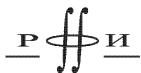


УДК 530.1  
ББК 22.31  
В14



Издание осуществлено при поддержке  
Российского фонда фундаментальных  
исследований по проекту 03-02-30035

Вайнберг С. **Квантовая теория поля.** Т. 1. Общая теория / Пер. с англ.; Под ред. В.Ч. Жуковского. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003. — 648 с. — ISBN 5-9221-0403-9.

Книга выдающегося американского ученого лауреата Нобелевской премии С. Вайнберга «Квантовая теория поля» представляет собой современный курс квантовой теории поля, охватывающий как основные положения этой области теоретической физики, так и многочисленные новые идеи и современные методы, разработанные в последние годы. В первом томе излагаются основы квантовой теории поля. Сюда входят релятивистская квантовая механика и теория рассеяния, основы канонического квантования полей и метод интегрирования по путям, инвариантная теория возмущений (в частности, ее приложения к квантовой электродинамике) и непертурбативные методы, а также последовательное изложение теории перенормировок и другие вопросы.

Книга рассчитана на научных работников, аспирантов, студентов старших курсов, занимающихся проблемами квантовой теории поля и физики элементарных частиц.

---

Научное издание

*ВАЙНБЕРГ Стивен*

## **КВАНТОВАЯ ТЕОРИЯ ПОЛЯ**

Том 1

Общая теория

Редактор *Н.Б. Бартошевич-Жагель*

Оригинал-макет: *Д.В. Горбачев*

Оформление переплета: *А.А. Логунов*

ЛР № 071930 от 06.07.99. Подписано в печать 23.04.03. Формат 60×90/16.  
Бумага офсетная. Печать офсетная. Усл. печ. л. 40,5. Уч.-изд. л. 47.  
Тираж 300 экз. Заказ №

Издательская фирма «Физико-математическая литература»  
МАИК «Наука/Интерperiодика»  
117997 Москва, Профсоюзная, 90  
E-mail: fizmat@maik.ru

Отпечатано с готовых диапозитивов в ПФ «Полиграфист».  
160001, г. Вологда, ул. Челюскинцев, 3.

Тел.: (8172) 72-55-31, 72-61-75, факс (8172) 72-60-72.  
E-mail: form.pfp@votel.ru http://www.vologda/~pfpv

---

ISBN 5-9221-0403-9 (русск.)  
ISBN 0-521-55001-7 (англ.)

© Cambridge University Press, 2000  
© ФИЗМАТЛИТ, 2003 (русск.)



## Содержание

Предисловие к тому I . . . . .	7
Обозначения . . . . .	13
Г л а в а 1. Историческое введение . . . . .	15
§ 1.1. Релятивистская волновая механика . . . . .	17
§ 1.2. Рождение квантовой теории поля . . . . .	30
§ 1.3. Проблема расходимостей . . . . .	47
Литература . . . . .	56
Дополнительная литература . . . . .	64
Г л а в а 2. Релятивистская квантовая механика . . . . .	66
§ 2.1. Квантовая механика . . . . .	66
§ 2.2. Симметрии . . . . .	67
§ 2.3. Квантовые преобразования Лоренца . . . . .	73
§ 2.4. Алгебра Пуанкаре . . . . .	76
§ 2.5. Одночастичные состояния . . . . .	81
§ 2.6. Пространственная инверсия и обращение времени . . . . .	93
§ 2.7. Проективные представления . . . . .	101
Приложение А. Теорема о представлении симметрии .	110
Приложение В. Групповые операторы и гомотопические классы . . . . .	116
Приложение С. Инверсии и вырождение мультиплетов	120
Задачи . . . . .	125
Литература . . . . .	126
Г л а в а 3. Теория рассеяния . . . . .	128
§ 3.1. Начальное и конечное состояния . . . . .	128
§ 3.2. $S$ -матрица . . . . .	134
§ 3.3. Симметрии $S$ -матрицы . . . . .	138
§ 3.4. Вероятности и сечения рассеяния . . . . .	156
§ 3.5. Теория возмущений . . . . .	164
§ 3.6. Следствия унитарности . . . . .	170
§ 3.7. Разложение по парциальным амплитудам . . . . .	175
§ 3.8. Резонансные состояния . . . . .	183
Задачи . . . . .	190
Литература . . . . .	191

<b>Г л а в а 4. Принцип кластерной разложимости . . . . .</b>	<b>194</b>
§ 4.1. Бозоны и фермионы . . . . .	195
§ 4.2. Операторы рождения и уничтожения . . . . .	198
§ 4.3. Кластерная разложимость и связные амплитуды . . . . .	202
§ 4.4. Структура взаимодействия . . . . .	208
Задачи . . . . .	215
Литература . . . . .	215
<b>Г л а в а 5. Квантовые поля и античастицы . . . . .</b>	<b>217</b>
§ 5.1. Свободные поля . . . . .	217
§ 5.2. Причинные скалярные поля . . . . .	227
§ 5.3. Причинные векторные поля . . . . .	234
§ 5.4. Формализм Дирака . . . . .	240
§ 5.5. Причинные дираковские поля . . . . .	247
§ 5.6. Неприводимые представления однородной группы Лоренца . . . . .	256
§ 5.7. Причинные поля: общий случай . . . . .	260
§ 5.8. СРТ-теорема . . . . .	273
§ 5.9. Поля, соответствующие безмассовым частицам . . . . .	275
Задачи . . . . .	284
Литература . . . . .	285
<b>Г л а в а 6. Правила Фейнмана . . . . .</b>	<b>287</b>
§ 6.1. Вывод правил Фейнмана . . . . .	287
§ 6.2. Вычисление пропагатора . . . . .	301
§ 6.3. Правила в импульсном пространстве . . . . .	307
§ 6.4. Вычисления вне массовой оболочки . . . . .	313
Задачи . . . . .	317
Литература . . . . .	318
<b>Г л а в а 7. Канонический формализм . . . . .</b>	<b>319</b>
§ 7.1. Канонические переменные . . . . .	320
§ 7.2. Лагранжев формализм . . . . .	325
§ 7.3. Глобальные симметрии . . . . .	334
§ 7.4. Лоренц-инвариантность . . . . .	341
§ 7.5. Переход к представлению взаимодействия . . . . .	345
§ 7.6. Связи и скобки Дирака . . . . .	352
§ 7.7. Переопределения полей и свободные параметры . . . . .	358
§ 7.7. Приложение: вывод скобок Дирака из канонических коммутаторов . . . . .	359
Задачи . . . . .	363
Литература . . . . .	364
<b>Г л а в а 8. Электродинамика . . . . .</b>	<b>365</b>
§ 8.1. Калибровочная инвариантность . . . . .	365
§ 8.2. Связи и выбор калибровки . . . . .	369
§ 8.3. Квантование в кулоновской калибровке . . . . .	373

§ 8.4. Электродинамика в представлении взаимодействия . . . . .	376
§ 8.5. Пропагатор фотона . . . . .	379
§ 8.6. Правила Фейнмана для спинорной электродинамики . . . . .	381
§ 8.7. Комптоновское рассеяние . . . . .	387
§ 8.8. Обобщение калибровочных полей на $p$ -формы . . . . .	395
§ 8.9. Приложение: следы $\gamma$ -матриц . . . . .	398
Задачи . . . . .	400
Литература . . . . .	401
<b>Г л а в а 9. Методы интегрирования по путям . . . . .</b>	<b>402</b>
§ 9.1. Основная формула интегрирования по путям . . . . .	404
§ 9.2. Переход к $S$ -матрице . . . . .	412
§ 9.3. Лагранжева версия формулы интегрирования по путям . . . . .	417
§ 9.4. Вывод правил Фейнмана с помощью метода интегрирования по путям . . . . .	422
§ 9.5. Интегралы по путям в случае фермионов . . . . .	427
§ 9.6. Формулировка квантовой электродинамики в терминах интегрирования по путям . . . . .	443
§ 9.7. Различные статистики . . . . .	448
Приложение. Кратные гауссовые интегралы . . . . .	451
Задачи . . . . .	453
Литература . . . . .	454
<b>Г л а в а 10. Непертурбативные методы . . . . .</b>	<b>456</b>
§ 10.1. Симметрии . . . . .	456
§ 10.2. Полюсная структура . . . . .	459
§ 10.3. Перенормировка поля и массы . . . . .	467
§ 10.4. Перенормировка заряда и тождества Уорда . . . . .	473
§ 10.5. Калибровочная инвариантность . . . . .	479
§ 10.6. Электромагнитные формфакторы и магнитный момент . . . . .	483
§ 10.7. Представление Челлена–Лемана . . . . .	488
§ 10.8. Дисперсионные соотношения . . . . .	494
Задачи . . . . .	501
Литература . . . . .	502
<b>Г л а в а 11. Однопетлевые радиационные поправки в квантовой электродинамике . . . . .</b>	<b>504</b>
§ 11.1. Контрчлены . . . . .	504
§ 11.2. Поляризация вакуума . . . . .	505
§ 11.3. Аномальный магнитный момент и радиус заряда . . . . .	517
§ 11.4. Собственная энергия электрона . . . . .	526
Приложение. Вычисление интегралов . . . . .	530
Задачи . . . . .	531
Литература . . . . .	531
<b>Г л а в а 12. Общая теория перенормировок . . . . .</b>	<b>533</b>
§ 12.1. Степени расходимости . . . . .	534
§ 12.2. Уничтожение расходимостей . . . . .	540

§ 12.3. Нужна ли перенормируемость? . . . . .	552
§ 12.4. Плавающий порог обрезания . . . . .	562
§ 12.5. Дополнительные симметрии . . . . .	566
Задачи . . . . .	569
Литература . . . . .	569
<b>Г л а в а 13. Инфракрасные расходимости . . . . .</b>	<b>572</b>
§ 13.1. Амплитуды излучения мягких фотонов . . . . .	572
§ 13.2. Виртуальные мягкие фотоны . . . . .	577
§ 13.3. Реальные мягкие фотоны: уничтожение расходимостей . . . . .	583
§ 13.4. Инфракрасные расходимости. Общий случай . . . . .	587
§ 13.5. Рассеяние мягких фотонов . . . . .	592
§ 13.6. Приближение внешнего поля . . . . .	595
Задачи . . . . .	601
Литература . . . . .	602
<b>Г л а в а 14. Связанные состояния во внешних полях . . . . .</b>	<b>603</b>
§ 14.1. Уравнение Дирака . . . . .	604
§ 14.2. Радиационные поправки во внешних полях . . . . .	612
§ 14.3. Лэмбовский сдвиг в легких атомах . . . . .	618
Задачи . . . . .	634
Литература . . . . .	635
Предметный указатель . . . . .	636
Именной указатель . . . . .	644

## ПРЕДИСЛОВИЕ К ТОМУ I

Зачем нужна еще одна книга по квантовой теории поля? В наши дни студент, специализирующийся в этой области, может выбрать для ее изучения любую из двух десятков отличных книг, некоторые из которых почти не устарели. Прочтение же еще одной книги будет стоить потраченного времени только в том случае, если в ней содержатся какие-то новые идеи, в смысле содержания или научного кругозора, который она вырабатывает.

Если говорить о содержании предлагаемой вниманию читателя книги, то хотя в нее и включено большое количество нового материала, я все же считаю общность изложения ее главной особенностью. Я стремился к такой общности по следующим причинам. Во-первых, в процессе развития квантовой теории поля оказалось, что она имеет важные приложения в областях физики, далеких от квантовой электродинамики (области ее первых успехов). Во-вторых (и это даже более важно), мне кажется, что такая общность поможет нам выделить важные моменты, обычно затемненные в частных теориях большим количеством технических деталей. Тем не менее, для иллюстрации общих утверждений я, конечно же, часто использую конкретные примеры из современной физики частиц, ядерной физики, а также квантовой электродинамики.

И все же главной причиной, побудившей меня написать эту книгу, стало не ее содержание, а научный кругозор, который она должна сформировать у читателя. Моя задача состояла в следующем. Я хотел объяснить читателю, *почему* квантовая теория поля такая, какой мы ее знаем, и *почему*, будучи сформулирована таким образом, она правильно описывает реальный мир.

Традиционный подход со временем первых работ Гейзенберга и Паули по общей квантовой теории поля состоял в том, чтобы принять существование полей как реальность, данную свыше, ссылаясь для обоснования этого шага на наш опыт работы с электромагнетизмом. Затем необходимо “проквантовать” эти поля, т.е. применить к разным простым теориям поля либо правила канонического квантования, либо процедуру интегрирования по путям. Некоторые детали этого традиционного подхода будут изложены в историческом введении, составляющем материал главы 1. Это, несомненно, есть способ быстрого

погружения в предмет, но, как мне кажется, он оставляет слишком многие вопросы без ответа. Почему, собственно, мы должны доверять правилам канонического квантования и методу интегрирования по путям? Почему мы должны принимать как данное встречающиеся в литературе простые уравнения поля и лагранжианы? И вообще, почему поля, действительно, существуют? Мне кажется, что ссылаться на эксперимент в данном случае не очень разумно. В конце концов, целью теоретической физики является не простое описание мира таким, каким мы видим его, а объяснение — в терминах небольшого числа фундаментальных принципов — почему он такой.

Точка зрения, положенная в основу этой книги, состоит в том, что квантовая теория поля действительно дает ответ на все поставленные вопросы, поскольку она есть единственный способ согласовать принципы квантовой механики (в том числе и свойство кластерной разложимости) с принципами специальной теории относительности. (Мы не рассматриваем здесь теории струн, которые содержат бесконечное число типов частиц.) Этой точки зрения я придерживался долгие годы, и, более того, в последнее время она вновь стала общепринятой. В последние несколько лет было понято, что наши наиболее удачные квантовые теории поля (в том числе и квантовую электродинамику) нужно рассматривать как “эффективные теории поля”. Последние слова означают низкоэнергетические приближения более фундаментальной теории, которая, может быть, даже не является теорией поля, а представляет собой что-то вроде теории струн. Следовательно, основной причиной того, что квантовые теории поля хорошо описывают физику при экспериментально достичимых энергиях, является тот факт, что *любая* релятивистская квантовая теория при достаточно низких энергиях выглядит как квантовая теория поля. По этой причине, важно понимать, как можно обосновать справедливость квантовой теории поля, исходя из принципов специальной теории относительности и квантовой механики. Кроме того, мы теперь по-другому относимся к некоторым недостаткам квантовых теорий поля, таким как неперенормируемость и “тривиальность”. Они надоедали нам, когда мы считали, что все наши теории являются истинно фундаментальными. Обсуждая их здесь, мы остановимся на этом вопросе подробнее. Эту книгу следует рассматривать как книгу по квантовой теории поля, написанной в эру эффективных теорий поля.

Наиболее прямым и несомненным следствием специальной теории относительности и квантовой механики являются свойства состояний частиц. Поэтому в этой книге в качестве первого вводимого объекта выступают частицы. Они появляются в главе 2 как представления неоднородной группы Лоренца, действующей в гильбертовом пространстве квантовой механики. В главе 3 вводятся основные понятия, необходимые для ответа на фундаментальный динамический вопрос:

какой вид имеет состояние, в далеком прошлом представлявшее собой некоторую совокупность свободных частиц. Зная генератор эволюции во времени, гамильтониан, мы можем ответить на поставленный вопрос, находя в рамках теории возмущений множество амплитуд перехода, известных как  $S$ -матрица. В главе 4 вводится принцип кластерной разложимости. Он понадобится нам для того, чтобы показать как генератор эволюции во времени, гамильтониан, может быть построен из операторов рождения и уничтожения. Затем в главе 5 мы возвращаемся к понятию лоренц-инвариантности, из которой получаем следующее свойство операторов рождения и уничтожения: они должны группироваться таким образом, чтобы получившиеся квантовые поля не нарушили принцип причинности. Вводя спин, мы доказываем СРТ-теорему и находим связь спина со статистикой. Полученный формализм используется в главе 6 для вывода правил Фейнмана, позволяющих вычислять элементы  $S$ -матрицы.

В главе 7 мы вводим понятие лагранжиана и излагаем канонический формализм. Делаем мы это не потому, что они в каких-то областях физики оказались полезными (сомнительный довод). Скорее к этому нас принуждает тот факт, что канонический формализм облегчает выбор гамильтонианов, для которых соответствующая  $S$ -матрица удовлетворяет различным предполагаемым симметриям. В частности, лоренц-инвариантность плотности лагранжиана приводит к существованию набора из десяти операторов, удовлетворяющих соотношениям в алгебре группы Пуанкаре. Кроме того, как мы увидим в главе 3, она является ключевым условием, необходимым для доказательства лоренц-инвариантности  $S$ -матрицы. В главе 8 обсуждается квантовая электродинамика, после чего в главе 9 излагается метод интегрирования по путям. Он используется для доказательства некоторых предположений, сделанных в главе 8. Обычно при изложении квантовой теории поля континуальный интеграл вводят несколько раньше, чем это сделано здесь. Однако мне кажется, что хотя интегрирование по путям и является гораздо более быстрым способом получения фейнмановских правил из заданного лагранжиана, оно довольно сильно затеняет их квантовомеханическую сущность.

Завершают том I несколько глав (10–14), вводящие читателя в круг вопросов, касающихся вычисления в произвольных теориях поля радиационных поправок, соответствующих диаграммам с петлями. Здесь расположение материала также несколько необычное. Мы начинаем с описания непертурбативных методов. Полученные результаты в дальнейшем помогут нам понять необходимость перенормировки полей и масс, не озадачивая при этом вопросом, содержит ли теория расходимости или нет. В главе 11 представлены классические однопетлевые поправки квантовой электродинамики. Они дают нам возможность изложить полезные вычислительные методы (параметры

Фейнмана, поворот Вика, регуляризации размерная и Паули–Вилларса). Кроме того, они являются собой конкретные примеры вычисления перенормировок на практике. Опыт, приобретенный в главе 11, обобщается в главе 12 на все порядки теории возмущений, а также на произвольные теории поля. Здесь описан современный взгляд на неперенормируемость, присущую эффективным теориям поля. В главе 13 мы отклоняемся от основной темы, обсуждая вопрос о безмассовых частицах, имеющих низкую энергию или параллельные импульсы. Уравнение Дирака для электрона во внешнем электромагнитном поле, исторически возникшее почти в самом начале развития релятивистской квантовой механики, вводится нами только в главе 14, где изучается задача о связанных состояниях. Это уравнение не следует рассматривать (как это делал Дирак) как релятивистский вариант уравнения Шредингера. Скорее это есть приближение к истинной квантовой теории поля, описывающей фотоны и электроны. Заканчивается глава 14 рассмотрением лэмбовского сдвига, причем сопоставляются теоретические результаты и новейшие экспериментальные данные.

Читатель может заметить, что некоторые вопросы, рассмотренные в этой книге, вообще говоря, следовало бы излагать в учебнике по ядерной физике или физике элементарных частиц. Особенно это касается материала главы 3. Может быть, это действительно так, но, как показывает мой опыт, по этим вопросам понимание обычно либо вообще отсутствует, либо оно несколько смутное (основано на частных динамических моделях, а не на общих принципах теории симметрии и квантовой механики). Я встречал физиков, работающих в теории струн, которые никогда не слышали о связи между Т-инвариантностью и фазовыми сдвигом конечного состояния, а также специалистов по ядерной физике, которые не понимали, почему резонансы описываются формулой Брейта–Вигнера. По этой причине, в первых главах книги я придерживался такого принципа, что если возникают сомнения, включать или не включать какой-либо материал, то его лучше включить.

Том II описывает недавние успехи квантовой теории поля, внесшие в нее свежую струю идей: неабелевы калибровочные теории, перенормгрупповой метод, нарушенные симметрии, аномалии, инстантоны и т.д.

Я пытался ссылаться и на классические работы по квантовой теории поля, и на полезные статьи по темам, упомянутым в книге, но не разобранным подробно в основном тексте. Мне не во всех случаях известен автор представленных результатов. Поэтому не следует интерпретировать простое отсутствие ссылок как заявку на оригинальность, хотя некоторые результаты, действительно, получены впервые. Мне кажется, что по сравнению с оригиналными работами и стандартными учебниками я несколько улучшил изложение отдельных

мест. В качестве примера, можно привести следующие темы: доказательство того, что операторы симметрии являются либо унитарными, либо антиунитарными; обсуждение правил суперотбора; анализ вырождения частиц, связанного с необычными представлениями группы инверсий; использование принципа кластерной разложимости; вывод редукционной формулы; вывод приближения внешнего поля; вычисление лэмбовского сдвига.

