_\alpha^\pm(\mathbf{k}) = \sum_{n=1,2} a_n^\pm(\mathbf{k}) v_\alpha^{n,\pm}(\mathbf{k}) \equiv a_n^\pm(\mathbf{k}) v_\alpha^{n,\pm}(\mathbf{k}), \quad (1.142)$$

где $a_n^\pm(\mathbf{k})$ — произвольные C -числовые функции (после процедуры квантования именно они приобретут смысл операторов рождения и уничтожения)³. Для сопряженного спинора имеем

$$\bar{\psi}_\alpha^\pm(\mathbf{k}) = \sum_{n=1,2} a_n^{*\pm}(\mathbf{k}) \bar{v}_\alpha^{n,\pm}(\mathbf{k}) \equiv a_n^{*\pm}(\mathbf{k}) \bar{v}_\alpha^{n,\pm}(\mathbf{k}).$$

Поскольку ψ^+ и ψ^- — положительно и отрицательно частотные функции ψ , то условия сопряжения для спиноров v имеют вид

$$(v^{n,\pm}(\mathbf{k}))^* = v^{n,\mp}(\mathbf{k}).$$

³Как мы увидим, в квантовом случае амплитуды $a_n^\pm(\mathbf{k})$ должны быть проквантованы по Ферми-Дираку, т.е. на них накладываются антикоммутационные соотношения. Поэтому даже в нашем "классическом" рассмотрении более последовательно считать, что эти амплитуды являются грассмановыми, т.е. антикоммутирующими, функциями (см. обсуждение на стр. 21). Так как решения $v^{n,\pm}(\mathbf{k})$ по-прежнему остаются обычными (коммутирующими) C -числовыми функциями, то и сами поля $\psi(x)$ становятся грассмановыми.

Условие нормировки для спиноров удобно выбрать в виде

$$v^{\dagger n, \pm}(\mathbf{k}) v^{m, \mp}(\mathbf{k}) = 2k^0 \delta^{nm} . \quad (1.143)$$

Для спиноров v можно получить следующие полезные свойства:
условие ортонормированности для дираковски-сопряженных спиноров

$$\bar{v}^{n, \pm}(\mathbf{k}) v^{m, \mp}(\mathbf{k}) = \pm 2m \delta^{nm} ; \quad (1.144)$$

условие взаимной ортогональности спиноров, с аргументами, отличающимися знаками,

$$v^{\dagger n, \pm}(\mathbf{k}) v^{m, \pm}(-\mathbf{k}) = 0 ; \quad (1.145)$$

соотношения

$$\begin{aligned} v^{\dagger n, \pm}(\mathbf{k}) [k^i \gamma^j - k^j \gamma^i \pm m \gamma^i \gamma^j] v^{m, \pm}(-\mathbf{k}) &= 0 , \\ k^i [v^{\dagger n, \pm}(\mathbf{k}) (\gamma^i \gamma^j - \gamma^j \gamma^i) v^{m, \mp}(\mathbf{k})] &= 0 , \end{aligned} \quad (1.146)$$

и, наконец, очень важную формулу суммирования по спиновому индексу

$$v_{\alpha}^{m, +}(\mathbf{k}) \bar{v}_{\beta}^{m, -}(\mathbf{k}) = (\hat{k} - m)_{\alpha\beta} , \quad (1.147)$$

$$v_{\alpha}^{m, -}(\mathbf{k}) \bar{v}_{\beta}^{m, +}(\mathbf{k}) = (\hat{k} + m)_{\alpha\beta} , \quad (1.148)$$

Задача 62 Доказать справедливость соотношений (1.144), (1.145), (1.146), (1.147) и (1.148).

До настоящего момента мы не специфицировали выбор спиноров $v^{n\pm}$: для получения соотношений (1.144) — (1.148) было лишь важно, что эти функции образуют ортонормированный базис в пространстве решений уравнения Дирака. Однако в дальнейшем для выяснения физического смысла операторов рождения и уничтожения полезно выбрать базис некоторым специальным образом. Для этого рассмотрим конфигурации поля с некоторым фиксированным импульсом⁴ p , т.е. будем считать, что амплитуды пропорциональны $\delta^3(\mathbf{k} - \mathbf{p})$. Такие конфигурации представляют собой плоские волны и могут быть записаны в виде

$$\psi^{\pm}(x, \mathbf{p}) = \frac{N}{(2\pi)^{3/2} \sqrt{2p_0}} e^{\pm i p x} b_n^{\pm}(\mathbf{p}) v^{\pm, n}(\mathbf{p}) \Big|_{p_0 = +\sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}} ,$$

где N — нормировочный множитель, который может быть выбран, например, в виде $N = (2\pi)^3/V$, (V — объем), тогда амплитуды $b(\mathbf{p})$ после квантования будут нормированы тем же образом, что и амплитуды $a(\mathbf{k})$.

⁴Для дальнейшего важно лишь фиксированное направление импульса, но для упрощения мы будем считать, что фиксирован и сам импульс.

Явный вид спиновых функций. Несмотря на то, что соотношения нто (1.144)–(1.148) носят общий характер и не опираются на явный вид спиновых функций $v^{m,\pm}$, в некоторых задачах приходится иметь дело с явными выражениями для этих функций. Поэтому

Динамические инварианты в импульсном пространстве. Итак, решение уравнения Дирака имеет вид

$$\psi^\pm(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{d\mathbf{k}}{\sqrt{2k^0}} e^{\pm i k x} a_n^\pm(\mathbf{k}) v^{n,\pm}(\mathbf{k}) , \quad (1.149)$$

$$\bar{\psi}^\pm(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{d\mathbf{k}}{\sqrt{2k^0}} e^{\pm i k x} a_n^{\pm*}(\mathbf{k}) \bar{v}^{n,\pm}(\mathbf{k}) . \quad (1.150)$$

Теперь можно найти динамические инварианты (1.135), (1.136), (1.138) в импульсном представлении. Имеем,

$$P^\mu = \int d\mathbf{k} k^\mu (a_n^{+*}(\mathbf{k}) a_n^-(\mathbf{k}) - a_n^{-*}(\mathbf{k}) a_n^+(\mathbf{k})) . \quad (1.151)$$

Так как, согласно (1.149), (1.150),

$$(a^+)^* = a^{-*} , \quad (a^-)^* = a^{+*} ,$$

то энергия спинорного поля (P^0 в (1.151)) не является положительно определенной. Положительная определенность энергии достигается только после квантования.

Заряд спинорного поля имеет вид

$$Q = \int d\mathbf{k} (a_n^{+*}(\mathbf{k}) a_n^-(\mathbf{k}) + a_n^{-*}(\mathbf{k}) a_n^+(\mathbf{k})) . \quad (1.152)$$

Для компоненты S_3 спинового вектора \mathbf{S} имеем

$$S_3 = \frac{1}{2} \int d\mathbf{k} (a_1^{+*}(\mathbf{k}) a_1^-(\mathbf{k}) - a_2^{+*}(\mathbf{k}) a_2^-(\mathbf{k}) + a_1^{-*}(\mathbf{k}) a_1^+(\mathbf{k}) - a_2^{-*}(\mathbf{k}) a_2^+(\mathbf{k})) . \quad (1.153)$$

Задача 63 Показать справедливость формул (1.151), (1.152), (1.153).

Безмассовое спинорное поле. Частным случаем уравнения Дирака является уравнение с $m = 0$:

$$i\hat{\partial}\psi = 0 . \quad (1.154)$$

Это уравнение описывает безмассовые спинорные частицы. Его особенностью является то, что оно распадается на два независимых уравнения. Это происходит потому, что в безмассовом пределе оператор Дирака антикоммутирует с γ^5 -матрицей. Введем два проекционных оператора

$$P_L = \frac{1 - \gamma^5}{2} , \quad P_R = \frac{1 + \gamma^5}{2} . \quad (1.155)$$

Задача 64 Показать, что операторы (1.155) действительно являются проекторами, т.е. что $P_L^2 = P_L$, $P_R^2 = P_R$.

Подействуем операторами (1.155) на (1.154) и получим

$$P_{L(R)} i\gamma^\mu \partial_\mu \psi = i\gamma^\mu P_{R(L)} \partial_\mu \psi ,$$

т.е. два отдельных уравнения для функций $\psi_{L(R)} = P_{L(R)} \psi$

$$i\hat{\partial}\psi_{L(R)} = 0 .$$

Задача 65 Убедиться, что в случае $m \neq 0$ уравнение Дирака не расщепляется.

Далее удобно работать в спиральном представлении (1.108) для матриц Дирака. В этом представлении

$$\text{если } \psi = \begin{pmatrix} \chi \\ \xi \end{pmatrix} , \text{ то } \psi_L = \begin{pmatrix} \chi \\ 0 \end{pmatrix} , \psi_R = \begin{pmatrix} 0 \\ \xi \end{pmatrix} ,$$

(ср. с формулой (1.109)). Для двухкомпонентных спиноров ξ и χ получаем следующие уравнения Вейля

$$\begin{aligned} (\partial_0 - \partial_i \sigma_i) \chi &= 0 \\ (\partial_0 + \partial_i \sigma_i) \xi &= 0. \end{aligned}$$

Задача 66 Получить уравнения для полей ξ и χ .

В импульсном представлении эти уравнения принимают вид

$$\begin{aligned} (p_0 - p_i \sigma_i) \xi(p) &= 0 \\ (p_0 + p_i \sigma_i) \chi(p) &= 0 \quad , \quad p_0 = |\mathbf{p}| , \end{aligned}$$

Это означает, что ξ и χ являются собственными функциями оператора $p_i \sigma_i / |\mathbf{p}|$ с собственными значениями $+1$ и -1 соответственно. Как следует из формулы (1.138) (см. также задачу после этой формулы) вектор σ_i «описывает» спин фермиона. Значение удвоенной проекции спина на направление движения $p_i \sigma_i / |\mathbf{p}|$ называется спиральностью. Как мы только что видели, левый фермион $\psi_L = (\chi, 0)^T$ обладает отрицательной спиральностью (*helicity*), правый фермион $\psi_R = (0, \xi)^T$ обладает положительной спиральностью (в действительности, это утверждение может быть строго сформулировано только после квантования). До недавнего времени считалось, что нейтрино является безмассовой частицей (наличие массы у нейтрино еще твердо не установлено), при этом спиральность нейтрино была равна -1 , т.е. нейтрино является левовинтовым. Поэтому нейтринное поле можно описывать в терминах «двухкомпонентного» биспинора ψ_L или, что то же самое, в терминах двухкомпонентного спинора χ . Часто индекс L у ψ_L опускают и рассматривают нейтринное поле как полноценный биспинор, но с дополнительным условием

$$\frac{1 + \gamma^5}{2} \psi = P_R \psi = 0 .$$

Проще всего это условие учесть, если в любой формуле, содержащей полноценный дираковский биспинор ψ , заменить ψ на $(1 + \gamma^5)/2\psi$. В частности, лагранжиан безмассового нейтрино можно получить путем такой замены из (1.134):

$$\mathcal{L} = i\bar{\nu}\hat{\partial}\frac{1 - \gamma^5}{2}\nu, \quad (1.156)$$

где $\nu(x)$ — нейтринное поле, которое следует рассматривать как дираковский биспинор.

Задача 67 Найти вектор импульса, заряд и спин нейтринного поля ν , описываемого лагранжианом (1.156), в импульсном представлении.

Если у нейтрино имеется масса, а именно, дираковская масса, т.е. нейтрино описывается лагранжианом с массовым членом типа (1.134), то с необходимостью должно появиться нейтрино с правой спиральностью. Это означает, что такое нейтрино не может уже иметь определенную спиральность — истинным нейтрино (дираковского типа) будет являться суперпозиция двух состояний с различными спиральностями. Тот факт, что наличие массового члена нейтрино делает невозможным введения понятия спиральности, можно легко понять из физических соображений. Действительно, пусть в нашем распоряжении есть массивное нейтрино с определенной спиральностью, движущееся вдоль оси z . Так как нейтрино массивно, то мы можем всегда перейти в систему отсчета, движущуюся вдоль оси z со скоростью большей, чем скорость нейтрино. Тогда импульс нейтрино в этой системе отсчета изменит свой знак, и, соответственно, спиральность также изменит знак, а это означает, что спиральность не может служить квантовым числом, характеризующим нейтринное состояние. Здесь стоит подчеркнуть, что спиральность, вообще говоря, не тождественна киральности (*chirality*) — собственному числу оператора γ_5 (для ψ_L это “−1”, а для ψ_R — “+1”). В случае безмассового поля эти два числа, как мы только что видели, взаимосвязаны: левый спинор (отрицательная киральность) обладает отрицательной спиральностью, а правый — наоборот. В случае наличия дираковской массы эти числа являются плохими, так как соответствующие операторы не коммутируют (и не антикоммутируют) с гамильтонианом. Однако, для спиноров (в случае отсутствия симметрии относительно фазовых вращений) можно написать еще один квадратичный лоренц-инвариант вида

$$\bar{\psi}\gamma_2\psi^*. \quad (1.157)$$

Такой массовый член называется *майорановским*. Он не смешивает левые и правые спиноры, и потому киральность остается по-прежнему хорошим квантовым числом, в то же время спиральность, как было объяснено выше, уже не сохраняется. В этом смысле название спиноров с определенной киральностью левыми и правыми носит несколько условный характер.

Задача 68 Выразить массовый член в лагранжиане (1.134) через левые и правые поля и убедиться, что он смешивает поля противоположной спиральности.

Задача 69 Показать, что в спиральном или стандартном представлении для γ -матриц, выражение (1.157) является лоренцевым скаляром. Найти, считая, что ψ_α и ψ_β антикоммутируют (т.е. $\psi_\alpha\psi_\beta = -\psi_\beta\psi_\alpha$), как преобразуется этот член при эрмитовом сопряжении.

Переписат
Ландау
4

(Draft 01.09.2020) Глава 2

Квантование свободных полей

В предыдущей главе мы изучали классические волновые поля. В этой главе мы перейдем к их квантованию. Подобно тому, как при переходе от классической механики к квантовой, динамические переменные, такие как координата, импульс и т.п., становятся операторами, действующими на волновую функцию частицы ψ , так и при переходе от классических полей к квантовым, поля приобретают смысл операторов, точнее операторнозначных функций, действующих на общую для всех полей волновую функцию вторичного квантования, называемую *амплитудой или вектором состояния*. При этом операторы поля распадаются на операторы рождения и уничтожения частиц, между которыми устанавливаются перестановочные соотношения. Таким образом в квантовой теории поля удастся описать процессы взаимопревращения частиц. Подобно тому, как в квантовой механике волновая функция полностью определяет состояние системы, в квантовой теории поля физическое состояние полностью характеризуется амплитудой состояния. И в полной аналогии с квантовой механикой, амплитуду состояния можно рассматривать как вектор в обобщенном гильбертовом пространстве. При этом, как и в квантовой механике, не все амплитуды обладают конечной нормой. Однако амплитуды физических состояний должны быть конечными, и их удобно нормировать на единицу:

$$\Phi^* \Phi = 1 .$$

И наконец, так же как и в квантовой механике, средние значения и вероятности физических состояний даются квадратичными формами амплитуд состояний.

Для того чтобы увидеть соответствие между квантованием классической механики (т.е. переход от классической механики к квантовой) и квантованием классического поля, проще всего рассмотреть каноническое квантование.

2.1 Релятивистский метод квантования

Каноническое квантование, которое мы рассмотрели в разделах 1.2, 1.3, имеет один важный недостаток: в нем явно выделена роль времени и, тем самым, этот метод не является *явно* релятивистски инвариантным. Нашей ближайшей целью будет построение такого метода квантования, который обладал бы этим свойством. В классическом случае скалярность лагранжиана гарантирует нам ковариантность всей теории. В квантовой теории поля амплитуды $u(x)$ приобретают смысл операторов, действующих на векторы состояния.

Поэтому нам необходимо наложить условия лоренцевой ковариантности на матричные элементы операторов, через которые выражаются наблюдаемые в двух системах отсчета. Из этих условий следуют некоторые условия на операторы $u(x)$, т.е. для ковариантности квантовой теории недостаточно скалярности лагранжиана — необходимо еще, чтобы операторы полей удовлетворяли некоторым дополнительным условиям.

Чтобы выяснить, как возникают упомянутые выше дополнительные условия, рассмотрим среднее значения оператора поля $u(x)$ в некотором состоянии Φ ,

$$\bar{u}(x) = \Phi^* u(x) \Phi . \quad (2.1)$$

Для наблюдателя в другой системе отсчета, связанной с первой преобразованиями Лоренца

$$x \mapsto x' = L(\Omega, a)x, \quad x^\mu = \Omega^\mu_\nu x^\nu + a^\mu, \quad u(x) \mapsto u'(x') = \Lambda_L u(x), \quad (2.2)$$

амплитуда (2.1) равна

$$\bar{u}'(x') = \Phi'^* u(x') \Phi' ,$$

причем вектор состояния Φ' представляет то же самое физическое состояние, но в новой системе отсчета, а оператор u вычисляется в новой точке x' . В соответствии с (2.2) мы должны потребовать, чтобы $\bar{u}'(x') = \Lambda_L \bar{u}(x)$, или

$$\Phi'^* u(x') \Phi' = \Lambda_L \Phi^* u(x) \Phi . \quad (2.3)$$

Потребуем также, чтобы в соответствии с принципом суперпозиции преобразование вектора состояния было линейным:

$$\Phi \mapsto \Phi' = U(\Omega, a) \Phi . \quad (2.4)$$

Несложно проверить, что операторы U образуют некоторое представление собственной группы Пуанкаре (собственной группы Лоренца и трансляций).

Задача 70 Показать, что операторы U образуют представление собственной группы Пуанкаре.

В силу сохранения нормы вектора состояния, это представление должно быть унитарным:

$$U^\dagger(\Omega, a) U(\Omega, a) = 1 . \quad (2.5)$$

Из (2.3) и (2.5) следуют искомые условия

$$U(\Omega, a) u(x) U^{-1}(\Omega, a) = \Lambda^{-1} u(Lx) . \quad (2.6)$$

Заметим, что уравнение (2.3) можно также переписать в следующей форме

$$\Phi'^* u(x) \Phi' = \Phi^* u'(x) \Phi , \quad (2.7)$$

кроме того, это уравнение, так же как и (2.3), справедливо не только для оператора поля, но и для любого оператора, в том числе оператора четырех-импульса, момента, тока и т.п.. Уравнение (2.7) означает, что для вычисления среднего от оператора в точке x в новой системе координат необходимо вычислить среднее от преобразованного оператора, взятого в точке x , по непреобразованной амплитуде состояния, либо вычислить среднее от непреобразованного оператора по преобразованному вектору состояния.

Задача 71 Получить (2.7) из (2.3).

Рассмотрим частный случай преобразований Лоренца (2.2) — трансляции $u'(x+a) = u(x)$. Тогда оператор U можно представить в форме

$$U(a) = \exp(ia^\mu P_\mu) . \quad (2.8)$$

Эта форма следует из группового характера операторов U . Кроме того, из унитарности U следует, что оператор P_μ эрмитов. Подставляя это выражение в (2.6), учитывая, что $\Lambda(a) = 1$, получим

$$e^{ia^\mu P_\mu} u(x) e^{-ia^\mu P_\mu} = u(x+a) . \quad (2.9)$$

Раскладывая в ряд по a_μ , получаем следующее уравнение

$$i \frac{\partial u}{\partial x^\mu} = [u(x), P_\mu] . \quad (2.10)$$

Задача 72 Получить уравнение (2.10).

Для того чтобы выяснить смысл оператора P_μ , полезно сравнить полученные нами результаты с результатами квантовой механики, а именно рассмотрим трансляции по времени: $a_\mu = \delta_{0\mu} a$. Тогда видно, что уравнение (2.4) является аналогом уравнения (?), уравнение (2.7) — аналогом уравнения (?), уравнение (2.10) — аналогом уравнения (?).

Задача 73 Продемонстрировать указанные выше аналогии.

Поэтому, в силу принципа соответствия, мы должны потребовать, чтобы $P_0 = H$, где H — гамильтониан системы. Из лоренцевой ковариантности следует, что P_μ — вектор импульса поля.

В силу установленного только что соответствия, можно сказать, что оператор $u(x)$ — это оператор поля в представлении Гейзенберга. Можно также перейти к представлению Шредингера. Для этого перепишем уравнение (2.9) в следующем виде

$$e^{ix^\mu P_\mu} u(0) e^{-ix^\mu P_\mu} = u(x) ,$$

(в уравнении (2.9) мы положили $x = 0$ и переобозначили $a \rightarrow x$). Видно, что эта формула дает явную зависимость от координат оператора $u(x)$. Из нее следует, что выражение

$$u_S(\mathbf{x}) = e^{-i\mathbf{x}\mathbf{P}} u(0) e^{i\mathbf{x}\mathbf{P}} = u(x) \big|_{x^0=0} ,$$

можно рассматривать как оператор поля в представлении Шредингера. Связь между представлениями Шредингера и Гейзенберга дается формулой

$$u(x) = e^{iHt} u_S(\mathbf{x}) e^{-iHt} . \quad (2.11)$$

Аналогично можно рассмотреть лоренцевы вращения. Для инфинитезимальных преобразований $x'_\mu = x_\mu + \omega_\mu{}^\nu x_\nu$ запишем U в виде

$$U(\omega_{\mu\nu}) = 1 + \frac{i}{2} \omega_{\mu\nu} J^{\mu\nu} , \quad (2.12)$$

где $J_{\mu\nu}$ — эрмитов оператор, который следует отождествить с тензором момента. Подставляя это выражение в (2.6), получаем следующее уравнение для оператора $J_{\mu\nu}$:

$$u(x) + \frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}[J_{\mu\nu}, u(x)] = \Lambda^{-1}(\omega^{\mu\nu})u(x + \omega x) .$$

Учитывая, что

$$\Lambda_a^b(\omega) = \delta_a^b + \frac{1}{2}\Sigma_{a\rho\sigma}^b\omega^{\rho\sigma} ,$$

получаем

$$i(x_\nu\partial_\mu u_a - x_\mu\partial_\nu u_a - \Sigma_{a\mu\nu}^b u_b) = [u_a, J_{\mu\nu}] . \quad (2.13)$$

Задача 74 Получить уравнение (2.13).

Помимо требования инвариантности теории относительно преобразований Лоренца, можно также требовать инвариантность теории относительно других преобразований. Например, если потребовать инвариантности теории относительно фазовых вращений, то можно получить следующие уравнения

$$u(x) = [u(x), Q] , \quad -u^*(x) = [u^*(x), Q] . \quad (2.14)$$

Задача 75 Получить уравнение (2.14).

При этом естественно интерпретировать оператор Q , фигурирующий в (2.14), как оператор заряда.

Подводя итог, сформулируем следующий постулат квантования полей. *Операторы четырех-импульса P , тензора момента M , заряда Q и т.п., являющиеся генераторами бесконечно малых преобразований векторов состояний, выражаются теми же соотношениями, что и в классической теории, с установлением при этом надлежащего порядка операторного умножения.*

Физический смысл положительно и отрицательно частотных частей. Выясним теперь смысл положительно и отрицательно частотных частей функций поля. Рассмотрим поле частицы с массой m :

$$u(x) = u^+(x) + u^-(x) ,$$

$$u^\pm(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int_{k^0>0} dk e^{\pm i k x} \delta(k^2 - m^2) \tilde{u}(\pm k) .$$

Поскольку $u^\pm(x)$ являются операторами, то и $\tilde{u}(\pm k)$ также являются операторами. Подставляя это выражение в (2.10), получаем

$$[u^\pm(x), P^\mu] = \mp \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int_{k^0>0} dk e^{\pm i k x} \delta(k^2 - m^2) k^\mu \tilde{u}(\pm k) ,$$

Обозначая

$$u^\pm(k) = \tilde{u}(\pm k)|_{k^0 > 0} ,$$

получаем

$$[u^\pm(k), P^\mu] = \mp k^\mu u^\pm(k) , \quad k^0 = \sqrt{\mathbf{k}^2 + m^2} . \quad (2.15)$$

Введем состояние с определенным значением p^μ четырех-импульса, описываемое амплитудой Φ_p :

$$P^\mu \Phi_p = p^\mu \Phi_p . \quad (2.16)$$

Действуя операторным уравнением (2.15) на Φ_p и учитывая (2.16), получаем

$$P^\mu u^\pm(k) \Phi_p = (p^\mu \pm k^\mu) u^\pm(k) \Phi_p , \quad k^0 = \sqrt{\mathbf{k}^2 + m^2} > 0 . \quad (2.17)$$

Из полученного уравнения следует, что выражение $u^+(k) \Phi_p$ представляет амплитуду состояния с энергией-импульсом $p+k$, а $u^-(k) \Phi_p$ — с энергией-импульсом $p-k$. Поскольку, при этом $k^2 = m^2$, то можно считать, что оператор $u^+(k)$ представляет собой оператор рождения частицы с импульсом k и массой m , а оператор $u^-(k)$ — оператор уничтожения такой же частицы. Подчеркнем, что этот результат является общим: он не зависит от тензорного характера поля и от перестановочных соотношений между операторами полей.

Аналогичные соотношения можно получить для заряда. А именно, рассматривая собственные функции оператора заряда

$$Q \Phi_q = q \Phi_q ,$$

получаем из (2.14)

$$Q u \Phi_q = (q-1) u \Phi_q , \quad Q u^* \Phi_q = (q+1) u^* \Phi_q .$$

Видно, что оператор u , так же как и его положительно и отрицательно частотные части, понижает заряд системы на единицу, а оператор u^* — повышает.

В случае уравнения для момента (2.13), мы придем к разложению оператора поля по состояниям с определенным значением момента, что соответствует разложению по сферическим гармоникам.

Амплитуды состояния в фоковском представлении. После того, как мы выяснили физический смысл операторов рождения и уничтожения, мы готовы перейти к построению амплитуд состояний. Для этого введем сперва амплитуду вакуума. По определению *вакуум* — это состояние в котором нет частиц. Следовательно, пространственный импульс вакуумного состояния равен нулю, а энергия минимальна (не теряя общности, энергию вакуума можно считать равной нулю). Пусть у нас имеется m невзаимодействующих полей u_1, u_2, \dots, u_m (для удобства записи мы включили в этот набор также и сопряженные поля). Поскольку операторы уничтожения уменьшают энергию, то, в силу того, что энергия вакуума минимальна, действие оператора уничтожения на вакуумное состояние можно записать в следующем виде:

$$u_i^-(x) \Phi_0 \equiv u_i^-(x) |0\rangle = 0 ,$$

или в импульсном представлении

$$u_i^-(k_i)|0\rangle = 0 \quad \text{при} \quad k_i^2 = m_i^2 . \quad (2.18)$$

Сопрягая это уравнение, получаем

$$\langle 0|u_i^{*+}(k_i) = 0 \quad \text{при} \quad k_i^2 = m_i^2 . \quad (2.19)$$

Уравнения (2.18) и (2.19) вместе с условием нормировки вакуумного состояния

$$\langle 0|0\rangle = 1 ,$$

можно считать математическим определением вакуума.

Теперь мы можем построить амплитуду любого состояния. Рассмотрим, например, амплитуду состояния, содержащего n частиц s_1, \dots, s_n сортов. Тогда амплитуда такого n -частичного состояния представится в следующем виде

$$\Phi \equiv |s_1, \dots, s_n\rangle = \int F_n(k_1 \dots k_n) \prod_{i=1}^n \{ \delta(k_i^2 - m_{s_i}^2) u_{s_i}^+(k_i) dk_i \} |0\rangle ,$$

где F_n — функция, характеризующая распределение частиц по отношению к непрерывным параметрам состояний таким как энергия и импульс, а индексы s_1, \dots, s_n соответствуют дискретным характеристикам состояний такими как заряд, спин и т.п.. Общая амплитуда для произвольного состояния является суперпозицией таких n -частичных состояний:

$$\begin{aligned} \Phi = & \sum_{\left(\begin{array}{c} s_1, \dots, s_n \\ n \geq 0 \end{array} \right)} \int F_n(k_1 \dots k_n) \prod_{i=1}^n \{ \delta(k_i^2 - m_{s_i}^2) u_{s_i}^+(k_i) dk_i \} |0\rangle = \\ & \sum_{\left(\begin{array}{c} s_1, \dots, s_n \\ n \geq 0 \end{array} \right)} |s_1, \dots, s_n\rangle . \end{aligned} \quad (2.20)$$

Это выражение можно также переписать в координатном пространстве. Для этого в (2.20) проинтегрируем по k_i^0

$$\Phi = \sum_{\left(\begin{array}{c} s_1, \dots, s_n \\ n \geq 0 \end{array} \right)} \int F_n(\mathbf{k}_1 \dots \mathbf{k}_n) \prod_{i=1}^n \{ u_{s_i}^+(\mathbf{k}_i) d\mathbf{k}_i \} |0\rangle , \quad (2.21)$$

где, как обычно,

$$u^+(\mathbf{k}) = \frac{u^+(k)}{\sqrt{2k_0}} \quad \left(k^0 = \sqrt{\mathbf{k}^2 + m^2} \right) ,$$

и мы ввели обозначение

$$F_n(\mathbf{k}_1, \dots, \mathbf{k}_n) = \frac{F_n(k_1, \dots, k_n)}{\prod_{1 \leq i \leq n} \sqrt{2k_i^0}} \quad \left(k_i^0 = \sqrt{\mathbf{k}_i^2 + m_i^2} \right).$$

Перейдем к координатному пространству по формулам

$$F_n(\mathbf{k}_1, \dots, \mathbf{k}_n) \prod \left(\sqrt{2k_i^0} \right) = \frac{1}{(2\pi)^{3n/2}} \int d\mathbf{x}_1 \dots d\mathbf{x}_n e^{-i \sum_j \mathbf{k}_j \mathbf{x}_j} \phi_n(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n),$$

$$\frac{u^+(\mathbf{k})}{\sqrt{2k^0}} = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d\mathbf{x} e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}} u^+(0, \mathbf{x}), \quad u^+(0, \mathbf{x}) = u^+(x) \Big|_{x^0=0}.$$

Тогда из (2.21) получаем

$$\Phi = \sum_{\left(\begin{smallmatrix} s_1, \dots, s_n \\ n \geq 0 \end{smallmatrix} \right)} \int \phi_n(\mathbf{x}_1 \dots \mathbf{x}_n) \prod_{i=1}^n \{ u_{s_i}^+(0, \mathbf{x}_i) d\mathbf{x}_i \} |0\rangle. \quad (2.22)$$

Функции $\phi_n(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n)$ имеют смысл обычных волновых функций системы n частиц в координатном пространстве. Состояние содержащее точно n частиц полностью характеризуется одной функцией ϕ_n . Для определения произвольной амплитуды необходимо задать всю цепочку функций ϕ_n . Представление амплитуд в виде (2.22) или (2.21) называется *фоковским представлением* амплитуд.

В заключение заметим, что временная зависимость в (2.22) исчезла. Это вполне естественно, так как для невзаимодействующих полей амплитуда состояния должна быть постоянной.

Задача 76 Как разрешить парадокс Задачи 9 в квантовом случае?

2.2 Установление перестановочных соотношений

В конце предыдущего раздела мы построили амплитуды состояний. Однако, в действительности эти амплитуды недоопределены. Дело в том, что мы еще не установили соотношения коммутации между операторами поля, и поэтому произведение операторов в (2.20) или в (2.22) неопределено. В этой главе мы установим соотношения коммутации и увидим, что операторы рождения всегда (анти)коммутируют между собой — это означает, что определение амплитуд (2.20) корректно.

Типы перестановочных соотношений. Как мы уже говорили, классическое поле — это система с бесконечным числом степеней свободы. При этом в теории свободного поля при введении канонического формализма полевые функции линейно выражаются через

обобщенные координаты и импульсы. Это означает, что классические скобки Пуассона двух полей

$$\{u_\alpha(x), u_\beta(x)\}$$

оказываются функциями координат, не зависящими от самих полей u . Следуя принципу соответствия, мы должны положить, что операторы поля в квантовом случае имеют следующие перестановочные соотношения

$$[u_\alpha(x), u_\beta(y)] \equiv \{u_\alpha(x), u_\beta(y)\}_- \equiv u_\alpha(x)u_\beta(y) - u_\beta(y)u_\alpha(x) = \Delta_{\alpha\beta}, \quad (2.23)$$

либо

$$\{u_\alpha(x), u_\beta(y)\} \equiv \{u_\alpha(x), u_\beta(y)\}_+ \equiv u_\alpha(x)u_\beta(y) + u_\beta(y)u_\alpha(x) = \Delta_{\alpha\beta}. \quad (2.24)$$

При этом считают, что $\Delta_{\alpha\beta}$ является C -числовой функцией. Заметим, что соотношение (2.24) не противоречит принципу соответствия, так как, вообще говоря, поля не являются наблюдаемыми. Однако, билинейные формы от полей являются наблюдаемыми, и их *коммутаторы* будут выражаться через $\Delta_{\alpha\beta}$ — в этом смысле принцип соответствия не нарушается.

Соотношения первого типа (2.23) называются соотношениями Бозе-Эйнштейна, а соотношения второго типа (2.24) — соотношениями Ферми-Дирака. Кванты полей, удовлетворяющих (2.23) подчиняются статистике Бозе-Эйнштейна, соответствующие этим полям частицы называются *бозонами*. Кванты полей, удовлетворяющих (2.24) подчиняются статистике Ферми-Дирака, соответствующие этим полям частицы называются *фермионами*.

