Уравнения Максвелла в криволинейных координатах

Article · January 2011

Dmitry Sergeevich Kulyabov
Peoples' Friendship University of Russia (RUDN University)

УДК 537.8:514.7:621.372.81

Уравнения Максвелла в криволинейных координатах

Д. С. Кулябов, Н. А. Немчанинова

Кафедра систем телекоммуникаций
Российский университет дружбы народов
ул. Миклухо–Маклая, д. 6, Москва, 117198, Россия

При записи уравнений Максвелла в криволинейных координатах обычно используется громоздкий векторный формализм. Предлагается заменить его более простым тензорным описанием.

Ключевые слова: волноводы, уравнения Максвелла, тензорный формализм.

1. Введение

В исследованиях интегрально-оптических волноводов можно выделить два этапа: исследования регулярных планарных волноводов и исследования нерегулярных интегрально-оптических векторных волноводов. В тех и в других исследованиях решаются уравнения Максвелла с использованием граничных уравнений. Планарные волноводы образованы стопкой плоских параллельных диэлектрических пластинок и тонкоплёночных слоёв, так что все границы плоские и параллельны между собой. Это обусловило запись уравнений Максвелла и граничных условий в декартовых координатах. Исследование нерегулярных интегрально-оптических волноводов с круговыми и сферическими симметриями границ раздела побуждают к использованию криволинейных координат. Имеется большое число публикаций в этом направлении. Все они имеют дело с «векторной формой» уравнений, для которой характерна большая громоздкость выражений. Использование «тензорной формы» записи уравнений представляется нам более простой и изящной. Чтобы продемонстрировать эквивалентность двух форм, мы подробно приводим параллельно все используемые выражения в тензорной и векторной форме, а также формулы перехода между ними.

Предлагается следующий алгоритм преобразования. Уравнения в векторном формализме в декартовых координатах преобразуются в тензорную запись путём формальной замены оператора $\vec{\nabla}$ на ковариантную производную ∇_i. Затем производится замена координат. После этого тензорная запись переводится в векторную.

В данной работе рассматривается трёхмерное пространство. Индексы пробегают диапазон $i = 1, 2, 3$.

2. Преобразование координат в тензорном формализме

Напомним, как производятся преобразования дифференциальных операторов [1].

Градиент:

$$\operatorname{grad}\varphi = (\operatorname{grad}\varphi)_i \mathrm{e}^i = \nabla_i \varphi \mathrm{e}^i.$$

Поскольку φ — скаляр, то можем заменить ковариантную производную на частную:

$$(\operatorname{grad}\varphi)_i = \nabla_i \varphi = \partial_i \varphi. \tag{1}$$

Таким образом, при преобразовании координат компоненты градиента не изменяются.

Статья поступила в редакцию 30 декабря 2010 г.

Авторы выражают большую благодарность профессору Севастьянову Л. А. за помощь в постановке и решении проблемы.

Распишем в компонентах:

$$\operatorname{grad}\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x^1}\mathrm{e}^1 + \frac{\partial\varphi}{\partial x^2}\mathrm{e}^2 + \frac{\partial\varphi}{\partial x^3}\mathrm{e}^3. \tag{2}$$

Дивергенция:

$$\operatorname{div}\vec{a} = \vec{\nabla}\cdot\vec{a} = \nabla_i a^i = A^i_{,i} - \Gamma^i_{ji}A^j = A^i_{,i} + A^i\frac{\left(\sqrt{g}\right)_{,i}}{\sqrt{g}} = \frac{1}{\sqrt{g}}\partial_i\left(\sqrt{g}a^i\right). \tag{3}$$

Распишем в компонентах:

$$\operatorname{div}\vec{a} = \frac{1}{\sqrt{g}}\left[\frac{\partial(\sqrt{g}a^1)}{\partial x^1} + \frac{\partial(\sqrt{g}a^2)}{\partial x^2} + \frac{\partial(\sqrt{g}a^3)}{\partial x^3}\right]. \tag{4}$$

Ротор:

$$\operatorname{rot}\vec{a} = [\vec{\nabla},\vec{a}] = \vec{\nabla}\times\vec{a} = (\operatorname{rot}\vec{a})^i\mathrm{e}_i.$$

$$(\operatorname{rot}\vec{a})^i = E^{ijk}\nabla_j a_k = E^{ijk}a_{k;j}, \tag{5}$$