Каждую главу, кроме первой, я снабдил задачами. Целью некоторых из них является простое приобретение навыков использования описанных в главе методов, в других же предполагается обобщить полученные результаты на более широкий класс теорий.

Преподавая квантовую теорию поля, я обнаружил, что каждый из двух томов этой книги содержит материал, достаточный для годового курса. Я полагаю, что книга доступна студентам, знакомым с нерелятивистской квантовой механикой и классической электродинамикой. Я также подразумеваю наличие у учащихся знания основ комплексного анализа и линейной алгебры. Вопросы же теории групп и топологии излагаются по мере необходимости.

Эта книга не является пособием для студентов, желающих немедленно начать вычисление фейнмановских диаграмм в стандартной модели, объединяющей слабые, электромагнитные и сильные взаимодействия. Она также не предназначена для тех, кто любит математически строгое изложение. На самом деле, некоторые части этой книги из-за недостатка строгости вызовут слезы на глазах человека, склонного к математике. Поэтому она скорее подойдет физикам-профессионалам и тем студентам, которые хотят понять, почему квантовая теория поля такова, какой мы ее имеем на сегодняшний день. Прочитав книгу, они подготовят себя к любым новым открытиям, которые могут вывести нас за рамки современных физических представлений.

\* \* \*

Большую часть материала, представленного в этой книге, я изучил за годы моих научных контактов с другими физиками, число которых слишком велико, чтобы их можно было здесь перечислить. Но я, тем не менее, должен все-таки поблагодарить Сиднея Коулмана и моих коллег из Техасского Университета (Арно Бooma, Луиса Буаэ, Фила Канделаса, Бриса ДеВита, Сесиль ДеВитт-Моретте, Жака Диствлера, Вилли Фишлера, Джоша Фейнберга, Жака Гомиса, Вадима Каплуновского, Джо Полчинского и Пауля Шапиро). Я хочу поблагодарить Герри Холтона, Артура Миллера и Сэма Швебера за помощь при написании исторического введения. Также я благодарен Элис Вилсон, которая готовила иллюстрации и печатала L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X файлы, пока я не научился делать этого сам, и Тэри Рилею за подборку бесчисленного количества книг и статей. За помощь в исправлении различных

ошибок в первом издании этого тома я нахожусь в большом долгу перед многочисленными студентами и коллегами, особенно, перед Хидекаки Аояма, Кевином Каилли, Амиром Кашани-Пуром, Михио Масужима, Фабио Сиринго и Саном Фу Туан. Я признателен Морин Стоун и Элисону Вулатту из издательства Кембриджского Университета за помощь в подготовке этой книги к печати. Особую благодарность я хочу вынести моему издателю, Руфусу Нилу, за его дружеские советы.

СТИВЕН ВАЙНБЕРГ

Остин, Техас  
Октябрь, 1994

## ОБОЗНАЧЕНИЯ

Латинские индексы  $i, j, k$  и т.д. в общем случае пробегают три значения (обычно 1, 2, 3), соответствующие трем пространственным координатам.

Греческие индексы  $\mu, \nu$  и т.д. в общем случае пробегают значения 1, 2, 3, 0, соответствующие четырем пространственновременным координатам, причем символом  $x^0$  обозначена временная координата.

По повторяющимся индексам, если не оговорено обратное, производится суммирование.

Пространственновременная метрика  $\eta_{\mu\nu}$  диагональна. Соответствующие ненулевые элементы:  $\eta_{11} = \eta_{22} = \eta_{33} = 1$ ,  $\eta_{00} = -1$ .

Даламбертиан определяется формулой  $\square \equiv \eta^{\mu\nu} \partial^2 / \partial x^\mu \partial x^\nu = \nabla^2 - \partial^2 / \partial t^2$ , где символом  $\nabla^2$  обозначен  $\partial^2 / \partial x^i \partial x^i$ .

“Тензор Леви–Чевита”  $\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$  вводится как полностью антисимметричная величина, причем  $\epsilon^{0123} = +1$ .

Пространственные трехвекторы обозначаются жирным шрифтом.

Шляпка над любым вектором обозначает соответствующий единичный вектор: таким образом,  $\hat{\mathbf{v}} \equiv \mathbf{v} / |\mathbf{v}|$ .

Точка над любой величиной обозначает ее временную производную.

Матрицы Дирака  $\gamma_\mu$  определяются соотношением  $\gamma_\mu \gamma_\nu + \gamma_\nu \gamma_\mu = 2\eta_{\mu\nu}$ . Кроме того,  $\gamma_5 = i\gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3$  и  $\beta = i\gamma_0$ .

Ступенчатая функция  $\theta(s)$  принимает значения +1, если  $s > 0$ , и 0, если  $s < 0$ .

Комплексное сопряжение, транспонирование и эрмитово сопряжение матрицы или вектора  $A$  обозначаются, соответственно,  $A^*$ ,  $A^T$  и  $A^\dagger = A^{*T}$ . Эрмитово сопряжение оператора  $O$  обозначается  $O^\dagger$ , за исключением тех случаев, когда крест используется, чтобы подчеркнуть, что вектор или матрица операторов не транспонируется. Символы +Н.с. или +с.с. в конце формул указывают на то, что вместо них нужно подставить эрмитово или комплексное сопряжение слагаемых,

стоящих перед ними. Черта над дираковским спинором  $u$  обозначает величину  $\bar{u} = u^\dagger \beta$ .

Везде, кроме главы 1, мы используем систему единиц, в которой  $\hbar$  и скорость света полагаются равными 1. Символом  $-e$  обозначен свободный заряд электрона, так что постоянная тонкой структуры равна  $\alpha = e^2/4\pi \approx 1/137$ .

Числа в скобках после приводимых в тексте числовых данных означают погрешность в определении последних значащих цифр. Если не оговорено обратное, экспериметальные данные берутся из “Review of Particle Properties”, *Phys. Rev.* **D50**, 1773 (1994).

# Г л а в а 1

## ИСТОРИЧЕСКОЕ ВВЕДЕНИЕ

В силу нашего знакомства с современными физическими представлениями нам трудно понять трудности, которые испытывали физики всего несколько лет назад. Нам также трудно извлечь хоть какую-то пользу из опыта, накопленного ими. В то же время, знание истории — благо, поскольку оно помогает нам понять, что последовательность, в которой происходило развитие той или иной физической теории, зачастую довольно сильно противоречит ее внутренней логической структуре.

В этой книге я попытался изложить квантовую теорию поля в такой логической последовательности, которая выявила бы ее глубокую связь с физическими принципами специальной теории относительности и квантовой механики. Такой подход волей-неволей заставляет меня отклониться в сторону от пути исторического развития предмета. Рассмотрим один пример. Исторически верно утверждение, что квантовая теория поля возникла как составная часть учения о релятивистских волновых уравнениях, таких, как уравнения Максвелла, Клейна–Гордона и Дирака. По этой причине довольно естественно, что в учебниках по квантовой теории поля эти волновые уравнения вводятся где-нибудь в начале, а также что им придается большое значение. Тем не менее, мне всегда казалось, что намного лучше начинать изложение предмета с вигнеровского определения частиц как представлений неоднородной группы Лоренца, несмотря на тот факт, что работа Вигнера была опубликована только в 1939 г. и не имела большого влияния на развитие квантовой теории поля в течение довольно длительного периода. Эту книгу мы начнем с того, что рассмотрим частицы, и затем получим для них волновые уравнения.

Нет необходимости говорить о том, что частицы, конечно же, являются более фундаментальным объектом, чем поля. В течение долгого времени после 1950 г. предполагалось, что, вообще говоря, законы природы описываются некоторой квантовой теорией поля. Эту книгу я начинаю с описания частиц не потому, что они более фундаментальны, а скорее потому, что информация, которую мы имеем о частицах, более достоверна, ее легче вывести из принципов квантовой механики и специальной теории относительности. Если бы вдруг оказалось, что какая-то физическая система не может быть описана некоторой квантовой теорией поля, то эта новость стала бы сенсацией. Если же вдруг оказалось бы, что рассматриваемая система не удовлетворяет посту-

латам квантовой механики и специальной теории относительности, то это была бы уже катастрофа.

На самом деле, недавно возникла идея, что квантовую теорию поля нельзя рассматривать как некую фундаментальную теорию, лежащую в основе всех законов природы. В качестве таковой могло бы выступать нечто совсем другое, например, теория струн. С этой точки зрения квантовая электродинамика и другие квантовые теории поля, которыми мы так гордимся, представляют собой просто “эффективные теории поля”, т.е. низкоэнергетические приближения более фундаментальной теории. Наши полевые модели работают так хорошо не потому, что они являются отражением истинных законов природы, а потому, что любую релятивистскую квантовую теорию можно рассматривать как теорию поля, если при этом ограничиться рассмотрением частиц с достаточно низкой энергией. Поэтому если мы хотим знать, почему квантовые теории поля именно такие, какими мы их представляем, мы должны начать наше изложение с описания частиц.

Однако нам не хотелось бы заплатить за все ценой полного забвения прошлого. В настоящей главе описана история развития квантовой теории поля начиная с момента ее возникновения и до 1949 г., когда она приобрела свой современный вид. В дальнейшем я везде буду стараться излагать историю, не вторгаясь при этом в область физики.

Проблема, с которой я столкнулся при написании настоящей главы, состоит в том, что история развития квантовой теории поля с самого момента ее возникновения очень сильно переплетена с историей развития квантовой механики. Поэтому читатель, знакомый с историей последней, возможно, встретит здесь материал, с которым он уже знаком. Особенно это касается самого первого параграфа, где я описываю ранние попытки объединения квантовой механики и специальной теории относительности. В этом случае читателю просто предлагается перейти к следующим параграфам.

С другой стороны, читатели, не знакомые с квантовой теорией поля, возможно, найдут, что материал этой главы излагается слишком сжато и поэтому понятен им не до конца. Я советую таким читателям не беспокоиться. Эта глава не замышлялась как самодостаточное введение в квантовую теорию поля и не является основой, необходимой для понимания остальных глав книги. Некоторым читателям я даже советую сразу начать со второй главы, а к истории предмета вернуться чуть позже. Тем не менее во многих случаях история развития квантовой теории поля может оказаться хорошим введением в предмет.

Следует добавить, что первая глава не задумывалась как оригинальная работа по истории квантовой теории поля. Я основывался на выдержках из книг и статей настоящих историков, а также некоторых воспоминаниях и оригинальных физических работах. Читателю,

который хочет более углубленно изучить историю квантовой теории поля, я советую обратиться к цитируемым работам.

Пару слов об обозначениях. Чтобы окунуться в атмосферу прошлого, в формулах этой главы я буду явно указывать величины  $\hbar$  и  $c$  (и даже  $h$ ). Однако чтобы читателю было легче ориентироваться в физической литературе, я буду использовать современные электростатические единицы для зарядов (так что постоянная тонкой структуры  $\alpha = e^2/(4\pi\hbar c) \approx 1/137$ ). В последующих главах я буду в основном пользоваться “естественной” системой единиц, полагая  $\hbar = c = 1$ .

## § 1.1. Релятивистская волновая механика

Волновая механика с самого момента своего появления являлась релятивистской теорией. Как мы увидим позже, создатели квантовой механики, Луи де Бройль и Эрвин Шредингер, были проникнуты идеями специальной теории относительности. Только спустя несколько лет стало ясно, что релятивистская волновая механика, рассматриваемая как релятивистская квантовая теория фиксированного числа частиц, невозможна. Таким образом, несмотря на множество отдельных успехов, релятивистская волновая механика в конце концов была заменена квантовой теорией поля. Тем не менее релятивистская волновая механика сохранилась как важный элемент формализма квантовой теории поля. Вывода некоторых ее важнейших результатов в рамках других подходов не существует до сих пор.

Возможность описания частиц вещества подобно фотонам в терминах волн, была впервые рассмотрена в 1923 г. Луи де Бройлем. Прямая аналогия с излучением, а также лоренц-инвариантность, сыграли решающую роль: если частица, положение которой задается пространственным вектором  $\mathbf{x}$  и моментом времени  $t$ , представляет собой волну с фазой  $2\pi(\boldsymbol{\kappa} \cdot \mathbf{x} - \nu t)$  и если эта фаза лоренц-инвариантна, то тогда вектор  $\boldsymbol{\kappa}$  и частота  $\nu$  должны преобразовываться как  $\mathbf{x}$  и  $t$  соответственно (или, что то же самое, как  $\mathbf{p}$  и  $E$ ). Чтобы это стало возможным, пара  $\{\boldsymbol{\kappa}, \nu\}$  должна зависеть от скорости точно так же, как и пара  $\{\mathbf{p}, E\}$ . Следовательно, должно быть  $\boldsymbol{\kappa} \sim \mathbf{p}$ ,  $\nu \sim E$ , причем коэффициент пропорциональности в обоих случаях один и тот же. Для фотонов справедливо соотношение Эйнштейна  $E = h\nu$ , и поэтому довольно естественно предположить, что для частиц вещества формула аналогична:

$$\mathbf{k} = \mathbf{p}/h, \quad \nu = E/h. \quad (1.1.1)$$

В результате групповая скорость волны  $\partial\nu/\partial\mathbf{k}$  оказывается равной скорости частицы. Поэтому мы можем просто отождествить волновые пакеты и соответствующие им частицы.

Предположив, что любая замкнутая орбита содержит целое число длин волн  $\lambda = 1/|\kappa|$ , где Брейль сумел вывести старые правила квантования, полученные впервые Нильсом Бором и Арнольдом Зоммерфельдом. Эти правила, великолепно объяснявшие атомные спектры, представлялись до этого весьма загадочными. Де Брейль и Вальтер Елзасер [2] независимо друг от друга осознали, что волновую теорию де Брейля можно проверить, изучая интерференционные эффекты, возникающие при рассеянии электронов на кристаллах. Наличие таких эффектов было открыто спустя несколько лет Клинтоном Джосефом Дэвиссоном и Лестером Г. Джермером [3]. Однако оставалось по-прежнему неясным, какой вид имеют соотношения де Брейля (1.1.1) в случае взаимодействующих частиц, например в случае электронов в произвольном кулоновском поле.

Следующим этапом развития квантовой механики стала матричная механика [4], разработанная в 1925–1926-х годах в работах Вернера Гейзенберга, Макса Борна, Паскаля Йордана и Вольфганга Паули. Волновая механика при этом несколько отошла в тень. Главной идеей, положенной в основу матричной механики, стало следующее требование: теория должна иметь дело только с наблюдаемыми величинами, такими, как уровни энергии или интенсивности излучения и поглощения. Работа Гейзенberга 1925 г. начиналась следующими словами: “В этой статье сделана попытка обосновать теоретическую квантовую механику исходя исключительно из соотношения между наблюдаемыми величинами.” Позитивизм подобного рода периодически всплывал наружу на разных этапах развития квантовой теории поля. В качестве примера можно привести работы Джона Уилера и Гейзенберга, в которых была введена  $S$ -матрица (см. гл. 3), или же статьи 1950-х годов (см. гл. 10), в которых дисперсионная теория получила свою вторую жизнь. Современная квантовая теория поля весьма далека от этого идеала. Мы же обойдем стороной этот интересный вопрос, поскольку попытка описать здесь матричную механику более подробно уведет нас слишком далеко в сторону от основной темы.

Как широко известно, свежую струю в волновую механику внес Эрвин Шредингер. В серии его работ [5], датируемых 1926 г., было впервые выписано знаменитое нерелятивистское волновое уравнение, которое затем было использовано для вывода результатов, уже полученных методами матричной механики. Позже, в шестом параграфе четвертой работы, появилось и релятивистское обобщение волнового уравнения. Если же верить Дираку [6], цепочка событий была несколько иной. Шредингер сначала вывел релятивистское уравнение, но затем начал сомневаться в его справедливости, поскольку оно неправильно описывало тонкую структуру атома водорода. Через несколько месяцев он осознал, что нерелятивистское приближение релятивистского уравнения важно само по себе, даже если его исходное уравнение неверно! К тому времени когда Шредингер собрался

опубликовать свое релятивистское волновое уравнение, оно уже было независимо переоткрыто Оскаром Клейном [7] и Вальтером Гордоном [8]. По этой причине релятивистский вариант называется “уравнением Клейна–Гордона”.

Шредингер вывел свое релятивистское волновое уравнение, заметив, что гамильтониан  $H$  и импульс  $\mathbf{p}$  “электрона Лоренца” с массой  $m$  и зарядом  $e$ , находящегося во внешнем векторном потенциале  $\mathbf{A}$  и кулоновском потенциале  $\phi$ , связаны следующим соотношением<sup>1)</sup>:

$$0 = (H + e\phi)^2 - c^2(\mathbf{p} + e\mathbf{A}/c)^2 - m^2c^4. \quad (1.1.2)$$

Соотношения де Броиля (1.1.1) для *свободной* частицы, представленной плоской волной  $\exp\{2\pi i(\boldsymbol{\kappa} \cdot \mathbf{x} - \nu t)\}$ , можно получить, если произвести отождествление

$$\mathbf{p} = \hbar\mathbf{k} \rightarrow -i\hbar\nabla, \quad E = \hbar\nu \rightarrow i\hbar \frac{\partial}{\partial t}, \quad (1.1.3)$$

где  $\hbar$  — удобное обозначение (введенное Дираком) для  $h/2\pi$ . Исходя из чисто формальной аналогии Шредингер предположил, что электрон во внешних полях  $\mathbf{A}$ ,  $\phi$  должен описываться волновой функцией  $\psi(\mathbf{x}, t)$ , удовлетворяющей уравнению, получаемому при помощи той же самой замены в (1.1.2):

$$0 = \left[ \left( i\hbar \frac{\partial}{\partial t} + e\phi \right)^2 - c^2 \left( -i\hbar\nabla + \frac{e\mathbf{A}}{c} \right)^2 - m^2c^4 \right] \psi(\mathbf{x}, t). \quad (1.1.4)$$

В частности, для стационарных состояний в атоме водорода справедливы равенства  $\mathbf{A} = 0$  и  $\phi = e/(4\pi r)$ . Кроме того, в этом случае  $\psi$  зависит от времени  $t$  экспоненциально:  $\exp(-iEt/\hbar)$ . Поэтому (1.1.4) сводится к уравнению

$$0 = \left[ \left( E + \frac{e^2}{4\pi r} \right)^2 - c^2\hbar^2\nabla^2 - m^2c^4 \right] \psi(\mathbf{x}). \quad (1.1.5)$$

Решения уравнения (1.1.5) с наложенными на них разумными граничными условиями, определяют уровни энергии [9]

$$E = mc^2 \left[ 1 - \frac{\alpha^2}{2n^2} - \frac{\alpha^4}{2n^4} \left( \frac{n}{l+1/2} - \frac{3}{4} \right) + \dots \right], \quad (1.1.6)$$

где  $\alpha \equiv e^2/(4\pi\hbar c)$  — “постоянная тонкой структуры”, численное значение которой составляет приблизительно  $1/137$ ,  $n$  — положительное целое число, а  $l$  — орбитальный угловой момент в единицах  $\hbar$ , принимающий целочисленные значения в интервале  $0 \leq l \leq n - 1$ . Наличие

<sup>1)</sup> Это соотношение лоренц-инвариантно, поскольку величины  $\mathbf{A}$  и  $\phi$  при преобразованиях Лоренца изменяются точно так же, как  $\mathbf{p}$  и  $E$  соответственно. Гамильтониан  $H$  и импульс  $\mathbf{p}$  Шредингер представлял в виде частных производных действия, однако это неважно для нашего рассмотрения.

слагаемоего, содержащего  $\alpha^2$ , хорошо согласуется с главными особенностями спектра атома водорода (серии Лаймана, Бальмера и т.д.). Дирак писал [6], что именно это обстоятельство привело Шредингера к открытию нерелятивистского волнового уравнения. С другой стороны, член, содержащий  $\alpha^4$ , дает численное значение расщепления тонкой структуры, противоречащее данным точных экспериментов Фридриха Пашена.