Точный вид перестановочных соотношений для каждого поля определяется уравнениями (2.10), (2.13), (2.14) и т.п. — т.е. структурой оператора энергии, момента, заряда и т.д.. Однако независимо от конкретного вида перестановочных соотношений можно показать, что перестановочная функция зависит лишь от разности $x - y$,

$$\{u_\alpha(x), u_\beta(y)\}_\pm = \Delta_{\alpha\beta}(x - y), \quad (2.25)$$

(здесь и далее $\{\dots\}_\pm$ означает *либо* антикоммутатор, *либо* коммутатор). Это следует из инвариантности теории относительно пространственно-временных трансляций, и поэтому можно ожидать, что для доказательства нам придется использовать свойства оператора импульса P_μ , являющегося генератором этих трансляций. Итак, покажем, что (анти)коммутатор двух полей является функцией от разности координат. Перейдем для этого в импульсное представление, т.е. сделаем фурье-преобразование над (2.23) или (2.24). Поскольку преобразование Фурье линейно, то (анти)коммутатор в импульсном пространстве также должен быть C -числом. Покажем сначала, что (анти)коммутатор двух операторов рождения (уничтожения) должен быть равен нулю, т.е. операторы рождения (уничтожения) (анти)коммутируют:

$$\{u_\alpha^\pm(\mathbf{k}), u_\beta^\pm(\mathbf{q})\}_\pm = 0. \quad (2.26)$$

Рассмотрим амплитуду состояния с определенным значением импульса $|p\rangle$ (необязательно одночастичное), удовлетворяющую уравнению (2.16). Подействуем на нее операторами

рождения $u_\alpha^+(\mathbf{k})$ и $u_\beta^+(\mathbf{q})$ в различной последовательности. Тогда мы получим новые амплитуды

$$|p_1\rangle = u_\alpha^+(\mathbf{k})u_\beta^+(\mathbf{q})|p\rangle, \quad |p_2\rangle = u_\beta^+(\mathbf{q})u_\alpha^+(\mathbf{k})|p\rangle, \quad (2.27)$$

которые в соответствии с (2.17), удовлетворяют уравнению

$$P_\mu|p_{1,2}\rangle = (p_\mu + k_\mu + q_\mu)|p_{1,2}\rangle,$$

т.е. являются состояниями с одинаковым импульсом $(p_\mu + k_\mu + q_\mu)$. Складывая и вычитая уравнения (2.27), получаем

$$P_\mu(|p_1\rangle \pm |p_2\rangle) = P_\mu\{u_\alpha^+(\mathbf{k}), u_\beta^+(\mathbf{q})\}_\pm|p\rangle = (p_\mu + k_\mu + q_\mu)\{u_\alpha^+(\mathbf{k}), u_\beta^+(\mathbf{q})\}_\pm|p\rangle.$$

Если считать, что $\{u_\alpha^+, u_\beta^+\}_\pm$ C -число, отличное от нуля, то сокращая на него, получим

$$P_\mu|p\rangle = (p_\mu + k_\mu + q_\mu)|p\rangle,$$

Что противоречит (2.16). Тем самым (2.26) доказано. Аналогично можно показать, что (анти)коммутируют поля с разной частотностью и разными импульсами:

$$\{u_\alpha^\pm(\mathbf{k}), u_\beta^\mp(\mathbf{q})\}_\pm = 0 \quad \text{при} \quad \mathbf{k} \neq \mathbf{q}. \quad (2.28)$$

Задача 77 Доказать (2.28).

Соотношения (2.26), (2.28) можно интерпретировать следующим образом: акты рождения частиц, также как акты рождения и уничтожения частиц с разными импульсами, не интерферируют между собой.

Из уравнения (2.28) следует, что (анти)коммутатор двух полей разной частотности пропорционален δ -функции:

$$\{u_\alpha^\pm(\mathbf{k}), u_\beta^\mp(\mathbf{q})\}_\pm \sim \delta(\mathbf{k} - \mathbf{q}). \quad (2.29)$$

Переходя обратно в координатное пространство, получаем

$$\begin{aligned} \{u_\alpha^+(x), u_\beta^-(y)\}_\pm &= \Delta_{\alpha\beta}^+(x - y), \\ \{u_\alpha^-(x), u_\beta^+(y)\}_\pm &= \Delta_{\alpha\beta}^-(x - y). \end{aligned} \quad (2.30)$$

Следовательно и полный (анти)коммутатор будет функцией разности координат.

Задача 78 Получить из (2.29) формулу (2.30). Используя (2.26) и (2.30), показать справедливость (2.25) и убедиться, что

$$\Delta_{\alpha\beta} = \Delta_{\alpha\beta}^+ + \Delta_{\alpha\beta}^-.$$

В случае заряженного поля можно убедиться, что

$$\begin{aligned} \{u^+, u^-\}_\pm &= \{u^{*+}, u^{*-}\}_\pm = 0, \\ \{u^+(x), u^{*-}(y)\}_\pm &= \Delta^+(x - y), \quad \{u^-(x), u^{*+}(y)\}_\pm = \Delta^-(x - y), \\ \{u(x), u^*(y)\}_\pm &= \Delta^-(x - y) + \Delta^+(x - y) = \Delta(x - y). \end{aligned} \quad (2.31)$$

Задача 79 Убедиться в справедливости (2.31).

Конкретный вид перестановочных соотношений. Перейдем теперь к установлению конкретного вида перестановочных соотношений. Для этого снова воспользуемся уравнением (2.10)

$$i \frac{\partial u}{\partial x^\mu} = [u(x), P_\mu] .$$

В соответствии с постулатом квантования запишем оператор импульса в виде

$$P^\mu = \sum_\alpha \int d\mathbf{k} k^\mu (\overset{*}{a}_\alpha^+(\mathbf{k}) a_\alpha^-(\mathbf{k}) \pm \overset{*}{a}_\alpha^-(\mathbf{k}) a_\alpha^+(\mathbf{k})) , \quad (2.32)$$

который следует из (1.67), (1.87) и (1.151), причем знак «+» в (2.32) соответствует тензорным полям, а знак «−» спинорным. Кроме того, операторы поля u связаны с амплитудами a следующим образом:

$$u_\alpha^\pm(\mathbf{k}) = v_{\alpha\beta}^\pm(\mathbf{k}) a_\beta^\pm(\mathbf{k}) , \quad (2.33)$$

(сравните с (1.65), (1.86) и (1.142)). В квантовом случае u и a становятся операторами, тогда как v по-прежнему остаются C -числовыми функциями.

Операторы a^\pm и $\overset{*}{a}^\pm$ связаны условием эрмитового сопряжения

$$(a^\pm(\mathbf{k}))^* = \overset{*}{a}^\mp(\mathbf{k})$$

Из (2.26) и (2.33) вытекают следующие коммутационные соотношения для операторов a и их квадратичных форм

$$\begin{aligned} [a^+(\mathbf{k}), \overset{*}{a}^+(\mathbf{q}) a^-(\mathbf{q})] &= [a^-(\mathbf{k}), \overset{*}{a}^-(\mathbf{q}) a^+(\mathbf{q})] = 0 , \\ [a^+(\mathbf{k}), \overset{*}{a}^-(\mathbf{q}) a^+(\mathbf{q})] &= \{a^+(\mathbf{k}), \overset{*}{a}^-(\mathbf{q})\}_\pm a^+(\mathbf{q}) , \\ [a^-(\mathbf{k}), \overset{*}{a}^+(\mathbf{q}) a^-(\mathbf{q})] &= \{a^-(\mathbf{k}), \overset{*}{a}^+(\mathbf{q})\}_\pm a^-(\mathbf{q}) , \end{aligned} \quad (2.34)$$

и аналогичные соотношения, для сопряженных операторов, которые можно получить из (2.34) с помощью эрмитова сопряжения.

Задача 80 Получить (2.34).

Подставляя (2.32) в (2.15) и учитывая (2.34), находим

$$k^\mu a_\alpha^-(\mathbf{k}) = \int d\mathbf{q} q^\mu \{a_\alpha^-(\mathbf{k}), \overset{*}{a}_\beta^+(\mathbf{q})\}_\pm a_\beta^-(\mathbf{q}) , \quad (2.35)$$

$$-k^\mu a_\alpha^+(\mathbf{k}) = \pm \int d\mathbf{q} q^\mu \{a_\alpha^+(\mathbf{k}), \overset{*}{a}_\beta^-(\mathbf{q})\}_\pm a_\beta^+(\mathbf{q}) , \quad (2.36)$$

откуда немедленно получаем¹

$$\{a_\alpha^-(\mathbf{k}), \overset{*}{a}_\beta^+(\mathbf{q})\}_\pm = \delta_{\alpha\beta} \delta(\mathbf{k} - \mathbf{q}) ,$$

$$\{a_\alpha^+(\mathbf{k}), \overset{*}{a}_\beta^-(\mathbf{q})\}_\pm = \mp \delta_{\alpha\beta} \delta(\mathbf{k} - \mathbf{q}) .$$

¹Заметим здесь, что в этих формулах $\delta_{\alpha\beta}$ надо понимать как метрику с которой ведется суммирование в (2.32). Так, например, в случае ЭМП, вместо $\delta_{\alpha\beta}$ нужно писать, в соответствии с уравнением (1.87), $-g_{\alpha\beta}$.

Задача 81 Получить (2.35) и (2.36).

Подчеркнем, что знак « \mp » в правой части последнего выражения не связан со знаком « \pm » в левой части, а соответствует знаку « \pm » в (2.32). Таким образом для каждого типа поля мы получили два варианта перестановочных соотношения. Потребуем, чтобы эти соотношения были инвариантны относительно замены знака заряда, т.е. относительно замены частиц на античастицы

$$a_{\alpha}^{\pm}(\mathbf{k}) \leftrightarrow a_{\alpha}^{*\pm}(\mathbf{k}) . \quad (2.37)$$

Это требование вытекает из того, что выбор основной функции и сопряженной является соглашением. Такая замена изменяет знак заряда, но не сказывается на уравнениях движения и на тензоре энергии-импульса. Кроме того, в случае действительного поля (2.37) означает, что

$$a_{\alpha}^{\pm}(\mathbf{k}) = a_{\alpha}^{*\pm}(\mathbf{k}) .$$

Преобразование (2.37) называется *зарядовым сопряжением*, а соответствующая симметрия — *зарядовой симметрией*. Используя эту симметрию, видим, что непротиворечивым оказывается квантовать поля с целым спином, т.е. тензорные поля, по Бозе-Эйнштейну:

$$[a_{\alpha}^{-}(\mathbf{k}), a_{\beta}^{*+}(\mathbf{q})] = \delta_{\alpha\beta}\delta(\mathbf{k} - \mathbf{q}) , \quad [a_{\alpha}^{*-}(\mathbf{k}), a_{\beta}^{+}(\mathbf{q})] = \delta_{\alpha\beta}\delta(\mathbf{k} - \mathbf{q}) , \quad (2.38)$$

а поля с полуцелым спином, т.е. спинорные поля, по Ферми-Дираку:

$$\{a_{\alpha}^{-}(\mathbf{k}), a_{\beta}^{*+}(\mathbf{q})\} = \delta_{\alpha\beta}\delta(\mathbf{k} - \mathbf{q}) , \quad \{a_{\alpha}^{*-}(\mathbf{k}), a_{\beta}^{+}(\mathbf{q})\} = \delta_{\alpha\beta}\delta(\mathbf{k} - \mathbf{q}) . \quad (2.39)$$

Этот результат составляет содержание известной теоремы Паули о связи спина со статистикой:

«Поля с целым спином квантуются по Бозе-Эйнштейну; поля с полуцелым спином квантуются по Ферми-Дираку.»

Задача 82 Доказать теорему Паули исходя из положительности метрики в гильбертовом пространстве

$$\Phi^{*} A^{\dagger} A \Phi = \Phi^{*} |A|^2 \Phi > 0 .$$

В заключение скажем, что коммутационные соотношения (2.38) и (2.39) можно записать в релятивистски инвариантном виде. Для этого необходимо перейти к четырехмерным операторам

$$a(\pm k) = \sqrt{2k^0} a^{\pm}(\mathbf{k}) , \quad k^0 = \sqrt{\mathbf{k}^2 + m^2} .$$

Это равенство можно представить в виде

$$a^{\pm}(\mathbf{k}) = \int dk^0 \sqrt{2k^0} \theta(k^0) \delta(k^2 - m^2) a(\pm k) .$$

Подставляя его в (2.38), (2.39), можно получить инвариантные выражения

Задача 83 Получить инвариантные выражения для соотношений (2.38), (2.39).

Частотные функции Паули-Йордана. Выясним теперь, как выглядят (анти)коммутаторы полей в координатном представлении, т.е. осуществим переход от аналога формулы (2.29) к аналогу формулы (2.30), считая поле $u(x)$ комплексным. Итак, пусть

$$\{u_{\alpha}^{-}(x), u_{\beta}^{*+}(y)\}_{\pm} = \Delta_{\alpha\beta}^{-}(x-y) , \quad (2.40)$$

$$u^{\pm}(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int dk \sqrt{2k^0} \theta(k^0) e^{\pm ikx} \delta(k^2 - m^2) u^{\pm}(\mathbf{k}) , \quad (2.41)$$

и

$$u_{\alpha}^{\pm}(\mathbf{k}) = v_{\alpha\beta}^{\pm}(\mathbf{k}) a_{\beta}^{\pm}(\mathbf{k}) . \quad (2.42)$$

Подставляя (2.42) в (2.41) и, затем, в (2.40), получаем

$$\begin{aligned} \Delta_{\alpha\beta}^{-}(x-y) &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int dk dq \sqrt{2k^0 2q^0} \theta(k^0) \theta(q^0) e^{-ikx + iqu} \delta(k^2 - m^2) \delta(q^2 - m^2) \times \\ &\quad v_{\alpha\gamma}^{-}(\mathbf{k}) v_{\beta\sigma}^{*+}(\mathbf{q}) \{a_{\gamma}^{-}(\mathbf{k}), a_{\sigma}^{*+}(\mathbf{q})\}_{\pm} . \end{aligned} \quad (2.43)$$

Учитывая коммутационные соотношения (2.38), (2.39), проинтегрируем в (2.43) сперва по \mathbf{q} , а затем по q^0 . Получаем

$$\Delta_{\alpha\beta}^{-}(x-y) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int dk e^{-ik(x-y)} \theta(k^0) \delta(k^2 - m^2) v_{\alpha\gamma}^{-}(\mathbf{k}) v_{\beta\gamma}^{*+}(\mathbf{k}) . \quad (2.44)$$

Легко убедиться, что при нашем выборе полей (2.41), (2.42), произведение

$$P_{\alpha\beta}(k_{\mu}) = v_{\alpha\gamma}^{-}(\mathbf{k}) v_{\beta\gamma}^{*+}(\mathbf{k}) \quad (2.45)$$

является в общем случае полиномом по четырех-импульсу k . В координатном представлении этот полином превращается в полином по производным $P_{\alpha\beta}(i\partial/\partial x^{\mu})$. Поэтому формула (2.44) принимает вид:

$$\Delta^{-}(x) = \frac{1}{i} P_{\alpha\beta} \left(i \frac{\partial}{\partial x^{\mu}} \right) D^{-}(x) ,$$

где

$$D^{-}(x) = \frac{i}{(2\pi)^3} \int dk e^{-ikx} \theta(k^0) \delta(k^2 - m^2) = \frac{i}{(2\pi)^3} \int dk e^{ikx} \theta(-k^0) \delta(k^2 - m^2) ,$$

— отрицательно частотная *функция Паули-Йордана*. Аналогично введем положительно частотную функцию

$$D^{+}(x) = -D^{-}(-x) = \frac{1}{i(2\pi)^3} \int dk e^{ikx} \theta(k^0) \delta(k^2 - m^2) , \quad (2.46)$$

и полную функцию

$$D(x) = D^{+}(x) + D^{-}(x) = -\frac{i}{(2\pi)^3} \int dk e^{ikx} \varepsilon(k^0) \delta(k^2 - m^2) . \quad (2.47)$$

Задача 84 Найти полиномы по импульсам в случаях скалярного, электромагнитного, массивного векторного, спинорного и безмассового левого спинорного полей.

Задача 85 Найти уравнение и граничные условия, которым удовлетворяют функции Паули-Йордана. Найти представление для функций Паули-Йордана в виде трехмерного интеграла Фурье. Найти также явный вид функций Паули-Йордана в координатном пространстве и исследовать поведение в окрестности светового конуса.

Задача 86 Доказать теорему Паули для скалярного поля исходя из анализа функций Паули-Йордана.

Нормальное произведение. Как мы только что видели, в силу того, что операторы не коммутируют, произведение двух и более операторов полей недоопределено. Поэтому переход от классических динамических величин к операторам не является однозначным. Обычно считают, что все динамические величины записаны в виде *нормального произведения*. А именно, нормальным произведением двух и более операторов называется произведение операторов, в котором все операторы рождения стоят слева от операторов уничтожения. Например, рассмотрим обычное произведение двух операторов u и u^* скалярного поля. Перенесем все операторы рождения налево и получим

$$^*uu = ^*u^+u^+ + ^*u^+u^- + ^*u^-u^- + u^+u^- + \Delta^-(x-y)$$

Если в этом выражении положить функцию $\Delta^-(x-y)$ равной нулю, то мы придем к нормальному произведению:

$$:uu := ^*u^+u^+ + ^*u^+u^- + ^*u^-u^- + u^+u^-.$$

Нормальное произведение удобно тем, что, так как операторы уничтожения аннигилируют вакуум (2.18), то среднее по вакууму от любого нормального произведения равно нулю. В частности, при нормальном упорядочивании энергия вакуума равна нулю

$$\langle 0|P^0|0\rangle = 0.$$

Заметим также, что под знаком нормального произведения операторы можно переставлять также, как если бы они являлись обычными функциями, но с учетом знака, возникающего для полей, квантованных по Ферми-Дираку, т.е., например, для спинорного поля

$$:\psi_\alpha(x)\psi_\beta(y): = -:\psi_\beta(y)\psi_\alpha(x):.$$

В дальнейшем, где это не оговорено особо, мы будем пользоваться нормальным произведением для записи динамических величин.

2.3 Квантование скалярного и массивного векторного полей

В предыдущем разделе мы построили общую схему квантования волновых полей. Сейчас мы продемонстрируем ее на примере квантования скалярного и массивного векторного полей.

Квантование скалярного поля. Рассмотрим сначала действительное скалярное поле, которое мы изучали в главе (1.3). Все результаты предыдущей главы практически без изменений переносятся на этот случай. В соответствии с теоремой Паули скалярное поле квантуется по Бозе-Эйнштейну. Имеем

$$\begin{aligned} [\varphi^-(\mathbf{k}), \varphi^+(\mathbf{q})] &= \delta(\mathbf{k} - \mathbf{q}) , \\ [\varphi^-(x), \varphi^+(y)] &= \frac{1}{i} D^-(x - y) = i D^+(y - x) , \\ [\varphi(x), \varphi(y)] &= \frac{1}{i} D(x - y) . \end{aligned} \quad (2.48)$$

Из уравнения (2.48) можно установить связь между операторным и каноническим квантованием.

Задача 87 На примере массивного скалярного поля продемонстрировать связь между операторной (лагранжевой) формулировкой квантования и каноническим квантованием, т.е. необходимо показать, что из коммутатора $[\varphi(x), \varphi(y)] = -iD(x - y)$ следует одновременный коммутатор $[\pi_\varphi(\mathbf{x}), \varphi(\mathbf{y})]|_{x_0=y_0} = -i\delta(\mathbf{x} - \mathbf{y})$, где π_φ – канонически сопряженный импульс поля φ .

Среди динамических величин нетривиален только оператор импульса

$$P^\mu = \int d\mathbf{k} k^\mu \varphi^+(\mathbf{k}) \varphi^-(\mathbf{k}) .$$

Выясним здесь вопрос о нормировке полей. С этой целью рассмотрим одночастичное состояние

$$|1\rangle = \int c(\mathbf{k}) \varphi^+(\mathbf{k}) d\mathbf{k} |0\rangle ,$$

где $c(\mathbf{k})$ характеризует распределение по импульсам в этом состоянии. Найдём среднее значение оператора импульса по этому состоянию

$$\langle P_\mu \rangle_1 = \frac{\langle 1 | P_\mu | 1 \rangle}{\langle 1 | 1 \rangle} = \frac{\int c^*(\mathbf{k}) c(\mathbf{k}) k_\mu d\mathbf{k}}{\int c^*(\mathbf{k}) c(\mathbf{k}) d\mathbf{k}} . \quad (2.49)$$

Если мы теперь хотим получить состояние с определенным импульсом p_μ , то нам следует устремить функцию $c(\mathbf{k})$ к $\delta(\mathbf{k} - \mathbf{q})$. Тогда в этом пределе среднее значение импульса (2.49) стремится к p_μ :

$$\langle 1 | P_\mu | 1 \rangle \rightarrow p_\mu ,$$

как нам и требовалось. Таким образом наши поля нормированы правильным образом.

Аналогично квантуется заряженное поле. Имеем

$$[\varphi^{*-}(\mathbf{k}), \varphi^+(\mathbf{q})] = \delta(\mathbf{k} - \mathbf{q}) ,$$

$$P^\mu = \int d\mathbf{k} k^\mu (\dot{\varphi}^+(\mathbf{k})\varphi^-(\mathbf{k}) + \varphi^+(\mathbf{k})\dot{\varphi}^-(\mathbf{k})) ,$$

$$Q = \int d\mathbf{k} (\dot{\varphi}^+(\mathbf{k})\varphi^-(\mathbf{k}) - \varphi^+(\mathbf{k})\dot{\varphi}^-(\mathbf{k})) .$$

Видим, что операторы $\varphi^-(\mathbf{k})$ и $\dot{\varphi}^+(\mathbf{k})$ являются операторами уничтожения и рождения частиц с импульсом k и зарядом $+1$, тогда как операторы $\dot{\varphi}^-(\mathbf{k})$ и $\varphi^+(\mathbf{k})$ являются операторами уничтожения и рождения частиц с импульсом k и зарядом -1 .

Массивное заряженное векторное поле. Как мы уже говорили в разделе (1.4.2) в случае массивного векторного поля не все компоненты поля являются динамическими. Необходимо наложить условие поперечности на поле $\partial^\mu B_\mu$. Это условие необходимо учитывать и при квантовании. Если его не учесть, то мы не получим положительно определенной энергии. Поэтому квантуются только три независимых состояния $a_i(\mathbf{k})$, связанные с вектором-потенциалом следующим образом

$$\mathbf{B}^\pm(\mathbf{k}) = \mathbf{e}_i a_i^\pm(\mathbf{k}) + \frac{\mathbf{k}}{|\mathbf{k}|} \frac{k^0}{m} a_3^\pm(\mathbf{k}) .$$

Мы не будем приводить здесь все шаги. Приведем лишь окончательный инвариантный ответ

$$[\dot{B}^\mu(x), B^\nu(y)] = \left(g_{\mu\nu} + \frac{1}{m^2} \frac{\partial^2}{\partial x_\mu \partial x_\nu} \right) iD(x-y) . \quad (2.50)$$

При этом операторы $a_i^\pm(\mathbf{k})$, точнее их линейные комбинации, приобретают смысл рождения и уничтожения частиц с определенным зарядом, с тремя возможными проекциями спина на направление движения: $+1$, 0 и -1 , и с определенным импульсом. Таким образом, частицы, описываемые массивными векторными полями имеют спин равный единице.

Задача 88 Получить (2.50)

2.4 Квантование электромагнитного поля

Квантование ЭМП сопряжено с определенными трудностями. Эти трудности связаны в первую очередь с наличием калибровочной инвариантности. Как мы знаем, классическое ЭМП обладает только двумя физическими степенями свободы — двумя поперечными поляризациями. При квантовании мы, конечно, должны восстановить этот результат. Однако, в рамках развитого нами подхода для получения ковариантного ответа следует квантовать все четыре амплитуды a_α . Как мы сейчас увидим, это нельзя сделать непосредственно. Действительно, коммутационные соотношения, полученные нами в разделе 2.2, имеют вид

$$[a_\alpha^-(\mathbf{k}), a_\beta^+(\mathbf{p})] = -g_{\alpha\beta} \delta(\mathbf{k} - \mathbf{p}) . \quad (2.51)$$

Из этого выражения видно, что коммутатор для a_0 имеет неправильный знак « $-$ » по сравнению с коммутаторами для других амплитуд. Если теперь интерпретировать a_0^+

как оператор рождения, так называемых, «временных» фотонов, то легко убедиться, что норма одночастичного состояния будет отрицательна. Это означает, что нельзя ввести вероятностную интерпретацию.

Задача 89 *Показать, что норма состояния, содержащего один временной фотон, отрицательна.*

Далее, как мы уже не раз говорили, теория ЭМП — это калибровочная теория. Для того чтобы с ней корректно обращаться, необходимо фиксировать калибровку. Поскольку мы хотим получить Лоренц-инвариантный ответ, калибровочное условие должно быть инвариантным, например, калибровкой Лоренца

$$\partial A = 0 .$$

Однако, легко проверить, что после квантования это условие не может выполняться как операторное равенство — оно противоречит коммутационным соотношениям (2.51). Действительно, в импульсном пространстве условие Лоренца имеет вид (см. (1.85))

$$k^\mu A_\mu^\pm(\mathbf{k}) = k^\mu e_\mu^\alpha(\mathbf{k}) a_\alpha^\pm(\mathbf{k}) = 0 . \quad (2.52)$$

Здесь нам вместо репера (1.81) будет удобно ввести новый неортонормированный базис

$$\varepsilon_\mu = \frac{e_\mu^0 + e_\mu^3}{2} , \quad \zeta_\mu = \frac{e_\mu^0 - e_\mu^3}{2} , \quad (2.53)$$

(поперечные векторы остаются теми же). Пользуясь определением репера (1.81), видим, что ε_μ параллелен импульсу k_μ и, следовательно, $k^\mu \varepsilon_\mu = 0$, в то время как $k^\mu \zeta_\mu \neq 0$. Кроме того, $k^\mu e_\mu^\sigma = 0$, где здесь и далее в этом разделе $\sigma = 1, 2$ и нумерует поперечные (к трехмерному импульсу) поляризации.

Используя (2.53), условие Лоренца (2.52) запишется в виде

$$a_0^\pm - a_3^\pm = 0 .$$

Это условие очевидно противоречит коммутационным соотношениям, так как коммутаторы a_0 и a_3 отличаются знаком. Поэтому мы не можем далее рассматривать условие Лоренца как операторное равенство. На самом деле этого и не требуется. Достаточно, чтобы условие Лоренца выполнялось на некотором подпространстве состояний в среднем²

$$\Psi^* \partial A \Psi = 0 .$$

Это уравнение является условием на Ψ и оно выделяет нам из всего пространства состояний подпространство, которое и является физическим (если оно существует).

Итак, наша задача — проквантовать ЭМП таким образом, чтобы, во-первых, a_0 можно было интерпретировать в терминах частиц, во-вторых, чтобы выполнялось условие Лоренца. Такой метод квантования был предложен независимо Гуптом и Блэйером в 1950 году. Суть его заключается в следующем.

²Очевидно, что это условие не может выполняться как $\partial A \Psi = 0$, так как не может выполняться условие $\partial A^+ \Psi$.

Пусть классическое поле A_0 является антиэрмитовым:

$$(A_0)^* = -A_0 .$$

И соответственно для амплитуд имеем

$$(a_0^-)^* = -a_0^+ .$$

Это, конечно, противоречит действительности ЭМП. Однако, в квантовой теории поля наблюдаемыми являются не сами поля, а их средние. Мы сейчас так определим операцию усреднения, что среднее от A_0 станет эрмитовым. На первый взгляд такого не может быть: среднее от антиэрмитового оператора является эрмитовым. Тем не менее, мы сейчас увидим как это сделать.

Введем эрмитов оператор η со следующими свойствами

$$\eta^2 = 1 , \quad \eta^\dagger = \eta .$$

Если η записать в виде диагональной матрицы, то его элементы ± 1 . Определим вместо обычного скалярного произведения в пространстве состояний новое произведение следующим образом

$$(\Psi_i^* \eta \Psi_j) .$$

Для ортонормированных векторов имеем

$$(\Psi_i^* \eta \Psi_j) = \pm \delta_{ij} \equiv N_i \delta_{ij} , \quad N_i^2 = 1 .$$

Оператор η будем называть *метрическим*. Определим теперь матричные элементы операторов. Для любого оператора $\hat{\mathcal{O}}$ матричный элемент имеет вид:

$$\mathcal{O}_{ij} = N_i (\Psi_i^* \eta \hat{\mathcal{O}} \Psi_j) .$$

$$\langle \hat{\mathcal{O}} \rangle_i = (\Psi_i^* \eta \hat{\mathcal{O}} \Psi_i) = N_i \mathcal{O}_{ii} .$$

Видим, что определение среднего отличается от диагонального матричного элемента. Заменяем также условие полноты:

$$\sum_i \Psi_i^*(x) \Psi_i(x') = \delta(x - x') \rightarrow \sum_i N_i \Psi_i^*(x) \eta \Psi_i(x') = \delta(x - x') .$$

Очевидно, что для двух операторов при этом выполняется правило матричного умножения:

$$(\hat{\mathcal{O}} \hat{\mathcal{P}})_{ij} = \sum_k \mathcal{O}_{ik} \mathcal{P}_{kj} . \quad (2.54)$$

Задача 90 Доказать (2.54).

Кроме того, для эрмитова оператора (с обычным определением эрмитова сопряжения $(\Psi^* \hat{O} \Phi)^* = (\Phi^* \hat{O}^\dagger \Psi)$) имеем $\mathcal{O}_{ij}^* = \mathcal{O}_{ji}$.

Так как норма в пространстве с таким скалярным произведением не положительно определена, то невозможно ее интерпретировать как вероятность. Однако, это не страшно.

Пусть \hat{O} — эрмитов и антикоммутирует с η

$$\eta \hat{O} = -\hat{O} \eta .$$

Вычислим среднее от такого оператора. Имеем

$$\langle \hat{O} \rangle_i^* = (\Psi_i^* \eta \hat{O} \Psi_i)^* = (\Psi_i^* \hat{O}^\dagger \eta^\dagger \Psi_i) = (\Psi_i^* \hat{O} \eta \Psi_i) = -\langle \hat{O} \rangle_i ,$$

т.е. среднее является чисто мнимым. Обратно, если \hat{O} — антиэрмитов, то среднее будет действительным. Этого нам и хотелось.

Пусть A_0 — антиэрмитово. Введем новое поле (и соответственно новую амплитуду):

$$A_4 = iA_0 , \quad a_4^\pm = ia_0^\pm .$$

Это поле будет эрмитовым, а $(a_4^-)^* = a_4^+$. При этом коммутационные соотношения для a_4 примут правильную форму:

$$[a_4^-(\mathbf{p}), a_4^+(\mathbf{k})] = +\delta(\mathbf{p} - \mathbf{k}) . \quad (2.55)$$

Пусть A_4 (a_4^\pm) антикоммутируют с η , а A_i (пространственные компоненты) — коммутируют:

$$\begin{aligned} \eta A_4 &= -A_4 \eta , \quad \eta A_i = A_i \eta . \\ \eta a_4^\pm &= -a_4^\pm \eta , \quad \eta a_i^\pm = a_i^\pm \eta . \end{aligned} \quad (2.56)$$

Тогда среднее от A_4 , $\langle A_4 \rangle$, будет чисто мнимым, а это значит, что среднее от A_0 будет действительным. Для A_i все остается по-прежнему. Метрика η с такими свойствами называется *индефинитной*.

Далее, благодаря новым коммутационным соотношениям (2.55) мы можем на равных рассматривать a_4 с остальными операторами и интерпретировать a_4^+ как оператор рождения временного фотона, а a_4^- — уничтожения. Остается, однако, проблема, связанная с отрицательностью нормы. Действительно, легко убедиться, что

$$\left(\prod_k \Psi_{n_{4k}}^* \eta \prod_k \Psi_{n_{4k}} \right) \sim (-1)^{n_4} , \quad n_4 = \sum_k n_{4k} , \quad (2.57)$$

где $\Psi_{n_{4k}}$ — состояние, содержащее n_{4k} временных фотонов с импульсом k .

Задача 91 Доказать (2.57).

Сейчас мы увидим, что в физическом подпространстве, т.е. в подпространстве, определяемом условием Лоренца, отрицательно нормированных состояний нет.

Итак, мы хотим построить пространство состояний, для которых выполняется условие Лоренца:

$$\Psi_P^* \eta \partial A \Psi_P = 0 , \quad (2.58)$$

или в импульсном пространстве для отрицательно и положительно частотных компонент

$$(a_3^-(\mathbf{k}) + ia_4^-(\mathbf{k}))\Psi_P = 0 , \quad (2.59)$$

$$\Psi_P^*(a_3^+(\mathbf{k}) - ia_4^+(\mathbf{k})) = 0 . \quad (2.60)$$

Решение этих уравнений легко построить. Достаточно разложить Ψ_P по состояниям с фиксированным числом n_4 временных фотонов и n_3 продольных с импульсом k . Подставляя это разложение в (2.59) или (2.60), можно найти коэффициенты разложения.

Задача 92 Решить уравнение (2.59), (2.60), раскладывая решение по состояниям с фиксированным числом временных и продольных фотонов с данным импульсом.

Мы же запишем решение в несколько другом виде. Пусть $\Psi_P^{(0)}$ — состояние, не содержащее временных и продольных фотонов. Очевидно, это состояние удовлетворяет уравнениям (2.59), (2.60). Тогда состояние, содержащее $n = n_3 + n_4$ фотонов с импульсом k и являющееся решением (2.59), (2.60), имеет вид

$$\Psi_P^{(n)} = (a_3^+(\mathbf{k}) + ia_4^+(\mathbf{k}))^n \Psi_P^{(0)} . \quad (2.61)$$

Для того чтобы получить состояния с разными импульсами, нужно взять несколько операторов, действующих на $\Psi_P^{(0)}$ в этом уравнении, зависящими от разных импульсов. Далее мы будем опускать импульсную зависимость операторов.

Убедимся, что (2.61) является решением (2.59). Заметим, что, например,

$$a_3^-(a_3^+)^k \Psi_P^{(0)} = \delta(0)k(a_3^+)^{k-1} \Psi_P^{(0)} = \delta(0) \frac{\partial}{\partial a_3^+} (a_3^+)^k \Psi_P^{(0)} , \quad (2.62)$$

и аналогично для a_4 .

Задача 93 Проверить (2.62).

Подставляя (2.61) в (2.59) и используя (2.62), имеем

$$\left(\frac{\partial}{\partial a_3^+} + i \frac{\partial}{\partial a_4^+} \right) (a_3^+ + ia_4^+)^n \Psi_P^{(0)} = n\delta(0)(1-1)(a_3^+ + ia_4^+)^{n-1} \Psi_P^{(0)} = 0 ,$$

что и требовалось доказать.

Задача 94 Показать, что результат задачи 92 можно представить в виде (2.61).