где E^{ijk} — тензор Леви–Чевиты, выражающийся через ε^{ijk} — символ Леви–Чевиты следующим образом:

$$\varepsilon_{ijk} = \varepsilon^{ijk} = \begin{cases} 1, & P(i,j,k) \text{ — чётная перестановка;} \\ -1, & P(i,j,k) \text{ — нечётная перестановка;} \\ 0, & \text{среди } i,j,k \text{ есть равные.} \end{cases}$$

$$E_{ijk} = \sqrt{g}\varepsilon_{ijk}; \quad E^{ijk} = \frac{1}{\sqrt{g}}\varepsilon^{ijk}.$$

Поскольку в (5) фигурируют члены типа $a_{[k;j]}$, то связности сокращаются, и мы можем заменить ковариантную производную на частную:

$$(\operatorname{rot}\vec{a})^i = E^{ijk}a_{k,j}. \tag{6}$$

Распишем в компонентах:

$$\operatorname{rot}\vec{a} = \frac{1}{\sqrt{g}}\begin{vmatrix} \mathrm{e}_1 & \mathrm{e}_2 & \mathrm{e}_3 \\ \dfrac{\partial}{\partial x^1} & \dfrac{\partial}{\partial x^2} & \dfrac{\partial}{\partial x^3} \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{g}}\left\{\left[\frac{\partial a_3}{\partial x^2} - \frac{\partial a_2}{\partial x^3}\right]\mathrm{e}_1 + \left[\frac{\partial a_1}{\partial x^3} - \frac{\partial a_3}{\partial x^1}\right]\mathrm{e}_2 + \left[\frac{\partial a_2}{\partial x^1} - \frac{\partial a_1}{\partial x^2}\right]\mathrm{e}_3\right\}. \tag{7}$$

Лапласиан можно получить из (3) для дивергенции, положив $a^i = g^{ij}f_{,j}$.

$$\Delta\varphi = \operatorname{div}\vec{a} = \frac{1}{\sqrt{g}}\partial_i\left(\sqrt{g}g^{ij}\partial_j\varphi\right). \tag{8}$$

3. Соответствие между тензорной и векторной записями векторов

В то время, как в тензорном формализме обычно используется координатный базис $\mathrm{e}_i = \partial/\partial x^i$, в векторном формализме базис задаётся как $\hat{\mathrm{e}}_i = \partial/\partial s^i$, где $\mathrm{d}s^i$ — элемент длины по соответствующей координате [2].

Считая систему координат ортогональной, запишем $\mathrm{d}s^2 = g_{ii}\mathrm{d}x^i\mathrm{d}x^i = h_i^2(\mathrm{d}x^i)^2$, где $h_i = \sqrt{g_{ii}} = 1/\sqrt{g^{ii}}$ — коэффициенты Ламе. Обычно для коэффициентов Ламе суммирование по индексу не производится. Заметим также, что $\sqrt{g} = h_1 h_2 h_3$.

Расписывая вектор в тензорном и векторном виде, найдём соотношение между этими формализмами (векторный вид будем помечать шапочкой):

$$\vec{f} = f^i \mathrm{e}_i = f^i \frac{\partial}{\partial x^j}, \quad \vec{f} = \hat{f}^i \hat{\mathrm{e}}_i = \hat{f}^i \frac{\partial}{\partial s^i} = \hat{f}^i \frac{1}{h_i} \frac{\partial}{\partial x^i}.$$

Таким образом для контравариантных компонент:

$$f^i = \frac{1}{h_i} \hat{f}^i. \tag{9}$$

Аналогично для ковекторов: $\vec{f} = f_i \mathrm{e}^i = f_i \mathrm{d}x^i$, $\vec{f} = \hat{f}_i \hat{\mathrm{e}}^i = \hat{f}_i \mathrm{d}s^i = \hat{f}_i h_i \mathrm{d}x^i$. Таким образом для ковариантных компонент:

$$f_i = h_i \hat{f}_i.$$

4. Дифференциальные операторы в произвольной системе координат

Для градиента из (1) и (9) получаем:

$$\operatorname{grad} \varphi = \partial_i \varphi \mathrm{e}^i = \frac{1}{h_i} \partial_i \varphi \hat{\mathrm{e}}^i.$$