Поучительно сравнить результаты, полученные Шредингером и Арнольдом Зоммерфельдом [10а] с помощью старой квантовой теории:

$$E = mc^2 \left[ 1 - \frac{\alpha^2}{2n^2} - \frac{\alpha^4}{2n^4} \left( \frac{n}{k} - \frac{3}{4} \right) + \dots \right]. \quad (1.1.7)$$

Здесь  $m$  обозначает массу электрона. Величина  $k$  пробегает все целые значения от 1 до  $n$ . В теории Зоммерфельда она выражается через орбитальный угловой момент  $l\hbar$  посредством формулы  $k = l + 1$ . Такая тонкая структура спектра согласуется с экспериментом: например, в случае  $n = 2$  из равенства (1.1.7) следует существование двух уровней энергии (с  $k = 1$  и  $k = 2$ ), разделенных интервалом  $\alpha^4 mc^2 / 32 = 4,53 \times 10^{-5}$  эВ. В противоположность этому, результат Шредингера (1.1.6) приводит к расщеплению  $\alpha^4 mc^2 / 12$ , что значительно больше экспериментального значения.

Шредингер осознал, что причиной расхождения является наличие спина у электрона. Расщепление уровней энергии атомов щелочных элементов некулоновскими электрическими полями, а также слабыми внешними магнитными полями (так называемый аномальный эффект Зеемана), свидетельствует о кратности вырождения, большей, чем предсказывает теория Бора–Зоммерфельда. Это обстоятельство привело в 1925 г. Джоржа Уленбека и Самюэля Гоудсмита [11] к выводу, что электрон обладает внутренним угловым моментом  $\hbar/2$ . Более того, величина расщепления Зеемана [12] дала им возможность в дальнейшем оценить магнитный момент электрона

$$\mu = \frac{e\hbar}{2mc}. \quad (1.1.8)$$

Ясно, что необходимо учитывать как орбитальный угловой момент электрона, так и его спин. Поэтому вполне естественно, что релятивистское уравнение Шредингера дает неправильное значение постоянной тонкой структуры.

К 1927 г. в работах нескольких физиков [13] было показано, что спин-орбитальное взаимодействие действительно может объяснить наблюдаемое расхождение результата Шредингера (1.1.6) с экспериментальными данными. В этом случае мы должны учитывать два эффекта: взаимодействие магнитного момента (1.1.8) с магнитным полем, действующим на электрон в атоме, а также релятивистскую “прецессию Томаса”, приводящую (даже в отсутствие магнитного момента) к вращению электронного спина [14]. Рассмат-

риваемые в совокупности, эти два эффекта приводят к увеличению энергии уровня с полным угловым моментом  $j = l + 1/2$  до значения (1.1.7), соответствующего  $k = l + 1 = j + 1/2$ , в то время как энергия уровня с  $j = l - 1/2$  уменьшается до значения, соответствующего  $k = l = j + 1/2$ . Таким образом, энергия зависит только от  $n$  и  $j$ , но не от  $l$ :

$$E = mc^2 \left[ 1 - \frac{\alpha^2}{2n^2} - \frac{\alpha^4}{2n^4} \left( \frac{n}{j+1/2} - \frac{3}{4} \right) + \dots \right]. \quad (1.1.9)$$

Теория Зоммерфельда по чистой случайности дала правильную величину расщепления в атоме водорода ( $j + 1/2$ , как и  $k$ , пробегает все целые значения от 1 до  $n$ ), хотя при этом значения орбитальных угловых моментов  $l$  различных уровней оказались неверными. Кроме того, вырождение уровней тонкой структуры в атоме водорода равно 2 для  $j = 1/2$  и  $2(2j + 1)$  — для  $j > 1/2$  (соответствующие  $l$  равны  $j \pm 1/2$ ), что согласуется с экспериментом.

Несмотря на все достигнутые успехи, не существовала полная релятивистская теория, с самого начала содержащая спин электрона. Такая теория была создана в 1928 г. Полем Дираком, в намерения которого не входило простое построение теории вращающегося электрона. Он подошел к решению задачи по-другому, сформулировав вопрос, который сейчас кажется очень странным. В начале своей статьи, написанной в 1928 г. [15], Дирак спрашивает: “Почему Природа непременно должна предпочесть эту конкретную модель электрона, а не просто удовлетвориться существованием точечного заряда?” С современной точки зрения, такой вопрос аналогичен вопросу “Почему бактерия имеет только одну оболочку?” Наличие спина  $\hbar/2$  — это просто одно из свойств, определяющих электрон, а не какую-то иную частицу из множества частиц с различными спинами, известных на сегодняшний день. Тем не менее в 1928 г. можно было верить, что все вещество состоит из электронов и чего-то похожего, но обладающего положительным зарядом и являющегося составной частью атомных ядер. Таким образом, вопрос Дирака следует понимать следующим образом: “Почему фундаментальные частицы, образующие вещество, обладают спином  $\hbar/2$ ?”

Дирак нашел ответ на свой вопрос, потребовав, чтобы все вероятности были положительными. В то время было известно [16], что плотность вероятности для нерелятивистского уравнения Шредингера  $|\psi|^2$  удовлетворяет уравнению непрерывности

$$\frac{\partial}{\partial t} (|\psi|^2) - \frac{i\hbar}{2m} \nabla \cdot (\psi^* \nabla \psi - \psi \nabla \psi^*) = 0.$$

Отсюда следует, что интеграл  $|\psi|^2$  по трехмерному пространству не зависит от времени. С другой стороны, из решений релятивистского уравнения Шредингера можно единственным образом образовать

плотность вероятности  $\rho$  и ток  $\mathbf{J}$ , удовлетворяющие закону сохранения

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{J} = 0. \quad (1.1.10)$$

Они имеют вид

$$\rho = N \operatorname{Im} \psi^* \left( \frac{\partial}{\partial t} - \frac{ie\phi}{\hbar} \right) \psi, \quad (1.1.11)$$

$$\mathbf{J} = Nc^2 \operatorname{Im} \psi^* \left( \nabla + \frac{ie\mathbf{A}}{\hbar c} \right) \psi, \quad (1.1.12)$$

где  $N$  — произвольная константа. Однако  $\rho$  нельзя отождествлять с плотностью вероятности, поскольку ни при наличии внешнего потенциала  $\phi$ , ни в его отсутствие  $\rho$  не является знакоопределенной величиной. Вот цитата из воспоминаний самого Дирака:

Я помню, как однажды, когда я был в Копенгагене, Бор спросил меня, над чем я работаю. Я ответил ему, что пытаюсь построить удовлетворительную теорию электрона, на что Бор заметил: “Но ведь Клейн и Гордон уже сделали это!” Такой ответ сначала обескуражил меня. Бора, по-видимому, вполне удовлетворяло решение Клейна. Мне же оно не нравилось из-за отрицательных вероятностей, к которым оно приводило. Я продолжил работу, пытаясь построить теорию, в которой все вероятности были бы положительными.

Если верить Джоржу Гамову [18], Дирак нашел ответ на поставленную задачу, когда однажды вечером в 1928 г. он сидел, уставившись в камин в здании Колледжа Св. Джона в Кембридже. Дирак понимал, что уравнение Клейна–Гордона (или, что то же самое, релятивистское уравнение Шредингера) приводит к отрицательным вероятностям потому, что  $\rho$  в (1.1.10) содержит зависящую от времени волновую функцию. Это, в свою очередь, происходит по той простой причине, что волновая функция удовлетворяет дифференциальному уравнению *второго* порядка по времени. Задача поэтому сводится к замене этого дифференциального уравнения на некоторое другое уравнение первого порядка по времени, аналогичное уравнению Шредингера.

Предположим, что волновая функция электрона является многокомпонентной величиной  $\psi_n(x)$ , удовлетворяющей волновому уравнению вида

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \mathcal{H}\psi, \quad (1.1.13)$$

где  $\mathcal{H}$  — некоторая матричная функция пространственных производных. Чтобы построение лоренц-инвариантной теории стало возможным, мы должны предположить следующее: поскольку уравнение линейно по временным производным, оно также должно быть линейным

по пространственным производным. В результате  $\mathcal{H}$  принимает следующий вид:

$$\mathcal{H} = -i\hbar c \boldsymbol{\alpha} \cdot \nabla + \alpha_4 mc^2, \quad (1.1.14)$$

где  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  и  $\alpha_4$  — постоянные матрицы. Из (1.1.13) мы можем вывести уравнение второго порядка

$$-\hbar \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = \mathcal{H}^2 \psi = -\hbar^2 c^2 \alpha_i \alpha_j \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_i \partial x_j} - i\hbar m c^3 (\alpha_i \alpha_4 + \alpha_4 \alpha_i) \frac{\partial \psi}{\partial x_i} + m^2 c^4 \alpha_4^2 \psi.$$

(Соглашение о суммировании по повторяющимся индексам остается в силе. Индексы  $i$  и  $j$  принимают все значения 1, 2, 3, или, что то же самое,  $x, y, z$ .) Однако уравнение (1.1.14) должно быть согласовано со свободнополевой формой релятивистского уравнения Шредингера (1.1.4), которое просто выражает соотношение между импульсом и энергией специальной теории относительности. Поэтому матрицы  $\boldsymbol{\alpha}$  и  $\alpha_4$  должны удовлетворять следующим условиям:

$$\alpha_i \alpha_j + \alpha_j \alpha_i = 2\delta_{ij} \mathbf{1}, \quad (1.1.15)$$

$$\alpha_i \alpha_4 + \alpha_4 \alpha_i = 0, \quad (1.1.16)$$

$$\alpha_4^2 = \mathbf{1}, \quad (1.1.17)$$

где  $\mathbf{1}$  — единичная матрица, а  $\delta_{ij}$  обозначает символ Кронекера ( $\delta_{ij} = 1$ , если  $i = j$ ;  $\delta_{ij} = 0$ , если  $i \neq j$ ). Дирак нашел набор матриц  $4 \times 4$ , удовлетворяющих условиям (1.1.15)–(1.1.17):

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, & \alpha_2 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \\ \alpha_3 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, & \alpha_4 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (1.1.18)$$

Чтобы доказать лоренц-инвариантность изложенного формализма, Дирак умножил уравнение (1.1.13) слева на  $\alpha_4$ . В результате он получил уравнение

$$\left[ \hbar c \gamma^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} + mc^2 \right] \psi = 0, \quad (1.1.19)$$

где

$$\gamma \equiv -i\alpha_4 \boldsymbol{\alpha}, \quad \gamma^0 \equiv -i\alpha_4. \quad (1.1.20)$$

(Греческие индексы  $\mu, \nu$  и т.д. пробегают все значения 1, 2, 3, 0, при чем  $x^0 = ct$ . Дирак использовал обозначения  $x_4 = ict$  и  $\gamma_4 = \alpha_4$ .) Мат-

рицы  $\gamma^\mu$  удовлетворяют антисимметрическим соотношениям

$$\frac{1}{2}(\gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu) = \eta^{\mu\nu} \equiv \begin{cases} +1, & \mu = \nu = 1, 2, 3 \\ -1, & \mu = \nu = 0 \\ 0, & \mu \neq \nu. \end{cases} \quad (1.1.21)$$

Дирак заметил, что эти коммутационные соотношения лоренц-инвариантны, т.е. что им также удовлетворяют матрицы  $\Lambda^\mu_\nu \gamma^\nu$ , где  $\Lambda$  — любое преобразование Лоренца. Отсюда он заключил, что матрица  $\Lambda^\mu_\nu \gamma^\nu$  должна быть связана с  $\gamma^\mu$  преобразованием подобия:

$$\Lambda^\mu_\nu \gamma^\nu = S^{-1}(\Lambda) \gamma^\mu S(\Lambda).$$

Поэтому волновое уравнение является инвариантным, если при преобразовании Лоренца  $x^\mu \rightarrow \Lambda^\mu_\nu x^\nu$  волновая функция  $\psi$  переходит в  $S(\Lambda)\psi: \psi \rightarrow S(\Lambda)\psi$ . (Эти вопросы более подробно рассматриваются, хотя и с другой точки зрения, в гл. 5.)

Чтобы понять, как ведут себя электроны в произвольном магнитном поле, Дирак воспользовался “обычной процедурой”, сделав замену

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \rightarrow i\hbar \frac{\partial}{\partial t} + e\phi, \quad -i\hbar \nabla \rightarrow -i\hbar \nabla + \frac{e}{c} \mathbf{A}. \quad (1.1.22)$$

Волновое уравнение (1.1.13) сводится тогда к

$$\left( i\hbar \frac{\partial}{\partial t} + e\phi \right) \psi = (-i\hbar c \nabla + e\mathbf{A}) \cdot \boldsymbol{\alpha} \psi + mc^2 \alpha_4 \psi. \quad (1.1.23)$$

С его помощью Дирак показал, что в центральном поле закон сохранения углового момента имеет вид

$$[\mathcal{H}, -i\hbar \mathbf{r} \times \nabla + \hbar \boldsymbol{\sigma}/2] = 0, \quad (1.1.24)$$

где  $\mathcal{H}$  — матричный дифференциальный оператор (1.1.14), а  $(4 \times 4)$ -матрицы  $\boldsymbol{\sigma}$  — четырехмерное обобщение матриц Паули [19]

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \boldsymbol{\alpha}. \quad (1.1.25)$$

Поскольку собственные значения каждой из компонент  $\boldsymbol{\sigma}$  равны  $\pm 1$ , наличие дополнительного члена в (1.1.24) показывает, что электрон обладает внутренним угловым моментом  $\hbar/2$ .

Дирак возвел в квадрат оператор, действующий на волновую функцию  $\psi$  в левой части (1.1.23), получив при этом уравнение второго порядка. Последнее совпало по форме с уравнением Клейна–Гордона (1.1.4):

$$[-e\hbar c \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{B} - ie\hbar c \boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{E}] \psi, \quad (1.1.26)$$

за исключением двух дополнительных слагаемых в правой части. В случае медленного электрона первый член намного больше второго

и соответствует магнитному моменту, равному по величине магнитному моменту (1.1.8), найденному Гоудсмитом и Уленбеком [11]. Дирак осознал, что наличие магнитного момента и релятивистская природа теории приводят к тому, что последняя объясняет тонкую структуру. Величина расщепления уровней при этом находится в полном согласии (с точностью до  $\alpha^4 mc^2$ ) со значением, найденным Гейзенбергом, Йорданом и Чарльзом Г. Дарвином [13]. Немного позднее Дарвин [20] и Гордон [21], используя теорию Дирака, вывели “точную” формулу для уровней энергии в атоме водорода:

$$E = mc^2 \left( 1 + \frac{\alpha^2}{\{n - j - 1/2 + [(j + 1/2)^2 - \alpha^2]^{1/2}\}^2} \right)^{-1/2}. \quad (1.1.27)$$

Первые три члена разложения по степеням  $\alpha^2$  согласуются с приближенным результатом (1.1.9).

В итоге Дирак достиг своей первой цели: он построил релятивистский формализм с положительными вероятностями. Из (1.1.13) следует уравнение непрерывности

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{J} = 0, \quad (1.1.28)$$

где

$$\rho = |\psi|^2, \quad \mathbf{J} = c\psi^\dagger \boldsymbol{\alpha} \psi. \quad (1.1.29)$$

В результате положительную величину  $|\psi|^2$  можно интерпретировать как плотность вероятности. При этом полная вероятность  $\int |\psi|^2 d^3x$  должна быть постоянной величиной. Однако существовала еще одна трудность, которую Дирак не смог разрешить сразу.

Для заданного импульса  $\mathbf{p}$  волновое уравнение (1.1.13) обладает четырьмя решениями, представляющими собой плоские волны:

$$\psi \propto \exp \left[ \frac{i}{\hbar} (\mathbf{p} \cdot \mathbf{x} - Et) \right]. \quad (1.1.30)$$

Два решения имеют энергию  $E = +\sqrt{\mathbf{p}^2 c^2 + m^2 c^4}$  и соответствуют двум состояниям электрона со спинами  $J_z = \pm \hbar/2$ . Другие два решения обладают энергией  $E = -\sqrt{\mathbf{p}^2 c^2 + m^2 c^4}$  и не имеют какой-либо очевидной физической интерпретации. Как указал сам Дирак, та же проблема возникает и для релятивистского уравнения Шредингера. Для каждого  $\mathbf{p}$  существуют два решения вида (1.1.30), одно с  $E > 0$  и одно с  $E < 0$ .

Конечно, даже в классической физике, релятивистское соотношение  $E^2 = \mathbf{p}^2 c^2 + m^2 c^4$  имеет два решения  $E = \pm \sqrt{\mathbf{p}^2 c^2 + m^2 c^4}$ . Однако в классической физике мы можем просто предположить, что физически возможны только решения с положительными  $E$ . Поскольку для положительных решений мы имеем  $E > mc^2$ , а для отрицательных —  $E < -mc^2$ , между ними имеется конечная щель. Следовательно, никакой непрерывный процесс не может перевести частицу

из состояния с положительной энергией в состояние с отрицательной энергией.

Проблема отрицательных энергий в релятивистской квантовой механике оказывается намного более трудной. Дирак в своей работе 1928 г. [15] обратил внимание на тот факт, что взаимодействие электронов с излучением может приводить к переходам, при которых электрон с положительной энергией падает на уровень с отрицательной энергией, причем разница уносится двумя или большим числом фотонов. Почему же тогда вещества является стабильным?

В 1930 г. Дирак предложил замечательное решение [20]. Его подход основывался на принципе исключения Паули, поэтому стоит сказать несколько слов об истории этого принципа.

Периодическая таблица элементов и систематическое изучение спектра  $X$ -лучей к 1924 г. помогли ясно представить, как электроны размещаются на атомных уровнях энергии [23]. Максимальное число  $N_n$  электронов на оболочке, характеризующееся главным квантовым числом  $n$ , дается удвоенным числом орбитальных состояний с этим  $n$ :

$$N_n = 2 \sum_{l=0}^{n-1} (2l + 1) = 2n^2 = 2, 8, 18, \dots \quad (1.1.31)$$

Вольфганг Паули [24] в 1925 г. предположил, что эта картина может быть объяснена, если  $N_n$  — это полное число состояний на  $n$ -й оболочке, и если, кроме того, в природе действует довольно загадочный “принцип исключения”, запрещающий двум и более электронам занимать одно и то же квантовое состояние. Паули объяснял загадочный множитель 2 в (1.1.31) наличием “особой, неописываемой классическим образом двойственности” электронных состояний. Как мы уже видели, эта двойственность возникает из-за наличия спина у электрона [11]. Принцип исключения дал ответ на вопрос, который оставался непонятным в рамках старой теории атома Бора и Зоммерфельда: почему не все электроны в тяжелых атомах падают на оболочку с наименьшей энергией? Впоследствии принцип исключения Паули был переформулирован несколькими авторами [25] в виде требования, состоящего в том, что волновая функция многоэлектронной системы должна быть антисимметрична по координатам (орбитальным и спиновым) всех электронов. Этот принцип был применен в статистической механике Энрико Ферми [26] и Дираком [27]. Поэтому частицы, подчиняющиеся принципу исключения, обычно называются “фермионами”, в то время как частицы типа фотонов, волновая функция которых симметрична, подчиняются статистике Бозе–Эйнштейна и называются поэтому “бозонами”. Принцип Паули играет очень большую роль в теории металлов, теории белых карликов и нейтронных звезд, в химии и атомной физике. Однако обсуждение всех этих вопросов уведет нас слишком далеко в сторону.

Идея Дирака состояла в следующем: электроны с положительной энергией не могут провалиться на уровень с отрицательной энергией, поскольку “все состояния с отрицательной энергией заполнены, кроме, быть может, некоторых, соответствующих малой скорости”. Несколько незанятых состояний, или “дырок”, будучи окружеными морем электронов с отрицательной энергией, ведут себя как частицы с квантовыми числами, противоположными электронным: они обладают положительной энергией и положительным зарядом. Единственной частицей с положительным зарядом, известной на тот день, был протон. Как вспоминал впоследствии Дирак [27а], “общественное мнение в те годы выступало против введения новых частиц”. По этой причине, Дирак отождествил дырки с протонами. Более того, его статья, датируемая 1930 г. [22], называлась “Теория электронов и протонов”.