Вообще говоря, выполнения условия (2.58) еще недостаточно для того чтобы полностью фиксировать физическое подпространство. Необходимо также, чтобы выполнялись условия вида

$$\Psi_P^* \eta (\partial A)^k \Psi_P = 0 . \quad (2.63)$$

Однако на подпространстве, построенном нами, такие условия выполняются автоматически.

Задача 95 Проверить, что на физическом подпространстве (2.61) выполняются условия (2.63).

Найдем теперь норму $\Psi_P^{(n)}$ при $n \neq 0$. Имеем,

$$\Psi_P^{(n)*} \eta \Psi_P^{(n)} \stackrel{(2.61)}{=} \Psi_P^{(0)*} (a_3^- - i a_4^-)^n \eta \Psi_P^{(n)} \stackrel{(2.56)}{=} \Psi_P^{(0)*} \eta (a_3^- + i a_4^-)^n \Psi_P^{(n)} \stackrel{(2.59)}{=} 0 . \quad (2.64)$$

Это очень важный результат. Во-первых, мы видим, что состояния с отрицательной нормой в физическом подпространстве отсутствуют. Это значит что мы можем использовать вероятностную интерпретацию. Во-вторых, из (2.64) следует, что вероятность обнаружить продольные и временные фотоны равна 0! Что и требовалось, так как мы знаем, что классическое ЭМП имеет всего две, а не четыре, степени свободы. Однако, помимо нормы мы еще должны уметь вычислять средние от операторов. Возникает вопрос, не могут ли временные и продольные фотоны давать вклад в средние операторов и тем самым становиться наблюдаемыми? Ответ на этот вопрос отрицательный. Именно, пусть $\hat{\mathcal{O}}$ — калибровочно-инвариантный оператор, тогда можно показать, что

$$\langle \hat{\mathcal{O}} \rangle_P = (\Psi_P^{(n)*} \eta \hat{\mathcal{O}} \Psi_P^{(n)}) = (\Psi_P^{(0)*} \hat{\mathcal{O}} \Psi_P^{(0)}) , \quad (2.65)$$

т.е. при вычислении средних от калибровочно-инвариантных операторов можно забыть о существовании временных и продольных фотонов и об indefinitной метрике. Если же оператор не калибровочно-инвариантный, то результат иной. Напомним, что условие Лоренца не полностью фиксирует калибровку. Остается еще калибровочная свобода

$$A_\mu \rightarrow A_\mu + \partial_\mu \alpha , \\ \partial^2 \alpha = 0 .$$

Поэтому калибровочно-неинвариантный оператор будет преобразовываться соответствующим образом при остаточных калибровочных преобразованиях. Можно показать, что среднее от калибровочно-неинвариантного оператора по произвольному состоянию Ψ_P отличается от среднего по $\Psi_P^{(0)}$ на калибровочное преобразование.

Задача 96 1. На примере тензора напряженности продемонстрировать равенство (2.65).

2. Показать, что

$$\langle A_\mu \rangle_P = \langle A_\mu \rangle_P^0 + \partial_\mu \alpha .$$

Таким образом, продольные и временные фотоны не проявляются в средних от операторов.

Далее во всех вычислениях мы будем опускать η и в состояниях не будем учитывать примесь нефизических фотонов. Однако, следует всегда помнить об их существовании и важной роли в развитом формализме.

Подведем итог сказанному. Физическими состояниями ЭМП можно считать состояния, содержащие только поперечные фотоны. При этом ЭМП имеет только две степени свободы — две проекции спина ± 1 на направление движения.

Задача 97 Выразить оператор спина через операторы рождения и уничтожения и найти, какая комбинация операторов рождения и уничтожения поперечных фотонов отвечает за положительную поляризацию, а какая за отрицательную.

Если же включать в рассмотрение и нефизические (временные и продольные фотоны), то физическое одночастичное состояние имеет вид (здесь мы снова переходим к a_0)

$$(a_0^+(\mathbf{k}) - a_3^+(\mathbf{k}))\Psi_P^{(0)} ,$$

при этом $(a_0^+)^* = -a_0^-$, $A_0^*(x) = -A_0(x)$, и скалярное произведение в пространстве состояний определено с индефинитной метрикой. Коммутационные соотношения в координатном пространстве выглядят следующим образом

$$[A_\mu(x), A_\nu(y)] = ig_{\mu\nu}D_0(x-y) . \quad (2.66)$$

Задача 98 Объяснить, как надо понимать равенство (2.66), учитывая, что слева стоит калибровочно-неинвариантное выражение, а справа — калибровочно-инвариантное.

2.5 Квантование спинорного поля

Квантование массивного спинорного поля. Рассмотрим теперь квантование спинорного поля. В соответствии с теоремой Паули это поле должно быть проквантовано по Ферми-Дираку. Из явного вида импульса (1.151)

$$P^\mu = \int d\mathbf{k} k^\mu (a_n^{*+}(\mathbf{k})a_n^-(\mathbf{k}) - a_n^{*-}(\mathbf{k})a_n^+(\mathbf{k})) ,$$

видим, что могут быть проквантованы независимые амплитуды a_n . Имеем

$$\begin{aligned} \{a_n^{*+}(\mathbf{k}), a_m^-(\mathbf{q})\} &= \delta_{mn}\delta(\mathbf{k}-\mathbf{q}) , \\ \{a_n^{*-}(\mathbf{k}), a_m^+(\mathbf{q})\} &= \delta_{mn}\delta(\mathbf{k}-\mathbf{q}) , \end{aligned}$$

все остальные антикоммутаторы равны нулю.

Далее можно найти антикоммутаторы полей в координатном пространстве. Используя тот же прием что и при нахождении функций Паули-Йорда в разделе 2.2 (см. формулы (2.40) — (2.45)), получаем

$$\begin{aligned} \{\psi_\alpha^-(x), \bar{\psi}_\beta^+(y)\} &= (i\hat{\partial} + m)_{\alpha\beta} \frac{1}{i} D^-(x-y) \equiv \frac{1}{i} S_{\alpha\beta}^-(x-y) , \\ \{\psi_\alpha^+(x), \bar{\psi}_\beta^-(y)\} &= (i\hat{\partial} + m)_{\alpha\beta} \frac{1}{i} D^+(x-y) \equiv \frac{1}{i} S_{\alpha\beta}^+(x-y) , \\ \{\psi_\alpha(x), \bar{\psi}_\beta(y)\} &= (i\hat{\partial} + m)_{\alpha\beta} \frac{1}{i} D(x-y) \equiv \frac{1}{i} S_{\alpha\beta}(x-y) , \end{aligned} \quad (2.67)$$

В импульсном пространстве функция $S(x)$ имеет следующий вид

$$S(x) = (i\hat{\partial} + m)D(x) = \frac{i}{(2\pi)^3} \int dk e^{ikx} \delta(k^2 - m^2) \varepsilon(k^0) (\hat{k} - m) .$$

Заметим, что функция $S(x)$ удовлетворяет уравнениям движения поля:

$$(i\hat{\partial} - m)S(x) = (i\hat{\partial} - m)(i\hat{\partial} + m)D(x) = -(\partial^2 + m^2)D(x) = 0 .$$

Задача 99 Получить антикоммутационные соотношения (2.67).

Операторы динамических величин представляются в виде

Объяснить
 n

$$P^\mu = \int d\mathbf{k} k^\mu (a_n^{*+}(\mathbf{k}) a_n^-(\mathbf{k}) + a_n^+(\mathbf{k}) a_n^{*-}(\mathbf{k})) ,$$

$$Q = \int d\mathbf{k} (a_n^{*+}(\mathbf{k}) a_n^-(\mathbf{k}) - a_n^+(\mathbf{k}) a_n^{*-}(\mathbf{k})) ,$$

$$S_3 = \frac{1}{2} \int d\mathbf{k} (a_1^{*+}(\mathbf{k}) a_1^-(\mathbf{k}) - a_2^{*+}(\mathbf{k}) a_2^-(\mathbf{k}) - a_1^+(\mathbf{k}) a_1^{*-}(\mathbf{k}) + a_2^+(\mathbf{k}) a_2^{*-}(\mathbf{k})) .$$

Из этих выражений следует, что операторы $a_n^{*+}(\mathbf{k})$ и $a_n^-(\mathbf{k})$ — операторы рождения и уничтожения частиц с импульсом \mathbf{k} , массой m , зарядом $+1$ и проекцией спина $+\frac{1}{2}$ при $n = 1$ и $-\frac{1}{2}$ при $n = 2$. Аналогично, операторы $a_n^+(\mathbf{k})$ и $a_n^{*-}(\mathbf{k})$ — операторы рождения и уничтожения частиц с импульсом \mathbf{k} , массой m , зарядом -1 и проекцией спина $-\frac{1}{2}$ при $n = 1$ и $+\frac{1}{2}$ при $n = 2$.

Зарядовое сопряжение. При установлении типов перестановочных соотношений в главе 2.2 мы уже встречались с зарядовым сопряжением. Мы видели, что зарядовое сопряжение сохраняет все динамические переменные кроме тока: у тока при преобразованиях зарядового сопряжения изменяется знак. Для скалярного поля преобразование зарядового сопряжения сводится к замене сопряженных полей на несопряженные и обратно: $\varphi(x) \mapsto \varphi'(x) = \varphi^*(x)$. В случае спинорных полей такое преобразование намного сложнее в силу нетривиальной структуры спинорных функций. В этом параграфе мы остановимся на нахождении закона преобразования спинорных функций при преобразовании зарядового сопряжения. Поскольку преобразование зарядового сопряжения должно связывать сопряженные и несопряженные функции, то можно написать

$$\psi^C = C \left(\overline{\psi}^T \right) , \quad \overline{\psi}^C = \psi^T (C^T)^{-1} = (C^{-1} \psi)^T , \quad (2.68)$$

где C — некоторая матрица, которую мы будем называть *оператором зарядового сопряжения*. Последнее равенство в уравнении (2.68) можно записать также в следующем виде:

$$\overline{\psi}^C = (\psi^C)^T \gamma_0 = \left(C^* (\psi^T \gamma_0^*)^T \right)^T \gamma_0 = (C^* \gamma_0 \psi)^T \gamma_0 = \psi^T \gamma_0^T C^\dagger \gamma_0 = \psi^T \gamma_0 C^\dagger \gamma_0 .$$

Из этого равенства и из (2.68) следует следующее свойство матрицы C ,

$$(C^T)^{-1} = \gamma_0 C^\dagger \gamma_0 \Rightarrow C^T \gamma_0 C^\dagger \gamma_0 = 1 . \quad (2.69)$$

Кроме прямых преобразований (2.68) существуют также обратные

$$\psi = C \left(\overline{\psi^C} \right)^T, \quad \overline{\psi} = \left(C^{-1} \psi^C \right)^T; \quad (2.70)$$

видим, что прямое преобразование (2.68) совпадает с обратным (2.70).

Для того чтобы найти явный вид матрицы C , воспользуемся тем фактом, что при зарядовом сопряжении все динамические величины, кроме тока, не должны изменяться, а ток должен изменить знак:

$$\mathcal{L}(\psi) = \mathcal{L}(\psi^C), \quad T_{\mu\nu}(\psi) = T_{\mu\nu}(\psi^C), \quad J_\mu(\psi) = -J_\mu(\psi^C).$$

Для этого достаточно потребовать, чтобы

$$: \overline{\psi}_1 \gamma_\mu \psi_2 := - : \overline{\psi}_2^C \gamma_\mu \psi_1^C : \quad (2.71)$$

$$: \overline{\psi} \psi := : \overline{\psi^C} \psi^C : , \quad (2.72)$$

где $\psi_{1(2)}$ — либо само поле, либо его производная. Рассмотрим уравнение (2.71). Используя обратные преобразования (2.70), получаем

$$: \overline{\psi}_1 \gamma_\mu \psi_2 := \left(C^{-1} \psi_1^C \right)^T \gamma_\mu C \left(\overline{\psi}_2^C \right)^T := \psi_1^{C\alpha} C_{\alpha\beta}^{-1T} \gamma_\mu^{\beta\gamma} C_{\gamma\rho} \overline{\psi}_2^{C\rho} : \stackrel{\text{антиком.}}{=}.$$

$$- : \overline{\psi}_2^{C\rho} C_{\rho\gamma}^T \gamma_\mu^{T\gamma\beta} C_{\beta\alpha}^{-1} \psi_1^{C\alpha} := - : \overline{\psi}_2^C C^T \gamma_\mu^T C^{-1} \psi_1^C : .$$

Сравнивая полученное выражение с правой частью (2.71), получаем

$$C^T \gamma_\mu^T C^{-1} = \gamma_\mu \Rightarrow (C^{-1})^T \gamma_\mu C = \gamma_\mu^T. \quad (2.73)$$

Аналогично из (2.72) имеем

$$: \overline{\psi} \psi := - : \overline{\psi^C} C^T C^{-1} \psi^C : ,$$

и следовательно

$$C^T C^{-1} = -1 \Rightarrow C = -C^T. \quad (2.74)$$

Из уравнений (2.69), (2.73) и (2.74) легко получить унитарность матрицы C

$$C^+ C = 1. \quad (2.75)$$

Задача 100 Получить условие унитарности (2.75).

Кроме того, из (2.73) и (2.74) следует, что

$$C^{-1} \gamma_\mu C = -\gamma_\mu^T.$$

В спинорном и стандартном представлении γ -матриц последнее равенство можно переписать в виде

$$\{\gamma_0 C\} = \{\gamma_2 C\} = 0,$$

$$[\gamma_1 C] = [\gamma_3 C] = 0 .$$

Эти уравнения определяют матрицу C с точностью до константы. Действительно, легко убедиться, что матрица

$$C = \alpha \gamma^0 \gamma^2$$

удовлетворяет уравнениям. Постоянную α можно определить из условия унитарности (2.75). Из этого условия следует, что $|\alpha| = 1$. В остальном выбор константы α произволен. Обычно выбирают $\alpha = -i$. Таким образом, матрица зарядового сопряжения имеет вид

$$C = i \gamma^2 \gamma^0 .$$

Переход к другому представлению γ -матриц по формуле (1.106):

$$\gamma^\mu \mapsto U \gamma^\mu U^{-1} ,$$

приводит к новой матрице зарядового сопряжения

$$C \mapsto U C U^T . \quad (2.76)$$

Задача 101 Доказать формулу (2.76).

Задача 102 Построить матрицу зарядового сопряжения в двумерном и трехмерном случаях.

Задача 103 Найти закон преобразования относительно зарядового сопряжения псевдоскаляра, псевдовектора и тензора второго ранга.

Квантование поля нейтрино. Рассмотрим квантование безмассового спинорного поля или поля нейтрино. Как мы уже говорили, нейтрино является левовинтовым:

$$\nu = \psi_L = \frac{1 - \gamma_5}{2} \psi ; \quad \frac{1 + \gamma_5}{2} \nu = 0 .$$

Выражение для операторов импульса и компоненты спина легко получить из соответствующих выражений для массивного поля опусканием суммирования по спиновым индексам. Имеем,

$$P_\mu = \int dk k_\mu \left(\tilde{a}_{-1}^+ a_{-1}^- + a_{-1}^+ \tilde{a}_{-1}^- \right) , \quad (2.77)$$

$$S_3 \sim -\frac{1}{2} \tilde{a}_{-1}^+ a_{-1}^- + \frac{1}{2} a_{-1}^+ \tilde{a}_{-1}^- . \quad (2.78)$$

Задача 104 Получить выражения для операторов импульса и спина нейтринного поля.

Объяснить
 $n = -1$

Из выражений (2.77), (2.78) видно что у нейтрино два состояния: одно описывает нейтрино с отрицательной спиральностью, другое описывает антинейтрино с положительной спиральностью. Можно добиться того, что у частицы будет два состояния, а античастица не добавляет новых состояний, т.е. частица тождественна античастице. Для этого введем *Майорановский спинор*:

$$\chi^C = \chi.$$

Из определения зарядового сопряжения следует, что

$$C\bar{\chi}^T = \chi.$$

Проверит
знаки в
2.83,84

Задача 105 Показать, что ток майорановских спиноров равен нулю.

Из того, что ток майорановских спиноров равен нулю, следует, что действительно частица, описываемая таким спинором, тождественна своей античастице.

Можно связать майорановский спинор со спинором ν соотношением

$$\chi = \frac{\nu + \nu^C}{2} = \frac{\psi_L + \psi_L^C}{2},$$

где

$$\psi_L^C \equiv (\psi_L)^C = \frac{1 + \gamma_5}{2} \psi^C = (\psi^C)_R.$$

При этом лагранжиан нейтринного поля (1.156) примет вид

$$\mathcal{L} = i\bar{\chi}\hat{\partial}\chi.$$

2.6 Инверсия координат и обращение времени

Как мы уже отмечали, полная группа Пуанкаре включает в себе помимо собственной группы Лоренца и сдвигов, также и отражение нечетного числа пространственных осей и времени. Эти два последних преобразования также оставляют инвариантным интервал. В этом разделе мы изучим, как свободные квантованные поля преобразуются относительно инверсии координат и времени.

В четырехмерном пространстве-времени вектор $x^\mu = (x^0, \mathbf{x})$ под действием операции инверсии пространственных координат должен переходить в $x'^\mu = (x^0, -\mathbf{x})$ — такое преобразование называется преобразованием *четности*, а при отражении времени в $x'^\mu = (-x^0, \mathbf{x})$. Запишем соответствующие преобразования в виде

$$\begin{aligned} x'^\mu &= \mathcal{P}^\mu_\nu x^\nu \equiv g^{\mu\nu} x^\nu \quad (\text{отражение координат}) \\ x'^\mu &= \mathcal{T}^\mu_\nu x^\nu \equiv -g^{\mu\nu} x^\nu \quad (\text{отражение времени}). \end{aligned}$$

Долгое время считалось, что теория квантованных полей должна быть инвариантна относительно преобразований четности и отражения времени, т.е. относительно полной группы Пуанкаре. Однако, в 1956 году выяснилось, что слабые взаимодействия нарушают четность, т.е. *P-инвариантность*, а в 1964 году появились косвенные данные, что

обращение времени, т.е. T -инвариантность, также нарушается в слабых взаимодействиях. В настоящее время ведутся эксперименты по прямому обнаружению нарушения T -инвариантности. Тем не менее, электромагнитные, сильные и гравитационные взаимодействия в настоящее время считаются T и P -инвариантными. Поэтому мы также будем считать, что квантовая теория должна быть T и P инвариантной, помня, однако, что это лишь аппроксимация.

Для того чтобы выяснить, как действуют четность и отражение времени на состояния, удобно сперва найти закон преобразования операторов импульса и момента относительно этих преобразований. Для этого воспользуемся тем, что P и T являются симметриями, т.е., в соответствии с результатами раздела 2.1 должно существовать представление полной группы Пуанкаре $U(\Lambda, a)$, действующее на амплитуды состояния по закону (2.4)

$$\Phi \mapsto \Phi' = U(\Lambda, a)\Phi .$$

Здесь мы используем обозначение $U(\Lambda, a)$ вместо $U(\Omega, a)$, поскольку мы рассматриваем не собственную группу Лоренца (параметром которой является Ω , а полную группу Лоренца, включающую в себя отражение времени и координат, т.е. $\Lambda = (\Omega, \mathcal{P}, \mathcal{T})$. Обозначим операторы U , соответствующие только отражениям, следующим образом:

$$P \equiv U(\mathcal{P}, 0) \quad T \equiv U(\mathcal{T}, 0) .$$

Поскольку эти операторы принадлежат представлению, то для них выполняется общий закон умножения операторов

$$U(\Lambda_2, a_2)U(\Lambda_1, a_1) = U(\Lambda_2\Lambda_1, \Lambda_2a_1 + a_2) .$$

Используя этот закон, мы можем написать

$$PU(\Lambda, a)P^{-1} = U(\mathcal{P}\Lambda\mathcal{P}^{-1}, \mathcal{P}a) , \quad (2.79)$$

$$TU(\Lambda, a)T^{-1} = U(\mathcal{T}\Lambda\mathcal{T}^{-1}, \mathcal{T}a) . \quad (2.80)$$

Задача 106 Показать справедливость (2.79) и (2.80).

Рассмотрим теперь в качестве операторов U , стоящих в уравнениях (2.79), (2.80), операторы, соответствующие собственной группе Лоренца и сдвигам. В инфинитезимальной форме их можно написать как (см. (2.8), (2.12))

$$U = 1 + ia_\mu P^\mu + \frac{i}{2}\omega_{\mu\nu} J^{\mu\nu} , \quad (2.81)$$

где P^μ и $J^{\mu\nu}$ — операторы импульса и момента импульса соответственно. Подставляя (2.81) в (2.79), (2.80), находим следующие законы преобразований для операторов импульса и момента

$$PiJ^{\rho\sigma}P^{-1} = iP_\mu^\rho \mathcal{P}_\nu^\sigma J^{\mu\nu} , \quad (2.82)$$

$$PiP^\rho P^{-1} = iP_\mu^\rho P^\mu , \quad (2.83)$$

$$TiJ^{\rho\sigma}T^{-1} = iT_\mu^\rho \mathcal{T}_\nu^\sigma J^{\mu\nu} ,$$

$$TiP^\rho T^{-1} = iT_\mu^\rho P^\mu . \quad (2.84)$$

В этих равенствах мы намеренно не сократили на i , так как, как сейчас мы увидим, этого сделать нельзя. Действительно, рассмотрим сперва уравнение (2.83) при $\rho = 0$. Имеем,

$$P iP^0 P^{-1} = iP^0 .$$

Если теперь считать P линейным оператором, то мы можем сократить на i в обеих частях уравнения: $PP^0P^{-1} = P^0$. Это означает, что, если некоторое состояние имеет энергию p^0 , то состояние, полученное в результате P -преобразования также будет иметь энергию p^0 . Никакого противоречия здесь нет и мы можем считать P линейным унитарным оператором (унитарность необходима для сохранения нормы состояния).

Рассмотрим теперь уравнение (2.84) при $\rho = 0$. Имеем,

$$T iP^0 T^{-1} = -iP^0 . \quad (2.85)$$

Если считать T линейным, то мы получим $TP^0T^{-1} = -P^0$, т.е. T -преобразованное состояние имеет отрицательную энергию. Но таких состояний нет в гильбертовом пространстве физических состояний. С другой стороны, для сохранения нормы мы по-прежнему должны считать T унитарным: $T^\dagger T = 1$. Из этого затруднения есть выход: для этого достаточно считать, что T антикоммутирует с i , но коммутирует с действительными числами. Таким образом, для любого комплексного числа c имеем

$$cT = Tc^* ,$$

т.е. оператор T сопрягает комплексные числа. Такой оператор не является линейным. Он называется *антилинейным* или *антиунитарным*. Несмотря на последнее название, надо помнить, что по-прежнему $T^\dagger T = 1$, т.е. в этом смысле оператор T -сопряжения унитарен и сохраняет норму.

Итак, считая T антиунитарным, имеем из уравнения (2.85) $TP^0T^{-1} = P^0$ — энергия у T -сопряженного состояния положительна.

Рассмотрим теперь законы преобразования оставшихся генераторов группы Лоренца (2.82) — (2.84)

$$PJ^{ij}P^{-1} = +J^{ij} , \quad (2.86)$$

$$PJ^{i0}P^{-1} = -J^{i0} ,$$

$$PP^iP^{-1} = -P^i , \quad (2.87)$$

$$TJ^{ij}T^{-1} = -J^{ij} , \quad (2.88)$$

$$TJ^{i0}T^{-1} = +J^{i0} ,$$

$$TP^iT^{-1} = -P^i . \quad (2.89)$$

Из этих формул следует, что как P , так и T меняют направление импульса. Кроме того, P не меняет направление трехмерного вектора момента импульса³, в то время как T меняет. Эти результаты находятся в полном согласии с классическим результатом. Действительно, момент импульса равен $\mathbf{r} \times \mathbf{p}$, при этом $\mathbf{p} = m d\mathbf{r}/dt$. Поэтому, так как при

³ Поскольку антисимметричный тензор ε^{ijk} является псевдотензором, т.е. не меняет знак при пространственных отражениях, то трехмерный оператор момента импульса $J^i = -1/2 \varepsilon^{ijk} J^{jk}$ с учетом (2.82) не меняет знак.

пространственных отражениях $\mathbf{r} \rightarrow -\mathbf{r}$, то импульс меняет знак (см. (2.87)), а момент импульса нет (2.86). При отражении времени $\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r}$, поэтому импульс также меняет знак (см. (2.89)), и момент импульса меняет знак (см. (2.88)).

Задача 107 Показать, что операции обращения времени и инверсии координат согласованы с квантовомеханическими коммутационными соотношениями для импульса и момента.

Рассмотрим теперь, как действуют операторы P и T на одночастичное состояние. Как мы выяснили в предыдущих разделах, одночастичное состояние с определенным импульсом и проекцией спина может быть получено из вакуума действием оператора рождения

$$|\mathbf{k}, \sigma\rangle = a_{\sigma}^{+}(\mathbf{k})|0\rangle, \\ P_{\mu}|\mathbf{k}, \sigma\rangle = k_{\mu}|\mathbf{k}, \sigma\rangle, \quad S_3|\mathbf{k}, \sigma\rangle = \sigma|\mathbf{k}, \sigma\rangle,$$

где S_3 — оператор третьей проекции спина.

Подействуем на это состояние оператором P , а затем операторами P_{μ} и S_3 . Имеем

$$P_{\mu}(P|\mathbf{k}, \sigma\rangle) \stackrel{(2.87)}{=} P_{\mu}^{\nu}k_{\nu}P|\mathbf{k}, \sigma\rangle,$$

$$S_3(P|\mathbf{k}, \sigma\rangle) \stackrel{(2.86)}{=} \sigma P|\mathbf{k}, \sigma\rangle.$$

Из первого уравнения следует, что $P|\mathbf{k}, \sigma\rangle$ — собственный вектор оператора импульса с собственным значением $(k^0, -\mathbf{k})$, из второго уравнения следует, что этот же вектор является собственным вектором S_3 с собственным значением σ . Таким образом⁴, вектор $P|\mathbf{k}, \sigma\rangle$ лишь множителем отличается от $|\mathbf{k}, \sigma\rangle$. Этот множитель по модулю должен быть равен единице (в силу унитарности P), и в принципе может зависеть от σ :

$$P|\mathbf{k}, \sigma\rangle = \eta_{\sigma}|\mathbf{k}, \sigma\rangle, \quad |\eta_{\sigma}| = 1.$$

Для того чтобы прояснить вопрос о зависимости η от σ , подействуем операторами $S_1 \pm iS_2$, где $S_i = -1/2\varepsilon_{ijk}S^{jk}$ — трехмерный вектор спина, на состояние. Согласно известной формуле квантовой механики, имеем

$$(S_1 \pm iS_2)|\mathbf{k}, \sigma\rangle = \sqrt{(s \mp \sigma)(s \pm \sigma + 1)}|\mathbf{k}, \sigma \pm 1\rangle, \quad (2.90)$$

где s — спин частицы.

Задача 108 Доказать формулу (2.90).

Действуя теперь на обе части формулы (2.90) оператором четности и учитывая, что P коммутирует с моментом (и спином) (2.86), получаем

$$\eta_{\sigma} = \eta_{\sigma \pm 1},$$

что и доказывает, что η не зависит от σ . Итак,

$$P|\mathbf{k}, \sigma\rangle = \eta|\mathbf{k}, \sigma\rangle.$$

⁴Мы пренебрегаем возможностью вырождения.

Фаза η называется *внутренней четностью частицы*. Ее значение можно фиксировать лишь вводя взаимодействие с другими частицами. Для всех известных на сегодняшний день частиц эта фаза может быть выбрана равной ± 1 . Исключение составляет майорановское нейтрино (если оно существует). Для него фаза должна быть равна $\pm i$.

Интересно отметить, что если частица безмассовая и теория P -инвариантна, то, поскольку P изменяет направление импульса и не изменяет направления спина, т.е. изменяет спиральность, то с необходимостью должна существовать точно такая же частица, но с противоположной спиральностью. Таким образом, теория с одним только левым нейтрино не является P -инвариантной.

Рассмотрим теперь действие оператора отражения времени на одночастичное состояние. Проводя аналогичные рассуждения, найдем, что

$$T|\mathbf{k}, \sigma\rangle = \xi(-1)^{j-\sigma} |-\mathbf{k}, -\sigma\rangle, \quad (2.91)$$

где ξ — фаза, не зависящая от σ .

Задача 109 Получить формулу (2.91).

В отличие от η , фаза ξ не имеет физического смысла. Действительно, мы всегда можем переопределить наше состояние

$$|\mathbf{k}, \sigma\rangle' = \sqrt{\xi} |\mathbf{k}, \sigma\rangle.$$

Тогда имеем

$$T|\mathbf{k}, \sigma\rangle' = \sqrt{\xi^*} T|\mathbf{k}, \sigma\rangle = \sqrt{\xi^*} \xi (-1)^{j-\sigma} |-\mathbf{k}, -\sigma\rangle = (-1)^{j-\sigma} |-\mathbf{k}, -\sigma\rangle'.$$

Задача 110 Показать, что спинорное поле Дирака под действием оператора отражения времени преобразуется как

$$T\psi(x^0, \mathbf{x})T^{-1} = \gamma^1\gamma^3\psi(-x^0, \mathbf{x}).$$

Показать, что лагранжиан Дирака инвариантен относительно независимого действия преобразований C , P и T . Является ли инвариантным относительно этих преобразований лагранжиан, описывающий безмассовое левое нейтрино? Если нет, то является ли он инвариантом относительно совместного действия C , P и T .

Задача 111 Найти закон преобразования ЭМП при P и T преобразованиях.

CPT -теорема. Поскольку в слабых взаимодействиях участвует только левое нейтрино, то P -инвариантность сильно нарушается этими взаимодействиями. Инвариантность относительно P -преобразований и одновременной замены частиц на античастицы, т.е. зарядового сопряжения C , является более лучшей, хотя и тоже нарушенной, симметрией слабого взаимодействия. Возникает вопрос, является ли симметрией T преобразования? Экспериментально на этот вопрос ответить достаточно сложно. Однако, существует теорема, утверждающая, что любая лоренц-инвариантная унитарная квантовая теория поля должна быть CPT -инвариантна. Эта теорема называется *CPT -теоремой*. Следствием

из этой теоремы является то, что если теория слабых взаимодействий удовлетворяет ее требованиям (а современные экспериментальные данные указывают именно на это), то, поскольку CP нарушается слабыми взаимодействиями, то и T -инвариантность также должна нарушаться.

Заметим, что CPT теорема имеет отношение к взаимодействующим полям, к изучению которых мы сейчас и переходим. Тем не менее, выясним здесь вопрос о том, что означает инвариантность относительно CPT преобразований. Как мы увидим, основной интерес с точки зрения экспериментальной физики представляют собой вероятности переходов состояний, содержащих n частиц, в состояния, содержащие m частиц. CPT -теорема утверждает, что если мы рассмотрим обратные процессы, т.е. $m \rightarrow n$, заменим все частицы на античастицы, и изменим направления спинов (но не импульсов, так как PT -преобразование сохраняет направление импульсов), то вероятность такого процесса будет совпадать с вероятностью процесса $n \rightarrow m$.

(Draft 01.09.2020) Глава 3

Матрица рассеяния

3.1 Взаимодействующие поля

В предыдущих главах мы познакомились с теорией свободных полей. Уравнения движения таких полей, являясь линейными, могут быть решены в общем виде, и соответствующая теория может быть достаточно легко проквантована. Однако, хорошо известно, что все поля и частицы в природе взаимодействуют. Более того, если поле является свободным, то оно не может быть обнаруженным по определению и тем самым является лишь абстракцией. Принято разделять все взаимодействия на четыре типа: электромагнитное, гравитационное, слабое и сильное. На самом деле это разделение несколько условно. Эти известные взаимодействия являются *калибровочными*. Существуют помимо калибровочных взаимодействий и другие виды взаимодействия, например самодействие хиггсовского поля. Кроме того, в настоящее время существуют достаточно сильные указания на то, что все эти четыре типа взаимодействия должны объединяться при высоких энергиях.

Как мы уже сказали, свободные поля описываются линейными уравнениями движения. Линейные уравнения следуют в свою очередь из квадратичных лагранжианов. Поэтому, чтобы иметь взаимодействие, следует рассматривать лагранжианы, содержащие более высокие степени полей. Это значительно увеличивает число возможных лагранжианов. Даже при условии, что какой-либо лагранжиан удовлетворяет всем симметриям, приводит к ограниченной снизу энергии и эрмитов, к нему всегда можно добавить этот же лагранжиан, возведенный в любую степень. Здесь на помощь приходит условие перенормируемости, которое в данном случае требует, чтобы все константы в лагранжиане не имели отрицательной массовой размерности. Это требование резко ограничивает число возможных лагранжианов. Приведем пример. Сильные взаимодействия при низких энергиях можно рассматривать как взаимодействия между нуклонами (фермионами), переносимые пионами (скалярами). Лагранжиан взаимодействия между нуклонами и пионами фиксируется единственным способом:

$$\mathcal{L}_{\text{int}}^{\pi N} = ig\bar{\psi}\gamma_5\tau_i\psi\pi_i,$$

где матричная структура определяется симметриями сильных взаимодействий (τ_i — матрицы Паули), g — безразмерная *константа связи*. Это взаимодействие называется взаимодействием *Юкавы*. Попытка написать что-нибудь другое, например, $\partial_\mu\pi_i\bar{\psi}\gamma_\mu\gamma_5\tau_i\psi$ приводит к необходимости введения константы отрицательной размерности. Существует еще

один член взаимодействия в этой теории, согласованный со всеми симметриями и перенормируемый — это $(\pi_i \pi_i)^2$, — самодействие пионов. Он не включает взаимодействие с нуклонами. Такой же член возникнет в обычной действительной скалярной теории, если наложить на поля Z_2 -симметрию, т.е. симметрию относительно замены $\varphi \rightarrow -\varphi$. Лагранжиан такой теории имеет единственный вид

$$\frac{1}{2}(\partial_\mu \varphi)^2 - \frac{m^2}{2}\varphi^2 - \frac{\lambda}{4!}\varphi^4. \quad (3.1)$$

Этот лагранжиан мы будем называть лагранжианом теории « φ^4 ». Он будет нам служить полигоном при дальнейших построениях. Сейчас же обсудим, что такое *калибровочные* взаимодействия.