Распишем в компонентах:

$$\operatorname{grad} \varphi = \frac{1}{h_1} \frac{\partial \varphi}{\partial x^1} \hat{\mathrm{e}}^1 + \frac{1}{h_2} \frac{\partial \varphi}{\partial x^2} \hat{\mathrm{e}}^2 + \frac{1}{h_3} \frac{\partial \varphi}{\partial x^3} \hat{\mathrm{e}}^3.$$

Для дивергенции из (3) и (9) получаем:

$$\operatorname{div} \vec{a} = \frac{1}{\sqrt{g}} \partial_i \big(\sqrt{g} a^i\big) = \frac{1}{\sqrt{g}} \partial_i \left(\sqrt{g} \frac{\hat{a}^i}{h_i} \right).$$

Распишем в компонентах:

$$\operatorname{div} \vec{a} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left(\frac{\partial (h_2 h_3 \hat{a}^1)}{\partial x^1} + \frac{\partial (h_1 h_3 \hat{a}^2)}{\partial x^2} + \frac{\partial (h_1 h_2 \hat{a}^3)}{\partial x^3} \right).$$

Для ротора из (6) и (3) получаем:

$$\operatorname{rot} \vec{a} = \frac{1}{\sqrt{g}} \varepsilon^{ijk} a_{k,j} \mathrm{e}_i = \frac{h_i}{\sqrt{g}} \varepsilon^{ijk} \partial_j \big(h_k \hat{a}_k\big) \hat{\mathrm{e}}_i.$$

Распишем в компонентах:

$$\operatorname{rot} \vec{a} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \begin{vmatrix} h_1 \hat{\mathrm{e}}_1 & h_2 \hat{\mathrm{e}}_2 & h_3 \hat{\mathrm{e}}_3 \\ \dfrac{\partial}{\partial x^1} & \dfrac{\partial}{\partial x^2} & \dfrac{\partial}{\partial x^3} \\ h_1 \hat{a}_1 & h_2 \hat{a}_2 & h_3 \hat{a}_3 \end{vmatrix} = \frac{1}{h_2 h_3} \left[\frac{\partial (h_3 \hat{a}_3)}{\partial x^2} - \frac{\partial (h_2 \hat{a}_2)}{\partial x^3} \right] \hat{\mathrm{e}}_1 +$$

$$+ \frac{1}{h_1 h_3} \left[\frac{\partial (h_1 \hat{a}_1)}{\partial x^3} - \frac{\partial (h_3 \hat{a}_3)}{\partial x^1} \right] \hat{\mathrm{e}}_2 + \frac{1}{h_1 h_2} \left[\frac{\partial (h_2 \hat{a}_2)}{\partial x^1} - \frac{\partial (h_1 \hat{a}_1)}{\partial x^2} \right] \hat{\mathrm{e}}_3.$$

Для лапласиана получаем запись, эквивалентную (8).
Распишем в компонентах:

$$\Delta\varphi = \frac{1}{h_1h_2h_3}\left[\frac{\partial}{\partial x^1}\left(\frac{h_2h_3}{h_1}\frac{\partial\varphi}{\partial x^1}\right) + \frac{\partial}{\partial x^2}\left(\frac{h_1h_3}{h_2}\frac{\partial\varphi}{\partial x^2}\right) + \frac{\partial}{\partial x^3}\left(\frac{h_1h_2}{h_3}\frac{\partial\varphi}{\partial x^3}\right)\right].$$

5. Некоторые криволинейные координаты

5.1. Цилиндрические координаты

В рамках стандарта ISO 31-11 координаты (x^1, x^2, x^3) обозначаются как (ρ, φ, z).
Закон преобразования координат от декартовых к цилиндрическим:

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi, \\ y = \rho\sin\varphi, \\ z = z. \end{cases}$$

Закон преобразования координат от цилиндрических к декартовым:

$$\begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \\ \varphi = \operatorname{arctg}\left(\dfrac{y}{x}\right), \\ z = z. \end{cases}$$

Метрический тензор:

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \rho^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad g^{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\rho^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \sqrt{g} = \rho.$$

Коэффициенты Ламе: $h_1 \equiv h_\rho = 1$, $h_2 \equiv h_\varphi = \rho$, $h_3 \equiv h_z = 1$.