Дырочная теория сразу же столкнулась с несколькими трудностями. Первая трудность возникает очевидным образом из-за того, что море бездесущих электронов с отрицательной энергией имеет бесконечную плотность заряда. Возникает вопрос: где же тогда электрическое поле? Дирак выдвинул предположение, что на самом деле плотность электрического заряда, фигурирующая в уравнениях Максвелла, представляет собой “отклонение от обычного состояния электризации материи”. Вторая трудность, с которой столкнулась дырочная теория Дирака, — это чудовищная степень несоизмеримости по величине наблюдаемых отношения масс и отношения зарядов электронов и протонов. Дирак надеялся, что кулоновское взаимодействие электронов должно каким-то образом объяснить эту разницу, но Герман Вейль [28] показал, что дырочная теория полностью симметрична относительно положительных и отрицательных зарядов. В конце концов Дирак [22] предсказал существование процесса аннигиляции электрона с протоном, при котором электрон с положительной энергией, двигаясь посреди моря отрицательных электронов, встречает на своем пути дырку и падает на незанятый уровень, испуская пару гамма-квантов. Сам по себе этот процесс не противоречит дырочной теории. Некоторые физики даже предполагали, что найден неизвестный в то время источник энергии звезд. Однако вскоре Юлий Роберт Оппенгеймер и Игорь Тамм показали [29], что аннигиляция электронов и протонов в атоме должна происходить со слишком большой скоростью, а это противоречит наблюдаемой стабильности обычной материи. По приведенным причинам Дирак к 1931 г. изменил свое мнение и решил, что дырки должны представлять собой не протоны, а новый сорт положительно заряженных частиц с массой, равной массе электрона [29а].

Вторая и третья трудности исчезли после открытия позитрона Карлом Д. Андерсоном [30], который, по всей видимости, ничего не знал о предсказании Дирака. 2 августа 1932 г. в камере Виль-

сона, помещенной в магнитное поле 15 кГаусс, был зарегестрирован трек необычного космического излучения. Он представлял собой дугу окружности, соответствующей частице, заряженной положительно. Однако радиус трека был, по меньшей мере, на порядок больше того, который можно было бы ожидать, если бы этой положительно заряженной частицей являлся протон! И размер, и странная ионизация трека полностью согласовывались с гипотезой, что он соответствует новой частице, отличающейся от электрона только знаком заряда. Этими свойствами как раз обладают дырки Дирака. (Незадолго до этого П.М.С. Блакетт уже наблюдал странные треки, но не опубликовал свое открытие. Андерсон ссылается на опубликованные доклады Блакетта и Джузеппе Очиалини, в которых говорится о легких положительно заряженных частицах, наблюдавшихся в космических лучах.) Таким образом, оказалось, что Дирак был неправ только в самом начале, отождествляя дырки с протонами.

Открытие более или менее предсказанного позитрона, наряду с предыдущими успехами уравнения Дирака в объяснении магнитного момента электрона и тонкой структуры атома водорода, придало теории Дирака огромный авторитет, продержавшийся более шестидесяти лет. Однако хотя мало кто сомневается в том, что теория Дирака в той или иной форме будет присутствовать в любой будущей физической теории, у нас имеются серьезные причины быть недовольными ее предпосылками.

(i) Дираковский анализ проблемы отрицательных вероятностей в случае релятивистского волнового уравнения Шредингера, казалось бы, свидетельствует о невозможности существования частиц с нулевым спином. Однако даже физикам 1920-х годов были известны такие частицы — например атом водорода в основном состоянии и ядро гелия. Конечно, можно было бы возразить, что атомы водорода и альфа-частицы не являются элементарными и, следовательно, не обязательно описываются релятивистским волновым уравнением. Однако до сих пор неясно, какое отношение понятие элементарности имеет к формализму релятивистской квантовой механики. На сегодняшний день нам известно большое количество частиц с нулевым спином:  $\pi$ -мезоны,  $K$ -мезоны и т.д. Все они не менее элементарны, чем протон и нейтрон. Нам также известны частицы с единичным спином —  $W^\pm$  и  $Z^0$  — по-видимому, такие же элементарные, как электрон или любая другая частица. Более того, если отвлечься от эффектов, обусловленных сильными взаимодействиями, мы можем найти тонкую структуру “мезонных атомов”, состоящих из безспиновых отрицательных  $\pi$ - или  $K$ -мезонов, вращающихся вокруг атомного ядра. Причем для этого нам необходимы только стационарные решения релятивистского уравнения Гордона–Шредингера! Поэтому трудно согласиться с утверждением, что релятивистское уравнение, описывающее частицу с нулевым спином, неверно на фундаментальном уровне. Просто так

случилось, что электрон имеет спин  $\hbar/2$ , а не нуль, и по этой причине Дираку *пришлось* вывести свое уравнение.

(ii) Насколько мы сейчас знаем, *любой* частице соответствует “античастица”, причем их массы совпадают, а заряды отличаются знаком. (Античастицы некоторых полностью нейтральных частиц типа фотона совпадают с самими частицами.) Возникает вопрос: как можно интерпретировать античастицы заряженных бозонов, таких, как  $\pi^\pm$ -мезоны или  $W^\pm$ ? Можно ли их тоже рассматривать как море состояний с отрицательной энергией? Для частиц, подчиняющихся статистике Бозе–Эйнштейна, не выполняется принцип Паули. Поэтому ничто не мешает всем частицам с положительной энергией перейти в состояния с отрицательной энергией, независимо от того, заняты они или нет. Если же дырочная теория Дирака несправедлива для бозонных античастиц, то почему мы должны верить в ее правильность для фермионов? В 1972 г. я спросил у Дирака, что он думает по этому поводу. Он сказал, что не считает бозоны типа пионов и  $W^\pm$  “важными”. Через несколько лет в одной из своих лекций [27a] Дирак сослался на то обстоятельство, что “для бозонов наше представление о вакууме как о заполненных состояниях с отрицательной энергией больше не справедливо”, и заметил, что в этом случае “вся теория усложняется”. В следующем параграфе мы покажем, как развитие квантовой теории поля привело к исчезновению необходимости отождествлять античастицы с дырками. К сожалению, дырочная теория все еще встречается во многих учебниках. Согласно Юлиану Швингеру [30a], “представление о бесконечном море электронов с отрицательной энергией теперь лучше всего рассматривать как исторический курьез или же забыть о нем совсем.”

(iii) Одним из крупных достижений теории Дирака было предсказание магнитного момента электрона. Последний, ко всеобщему удивлению, оказался вдвое больше, чем это можно было бы предположить, если представлять электрон как вращающуюся по орбите заряженную точечную частицу с моментом импульса  $\hbar/2$ . Происхождение этой двойки представлялось до создания теории Дирака весьма загадочным. Однако в рассуждении Дирака не содержалось ничего такого, что позволило бы засомневаться в его выводах. В том месте, где мы ввели в волновое уравнение (1.1.23) электрическое и магнитное поля, можно было точно так же добавить “член Паули” [31]

$$\kappa \alpha_4 [\gamma^\mu, \gamma^\nu] \psi F_{\mu\nu}, \quad (1.1.32)$$

где  $\kappa$  — произвольный коэффициент. (Здесь  $F_{\mu\nu}$  — обычный тензор напряженности электромагнитного поля:  $F^{12} = B_3$ ,  $F^{01} = E_1$  и т.д.) Член Паули можно получить, прибавляя к левой части уравнений свободного поля слагаемое, пропорциональное  $[\gamma^\mu, \gamma^\nu] (\partial^2 / \partial x^\mu \partial x^\nu) \psi$  (что, на самом деле, равно нулю), и затем делая подстановку (1.1.22). Более современный подход просто констатирует, что член (1.1.32) удо-

вляетворяет всем симметриям, в том числе он является калибровочно-и лоренц-инвариантным. Поэтому нет никаких оснований *не* включать член Паули в уравнения поля (см. § 12.3.). Он приводит к дополнительному вкладу, пропорциональному  $\kappa$ , в магнитный момент электрона. По этой причине, кроме чисто формальных соображений простоты, у нас нет причин ожидать, что магнитный момент электрона принимает в теории Дирака какое-то определенное значение.

Как мы увидим в этой книге, все перечисленные проблемы были в конце концов разрешены (или, на худой конец, стали более ясными) по мере развития квантовой теории поля.

## § 1.2. Рождение квантовой теории поля

Фотон является единственной частицей, которая до момента своего обнаружения рассматривалась как поле. Поэтому естественно, что формализм квантовой теории поля развивался как аппарат для описания излучения и только позже был применен к другим частицам и полям.

В 1926 г. в одной из важнейших работ по матричной механике Борн, Гейзенберг и Йордан [32] применили разработанные ими новые методы к свободному электромагнитному полю. Для простоты они пренебрегли поляризацией электромагнитных волн и работали в одном измерении, причем координата  $x$  изменялась от 0 до  $L$ . Предполагалось, что поле  $u(x, t)$  на концах указанного интервала равно нулю и поэтому ведет себя аналогично струне с закрепленными в точках  $x = 0$  и  $x = L$  концами

$$H = \frac{1}{2} \int_0^L \left\{ \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + c^2 \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \right\} dx. \quad (1.2.1)$$

Чтобы свести это выражение к сумме квадратов, поле  $u$  необходимо представить в виде ряда Фурье, причем в точках  $x = 0$  и  $x = L$  должно выполняться равенство  $u = 0$ :

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} q_k(t) \sin\left(\frac{\omega_k x}{c}\right), \quad (1.2.2)$$

$$\omega_k \equiv k\pi c/L. \quad (1.2.3)$$

В результате

$$H = \frac{L}{4} \sum_{k=1}^{\infty} \{ \dot{q}_k^2(t) + \omega_k^2 q_k^2(t) \}. \quad (1.2.4)$$

Таким образом, струна (или соответствующее поле) ведет себя как совокупность независимых гармонических осцилляторов с угловыми

частотами  $\omega_k$ , как было предсказано за 20 лет до этого Паулем Эренфестом [32a].

В частности, “импульс”  $p_k(t)$ , канонически сопряженный  $q_k(t)$ , определяется следующим условием: если  $H$  является функцией  $p$  и  $q$ , то тогда

$$\dot{q}_k(t) = \frac{\partial}{\partial p_k(t)} H(p(t), q(t)).$$

Отсюда находим “импульс”:

$$p_k(t) = \frac{L}{2} \dot{q}_k(t). \quad (1.2.5)$$

В результате канонические коммутационные соотношения могут быть представлены в виде

$$[\dot{q}_k(t), q_j(t)] = \frac{2}{L} [p_k(t), q_j(t)] = \frac{-2i\hbar}{L} \delta_{kj}, \quad (1.2.6)$$

$$[q_k(t), q_j(t)] = 0. \quad (1.2.7)$$

Кроме того, зависимость  $q_k(t)$  от времени можно найти из гамильтоновых уравнений движения

$$\ddot{q}_k(t) = \frac{2}{L} \dot{p}_k(t) = -\frac{2}{L} \frac{\partial H}{\partial q_k(t)} = -\omega_k^2 q_k(t). \quad (1.2.8)$$

Вид матриц, определяемых уравнениями (1.2.6)–(1.2.8) был уже известен Борну, Гейзенбергу и Йордану из предыдущей работы, посвященной гармоническому осциллятору. Матрица, представляющая  $q$ , дается выражением

$$q_k(t) = \sqrt{\frac{\hbar}{L\omega_k}} [a_k \exp(-i\omega_k t) + a_k^\dagger \exp(+i\omega_k t)], \quad (1.2.9)$$

где  $a_k$  — независящая от времени матрица,  $a_k^\dagger$  — ее эрмитово сопряжение. Матрицы  $a_k$  и  $a_k^\dagger$  удовлетворяют следующим коммутационным соотношениям:

$$[a_k, a_j^\dagger] = \delta_{kj}, \quad (1.2.10)$$

$$[a_k, a_j] = 0. \quad (1.2.11)$$

Строки и столбцы  $a_k$  и  $a_k^\dagger$  нумеруются с помощью положительных целых чисел  $n_1, n_2, \dots$  (по одному числу для каждой нормальной моды). Матричные элементы даются формулами

$$(a_k)_{n'_1, n'_2, \dots, n_1, n_2, \dots} = \sqrt{n_k} \delta_{n'_k, n_k - 1} \prod_{j \neq k} \delta_{n'_j, n_j}, \quad (1.2.12)$$

$$(a_k^\dagger)_{n'_1, n'_2, \dots, n_1, n_2, \dots} = \sqrt{n_k + 1} \delta_{n'_k, n_k + 1} \prod_{j \neq k} \delta_{n'_j, n_j}. \quad (1.2.13)$$

Если имеется только одна нормальная мода, то соответствующие ей  $a$  и  $a^\dagger$  могут быть явно представлены следующим образом:

$$a = \begin{bmatrix} 0 & \sqrt{1} & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \sqrt{2} & 0 & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{3} & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \ddots & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & & \end{bmatrix}, \quad a^\dagger = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots \\ \sqrt{1} & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \sqrt{3} & 0 & \dots & \dots & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \ddots & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & & \end{bmatrix}.$$

Нетрудно проверить, что (1.2.12) и (1.2.13) действительно удовлетворяют коммутационным соотношениям (1.2.10) и (1.2.11).

Физическая интерпретация вектора-столбца, составленного из целых чисел  $n_1, n_2, \dots$  такова. Он представляет собой такое состояние, в котором каждой нормальной моде  $k$  соответствует  $n_k$  квантов. Матрицы  $a_k$  и  $a_k^\dagger$ , действующие на такой вектор, соответственно уменьшают или увеличивают  $n_k$  на единицу, не меняя остальные  $n_l, l \neq k$ . Поэтому их можно рассматривать как операторы, уничтожающие или рождающие один квант  $k$ -й нормальной моды. В частности, вектор, у которого все  $n_k = 0$ , представляет собой вакуум. Подействовав на него любым из операторов  $a_k$ , мы получим нуль.

Еще один довод в пользу такой интерпретации дает исследование гамильтониана. Используя (1.2.9) и (1.2.10), можно свести (1.2.4) к виду

$$H = \sum_k \hbar\omega_k \left( a_k^\dagger a_k + \frac{1}{2} \right). \quad (1.2.14)$$

Гамильтониан диагонален в  $n$ -представлении (представлении чисел заполнения):

$$(H)_{n'_1, n'_2, \dots, n_1, n_2, \dots} = \sum_k \hbar\omega_k \left( n_k + \frac{1}{2} \right) \prod_j \delta_{n'_j n_j}. \quad (1.2.15)$$

Мы видим, что энергия состояния в точности равна сумме энергий отдельных квантов  $\hbar\omega_k$ , образующих состояние, к которой нужно прибавить бесконечную энергию нулевых колебаний  $E_0 = \frac{1}{2} \sum_k \hbar\omega_k$ . После применения этого формализма к электромагнитному полю становится очевидной справедливость метода Бозе подсчета состояний электромагнитного поля, заключающегося в определении числа квантов  $n_k$ , соответствующего каждой нормальной моде.

Борн, Гейзенберг и Йордан применили описанный формализм, чтобы вывести выражение для флуктуаций энергии излучения черного тела. Они использовали только коммутационные соотношения (1.2.6), (1.2.7). Однако вскоре метод был применен к более важной

задаче — вычислению вероятности спонтанного излучения электромагнитных волн.

Чтобы понять трудности, возникающие в этом случае, необходимо вернуться немножко назад. В одной из первых работ по матричной механике Борн и Йордан [33] предположили, что атом, переходя из возбужденного состояния  $\beta$  в некоторое состояние  $\alpha$  с меньшей энергией, должен испускать электромагнитное излучение. Это явление аналогично излучению волн классическим осциллятором, координата которого зависит от времени:

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_{\beta\alpha} \exp(-2\pi i \nu t) + \mathbf{r}_{\beta\alpha}^* \exp(2\pi i \nu t), \quad (1.2.16)$$

где

$$\hbar\nu = E_{\beta} - E_{\alpha}, \quad (1.2.17)$$

а  $\mathbf{r}_{\beta\alpha}$  — элемент (между состояниями  $\alpha$  и  $\beta$ ) матрицы, определяющей положение электрона. Энергия  $E$  такого осциллятора дается формулой

$$E = \frac{1}{2} m(\dot{\mathbf{r}}^2 + (2\pi\nu)^2 \mathbf{r}^2) = 8\pi^2 m\nu^2 |\mathbf{r}_{\beta\alpha}|^2. \quad (1.2.18)$$

Простое классическое вычисление в этом случае дает выражение для излучаемой мощности. Разделив ее на энергию одного фотона  $\hbar\nu$ , мы получим количество фотонов, испускаемых в одну секунду:

$$A(\beta \rightarrow \alpha) = \frac{16\pi^3 e^2 \nu^3}{3hc^3} |\mathbf{r}_{\beta\alpha}|^2. \quad (1.2.19)$$

Однако остается неясным, почему формулы для испускания электромагнитных волн классическим диполем должны работать и в случае спонтанного излучения.

Несколько позже более убедительный, хотя и менее прямой, вывод был получен Дираком [34]. Рассмотрев поведение квантованных атомных состояний в осциллирующем *классическом* электромагнитном поле со спектральной плотностью энергии  $u$  и частотой (1.2.17), он сумел вывести формулы для интенсивности поглощения  $uB(\alpha \rightarrow \beta)$  и интенсивности индуцированного излучения  $uB(\beta \rightarrow \alpha)$ :

$$B(\alpha \rightarrow \beta) = B(\beta \rightarrow \alpha) \approx \frac{2\pi^2 e^2}{3h^2} |\mathbf{r}_{\beta\alpha}|^2. \quad (1.2.20)$$

(Отметим, что выражение, стоящее справа, симметрично относительно состояний  $\alpha$  и  $\beta$ , поскольку  $\mathbf{r}_{\alpha\beta}$  совпадает с  $\mathbf{r}_{\beta\alpha}^*$ .) В 1917 г. Эйнштейн [34a] показал, что атом может находиться в термодинамическом равновесии с излучением черного тела, если коэффициент спонтанного излучения  $A(\beta \rightarrow \alpha)$  связан с коэффициентами индуцированного излучения и поглощения формулой

$$A(\beta \rightarrow \alpha) = \left( \frac{8\pi h\nu^3}{c^3} \right) B(\beta \rightarrow \alpha). \quad (1.2.21)$$

Подставляя (1.2.20) в последнее соотношение, мы немедленно получаем результат Борна–Йордана (1.2.19) для интенсивности спонтан-

ногого излучения. Тем не менее использование термодинамических величин для описания одноатомных процессов представляется не очень логичным шагом.

В конце концов, в 1927 г. Дирак [35] нашел полностью квантовомеханическое описание спонтанного излучения. Он записал векторный потенциал  $\mathbf{A}(\mathbf{x}, t)$  в виде разложения по нормальным модам (как в (1.2.2)). Коэффициенты разложения удовлетворяют коммутационным соотношениям, аналогичным (1.2.6). В результате состояние свободного электромагнитного поля задается набором целых чисел  $n_k$  (причем каждой моде соответствует одно такое число). Матричные же элементы электромагнитного взаимодействия  $e\mathbf{r} \cdot \mathbf{A}$  сводятся к сумме по нормальным модам, в которой коэффициенты пропорциональны матрицам  $a_k$  и  $a_k^\dagger$ , определяемым формулами (1.2.10)–(1.2.13). Главным результатом здесь является множитель  $\sqrt{n_k + 1}$  в (1.2.13). Вероятность перехода, при котором число фотонов  $n_k$  в нормальной моде  $k$  возрастает на единицу, пропорционально квадрату указанного множителя, т.е.  $n_k + 1$ . Однако в случае электромагнитного поля с  $n_k$  фотонами в нормальной моде  $k$  спектральная плотность  $u$  дается формулой

$$u(\nu_k) = \left( \frac{8\pi\nu_k^2}{c^3} \right) n_k \times h\nu_k,$$

так что интенсивность излучения для нормальной моды  $k$  пропорциональна

$$n_k + 1 = \frac{c^3 u(\nu_k)}{8\pi h\nu_k^3} + 1.$$

Первое слагаемое соответствует индуцированному, а второе — спонтанному излучению. Отсюда Дирак сделал вывод, что отношение вероятности индуцированного излучения  $uB$  и вероятности спонтанного излучения  $A$  дается формулой Эйнштейна (1.2.21). Воспользовавшись полученным ранее результатом для  $B$  (1.2.20), Дираку удалось вывести формулу Борна–Йордана [33] (1.2.19) для интенсивности спонтанного излучения  $A$ . Несколько позднее Дирак применил разработанный им метод для квантовомеханического рассмотрения процессов рассеяния электромагнитных волн, а также для нахождения времени жизни возбужденных атомных состояний [36]. Виктор Вайскопф и Евгений Вигнер использовали аналогичный подход для детального изучения формы спектральных линий [36a]. Дирак в своей работе рассматривал электромагнитный потенциал излучения  $\mathbf{A}$  и статический кулоновский потенциал  $A^0$  отдельно друг от друга. Поэтому калиброчная инвариантность и лоренц-инвариантность классической электродинамики, хотя и не нарушались, но были все-таки неочевидны. Немного позже эти трудности были устранены Энрико Ферми [36b]. Многие физики в 30-е годы изучали квантовую электродинамику по обзору, написанному Ферми в 1932 г.