Калибровочные взаимодействия. Рассмотрим теорию комплексного скалярного поля и потребуем инвариантности лагранжиана относительно *глобальных*, т.е. не зависящих от x , фазовых вращений

$$\varphi \rightarrow \varphi e^{i\alpha}, \quad (3.2)$$

где α — произвольное действительное число. Говорят, что такие преобразования образуют группу $U(1)$. Это же комплексное поле можно разложить на действительную и мнимую части

$$\varphi = \frac{\varphi_1 + i\varphi_2}{\sqrt{2}}.$$

Тогда преобразование (3.2) можно записать в виде вращений в двумерном действительном пространстве

$$\begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix}$$

Матрицы, осуществляющие такие преобразования, являются ортогональными с единичным определителем и образуют группу $SO(2)$. Видим, таким образом, что группы $U(1)$ и $SO(2)$ эквивалентны.

Лагранжиан теории фиксируется единственным способом

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= |\partial_\mu \varphi|^2 - V(\varphi^* \varphi), \\ V(\varphi^* \varphi) &= m^2 \varphi^* \varphi + \frac{\lambda}{2} (\varphi^* \varphi)^2. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Потребуем, чтобы теория была инвариантна относительно *локальных*, т.е. зависящих от x , $U(1)$ преобразований. Пусть $\alpha = \alpha(x)$ зависит от x . Тогда потенциальный член в (3.3) по-прежнему инвариантен. Однако кинетический нет. Для того чтобы кинетический член был инвариантен, достаточно, чтобы производная от поля преобразовывалась также как поле, т.е. ковариантно. Однако,

$$\partial_\mu \varphi' = \partial_\mu \varphi e^{i\alpha(x)} = e^{i\alpha} (\partial_\mu \varphi + \varphi i \partial_\mu \alpha).$$

Видим, что необходимо избавиться от члена с производной от α . Для того чтобы это сделать введем ЭМП A_μ и заменим обычную производную на *ковариантную* или *длинную*

$$\partial_\mu \rightarrow D_\mu = \partial_\mu - ieA_\mu, \quad (3.4)$$

где при калибровочных преобразованиях A_μ преобразуется следующим образом

$$A'_\mu = A_\mu + \frac{1}{e} \partial_\mu \alpha .$$

Тогда

$$(D_\mu \varphi)' = e^{i\alpha} D_\mu \varphi$$

— преобразуется ковариантно.

Лагранжиан теории, называемой *скалярной электродинамикой*, имеет вид

$$-\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + |D_\mu \varphi|^2 - V(\varphi^* \varphi) . \quad (3.5)$$

Задача 112 Показать, что с ковариантной производной можно обращаться так же, как и с обычной. Т.е. можно применять правило Лейбница и интегрировать по частям.

Аналогично можно вместо скаляра рассмотреть спинор ψ . Лагранжиан, симметричный относительно калибровочных $U(1)$ преобразований

$$\psi' = e^{i\alpha(x)} \psi ,$$

называется лагранжианом спинорной электродинамики или просто электродинамики и имеет вид

$$-\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + i\bar{\psi} \gamma^\mu D_\mu \psi - m\bar{\psi} \psi . \quad (3.6)$$

Этот лагранжиан описывает взаимодействие электрона с фотоном.

Задача 113 Показать, что в обоих случаях (3.5), (3.6) лагранжиан взаимодействия можно представить в виде $A^\mu j_\mu$. Найти ток j_μ и показать, что он сохраняется на уравнениях движения.

Задача 114 Известно, что фотон — нейтральная частица. Считая лагранжианы (3.5), (3.6) инвариантными относительно C -сопряжения, найти закон преобразования ЭМП при зарядовом сопряжении.

Взаимодействие калибровочного поля с полями материи, построенное путем удлинения производной, называется *минимальным* взаимодействием. В принципе, можно написать и другие калибровочно-инвариантные члены. Так, например, в спинорной электродинамике можно написать член

$$F_{\mu\nu} \bar{\psi} \sigma^{\mu\nu} \psi .$$

Этот член описывает взаимодействия магнитного момента спинора с ЭМП. Константа взаимодействия перед ним имеет отрицательную размерность, и поэтому его не включают в лагранжиан.

Группа электромагнетизма $U(1)$ является *абелевой* группой, т.е. два преобразования из этой группы коммутируют между собой. Вообще говоря, можно рассматривать теории

с *неабелевыми* калибровочными группами. Так, например, калибровочная группа *Стандартной модели*¹ — $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$. Причем группа $SU(3)$ описывает *сильные* взаимодействия между *цветными* зарядами. Переносчиками сильных взаимодействий являются восемь безмассовых калибровочных векторных полей, называемых *глюонами*. Группа $SU(2) \times U(1)$ описывает объединенные *электрослабые* взаимодействия. Переносчиками этих взаимодействий являются два заряженных массивных векторных W -бозона, один нейтральный массивный векторный Z -бозон и один безмассовый фотон. Мы не будем здесь выписывать лагранжиан неабелевых калибровочных теорий. Это отдельная очень интересная тема, выходящая за рамки этого курса.

Скажем еще, что совершенно необязательно калибровать, т.е. делать локальными, все глобальные симметрии лагранжиана. Так, например, приведенный выше лагранжиан пион-нуклонного взаимодействия обладает так называемой *киральной* $SU(2)$ -симметрией. Это глобальная симметрия.

Спонтанное нарушение глобальной дискретной симметрии. Рассмотрим теорию φ^4 , которая обладает Z_2 -симметрией. Обсудим, какие ограничения на параметры этой теории накладывает требование ограниченности энергии. В разделе 1.3 при построении мы требовали $m^2 > 0$ для того чтобы энергия была ограничена снизу. Однако, сейчас это необязательно. Действительно, энергия имеет вид

$$E = \int d\mathbf{x} \left(\frac{1}{2}(\dot{\varphi})^2 + \frac{1}{2}(\partial_i \varphi)^2 + \frac{m^2}{2}\varphi^2 + \frac{\lambda}{4!}\varphi^4 \right).$$

Из этого выражения видно, что чтобы энергия была ограничена, необходимо и достаточно, чтобы $\lambda > 0$, на m^2 при этом никаких ограничений не накладывается. Найдем наименьшее значение энергии, т.е. вакуум. Очевидно, что в вакууме поля должны быть постоянными, иначе первые два члена дадут положительный вклад. Поэтому вакуум определяется минимумом потенциала

$$V(\varphi) = \frac{m^2}{2}\varphi^2 + \frac{\lambda}{4!}\varphi^4.$$

Имеем

$$\frac{\partial V}{\partial \varphi} = \varphi \left(m^2 + \frac{\lambda}{3!}\varphi^2 \right) = 0. \quad (3.7)$$

Если $m^2 > 0$, то имеется единственное действительное решение этого уравнения $\varphi = 0$. Легко проверить, что это действительно минимум потенциала. Это случай обычной симметричной теории (и вакуум, и лагранжиан инвариантны относительно Z_2), и мы будем в основном рассматривать его в дальнейшем.

Рассмотрим теперь случай $m^2 < 0$. В этом случае уравнение (3.7) имеет три решения. Легко проверить, что решение $\varphi = 0$ является в этом случае максимумом потенциала. Два других решения определяют два минимума

$$\varphi = \pm \sqrt{\frac{-3!m^2}{\lambda}}$$

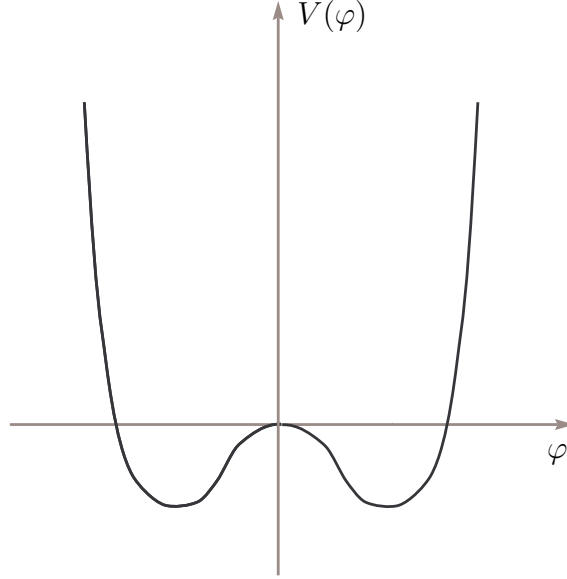


Рис. 3.1

На рис. 3.1 изображен вид потенциала в этом случае. Однако, для того чтобы построить квантовую теорию, нам необходимо выбрать один все равно какой минимум. Выберем положительный

$$v = \sqrt{\frac{-3!m^2}{\lambda}}.$$

Величина v называется *вакуумным ожиданием*. Из квантовой механики известно, что, вообще говоря, могут существовать переходы из одного минимума в другой и волновая функция наинизшего состояния не будет локализована в одном из минимумом. Здесь это, однако, не так. Вероятность переходов между двумя минимумами пропорциональна $\exp(-V)$, где V — объем, и стремится экспоненциально к нулю.

Выбрав положительный минимум мы нарушили Z_2 симметрию. Действительно, чтобы построить квантовую теорию, мы должны ввести новое поле — отклонение от минимума

$$\phi = \varphi - v.$$

Подставляя это выражение в лагранжиан, находим

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi)^2 - \frac{\mu^2}{2}\phi^2 - \frac{\lambda v}{3!}\phi^3 - \frac{\lambda}{4!}\phi^4,$$

¹Группа $SU(n)$ — группа унитарных матриц с единичным определителем размера $n \times n$.

где мы опустили несущественную константу, и $\mu = \sqrt{-2m^2} = v\sqrt{\lambda/3}$. Видим, что этот лагранжиан несимметричен относительно $\phi \rightarrow -\phi$, он описывает частицу с массой μ и с двумя членами самодействия. Единственным следом от Z_2 -симметрии является то, что три константы: масса, константа перед кубичным членом, и константа перед четвертой степенью, которые в общем случае независимы, теперь выражаются всего через два параметра: v и λ . Такое явление носит название *спонтанного нарушения симметрии*.

Задача 115 Рассмотрим лагранжиан (3.1) с $m^2 < 0$ в $(1+1)$ пространстве-времени. Найти статическое (не зависящее от времени) решение уравнений движения с граничными условиями $\varphi(x \rightarrow \pm\infty) \rightarrow \pm v$. Найти энергию поля на этом решении. Исследовать это решение на устойчивость по Ляпунову (т.е. относительно малых возмущений). Такое решение называется кинком.

Спонтанное нарушение непрерывной глобальной симметрии. Рассмотрим теперь модель комплексного скалярного поля с лагранжианом (3.3). В этом случае, также как и в случае действительного поля, ограниченность энергии снизу достигается условием $\lambda > 0$. На m^2 никаких условий не накладывается. Снова существует два случая. Если $m^2 > 0$, то минимум потенциала (3.3) достигается при $\varphi = 0$, т.е. вакуум симметричен относительно $U(1)$ фазовых вращений, и спонтанного нарушения не происходит. Рассмотрим случай $m^2 < 0$. Выделим в потенциале полный квадрат. Введем величину

$$v = \sqrt{\frac{-4m^2}{\lambda}}.$$

Тогда потенциал в (3.3) принимает вид

$$V(\varphi^* \varphi) = \frac{\lambda}{4} \left(|\varphi|^2 - \frac{v^2}{2} \right)^2, \quad (3.8)$$

где мы опустили несущественную константу $-m^4/\lambda$. Этот потенциал изображен на рис. 3.2. Легко отыскать минимум этого потенциала. В этом случае мы имеем непрерывный набор минимумов

$$\varphi = \frac{v}{\sqrt{2}} e^{i\alpha},$$

характеризуемых параметром α . Снова нам необходимо выбрать один минимум. Выберем при $\alpha = 0$, т.е. действительная и мнимая часть соответственно равны

$$\varphi_1^0 = v, \quad \varphi_2^0 = 0.$$

Изучим спектр малых возмущений относительно этого минимума. Т.е. найдем массы возмущений. Напишем

$$\varphi_1 = v + \chi, \quad \varphi_2 = \xi.$$

Подставим это разложение в потенциал (3.8) и найдем

$$V(\chi, \xi) = \frac{\lambda}{16} (2v\chi + \chi^2 + \xi^2)^2 \simeq \frac{\lambda v^2}{4} \chi^2,$$

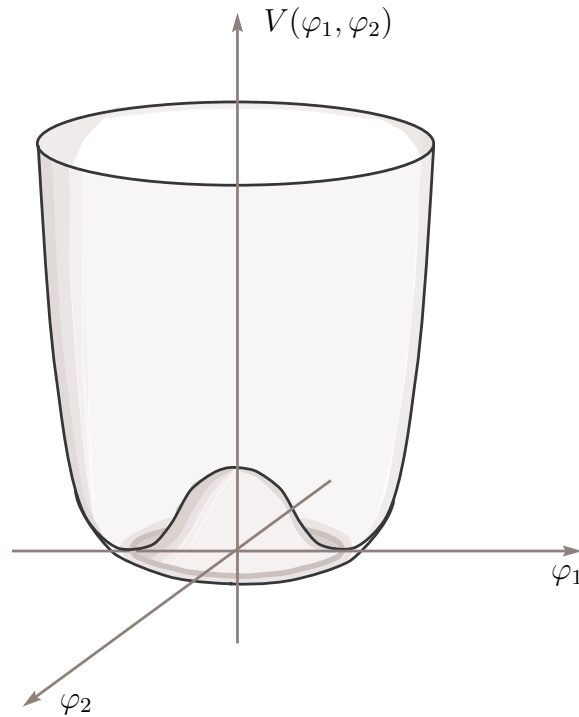


Рис. 3.2

где в последнем равенстве мы ограничились лишь квадратичными по полям членами. Видим, что поле χ приобретает массу $\mu = \sqrt{\lambda v^2/2}$, в то время как поле ξ остается безмассовым. Отсутствие массы у этого поля является следствием $U(1)$ симметрии. Действительно, масса поля определяется как вторая производная потенциала в соответствующем направлении. Поле ξ является отклонением вдоль минимумов потенциалов, и вследствие симметрии вторая производная равна нулю. Поле ξ называется *намбу-голдстоуновским бозоном*. Существует теорема, носящая название *теоремы Голдстоуна*, гласящая, что при спонтанном нарушении непрерывной глобальной симметрии, описываемой группой G до подгруппы H в теории возникают безмассовые голдстоуновские бозоны. Число этих бозонов равно числу *нарушенных генераторов* группы G , т.е. разности числа генераторов группы G и H . Эта теорема носит общий характер. Даже если в теории не было изначально скаляров, но некая симметрия спонтанно нарушится, то безмассовые скаляры появятся как связанные состояния. Так происходит, например, в теории сильных взаимодействий: в результате динамических эффектов киральная симметрия взаимодействия кварков и глюонов спонтанно нарушается, следствием этого является появление почти безмассовых пионов (ненулевая масса пионов объясняется тем, что в случае массивных кварков киральная симметрия является приближенной).

Задача 116 Выписать полный лагранжиан полей χ и ξ .

Задача 117 Показать, что в теории со спонтанным нарушением глобальной $U(1)$ не

существует устойчивого решения с конечной энергией, аналогичного тому, что было найдено в задаче 115.

Изучим теперь вопрос, что произойдет, если глобальную симметрию прокалбровать.

Спонтанное нарушение калибровочной симметрии. Рассмотрим лагранжиан скалярной электродинамики (3.5). Снова будем рассматривать случай $m^2 < 0$ и приведем потенциал к виду (3.8). Нахождение минимума энергии приводит к следующему результату: ЭМП в минимуме является чистой калибровкой и зависит от x , то же самое и для поля φ :

$$A_\mu^0 = \frac{1}{e} \partial_\mu \alpha(x), \quad \varphi^0 = \frac{v}{\sqrt{2}} e^{i\alpha(x)}. \quad (3.9)$$

Задача 118 Показать, что минимум энергии достигается на конфигурации (3.9).

Опять мы должны выбрать только один вакуум. Фиксируем $\alpha = 0$. Тогда

$$A_\mu^0 = 0, \quad \varphi^0 = \frac{v}{\sqrt{2}}.$$

Исследуем спектр малых возмущений относительно этого вакуума. Как и в предыдущем параграфе напомним

$$\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}}(v + \chi + i\xi), \quad (3.10)$$

и

$$A_\mu = A_\mu. \quad (3.11)$$

Потенциал в этом случае по сравнению со случаем глобальной симметрии не изменится. Мы по-прежнему увидим, что поле ξ не имеет массового члена, т.е. в случае глобальной симметрии оно являлось бы голдстоуновским бозоном. Кинетический член для калибровочного поля тоже останется прежним. Исследуем теперь член с длинной производной. Подставляя в (3.4) определения (3.10) и (3.11), находим, ограничиваясь только линейными по полям членами:

$$D_\mu \varphi = \frac{1}{\sqrt{2}}(\partial_\mu \chi + i\partial_\mu \xi - ievA_\mu).$$

Отсюда немедленно получаем квадратичный лагранжиан

$$\mathcal{L}_2 = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^2 + \frac{1}{2}(\partial_\mu \chi)^2 - \frac{\mu^2}{2}\chi^2 + \frac{e^2 v^2}{2} \left(A_\mu - \frac{1}{ev} \partial_\mu \xi \right)^2.$$

Этот лагранжиан недиагонален по полям: существует член $A_\mu \partial_\mu \xi$. Для того чтобы сделать его диагональным, введем новое поле

$$B_\mu = A_\mu - \frac{1}{ev} \partial_\mu \xi,$$

Тогда квадратичный лагранжиан примет вид:

$$\mathcal{L}_2 = -\frac{1}{4}B_{\mu\nu}^2 + \frac{e^2 v^2}{2}B_\mu^2 + \frac{1}{2}(\partial_\mu \chi)^2 - \frac{\mu^2}{2}\chi^2.$$

Видим, что поле ξ вообще исчезло из квадратичного лагранжиана, а калибровочное поле приобрело массу

$$m_v = ev .$$

Конечно, поле ξ не полностью исчезло из лагранжиана: сохранились члены взаимодействия этого поля с χ . Поле ξ не является физическим, так как не имеет кинетического члена. От членов взаимодействия можно избавиться (вообще говоря, нелинейными преобразованиями). Чтобы увидеть это, запишем возмущенное поле φ в другом виде

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}(v + \chi)e^{i\theta(x)} . \quad (3.12)$$

Это можно сделать, если $\varphi \neq 0$. Подставляя это поле в лагранжиан, видим, что после замены

$$B_\mu = A_\mu - \frac{1}{e}\partial_\mu\theta ,$$

полный лагранжиан вообще не содержит поля θ :

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}B_{\mu\nu}^2 + \frac{v^2 e^2}{2}B_\mu^2 + \frac{1}{2}(\partial_\mu\chi)^2 - \frac{\lambda}{16}((v + \chi)^2 - v^2)^2 .$$

Это легко понять, так как поле (3.12) является полем, полученным в результате калибровочного преобразования с функцией θ над полем $(v + \chi)/\sqrt{2}$. Можно было бы сразу, воспользовавшись калибровочной инвариантностью, фиксировать калибровку $\theta = 0$. Такая калибровка называется *унитарной*. Она удобна тем, что в ней лагранжиан содержит только физические степени свободы.

Выясним теперь вопрос, что происходит с калибровочной инвариантностью. Для полей χ , θ и A_μ мы имеем следующие законы калибровочных преобразований

$$\chi' = \chi , \quad \theta' = \theta + \alpha , \quad A'_\mu = A_\mu + \frac{1}{e}\partial_\mu\alpha .$$

Для новых полей имеем

$$\chi' = \chi , \quad B'_\mu = B_\mu ,$$

т.е. физические поля преобразуются тривиально. Лагранжиан по-прежнему инвариантен относительно таких преобразований. Калибровочная симметрия осталась ненарушенной, но стала реализовываться, как говорят, *нелинейно*. Несмотря на отсутствие нарушения калибровочной симметрии, явление, рассмотренное нами, носит название *спонтанное нарушение калибровочной симметрии* или *механизмом Хиггса*. При этом поле φ называют хиггсовским полем, а соответствующую возмущенному полю χ частицу — *хиггсовским бозоном*. Подчеркнем, что в результате «нарушения», калибровочное поле приобрело массу.

Рассмотрим еще вопрос, связанный с числом степеней свободы. До нарушения симметрии мы имели безмассовое фотонное поле с двумя степенями свободы и комплексное скалярное поле с двумя степенями свободы. Итого четыре степени свободы. После нарушения мы имеем массивное векторное поле — три степени свободы, и одно действительное скалярное поле — одна степень свободы. Итого снова четыре. При этом степени свободы

перераспределились: степень свободы, связанная с безмассовым голдстоуном поглотилась векторным полем. Говорят, что векторное поле съело безмассовый голдстоуновский бозон и приобрело массу.

Явление, описанное нами здесь, проявляется в выталкивании магнитного поля из сверхпроводника — эффект Мейснера. В этом случае конденсат куперовских пар нарушает калибровочную группу $U(1)$ в сверхпроводнике, ЭМП приобретает массу и не проникает в глубь проводника (точнее глубина проникновения порядка обратной массы фотона).

Кроме того, как мы уже упоминали, в стандартной модели существует три массивных калибровочных векторных бозона. Чтобы эти калибровочные поля приобрели массу, необходимо спонтанно нарушить калибровочную $SU(2) \times U(1)$ группу до $U(1)$ группы. Это достигается с помощью введения хиггсовского дублета (поля, преобразующегося по фундаментальному представлению группы $SU(2)$), который приобретает ненулевое вакуумное среднее и нарушает калибровочную группу до $U(1)$ — группы электромагнетизма.

На этом закончим наше полуклассическое рассмотрение взаимодействующих полей и перейдем к построению квантовой теории.

3.2 Матрица рассеяния

Представление взаимодействия. В квантовой механике, рассматривая задачи взаимодействия, обычно исходят из уравнения Шредингера

$$i \frac{\partial \psi}{\partial t} = H \psi(t), \quad (3.13)$$

при этом гамильтониан разбивается на две части $H = H_0 + H_1$, где H_0 — гамильтониан свободного движения, а H_1 — гамильтониан взаимодействия. Гамильтониан H_0 выбирается таким образом, чтобы уравнение Шредингера с таким гамильтонианом представляло собой точно решаемую задачу, и гамильтониан H_1 был мал по сравнению с H_0 . После этого решение уравнения Шредингера (3.13) можно искать по теории возмущений. В теории поля такая программа встречает ряд трудностей, основной из которых является выделение гамильтониана свободного движения. Дело в том, что гамильтониан свободного движения должен описывать движение свободной частицы. Однако, если есть хоть какое-нибудь взаимодействие, свободной частицы уже не существует. Даже при отсутствии других частиц «свободная» частица взаимодействует с вакуумом. С другой стороны, ничего лучшего, чем теория возмущений, обычно предложить не удастся. Поэтому будем считать, что мы можем разбить гамильтониан в теории поля на свободную часть и часть, характеризующую взаимодействие. Будем считать, что гамильтониан взаимодействия H_1 характеризуется малым параметром α (например, $\alpha = e^2/(4\pi)$ в квантовой электродинамике). Будем также предполагать, что, во-первых, существует предел слабой связи $\alpha \rightarrow 0$ у физических решений. Такие решения будем называть *адиабатическими*. Во-вторых, будем предполагать аналитичность или слабую неаналитичность у адиабатических решений.

Итак, пусть $H = H_0 + H_1$. Изменение свободной системы во времени описывается

свободным уравнением Шредингера (см. Главу 2)

$$i \frac{\partial \Psi}{\partial t} = H_0 \Psi(t) , \quad (3.14)$$

где Ψ — амплитуда состояния. Решение уравнения (3.14) можно формально проинтегрировать

$$\Psi(t) = e^{-iH_0 t} \Phi , \quad (3.15)$$

где Φ — постоянная амплитуда. Решение (3.15) не удовлетворяет уравнению Шредингера с включенным взаимодействием. Однако, решение уравнения Шредингера с включенным взаимодействием удобно искать в виде (3.15), считая, что Φ зависит от времени. Подставляя (3.15) с зависящей от времени амплитудой Φ в уравнение Шредингера с включенным взаимодействием, получаем уравнение на функцию $\Phi(t)$:

$$i \frac{\partial \Phi(t)}{\partial t} = e^{iH_0 t} H_1 e^{-iH_0 t} \Phi(t) . \quad (3.16)$$

Обсудим смысл полученного уравнения. Гамильтониан взаимодействия имеет вид

$$H_1 = \int d\mathbf{x} \mathcal{H}_1(\mathbf{x}) .$$

Плотность гамильтониана $\mathcal{H}_1(\mathbf{x})$ выражается через произведение полей, поэтому можно написать

$$\begin{aligned} e^{iH_0 t} \mathcal{H}_1(\mathbf{x}) e^{-iH_0 t} &\simeq e^{iH_0 t} u_{\alpha_1}(\mathbf{x}) \dots u_{\alpha_i}(\mathbf{x}) e^{-iH_0 t} = e^{iH_0 t} u_{\alpha_1}(x) \dots u_{\alpha_i}(x) e^{-iH_0 t} \Big|_{x_0=0} = \\ &e^{iH_0 t} u_{\alpha_1}(x) e^{-iH_0 t} \dots e^{iH_0 t} u_{\alpha_i}(x) e^{-iH_0 t} \Big|_{x_0=0} \stackrel{(2.11)}{=} u_{\alpha_1}(x) \dots u_{\alpha_i}(x) \simeq \mathcal{H}_1(x) , \end{aligned}$$

где в последних двух равенствах поля $u(x)$ — это поля, а $\mathcal{H}_1(x)$ — гамильтонова плотность взаимодействия в представлении Гейзенберга относительно свободного гамильтониана. Уравнение (3.16) можно представить теперь в виде

$$i \frac{\partial \Phi(t)}{\partial t} = H_1(t) \Phi(t) , \quad (3.17)$$

где

$$H_1(t) = \int d\mathbf{x} \mathcal{H}_1(t, \mathbf{x}) = \int d\mathbf{x} \mathcal{H}_1(x) .$$

Представление, в котором уравнение Шредингера имеет вид (3.17) называется *представлением взаимодействия*.

Рассмотрим среднее от произвольного оператора:

$$\bar{B}_t = \Psi^*(t) B \Psi(t) = \Phi^*(t) e^{iH_0 t} B e^{-iH_0 t} \Phi(t) = \Phi^*(t) B_{\text{вз}} \Phi(t),$$

где

$$B_{\text{вз}} \equiv e^{iH_0 t} B e^{-iH_0 t} ,$$

— произвольный оператор в представлении взаимодействия. Таким образом, в представлении взаимодействия все операторы должны рассматриваться как функции операторов поля в представлении Гейзенберга для свободных полей, т.е. удовлетворяющих свободным уравнениям движения.

Матрица рассеяния. Обычно задача в теории поля ставится следующим образом: Пусть в отдаленном прошлом все частицы находились далеко друг от друга и не взаимодействовали. Состояние системы описывалось амплитудой $\Phi(-\infty)$. Требуется найти вероятность, что в отдаленном будущем система будет также состоять из отдаленных частиц и описываться амплитудой $\Phi(\infty)$. Такая задача называется задачей рассеяния. Ее математическая формулировка заключается в следующем: Пусть адиабатически

$$H_1(t) \xrightarrow{t \rightarrow \pm\infty} 0 .$$

Решая уравнение Шредингера

$$i \frac{\partial \Phi(t)}{\partial t} = H_1(t) \Phi(t) , \quad (3.18)$$

требуется найти такой оператор S , что

$$\Phi(\infty) = S \Phi(-\infty) .$$

Такой оператор характеризуется своими матричными элементами

$$S_{\alpha\beta} = \langle \alpha | S | \beta \rangle ,$$

и называется *S-матрицей* или *матрицей рассеяния*. Заметим сразу, что требование T -инвариантности приводит к условию на S -матрицу

$$S_{\alpha\beta} = S_{T\beta, T\alpha} .$$

Оператор S -матрицы легко построить, решая уравнение (3.18). Действительно, рассмотрим переходы не между бесконечно удаленным прошлым и бесконечно удаленным будущим, а между моментом t_0 и t . Тогда

$$\Phi(t) = S(t, t_0) \Phi(t_0) .$$

Подставляя это выражение в (3.18), находим, что $S(t, t_0)$ удовлетворяет следующему операторному уравнению

$$i \frac{\partial S(t, t_0)}{\partial t} = H_1(t) S(t, t_0) , \quad S(t_0, t_0) = 1 .$$

Считая, что H_1 мало, можно найти решение этого уравнения в виде ряда теории возмущений

$$\begin{aligned} S(t, t_0) = & 1 - i \int_{t_0}^t H_1(t') dt' + (-i)^2 \int_{t_0}^t H_1(t') dt' \int_{t_0}^{t'} H_1(t'') dt'' + \dots + \\ & (-i)^n \int_{t_0}^t H_1(t_1) dt_1 \int_{t_0}^{t_1} H_1(t_2) dt_2 \dots \int_{t_0}^{t_{n-1}} H_1(t_n) dt_n + \dots . \end{aligned} \quad (3.19)$$

Задача 119 Получить формулу (3.19).

Рассмотрим второй член в формуле (3.19):

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^t H_1(t') dt' \int_{t_0}^{t'} H_1(t'') dt'' &= \int_{t_0}^t H_1(t') H_1(t'') \theta(t' - t'') dt' dt'' = \\ \frac{1}{2} \int_{t_0}^t dt' dt'' \{ &H_1(t') H_1(t'') \theta(t' - t'') + H_1(t'') H_1(t') \theta(t'' - t') \} \equiv \\ \frac{1}{2} \int_{t_0}^t dt_1 dt_2 T \{ &H_1(t_1) H_1(t_2) \} , \end{aligned}$$

где мы ввели символ *хронологического произведения*:

$$T \{ H_1(t_1) H_1(t_2) \} \equiv \begin{cases} H_1(t_1) H_1(t_2) & t_1 > t_2 , \\ H_1(t_2) H_1(t_1) & t_2 > t_1 . \end{cases}$$

Аналогично, общий член в правой части (3.19) может быть преобразован к виду

$$\frac{(-i)^n}{n!} \int_{t_0}^t dt_1 \dots \int_{t_0}^t dt_n T \{ H_1(t_1) \dots H_1(t_n) \} ,$$

где символ $T \{ H_1(t_1) \dots H_1(t_n) \}$ для любого взаимного расположения временных аргументов равен произведению гамильтонианов в порядке невозрастания аргументов слева направо:

$$T \{ H_1(t_1) \dots H_1(t_n) \} = H_1(t_a) H_1(t_b) \dots H_1(t_r), \quad t_a \geq t_b \geq \dots \geq t_r .$$

Представляя каждый член в правой части (3.19) с помощью T -произведения и вынося (формально) символ T из-под знаков интегрирования, получаем

$$\begin{aligned} S(t, t_0) = T \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n!} \left(\int_{t_0}^t H_1(t') dt' \right)^n \right\} &= T \left\{ \exp \left(-i \int_{t_0}^t H_1(t') dt' \right) \right\} = \\ T \left\{ \exp \left(-i \int_{t_0}^t dt' \int d\mathbf{x} \mathcal{H}_1(t', \mathbf{x}) \right) \right\} . \end{aligned} \quad (3.20)$$

К этой формуле мы вернемся чуть позже, а сейчас изучим свойства хронологического произведения.

Хронологическое произведение. Определим хронологическое произведение n операторов поля $u_1(x_1), \dots, u_n(x_n)$ как произведение этих операторов в порядке, соответствующем невозрастанию временных аргументов слева направо, с учетом общего знака, который может меняться в случае, если часть полей квантована по Ферми-Дираку. Это определение не вполне корректно. Дело в том, что временная последовательность двух точек x_i, x_j не является релятивистски инвариантным в случае, если эти точки пространственно подобны $x_i \sim x_j$. Поэтому определение хронологического произведения будет лоренц-инвариантным, если операторы (анти)коммутируют вне светового конуса:

$$u_i(x_i)u_j(x_j) = \pm u_j(x_j)u_i(x_i), \quad x_i \sim x_j,$$

такие операторы мы будем называть *локальными*.

Задача 120 Показать, что операторы поля являются локальными операторами, а их частотные части нет.

Итак, по определению для локальных операторов

$$T \{u_1(x_1) \dots u_n(x_n)\} = (-1)^p u_{i_1}(x_{i_1}) u_{i_2}(x_{i_2}) \dots u_{i_n}(x_{i_n}),$$

$$x_{i_1} \gtrsim x_{i_2} \gtrsim \dots \gtrsim x_{i_n}. \quad (3.21)$$

Здесь символ $x \gtrsim y$ означает, что точка x лежит в верхнем световом конусе точки y или пространственноподобно ей, а p — четность перестановки ферми-операторов при переходе от порядка $(1, 2, \dots, n)$ к порядку (i_1, i_2, \dots, i_n) .

Теперь можно рассмотреть хронологическое произведение локальных операторных выражений $A_1(x_1), \dots, A_n(x_n)$

$$T \{A_1(x_1) \dots A_n(x_n)\} = (-1)^p A_{i_1}(x_{i_1}) A_{i_2}(x_{i_2}) \dots A_{i_n}(x_{i_n}),$$

$$x_{i_1} \gtrsim x_{i_2} \gtrsim \dots \gtrsim x_{i_n}. \quad (3.22)$$

При этом локальным операторным выражением $A(x)$ относительно поля $u(x)$ называется операторное выражение, зависящее от полей и их производных в целом и (анти)коммутирующее с оператором поля при пространственноподобных аргументах

$$\{A(x), u(y)\}_{\pm} = 0, \quad x \sim y.$$

Из определения локальных операторных выражений следуют, что такие операторы (анти)коммутируют при пространственноподобных аргументах

$$\{A_i(x), A_j(y)\}_{\pm} = 0, \quad x \sim y, \quad (3.23)$$

вследствие чего определение (3.22) непротиворечиво.

Отметим, что (анти)коммутаторы типа (3.23) обычно имеют сингулярности при $x = y$. Поэтому хронологические произведения (3.21), (3.22) оказываются неопределенным при совпадающих аргументах. Этой неопределенностью можно воспользоваться по-разному.