Символы Кристоффеля: $\Gamma^1_{22} = -\rho$, $\Gamma^2_{21} = \Gamma^2_{12} = \dfrac{1}{\rho}$. Остальные символы Кристоффеля равны нулю.

5.2. Сферические координаты

В рамках стандарта ISO 31-11 координаты (x^1, x^2, x^3) обозначаются как (r, ϑ, φ).
Закон преобразования координат от декартовых к сферическим:

$$\begin{cases} x = r\sin\vartheta\cos\varphi, \\ y = r\sin\vartheta\sin\varphi, \\ z = r\cos\vartheta. \end{cases}$$

Закон преобразования координат от сферических к декартовым:

$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \\ \vartheta = \arccos\left(\dfrac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\right) = \operatorname{arctg}\left(\dfrac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z}\right), \\ \varphi = \operatorname{arctg}\left(\dfrac{y}{x}\right). \end{cases}$$

Метрический тензор:

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 \sin^2\vartheta \end{pmatrix}, \quad g^{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{r^2} & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{1}{r^2\sin^2\vartheta} \end{pmatrix}, \quad \sqrt{g} = r^2 \sin\vartheta.$$

Коэффициенты Ламе: $h_1 \equiv h_r = 1$, $h_2 \equiv h_\vartheta = r$, $h_3 \equiv h_\varphi = r\sin\vartheta$.

Символы Кристоффеля: $\Gamma^1_{22} = -r$, $\Gamma^1_{33} = -r\sin^2\vartheta$, $\Gamma^2_{21} = \Gamma^2_{12} = \Gamma^3_{13} = \Gamma^3_{31} = \dfrac{1}{r}$, $\Gamma^2_{33} = -\cos\vartheta\sin\vartheta$, $\Gamma^3_{23} = \Gamma^3_{32} = -\operatorname{ctg}\vartheta$. Остальные символы Кристоффеля равны нулю.

6. Уравнения Максвелла в криволинейных координатах

Будем рассматривать уравнения Максвелла в системе СГС [3, 4].

$$\begin{aligned} \vec{\nabla}\times\vec{E} &= -\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}; \\ \vec{\nabla}\times\vec{H} &= \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{D}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c}\vec{j}; \\ \vec{\nabla}\cdot\vec{D} &= 4\pi\rho; \\ \vec{\nabla}\cdot\vec{B} &= 0. \end{aligned} \tag{10}$$

Здесь $\vec{E}$ и $\vec{H}$ — напряжённости электрического и магнитного полей, $\vec{D}$ и $\vec{B}$ — электрическая и магнитная индукция, $\vec{j}$ и ρ — плотности тока и заряда.

Будем считать среду линейной, изотропной, однородной и не обладающей диссипацией. Для изотропной среды $\vec{B} = \mu\vec{H}$, $\vec{D} = \varepsilon\vec{B}$, где μ и ε — магнитная и диэлектрическая проницаемости среды. В силу линейности среды сигнал можно разложить на сумму монохроматических волн, которые можно рассматривать в комплексной форме: $\tilde{\vec{E}}(\vec{r},t) = \tilde{\vec{E}}(\vec{r})\exp(-\mathrm{i}\omega t)$. Переход к действительным полям осуществляется следующим образом:

$$\vec{E}(\vec{r},t) = \mathrm{Re}\tilde{\vec{E}}(\vec{r},t) = \frac{1}{2}\left[\tilde{\vec{E}}(\vec{r})\exp(-\mathrm{i}\omega t) + \tilde{\vec{E}}^{*}(\vec{r})\exp(\mathrm{i}\omega t)\right],$$

где $\tilde{\vec{E}}(\vec{r})$ — комплексная амплитуда.

При отсутствии источников ($\rho = 0$, $\vec{j} = 0$) уравнения Максвелла (10) для комплексных амплитуд сводятся к следующему виду:

$$\begin{aligned} \vec{\nabla}\times\tilde{\vec{E}} &= \mathrm{i}k\mu\tilde{\vec{H}}; \\ \vec{\nabla}\times\tilde{\vec{H}} &= -\mathrm{i}k\varepsilon\tilde{\vec{E}}; \\ \vec{\nabla}\cdot\tilde{\vec{E}} &= 0; \\ \vec{\nabla}\cdot\tilde{\vec{H}} &= 0, \end{aligned} \tag{11}$$

где $k = \dfrac{\omega}{c}$ — волновое число.