Прежде чем использовать канонические коммутационные соотношения для  $q$ ,  $p$  или для  $a$ ,  $a^\dagger$ , мы должны выяснить, является ли квантованная теория лоренц-инвариантной. Йордан и Паули [37] в 1928 г. показали, что коммутаторы полей в разных точках пространства–времени действительно лоренц-инвариантны. (Эти коммутаторы вычисляются в гл. 5.) Немного позднее Бор и Леон Розенфельд [38] использовали несколько остроумных мысленных экспериментов для доказательства того, что рассматриваемые коммутационные соотношения налагают определенные ограничения на возможность одновременного измерения полей в точках пространства–времени, разделенных пространственноподобными интервалами.

Только после того как электромагнитное поле было успешно проектировано, перечисленные методы были применены к другим полям. Сначала вся процедура рассматривалась как “вторичное квантование”. В качестве квантуемых полей выступали волновые функции, используемые в одночастичной квантовой механике (например, дираховская волновая функция электрона). Первый шаг на этом пути был сделан, по-видимому, Йорданом в 1927 г. [39] Спустя год Йордан и Вигнер продвинулись существенно дальше [40]. Они приняли во внимание, что для любой нормальной моды  $k$  принцип исключения Паули запрещает (с учетом спина и местоположения) числам заполнения  $n_k$  электронов принимать какие-либо значения, отличные от нуля и единицы. В силу этого электронное поле нельзя представить в виде линейной комбинации операторов, удовлетворяющих коммутационным соотношениям (1.2.10), (1.2.11), поскольку эти соотношения позволяют числам заполнения  $n_k$  принимать все целые значения от 0 до  $\infty$ . Вместо этого Йордан и Вигнер предложили раскладывать электронное поле в линейную комбинацию операторов  $a_k$ ,  $a_k^\dagger$ , удовлетворяющих *антикоммутационным* соотношениям

$$a_k a_j^\dagger + a_j^\dagger a_k = \delta_{jk}, \quad (1.2.22)$$

$$a_k a_j + a_j a_k = 0. \quad (1.2.23)$$

Два последних равенства справедливы, если элементы матриц  $a_k$  и  $a_k^\dagger$  маркируются набором целых чисел  $n_1, n_2, \dots$  (по одному числу на каждую нормальную моду), принимающих только значения 0 и 1:

$$(a_k)_{n'_1, n'_2, \dots, n_1, n_2, \dots} = \begin{cases} 1, & n'_k = 0, n_k = 1, n'_j = n_j \text{ при } j \neq k, \\ 0 & \text{иначе,} \end{cases} \quad (1.2.24)$$

$$(a_k^\dagger)_{n'_1, n'_2, \dots, n_1, n_2, \dots} = \begin{cases} 1, & n'_k = 1, n_k = 0, n'_j = n_j \text{ при } j \neq k, \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases} \quad (1.2.25)$$

Например, если мы рассматриваем только одну нормальную моду, матрицы  $a$ ,  $a^\dagger$  имеют размерность  $2 \times 2$ , в соответствии с возможными значениями  $n'$  и  $n$  (0 и 1):

$$a = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad a^\dagger = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Читатель может проверить, что (1.2.24) и (1.2.25) действительно удовлетворяют антисимметрическим соотношениям (1.2.22), (1.2.23).

Физическая интерпретация вектора-столбца, характеризующегося целыми числами  $n_1$ ,  $n_2$ , ... такова: как и в случае бозонов, ему соответствует состояние, содержащее  $n_k$  квантов каждой нормальной моды  $k$ , но, в отличие от бозонов, принцип Паули требует, чтобы числа  $n_k$  принимали только значения 0 и 1. Как и раньше,  $a_k$  уничтожает один квант нормальной моды  $k$ , если таковой имеется. В противном случае  $a_k$ , действуя на вектор-состояние, дает нулевой вектор. Оператор  $a_k^\dagger$  рождает один квант нормальной моды  $k$ , если вектор-состояние не содержит таких квантов совсем, или дает нулевой вектор, если один квант уже имеется. Фирц и Паули [40a] впоследствии показали, что выбор соотношений (коммутиционных или антисимметрических) в том или ином случае зависит исключительно от спина частицы: коммутаторы должны использоваться для частиц с целым спином (например, для фотона), а антисимметраторы — для частиц с полуцелым спином (например, для электрона). В гл. 5 мы докажем это утверждение несколько иным способом.

Общая теория квантовых полей впервые появилась в 1929 г. в основополагающих работах Гейзенберга и Паули [41]. Отправной точкой этих работ стало применение канонического формализма к самим полям, а не к коэффициентам нормальных мод в их разложении. Гейзенберг и Паули рассматривали лагранжиан  $L$  как пространственный интеграл некоторой локальной функции полей и их пространственно-временных производных. Уравнения, которым удовлетворяют поля, в этом случае определяются из принципа наименьшего действия: вариация действия  $\int L dt$  при изменении полей равна нулю. Коммутационные соотношения можно получить, предполагая, что вариационная производная лагранжиана относительно временной производной любого поля имеет смысл “импульса”, сопряженного этому полю (для фермионных полей мы таким образом можем получить антисимметрические соотношения). Гейзенберг и Паули применили свой формализм к электромагнитному и дираковскому полям: они исследовали различные симметрии рассматриваемых систем, их законы сохранения (в том числе, законы сохранения заряда, импульса и энергии), а также инвариантность обоих полей относительно калибровочных и лоренцев преобразований.

Формализм Гейзенберга–Паули, по существу, описан нами в гл. 7. Поэтому сейчас мы можем ограничиться одним примером, который

далее в этом параграфе окажется полезным. Лагранжиан свободного комплексного скалярного поля  $\phi(x)$  имеет вид

$$L = \int d^3x \left[ \dot{\phi}^\dagger \dot{\phi} - c^2 (\nabla \phi)^\dagger (\nabla \phi) - \left( \frac{mc^2}{\hbar} \right)^2 \phi^\dagger \phi \right]. \quad (1.2.26)$$

Изменение лагранжиана при варьировании поля  $\phi(x)$  дается формулой

$$\delta L = \int d^3x \left[ \dot{\phi}^\dagger \delta \dot{\phi} + \dot{\phi} \delta \dot{\phi}^\dagger - c^2 \nabla \phi^\dagger \cdot \nabla \delta \phi - c^2 \nabla \phi \cdot \nabla \delta \phi^\dagger - \left( \frac{mc^2}{\hbar} \right)^2 \phi^\dagger \delta \phi - \left( \frac{mc^2}{\hbar} \right)^2 \phi \delta \phi^\dagger \right], \quad (1.2.27)$$

где  $\delta \phi(x)$  — вариация поля  $\phi(x)$ . При пользовании принципом наименьшего действия надо иметь в виду, что вариации всех полей на границах пространственно-временной области интегрирования должны равняться нулю. Поэтому когда мы вычисляем изменение действия  $\int L dt$ , мы имеем право интегрировать по частям:

$$\delta \int L dt = c^2 \int d^4x \left[ \delta \phi^\dagger \left( \square - \left( \frac{mc}{\hbar} \right)^2 \right) \phi + \delta \phi \left( \square - \left( \frac{mc^2}{\hbar} \right)^2 \right) \phi^\dagger \right].$$

Приравнивая нулю это выражение при любых  $\delta \phi$  и  $\delta \phi^\dagger$  получаем знакомое релятивистское волновое уравнение

$$\left[ \square - \left( \frac{mc^2}{\hbar} \right)^2 \right] \phi = 0, \quad (1.2.28)$$

а также уравнение, сопряженное ему. “Импульсы”, канонически сопряженные полям  $\phi$  и  $\phi^\dagger$ , равны вариационным производным лагранжиана  $L$  по временным производным соответствующих полей. Из (1.2.27) мы находим

$$\pi \equiv \frac{\delta L}{\delta \dot{\phi}} = \dot{\phi}^\dagger, \quad (1.2.29)$$

$$\pi^\dagger \equiv \frac{\delta L}{\delta \dot{\phi}^\dagger} = \dot{\phi}. \quad (1.2.30)$$

Поля  $\pi$  и  $\pi^\dagger$  удовлетворяют обычным каноническим коммутационным соотношениям, в которых символ Кронекера заменен на дельтафункцию:

$$[\pi(\mathbf{x}, t), \phi(\mathbf{y}, t)] = [\pi^\dagger(\mathbf{x}, t), \phi^\dagger(\mathbf{y}, t)] = -i\hbar \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \quad (1.2.31)$$

$$[\pi(\mathbf{x}, t), \phi^\dagger(\mathbf{y}, t)] = [\pi^\dagger(\mathbf{x}, t), \phi(\mathbf{y}, t)] = 0 \quad (1.2.32)$$

$$[\pi(\mathbf{x}, t), \pi(\mathbf{y}, t)] = [\pi^\dagger(\mathbf{x}, t), \pi^\dagger(\mathbf{y}, t)] = [\pi(\mathbf{x}, t), \pi^\dagger(\mathbf{y}, t)] = 0 \quad (1.2.33)$$

$$[\phi(\mathbf{x}, t), \phi(\mathbf{y}, t)] = [\phi^\dagger(\mathbf{x}, t), \phi^\dagger(\mathbf{y}, t)] = [\phi(\mathbf{x}, t), \phi^\dagger(\mathbf{y}, t)] = 0. \quad (1.2.34)$$

Гамильтониан в этом случае (так же, как и в обычной механике частиц) равен “сумме” всех произведений канонических импульсов на

временные производные соответствующих полей, минус лагранжиан:

$$H = \int d^3x [\pi\dot{\phi} + \pi^\dagger\dot{\phi}^\dagger] - L \quad (1.2.35)$$

или, используя (1.2.26), (1.2.29) и (1.2.30),

$$H = \int d^3x \left[ \pi^\dagger\pi + c^2(\nabla\phi)^\dagger \cdot (\nabla\phi) + \left( \frac{m^2c^4}{\hbar^2} \right) \phi^\dagger\phi \right]. \quad (1.2.36)$$

Со времени опубликования работ Гейзенберга и Паули и до начала войны в квантовой теории поля был получен еще один важный результат: решение проблемы состояний с отрицательной энергией. В предыдущем параграфе мы видели, что в 1930 г., т.е. как раз тогда, когда Гейзенберг и Паули опубликовали свои работы, Дирак предположил, что все такие состояния полностью заполнены (за исключением небольшого числа дырок, которые только и могут наблюдаться в эксперименте). Открытие позитрона в 1932 г., на первый взгляд, подтвердило справедливость гипотезы Дирака. “Дырочная теория” была использована для вычислений в наинизшем порядке теории возмущений различных величин в некоторых процессах, в том числе в процес сах рождения электрон-позитронных пар и рассеяния.

Одновременно с этим была проделана огромная работа по развитию аппарата, лоренц-инвариантность которого была бы очевидной. Особенno следует выделить “многовременной” формализм Дирака, Владимира Фока и Бориса Подольского [42], в котором вектор состояния представляется в виде волновой функции, зависящей от пространственно-временных и спиновых координат всех электронов (и с положительной, и с отрицательной энергией). Полное число электронов (сумма тех и других) при этом сохраняется. Например, рождение электрон-позитронной пары рассматривается как некое возбуждение, когда электрон с отрицательной энергией переходит на уровень с положительной энергией. Аннигиляции электрона и позитрона тогда соответствует обратный процесс. Преимуществом многовременного формализма является явная лоренц-инвариантность. Однако наряду с этим он обладает некоторыми недостатками. В частности, имеется глубокое различие между описанием фотона, рассматриваемого как квантованное электромагнитное поле, и описанием электрона с позитроном. Не все физики считали это недостатком. Электронное поле, в отличие от электромагнитного поля, не имеет классического предела. В этой связи возникали сомнения в его физической значимости. Дирак [42a] тоже считал, что поля — это просто вспомогательное средство для изучения частиц, и поэтому не стремился к единообразному описанию частиц и полей. Многовременной формализм обладает еще одним недостатком, хотя, возможно, в то время никто об этом особенно не беспокоился. При попытке использовать его для описания процесса бета-распада ядер возникают большие трудности. При бета-распаде ядер рождаются электрон и антинейтрин. При этом пози-

трон и нейтрино не возникают. Вычисление Ферми [43] распределения энергий вылетающих при бета-распаде электронов заслуженно считается одним из первых успехов квантовой теории поля.

В 1933–1934 гг. Фок [43a] и Вендель Фарри с Оппенгеймером [44] выдвинули важную гипотезу, которая стала краеугольным камнем доказательства эквивалентности дырочной теории Дирака и квантовой теории поля электрона. Чтобы оценить всю важность этой гипотезы с современной точки зрения, представьте, что мы пытаемся построить электронное поле исходя из аналогии с электромагнитным полем и полем Борна–Гейзенберга–Йордана (1.2.2). Поскольку электроны обладают зарядом, операторы рождения и уничтожения не должны перекодить друг в друга. Следовательно, можно попытаться представить поле в виде

$$\psi(x) = \sum_k u_k(\mathbf{x}) e^{-i\omega_k t} a_k, \quad (1.2.37)$$

где  $u_k(\mathbf{x})e^{-i\omega_k t}$  — полный набор ортонормированных плоских волн, являющихся решениями уравнения Дирака (1.1.13) ( $k$  здесь обозначает трехимпульс, спин и знак энергии),

$$\mathcal{H}u_k = \hbar\omega_k u_k, \quad (1.2.38)$$

$$\mathcal{H}u_k \equiv -i\hbar c\boldsymbol{\alpha} \cdot \nabla + \alpha_4 mc^2, \quad (1.2.39)$$

$$\int u_k^\dagger u_l d^3x = \delta_{kl}, \quad (1.2.40)$$

и  $a_k$  — соответствующие операторы уничтожения, удовлетворяющие антикоммутационным соотношениям Йордана–Вигнера (1.2.22)–(1.2.23). Действуя в русле идей метода “вторичного квантования”, или процедуры канонического квантования Гейзенберга–Паули [41], мы можем записать гамильтониан как “усредненное”  $\mathcal{H}$ , причем вместо “волновой функции” используется квантованное поле (1.2.37):

$$H = \int d^3x \psi^\dagger \mathcal{H} \psi = \sum_k \hbar\omega_k a_k^\dagger a_k. \quad (1.2.41)$$

Оператор  $H$ , конечно же, не является положительно определенным — половина  $\omega_k$  отрицательны, в то время как операторы  $a_k^\dagger a_k$  имеют только положительные собственные значения 1 и 0 (см. (1.2.24) и (1.2.25)). Чтобы избавиться от этого неприятного затруднения, Фарри и Оппенгеймер воспользовались гипотезой Дирака [42], что позитрон — это отсутствие электрона с отрицательной энергией. Антикоммутационные соотношения симметричны относительно операторов рождения и уничтожения. Поэтому Фарри и Оппенгеймер определили операторы рождения и уничтожения позитрона как соответствующие операторы для электронов с отрицательной энергией:

$$b_k^\dagger \equiv a_k, \quad b_k \equiv a_k^\dagger \quad (\text{для } \omega_k < 0). \quad (1.2.42)$$

Здесь нижний индекс  $k$  у  $b$  обозначает позитронную моду с положительной энергией, импульс и спин которой противоположны импульсу и спину электронной моды  $k$ . Поле Дирака (1.2.37) можно тогда записать следующим образом:

$$\psi(x) = \sum_k^{(+)} a_k u_k(x) + \sum_k^{(-)} b_k^\dagger u_k(x), \quad (1.2.43)$$

где  $(+)$  и  $(-)$  обозначают суммы по нормальным модам  $k$  с  $\omega_k > 0$  и  $\omega_k < 0$  соответственно, а  $u_k(x) \equiv u_k(\mathbf{x})e^{-i\omega_k t}$ . Аналогично, используя антисимметрические соотношения для операторов  $b$ , мы можем переписать (1.2.41) в виде

$$H = \sum_k^{(+)} \hbar\omega_k a_k^\dagger a_k + \sum_k^{(-)} \hbar|\omega_k| b_k^\dagger b_k + E_0, \quad (1.2.44)$$

где  $E_0$  — бесконечное  $c$ -число:

$$E_0 = - \sum_k^{(-)} \hbar|\omega_k|. \quad (1.2.45)$$

Чтобы такое переопределение не было простой формальностью, необходимо также постулировать, что физический вакуум — это состояние  $\Psi_0$ , не содержащее электронов и позитронов с положительной энергией:

$$a_k \Psi_0 = 0 \quad (\omega_k > 0), \quad (1.2.46)$$

$$b_k \Psi_0 = 0 \quad (\omega_k > 0). \quad (1.2.47)$$

Следовательно, из формулы (1.2.44) следует, что энергия вакуума равна просто  $E_0$ . Если мы всегда будем отсчитывать энергию от энергии вакуума  $E_0$ , то оператор физической энергии будет иметь вид  $H - E_0$ . Из (1.2.44) следует, что он является *положительно определенным*.

Проблема состояний с отрицательной энергией для заряженной бессpinовой частицы была также разрешена в 1934 г. Паули и Вайсконфом [45] в работе, полемизирующей с дираковской картиной заполненных состояний с отрицательной энергией. В этом случае операторы рождения и уничтожения удовлетворяют коммутационным, а не антисимметрическим соотношениям. По этой причине их функции нельзя поменять местами, как это было сделано в случае фермионов. Вместо этого мы должны вернуться к каноническому формализму Гейзенберга–Паули [41], чтобы определить, какие из коэффициентов при различных нормальных модах являются операторами рождения и уничтожения.