Хронологическая экспонента. Вернемся теперь к S -матрице. Заметим во-первых, что если лагранжиан взаимодействия не содержит производных от полей, то $\mathcal{H}_1(t, \mathbf{x}) = -\mathcal{L}_{\text{int}}(x)$. Воспользуемся этим свойством и устремим в выражении (3.20) $t \rightarrow \infty$, $t_0 \rightarrow -\infty$. Тогда

$$S = T \exp \left(i \int dx \mathcal{L}_{\text{int}}(x) \right) = T e^{i S_{\text{int}}} , \quad (3.24)$$

где S_{int} — действие взаимодействия.

Заметим здесь, что запись (3.24) несколько условна. Если ее трактовать, так, как она записана, то можно опустить знак T -произведения, так как экспонента не зависит от времени. Правильно эту запись нужно трактовать также, как и формулу (3.20), т.е. разложить экспоненту в ряд и внести знак T -произведения под интегралы.

Отметим еще, что если лагранжиан взаимодействия содержит производные от полей, то все равно формула (3.24) остается справедливой. Фактически, различие в формулах (3.20) и (3.24) сводится в этом случае к доопределению T -произведения. Мы не будем останавливаться на этом. Скажем только, что формулу (3.24) для S -матрицы можно получить также исходя из общих требований, предъявляемых к S -матрице, и не опираться на уравнение Шредингера. Такой подход называется *аксиоматическим*.

Общие свойства S -матрицы. Как мы только что сказали, S -матрица может быть построена без обращения к уравнению Шредингера. При этом построение опирается на явно сформулированные физические условия:

1. причинности,
2. унитарности,
3. релятивистской ковариантности,
4. принцип соответствия.

Для того чтобы придать этим условиям математическое выражение, обычно вводят понятие о «включенном взаимодействии». А именно, заменяют лагранжиан взаимодействия на лагранжиан с «включенным взаимодействием»

$$\mathcal{L}_{\text{int}} \rightarrow g(x) \mathcal{L}_{\text{int}} ,$$

$$0 \leq g(x) \leq 1 .$$

Функция $g(x)$ характеризует степень включения взаимодействия, при этом предполагают что на бесконечности взаимодействие выключено:

$$g(x) \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad x \rightarrow \infty .$$

Таким образом, состояния характеризуются обычными постоянными векторами состояний:

$$\Phi(-\infty) = \Phi , \quad \Phi(\infty) = \Phi(g) = S(g) \Phi .$$

Реальная физическая ситуация включенного полностью взаимодействия воспроизводится в результате предельного перехода:

$$\Phi = \lim_{g \rightarrow 1} \Phi(g) , \quad S(1) = \lim_{g \rightarrow 1} S(g) .$$

Мы не будем здесь давать вывод математических выражений сформулированных физических условий. Приведем лишь конечные результаты.

1. Причинность:

$$\frac{\delta}{\delta g(x)} \left(\frac{\delta S(g)}{\delta g(y)} S^\dagger(g) \right) = 0 \quad \text{при } x \lesssim y .$$

2. Унитарность:

$$\Phi^* \Phi = \Phi^*(g) \Phi(g) \Rightarrow S^\dagger(g) S(g) = 1 .$$

3. Релятивистская ковариантность:

$$x \rightarrow x' = Lx , \quad \Lambda g = g(L^{-1}x) , \quad \Phi' = U\Phi \Rightarrow \\ S(\Lambda g) = U S U^\dagger .$$

4. Принцип соответствия:

$$S = 1 + \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n!} \int S_n(x_1, \dots, x_n) g(x_1) \dots g(x_n) dx_1 \dots dx_n ,$$

$$S_1(x) = i\mathcal{L}(x) .$$

Как результат, S -матрица по-прежнему дается выражением (3.24), однако к лагранжиану взаимодействия можно добавить цепочку *квазилокальных* эрмитовых операторов $\Lambda_n(x, x_1, \dots, x_{n-1})$:

$$\mathcal{L}_{\text{int}}(x) \mapsto \mathcal{L}_{\text{int}} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)!} \int \Lambda_{n+1}(x, x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n .$$

Квазилокальным оператором называется оператор, отличный от нуля только, если все его аргументы совпадают. Такой произвол в построении S -матрицы фактически сводится к произволу в выборе параметризации теории.

3.3 Теоремы Вика

Для того чтобы уметь вычислять матричные элементы от произведений операторов необходимо научиться приводить эти произведения к нормальной форме. Действительно, в силу того, что вакуумное ожидание от нормального произведения равно нулю, вычисление матричных элементов после приведения к нормальной форме становится тривиальной задачей.

Итак, в этом разделе исследуем приведение к нормальной форме произведение операторов вида $A_1(x_1) \dots A_n(x_n)$, где операторы A являются линейной комбинацией положительно и отрицательно частотных частей полевых операторов. Рассмотрим сперва произведение двух операторов:

$$A(x)B(y) \equiv :A(x)B(y): + \underbrace{A(x)B(y)} .$$

При этом, в силу того, что коммутаторы полей являются C -числами, выражение

$$\underbrace{A(x)B(y)}$$

является C -числом. Это выражение называется нормальным спариванием двух операторов. Имеем

$$\langle 0|A(x)B(y)|0\rangle = \underbrace{A(x)B(y)} .$$

Приведем несколько примеров. Для скалярного поля имеем

$$\varphi(x)\varphi(y) = : \varphi(x)\varphi(y) : - iD^-(x-y) .$$

Поэтому

$$\underbrace{\varphi(x)\varphi(y)} = \underbrace{\varphi^-(x)\varphi^+(y)} = -iD^-(x-y) ; \quad \underbrace{\varphi^+(x)\varphi^-(y)} = 0 .$$

Аналогично для электромагнитного и спинорного полей:

$$\underbrace{A_\nu(x)A_\mu(y)} = ig_{\nu\mu}D_0^-(x-y) ,$$

$$\underbrace{\psi_\alpha(x)\bar{\psi}_\beta(y)} = -iS_{\alpha\beta}^-(x-y) ,$$

$$\underbrace{\bar{\psi}_\alpha(x)\psi_\beta(y)} = -iS_{\beta\alpha}^+(y-x) ,$$

$$\underbrace{\psi_\alpha(x)\psi_\beta(y)} = \underbrace{\bar{\psi}_\alpha(x)\bar{\psi}_\beta(y)} = 0 .$$

Определим теперь *нормальное произведение со спариванием*. Имеем по определению:

$$:A_1 \dots \underbrace{A_i \dots A_j} \dots A_n: \equiv \eta \underbrace{A_i A_j} :A_1 \dots A_{i-1} A_{i+1} \dots A_{j-1} A_{j+1} \dots A_n: ,$$

и аналогично с несколькими спариваниями. Здесь и далее в этом разделе η — четность перестановки ферми-операторов.

Ответ на поставленный в начале раздела вопрос дает

Первая теорема Вика. Обычное произведение линейных операторов равно сумме всевозможных нормальных произведений этих операторов со всевозможными спариваниями:

$$A_1 \dots A_n = :A_1 \dots A_n: + \sum_{i \neq j} :A_1 \dots \underbrace{A_i \dots A_j} \dots A_n: +$$

$$+ \sum_{i,j,k,l} :A_1 \dots \underbrace{A_i \dots A_j}_{\text{}} \dots \underbrace{A_k \dots A_l}_{\text{}} \dots A_n : + \dots$$

Рассмотрим теперь произведение двух нормальных произведений:

$$:A_1 \dots A_j : :A_{j+1} \dots A_i : \dots$$

Произведения такого вида также надо уметь приводить к нормальной форме. Очевидно, что к произведениям такого вида применима первая теорема Вика, однако при этом не надо включать спаривания операторов, стоящих под знаком нормального произведения, или, другими словами, нужно принимать во внимание только спаривания операторов, принадлежащих к разным группам.

Сделаем еще одно важное замечание. Поскольку поля в координатном представлении являются линейными комбинациями операторов рождения и уничтожения $a_\sigma^\pm(\mathbf{k})$ (интегралами Фурье), и, наоборот, операторы рождения и уничтожения являются линейными комбинациями полей (см., например, формулу (1.64)), то теорема Вика применима к произведениям, содержащим в качестве сомножителей операторы $a_\sigma^\pm(\mathbf{k})$.

Задача 121 Найти нормальное спаривание операторов рождения и уничтожения и нормальное спаривание операторов рождения (уничтожения) и операторов поля.

Рассмотрим теперь T -произведение двух полевых операторов

$$T(u_1(x)u_2(y)) = \begin{cases} u_1(x)u_2(y) = :u_1(x)u_2(y): + \overbrace{u_1(x)u_2(y)} & x^0 > y^0 \\ \eta u_2(y)u_1(x) = :u_1(x)u_2(y): + \overbrace{\eta u_2(y)u_1(x)} & x^0 < y^0 \end{cases}.$$

Таким образом

$$T(u_1(x)u_2(y)) = :u_1(x)u_2(y): + \overbrace{u_1(x)u_2(y)},$$

где

$$\overbrace{u_1(x)u_2(y)} \equiv \begin{cases} \overbrace{u_1(x)u_2(y)} & x^0 > y^0 \\ \overbrace{\eta u_2(y)u_1(x)} & x^0 < y^0 \end{cases}$$

хронологическое спаривание. Из этого определения следуют очевидные свойства:

$$\langle T(u_1(x)u_2(y)) \rangle_0 = \overbrace{u_1(x)u_2(y)},$$

$$\overbrace{u_1(x)u_2(y)} = \overbrace{\eta u_2(y)u_1(x)}.$$

Для скалярного, электромагнитного и спинорного полей имеем соответственно:

$$i \overbrace{\varphi(x)\varphi(y)} = i \langle T(\varphi(x)\varphi(y)) \rangle_0 = \theta(x_0 - y_0) D^-(x - y) - \theta(y_0 - x_0) D^+(x - y), \quad (3.25)$$

$$i \overbrace{A_\nu(x)A_\mu(y)} = i \langle T(A_\nu(x)A_\mu(y)) \rangle_0 = -g_{\nu\mu} \theta(x_0 - y_0) D_0^-(x - y) + g_{\nu\mu} \theta(y_0 - x_0) D_0^+(x - y), \quad (3.26)$$

$$i \overline{\psi_\alpha(x)} \bar{\psi}_\beta(y) = i \langle T(\psi_\alpha(x) \bar{\psi}_\beta(y)) \rangle_0 = \theta(x_0 - y_0) S_{\alpha\beta}^-(x - y) - \theta(y_0 - x_0) S_{\alpha\beta}^+(x - y). \quad (3.27)$$

Заметим, что как и T -произведение, хронологическое спаривание не определено при совпадающих временных аргументах.

Задача 122 Получить формулы (3.25), (3.26), (3.27).

Аналогично нормальному произведению со спариванием определим нормальное произведение с хронологическим спариванием:

$$: A_1 \dots A_j \dots \overline{A_i} \dots A_n : \equiv \eta \overline{A_j A_i} : A_1 \dots A_{j-1} A_{j+1} \dots A_{i-1} A_{i+1} \dots A_n :.$$

Справедлива

Вторая теорема Вика. T -произведение n линейных операторов равно сумме их нормальных произведений со всевозможными хронологическими спариваниями.

Аналогично случаю с обычным произведением, если под знаком T -произведения стоит несколько нормальных произведений (как, например, для n -ого элемента S -матрицы), то нужно хронологически спаривать лишь операторы, принадлежащие к разным группам.

Рассмотрим теперь вакуумное среднее от T -произведения $n + 1$ операторов. Имеет место

Третья теорема Вика. Вакуумное среднее от T произведения равно сумме вакуумных средних от хронологических произведений с одним спаренным оператором

$$\langle T(AB_1 \dots B_n) \rangle_0 = \sum_{i=1}^n \langle T(\overline{AB_1 \dots B_i} \dots B_n) \rangle_0.$$

Итак, мы видим, что любое T -произведение линейных операторов сводится к сумме произведений спариваний полевых операторов (см. (3.25), (3.26), (3.27)) на операторы, приведенные к нормальной форме. Таким образом, основным элементом, необходимым при вычислении матричных элементов, является хронологическое спаривание полевых операторов. К изучению этих хронологических спариваний мы и переходим.

Задача 123 Пусть $\mathcal{L}(x)$ – лагранжиан взаимодействия, записанный в виде обычного произведения, а $:\mathcal{L}(x):$ – тот же лагранжиан, но записанный в виде нормального произведения. Для всех лагранжианов взаимодействия, приведенных в разделе 3.1, привести к нормальной форме $T(\mathcal{L}(x))$, $T(:\mathcal{L}(x)::\mathcal{L}(y):)$, $T(\mathcal{L}(x)\mathcal{L}(y))$.

Задача 124 Используя теоремы Вика, вычислить следующие матричные элементы,

$$\langle 0 | a^-(\mathbf{p}_1) a^-(\mathbf{p}_2) \cdot i \int dx T \left(-\frac{\lambda}{4!} : \varphi^4 : \right) a^+(\mathbf{k}_1) a^+(\mathbf{k}_2) | 0 \rangle,$$

$$\langle 0 | \bar{a}^*(\mathbf{p}_1) a^-(\mathbf{p}_2) \cdot i \int dx T (ie : B^\mu (\varphi^* \cdot \partial_\mu \varphi - \partial_\mu \varphi^* \cdot \varphi) :) b_\sigma^+(\mathbf{k}_1) | 0 \rangle,$$

$$\langle 0 | \bar{c}_{\sigma,\alpha}^*(\mathbf{p}_1) c_{\rho,\beta}^-(\mathbf{p}_2) \cdot i \int dx T (ig : \bar{\psi}_\delta \gamma_5 \tau_j^{\delta\gamma} \varphi_j \psi_\gamma :) a_i^+(\mathbf{k}_1) | 0 \rangle,$$

где a, b, c – операторы, соответствующие скалярному (φ), массивному векторному (B^μ) и спинорному (ψ) полю, греческие индексы из середины алфавита нумеруют поляризации, греческие индексы из начала алфавита являются изотопическими, τ_i – матрицы Паули. Каким процессам соответствуют эти матричные элементы? При каких условиях на импульсы и массы частиц они отличны от нуля?

3.4 Функции Грина свободных полей

Рассмотрим неоднородное уравнение Клейна-Гордона

$$(\partial^2 + m^2)\varphi_j(x) = j(x) , \quad (3.28)$$

где $j(x)$ — фиксированная функция координат, которая называется источником.

Задача 125 Построить действие, из которого следует уравнение (3.28).

Из теории дифференциальных уравнений хорошо известно, что решение уравнения (3.28) может быть найдено в виде

$$\varphi_j(x) = \varphi_0(x) + \int dy G(x-y)j(y) , \quad (3.29)$$

где $\varphi_0(x)$ — решение свободного (однородного) уравнения Клейна-Гордона, а $G(x-y)$ — функция Грина уравнения Клейна-Гордона, удовлетворяющая уравнению

$$(\partial^2 + m^2)G(x) = \delta(x) . \quad (3.30)$$

Действительно, подставляя (3.29) в (3.28) и учитывая (3.30), убеждаемся, что (3.29) является решением. При этом решение однородного уравнения $\varphi_0(x)$ подбирается таким образом, чтобы (3.29) удовлетворяло заданным граничным условиям.

Таким образом, решение неоднородного уравнения полностью определяется функцией Грина. Нашей ближайшей задачей является построение такой функции для оператора Клейна-Гордона, т.е. решение уравнения (3.30). С этой целью сделаем Фурье-преобразование обеих частей уравнения (3.30). Имеем

$$(-k^2 + m^2)G(k) = 1 , \quad (3.31)$$

и

$$G(x) = -\frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4k \frac{e^{-ikx}}{k^2 - m^2} \quad (3.32)$$

Однако это выражение недоопределено — не заданы правила обхода полюсов подынтегрального выражения. Причина этого кроется в том, что мы не задали никаких граничных условий для уравнения (3.30).

Для того чтобы фиксировать граничные условия, рассмотрим следующую ситуацию. В бесконечно удаленном прошлом отсутствуют все поля, в момент времени $t = 0$ в точке

$\mathbf{x} = 0$ включается и выключается дельтообразный источник, после этого от источника начинает распространяться волна. Очевидно, что эта физическая ситуация описывается функцией Грина, которая равна 0 при отрицательных временах. Такая функция называется запаздывающей (фр. *retarde*) и удовлетворяет граничному условию

$$G^{\text{ret}}(x) = 0 \quad \text{при } x^0 < 0 .$$

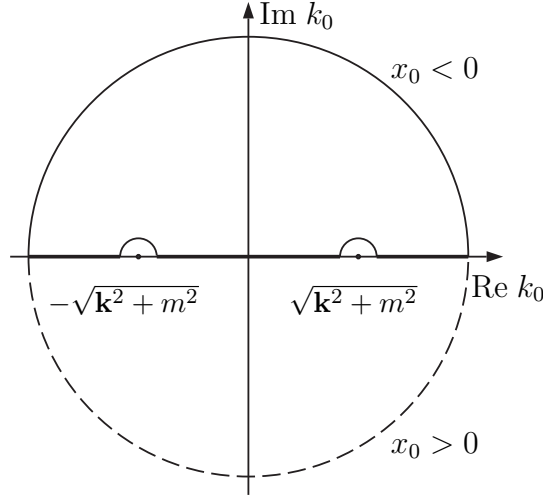


Рис. 3.3 Контуры интегрирования в (3.33) при $x_0 > 0$ (штрихованная полуокружность) и $x_0 < 0$ (непрерывная полуокружность)

Выясним, как надо обходить полюса в интеграле (3.32), чтобы получить запаздывающую функцию Грина. Будем сперва интегрировать по k_0 . Воспользуемся теорией вычетов и распространим интеграл на комплексную плоскость k_0 (см. рис. 3.3). В случае положительных x_0 мы можем замкнуть контур интегрирования в нижней полуплоскости — в этом случае мы имеем под интегралом падающую экспоненту $e^{-|\text{Im} k_0| x_0}$, и интеграл по бесконечноудаленной полуокружности будет равен нулю в силу леммы Жордана. В случае отрицательных x_0 мы можем замкнуть в верхней полуплоскости. Поскольку в этом случае мы должны получить ноль, то, согласно теории вычетов, внутри контура не должно существовать полюсов. Однако, существует два полюса подынтегрального выражения при каждом фиксированном \mathbf{k} :

$$k_0^{\pm} = \pm \sqrt{\mathbf{k}^2 + m^2} .$$

Таким образом, в этом случае мы должны обойти оба полюса сверху. Это можно формализовать, если в интеграле (3.32) заменить

$$\frac{1}{k^2 - m^2} \rightarrow \frac{1}{k^2 - m^2 + i\epsilon \cdot \varepsilon(k^0)} \Big|_{\epsilon \rightarrow +0} ,$$

где ϵ — бесконечно малая положительная величина, а $\varepsilon(k^0) = \theta(k^0) - \theta(-k^0)$. Действительно, в этом случае полюса будут находиться в точках

$$k_0^\pm = \pm \sqrt{\mathbf{k}^2 + m^2 - i\epsilon \cdot \varepsilon(k^0)} \stackrel{\epsilon \rightarrow 0}{\rightleftharpoons} \pm \sqrt{\mathbf{k}^2 + m^2} - i\epsilon ,$$

т.е. ниже действительной оси.

Пользуясь произвольностью ϵ , интеграл для запаздывающей функции обычно записывают в виде

$$G^{\text{ret}}(x) = -\frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4k \frac{e^{-ikx}}{k^2 - m^2 + 2i\epsilon k^0} . \quad (3.33)$$

Проинтегрируем теперь это выражение по k_0 при $x_0 > 0$. Имеем

$$\begin{aligned} G^{\text{ret}} &= -\frac{1}{(2\pi)^4} \int dk^0 d\mathbf{k} \frac{e^{-ik_0 x_0 + i\mathbf{k}\mathbf{x}}}{k_0^2 - k_0^+} = -\frac{1}{(2\pi)^4} \int dk^0 d\mathbf{k} \frac{e^{-ik_0 x_0 + i\mathbf{k}\mathbf{x}}}{2k_0^+} \left(\frac{1}{k_0 - k_0^+} - \frac{1}{k_0 + k_0^+} \right) = \\ &= \frac{i}{(2\pi)^3} \int \frac{e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}}}{2k_0^+} (e^{-ik_0^+ x_0} - e^{ik_0^+ x_0}) d\mathbf{k} \stackrel{\mathbf{k} \rightarrow -\mathbf{k}}{=} \frac{1}{(2\pi)^3 i} \int \frac{e^{-i\mathbf{k}\mathbf{x}}}{2k_0^+} (e^{ik_0^+ x_0} - e^{-ik_0^+ x_0}) d\mathbf{k} = D(x) , \end{aligned}$$

где последнее равенство следует из определения функции Паули-Йордана (2.47) (см. задачу 85).

Таким образом,

$$G^{\text{ret}}(x) = \theta(x^0) D(x) .$$

Аналогично можно построить опережающую функцию Грина, равную нулю при $x^0 > 0$:

$$G^{\text{adv}} = -\frac{1}{(2\pi)^4} \int dk \frac{e^{-ikx}}{k^2 - m^2 - 2i\epsilon k_0} = -\theta(-x^0) D(x) .$$

Запаздывающая функция Грина имеет широкое применение в классической теории излучения. Опережающая функция описывает процессы, обращенные во времени, поэтому она не имеет столь широкого применения. Сейчас мы построим функцию Грина, которая не имеет классической интерпретации, но зато необходима в квантовой теории поля.

Причинная функция Грина. Причинная функция $G^c(x - y)$ (фр. causal) описывает причинную связь процессов рождения и уничтожения частиц в различных точках. Рассмотрим процесс рождения частицы в точке x и уничтожения ее в точке y . Очевидно, что при этом $y_0 > x_0$. Такой процесс описывается матричным элементом

$$\Phi_1^*(y) \Phi_1(x) = \langle 0 | \varphi^-(y) \varphi^+(x) | 0 \rangle = -iD^-(y - x) = iD^+(x - y) .$$

Аналогично для процесса рождения в y и уничтожения в x при $x^0 > y^0$ имеем

$$\Phi_1^*(x) \Phi_1(y) = \langle 0 | \varphi^-(x) \varphi^+(y) | 0 \rangle = -iD^-(x - y) = iD^+(y - x) .$$

Эти два выражения можно объединить в одно, написав

$$G^c(x-y) \equiv i\langle 1|1\rangle = i(\theta(y^0 - x^0)\Phi_1^*(y)\Phi_1(x) + \theta(x^0 - y^0)\Phi_1^*(x)\Phi_1(y)) = i\langle T(\varphi(y)\varphi(x))\rangle_0$$

$$\stackrel{(3.25)}{=} \theta(x_0 - y_0)D^-(x-y) - \theta(y_0 - x_0)D^+(x-y) = G^{\text{ret}}(x-y) - D^+(x-y). \quad (3.34)$$

Очевидно, что $G^c(x)$ является решением уравнения (3.30). Действительно, она является линейной комбинацией запаздывающей функции Грина и решения свободного уравнения. Эта функция также называется *Фейнмановской* или *пропагатором*². Из определения (3.34) следует, что пропагатор содержит только отрицательные частоты при положительных временах, и положительные частоты при отрицательных временах. Эти условия являются граничными условиями. Такие граничные условия называются *вакуумными*. Такое название соответствует тому, что наличие частиц в будущем определяется положительно частотной частью, а в прошлом — отрицательно частотной частью. Таким образом, пропагатор удовлетворяет «безчастичным» граничным условиям, т.е. вакуумным.

Найдем теперь фурье-образ для фейнмановского пропагатора. Для этого заметим, что фурье-образ для запаздывающей функции Грина может быть записан в виде

$$\frac{1}{k^2 - m^2 + 2i\epsilon k^0} = \frac{P}{k^2 - m^2} - \varepsilon(k^0)\pi i\delta(k^2 - m^2), \quad (3.35)$$

где равенство понимается в интегральном смысле, P — символ главного значения.

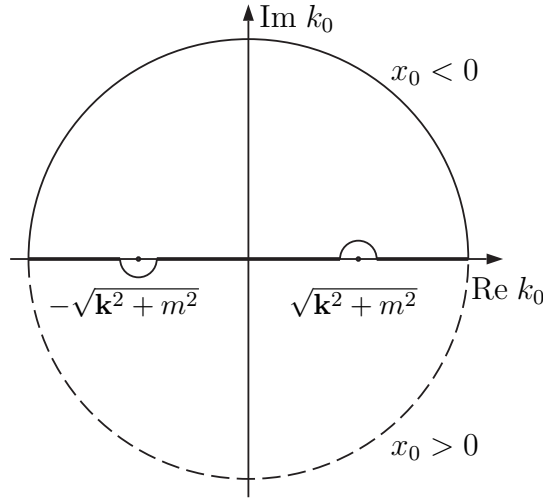


Рис. 3.4 Контуры интегрирования для получения причинной функции Грина при $x_0 > 0$ (штрихованная полуокружность) и $x_0 < 0$ (непрерывная полуокружность.)

²В действительности пропагатором называют T -спаривание, которое отличается от функции Грина дифференциального уравнения лишь множителем. В дальнейшем мы будем применять это понятие как к спариванию, так и к функции Грина.

Задача 126 Проверить равенство (3.35).

Используя определение (3.34) и фурье преобразование для функции D^+ (2.46), находим

$$G^c(k) = \frac{1}{m^2 - k^2 - 2i\epsilon k^0} + 2\pi i \theta(-k^0) \delta(k^2 - m^2) =$$

$$\frac{P}{m^2 - k^2} + (2\theta(-k^0) + \varepsilon(k^0)) \pi i \delta(k^2 - m^2) = \frac{P}{m^2 - k^2} + i\pi \delta(k^2 - m^2) = \frac{-1}{k^2 - m^2 + i\epsilon}, \quad (3.36)$$

и, таким образом,

$$G^c(x) = -\frac{1}{(2\pi)^4} \int dk \frac{e^{-ikx}}{k^2 - m^2 + i\epsilon}. \quad (3.37)$$

Задача 127 Показать справедливость (3.36).

Таким образом, правило обхода полюсов для получения пропагатора следующее: положительный полюс необходимо обходить сверху, а отрицательный — снизу (см. рис 3.4). Обходя полюса в обратном порядке (положительный снизу, а отрицательный сверху), получим еще одну функцию Грина — антипричинную. Она описывает процесс распространения частиц обратно во времени и не находит широкого применения.

Явный вид и особенности пропагатора. Сейчас мы займемся отысканием явного вида пропагатора в координатном пространстве. Чтобы сделать это, можно явно вычислить интеграл (3.37), а можно решить уравнение (3.30) сразу в координатном пространстве. Мы воспользуемся вторым способом и найдем решение (3.30) в $(d+1)$ измерении (1 временном и d пространственных), продемонстрировав при этом некоторые свойства пропагатора.

Чтобы решить уравнение (3.31) мы сделаем аналитическое продолжение в область чисто мнимого времени. Для этого заметим, что контур интегрирования (действительную ось k_0) в интеграле (3.37) можно повернуть на 90° градусов против часовой стрелки не пересекая при этом сингулярностей. Тогда интеграл по замкнутому контуру, состоящему из действительной оси, первой четверти бесконечно удаленной окружности, мнимой оси (в обратном направлении) и третьей четверти окружности, равен нулю, так как внутри контура не содержится полюсов (см. рис. 3.5):

$$I_{\text{Re}} + I_I - I_{\text{Im}} + I_{III} = 0.$$

Рассмотрим случай $x_0 > 0$. Тогда интеграл I_{III} обращается в ноль, и мы имеем

$$I_{\text{Re}} + I_I - I_{\text{Im}} = 0.$$

Продолжим теперь это равенство аналитически в область чисто мнимого x_0 таким образом, чтобы интеграл I_I обратился в ноль. Для этого надо положить $x_0 = -ix_{d+1}$ и считать $x_{d+1} > 0$. Действительно, в этом случае в подынтегральном выражении для I_I стоит

$$e^{-i(\text{Re } k_0 + i\text{Im } k_0)x_0} = e^{-\text{Re } k_0 \cdot x_{d+1} - i\text{Im } k_0 \cdot x_{d+1}},$$

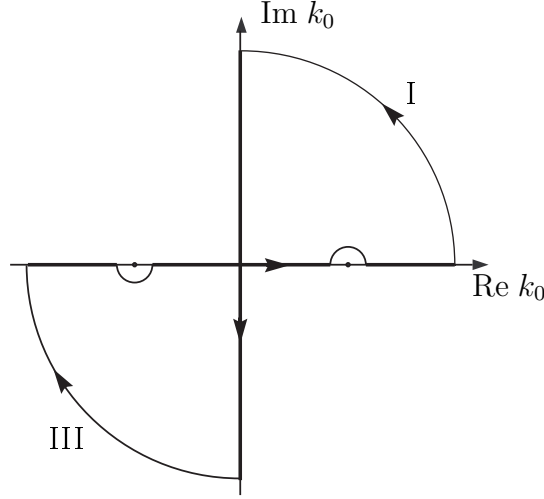


Рис. 3.5

т.е. падающая экспонента ($\text{Re } k_0 > 0$ в первой четверти). Таким образом имеем аналитическое продолжение для интеграла I_{Re} (т.е. для пропагатора) из области $x_0 > 0$ в область мнимого времени $x_0 = -ix_{d+1}$, $x_{d+1} > 0$:

$$I_{\text{Re}}(x_0 > 0) \rightarrow I_{\text{Im}}(x_{d+1} > 0) .$$

Аналогично для отрицательных времен получаем

$$I_{\text{Re}}(x_0 < 0) \rightarrow I_{\text{Im}}(x_{d+1} < 0) .$$

Окончательно для пропагатора имеем

$$G^c(x_0, \mathbf{x}) \rightarrow G^{\text{E}}(x_{d+1}, \mathbf{x}) \equiv \frac{i}{(2\pi)^{d+1}} \int d^{d+1}k \frac{e^{-ikx}}{k^2 + m^2} , \quad (3.38)$$

где $d^{d+1}k \equiv d\mathbf{k}dk_{d+1}$ — *евклидова* мера интегрирования, $k^2 = \mathbf{k}^2 + k_{d+1}^2 \equiv k_\mu^2$ (суммирование ведется с евклидовой метрикой! от 1 до $d+1$), и $k_{d+1} \equiv \text{Im } k_0$. Функция $G^{\text{E}}(x)$ называется *евклидовой функцией Грина* или *евклидовым пропагатором*.

Из определения евклидова пропагатора видно, что полюса его фурье-образа являются чисто мнимыми ($\pm i\sqrt{\mathbf{k}^2 + m^2}$). При интегрировании по k_{d+1} при $x_{d+1} > 0$ мы можем замкнуть контур в нижней полуплоскости. Тогда интеграл будет даваться вычетом в отрицательном мнимом полюсе и будет пропорциональным

$$e^{-x_{d+1}\sqrt{\mathbf{k}^2 + m^2}} ,$$

т.е. стремится к нулю при $x_{d+1} \rightarrow \infty$. При $x_{d+1} < 0$ интеграл будет пропорциональным

$$e^{x_{d+1}\sqrt{\mathbf{k}^2 + m^2}} ,$$

и тоже стремится к нулю при $x_{d+1} \rightarrow -\infty$. Таким образом, при любых больших временах пропагатор стремится к нулю. Это и есть граничное условие на евклидов пропагатор. Этот же результат можно получить, если описанным выше способом сделать аналитическое продолжение для обычного (минковского) пропагатора. Кроме того, из определения (3.38), так же как и из аналитического продолжения уравнения (3.30), следует, что евклидов пропагатор удовлетворяет следующему уравнению:

$$(\partial_E^2 - m^2)G^E(x) = -i\delta(x) , \quad (3.39)$$

где $\partial_E^2 \equiv \Delta_d + \partial_{d+1}^2 = \Delta_{d+1}$ — оператор Лапласа в $d + 1$ измерении. Таким образом, для евклидова пропагатора мы имеем хорошо поставленную граничную задачу.

Для того чтобы решить это уравнение, перейдем к сферическим координатам в $d + 1$ измерении. Поскольку уравнение (3.39) сферически симметрично, то решение тоже должно быть таковым. Поэтому действие угловой части оператора Лапласа на $G^E(x)$ дает ноль, и мы имеем уравнение при $r \neq 0$ ($r = \sqrt{\mathbf{x}^2 + x_{d+1}^2}$)

$$\frac{1}{r^d} \frac{\partial}{\partial r} r^d \frac{\partial}{\partial r} G^E(r) - m^2 G^E(r) = 0 ,$$

$$G^E(r \rightarrow \infty) \rightarrow 0 .$$

Это уравнение заменой

$$G^E(r) = \frac{F(r)}{(mr)^{\frac{d-1}{2}}}$$

приводится к уравнению Бесселя:

$$r^2 F'' + r F' - F \left(\frac{(d-1)^2}{4} + m^2 r^2 \right) = 0 ,$$

решением которого являются функции Инфельда и Макдональда $(d-1)/2$ - порядка. Функция Инфельда, однако, экспоненциально растет на бесконечности и не удовлетворяет граничным условиям. Таким образом имеем

$$G^E(r) = C \frac{1}{(mr)^{\frac{d-1}{2}}} K_{\frac{d-1}{2}}(mr) ,$$

где C — константа, которую надлежит определить. Она определяется из того, что функция Грина удовлетворяет неоднородному уравнению.

Проинтегрируем уравнение (3.39) по шару с центром в начале координат и радиусом r_0 и устремим r_0 к нулю. В правой части благодаря δ -функции мы получим $-i$. В левой части разложим функцию Макдональда в ряд Лорана и ограничимся наиболее сингулярным членом:

$$K_{\frac{d-1}{2}}(mr) = \frac{\alpha_d}{(mr)^{\frac{d-1}{2}}} , \quad (3.40)$$

где

$$\alpha_d = \Gamma \left(\frac{d-1}{2} \right) 2^{\frac{d-3}{2}}$$

Подставляя это разложение в левую часть и используя формулу Грина для первого члена, получаем

$$C\alpha_d\Omega_{d+1}\left(r^d\partial_r\frac{1}{(mr)^{d-1}}\Big|_{r=r_0}-m^2\int_0^{r_0}\frac{r^d}{(mr)^{d-1}}dr\right)_{r_0\rightarrow 0}=-\frac{C\alpha_d\Omega_{d+1}(d-1)}{m^{d-1}}=-i\,,$$

или

$$C=\frac{im^{d-1}}{(d-1)\alpha_d\Omega_{d+1}}\,,$$

где Ω_{d+1} — полный телесный угол в $(d+1)$ измерении. Вычислим его.