Решать можно двумя путями: записать уравнения Максвелла сразу в векторном виде, либо произвести вычисления в тензорном виде, а результаты перевести в векторный вид.

6.1. Решение в векторном виде

Запишем уравнения Максвелла (11) в криволинейных координатах в векторном виде (тильду писать не будем во избежании громоздкости).

$$\frac{1}{h_2 h_3}\left[\frac{\partial(h_3\hat{E}_3)}{\partial x^2} - \frac{\partial(h_2\hat{E}_2)}{\partial x^3}\right] = \mathrm{i}k\mu\hat{H}^1; \tag{12a}$$

$$\frac{1}{h_1 h_3}\left[\frac{\partial(h_1\hat{E}_1)}{\partial x^3} - \frac{\partial(h_3\hat{E}_3)}{\partial x^1}\right] = \mathrm{i}k\mu\hat{H}^2; \tag{12b}$$

$$\frac{1}{h_1 h_2}\left[\frac{\partial(h_2\hat{E}_2)}{\partial x^1} - \frac{\partial(h_1\hat{E}_1)}{\partial x^2}\right] = \mathrm{i}k\mu\hat{H}^3; \tag{12c}$$

$$\frac{1}{h_2 h_3}\left[\frac{\partial(h_3\hat{H}_3)}{\partial x^2} - \frac{\partial(h_2\hat{H}_2)}{\partial x^3}\right] = -\mathrm{i}k\varepsilon\hat{E}^1; \tag{12d}$$

$$\frac{1}{h_1 h_3}\left[\frac{\partial(h_1\hat{H}_1)}{\partial x^3} - \frac{\partial(h_3\hat{H}_3)}{\partial x^1}\right] = -\mathrm{i}k\varepsilon\hat{E}^2; \tag{12e}$$

$$\frac{1}{h_1 h_2}\left[\frac{\partial(h_2\hat{H}_2)}{\partial x^1} - \frac{\partial(h_1\hat{H}_1)}{\partial x^2}\right] = -\mathrm{i}k\varepsilon\hat{E}^3; \tag{12f}$$

$$\frac{\partial(h_2h_3\hat{E}^1)}{\partial x^1} + \frac{\partial(h_1h_3\hat{E}^2)}{\partial x^2} + \frac{\partial(h_1h_2\hat{E}^3)}{\partial x^3} = 0; \tag{12g}$$

$$\frac{\partial(h_2h_3\hat{H}^1)}{\partial x^1} + \frac{\partial(h_1h_3\hat{H}^2)}{\partial x^2} + \frac{\partial(h_1h_2\hat{H}^3)}{\partial x^3} = 0. \tag{12h}$$

Система переопределена, так как для шести переменных имеем восемь уравнений. Следовательно, необходимо ввести два координатных условия.

Электромагнитное поле в волноводе не является чисто поперечным, но и имеет и продольную составляющую [3]. В зависимости от того, какое из полей имеет продольную составляющую, можно выделить TE-волну (электрическое поле не имеет продольной составляющей) и TM-волну (магнитное поле не имеет продольной составляющей). Очевидно, что в линейной среде общее решение можно разделить на TE-моду и TM-моду.

Считая, что волна распространяется вдоль координаты x^3, будем искать решение в виде TE-моды ($\hat{E}_3 = 0$) и TM-моды ($\hat{H}_3 = 0$). Начнём со случая TE-моды. Идея решения заключается в введении новой потенциальной функции U и выражении через неё компонент $\hat{E}_i$ и $\hat{H}_i$.

Считая, что для криволинейных координат справедливо условие (первое координатное условие)

$$h_3 = 1, \tag{13}$$

из (12g) получим:

$$\hat{E}_1 = \hat{E}^1 = \frac{\mathrm{i}k\mu}{h_2}\frac{\partial U}{\partial x^2}, \quad \hat{E}_2 = \hat{E}^2 = -\frac{\mathrm{i}k\mu}{h_1}\frac{\partial U}{\partial x^1}. \tag{14}$$