Паули и Вайсконф разложили свободное заряженное скалярное поле по трехмерным плоским волнам в кубе с пространственным объе-

мом  $V = L^3$ :

$$\phi(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\mathbf{k}} q(\mathbf{k}, t) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}}. \quad (1.2.48)$$

Волновые числа ограничены следующим условием периодичности: величины  $k_j L / 2\pi$ ,  $j = 1, 2, 3$ , должны представлять собой набор трех положительных или отрицательных целых чисел. Аналогично, канонически сопряженная переменная (1.2.29) имеет вид

$$\pi(\mathbf{x}, t) \equiv \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\mathbf{k}} p(\mathbf{k}, t) e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}}. \quad (1.2.49)$$

В экспоненте стоит знак “−”, и поэтому формула (1.2.29) приобретает следующий вид:

$$p(\mathbf{k}, t) = q^\dagger(\mathbf{k}, t). \quad (1.2.50)$$

Обратное преобразование Фурье дает

$$q(\mathbf{k}, t) = \frac{1}{\sqrt{V}} \int d^3x \phi(\mathbf{x}, t) e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}}, \quad (1.2.51)$$

$$p(\mathbf{k}, t) = \frac{1}{\sqrt{V}} \int d^3x \pi(\mathbf{x}, t) e^{+i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}}. \quad (1.2.52)$$

Поэтому из канонических коммутационных соотношений (1.2.31)–(1.2.34) следуют соотношения для  $q$  и  $p$ :

$$[p(\mathbf{k}, t), q(\mathbf{l}, t)] = \frac{-i\hbar}{V} \int d^3x e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} e^{-i\mathbf{l} \cdot \mathbf{x}} = -i\hbar \delta_{\mathbf{k}\mathbf{l}}, \quad (1.2.53)$$

$$\begin{aligned} [p(\mathbf{k}, t), q^\dagger(\mathbf{l}, t)] &= [p(\mathbf{k}, t), p(\mathbf{l}, t)] = [p(\mathbf{k}, t), p^\dagger(\mathbf{l}, t)] = \\ &= [q(\mathbf{k}, t), q(\mathbf{l}, t)] = [q(\mathbf{k}, t), q^\dagger(\mathbf{l}, t)] = 0. \end{aligned} \quad (1.2.54)$$

Остальные соотношения могут быть получены из этих путем эрмитова сопряжения. Подставляя (1.2.48) и (1.2.49) в формулу (1.2.36) для гамильтониана, мы можем переписать последний через  $q$  и  $p$ :

$$H = \sum_{\mathbf{k}} [p^\dagger(\mathbf{k}, t)p(\mathbf{k}, t) + \omega_{\mathbf{k}}^2 q^\dagger(\mathbf{k}, t)q(\mathbf{k}, t)], \quad (1.2.55)$$

где

$$\omega_{\mathbf{k}}^2 \equiv c^2 \mathbf{k}^2 + \left( \frac{mc^2}{\hbar} \right)^2. \quad (1.2.56)$$

Временные производные импульса  $p$  даются уравнением Гамильтона

$$\dot{p}(\mathbf{k}, t) = -\frac{\partial H}{\partial q(\mathbf{k}, t)} = -\omega_{\mathbf{k}}^2 q^\dagger(\mathbf{k}, t) \quad (1.2.57)$$

(и сопряженным уравнением), что с учетом (1.2.50) просто эквивалентно волновому уравнению Клейна–Гордона–Шредингера (1.2.28).

Мы видим, что, как и в случае модели Борна–Гейзенберга–Йордана [4], построенной в 1926 г., свободное поле ведет себя как бесконечный набор связанных гармонических осцилляторов. Паули и

Вайскопфу удалось построить операторы  $p$  и  $q$ , удовлетворяющие коммутационным соотношениям (1.2.53)–(1.2.54), а также “уравнениям движения” (1.2.50)–(1.2.57), вводя операторы рождения и уничтожения  $a$ ,  $b$ ,  $a^\dagger$ ,  $b^\dagger$  двух различных типов, соответствующих частицам и античастицам:

$$q(\mathbf{k}, t) = i\sqrt{\frac{\hbar}{2\omega_{\mathbf{k}}}} [a(\mathbf{k}) \exp(-i\omega_{\mathbf{k}}t) - b^\dagger(\mathbf{k}) \exp(i\omega_{\mathbf{k}}t)], \quad (1.2.58)$$

$$p(\mathbf{k}, t) = \sqrt{\frac{\hbar\omega_{\mathbf{k}}}{2}} [b(\mathbf{k}) \exp(-i\omega_{\mathbf{k}}t) + a^\dagger(\mathbf{k}) \exp(+i\omega_{\mathbf{k}}t)], \quad (1.2.59)$$

где

$$[a(\mathbf{k}), a^\dagger(\mathbf{l})] = [b(\mathbf{k}), b^\dagger(\mathbf{l})] = \delta_{\mathbf{kl}}, \quad (1.2.60)$$

$$[a(\mathbf{k}), a(\mathbf{l})] = [b(\mathbf{k}), b(\mathbf{l})] = 0, \quad (1.2.61)$$

$$[a(\mathbf{k}), b(\mathbf{l})] = [a(\mathbf{k}), b^\dagger(\mathbf{l})] = [a^\dagger(\mathbf{k}), b(\mathbf{l})] = [a^\dagger(\mathbf{k}), b^\dagger(\mathbf{l})] = 0. \quad (1.2.62)$$

Нетрудно проверить, что эти операторы действительно удовлетворяют соотношениям (1.2.53), (1.2.54), (1.2.50) и (1.2.57). Поле (1.2.48) может быть представлено в виде

$$\phi(\mathbf{x}, t) = \frac{i}{\sqrt{V}} \sum_{\mathbf{k}} \sqrt{\frac{\hbar}{2\omega_{\mathbf{k}}}} [a(\mathbf{k}) \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - i\omega_{\mathbf{k}}t) - b^\dagger(-\mathbf{k}) \exp(-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} + i\omega_{\mathbf{k}}t)]. \quad (1.2.63)$$

В результате гамильтониан (1.2.55) принимает вид

$$H = \sum_{\mathbf{k}} \frac{1}{2} \hbar\omega_{\mathbf{k}} [b^\dagger(\mathbf{k})b(\mathbf{k}) + b(\mathbf{k})b^\dagger(\mathbf{k}) + a^\dagger(\mathbf{k})a(\mathbf{k}) + a(\mathbf{k})a^\dagger(\mathbf{k})],$$

или, используя (1.2.60)–(1.2.62),

$$H = \sum_{\mathbf{k}} \hbar\omega_{\mathbf{k}} [b^\dagger(\mathbf{k})b(\mathbf{k}) + a^\dagger(\mathbf{k})a(\mathbf{k})] + E_0, \quad (1.2.64)$$

где через  $E_0$  обозначена бесконечная  $c$ -числовая сумма

$$E_0 \equiv \sum_{\mathbf{k}} \hbar\omega_{\mathbf{k}}. \quad (1.2.65)$$

Существование двух различных операторов  $a$  и  $b$ , одинаково входящих в гамильтониан, показывает, что рассматриваемая теория содержит два сорта частиц с одинаковой массой. Как было отмечено Паули и Вайскопфом, эти две частицы можно отождествить с парой частица–античастица. Соответственно, если они обладают электрическими зарядами, последние должны быть равны по величине и противоположны по знаку. Поэтому, как мы уже говорили выше, у спиновых бозонов, так же, как и у фермионов со спином  $1/2$ , могут

существовать несовпадающие с ними античастицы, причем в случае бозонов эти античастицы нельзя рассматривать как дырки в море состояний с отрицательной энергией.

Теперь мы можем сказать, какая из пар  $\{a, b\}$  и  $\{a^\dagger, b^\dagger\}$  представляет собой операторы уничтожения. Для этого мы должны вычислить вакуумные средние коммутационных соотношений. Например, если  $a_k^\dagger$  является оператором уничтожения, то, будучи примененным к вакуумному состоянию, он должен дать нуль. В результате вакуумное среднее (1.2.60) имеет следующий вид

$$-\|a(\mathbf{k})\Psi_0\|^2 = (\Psi_0, [a(\mathbf{k}), a^\dagger(\mathbf{k})]\Psi_0) = +1. \quad (1.2.66)$$

Налицо противоречие: левая сторона должна быть отрицательной, в то время как справа стоит положительное число. Мы можем поэтому заключить, что операторами уничтожения являются  $a_k$  и  $b_k$ . Следовательно,

$$a(\mathbf{k})\Psi_0 = b(\mathbf{k})\Psi_0 = 0. \quad (1.2.67)$$

Полученный результат находится в согласии со всеми коммутационными соотношениями. В итоге можно сделать вывод, что в рамках канонического формализма коэффициент при  $e^{+i\omega t}$  в формуле (1.2.58) является оператором рождения. То же самое справедливо и в случае формализма Фарри–Оппенгеймера [44] для спина 1/2.

Из формул (1.2.64) и (1.2.67) теперь следует, что  $E_0$  совпадает с энергией вакуумного состояния. Примем ее за начало отсчета. Тогда оператор физической энергии записывается в виде  $H - E_0$ . Из (1.2.64) видно, что все собственные значения  $H - E_0$  положительны.

Вспомним теперь о проблеме, побудившей Дирака начать свои исследования, а именно о проблеме отрицательных вероятностей. Как обнаружил Дирак, из решений уравнения Клейна–Гордона–Шредингера для свободных скалярных полей (1.2.28) плотность вероятности  $\rho$ , удовлетворяющую закону сохранения вида (1.1.10), можно составить единственным образом. При этом она оказывается пропорциональной величине

$$\rho = 2 \operatorname{Im} \left[ \phi^\dagger \frac{\partial \phi}{\partial t} \right]. \quad (1.2.68)$$

Отсюда следует, что плотность вероятности  $\rho$  не обязательно должна быть больше нуля. Аналогично, во “вторичнокvantованной” теории, в которой  $\phi$  задается выражением (1.2.63), плотность вероятности  $\rho$  не является положительно определенной величиной. Поскольку  $\phi^\dagger(x)$  не коммутирует с  $\dot{\phi}(x)$ , мы можем использовать различные формы записи выражения (1.2.68), отличающиеся друг от друга на бесконечные с-числа. Нам, в частности, понадобится такой вариант:

$$\rho = \frac{i}{\hbar} \left[ \frac{\partial \phi}{\partial t} \phi^\dagger - \frac{\partial \phi^\dagger}{\partial t} \phi \right]. \quad (1.2.69)$$

Интеграл от этого оператора по трехмерному пространству легко вы-

числяется и равен

$$N \equiv \int \rho d^3x = \sum_{\mathbf{k}} (a^\dagger(\mathbf{k})a(\mathbf{k}) - b^\dagger(\mathbf{k})b(\mathbf{k})). \quad (1.2.70)$$

Как нетрудно видеть, он имеет собственные значения обоих знаков.

Однако эта проблема возникает в квантовой теории поля и для спина 1/2, и для нулевого спина. Оператор плотности Дирака  $\psi^\dagger\psi$  положительно определен, но чтобы построить физический оператор плотности, мы должны учесть вклад заполненных электронных состояний, вычитая его из оператора плотности Дирака. В частности, воспользовавшись разложением по плоским волнам (1.2.43), мы можем записать полный оператор числа частиц в виде

$$N \equiv \int d^3x \psi^\dagger\psi = \sum_{\mathbf{k}} {}^{(+)}a^\dagger(\mathbf{k})a(\mathbf{k}) + \sum_{\mathbf{k}} {}^{(-)}b^\dagger(\mathbf{k})b(\mathbf{k}).$$

Антикоммутационные соотношения для операторов  $b$  позволяют нам переписать последнюю формулу в виде

$$N - N_0 = \sum_{\mathbf{k}} {}^{(+)}a^\dagger_{\mathbf{k}}a_{\mathbf{k}} - \sum_{\mathbf{k}} {}^{(-)}b^\dagger_{\mathbf{k}}b_{\mathbf{k}}, \quad (1.2.71)$$

где  $N_0$  — бесконечная константа

$$N_0 = \sum_{\mathbf{k}} 1. \quad (1.2.72)$$

Из (1.2.46) и (1.2.47) следует, что  $N_0$  — число частиц в вакуумном состоянии. Поэтому Фарри и Оппенгеймер предположили, что физический оператор числа частиц записывается в виде  $N - N_0$  и поэтому имеет как положительные, так и отрицательные собственные значения (аналогично тому, что было в случае с нулевым спином).

Решение этой проблемы, найденное в рамках квантовой теории поля, сводится к следующему: ни поле  $\psi$  Фарри–Оппенгеймера, ни поле  $\phi$  Паули–Вайскопфа не подходят на роль амплитуды вероятности с положительно определенной плотностью вероятности. Вместо этого базис в физическом гильбертовом пространстве образуют состояния, характеризующиеся определенным числом частиц и/или античастиц для каждой моды. Если обозначить через  $\Phi_n$  полный ортонормированный набор таких состояний, то, измеряя число частиц в произвольном состоянии  $\Psi$ , мы можем найти, с какой вероятностью система находится в состоянии  $\Phi_n$ :

$$P_n = |(\Phi_n, \Psi)|^2, \quad (1.2.73)$$

где через  $(\Phi_n, \Psi)$  обозначено обычное скалярное произведение в гильбертовом пространстве. Следовательно, отрицательные вероятности, на самом деле, на практике не встречаются. Поля же  $\phi$ ,  $\psi$  и т.д. являются не амплитудами вероятности, а *операторами* рождения и уни-

чтожения частиц в различных нормальных модах. Чтобы не сбивать читателя с толку, в дальнейшем мы не будем использовать термин “вторичное квантование”.

В частности, операторы  $N$  и  $N - N_0$ , дающиеся формулами (1.2.70) и (1.2.71), можно рассматривать только как операторы числа частиц (что не совпадает с понятием полных вероятностей): это есть число частиц **минус** число античастиц. В случае заряженных частиц из закона сохранения заряда следует, что операторы заряда пропорциональны операторам числа частиц. По этой причине знаки “ $-$ ” в правых частях формул (1.2.70) и (1.2.71) позволяют нам сразу же сделать вывод, что частицы и античастицы имеют противоположные заряды. В рамках такого теоретико-полевого формализма члены в гамильтониане, описывающие взаимодействия, имеют третий, четвертый и более высокие порядки по полевым переменным. Вероятности же различных процессов вычисляются с помощью этих членов в рамках зависящей от времени теории возмущений. На основе идей, изложенных выше, построена большая часть материала этой книги.

Несмотря на все свои очевидные успехи, квантовая теория поля не сразу вытеснила дырочную теорию. Скорее обе точки зрения одновременно сосуществовали — для вычисления вероятностей протекания физических реакций использовались различные комбинации теоретико-полевых и дырочно-полевых идей. В этот период было выведено несколько формул для сечений разных процессов в низшем порядке по  $e^2$ . Приведем несколько примеров. В 1929 г. Клейн и Ниншина [46] вывели формулу для сечения процесса  $e^- + \gamma \rightarrow e^- + \gamma$ , в 1930 г. Дирак [47] получил ту же величину для реакции  $e^+ + e^- \rightarrow 2\gamma$ , Мёллер [48] в 1932 г. — для процесса  $e^- + e^- \rightarrow e^- + e^-$ , Бете и Гайтлер [49] в 1934 г. — для процессов  $e^- + Z \rightarrow e^- + \gamma + Z$  и  $\gamma + Z \rightarrow e^+ + e^- + Z$  (буквой  $Z$  здесь обозначено кулоновское поле тяжелого атома), Баба [50] в 1936 г. — для процесса  $e^+ + e^- \rightarrow e^+ + e^-$ . (Правила вычисления сечений таких процессов приведены в гл. 8, причем в случае электрон-фотонного рассеяния они выведены подробно.) Расчеты в низшем порядке теории возмущений дают конечные результаты и находятся в разумном согласии с экспериментальными данными.

Тем не менее общее ощущение неудовлетворенности квантовой теорией поля (в виде дырочной теории или чего-либо еще) сохранялось на протяжении всех 1930-х годов. Одной из причин этого была явная неспособность квантовой электродинамики объяснить проникающую способность заряженных частиц в ливнях космических лучей, отмеченную в 1936 г. Оппенгеймером и Франклином Карлсоном [50а]. Другая причина неудовлетворенности оказалась связанной с первой и заключалась в непрекращающемся потоке открытых новых типов частиц и взаимодействий. Мы уже упоминали электрон, фотон, позитрон, нейтрино и, конечно же, ядро водорода, т.е. протон. На протя-

жении 1920-х годов ученые верили, что более тяжелые ядра составлены из протонов и электронов, однако было совершенно непонятно, каким образом легкая частица типа электрона может быть заперта в ядре. На другую существенную трудность в этой картине мира указали в 1931 г. Эренфест и Оппенгеймер [51]: ядро обычного азота  $N^{14}$ , имеющее атомный номер 7 и атомный вес 14, должно состоять из 14 протонов и 7 электронов и, следовательно, должно подчиняться статистике Ферми. Это противоречит результатам, полученным с помощью молекулярной спектроскопии [52], согласно которым  $N^{14}$  является бозоном. Эта проблема (а также ряд других) была разрешена в 1932 г. после открытия нейтрона [53] и предложенной за ним гипотезой Гейзенберга [54], что ядра состоят из протонов и нейтронов, а не протонов и электронов<sup>1)</sup>. Стало ясным, что для удержания вместе составных частей ядра между нейtronами и протонами должны действовать сильные неэлектромагнитные короткодействующие силы.

После успеха теории бета-распада Ферми некоторые авторы [54а] стали обсуждать возможность того, что ядерные силы обусловлены обменом электронами и нейтрино. Через несколько лет, в 1935 г., Хидеки Юкава предложил совершенно иную квантовополевую модель ядерных сил [55]. При помощи классического по своей сути вычисления он нашел, что взаимодействие скалярного поля с нуклонами (протонами и нейtronами) приводит к возникновению сил притяжения нуклон-нуклон с потенциалом, зависящим от расстояния  $r$  между нуклонами согласно закону

$$V(r) \propto \frac{1}{r} \exp(-\lambda r), \quad (1.2.74)$$

а не  $1/r$ , соответствующему кулоновскому электрическому полю. Величина  $\lambda$  введена как параметр уравнения, которому удовлетворяет скалярное поле Юкавы. Проквантовав это уравнение, Юкава обнаружил, что оно описывает частицы с массой  $\hbar\lambda/c$ . Численную оценку для массы можно получить, зная экспериментальную величину сил, действующих в ядрах. Значение  $\hbar\lambda/c$ , полученное Юкавой, имеет порядок 200 масс электрона. В 1937 г. похожие “мезоны” были независимо открыты Сетом Неддермайером и Андерсоном, а также Ябецом Курри Стратом и Эдвардом Карлом Стивенсоном в экспериментах с пузырьковой камерой. Возникло предположение, что это и есть гипотетические частицы Юкавы.

Открытие мезонов показало, что заряженные частицы в пучках космических лучей отнюдь не все являются электронами. Это решило проблему, не дававшую покоя Оппенгеймеру и Карлсону. Однако

---

<sup>1)</sup> Идея о том, что атомные ядра состоят из протонов и нейтронов, была впервые высказана в печати Д.Д. Иваненко (1932) и непосредственно вслед за этим развита В. Гейзенбергом. (*Примеч. ред.*)

вместе с тем открытие мезонов создало новые трудности. В 1939 г. Лотар Нордхайм [56а] указал на то обстоятельство, что вводимые теорией Юкавы сильные взаимодействия, благодаря которым мезоны в значительном количестве рождаются на большой высоте, должны приводить к их поглощению в атмосфере. Это противоречит наблюдаемому изобилию мезонов на малом расстоянии от земной поверхности. В 1947 г. в экспериментах Марцелло Конверси, Этторе Панчини и Оресте Пиччиони [57] было показано, что подавляющая часть мезонов, образующих космические лучи, наблюдаемые на малых высотах, слабо взаимодействуют с нуклонами. Следовательно, их нельзя отождествлять с частицей Юкавы. Решение этой проблемы было найдено сначала теоретически [58], а затем подтверждено экспериментально (Цезаре Латтес, Очилиани, Сесиль Паузэлл [59]). Существуют два вида мезонов с немного разными массами. Более тяжелый (ныне носящий название  $\pi$ -мезона или пиона) взаимодействует сильным образом и играет роль переносчика ядерных сил, введенного Юкавой. Более легкий (называемый ныне  $\mu$ -мезоном или мюоном) взаимодействует только электромагнитным и слабым образом и является продуктом распада  $\pi$ -мезона. По этой причине он численно преобладает в космических лучах, наблюдаемых на уровне моря. В том же 1947 г. Джордж Рочестер и Клиффорд Батлер [60] обнаружили в космических лучах совершенно новые частицы (известные теперь как  $K$ -мезоны и гипероны). С 1947 г. было открыто бескрайне множество частиц, однако полное их перечисление уело бы нас в сторону от главной цели этого обзора. Такой поток открытый с самого начала показал нам, что любая концептуальная картина мира, содержащая только фотоны, электроны и позитроны, является слишком ограниченной и не может считаться фундаментальной. Но теория преподнесла нам еще одну, более важную загадку — проблему расходимостей.

### § 1.3. Проблема расходимостей

Квантовая теория поля имеет дело с полями  $\psi(x)$ , рождающими и уничтожающими частицы в пространственно-временной точке  $x$ . Опыт работы с классической теорией электрона обращает наше внимание на то обстоятельство, что точечный электрон обладает бесконечной собственной электромагнитной массой. Эта масса равна  $e^2/6\pi c^2$ , если заряд равномерно распределен на поверхности сферы радиусом  $a$ . Отсюда следует, что она стремится к бесконечности при  $a \rightarrow 0$ . К сожалению, эта проблема с еще большей остротой стала на ранних этапах развития квантовой теории поля, и хотя вопрос был в значительной степени прояснен в процессе дальнейшего развития теории, он актуален и в наши дни.