Рассмотрим n -мерный Гауссов интеграл

$$\int e^{-\sum_{i=1}^n x_i^2} \prod_{i=1}^n dx_i. \quad (3.41)$$

С одной стороны этот интеграл равен произведению n однократных Гауссовых интегралов

$$\left(\int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-x^2}\right)^n = (\pi)^{\frac{n}{2}}. \quad (3.42)$$

С другой стороны, перейдем в (3.41) к сферическим координатам. Имеем

$$\int_0^{\infty} e^{-r^2} r^{n-1} dr \int d\Omega_n = \frac{\Omega_n}{2} \int_0^{\infty} e^{-t} t^{\frac{n}{2}-1} dt = \frac{\Omega_n}{2} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right),$$

где мы воспользовались интегральным представлением для Γ -функции Эйлера. Сравнивая последнее выражение с (3.42), находим

$$\Omega_n = \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}.$$

Окончательно для евклидова пропагатора имеем

$$G_{d+1}^E(x) = \frac{im^{d-1}\Gamma\left(\frac{d+1}{2}\right)}{2(d-1)\pi^{\frac{d+1}{2}}} \cdot \frac{K_{\frac{d-1}{2}}(mr)}{\alpha_d(mr)^{\frac{d-1}{2}}}. \quad (3.43)$$

Эта формула непосредственно неприменима при $d=0, 1$.

Задача 128 Получить евклидов пропагатор в одном и двух измерениях и обобщить формулу (3.43).

Возьмем теперь предел $m \rightarrow 0$. Имеем, используя (3.40),

$$G_{d+1}^E(x, m=0) = \frac{i\Gamma\left(\frac{d+1}{2}\right)}{2(d-1)\pi^{\frac{d+1}{2}}} \cdot \frac{1}{r^{d-1}},$$

т.е. с точностью до множителя $-i$ хорошо известный закон Кулона в $(d+1)$ измерении.

Вернемся теперь обратно в пространство Минковского, т.е. сделаем аналитическое продолжение (3.43) при $x_{d+1} \rightarrow ix_0$. При этом надо иметь в виду, что положительным значениям x_{d+1} соответствуют положительные x_0 , а отрицательным — отрицательные. Из этого в частности следует, что

$$r_E \rightarrow \sqrt{-\lambda} = i\sqrt{\lambda} \quad \text{при } \lambda > 0 ,$$

где $\lambda = x_0^2 - \mathbf{x}^2$ — минковский интервал. Имея это в виду, мы можем считать, что λ имеют всюду отрицательную мнимую добавку:

$$\sqrt{-\lambda + i\epsilon} = i\sqrt{\lambda} \quad \text{при } \lambda > 0 .$$

Тогда пропагатор в $(3+1)$ измерениях имеет вид

$$G^c(x) = \frac{im}{4\pi^2} \cdot \frac{K_1(m\sqrt{-\lambda + i\epsilon})}{\sqrt{-\lambda + i\epsilon}} . \quad (3.44)$$

Из этого выражения видно, что все особенности пропагатора лежат на световом конусе $\lambda = 0$:

$$G^c \stackrel{\lambda \rightarrow 0}{=} \frac{1}{4\pi^2 i} \frac{P}{\lambda} + \frac{1}{4\pi} \delta(\lambda) - \frac{m^2}{16\pi} \theta(\lambda) + \frac{im^2}{8\pi^2} \ln \frac{m|\lambda|}{2} + \mathcal{O}(\sqrt{|\lambda|} \ln |\lambda|) .$$

Наиболее сильные сингулярности ($1/\lambda$ и $\delta(\lambda)$) не зависят от массы, что уже следует из размерных соображений. Этим фактом можно воспользоваться для регуляризации пропагатора.

Другой интересной особенностью фейнмановского пропагатора является то, что он отличен от нуля вне светового конуса. Вне светового конуса ($\lambda < 0$) он экспоненциально спадает с характерной длиной $1/m$.

Приведем здесь еще выражения в координатном пространстве для функций Паули-Йордана.

$$D^+(x) = -D^-(-x) = \frac{1}{4\pi} \varepsilon(x^0) \delta(\lambda) - \frac{im}{8\pi\sqrt{\lambda}} \theta(\lambda) \left[N_1(m\sqrt{\lambda}) - i\varepsilon(x^0) J_1(m\sqrt{\lambda}) \right] -$$

$$\theta(-\lambda) \frac{im}{4\pi^2 \sqrt{-\lambda}} K_1(m\sqrt{-\lambda}) , \quad (3.45)$$

$$D(x) = \frac{1}{2\pi} \varepsilon(x^0) \delta(\lambda) - \frac{m}{4\pi\sqrt{\lambda}} \theta(\lambda) \varepsilon(x^0) J_1(m\sqrt{\lambda}) . \quad (3.46)$$

Задача 129 Производя явное вычисление соответствующих импульсных интегралов получить формулы (3.44), (3.45) и (3.46).

Функции Грина других полей. Зная пропагатор скалярного поля можно без труда получить пропагаторы других полей, действуя соответствующими дифференциальными операторами на G^c . Имеем, например, для спинорного поля

$$S^c(x) = \theta(x^0)S^-(x) - \theta(-x^0)S^+(x) = (i\hat{\partial} + m)D^c(x) = -\frac{1}{(2\pi)^4} \int dk \frac{(\hat{k} + m)e^{-ikx}}{k^2 - m^2 + i\epsilon} = -\frac{1}{(2\pi)^4} \int dk \frac{e^{-ikx}}{\hat{k} - m + i\epsilon} .$$

Особого рассмотрения требует электромагнитное поле. Введем взаимодействие ЭМП с внешним током $j_\mu(x)$. Лагранжиан взаимодействия имеет вид

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + j_\mu A^\mu . \quad (3.47)$$

Уравнение движения, следующее из этого лагранжиана будет

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = -j^\nu . \quad (3.48)$$

Заметим сразу что, для того чтобы у этого уравнения существовали решения необходимо, чтобы ток сохранялся $\partial_\nu j^\nu = 0$. Действительно, беря дивергенцию от обеих частей уравнения (3.48) и учитывая антисимметричность $F_{\mu\nu}$, получаем условие сохранения тока.

Если попытаться написать частное решение уравнения (3.48) в виде, аналогичном (3.29),

$$A_\mu(x) = \int dy G_\mu^\nu(x-y) j_\nu(y) , \quad (3.49)$$

то функция Грина $G_{\mu\nu}(x)$ должна удовлетворять уравнению

$$(g_{\mu\rho}\partial^2 - \partial_\mu\partial_\rho)G_\nu^\rho(x) \equiv K_{\mu\rho}G_\nu^\rho(x) = -g_{\mu\nu}\delta(x) ,$$

или в импульсном представлении

$$(g_{\mu\rho}k^2 - k_\mu k_\rho)G_\nu^\rho(k) \equiv K_{\mu\rho}(k)G_\nu^\rho(k) = g_{\mu\nu} . \quad (3.50)$$

Легко убедиться, однако, что уравнение (3.50) не имеет решения, т.е. оператор $K_{\mu\nu}$ не имеет обратного. Действительно, этот оператор поперечный, т.е. $\partial^\mu K_{\mu\nu} = 0$. Это означает, что его действие на произвольную функцию переводит последнюю в подпространство поперечных функций, т.е. $K_{\mu\nu}$ является проектором на поперечные физические состояния (в чем можно убедиться, проверив, что $K_{\mu\nu}K_\rho^\nu \sim K_{\mu\rho}$). Однако, как хорошо известно, не существует оператора, обратного к проектору. Ясно, что причина этого кроется в калибровочной инвариантности теории. Действительно, к функции Грина всегда можно добавить производную от произвольного вектора, при этом, в силу закона сохранения тока, вектор потенциал (3.49) не изменится. Чтобы явно учесть эту свободу, поступим следующим образом. Фиксируем калибровку Лоренца

$$\partial A = 0 .$$

Это дополнительное условие можно явно учесть при выводе уравнений движения путем добавления в лагранжиан (3.47) члена, фиксирующего калибровку, который обычно записывается в следующем виде

$$\mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L} - \frac{1}{2\xi}(\partial A)^2 ,$$

где ξ — произвольная постоянная, называемая *калибровочным параметром*. Новый лагранжиан уже не обладает калибровочной инвариантностью, но условие сохранения тока по-прежнему остается в силе. Тогда уравнение на функцию Грина можно написать в виде (пишем сразу в импульсном пространстве)

$$\left(g_{\mu\rho}k^2 - \left(1 - \frac{1}{\xi}\right) k_\mu k_\rho \right) G_\nu^\rho(k) \equiv K_{\mu\rho}^\xi(k) G_\nu^\rho(k) = g_{\mu\nu} . \quad (3.51)$$

Оператор $K_{\mu\rho}^\xi(k)$ уже является обратимым. Для того чтобы найти функцию Грина, примем во внимания, что она является симметричным тензором второго ранга (в силу симметричности K), зависящим только от k_μ . Напишем поэтому

$$G_{\mu\nu}(k) = a(k^2)g_{\mu\nu} + b(k^2)k_\mu k_\nu .$$

Подставляя это выражение в (3.51), находим

$$G_{\mu\nu}^c(k) = \frac{1}{k^2 + i\epsilon} \left(g_{\mu\nu} - (1 - \xi) \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \right) . \quad (3.52)$$

Задача 130 Получить уравнения (3.51), (3.52).

Существует два наиболее распространенных выбора калибровочного параметра ξ .

- 1) $\xi = 1$ — *калибровка Фейнмана*. В этом случае пропагатор диагонален, что удобно для вычислений;
- 2) $\xi = 0$ — *калибровка Ландау*. В этом случае пропагатор поперечен.

Очевидно, что физические величины не должны зависеть от калибровочного параметра.

Для других полей мы лишь приведем здесь окончательные результаты T -спариваний:

$$\overline{\varphi(x)\varphi(y)} = -iG^c(x-y) = \int \frac{dk}{(2\pi)^4} \frac{i}{k^2 - m^2 + i\epsilon} e^{-ik(x-y)}, \quad (3.53)$$

$$\begin{aligned} \overline{A_\mu(x)A_\nu(y)} &= -iG_{0\mu\nu}^c(x-y) = \\ &= \int \frac{dk}{(2\pi)^4} \frac{-i}{k^2 + i\epsilon} \left(g_{\mu\nu} - (1-\xi) \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \right) e^{-ik(x-y)}, \end{aligned} \quad (3.54)$$

$$\begin{aligned} \overline{U_\mu(x)U_\nu(y)} &= -iG_{\mu\nu}^c(x-y) = \\ &= \int \frac{dk}{(2\pi)^4} \frac{-i}{k^2 - m^2 + i\epsilon} \left(g_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{m^2} \right) e^{-ik(x-y)}, \end{aligned} \quad (3.55)$$

$$\begin{aligned} \overline{\psi(x)\bar{\psi}(y)} &= -iS^c(x-y) = \\ &= \int \frac{dk}{(2\pi)^4} \frac{i(\hat{k} + m)}{k^2 - m^2 + i\epsilon} e^{-ikx} = \int \frac{dk}{(2\pi)^4} \frac{i}{\hat{k} - m + i\epsilon} e^{-ik(x-y)}. \end{aligned} \quad (3.56)$$

Задача 131 Получить формулы (3.53), (3.54), (3.55), (3.56). Объяснить выбор знаков.

3.5 Правила Фейнмана для оператора S -матрицы

Для того чтобы понять, как возникают правила Фейнмана для вычисления матричных элементов S -матрицы, вычисления удобно разбить на два этапа. Первый этап – это приведение с помощью второй теоремы Вика к нормальной форме оператора S -матрицы. Второй этап – вычисление с помощью первой теоремы Вика матричных элементов.

Начнем с приведение к нормальной форме оператора S -матрицы,

$$S = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \int S_n(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n = T \exp \left(i \int \mathcal{L}_{\text{int}}(x) dx \right) \quad (3.57)$$

$$\frac{1}{n!} \int S_n(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n = \frac{i^n}{n!} \int T(\mathcal{L}_{\text{int}}(x_1) : \dots : \mathcal{L}_{\text{int}}(x_n) :) dx_1 \dots dx_n.$$

В соответствии со второй теоремой Вика, $S_n(x_1, \dots, x_n)$ представляет собой сумму членов, каждый из которых равен произведению некоторого числа T -спаренных операторов поля на нормальное произведение оставшихся неспаренных полей:

$$S_n(x_1, \dots, x_n) = \sum_k K_k(x_1, \dots, x_k) : \dots u(x_j) \dots : \quad (3.58)$$

Функции K_k являются C -числовыми, представляют собой произведения пропагаторов полей (T -спариваний):

$$K_k(x_1, \dots, x_k) = \prod_{r,s} G_{\alpha\beta}^c(x_r - x_s)$$

и являются обобщенными функциями.

Каждому члену в разложении (3.58) может быть сопоставлено графическое изображение, называемое диаграммой Фейнмана. Чтобы это продемонстрировать, рассмотрим теорию φ^4 с лагранжианом

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \varphi)^2 - \frac{m^2}{2}\varphi^2 - \frac{\lambda}{4!}\varphi^4.$$

В первом порядке теории возмущений имеем

$$S_1(x) = -i\frac{\lambda}{4!}T(:\varphi^4(x):) = -i\frac{\lambda}{4!}:\varphi^4(x):. \quad (3.59)$$

Рассмотрим теперь в этой теории второй порядок теории возмущений, т.е. S_2 . Имеем

$$\begin{aligned} S_2(x, y) &= (-i)^2 \frac{\lambda^2}{4!^2} T(:\varphi^4(x)::\varphi^4(y):) = \\ &= \frac{(-i)^2 \lambda^2}{4!^2} \left(:\varphi^4(x)\varphi^4(y): + 16 \overline{\varphi(x)\varphi(y)} : \varphi^3(x)\varphi^3(y): + 72 [\overline{\varphi(x)\varphi(y)}]^2 : \varphi^2(x)\varphi^2(y): + \right. \\ &\quad \left. 96 [\overline{\varphi(x)\varphi(y)}]^3 : \varphi(x)\varphi(y): + 24 [\overline{\varphi(x)\varphi(y)}]^4 \right). \end{aligned} \quad (3.60)$$

Два замечания по поводу этой формулы. Во-первых, если бы мы записали лагранжиан не в нормально упорядоченном виде, то в этой формуле появились бы дополнительные члены, как и в (3.59), содержащие спаривания полей в одной точке $\overline{\varphi(x)\varphi(x)}$. Во-вторых, объясним происхождение числовых коэффициентов. Для этого рассмотрим, например, как получается третий член. Запишем, пронумеровав поля, T -произведение лагранжианов в виде

$$T(:\varphi_1(x)\varphi_2(x)\varphi_3(x)\varphi_4(x)::\varphi_1(y)\varphi_2(y)\varphi_3(y)\varphi_4(y):).$$

Мы хотим получить третий член в (3.60), поэтому нам необходимо спарить два поля из первой группы с двумя полями из второй группы. Фиксируем поле из первой группы, скажем $\varphi_1(x)$. Его можно спарить с 4 различными полями из второй группы. Фиксируем теперь второе поле из первой группы, его уже можно спарить только 3 способами. Итого, для двух фиксированных полей мы получаем $4 \cdot 3 = 12 = 4!/2!$ способов спаривания — число размещений из 4-х по 2. Остается выяснить, сколькими способами можно фиксировать два поля из первой группы. Ответ на этот вопрос очень простой — это число сочетаний из 4-х по 2: $C_4^2 = 6$. Действительно, мы должны выбирать поля из первой группы с неравными индексами и различать порядок (в противном случае мы бы учитывали выбранные поля дважды, например, (1 и 2) и (2 и 1)), а это и есть число сочетаний. Таким образом мы получаем $12 \cdot 6 = 72$. Аналогично можно получить остальные коэффициенты.

Задача 132 Получить формулу (3.60).

Вернемся теперь к графическому представлению выражений (3.59) и (3.60). Сопоставим каждому спариванию линию, начинающуюся в точке x и заканчивающуюся в y . Каждому полю из нормального произведения — луч, начинающийся из точки x или y (см. рис. 3.6). Очевидно при этом, что из каждой точки будет выходить по четыре линии

$$\begin{array}{ccc} \bullet \text{---} \bullet & \overline{\varphi(x)\varphi(y)} = -iG^c(x-y) & \bullet \text{---} : \varphi(x) : \\ x \quad y & & x \end{array} \quad \begin{array}{c} \diagup \quad \diagdown \\ \diagdown \quad \diagup \end{array} \quad -i \frac{\lambda}{4!}$$

Рис. 3.6

— по числу полей в лагранжиане взаимодействия, такую точку будем называть *вершиной* и будем ей сопоставлять фактор $-i\lambda/4!$, где множитель i соответствует множителю i в выражении для S -матрицы (3.57), а $-\lambda/4!$ — константа взаимодействия в лагранжиане. Заметим, что выражение для вершины можно получить, рассматривая первый порядок теории возмущений S_1 . Полученные таким образом правила часто называют правилами Фейнмана в координатном пространстве. На рис. 3.7 приведено графическое изображение формулы (3.60).

$$\begin{array}{c} \diagup \quad \diagdown \\ \diagdown \quad \diagup \end{array} \frac{-i\lambda}{4!} \times \begin{array}{c} \diagup \quad \diagdown \\ \diagdown \quad \diagup \end{array} \frac{-i\lambda}{4!} + 16 \begin{array}{c} \diagup \quad \diagdown \\ \diagdown \quad \diagup \end{array} \frac{-i\lambda}{4!} \begin{array}{c} \diagup \quad \diagdown \\ \diagdown \quad \diagup \end{array} \frac{-i\lambda}{4!} + 72 \begin{array}{c} \diagup \quad \diagdown \\ \diagdown \quad \diagup \end{array} \frac{-i\lambda}{4!} \begin{array}{c} \diagup \quad \diagdown \\ \diagdown \quad \diagup \end{array} \frac{-i\lambda}{4!} + 96 \begin{array}{c} \diagup \quad \diagdown \\ \diagdown \quad \diagup \end{array} \frac{-i\lambda}{4!} \begin{array}{c} \diagup \quad \diagdown \\ \diagdown \quad \diagup \end{array} \frac{-i\lambda}{4!} + 24 \begin{array}{c} \diagup \quad \diagdown \\ \diagdown \quad \diagup \end{array} \frac{-i\lambda}{4!} \begin{array}{c} \diagup \quad \diagdown \\ \diagdown \quad \diagup \end{array} \frac{-i\lambda}{4!} \end{array}$$

Рис. 3.7

Рассмотрим теперь электродинамику. Полный лагранжиан, описывающий взаимодействие фермионов с фотонами, имеет вид

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^2 + i\bar{\psi}\hat{D}\psi - m\bar{\psi}\psi,$$

где

$$D_\mu = \partial_\mu - ieA_\mu$$

— ковариантная производная. Лагранжиан взаимодействия

$$\mathcal{L}_{\text{int}} = e\bar{\psi}\gamma_\mu A^\mu\psi.$$

Для такой теории имеем шесть различных графических элементов, приведенных на рис. 3.8: 3 элемента соответствуют трем *различным* полям A_μ , $\bar{\psi}$, ψ стоящим под знаком нормального произведения, два элемента соответствуют двум нетривиальным пропагаторам, и одну вершину. Скажем несколько слов по поводу графического представления элемен-

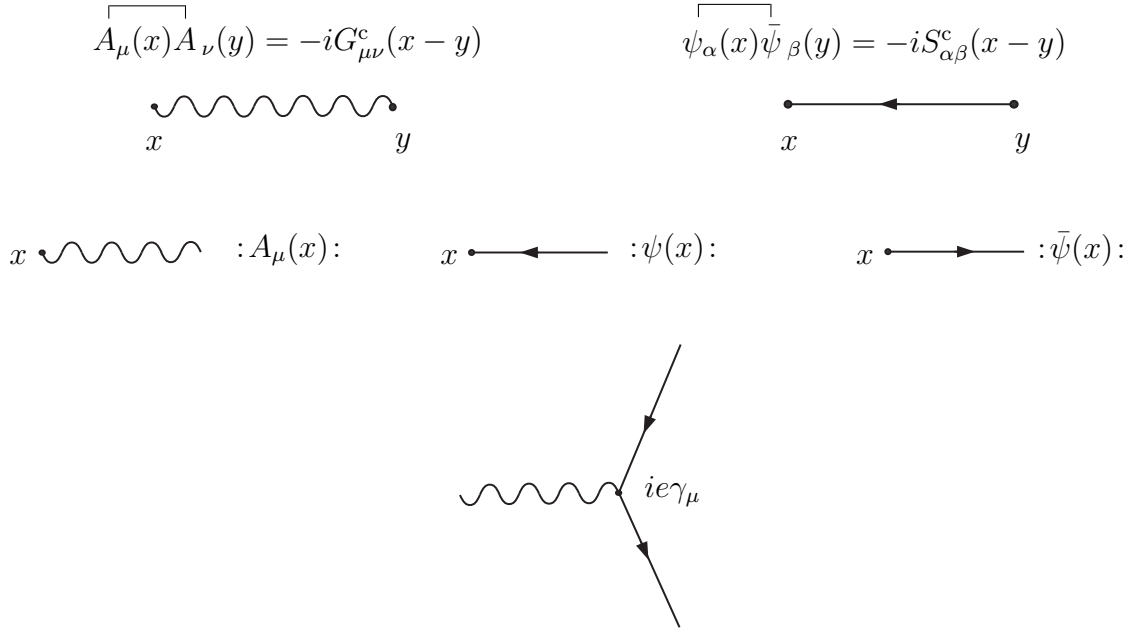


Рис. 3.8

тов. Фотонное поле, как и другие калибровочные поля, принято обозначать волнистой линией (подчеркивая выраженную волновую природу света). Линии полей материи (скаляров, спиноров) – прямой линией. Это общепринятые, но *необязательные*, обозначения. Могут быть использованы и другие обозначения, в том числе прямые линии (сплошные или пунктирные) для калибровочных полей. Единственное правило, от которого практически никогда не отступают, – это обозначение комплексных полей (для которых частица не тождественна античастице) линиями со стрелками, указывающими направление тока (но не направление движения частиц). При этом в полном соответствии с теорией электрических токов обычно принимается, что направление стрелки указывает движение положительных зарядов, то есть стрелке, выходящей из вершины, будет соответствовать комплексно-сопряженное поле, так как (по соглашению) это поле содержит оператор рождения античастиц, несущих положительный заряд. В соответствии с этим правилом фермионные линии в КЭД имеют направление. Кроме того, очевидно, что фермионные линии никогда не прерываются — в вершину входит одна линия и одна выходит (фермионный ток сохраняется). Из этого в частности следует, что у произвольной диаграммы может быть только четное число внешних фермионных линий. Если у диаграммы нет внешних фермионных линий (и диаграмма не состоит из одной фотонной линии), то все фермионные линии должны образовывать замкнутые петли. Каждой такой фермионной петле (такие петли могут быть и в диаграммах, содержащих внешние фермионные линии) соответствует дополнительный знак минус, обусловленный ферми-статистикой. Для того чтобы продемонстрировать это, рассмотрим одно слагаемое из $S_2(x, y)$, а именно слагаемое, содержащее только два неспаренных фотонных поля. Диаграмма, которая изображает такое слагаемое приведена на рис. 3.9. Соответствующее слагаемое есть

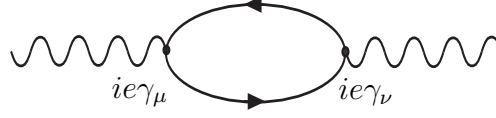


Рис. 3.9

$$i^2 e^2 : \overbrace{\bar{\psi}_\alpha(x) \hat{A}_{\alpha\beta}(x) \psi_\beta(x) \bar{\psi}_\gamma(y) \hat{A}_{\gamma\delta}(y) \psi_\delta(y)}^{-1} :=$$

$$-i^2 (-i)^2 e^2 : S_{\delta\alpha}^c(y-x) \hat{A}_{\alpha\beta}(x) S_{\beta\gamma}^c(x-y) \hat{A}_{\gamma\delta}(y) := -e^2 Tr : S^c(y-x) \hat{A}(x) S^c(x-y) \hat{A}(y) : .$$

Внутреннее спаривание имеет правильный порядок сомножителей (ср. с (3.56)), однако внешнее — нет. Для того чтобы привести внешнее спаривание к правильному виду, необходимо проантикоммутировать ферми поля и тем самым заработать лишний знак минус.

Задача 133 В теории φ^4 построить все диаграммы для S_3 и вычислить соответствующие числовые множители. В электродинамике построить все диаграммы вплоть до S_3 , выписать для них соответствующие выражения.

Задача 134 В рассмотренных теориях восстановить постоянную Планка \hbar и выяснить, как зависит от этой постоянной каждая диаграмма, полученная в предыдущей задаче. Сделать выводы.

3.6 Правила Фейнмана для матричных элементов

Поскольку в квантовой теории поля состояния обычно задаются в импульсном пространстве

$$|i\rangle = a_1^+(\mathbf{k}_1) \dots a_i^+(\mathbf{k}_i) |0\rangle ,$$

то удобно вычислять матричные элементы S -матрицы в импульсном представлении. Будем вычислять матричные элементы операторов S_n . Имеем

$$\int \prod_{l=1}^n dx_l \langle f | S_n | i \rangle = \int \prod_{l=1}^n dx_l \cdot \sum_k K_k(x_1, \dots, x_k) \langle 0 | \prod_{\alpha}^f a_{\alpha}^- : \dots u(x_j) \dots : \prod_{\beta}^i a_{\beta}^+ | 0 \rangle . \quad (3.61)$$

Для того чтобы вычислить эти матричные элементы, можно воспользоваться первой теоремой Вика. Согласно этой теореме произведение операторов, стоящих под знаком усреднения в (3.61), равно сумме нормальных произведений этих операторов со всевозможными спариваниями. Очевидно, что ненулевой вклад при усреднении по вакууму даст только слагаемое, в котором все операторы спарены (в противном случае неспаренные операторы, стоящие под знаком нормального произведения подействуют на вакуум

и дадут ноль). Это может произойти, только если число операторов какого-либо поля $u(x)$, стоящих под знаком нормального произведения в (3.61), меньше либо равно суммарному числу операторов рождения и уничтожения этого поля, порождающих начальное и конечное состояние соответственно (иначе останутся неспаренные операторы $u(x)$, стоящие под знаком нормального произведения и дающие при усреднении по вакууму ноль). При этом, если суммарное число операторов рождения и уничтожения строго больше числа операторов поля, то результат будет ненулевым, только если некоторые операторы рождения и уничтожения спарены между собой. Такие ненулевые спаривания имеют вид (см. задачу 121)

$$\underbrace{a_{\sigma}^{-}(\mathbf{p})a_{\rho}^{+}(\mathbf{k})}_{\text{спаривание}} = \delta_{\sigma\rho}\delta(\mathbf{p}-\mathbf{k}) \quad (3.62)$$

(мы здесь не выписали знак эрмитового сопряжения – он тривиально восстанавливается). Это означает, что частица сохранила свое состояние, т.е. не провзаимодействовала. Такие процессы, в виду их тривиальности, мы не будем рассматривать. Таким образом заключаем, что число неспаренных операторов $u(x)$ в S_n , которое равно числу внешних линий у диаграмм, построенных в разделе 3.5, должно совпадать с суммарным числом операторов рождения и уничтожения соответствующего поля.

Чтобы найти нормальные спаривания операторов поля с операторами рождения и уничтожения, напомним, что в представлении взаимодействия любое поле представимо в виде

$$u(x) = u^{+}(x) + u^{-}(x),$$

где

$$u^{\pm}(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{d\mathbf{q}}{\sqrt{2q_0}} e^{\pm ipx} \sum_{\sigma} v_{\sigma}^{\pm}(\mathbf{q}) a_{\sigma}^{\pm}(\mathbf{q}), \quad (3.63)$$

а v_{σ}^{\pm} – решения соответствующих свободных уравнений движения, представляющих собой базис в пространстве решений и характеризующих, в том числе, поляризационные свойства поля (см. главу 1). Тогда, используя (3.62), находим (см. задачу 121)

$$\begin{aligned} \underbrace{a_{\sigma}^{-}(\mathbf{p})u(x)}_{\text{спаривание}} &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{2p_0}} e^{+ipx} v_{\sigma}^{+}(\mathbf{p}), \\ u(x) \underbrace{a_{\sigma}^{+}(\mathbf{p})}_{\text{спаривание}} &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{2p_0}} e^{-ipx} v_{\sigma}^{-}(\mathbf{p}). \end{aligned} \quad (3.64)$$

В дальнейшем в этих и следующих из них формулах мы будем опускать несущественные для вычисления матричных элементов множители

$$\frac{1}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{2p_0}}$$

и восстановим их лишь когда будем вычислять вероятности процессов (см. раздел 3.7).

Имея в виду все сказанное выше, используя (3.64) и учитывая, что $\langle 0|0\rangle = 1$, находим вакуумное среднее в (3.61),

$$\Pi_{if} \equiv \langle 0 | \prod_{\alpha}^f a_{\alpha}^{-} \dots u(x_j) \dots \prod_{\beta}^i a_{\beta}^{+} | 0 \rangle = \sum_c \left(\prod_j^i e^{-ik_j x_j} v_{\sigma_j}^{-}(k_j) \prod_l^f e^{ik_l x_l} v_{\delta_l}^{+}(k_l) \right),$$

где, согласно теореме Вика, сумма берется по всевозможным спариваниям операторов поля $u(x)$ с операторами рождения и(или) уничтожения. Отметим, что в полученном выражении вся зависимость от координат содержится только в экспонентах.

Далее, поскольку K (коэффициентные функции) в (3.61) представляют собой произведение пропагаторов, то подставляя Фурье-образы последних

$$-iG_{\alpha\beta}^c(x-y) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int dq e^{-iq(x-y)} G_{\alpha\beta}(q)$$

в (3.61), имеем

$$\langle f|S|i\rangle_n \equiv \langle f|\int \frac{S_n}{n!} \prod_{m=1}^n dx_m |i\rangle = \frac{1}{n!} \int \left(\prod_{m=1}^n dx_m \right) \Pi_{if} \left(\prod_k \int \frac{dq_k}{(2\pi)^4} e^{-iq_k(x_j-x_l)} G_{\alpha\beta}(q_k) \right)$$

Благодаря экспоненциальной зависимости от координат, интеграл по x в правой части этого равенства сводится к произведению интегралов вида

$$\int dx_j e^{ix_j \sum_{\alpha} p_{\alpha}} = (2\pi)^4 \delta(\sum_{\alpha} p_{\alpha}),$$

причем индекс α пробегает ровно столько значений, сколько линий входит (выходит) в вершину с координатой x_j , а p_{α} можно интерпретировать как импульс частицы, соответствующей линии с номером α .

Таким образом, окончательно имеем для матричного элемента в импульсном пространстве в n -ом порядке теории возмущений

$$\langle f|S|i\rangle_n = \frac{1}{n!} \sum_c \prod v_{\sigma}^{-}(k_{\text{in}}) \prod v_{\delta}^{+}(k_{\text{out}}) \int \prod \frac{dq}{(2\pi)^4} igO(2\pi)^4 \delta(\sum q) G(q). \quad (3.65)$$

Эта формула записана несколько условно. Поясним ее смысл. Все произведения в ней надо понимать как произведения «вдоль диаграмм», построенных в предыдущем разделе. А именно, каждой внешней линии соответствует v_{δ}^{+} или v_{σ}^{-} , каждой вершине, помимо фактора из предыдущего раздела (здесь он обозначен как igO , g — константа связи, O — структура, стоящая в лагранжиане взаимодействия, например γ -матрица, как в КЭД) сопоставляется еще δ -функция, выражающая закон сохранения импульса в данной вершине. Каждой внутренней линии соответствует пропагатор в импульсном пространстве соответствующей частицы. Итак, мы получаем правила Фейнмана для матричных элементов, которые также иногда называют правилами Фейнмана в импульсном пространстве. Однако прежде чем их сформулировать более точно, скажем еще несколько слов по поводу множителя $1/n!$ и других численных множителей в полученной нами формуле.

Рассмотрим в теории φ^4 процесс $2 \rightarrow 2$ во втором порядке теории возмущений. Соответствующая диаграмма должна содержать 4 «ноги» (внешних линии). Это третья диаграмма на рис. 3.7, (см также рис. 3.13). Пусть k_1, k_2 — импульсы влетающих частиц, p_1, p_2 — вылетающих. При переходе в импульсное пространство мы должны спарить 4 оператора из нормального произведения с операторами рождения и уничтожения. Согласно

теореме Вика мы должны сделать это всевозможными способами, что соответствует сумме по всевозможным спариваниям в формуле (3.65). Мы можем оба оператора в точке y спарить с операторами уничтожения, оба оператора в точке x – с операторами рождения:

$$\langle 0|a^-(\mathbf{p}_1)a^-(\mathbf{p}_2) : \varphi(y)\varphi(y)\varphi(x)\varphi(x) : a^+(\mathbf{k}_1)a^+(\mathbf{k}_2)|0\rangle. \quad (3.66)$$

В этом случае частицы будут влетать в точку x , а вылетать из y . А можем сделать наоборот (в этой и следующих формулах обратите внимание на расстановку аргументов полевых операторов):

$$\langle 0|a^-(\mathbf{p}_1)a^-(\mathbf{p}_2) : \varphi(x)\varphi(x)\varphi(y)\varphi(y) : a^+(\mathbf{k}_1)a^+(\mathbf{k}_2)|0\rangle.$$

Очевидно, что при этом мы получим две диаграммы, отличающиеся только переобозначением $x \leftrightarrow y$. Поскольку мы интегрируем по x и y , то получаем два одинаковых выражения. Эта двойка сокращается с $1/2!$, стоящим перед S_n во втором порядке. В общем случае мы получим ровно столько эквивалентных диаграмм, сколькими способами можно переобозначить n точек с помощью n штук обозначений, то есть ровно $n!$. Этот $n!$ сократится с тем, что стоит перед S_n в n -ом порядке. Очевидно, что этот множитель можно отбросить, учитывая только *топологически неэквивалентные диаграммы*, то есть слагаемые и соответствующие диаграммы, в которых k_1 и p_1 (или k_1 и p_2) входят(выходят) в одну вершину. Другими словами, слагаемые, возникающие в результате спаривания одного из операторов $\varphi(x)$ с оператором уничтожения, а второго – с оператором рождения (см. рис. 3.13):

$$\langle 0|a^-(\mathbf{p}_1)a^-(\mathbf{p}_2) : \varphi(y)\varphi(x)\varphi(y)\varphi(x) : a^+(\mathbf{k}_1)a^+(\mathbf{k}_2)|0\rangle, \quad (3.67)$$

$$\langle 0|a^-(\mathbf{p}_1)a^-(\mathbf{p}_2) : \varphi(y)\varphi(x)\varphi(x)\varphi(y) : a^+(\mathbf{k}_1)a^+(\mathbf{k}_2)|0\rangle. \quad (3.68)$$

Эти последние диаграммы будут топологически неэквивалентными (см. обсуждение ниже).