Подставляя $\hat{E}_1$ в (12b) и $\hat{E}_2$ в (12a), получим:

$$\hat{H}_1 = \hat{H}^1 = \frac{1}{h_2}\frac{\partial}{\partial x^3}\left(\frac{h_2}{h_1}\frac{\partial U}{\partial x^1}\right), \quad \hat{H}_2 = \hat{H}^2 = \frac{1}{h_1}\frac{\partial}{\partial x^3}\left(\frac{h_1}{h_2}\frac{\partial U}{\partial x^2}\right). \tag{15}$$

Для выполнения (12f) после подстановки (15) необходимо, чтобы криволинейные координаты удовлетворяли также следующему условию (второе координатное условие):

$$\frac{\partial}{\partial x^3}\left(\frac{h_2}{h_1}\right) = 0. \tag{16}$$

Из (12e) получаем: $\hat{H}^3 = \hat{H}_3 = k^2\varepsilon\mu U + \dfrac{\partial^2 U}{\partial (x^3)^2}$. Подставляя полученные значения в (12c), получаем уравнение для U:

$$\frac{1}{h_1h_2}\left[\frac{\partial}{\partial x^1}\left(\frac{h_2}{h_1}\frac{\partial U}{\partial x^1}\right) + \frac{\partial}{\partial x^2}\left(\frac{h_1}{h_2}\frac{\partial U}{\partial x^2}\right)\right] + \frac{\partial^2 U}{\partial (x^3)^2} + k^2\varepsilon\mu U = 0.$$

Аналогично для ТМ-моды. Исходя из симметрии системы (12), решения для ТМ-моды можно получить механически заменой $\hat{E}_i \to \hat{H}_i$, $\hat{H}_i \to \hat{E}_i$. Вместо функции U будет аналогичная функция V.

6.2. Решение в тензорном виде

Теперь решение будем выполнять в тензорном виде, а получившийся результат переведём в векторный вид.

Проведём все рассуждения аналогично предыдущему пункту. Запишем уравнения Максвелла (11) в криволинейных координатах в тензорном виде (тильду писать не будем во избежании громоздкости).

$$\frac{1}{\sqrt{g}}\left[\frac{\partial E_3}{\partial x^2} - \frac{\partial E_2}{\partial x^3}\right] = \mathrm{i}k\mu H^1; \tag{17a}$$

$$\frac{1}{\sqrt{g}}\left[\frac{\partial E_1}{\partial x^3} - \frac{\partial E_3}{\partial x^1}\right] = \mathrm{i}k\mu H^2; \tag{17b}$$

$$\frac{1}{\sqrt{g}}\left[\frac{\partial E_2}{\partial x^1} - \frac{\partial E_1}{\partial x^2}\right] = \mathrm{i}k\mu H^3; \tag{17c}$$

$$\frac{1}{\sqrt{g}}\left[\frac{\partial H_3}{\partial x^2} - \frac{\partial H_2}{\partial x^3}\right] = -\mathrm{i}k\varepsilon E^1; \tag{17d}$$

$$\frac{1}{\sqrt{g}}\left[\frac{\partial H_1}{\partial x^3} - \frac{\partial H_3}{\partial x^1}\right] = -\mathrm{i}k\varepsilon E^2; \tag{17e}$$

$$\frac{1}{\sqrt{g}}\left[\frac{\partial H_2}{\partial x^1} - \frac{\partial H_1}{\partial x^2}\right] = -\mathrm{i}k\varepsilon E^3; \tag{17f}$$

$$\frac{\partial E^1}{\partial x^1} + \frac{\partial E^2}{\partial x^2} + \frac{\partial E^3}{\partial x^3} = 0; \tag{17g}$$

$$\frac{\partial H^1}{\partial x^1} + \frac{\partial H^2}{\partial x^2} + \frac{\partial H^3}{\partial x^3} = 0. \tag{17h}$$

Будем использовать первое координатное условие, аналогичное (13):

$$\sqrt{g_{33}} = 1 \equiv h_3 = 1. \tag{18}$$

Из (17g) получим (учитывая также (3) и (18)):

$$E_1 = g_{11}E^1 = g_{11}\frac{\mathrm{i}k\mu}{\sqrt{g}}\frac{\partial U}{\partial x^2}, \quad E_2 = g_{22}E^2 = -g_{22}\frac{\mathrm{i}k\mu}{\sqrt{g}}\frac{\partial U}{\partial x^1},$$
$$\hat{E}_1 = \frac{1}{h_1}E_1 = \frac{\mathrm{i}k\mu}{h_2}\frac{\partial U}{\partial x^2}, \quad \hat{E}_2 = \frac{1}{h_2}E_2 = -\frac{\mathrm{i}k\mu}{h_1}\frac{\partial U}{\partial x^1}.$$