Проблема расходимостей в квантовой теории поля впервые возникла в 1929–1930 гг. в работах Гейзенберга и Паули [41]. Вскоре наличие расходимостей было доказано Оппенгеймером [61], который вычислял собственную электромагнитную энергию связанного электрона, и Иваром Уоллером [62], который вычислял ту же величину для свободного электрона. Они использовали второй порядок обычной теории возмущений, причем промежуточное состояние содержало электрон и фотон. Например, сдвиг энергии  $E_n$  электрона на  $n$ -м уровне атома водорода дается выражением

$$\Delta E_n = \sum_{m, \lambda} \int d^3x \frac{|\langle m; \mathbf{k}, \lambda | H' | n \rangle|^2}{E_n - E_m - |\mathbf{k}|c}, \quad (1.3.1)$$

где суммирование и интегрирование ведутся по всем промежуточным электронным состояниям  $m$ , поляризациям  $\lambda$  и импульсам  $\mathbf{k}$  фотона;  $H'$  обозначает член в гамильтониане, описывающий взаимодействие электромагнитного поля с электронами. Формальное вычисление приводит к бесконечной собственной энергии. Если же мы пренебрежем всеми промежуточными состояниями, в которых волновые числа фотонов большие чем  $1/a$ , то собственная энергия при  $a \rightarrow 0$  будет вести себя как  $1/a^2$ . Расходимости такого вида часто называются ультрафиолетовыми, поскольку возникают они из-за наличия промежуточных состояний с очень маленькой длиной волны.

При таких вычислениях считается, что электрон удовлетворяет правилам первоначальной теории Дирака, в которой отсутствуют отрицательные электроны. Через несколько лет Вайскопф повторил вычисление собственной массы электрона используя новую теорию с дырками. Он считал, что все состояния с отрицательной энергией заполнены. В этом случае во втором порядке теории возмущений возникает еще один член. На языке бездырочной модели он соответствует процессу, при котором из вакуума на короткое время рождаются фотон и электрон-позитронная пара, после чего происходит аннигиляция позитрона с исходным электроном. Первоначально Вайскопф нашел что, если порог ультрафиолетового обрезания частот фотонов равен  $1/a$ , то зависимость собственной энергии от него квадратичная  $1/a^2$ . Одновременно с этим точно такое же вычисление было проделано (по совету Бора) Карлсоном и Фарри. Взглянув на результаты Вайскопфа, Фарри понял, что тот учитывал электростатический член, которым они с Карлсоном пренебрегли. Тем самым Вайскопф, вычисляя магнитную собственную энергию, сделал на одну ошибку больше. Учтя замечание Фарри, Вайскопф пересмотрел свои вычисления и обнаружил, что члены, пропорциональные  $1/a^2$ , в выражении для массы сокращаются! Однако несмотря на это, расходимость все же осталась: если ультрафиолетовое обрезание равно  $1/a$ , то собственная масса имеет вид [63]

$$m_{em} = \frac{3\alpha}{2\pi} m \ln\left(\frac{\hbar}{mca}\right), \quad (1.3.2)$$

Мы видим, что степень расходимости существенно уменьшилась — в формуле (1.3.2) стоит логарифм  $\ln a$ , а не  $1/a$  (как в классической теории), или  $1/a^2$  (как в первых вычислениях Вайскопфа). Это обстоятельство оказалось чрезвычайно важным в дальнейшем, при создании теории перенормировок.

В 1933 г. физики столкнулись еще с одной разновидностью расходимостей. По всей видимости, первоходцем здесь был Дирак [64]. Он изучал влияние внешнего статического почти однородного распределения зарядов  $\varepsilon(\mathbf{x})$  на вакуум, т.е. на заполненные электронами уровни с отрицательной энергией. Кулоновское взаимодействие между зарядами, распределенными в пространстве с плотностью  $\varepsilon(\mathbf{x})$ , и электронами с отрицательной энергией приводит к “поляризации вакуума”. При этом пространственная плотность индуцированных зарядов определяется формулой

$$\delta\varepsilon = A\varepsilon + B\left(\frac{\hbar}{mc}\right)^2\nabla^2\varepsilon + \dots, \quad (1.3.3)$$

где  $B$  — конечная константа порядка  $\alpha$ , в то время как коэффициент  $A$  логарифмически расходится (он ведет себя как  $\alpha \ln a$ , где  $1/a$  — порог ультрафиолетового обрезания).

Расходимости также, по всей видимости, возникают еще в одном случае, при рассеянии фотонов на фотонах. Ганс Эйлер, Бернард Кокель и Гейзенберг [65] показали в 1935–36-е годы, что от таких расходимостей можно избавиться, если воспользоваться довольно жесткими правилами, предложенными незадолго до этого Дираком [66] и Гейзенбергом [67]. Эйлер, Кокель и Гейзенберг получили плотность эффективного лагранжиана, описывающего нелинейные электродинамические явления, обусловленные рождением виртуальных электрон-позитронных пар:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\mathbf{E}^2 - \mathbf{B}^2) + \frac{e^4\hbar}{360\pi^2 m_e^4 c^7} [(\mathbf{E}^2 - \mathbf{B}^2)^2 + 7(\mathbf{E} \cdot \mathbf{B})^2] + \dots \quad (1.3.4)$$

Эффективная теория работает в области частот  $\nu \ll m_e c^2/h$ . Вскоре Николас Кеммер и Вайскопф [68] показали, что в этом случае расходимости оказываются ложными и что (1.3.4) можно получить, не используя никаких регуляризационных методик.

На фоне огромных усилий, затрачиваемых на борьбу с расходимостями, особенно эффектно смотрится успешное решение проблемы *инфракрасных* расходимостей, соответствующих сингулярностям на другом, низкоэнергетическом, участке области интегрирования. В 1937 г. Феликс Блох и Арне Нордзик [68a] показали, что инфракрасные расходимости сокращаются, если принять во внимание процессы, в которых рождается произвольное число низкоэнергичных фотонов. Этот вопрос мы будем рассматривать с современных позиций в гл. 13.

Еще одну разновидность расходимостей обнаружил в 1939 г. Сидней Мишель Данкоф [69] при попытке вычислить радиационные по-

правки к сечению рассеяния электронов статическим кулоновским полем атома. В вычислении имелась ошибка (не был учтен один из членов), однако она была найдена гораздо позже [69a].

На протяжении 1930-х годов все перечисленные расходимости рассматривались не просто как неудачные попытки вычисления некоторых физических величин. Скорее они свидетельствовали об определенном пробеле в нашем понимании релятивистской квантовой теории поля. Такая точка зрения подкреплялась наличием упомянутых в предыдущем параграфе проблем, связанных с космическими лучами.

Одним из проявлений этого пессимизма были непрекращающиеся на протяжении всех 1930–1940-х годов поиски альтернативного описания квантовой теории поля. Как вспоминал позже Юлиан Швингер [69b], “внимание ведущих физиков, работающих в этой области, было сосредоточено не на анализе и аккуратном применении известной релятивистской теории электрона, взаимодействующего с электромагнитными полями, а на попытках изменить ее.” По этой причине в 1938 г. Гейзенберг [70] предположил существование фундаментальной длины  $L$ , аналогичной фундаментальному действию  $\hbar$  и фундаментальной скорости  $c$ . Был выдвинут ряд идей [70a], позволяющих придать теории нелокальную структуру. Некоторые теоретики заподозрили, что вместо формализма, работающего с векторами состояния и квантовыми полями, нужно использовать формализм, основанный исключительно на наблюдаемых величинах, таких, как  $S$ -матрица, введенная Джоном Арчибальдом Уиллером [71] в 1937 г. и независимо от него Гейзенбергом [72] в 1943 г. Элементы  $S$ -матрицы представляют собой амплитуды различных процессов рассеяния. Как мы увидим позже,  $S$ -матричное описание стало неотъемлемой частью современной квантовой теории поля. Более того, некоторые теоретики считают, что  $S$ -матричный формализм является идеальным средством для решения проблемы сильных взаимодействий [73].

В 1945 г. Уиллер и Ричард Фейнман [74], пойдя по совсем иному пути, сделали попытку избавиться от электромагнитного поля, переписав члены, отвечающие электромагнитному взаимодействию, в терминах теории дальнодействия. Уиллеру и Фейнману удалось показать, что, если принять во внимание взаимодействие не только между источником и пробными зарядами, но также между пробными и всеми остальными зарядами во Вселенной, можно получить чисто запаздывающий (или чисто опережающий) потенциал.

Но наиболее радикальной попыткой изменения традиционных основ квантовой механики, появившейся в рассматриваемый период, стала, пожалуй, предложенная Дираком [75] модель состояний с отрицательной вероятностью. Эта модель позволила ему избавиться от расходимости в суммах по состояниям. Идея об “индефинитной мет-

рике” в гильбертовом пространстве прижилась в квантовой теории поля, хотя и в виде, отличном от первоначально предложенного.

В 1930-х годах в воздухе носилась еще одна, более консервативная мысль. От расходимостей, по всей вероятности, можно избавляться, переопределяя, или “перенормируя”, параметры теории. Например, в то время было известно, что в любой лоренц-инвариантной классической теории электромагнитные собственная энергия и собственный импульс электрона *должны* иметь вид поправок к его массе. Поэтому сингулярности в выражениях для указанных величин могут сократиться, если учесть бесконечную отрицательную “голую” неэлектромагнитную массу электрона. Полученное выражение для наблюдаемой “перенормируемой” массы может оказаться конечным. Кроме того, из (1.3.3) мы видим, что поляризация вакуума приводит к изменению заряда электрона: если голый заряд дается выражением  $e = \int d^3x \varepsilon$ , то

$$e_{\text{TOTAL}} = \int d^3x (\varepsilon + \delta\varepsilon) = (1 + A)e. \quad (1.3.5)$$

С учетом поляризации вакуума в низшем порядке все результаты получаются конечными, если наблюдаемые величины типа сечения рассеяния выражаются через  $e_{\text{TOTAL}}$ , а не через  $e$ . Возникает вопрос, можно ли таким образом избавиться от всех расходимостей квантовой теории поля. В 1936 г. Вайскопф [76] предположил, что ответ на поставленный вопрос утвердительный. Он проверил, что все известные в то время расходимости устраняются перенормировкой физических параметров путем небольшого набора стандартных операций. Однако с помощью вычислительных методов, существовавших тогда, оказалось невозможным доказать, что метод работает всегда. Более того, Данкоф произвел вычисление [69], которое показало, что это далеко не так.

Возникла еще одна тенденция, связанная с расходимостями. Было высказано предположение, что любая величина, расходящаяся в рамках квантовой теории поля, не имеет физического смысла. В частности, в 1928 г. Дирак предсказал полное вырождение уровней  $2s_{1/2}-2p_{1/2}$  в атоме водорода во всех порядках по  $\alpha$ . Любая попытка вычислить с помощью квантовой электродинамики разность энергий этих уровней приводила к проблеме бесконечной собственной энергии связанного электрона. По этой причине существование такого расщепления уровней ставилось под сомнение. Впоследствии Бете [80] вспоминал: “Поправка к энергиям уровней оказывалась бесконечной во всех существовавших теориях и поэтому не воспринималась серьезно”. Такое положение сохранялось даже в конце 1930-х годов, когда спектроскописты [77] засвидетельствовали наличие расщепления уровней  $2s_{1/2}-2p_{1/2}$ . Величина его была порядка 1000 МГц. Правда, одно замечательное наблюдение сделал Эдвин Альбрехт Юлинг [78]. Он заметил, что явление поляризации вакуума, упомянутое нами вы-

ше, может приводить к расщеплению. К несчастью, как мы увидим в гл. 14, его вклад в величину расщепления намного меньше 1000 МГц и, кроме того, имеет противоположный знак.

Мрачная атмосфера, окружавшая квантовую теорию поля, начала рассеиваться вскоре после Второй мировой войны. С 1 по 4 июня 1947 г. на острове Шелтер состоялась конференция, посвященная основаниям квантовой механики. На ней были представлены как физики, работающие в области квантовой теории поля еще с 1930-х годов, так и более молодое поколение теоретиков, начавших свою научную работу во время войны. Но что было важнее всего — в этой конференции участвовали несколько экспериментаторов. Председательствовали на обсуждениях Ганс Крамерс, Оппенгеймер и Вайскопф. Один из экспериментаторов (который был скорее теоретиком, ставшим экспериментатором), Уиллис Лэмб, рассказал об имеющем большое значение измерении частоты линии  $2s_{1/2}-2p_{1/2}$  в спектре атома водорода. Пучок атомов водорода, вылетающих из специальной печки, направлялся на детектор, регистрирующий только возбужденные атомы. (При этом значительная часть пучка находилась в состояниях  $2s$  и  $2p$ .) Атомы в возбужденном состоянии  $2p$  очень быстро испускают фотон, переходя на нижний уровень  $1s$  (линия Лаймана  $\alpha$ ). Состояние же  $2s$  может распасться только путем испускания двух фотонов и поэтому живет гораздо дольше. В результате детектор, по большому счету, измеряет число атомов в метастабильном состоянии  $2s$ . Пучок пропускался через область магнитного поля, приводившего к дополнительному зеемановскому расщеплению линии  $2s_{1/2}-2p_{1/2}$ . Кроме того, на него действовало микроволновое электромагнитное поле с фиксированной частотой  $\nu \sim 10$  ГГц. При некоторой напряженности магнитного поля сигнал на детекторе пропадал, показывая тем самым, что микроволновое поле вызывает резонансные перескоки с метастабильного уровня  $2s$  на уровень  $2p$ , что очень скоро приводит к излучению фотона (линия Лаймана  $\alpha$ ) и переходу атома в основное состояние. Полное расщепление (зеемановское плюс исходное, присущее самому атому) уровней  $2s-2p$  при таком значении напряженности магнитного поля должно равняться просто  $\hbar\nu$ , откуда можно определить исходное расщепление уровней. Лэмб также объявил предварительные результаты своих измерений. Расщепление уровней оказалось равным 1000 МГц, что согласовывалось с более ранними спектроскопическими измерениями [77]. Воздействие этого открытия можно описать следующими словами, которые я слышал в 1954 г. в Копенгагене: “То, что какая-то величина равна бесконечности, не означает, что она есть нуль!”

Открытие лэмбовского сдвига вызвало огромный интерес среди физиков, принимавших участие в конференции на острове Шелтер. Многие из них уже работали над усовершенствованием формализма, позволяющего проводить вычисления в квантовой электродинамике.

мике. Крамерс сделал доклад о перенормировке массы в классической электродинамике электрона, обладающего геометрическими размерами [79а]. В своей работе он показал, что трудности, связанные с расходимостью собственной энергии в пределе нулевого радиуса, становятся неважными, если переформулировать теорию таким образом, чтобы массовый параметр совпадал с экспериментально наблюдаемой массой электрона. Швингер и Вайскопф (до которых уже доходили слухи о результатах Лэмба и которые обсуждали их по пути на остров Шелтер) предположили, что учет промежуточных состояний, содержащих позитроны, который, как известно, уменьшает степень расходимости сдвигов уровней энергии с  $1/a^2$  до  $\ln a$ , может привести к тому, что *разности* сдвигов этих уровней окажутся конечными. (На самом деле, еще в 1946 г., до того как Вайскопф узнал об экспериментах Лэмба, он предложил решить эту задачу своему студенту Брюсу Френчу.) Почти сразу после конференции, во время поездки на поезде до Шенектади, Ганс Бете [80] проделал нерелятивистское вычисление. Он, правда, не учитывал промежуточные состояния, содержащие позитроны. Однако чтобы избавиться от расходимостей, Бете использовал ультрафиолетовое обрезание, причем верхним пределом для импульсов фотонов служила величина порядка  $m_e c^2$ . Бете получил приближенно 1040 МГц. Полное релятивистское вычисление с использованием перенормировок, устранивших расходимости, также было вскоре проделано несколькими авторами [81], причем имело место великолепное согласие с экспериментом.

Другой важный экспериментальный результат, представленный на острове Шелтер, был получен Исидором И. Раби и несколькими сотрудниками его лаборатории [82]. В эксперименте изучалась сверхтонкая структура водорода идейтерия. Результаты свидетельствовали о том, что магнитный момент электрона больше величины  $e\hbar/2mc$ , полученной Дираком, приблизительно в 1,0013 раза. Дополнительные опыты по измерению гиromагнитного отношения атомов натрия и галлия дали точное значение [83]

$$\mu = \frac{e\hbar}{2mc} [1,00118 \pm 0,00003].$$

Пытаясь объяснить эти результаты, Грегори Брэйт предположил [83а], что их можно получить, если учесть радиационную поправку порядка  $\alpha$  к магнитному моменту электрона. На острове Шелтер Брэйт и Швингер рассказали о своих попытках вычислить эту поправку. Вскоре после конференции Швингеру удалось проделать полное вычисление аномального магнитного момента электрона [84]:

$$\mu = \frac{e\hbar}{2mc} \left[ 1 + \frac{\alpha}{2\pi} \right] = \frac{e\hbar}{2mc} [1,001162],$$

что великолепно согласовывалось с экспериментом. Этот результат, также как и вычисление Бете лэмбовского сдвига, окончательно убедили физиков в реальности радиационных поправок.

Математические методы того времени представляли собой чудо-вищную мешанину различных понятий и формализмов. Один из подходов, разработанный Швингером [85], основывался на операторных методах и принципе действия и был представлен им на конференции в Поконе Манор в 1948 г., последовавшей за конференцией на острове Шелтер. Другой, лоренц-инвариантный, операторный формализм был разработан еще раньше в Японии Син-Итиро Томонагой и его сотрудниками. Однако их работа вначале была неизвестна на Западе. В 1930-х годах Томонага боролся с расходимостями в мезонной теории Юкавы. В 1947 г. он и его группа все еще не входили в научное сообщество. Они узнали о лэмбовском сдвиге из статьи в *Newsweek*.

Совершенно другой подход, изобретенный Фейнманом, был кратко описан им на конференции в Поконе. Вместо того чтобы работать с операторами квантовых полей, Фейнман записал  $S$ -матрицу в виде функционального интеграла, причем в качестве подынтегрального выражения выступала величина  $\exp(iW)$ , где буквой  $W$  обозначено действие для совокупности дираковских частиц, взаимодействующих с *классическим* электромагнитным полем. Функциональное интегрирование ведется по всем траекториям дираковских частиц, удовлетворяющим определенным начальным и конечным условиям при  $t \rightarrow \pm\infty$ . Одним из важнейших результатов работы Фейнмана, имеющим огромное практическое значение, являлся набор графических правил, позволяющих вычислять матричные элементы  $S$ -матрицы в любом порядке по возмущению. В отличие от старой теории возмущений 1920–1930-х годов, правила Фейнмана объединяют процессы рождения частицы и уничтожения античастицы и поэтому на каждом этапе вычислений дают лоренц-инвариантные результаты. Ранее, говоря о вычислении Вайскопфом [63] собственной энергии электрона, мы видели, что только методы, рассматривающие частицы и античастицы на равных основаниях, проясняют происхождение расходимостей.

Наконец, в двух работах, датируемых 1949 г., Фриман Дайсон [88] показал, что операторные формализмы Швингера и Томонаги приводят к тем же графическим правилам, которые установил Фейнман. Дайсон также провел анализ расходимостей в случае произвольных фейнмановских диаграмм и в общих чертах доказал, что они всегда могут быть устранины при помощи перенормировок. Одним из важнейших результатов дайсоновского анализа был критерий, позволяющий определить, является ли та или иная квантовая теория поля “перенормируемой”. Последнее слово означает, что все расходимости, возникающие в теории, могут быть устранины путем переопределения *конечного* числа констант связи и масс. В частности, взаимодействия типа описываемых членом Паули (1.1.32), приводящего к изменению магнитного момента электрона, разрушают перенормируемость квантовой электродинамики. С момента опубликования работ Дайсона

физики получили общий и систематический формализм, который легко освоить и который может быть использован для решения многих задач физики.