Рассмотрим также этот же процесс, но в первом порядке. Имеем

$$\langle 0|a^-(\mathbf{p}_1)a^-(\mathbf{p}_2) : \varphi(x)\varphi(x)\varphi(x)\varphi(x) : a^+(\mathbf{k}_1)a^+(\mathbf{k}_2)|0\rangle$$

Очевидно, что первый оператор $\varphi(x)$ мы можем спарить с любым из 4-х операторов рождения или уничтожения, второй – с любым из 3-х оставшихся, третий – с любым из 2-х, оставшийся оператор можно спарить только одним способом. При этом, поскольку все φ

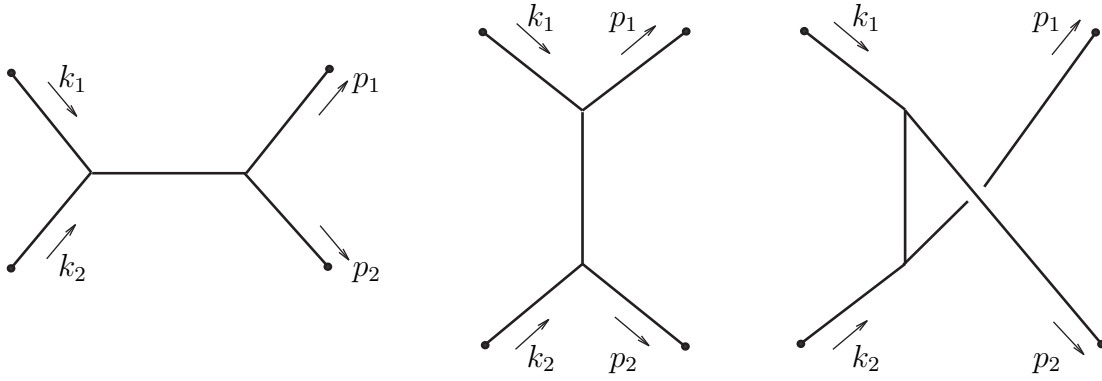


Рис. 3.10 Пример топологически неэквивалентных диаграмм для процесса $2 \rightarrow 2$. Точки на концах внешних линий означают, что концы приклеены к плоскости рисунка. Разрыв линии на третьей диаграмме означает, что линии, несущие импульсы p_1 и p_2 перекрещиваются (но не прерываются). Заметим, что здесь и далее мы для удобства будем рисовать и читать диаграммы слева направо, то есть влетающие частицы расположены слева, а вылетающие — справа. Хотя последовательно было бы рисовать диаграммы справа налево в соответствии с вычислением матричных элементов, в которых начальное состояние соответствует кет-вектору (стоит справа).

эквивалентны, то мы получим 24 одинаковые диаграммы. Этот множитель 24 в точности сокращается с множителем $1/4!$, который присутствует в лагранжиане взаимодействия (именно поэтому его принято писать в лагранжиане). Это происходит «почти» полностью в любой диаграмме. Вернемся снова ко второму порядку. Пусть мы оба оператора $\varphi(x)$ спариваем с a^- — это можно сделать $2!$ способами. Аналогично, оставшиеся два $\varphi(y)$ также дадут $2!$ при спаривании с a^+ . Итого мы имеем общий коэффициент перед этой диаграммой (см. обсуждение появления множителя 72 в предыдущем разделе)

$$\frac{1}{4!4!} 2!2! \frac{4!}{2!} \frac{4!}{2!2!} = \frac{1}{2!}$$

Мы видим, что $4!^2$ в знаменателе «почти» сократился — остался только $1/2!$. Этот множитель — $1/2!$, — называется симметричным фактором диаграммы. Несложно убедиться, что его происхождение связано с тем, что две вершины диаграммы связаны одинаковыми линиями.

Сформулируем теперь правила Фейнмана для вычисления матричных элементов S -матрицы в импульсном пространстве. Необходимо

- 0) Построить диаграммную технику для данной теории³ (см. Таблицу 3.1). Для этого, имея в распоряжении свободный лагранжиан, необходимо проквантовать теорию: решить свободные (линейные) уравнения движения, изучить свойства поляризационных частей волновых функций $v_\sigma^\pm(\mathbf{k})$, представляющих собой базис в простран-

³Этот пункт общий для всех процессов в данной теории.

стве решений соответствующих уравнений (эти функции будут соответствовать внешним линиям диаграмм), выяснить физический смысл операторов $a_{\sigma}^{\pm}(\mathbf{k})$. Включив в рассмотрение δ -образный источник, найти пропагаторы полей $G_{\alpha\beta}(q)$ (внутренние линии диаграмм), являющиеся решениями соответствующих линейных неоднородных уравнений. Используя лагранжиан взаимодействия и изучая процессы в первом порядке теории возмущений, построить вершины взаимодействий.

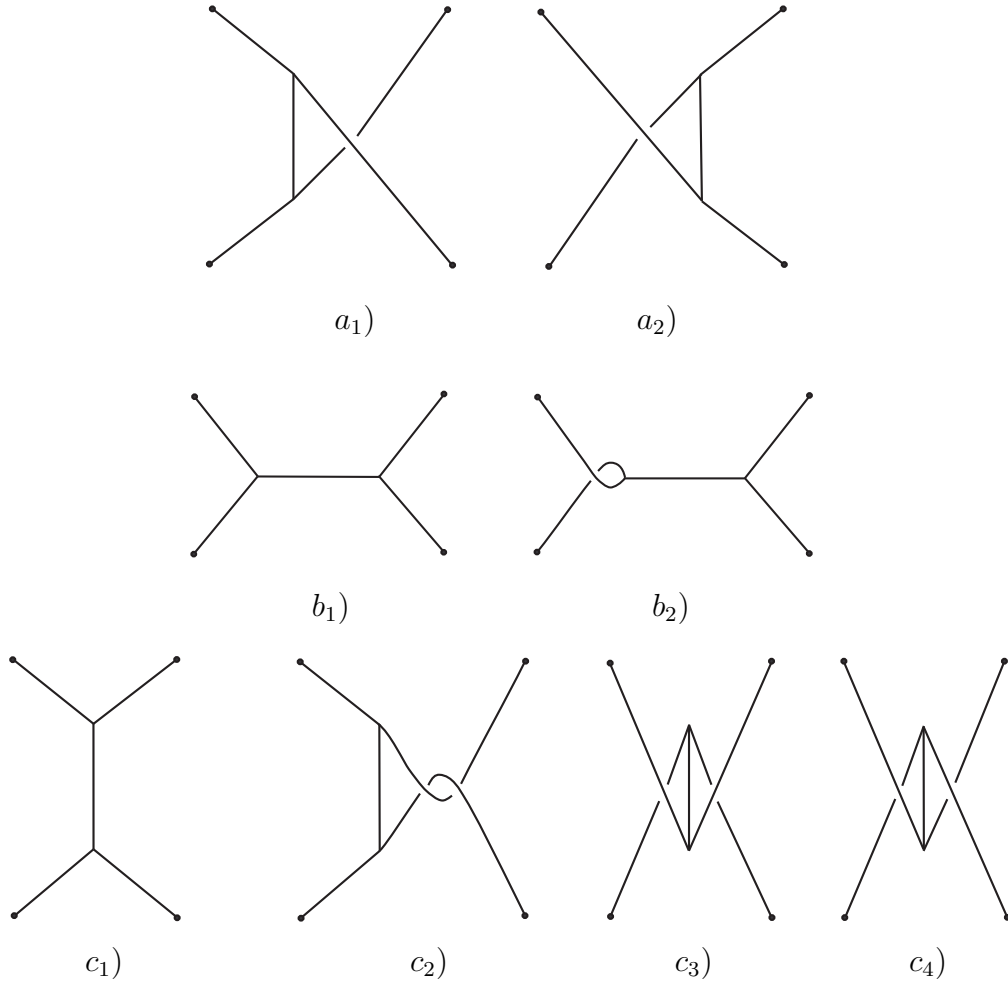


Рис. 3.11 Примеры топологически эквивалентных диаграмм для процесса $2 \rightarrow 2$. Расстановка импульсов и обозначения те же, что и на рис. 3.10. Диаграммы a_1 и a_2 эквивалентны, так как существует топологическое преобразование диаграммы a_2 , – поворот внутренней линии на 180° относительно оси, лежащей в плоскости рисунка и ортогональной к этой линии, – переводящее эту диаграмму в a_1 . Заметим, что это преобразование эквивалентно перестановке вершин диаграммы, которое в точности сокращает фактор $1/n!$, возникающий из разложения T -экспоненты (см. обсуждение в тексте). Диаграмма b_2 переводится в диаграмму b_1 путем закручивания левого конца внутренней линии при фиксированном правом конце. Это преобразование эквивалентно перестановке линий тождественных частиц и приводит к появлению произведения факториалов в формуле (3.69). Диаграммы c_1 и c_2 эквивалентны, так как внешние линии выходящих частиц переплетаются целое число раз. Диаграмма c_3 переходит в c_1 , а c_4 – в c_2 (а значит, и в c_1) путем того же преобразования, что переводит a_2 в a_1 .

- 1) Используя элементы диаграммной техники, построенной в предыдущем пункте, нарисовать все топологически неэквивалентные диаграммы в данном порядке теории возмущений с i входящими линиями и f — выходящими. Для того чтобы выяснить,

являются ли две диаграммы топологически неэквивалентными, можно поступить следующим образом. Сориентируем внешние линии диаграмм на рисунке одинаковым образом, считая их различными (так как им в общем случае будут соответствовать разные импульсы). Будем считать, что концы внешних линий «приклеены» к плоскости рисунка (являются неподвижными). Будем также считать, что сами линии (внешние и внутренние) являются бесконечно растяжимыми и могут выходить из плоскости рисунка; вершины также не прикреплены к плоскости рисунка. Если одна из линий один или несколько раз полностью оборачивается вокруг другой, то такую конфигурацию будем считать эквивалентной конфигурации без оборотов. Линии, соответствующие частицам различных типов, считаются различными. Если линия имеет стрелку (ориентируемая линия), соответствующую, например, заряженной частице, то учитывается направление стрелки. Если существует топологическое (непрерывное) преобразование, переводящее при сформулированных условиях одну диаграмму в другую (с учетом возможной ориентации линий со стрелками), то диаграммы являются топологически эквивалентными, в противном случае — нет. Примеры топологически неэквивалентных диаграмм представлены на рис. 3.10, а эквивалентных — на рис. 3.11. Подчеркнем также, что топологически неэквивалентные диаграммы должны приводить к различным функциям внешних импульсов.

- 2) Каждой линии (внутренней и внешней) приписать импульс.
- 3) Каждой внешней линии начального состояния приписать фактор $v_{\sigma}^{-}(\mathbf{k}_{\text{in}})$ (см. Таблицу 3.1).
- 4) Каждой внешней линии конечного состояния приписать фактор $v_{\delta}^{+}(\mathbf{k}_{\text{out}})$ (см. Таблицу 3.1).
- 5) Каждой вершине сопоставить фактор (см. Таблицу 3.1)

$$igO_{\alpha} \prod_k m_k! \delta(\sum p_j), \quad (3.69)$$

где p_j — импульсы, входящие в вершину (с учетом направления), g — константа связи, O_{α} — структура, присутствующая в лагранжиане (может зависеть от импульса, если лагранжиан взаимодействия содержит производные, или (и) быть матрицей), m_k — число одинаковых полей k -го типа в вершине, например, для теории φ^4 произведение в (3.69) будет равно $4!$, для теории $\varphi^2\chi^2 - 2!2! = 4$, для теории $\varphi^2\chi\chi^* - 2!$ (так как комплексное поле χ не тождественно χ^*).

- 6) Каждой внутренней линии сопоставить фактор (см. Таблицу 3.1)

$$G_{\alpha\beta}(q_j).$$

- 7) Для данной диаграммы перемножить все полученные в пунктах 3) – 6) факторы. При этом необходимо следовать правилам матричного умножения. Следует также учитывать, что элементы, соответствующие начальным состояниям следует располагать правее последующих элементов, а слева располагать элементы, соответствующие вылетающим частицам, что соответствует тому, что начальное состояние — это

кет-вектор (стоит справа), а конечное – бра-вектор (стоит слева). В соответствии с нашим соглашением о том, что мы рисуем диаграммы слева направо (см. подпись к рис. 3.10) это означает, что, читая диаграмму слева направо, мы выписываем произведение элементов в обратном порядке, справа налево. Чтобы не допустить ошибки можно явно восстановить все скрытые индексы (например, спинорные индексы (α) у спинорных функций $v_{\alpha}^{\pm, \sigma}$, γ -матриц $(\gamma_{\alpha\beta}^{\mu})$ и т.п.). При этом необходимо следовать правилу, что индекс, соответствующий линии, входящей в вершину, должен совпадать с индексом структуры, соответствующей вершине. Затем расставить множители (их можно переставлять, так как при явно выписанном индексе множители представляют собой обычные числа) в таком порядке, чтобы одинаковые индексы соседствовали. После этого можно снова опустить повторяющиеся индексы, считая, что мы следуем правилам матричного умножения. Следующая цепочка демонстрирует сказанное:

$$(\hat{k} - m)_{\beta\gamma} \gamma_{\alpha\beta}^{\mu} \bar{v}_{\alpha}^{+, \sigma} = \bar{v}_{\alpha}^{+, \sigma} \gamma_{\alpha\beta}^{\mu} (\hat{k} - m)_{\beta\gamma} = \bar{v}^{+, \sigma} \gamma^{\mu} (\hat{k} - m).$$

- 8) Проинтегрировать по всем внутренним импульсам.
- 9) Умножить на $(2\pi)^4$ для каждой вершины и на $1/(2\pi)^4$ для каждого пропагатора. В принципе, эти факторы можно было бы включить в определение вершин и пропагаторов, но большинство из них, как легко видеть, сокращаются, и нет надобности их выписывать каждый раз (см. также обсуждение ниже).
- 10) а) Умножить на -1 для каждой замкнутой фермионной петли.
б) Умножить на -1 если эта диаграмма отличается от другой такой же диаграммы только перестановкой двух одних и тех же внешних фермионных линий.
- 11) Умножить на симметричный фактор

$$\frac{1}{S} = \frac{1}{\Xi \prod_v 2^{\beta} (k!)^{\alpha_k}},$$

где произведение берется по всем вершинам, α_k — число пар вершин, связанных k одинаковыми самосопряженными линиями, β — число линий, связывающих вершину саму с собой⁴, Ξ — число перестановок вершин, которые при всех фиксированных линиях оставляют диаграмму неизменной. Примеры показаны на рис. 3.12

- 12) Искомая амплитуда равна сумме по всем диаграммам (пункт 1)) выражений, полученных в пунктах 2) – 11) для каждой диаграммы.

Продемонстрируем сформулированные правила на примере диаграмм рассеяния $2 \rightarrow 2$ в теории φ^4 во втором порядке. Существует три топологически неэквивалентные диаграммы (см. рис. 3.13), соответствующие вкладам (3.66), (3.67) и (3.68). Соответствующие

⁴В случае записи лагранжиана в виде нормального произведения таких вершин нет.



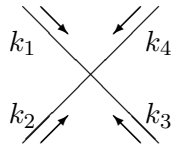
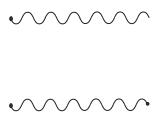
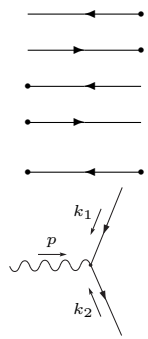
Тип поля	Элемент диаграммной техники	Математическое выражение	Графическое представление
Действительное скалярное поле	Внешняя линия (входящая или выходящая)	1	
	Внутренняя линия	$\frac{i}{k^2 - m^2 + i\epsilon}$	
	Вершина самодействия $\mathcal{L}_{\text{int}} = -\frac{\lambda}{4!}\varphi^4$	$-i\lambda\delta(k_1 + k_2 + k_3 + k_4)$	
ЭМП	Внешняя линия входящая выходящая Внутренняя линия	$e_\mu^\alpha(\mathbf{k})$ ($\alpha = 1, 2$) $e_\mu^{*\alpha}(\mathbf{k})$ ($\alpha = 1, 2$) $\frac{-i}{k^2 + i\epsilon} \times$ $\left(g_{\mu\nu} - (1 - \xi)\frac{k_\mu k_\nu}{k^2}\right)$	
Фермионы	Входящая частица Входящая античастица Выходящая частица Выходящая античастица Внутренняя линия Взаимодействие фермионов с фотонами $\mathcal{L}_{\text{int}} = e\bar{\psi}\gamma_\mu A^\mu\psi$	$\bar{v}_\sigma^-(\mathbf{k})$ ($\sigma = 1, 2$) $v_\sigma^-(\mathbf{k})$ ($\sigma = 1, 2$) $v_\sigma^+(\mathbf{k})$ ($\sigma = 1, 2$) $\bar{v}_\sigma^+(\mathbf{k})$ ($\sigma = 1, 2$) $\frac{i}{\hat{k} - m + i\epsilon}$ $ie\gamma_\mu\delta(k_1 + k_2 + p)$	

Таблица 3.1

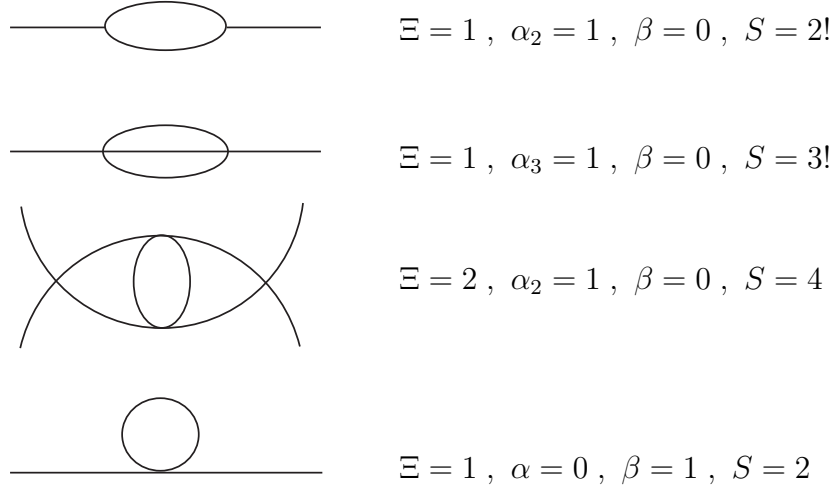


Рис. 3.12

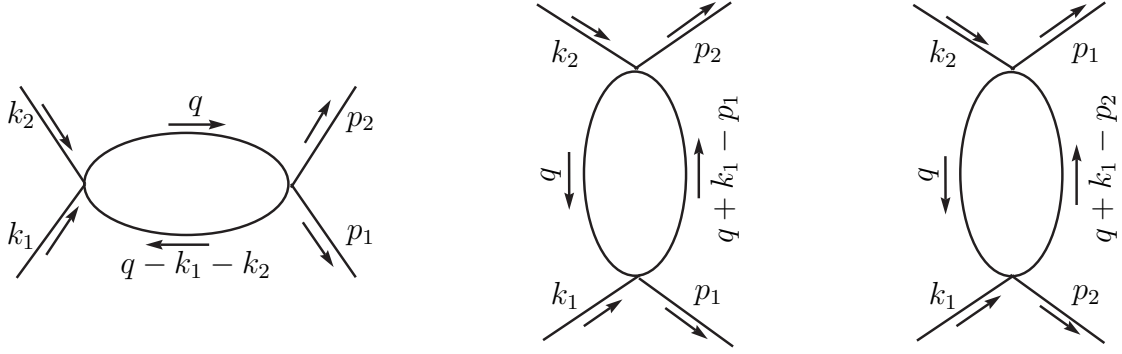


Рис. 3.13

выражения выписываем по правилам Фейнмана и после снятия интегрирования по внутренним импульсам с помощью δ -функций получаем,

$$S_{(1)} = \frac{\lambda^2}{2} (2\pi)^4 \delta(p_1 + p_2 - k_1 - k_2) \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{1}{(q^2 - m^2 + i\epsilon)((q - k_1 - k_2)^2 - m^2 + i\epsilon)}$$

$$S_{(2)} = \frac{\lambda^2}{2} (2\pi)^4 \delta(p_1 + p_2 - k_1 - k_2) \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{1}{(q^2 - m^2 + i\epsilon)((q + k_1 - p_1)^2 - m^2 + i\epsilon)}$$

$$S_{(3)} = \frac{\lambda^2}{2} (2\pi)^4 \delta(p_1 + p_2 - k_1 - k_2) \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{1}{(q^2 - m^2 + i\epsilon)((q + k_1 - p_2)^2 - m^2 + i\epsilon)}$$

Оставшиеся интегрирования мы рассмотрим в следующих главах. Оканчательное выражение для амплитуды рассеяние $2 \rightarrow 2$ вплоть до второго порядка теории возмущений будет

$$\langle 2|S|2 \rangle = -i\lambda(2\pi)^4 \delta(p_1 + p_2 - k_1 - k_2) + \sum_{\alpha=1}^3 S_{(\alpha)} + \mathcal{O}(\lambda^3),$$

где мы отбросили тривиальное слагаемое, соответствующие нулевому порядку теории возмущений $S_0 = 1$, а первое слагаемое соответствует первому порядку теории возмущений.

Из правил Фейнмана следует, что внутренним линиям нужно сопоставлять пропагатор, при этом импульс, протекающий по пропагатору не удовлетворяет дисперсионному соотношению $q^2 = m^2$, то есть такая линия не соответствует *реальной частице*, в противоположность внешней линии. В связи с этим внешние линии называют линиями *реальных частиц*, а внутренние — *виртуальных частиц*. Заметим, что, вообще говоря, не обязательно рассматривать диаграммы, содержащие в качестве внешних только реальные частицы. Можно рассматривать и диаграммы, у которых все или несколько внешних частиц виртуальные, то есть сопоставлять внешним линиям пропагаторы. Такие диаграммы можно рассматривать как поддиаграммы диаграмм, описывающих процессы с участием только реальных частиц. Кроме того, такие диаграммы описывают более информативные, нежели элементы S -матрицы, величины (поскольку на внешние импульсы не наложены условия массовой поверхности) называемые *полными функциями Грина*. Мы будем рассматривать эти функции в следующей главе.

Кроме того, часть интегралов по внутренним импульсам снимется за счет δ -функций. При этом должна остаться одна δ -функция, выражающая общий закон сохранения импульса. Легко, однако, убедиться, что число оставшихся интегралов по внутренним импульсам будет равно числу независимых петель данной диаграммы. Поэтому диаграммы, не содержащие петель, не будут содержать вообще интегралов и будут являться дробно-рациональными функциями внешних импульсов. Такие диаграммы называются *древесными*, а соответствующие приближение — *древесным* или *Борновским*. Из этого же наблюдения следует, что все факторы $(2\pi)^4$ в вершинах взаимодействия сократятся с $1/(2\pi)^4$ из пропагаторов за исключением одного фактора $(2\pi)^4$, который принято оставлять у δ -функции, выражающей общий закон сохранения импульсов, а факторов $1/(2\pi)^4$ будет ровно столько, сколько петлевых интегралов.

Задача 135 На примере рассеяния электрона на электроне продемонстрировать пункт 10б) правил Фейнмана.

Задача 136 Рассмотреть скалярную электродинамику — теорию взаимодействия фотонов с комплексным скалярным полем. Включив в лагранжиан все калибровочно-инвариантные члены взаимодействия не выше четвертой степени по полям, построить диаграммную технику.

Задача 137 Рассмотреть теорию массивного действительного векторного поля. Включить в лагранжиан все члены самодействия этого поля не выше четвертого порядка. Построить диаграммную технику. То же самое для комплексного массивного векторного поля.

Задача 138 Построить диаграммную технику для всех моделей и всех лагранжианов взаимодействия, приведенных в качестве примеров в разделе 3.1.

Задача 139 Являются ли диаграммы, представленные на рисунках 3.14, 3.15, 3.16, топологически неэквивалентными?



Рис. 3.14

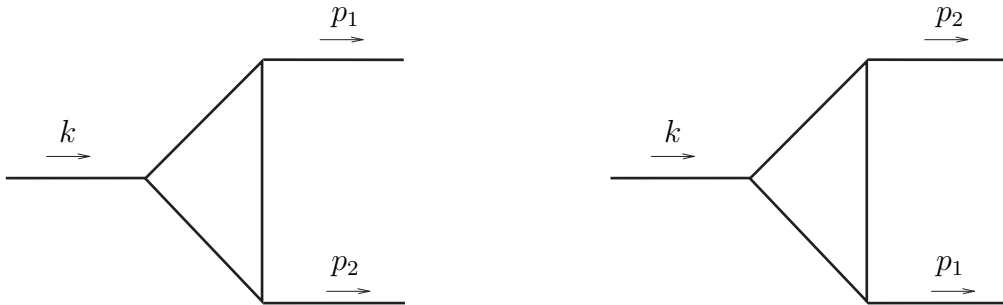


Рис. 3.15

Задача 140 Предложить модели, в которых могут возникать диаграммы, представленные на рисунках 3.10, 3.11, 3.14, 3.15, 3.16. В предложенных моделях выписать математические выражения для всех представленных диаграмм, выполнив максимально возможное число интегрирований по внутренним импульсам с помощью присутствующих в вершинах δ -функций. Проверить, что топологически эквивалентные диаграммы приводят к одинаковым функциям внешних импульсов, а неэквивалентные – нет.

Задача 141 В теории с лагранжианом взаимодействия $-\lambda/4\varphi^4$ в первом нетривиальном порядке вычислить амплитуды распада одной виртуальной частицы в 3 и в 5 реальных частиц с произвольными импульсами. Чему равны эти амплитуды в частном

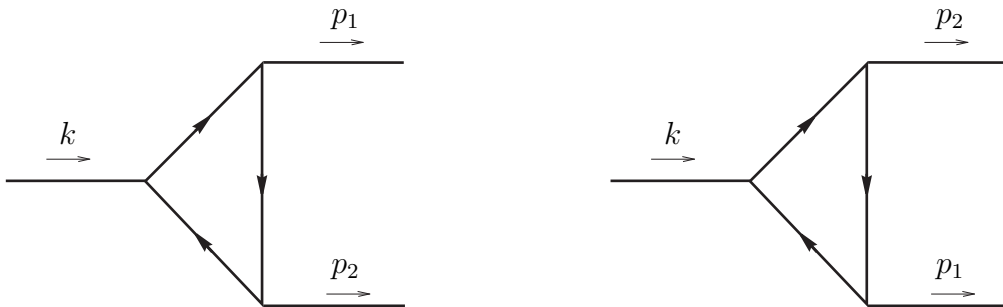


Рис. 3.16

случае нулевых пространственных импульсов частиц? Какому матричному элементу и какому оператору соответствуют найденные амплитуды?

Включим в рассмотрение спинорное поле и предположим, что лагранжиан взаимодействия фермионов и поля φ имеет вид $ig\varphi\bar{\psi}\gamma_5\psi$ (теория Юкавы). Предполагая, что теория инвариантна относительно P -преобразований, определить внутреннюю четность бозонов. Считая, что $g \ll \lambda$ найти лидирующий вклад в амплитуды аннигиляции фермион-антифермионной пары в 3 и в 5 частиц поля φ .

Задача 142 Рассмотрим теорию скалярного поля с лагранжианом

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial\varphi)^2 - \frac{m^2}{2}\varphi^2 + \frac{C}{2}(\partial\varphi)^2 - \frac{\mu^2}{2}\varphi^2.$$

Считая константы C и μ малыми параметрами, построить диаграммную технику. Рассмотреть процесс распространения одной виртуальной частицы в этой теории (в нулевом приближении такой процесс дается просто пропагатором поля) во всех порядках теории возмущений. Просуммировать все диаграммы и сделать вывод.

3.7 Вычисление вероятностей процессов

В предыдущем разделе мы научились строить матричные элементы S -матрицы. В этом разделе перейдем к вычислению физических величин — вероятностей процессов и связанных с ними величин. Для этого заметим сперва, что если выключить все взаимодействия, то $S = 1$. Ясно, что мы не интересуемся вероятностями в отсутствие взаимодействия, поэтому полезно эту 1 из S -матрицы выделить. С этой целью определим T -матрицу по формуле

$$S = 1 + iT.$$

Именно эта матрица характеризует взаимодействие, и именно для нее мы построили диаграммную технику (вспомним, что в начале предыдущего раздела мы договорились не рассматривать процессы без изменения импульса). Запишем матричный элемент T -матрицы, введя M -матрицу и выделив δ -функцию, выражающую закон сохранения импульса:

$$T_{fi} = (2\pi)^4 \delta^4(p_f - k_i) M_{fi},$$

где k_i и p_f — суммарные импульсы входящих и выходящих частиц соответственно. Здесь стоит отметить, что S -матрица может содержать *несвязные* части, на языке диаграмм Фейнмана такие части соответствуют несвязным диаграммам (например первой диаграмме на рис. 3.7). Однако, такие части соответствуют просто произведению двух независимых процессов, например, рассеянию $2 \rightarrow 2$ на ускорителе в ЦЕРНе и рассеянию $2 \rightarrow 2$ на Луне. Ясно, что такие процессы нас не интересуют. Поэтому в дальнейшем мы будем интересоваться только связными частями. Для таких частей можно показать, что M -матрица не содержит больше δ -функций. Этим фактом объясняется удобство введения M -матрицы.

По определению, $|T|^2$ дает ненормированную вероятность перехода из начального состояния i в конечное f (мы всюду подразумеваем, что в начальном состоянии содержится

i частиц, а в конечном — f).

$$w_{fi} = |T_{fi}|^2 = (2\pi)^4 \delta^4(p_f - k_i) (2\pi)^4 \delta^4(0) |\mathcal{M}_{fi}|^2 .$$

Эта вероятность содержит $\delta(0)$, что является артефактом того, что мы работаем в бесконечном 4-объеме. Для того чтобы иметь дело с конечными величинами, введем конечный объем V и конечный промежуток времени T . Тогда в пределе $V, T \rightarrow \infty$ имеем $(2\pi)^4 \delta^4(0) = VT$, что просто следует из определения $\delta(p)$. Далее, чтобы получить вероятность перехода в группу состояний в интервале импульсов $d\mathbf{p}$ во всем пространстве, мы должны умножить w_{fi} на элемент фазового объема

$$d\bar{\Phi} = \prod_{l=1}^f \frac{d\mathbf{p}_l}{(2\pi)^3} V . \quad (3.70)$$

Задача 143 Объяснить появление фактора $1/(2\pi)^3$ в формуле (3.70).

Для того чтобы получить нормированную вероятность, необходимо вспомнить, как мы нормировали свои состояния. С этой целью вычислим нормировку одночастичного состояния. Имеем

$$\langle \mathbf{k} | \mathbf{k}' \rangle = \langle 0 | a_{\mathbf{k}}^- a_{\mathbf{k}'}^+ | 0 \rangle = \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \xrightarrow{\mathbf{k} \rightarrow \mathbf{k}'} \frac{V}{(2\pi)^3} . \quad (3.71)$$

Аналогично, легко убедиться, что нормировка n -частичного состояния есть просто произведение нормировок одночастичных состояний. Однако в предыдущем разделе (см. стр. 120) мы опустили некоторые множители при вычислении матричных элементов. Здесь самое время о них вспомнить. На самом деле опустив эти множители, мы изменили нормировку. Новая нормировка состояния стала

$$\langle \mathbf{k} | \mathbf{k} \rangle = 2EV , \quad (3.72)$$

где $E \equiv k_0 = \sqrt{\mathbf{k}^2 + m^2}$ — энергия частицы.

Задача 144 Показать, что отбрасывание множителей в определении поля на стр. 120 действительно приводит к изменению нормировки состояния от (3.71) к (3.72).

Более того, нормировка (3.71) не является релятивистски-инвариантной, в то время, как (3.72) является.

Задача 145 Показать, что нормировка (3.72) является релятивистским инвариантом, а (3.71) — нет.

Поэтому было бы более последовательно определять, скажем, одночастичное состояние не как $a_{\mathbf{k}}^+ | 0 \rangle$, а как

$$|\mathbf{k}\rangle = \sqrt{2k_0 \cdot (2\pi)^3} a_{\mathbf{k}}^+ | 0 \rangle . \quad (3.73)$$

Такое определение привело бы как раз к сокращению факторов, которые мы отбросили на стр. 120. В дальнейшем мы будем подразумевать, что состояния определены именно таким образом.

Таким образом, для получения нормированной вероятности, мы должны вероятность w_{fi} разделить на нормировочный фактор

$$\mathcal{N} = \prod_{j=1}^i 2E_j V \prod_{l=1}^f 2E_l V .$$

Тогда нормированная вероятность перехода в группу состояний в единицу времени имеет вид,

$$dw_{fi} = \frac{w_{fi}}{T} \frac{d\bar{\Phi}}{\mathcal{N}} = (2\pi)^4 \delta^4(p_f - k_i) V |\mathcal{M}|^2 \prod_{l=1}^i \frac{1}{2E_l V} \prod_{j=1}^f \frac{1}{2E_j V} d\bar{\Phi}$$

или

$$dw_{fi} = \frac{V |\mathcal{M}|^2}{\prod_{l=1}^i 2E_l V} d\Phi , \quad (3.74)$$

где

$$d\Phi = (2\pi)^4 \delta^4(p_f - k_i) \prod_{j=1}^f \frac{d\mathbf{p}_j}{2E_j (2\pi)^3} \quad (3.75)$$

– новое определение элемента фазового объема.