Подставляя E_1 в (17b) и E_2 в (17a), получим (опять учитываем (3) и (18)):

$$H_1 = g_{11}H^1 = \frac{g_{11}}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial x^3}\left(\frac{g_{22}}{\sqrt{g}}\frac{\partial U}{\partial x^1}\right), \quad H_2 = g_{22}H^2 = \frac{g_{22}}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial x^3}\left(\frac{g_{11}}{\sqrt{g}}\frac{\partial U}{\partial x^2}\right),$$
$$\hat{H}_1 = \frac{1}{h_1}H_1 = \frac{1}{h_2}\frac{\partial}{\partial x^3}\left(\frac{h_2}{h_1}\frac{\partial U}{\partial x^1}\right), \quad \hat{H}_2 = \frac{1}{h_2}H_2 = \frac{1}{h_1}\frac{\partial}{\partial x^3}\left(\frac{h_1}{h_2}\frac{\partial U}{\partial x^2}\right).$$

Аналогично (16) введём второе координатное условие: $\frac{\partial}{\partial x^3}\left(\frac{h_2}{h_1}\right) = 0$. Из (17e) получаем (используя (3) и (18)):

$$H_3 = k^2\varepsilon\mu U + \frac{\partial^2 U}{\partial(x^3)^2}, \quad H^3 = \frac{1}{g_{33}}H_3 = H_3, \quad \hat{H}_3 = \frac{1}{h_3}H_3 = k^2\varepsilon\mu U + \frac{\partial^2 U}{\partial(x^3)^2}.$$

Подставляя полученные значения в (17c), получаем уравнение для U:

$$\frac{1}{\sqrt{g}}\left[\frac{\partial}{\partial x^1}\left(\frac{g_{22}}{\sqrt{g}}\frac{\partial U}{\partial x^1}\right) + \frac{\partial}{\partial x^2}\left(\frac{g_{11}}{\sqrt{g}}\frac{\partial U}{\partial x^2}\right)\right] + \frac{\partial^2 U}{\partial(x^3)^2} + k^2\varepsilon\mu U = 0.$$

7. Заключение

Использование тензорного формализма при оперировании векторами в криволинейных координатах представляется оправданным. Более того, наиболее предпочтительным является использование в вычислениях именно тензорного формализма, а переход к векторам — только в результирующих выражениях. При этом использование тензорного формализма предпочтительно в неоднородных и неизотропных средах, а также при использовании неортогональных координат.

Литература

1. *Дубровин Б. А., Новиков С. П., Фоменко А. Т.* Современная геометрия: Методы и приложения. — М.: Наука, 1986. [*Dubrovin B. A., Novikov S. P., Fomenko A. T.* Sovremennaya geometriya: Metodih i prilozheniya. — M.: Nauka, 1986.]
2. *Морс Ф. М., Фешбах Г.* Методы теоретической физики. — М.: Издательство иностранной литературы, 1960. [*Mors F. M., Feshbakh G.* Metodih teoreticheskoyj fiziki. — M.: Izdateljstvo inostrannoyj literaturih, 1960.]
3. *Вайнштейн Л. А.* Электромагнитные волны. — М.: МИР, 1988. [*Vayjnshteyjn L. A.* Ehlektromagnitnihe volnih. — M.: MIR, 1988.]
4. *Денисов В. И.* Лекции по электродинамике. — М.: УНЦ ДО, 2005. [*Denisov V. I.* Lekcii po ehlektrodinamike. — M.: UNC DO, 2005.]

UDC 537.8:514.7:621.372.81

Maxwell's Equations in Curvilinear Coordinates

D. S. Kulyabov, N. A. Nemchaninova

Telecommunication Systems Department
Peoples Friendship University of Russia
Miklukho-Maklaya str., 6, Moscow, 117198, Russia

When writing the Maxwell equations in curvilinear coordinates, usually used a vector-based formalism. Proposed to replace it by easier tensor-based formalism.

Key words and phrases: waveguide, Maxwell's equations, tensor formalism.