Задача 146 Показать, что элементы фазового объема (3.70) и (3.75) являются лоренцевыми скалярами.

Формула (3.74) является общей формулой для нахождения дифференциальной вероятности перехода (то есть в элемент фазового объема в единицу времени). Однако, при нахождении полной вероятности, т.е. при интегрировании по фазовому объему, надо проявлять осторожность. Дело в том, что если в конечном состоянии есть тождественные частицы, то при интегрировании мы будем учитывать некоторые физически одни и те же состояния несколько раз (см. обсуждение в разделе 1.2). Действительно, пусть в конечном состоянии у нас есть две одинаковых частицы, но с разными импульсами p_1 и p_2 . Тогда при интегрировании по всему фазовому пространству мы учтем это состояние дважды: как состояние с импульсами (p_1, p_2) и как состояние с импульсами (p_2, p_1) . Чтобы не делать этого, мы либо должны ограничить область интегрирования, либо проинтегрировать по всему фазовому пространству и умножить на

$$S = \prod_n \frac{1}{m_n!} ,$$

где произведение берется по всем группам тождественных частиц, а m_n — число частиц в n группе. Таким образом, имеем

$$\int_{\mathbf{R}} d\Phi = S \int d\Phi .$$

Исследуем теперь частные случаи формулы (3.74).

Ширина распада. Рассмотрим случай, когда в начальном состоянии находится одна частица, т.е. мы имеем дело с процессом $1 \rightarrow f$ или распадом. Имеем тогда для числа распадов в единицу времени

$$d\Gamma = \frac{|\mathcal{M}|^2}{2E} d\Phi . \quad (3.76)$$

Γ называется *шириной* и связана с временем жизни частицы

$$\tau = \frac{1}{\Gamma} .$$

Сечение. Рассмотрим теперь случай, когда в начальном состоянии имеются две частицы, т.е. мы имеем дело с процессом $2 \rightarrow f$ или рассеянием. На практике, однако, имеют дело не с числом столкновений, а с сечением процесса. Перейдем в систему отсчета, где частица 2 покоится (мишень), такая система называется *лабораторной*. В этой системе на нее налетает частица 1. Однако, на эксперименте обычно налетает не одна частица, а пучок частиц. По определению сечения σ , полное число столкновений частиц пучка с мишенью дается формулой

$$N_s = \sigma v_{\text{отн}} T n_1 ,$$

где n_1 — плотность частиц в пучке (т.е. число частиц в единице объема), а $v_{\text{отн}}$ — относительная скорость частиц, которая по определению определяется в системе покоя одной из частиц. С другой стороны, по определению вероятности перехода в единицу времени полное число столкновений

$$N_s = w_{2f} T N_1 = w_{2f} T V n_1 .$$

Сравнивая эти две формулы, находим для дифференциального сечения

$$d\sigma = \frac{dw_{2f}}{j} ,$$

где $j = v_{\text{отн}}/V$ — плотность потока.

Таким образом, имеем для *дифференциального сечения* в системе покоя второй частицы

$$d\sigma = \frac{1}{2E_1} \frac{1}{2m_2} \frac{|\mathcal{M}|^2}{v_{\text{отн}}} d\Phi . \quad (3.77)$$

Запишем эту формулу так, чтобы она была пригодна в любой системе отсчета. Для этого выразим $v_{\text{отн}}$, которая по своему определению является инвариантом, через импульсы частиц. Замечаем, что в лабораторной системе

$$k_1 k_2 = \frac{m_1}{\sqrt{1 - v_{\text{отн}}^2}} m_2 . \quad (3.78)$$

Задача 147 Доказать формулу (3.78).

Из (3.78) имеем

$$v_{\text{отн}} = \sqrt{1 - \frac{m_1^2 m_2^2}{(k_1 k_2)^2}} .$$

Кроме того, сечение (как оно определено), тоже есть величина инвариантная. Единственный множитель в (3.77), который не инвариантен при преобразованиях Лоренца в таком виде, как он записан, это $1/(m_2 E_1)$. Придадим ему инвариантный вид:

$$m_2 E_1 = E_2 E_1 - \mathbf{0} \cdot \mathbf{k}_1 = k_1 k_2 .$$

Собирая все вместе, получаем окончательно для сечения в любой системе отсчета

$$d\sigma = \frac{|\mathcal{M}|^2}{4\sqrt{(k_1 k_2)^2 - m_1^2 m_2^2}} d\Phi \equiv \frac{|\mathcal{M}|^2}{4I} d\Phi , \quad (3.79)$$

где

$$I = \sqrt{(k_1 k_2)^2 - m_1^2 m_2^2} \quad (3.80)$$

— называется *фактором потока*. Подчеркнем, что формула (3.79) дает один и тот же результат при вычислениях в разных системах отсчета — дифференциальное сечение в лабораторной системе.

Двухчастичное конечное состояние. Рассмотрим процесс $i \rightarrow 2$. В этом случае фазовый объем (3.75) легко преобразовать к более простому виду.

Итак, пусть в конечном состоянии у нас имеются всего две частицы с массами m_1 и m_2 . Перейдем в систему центра масс этих двух частиц. Из закона сохранения импульса очевидно, что это и система центра масс начального состояния. Обозначим полную энергию начального состояния как $E_{\text{см}}$, а четырехимпульс как $k = (E_{\text{см}}, 0, 0, 0)$. Фазовый объем

$$d\Phi_2 = \frac{1}{(2\pi)^2} \delta^4(k - p_1 - p_2) \frac{d^3 p_1 d^3 p_2}{4E_1 E_2} .$$

Проинтегрируем это выражение по \mathbf{p}_2 с помощью δ -функции и получим $\mathbf{p}_1 = -\mathbf{p}_2$, что и должно быть в системе центра инерции. Фазовый объем при этом становится равным

$$d\Phi_2 = \frac{1}{(2\pi)^2} \delta(E_{\text{см}} - E_1 - E_2) \frac{d^3 p_1}{4E_1(\mathbf{p}_1)E_2(\mathbf{p}_1)} = \frac{1}{(2\pi)^2} \delta(E_{\text{см}} - E_1 - E_2) \frac{p_1^2 dp_1 d\Omega}{4E_1(p_1)E_2(p_1)} ,$$

где в последнем равенстве мы перешли к сферическим координатам, $p_1 \equiv |\mathbf{p}_1|$; Ω — телесный угол. Снимем теперь интеграл по p_1 с помощью оставшейся δ -функции. Получаем

$$d\Phi_2 = \frac{1}{16\pi^2} \frac{|\mathbf{p}_1| d\Omega}{E_1(p_1) + E_2(p_1)} = \frac{1}{16\pi^2} \frac{|\mathbf{p}_1| d\Omega}{E_{\text{см}}} ,$$

где $|\mathbf{p}_1|$ определяется из условия

$$E_{\text{см}} = \sqrt{\mathbf{p}_1^2 + m_1^2} + \sqrt{\mathbf{p}_1^2 + m_2^2} .$$

В случае равных масс

$$|\mathbf{p}_1| = \frac{\sqrt{E_{\text{cm}}^2 - 4m^2}}{2} ,$$

и фазовый объем принимает вид

$$d\Phi_2 = \frac{1}{32\pi^2} \frac{\sqrt{E_{\text{cm}}^2 - 4m^2}}{E_{\text{cm}}} d\Omega .$$

Если теперь в начальном состоянии только одна частица с массой M , т.е. мы имеем дело с двухчастичным распадом в системе покоя этой частицы, то формула (3.76) принимает вид

$$d\Gamma = \frac{|\mathcal{M}(\mathbf{p}_1)|^2 |\mathbf{p}_1|}{32\pi^2 M^2} d\Omega . \quad (3.81)$$

Очевидно, что в случае распада неполяризованной частицы, матричный элемент не зависит от направления \mathbf{p}_1 , поэтому мы можем проинтегрировать в формуле (3.81) по углам и получить полную ширину

$$\Gamma = \frac{|\mathcal{M}(|\mathbf{p}_1|)|^2 |\mathbf{p}_1|}{8\pi M^2} , \quad (3.82)$$

при этом под $|\mathcal{M}(|\mathbf{p}_1|)|^2$ понимается усредненный по всем возможным поляризациям квадрат матричного элемента (об усреднении см. ниже).

Рассмотрим теперь в начальном состоянии 2 частицы с массами M_1 и M_2 , т.е. процесс $2 \rightarrow 2$. Пусть четырехимпульсы входящих частиц k_1 и k_2 . Удобно ввести так называемые *переменные Мандельштама*

$$\begin{aligned} s &= (k_1 + k_2)^2 = (p_1 + p_2)^2 \stackrel{\text{cm}}{=} E_{\text{cm}}^2 , \\ t &= (k_1 - p_1)^2 = (k_2 - p_2)^2 , \\ u &= (k_1 - p_2)^2 = (p_1 - k_2)^2 . \end{aligned} \quad (3.83)$$

Эти переменные определяются в любой системе координат для любых четырех импульсов, удовлетворяющих закону сохранения

$$k_1 + k_2 = p_1 + p_2 .$$

Условие массовой поверхности в общем случае не накладываемся. На массовой поверхности переменные (3.83) удовлетворяют условию

$$s + t + u = m_1^2 + m_2^2 + M_1^2 + M_2^2 . \quad (3.84)$$

Задача 148 Проверить формулу (3.84).

Матричный элемент при этом зависит только от этих переменных.

Для двухчастичного сечения имеем

$$d\sigma = \frac{|\mathcal{M}|^2 |\mathbf{p}_1|}{64\pi^2 I E_{\text{cm}}} d\Omega . \quad (3.85)$$

В случае, когда все четыре массы равны, эта формула имеет вид

$$d\sigma = \frac{|\mathcal{M}|^2}{64\pi^2} \frac{1}{E_{\text{cm}}^2} d\Omega .$$

В случае произвольных масс, используя определение s легко найти, что

$$I^2 \stackrel{(3.80)}{=} \frac{1}{4} [s - (M_1 + M_2)^2] [s - (M_1 - M_2)^2]$$

и

$$|\mathbf{k}_1| = |\mathbf{k}_2| = \frac{I}{\sqrt{s}} . \quad (3.86)$$

Далее, используем определение t . Имеем

$$t = m_1^2 + M_1^2 - 2p_1^0 k_1^0 + 2|\mathbf{p}_1||\mathbf{k}_1| \cos \theta .$$

Но энергия и модули импульсов частиц целиком определяются полной энергией, т.е. переменной s , поэтому

$$dt = 2|\mathbf{p}_1||\mathbf{k}_1| d\cos \theta .$$

Тогда элемент телесного угла в (3.85) можно представить в виде

$$d\Omega = -d\varphi d\cos \theta = \frac{d\varphi d(-t)}{2|\mathbf{p}_1||\mathbf{k}_1|} , \quad (3.87)$$

где φ — азимутальный угол \mathbf{p}_1 по отношению к \mathbf{k}_1 . Подставляя формулы (3.87), (3.86) в (3.85), получаем⁵

$$d\sigma = \frac{1}{64\pi} |\mathcal{M}|^2 \frac{dt}{I^2} \frac{d\varphi}{2\pi} .$$

Если \mathcal{M} не зависит от φ , то по φ можно проинтегрировать, тогда сечение принимает вид

$$d\sigma = \frac{1}{64\pi} |\mathcal{M}|^2 \frac{dt}{I^2} .$$

Учет поляризации. Обычно в эксперименте поляризации начальных частиц не фиксируются, а конечных не измеряются. Это означает, что по поляризациям начальных частиц мы должны усреднить, а по поляризациям конечных просуммировать. Таким образом в формуле (3.74) и во всех следующих из нее мы должны заменить

$$|\mathcal{M}|^2 \rightarrow \prod_{k=1}^i \frac{1}{s_k} \times |\bar{\mathcal{M}}|^2 ,$$

где произведение берется по всем начальным частицам, s_k — число поляризаций k -ой частицы, а черта на \mathcal{M} означает суммирование по поляризациям как начальных, так и конечных частиц. Что касается s_k , то для массивных частиц

$$s_k = 2S_k + 1 ,$$

⁵В этой формуле мы опустили знак “—”, как несущественный. Этот знак включается в определение пределов интегрирования по t . Результат, конечно, должен быть положительным.

где S_k — спин частицы. Для безмассовых частиц такой формулы нет. Для безмассовых векторных частиц (например, фотон, глюон) и для гравитона $s_k = 2$, для безмассового кирального фермиона (для нейтрино) $s_k = 1$.

Суммирование по поляризациям в $|\mathcal{M}|^2$ осуществляется по следующим формулам: для фермионов

$$v_{\alpha}^{\sigma,+}(\mathbf{k})\bar{v}_{\beta}^{\sigma,-}(\mathbf{k}) = (\hat{k} - m)_{\alpha\beta} , \quad (3.88)$$

$$v_{\alpha}^{\sigma,-}(\mathbf{k})\bar{v}_{\beta}^{\sigma,+}(\mathbf{k}) = (\hat{k} + m)_{\alpha\beta} , \quad (3.89)$$

для массивного векторного бозона

$$\sum_{\sigma=1}^3 e_{\mu}^{*\sigma}(\mathbf{k})e_{\nu}^{\sigma}(\mathbf{k}) = - \left(g_{\mu\nu} - \frac{k_{\mu}k_{\nu}}{m^2} \right) , \quad (3.90)$$

для фотона

$$\sum_{\sigma=1}^2 e_{\mu}^{*\sigma}(\mathbf{k})e_{\nu}^{\sigma}(\mathbf{k}) = -g_{\mu\nu} , \quad (3.91)$$

В случае, если поляризация фиксирована (нет суммирования по поляризациям), то для фермионов имеет место формула (нет суммирования по l)

$$v_{\alpha}^{l,\mp}(\mathbf{k})\bar{v}_{\beta}^{l,\pm}(\mathbf{k}) = \frac{1}{2}[(\hat{k} \pm m)(1 - \gamma_5 \hat{s})]_{\alpha\beta} ,$$

где

$$s^{\mu} = \begin{cases} s^0 = \mathbf{k}\mathbf{n}m \\ \mathbf{s} = \mathbf{n} + \frac{(\mathbf{k}\mathbf{n})\mathbf{k}}{m(m+E)} \end{cases} ,$$

\mathbf{n} — единичный вектор в направлении поляризации частицы в системе отсчета, где она покоится. Кроме того, имеем $s^2 = -1$, $sk = 0$. Для векторных частиц в случае фиксированной поляризации нужно подставить соответствующий вектор поляризации, например, в случае продольной поляризации массивного векторного бозона см. (3.94).

Получим формулы (3.90), (3.91) (формулы (3.88), (3.89) являются результатами задачи 62).

Получим сперва формулу (3.90). Напомним, что массивный векторный бозон имеет 3 поляризации: две из них поперечны к пространственному импульсу, и одна - продольна. Эти три поляризации и четырехимпульс должны образовывать базис в пространстве Минковского. Поэтому мы будем считать, что выбранные поляризации поперечны к четырехимпульсу и нормированными, то есть

$$k^{\mu}e_{\mu}^{\sigma} = 0 , \quad (3.92)$$

$$e_{\mu}^{*\sigma}e^{\mu\delta} = -\delta^{\sigma\delta} . \quad (3.93)$$

Далее, в результате суммирования по этим трем поляризациям мы должны получить симметричный тензор второго ранга, зависящим только от k_{μ} . Этот тензор, в силу (3.92),

должен являться проектором на поперечные к четырехимпульсу состояния. Запишем этот тензор в виде

$$A(k^2)g_{\mu\nu} + B(k^2)k_\mu k_\nu$$

Умножая этот тензор на k_μ и учитывая условие массовой поверхности $k^2 = m^2$, получаем

$$A + Bm^2 = 0 \Rightarrow B = -\frac{A}{m^2}.$$

Возьмем теперь след от этого тензора. Используя условие нормировки (3.93), находим

$$e_\mu^{*\sigma} e^{\mu\sigma} = -3 = A(g_{\mu\mu} - \frac{k^2}{m^2}) = 3A,$$

откуда и получаем формулу (3.90).

Задача 149 Используя явное выражение для продольного вектора

$$e_\mu^3 = \frac{1}{m} \left(|\mathbf{k}|, \mathbf{k} \frac{k_0}{|\mathbf{k}|} \right) \quad (3.94)$$

и для двух других произвольных, ортогональных друг к другу, к импульсу k_μ и к e_μ^3 , векторов e_μ^1 и e_μ^2 , проверить явным вычислением формулу (3.90).

Получим теперь формулу (3.91) для фотонов. Заметим сразу, что буквально метод, примененный для массивного векторного бозона, здесь не годится.

Задача 150 Объяснить, почему метод, примененный для массивного векторного бозона, не подходит для случая фотона.

Кроме того, если мы используем явные выражения для векторов поляризации (1.81), то мы увидим, что формула (3.91) неверна! Эту формулу надо понимать только как суммирование по поляризациям при вычислении квадрата матричных элементов. То есть знак равенства в ней надо трактовать как замену при вычислении матричных элементов.

Итак, пусть мы рассматриваем процесс с участием одного реального фотона (обобщение на случай нескольких фотонов тривиально). Тогда матричный элемент с поляризацией σ можно записать в виде

$$\mathcal{M}^\sigma = \mathcal{M}_\mu e^{\mu\sigma}.$$

Суммирование по σ имеет вид

$$\sum_\sigma |e_\mu^\sigma(k) \mathcal{M}^\mu(k)|^2 = \sum_\sigma e_\mu^{*\sigma}(k) e_\nu^\sigma(k) \mathcal{M}^{*\mu}(k) \mathcal{M}^\nu(k). \quad (3.95)$$

Наша цель – показать, что в этой формуле можно заменить суммирование по σ на $-g_{\mu\nu}$. Для этого перейдем в систему отсчета, в которой импульс фотона направлен по оси z :

$$k^\mu = (k, 0, 0, k). \quad (3.96)$$

В этой системе векторы поляризации можно выбрать в виде (1.81)

$$e_1^\mu = (0, 1, 0, 0) \quad e_2^\mu = (0, 0, 1, 0).$$

Тогда формула (3.95) принимает вид

$$\sum_{\sigma} |e_{\mu}^{\sigma}(k) \mathcal{M}^{\mu}(k)|^2 = |\mathcal{M}^1(k)|^2 + |\mathcal{M}^2(k)|^2 .$$

Покажем, что это же выражение дает сумма

$$-g_{\mu\nu} \mathcal{M}^{*\mu}(k) \mathcal{M}^{\nu}(k) .$$

Для этого вспомним, что калибровочное поле взаимодействует только с сохраняющимся током j_{μ} . Это означает, что

$$k_{\mu} \mathcal{M}^{\mu} = 0 . \quad (3.97)$$

Это равенство носит название *тождества Уорда*. Мы не будем здесь приводить строгого доказательства этого тождества, мы вернемся к нему позже. Здесь же приведем наивные аргументы. Очевидно, что на языке теорем Вика для определения S -матрицы, матричный элемент \mathcal{M}_{μ} получается, если при вычислении S -матрицы из одного из лагранжианов взаимодействия выкинуть поле A^{μ} в силу того, что оно спарено с оператором рождения (уничтожения) фотона из начального (конечного) состояния. При этом вместо лагранжиана останется сохраняющийся ток $\partial_{\mu} j^{\mu} = 0$. Переход в импульсное представление и приводит к (3.97).

Задача 151 На примере комптоновского рассеяния (т.е. рассеяния фотона на электро-троне), убедиться, что соответствующий матричный элемент (в первом нетривиальном порядке теории возмущений) сохраняется.

Подставляя в (3.97) импульс (3.96), находим, что

$$k \mathcal{M}_0 - k \mathcal{M}_3 = 0 \Rightarrow \mathcal{M}_0 = \mathcal{M}_3 .$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \sum_{\sigma} |e_{\mu}^{\sigma}(k) \mathcal{M}^{\mu}(k)|^2 &= |\mathcal{M}^1(k)|^2 + |\mathcal{M}^2(k)|^2 = \\ &= |\mathcal{M}^1(k)|^2 + |\mathcal{M}^2(k)|^2 + |\mathcal{M}^3(k)|^2 - |\mathcal{M}^0(k)|^2 = -g_{\mu\nu} \mathcal{M}^{*\mu}(k) \mathcal{M}^{\nu}(k) . \end{aligned}$$

Что и требовалось доказать.

В действительности, сумму по поляризациям для фотонного поля можно вычислить и явно. Для этого заметим, что три вектора k_{μ} , e_{μ}^1 и e_{μ}^2 не образуют полного набора в четырехмерном пространстве. Поэтому необходимо ввести еще один вектор ζ_{μ} , дополняющий тройку до полного набора. При этом этот вектор должен быть ортогонален e_{μ}^{σ} :

$$\zeta e^{\sigma} = 0 .$$

С другой стороны, поскольку $k^2 = 0$, а вектор ζ не может быть параллельным k , и является ортогональным к поляризациям, то мы должны наложить условие

$$k \zeta \neq 0 .$$

Теперь тензор $e_\mu^{*\sigma} e_\nu^\sigma$ может зависеть не только от k , но и от ζ . Делая инвариантное разложение этого тензора по векторам k_μ и ζ_μ и поступая так же, как и в случае массивного поля, находим

$$e_\mu^{*\sigma} e_\nu^\sigma = -g_{\mu\nu} + Q_{\mu\nu} ,$$

где

$$Q_{\mu\nu} = \frac{(\kappa\zeta)(k_\mu\zeta_\nu + k_\nu\zeta_\mu) - \zeta^2 k_\mu k_\nu}{(k\zeta)^2} .$$

Заметим, что мы не фиксировали нормировку ζ . Можно положить $\zeta^2 = 0$, тогда $Q_{\mu\nu}$ заметно упрощается.

Легко убедиться, что в силу тождества Уорда

$$Q^{\mu\nu} \mathcal{M}_\mu^* \mathcal{M}_\nu = 0 ,$$

т.е. при вычислении квадрата матричного элемента про тензор $Q_{\mu\nu}$ можно просто забыть. Ясно, что никакая физическая величина не должна зависеть от ζ , также как и от калибровочного параметра ξ в фотонном пропагаторе.

3.8 Распад массивного векторного бозона

В этом разделе в качестве примера рассмотрим простейший процесс – распад массивного нейтрального векторного бозона на два фермиона. Пусть в модели имеется N_f спинорных полей ψ_i , где $i = 1, \dots, N_f$ – индекс «аромата». Для простоты будем считать, что массы всех спинорных полей равны m . Пусть массивный векторный бозон (масса M) взаимодействует с фермионными токами. Лагранжиан взаимодействия выберем в виде

$$\mathcal{L}_{\text{int}} = g \mathcal{O}_{ij} B_\mu \bar{\psi}_i \gamma^\mu (A + \gamma_5) \psi_j , \quad (3.98)$$

где g – константа связи, A – произвольный параметр, \mathcal{O} – матрица, действующая в пространстве ароматов и характеризующая взаимодействие различных токов (в том числе недиагональных по индексу аромата) с векторным бозоном. Таким образом, векторный бозон взаимодействует и с векторными, и с аксиальными токами. Аналогичное взаимодействие имеет массивный Z -бозон с фермионами в Стандартной модели. Отличие лишь в том, что массы фермионов различны, матрица \mathcal{O} – диагональна, параметр A также становится диагональной матрицей, действующей в пространстве ароматов, т.е. взаимодействие с векторными токами характеризуется константами $g \mathcal{O}_{ik} A_{ki}$ (нет суммирования по i , но есть суммирование по k), а с аксиальными – $g \mathcal{O}_{ii}$. Так что наша задача определить ширину Z -бозона.

Из лагранжиана взаимодействия следует, что в диаграммной технике существует всего одна тройная вершина, причем величина, сопоставляемая этой вершине,

$$ig \mathcal{O}_{ij} \gamma_\mu (A + \gamma_5) .$$

Будем вычислять ширину распада в первом порядке теории возмущений. В этом порядке существует всего одна диаграмма, показанная на рис. 3.17. По правилам диаграммной

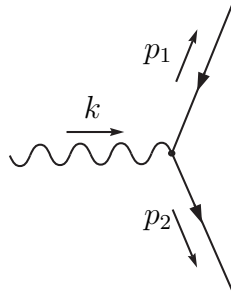


Рис. 3.17

техники получаем соответствующий матричный элемент \mathcal{M} -матрицы

$$\mathcal{M}_{\sigma,ij}^{\rho\lambda} = ig\mathcal{O}_{ij}\bar{v}_{\alpha,i}^{\rho,+}(\mathbf{p}_2)[\gamma_\mu(A + \gamma_5)]_{\alpha\beta}v_{\beta,j}^{\lambda,+}(\mathbf{p}_1)e_\sigma^\mu, \quad (3.99)$$

где мы явно указали спинорные индексы α и β , и нет суммирования по индексам аромата.

Для вычисления квадрата модуля матричного элемента нам потребуется найти сопряженный матричный элемент. Продемонстрируем, как его искать на следующем примере, используя свойства γ -матриц из раздела 1.5,

$$(\bar{u}\gamma_\mu\gamma_5v)^\dagger = v^*\gamma_5^\dagger\gamma_\mu^\dagger\gamma_0^\dagger u = v^*\gamma_5\gamma^\mu\gamma_0 u = v^*\gamma_5\gamma_0\gamma_\mu u = \bar{v}\gamma_\mu\gamma_5u,$$

Будем считать, что векторный бозон и фермионы неполяризованы. Тогда возведем модуль матричного элемента (3.99) в квадрат и просуммируем по поляризациям и ароматам, интересуясь полной шириной распада. При этом мы используем формулы (3.88), (3.89), умножив их на δ_{ij} (суммирование по поляризациям спиноров, очевидно, диагонально по ароматам), и (3.90). Имеем

$$\begin{aligned} |\bar{\mathcal{M}}|^2 &= -g^2 \text{Tr}(\mathcal{O}^\dagger \mathcal{O}) \left(g_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{M^2} \right) (\hat{p}_1 - m)_{\alpha'\alpha} [\gamma^\mu(A + \gamma_5)]_{\alpha\beta} (\hat{p}_2 + m)_{\beta\beta'} [\gamma^\nu(A + \gamma_5)]_{\beta'\alpha} = \\ &= -g^2 \text{Tr}(\mathcal{O}^\dagger \mathcal{O}) \left(g_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{M^2} \right) \text{Tr}((\hat{p}_1 - m)(\gamma^\mu(A + \gamma_5))(\hat{p}_2 + m)(\gamma^\nu(A + \gamma_5))). \end{aligned}$$

При вычислении следа по спинорным индексам нет нужды явно раскрывать скобки и вычислять след от каждого из получившихся 16-ти слагаемых. Достаточно вспомнить, что в интересующем нас выражении след от нечетного числа γ -матриц (включая γ^5) равен 0 за исключением следа произведения 4-х γ^μ -матриц и γ^5 (см. (1.104), (1.105)). Последний след пропорционален $\epsilon^{\mu\nu\lambda\rho}$ и при свертке с симметричным тензором, возникающем при суммировании по поляризациям бозона, даст 0. Следовательно, ненулевой вклад в вычисляемый след дадут слагаемые, пропорциональные $p_1^\lambda p_2^\rho$ и m^2 , но не линейные по m . Учитывая это замечание и используя (1.104), без труда находим,

$$|\bar{\mathcal{M}}|^2 = -g^2 \text{Tr}(\mathcal{O}^\dagger \mathcal{O}) \left(g_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{M^2} \right) 4 \left((A^2 + 1)(p_1^\mu p_2^\nu + p_1^\nu p_2^\mu - p_1 p_2 g^{\mu\nu}) - m^2(A^2 - 1)g^{\mu\nu} \right).$$

Перемножаем два тензора в получившемся выражении. При этом принимаем во внимание, что

$$\begin{aligned} k &= p_1 + p_2, \quad k^2 = M^2, \quad p_1^2 = p_2^2 = m^2, \\ k^2 &= p_1^2 + p_2^2 + 2p_1 p_2 \Rightarrow 2p_1 p_2 = M^2 - 2m^2, \\ p_2^2 &= (k - p_1)^2 \Rightarrow 2kp_1 = 2kp_2 = M^2. \end{aligned}$$

Итак, окончательно получаем

$$|\bar{\mathcal{M}}|^2 = 4g^2 \text{Tr}(\mathcal{O}^\dagger \mathcal{O}) [(A^2 + 1)M^2 + 2m^2(A^2 - 2)] . \quad (3.100)$$

В системе центра масс, то есть. в системе покоя бозона

$$|\mathbf{p}_1| = \frac{\sqrt{M^2 - 4m^2}}{2} .$$

Подставляя эту формулу и формулу (3.100) в (3.82), разделив на 3 (число поляризаций бозона), окончательно находим

$$\Gamma = \frac{g^2 \text{Tr}(\mathcal{O}^\dagger \mathcal{O}) [(A^2 + 1)M^2 + 2m^2(A^2 - 2)] \sqrt{M^2 - 4m^2}}{12\pi M^2} \xrightarrow{m \rightarrow 0} \text{Tr}(\mathcal{O}^\dagger \mathcal{O}) \frac{g^2(A^2 + 1)M}{12\pi} . \quad (3.101)$$

В частном случае, – \mathcal{O} – унитарная матрица, – след по индексам аромата в правой части (3.101) равен N_f , то есть ширина векторного бозона пропорциональна числу ароматов. В общем случае, – матрица \mathcal{O} произвольна, – матрица $\mathcal{O}^\dagger \mathcal{O}$ положительно определена, поэтому ее след растёт с ростом числа ароматов. Это позволяет определить число ароматов, на которое может распадаться массивный векторный бозон. Так, в Стандартной модели Z -бозон может распадаться на 5 (с учетом цвета – 15) заряженных кварков: u, d, c, s, b (на t -кварк Z -бозон распасться не может, так как. масса этого кварка больше массы бозона), 3 заряженных лептона: e, μ, τ и, вообще говоря, неизвестное (в силу сложности непосредственного наблюдения) количество нейтральных фермионов (с массами, меньшими $1/2M_Z$), три из которых являются партнерами заряженных лептонов ν_e, ν_μ, ν_τ – активные нейтрино, то есть нейтрино, взаимодействующие с W^\pm и Z -бозонами. Взаимодействия Z -бозона с заряженными частицами и известными активными нейтрино диктуются симметриями Стандартной модели и прекрасно согласуются с экспериментальными данными. Поэтому ширина Z -бозона для распадов на частицы Стандартной модели (кварки, заряженные лептоны и активные нейтрино) может быть вычислена с высокой степенью точности. Сравнивая ее с хорошо измеренной экспериментальной величиной, можно найти ограничение на число неизвестных нейтральных фермионов, на которые мог бы распадаться Z -бозон. Обычно результат сравнения приводится в виде числа ароматов легких нейтрино, взаимодействующих с Z -бозоном:

$$N_\nu = 2.984 \pm 0.008,$$

что хорошо согласуется с гипотезой о существовании трех известных ароматов активных нейтрино и отсутствием других легких фермионов, взаимодействующих с Z -бозоном. Стоит подчеркнуть, что этот результат не приводит к ограничению на число так называемых *стерильных* нейтрино, – гипотетических нейтральных частиц со полужелым спином, не участвующих в калибровочных взаимодействиях Стандартной модели, то есть не взаимодействующих с Z и W^\pm -бозонами.

Задача 152 Каким образом можно восстановить из (3.101) пределы взаимодействия только с векторным и только с аксиальным током?

Задача 153 Рассмотрим теорию действительного скалярного и спинорного поля с лагранжианом взаимодействия

$$\mathcal{L}_{\text{int}} = g\varphi\bar{\psi}(A + i\gamma_5)\psi. \quad (3.102)$$

Является ли теория симметричной по отношению к C , P , T -преобразованиям и их комбинациям? В лидирующем порядке теории возмущений вычислить ширину скалярной частицы.

Задача 154 В теории с лагранжианом взаимодействия (3.102) в низшем нетривиальном порядке теории возмущений найти полное сечение процесса $\bar{\psi}\psi \rightarrow \varphi\varphi$.

Задача 155 Используя результаты задачи 154 найти в древесном приближении полные сечения процессов $\varphi\varphi \rightarrow \bar{\psi}\psi$, $\varphi\psi \rightarrow \varphi\psi$ и $\varphi\bar{\psi} \rightarrow \varphi\bar{\psi}$.

Задача 156 В теории с лагранжианом взаимодействия (3.102) в низшем нетривиальном порядке теории возмущений найти полные сечения процессов $\bar{\psi}\psi \rightarrow \bar{\psi}\psi$, $\psi\psi \rightarrow \psi\psi$ и $\bar{\psi}\bar{\psi} \rightarrow \bar{\psi}\bar{\psi}$.

Задача 157 В теории с лагранжианом взаимодействия (3.102) в низшем нетривиальном порядке теории возмущений найти сечение рождения скалярной частицы $\bar{\psi}\psi \rightarrow \varphi$.

Задача 158 В теории с лагранжианом взаимодействия (3.102) в низшем нетривиальном порядке теории возмущений найти вероятность излучения (ширину распада) $\psi \rightarrow \psi\varphi$.

Предметный указатель

γ -матрицы Дирака, 37

Z-бозон, 142, 144

Аромат, 142

Быстрота, 45

Вершина взаимодействия, 117, 126

Мандельстама переменные, 137

Нейтрино активное, 144

Нейтрино стерильное, 144

Паули-Любанского вектор, 13

Правила Фейнмана в импульсном пространстве, 121

Правила Фейнмана в координатном пространстве, 117

Приближение Борновское, 130

Приближение древесное, 130

Пропагатор, 107

Тензор момента, 12

Тензор энергии-импульса, 11

Теорема Нетер, 10

Теоремы Вика, 101

Топологически неэквивалентные диаграммы, 122, 125

Топологически эквивалентные диаграммы, 122

Фактор потока, 136

Функция Грина антипричинная, 108

Функция Грина запаздывающая, 105

Функция Грина опережающая, 106

Функция Грина причинная, 106

Частица виртуальная, 130

Частица реальная, 130