Я не могу закончить рассказ о расходимостях, не затронув загадочные аспекты истории борьбы с ними. Еще в 1930 г. Оппенгеймер [61] отмечал, что степень ультрафиолетовой расходимости при вычислении собственной энергии связанного электрона существенно уменьшается, если рассматривать сдвиги не самих уровней энергии атома, а разность этих сдвигов. Кроме того, в 1934 г. Вайскофф [63] обнаружил, что степень расходимости собственной энергии свободного электрона существенно уменьшается, если учитывать промежуточные состояния, содержащие позитроны. В 1934 г. казалось вполне естественным предположение, что учет позитронных промежуточных состояний *вместе* с рассмотрением разности сдвигов энергий двух атомных уровней устранит ультрафиолетовые расходимости совсем и мы получим просто относительный сдвиг уровней<sup>1)</sup>. Имелось даже экспериментальное свидетельство [77] того, что частота линии, соответствующей переходу  $2s_{1/2}-2p_{1/2}$ , составляет величину порядка 1000 МГц. Так почему же до 1947 г. не делалось попыток *численно* оценить эту разность энергий?

Строго говоря, в 1939 г. одна такая попытка [88a] была сделана. Однако она, по существу, оказалась неверной, поскольку большее значение придавалось радиусу заряда *протона*, влияние которого на уровня энергии атома водорода ничтожно. Вычисление привело к результату, который приближенно находился в согласии с ранними экспериментами [77]. Как показал в 1939 г. Лэмб [88b], была сделана ошибка.

Последовательный релятивистский вывод выражения для лэмбовского сдвига, учитывающий позитронные промежуточные состояния и использующий аппарат старой нерелятивистской теории возмущений, мог бы быть осуществлен еще в 1930-е годы. Если мы рассматриваем все члены, то с точностью до заданного порядка малости старая нерелятивистская теория возмущений приводит к тем же результатам, что и заведомо релятивистские формализмы Фейнмана, Швингера и Томонаги. Фактически, после работы Бете первые точные вычисления [81] лэмбовского сдвига были проведены в США Френчом, Вайскоффом, Норманом Кроллем и Лэмбом с использованием именно нерелятивистской теории возмущений, хотя японская группа, возглав-

---

<sup>1)</sup> На самом деле, это предположение несправедливо. Как показано в § 14.3, радиационные поправки к массе электрона влияют на энергию атомных уровней не только посредством изменения массы покоя электрона, которая имеет одно и то же значение для всех уровней, но и посредством изменения кинетической энергии электрона, которая варьируется при переходе от одного уровня к другому.

ляемая Томонагой [81], уже использовала ковариантные методы для решения этой и других задач.

Единственным недостающим элементом была вера в перенормировки как средство, позволяющее бороться с расходимостями. Мы уже видели, что перенормировки широко обсуждались в конце 1930-х годов. Однако было признано, причем Оппенгеймер [89] особенно настаивал на этом, что квантовая электродинамика не работает при энергиях, больших 100 МэВ, и что решение задач, возникающих при столь высоких энергиях, может быть найдено только с помощью новых смелых идей.

То, что произошло на острове Шелтер, перевернуло эти представления. Первой новостью стал свет в конце туннеля на пути решения проблемы космических лучей, обсуждавшейся нами в предыдущем параграфе. Роберт Маршак выдвинул гипотезу [58], что существует два вида “мезонов” с близкими массами — мюоны, которые наблюдались на опыте, и пионы, ответственные за ядерные силы. Более важным представляется факт, что стали известны надежные экспериментальные значения лэмбовского сдвига и аномального магнитного момента, заставившие физиков внимательнее отнести к проблеме радиационных поправок. По-видимому, не менее важным стал факт, что на конференции встретились теоретики, которые пытались решить проблему расходимостей своими собственными различными методами. Революция, произошедшая в конце 1940-х годов, была совершена теми физиками, которые хотя и были представлены в основной своей части молодежью, являлись консерваторами, отказавшимися от поисков радикального решения, на котором настаивали их предшественники.

## Литература

1. *de Broglie L.* // Comptes Rendus. **177**, 507, 548, 630 (1923); Nature. **112**, 540 (1923); Thèse de doctorat. Masson et Cie, Paris, 1924; Annales de Physique. **3**, 22 (1925) [reprinted in English in *Wave Mechanics*, ed. by G. Ludwig. Pergamon Press, N.Y., 1968]; Phil. Mag. **47**, 446 (1924).
2. *Elsasser W.* // Naturwiss. **13**, 711 (1925).
3. *Davission C.J., Germer L.H.* // Phys. Rev. **30**, 705 (1927).
4. *Heisenberg W.* // A. Phys. **33**, 879 (1925); *Born M., Jordan P.* // Z. f. Phys. **34**, 858 (1925); *Dirac P.A.M.* // Proc. Roy. Soc. **A109**, 642 (1925); *Born M., Heisenberg W., Jordan P.* // Z. f. Phys. **35**, 557 (1926); *Pauli W.* // Z. f. Phys. **36**, 336 (1926). Эти работы напечатаны также в *Sources of Quantum Mechanics*, ed. by B.L. van der Waerden. Dover Publications, Inc., N.Y., 1968.

5. Schrödinger E. // Ann. Phys. **79**, 361, 489; **80**, 437; **81**, 109 (1926). Эти работы напечатаны также в английском переводе (правда, в несколько сокращенной версии) в *Wave Mechanics*, ссылка 1. Кроме того, см. *Collected Papers on Wave Mechanics*, trans. by J.F. Schearer, W.M. Deans. Blackie and Son, London, 1928.
6. См., например, Dirac P.A.M. The Development of Quantum Theory Gordon, Breach, N.Y., 1971. Также см. некролог, написанный Дираком в связи со смертью Шредингера, Nature. **189**, 335 (1961), и его статью в *Scientific American*. **208**, 45 (1963).
7. Klein O. // Z. f. Phys. **37**, 895 (1926). Также см. Fock V. // Z. f. Phys. **38**, 242 (1926); там же, **39**, 226 (1926).
8. Gordon W. // Z. f. Phys. **40**, 117 (1926).
9. Подробное вычисление приведено, например, в работе Schiff L.I. Quantum Mechanics, 3rd edn. McGraw-Hill, Inc., N.Y., 1968. Section 51.
10. Paschen F. // Ann. Phys. **50**, 901 (1916). Эксперименты, на самом деле, проводились с ионами  $\text{He}^+$ , так как расщепление тонкой структуры последних в 16 раз больше, чем у водорода. Тонкая структура спектральных линий была впервые открыта при помощи интерферометра Майкельсоном, см. его работы Michelson A.A. // Phil. Mag. **31**, 338 (1891); там же, **34**, 280 (1892).
- 10a. Sommerfeld A. // Münchener Berichte 1915. Р. 425, 429; Ann. Phys. **51**, 1, 125 (1916). См. также Wilson W. // Phil. Mag. **29**, 795 (1915).
11. Uhlenbeck G.E., Goudsmith S. // Naturwiss. **13**, 953 (1925); Nature. **117**, 264 (1926). Гипотеза о наличии у электрона спина была ранее выдвинута по другим причинам Комptonом, см. его работу Compton A.H. // J. Frank. Inst. **192**, 145 (1921).
12. Общая формула для зеемановского расщепления в одноэлектронных атомах была выведена эмпирическим путем А. Ланде, см. Lande A. // Z. f. Phys. **5**, 231 (1921); там же, **15**, 189 (1923); там же, **15**, 189 (1923); там же, **19**, 112 (1923). В то время дополнительный неорбитальный угловой момент, фигурирующий в этой формуле, рассматривался как угловой момент атомного “ядра”, см. Sommerfeld A. // Ann. Phys. **63**, 221 (1920); там же, **70**, 32 (1923). Лишь в последствии физики осознали, что этот дополнительный угловой момент и есть спин электрона (см. ссылку 11).
13. Heisenberg W., Jordan P. // Z. f. Phys. **37**, 263 (1926); Darwin C.G. // Proc. Roy. Soc. **A116**, 227 (1927). Дарвин утверждает, что эта работа была проделана несколькими авторами, однако Дирак при этом ссылается только на Дарвина.
14. Thomas L.H. // Nature. **117**, 514 (1926). Также см. Weinberg S. Gravitation and Cosmology. Wiley, N.Y., 1972. Section 5.1.

15. *Dirac P.A.M.* // Proc. Roy. Soc. **A117**, 610 (1928). Применения этой теории в случае эффектов Зеемана и Пашена–Бака, а также вычисление относительной интенсивности линий мультиплетов тонкой структуры изложены в работе Дирака, см. *Dirac P.A.M.* // Proc. Roy. Soc. **A118**, 351 (1928).
16. Вероятностная интерпретация нерелятивистской квантовой механики излагается в работах *Born M.* // Z. f. Phys. **37**, 863 (1926); там же, **38**, 803 (1926) (имеется сокращенный английский перевод, см. *Wave Mechanics*, ссылка 1); *Wentzel G.* // Z. f. Phys. **40**, 590 (1926); *Heisenberg W.* // Z. f. Phys. **43**, 172 (1927); *Bohr N.* // Nature. **121**, 580 (1928); Naturwissenschaften. **17**, 483 (1929); Electrons et Photons — Rapports et Discussions du V<sup>e</sup> Conseil de Physique Solvay. Gauthier-Villars, Paris, 1928.
17. Спор Дирака с Дж. Мехрой, состоявшийся 28 марта 1969 г., приведен в статье Мехры в *Aspects of Quantum Theory*, ed. by A. Salam and E.P. Wigner. Cambridge University Press, Cambridge, 1972.
18. *Gamow G.* Thirty Years that Shook Physics. Doubleday and Co., Garden City, N.Y., 1966. P. 125.
19. *Pauli W.* // Z. f. Phys. **37**, 263 (1926); **43**, 601 (1927).
20. *Darwin C.G.* // Proc. Roy. Soc. **A118**, 654 (1928); там же, **A120**, 621 (1928).
21. *Gordon W.* // Z. f. Phys. **48**, 11 (1928).
22. *Dirac P.A.M.* // Proc. Roy. Soc. **A126**, 360 (1930); см. также ссылку 47.
23. *Stoner E.C.* // Phil. Mag. **48**, 719 (1924).
24. *Pauli W.* // Z. f. Phys. **31**, 765 (1925).
25. *Heisenberg W.* // Z. f. Phys. **38**, 411 (1926); там же, **39**, 499 (1926); *Dirac P.A.M.* // Proc. Roy. Soc. **A112**, 661 (1926); *Pauli W.* // Z. f. Phys. **41**, 81 (1927); *Slater J.C.* // Phys. Rev. **34**, 1293 (1929).
26. *Fermi E.* // Z. f. Phys. **36**, 902 (1926); Rend. Accad. Lincei. **3**, 145 (1926).
27. *Dirac P.A.M.*, ссылка 25.
- 27a. *Dirac P.A.M.*, First W.R. Crane Lecture at the University of Michigan, April 17, 1978, неопубликовано.
28. *Weyl H.* The Theory of Groups and Quantum Mechanics, translated from the second, 1931. German edition by H.P. Robertson. Dover Publications, Inc., N.Y.. Chapter IV, Section 12. См. также *Dirac P.A.M.* // Proc. Roy. Soc. **A133**, 61 (1931).
29. *Oppenheimer J.R.* // Phys. Rev. **35**, 562 (1930); *Tamm I.* // Z. f. Phys. **62**, 545 (1930).

- 29a. *Dirac P.A.M.* // Proc. Roy. Soc. **133**, 60 (1931).
30. *Anderson C.D.* // Science. **76**, 238 (1932); Phys. Rev. **43**, 491 (1933). Последняя работа напечатана в *Foundations of Nuclear Physics*, ed. by R.T. Beyer. Dover Publications, Inc., N.Y., 1949.
- 30a. *Schwinger J.* // A report on Quantum Electrodynamics // In: The Physicist's Conception of Nature. Reidel, Dordrecht, 1973. P. 415.
31. *Pauli W.* Handbuch der Physik. Julius Springer, Berlin, 1932–1933; Rev. Mod. Phys. **13**, 203 (1941).
32. *Born, Heisenberg, Jordan*, ссылка 4. Section 3.
- 32a. *Ehrenfest P.* // Phys. Z. **7**, 528 (1906).
33. *Born, Jordan*, ссылка 4. К несчастью, относящиеся к делу части этой работы не включены в сборник *Sources of Quantum Mechanics* (см. ссылку 4).
34. *Dirac P.A.M.* // Proc. Roy. Soc. **A112**, 661 (1926). Section 5. Вывод в более доступной форме имеется в *Schiff L.I. Quantum Mechanics*, 3rd edn. McGraw-Hill Book Company, N.Y., 1968. Section 44.
- 34a. *Einstein A.* // Phys. Z. **18**, 121 (1917); напечатана на английском языке в *Sources of Quantum Mechanics*, ссылка 4.
35. *Dirac P.A.M.* // Proc. Roy. Soc. **A114**, 243 (1927); напечатана в *Quantum Electrodynamics*, ed. by J. Schwinger. Dover Publications, Inc., N.Y., 1958.
36. *Dirac P.A.M.* // Proc. Roy. Soc. **A114**, 710 (1927).
- 36a. *Weisskopf V.F., Wigner E.* // Z. f. Phys. **63**, 54 (1930).
- 36b. *Fermi E.* // Lincei Rend. **9**, 881 (1929); **12**, 431 (1930); Rev. Mod. Phys. **4**, 87 (1932).
37. *Jordan P., Pauli W.* // Z. f. Phys. **47**, 151 (1928).
38. *Bohr N., Rosenfeld L.* // Kon. dansk. vid. Selsk. Mat.-Fys. Medd. **XII**, No. 8 (1933) (имеется английский перевод, Selected Papers of Leon Rosenfeld, ed. by R.S. Cohen, J. Stachel. Reidel, Dordrecht, 1979); Phys. Rev. **78**, 794 (1950).
39. *Jordan P.*, Z. f. Phys. **44**, 473 (1927). См. также *Jordan P., Klein O.* // Z. f. Phys. **45**, 751 (1929); *Jordan P.* // Phys. Zeit. **30**, 700 (1929).
40. *Jordan P., Wigner E.* // Z. f. Phys. **47**, 631 (1928). Эта работа напечатана в *Quantum Electrodynamics*, ссылка 35.
- 40a. *Fierz M.* // Helv. Phys. Acta. **12**, (1939); *Pauli W.* // Phys. Rev. **58**, 716 (1940); *Pauli W., Belinfante F.J.* // Physica. **7**, 177 (1940).
41. *Heisenberg W., Pauli W.* // Z. f. Phys. **56**, 1 (1929); там же, **59**, 168 (1930).

42. *Dirac P.A.M.* // Proc. Roy. Soc. **A136**, 453 (1932); *Dirac P.A.M., Fock V.A., Podolsky B.* // Phys. Zeit. der Sowjetunion. **2**, 468 (1932); *Dirac P.A.M.* // Phys. Zeit. der Sowjetunion. **3**, 64 (1933). Последние две работы напечатаны в *Quantum Electrodynamics*, ссылка 35, с. 29 и с. 312. Также см. *Rosenfeld L.* // Z. f. Phys. **76**, 729 (1932).
- 42a. *Dirac P.A.M.* // Proc. Roy. Soc. London. **A136**, 453 (1932).
43. *Fermi E.* // Z. f. Phys. **88**, 161 (1934). Ферми сослался на неопубликованную работу Паули, чтобы обосновать свое предположение, состоящее в том, что при бета-распаде, кроме электрона, испускается еще одна ненаблюдаемая нейтральная частица. Чтобы отличить новую частицу от недавно открытого нейтрона, ей дали название нейтрино.
- 43a. *Fock V.* C.R.Leningrad, 1933. Р. 267.
44. *Furry W.H., Oppenheimer J.R.* // Phys. Rev. **45**, 245 (1934). В этой работе используется формализм матрицы плотности, развитый Дираком, см. *Dirac P.A.M.* // Proc. Camb. Phil. Soc. **30**, 150 (1934). Также см. *Peierls R.E.* // Proc. Roy. Soc. **146**, 420 (1934); *Heisenberg W.* // Z. f. Phys. **90**, 209 (1934); *Rosenfeld L.* // Z. f. Phys. **76**, 729 (1932).
45. *Pauli W., Weisskopf V.* // Helv. Phys. Acta. **7**, 709 (1934), напечатана на английском языке в книге *Miller A.I. Early Quantum Electrodynamics*. Cambridge University Press, Cambridge, 1994. См. также *Pauli W.* // Ann. Inst. Henri Poincaré. **6**, 137 (1936).
46. *Klein O., Nishina Y.* // Z. f. Phys. **52**, 853 (1929); *Nishina Y.*, там же, 869 (1929); также см. *Tamm I.* // Z. f. Phys. **62**, 545 (1930).
47. *Dirac P.A.M.* // Proc. Camb. Phil. Soc. **26**, 361 (1930).
48. *Møller C.* // Ann. d. Phys. **14**, 531, 568 (1932).
49. *Bethe H., Heitler W.* // Proc. Roy. Soc. **A146**, 83 (1934); см. также *Racah G.* // Nuovo Cimento. **11**, №.7 (1934); там же, **13**, 69 (1936).
50. *Bhabha H.J.* // Proc. Roy. Soc. **A154**, 195 (1936).
- 50a. *Carlson J.F., Oppenheimer J.R.* // Phys. Rev. **51**, 220 (1937).
51. *Ehrenfest P., Oppenheimer J.R.* // Phys. Rev. **37**, 333 (1931).
52. *Heitler W., Herzberg G.* // Naturwiss. **17**, 673 (1929); *Rasetti F.* // Z. f. Phys. **61**, 598 (1930).
53. *Chadwick J.* // Proc. Roy. Soc. **A136**, 692 (1932). Эта работа напечатана в *The Foundations of Nuclear Physics*, ссылка 30.
54. *Heisenberg W.* // Z. f. Phys. **77**, 1 (1932); см. также *Curie-Joliot I., Joliot F.* // Compt. Rend. **194**, 273 (1932).
- 54a. Список ссылок см., например, в *Brown L.M., Rechenberg H.* // Hist. Stud. in Phys. and Bio. Science. **25**, 1 (1994).

55. Yukawa H. // Proc. Phys.-Math. Soc. (Japan) (3). **17**, 48 (1935). Эта работа напечатана в *The Foundations of Nuclear Physics*, ссылка 30.
56. Neddermeyer S.H., Anderson C.D. // Phys. Rev. **51**, 884 (1937); Street J.C., Stevenson E.C. // Phys. Rev. **52**, 1003 (1937).
- 56a. Nordheim L., Webb N. // Phys. Rev. **56**, 494 (1939).
57. Conversi M., Pancini E., Piccioni O. // Phys. Rev. **71**, 209L (1947).
58. Sakata S., Inoue T. // Prog. Theor. Phys. **1**, 143 (1946); Marshak R.E., Bethe H.A. // Phys. Rev. **77**, 506 (1947).
59. Lattes C.M.G., Occhialini G.P.S., Powell C.F. // Nature. **160**, 453, 486 (1947).
60. Rochester G.D., Butler C.C. // Nature. **160**, 855 (1947).
61. Oppenheimer J.R. // Phys. Rev. **35**, 461 (1930).
62. Waller I. // Z. f. Phys. **59**, 168 (1930); там же, **61**, 721, 837 (1930); там же, **62**, 673 (1930).
63. Weisskopf V.F. // Z. f. Phys. **89**, 27 (1934) (имеется английский перевод, см. *Early Quantum Electrodynamics*, ссылка 45), там же, **90**, 817 (1934). В этих работах собственная электромагнитная энергия вычисляется в низшем порядке по  $\alpha$ . Доказательство того, что расходимости во всех порядках теории возмущений всего лишь логарифмические, было дано Вайскопфом, см. Weisskopf // Phys. Rev. **56**, 72 (1939). (Последняя работа напечатана также в *Quantum Electrodynamics*, ссылка 35).
64. Dirac P.A.M. // XVII Conseil Solvay de Physique. Р. 203 (1933), напечатана также в *Early Quantum Electrodynamics*, ссылка 45. Изложение дальнейших вычислений, основанных на менее ограничивающих предположениях, имеется в работах Heisenberg W. // Z. f. Phys. **90**, 209 (1934); Sachs. Akad. Wiss. **86**, 317 (1934); Serber R. // Phys. Rev. **43**, 49 (1935); Uehling E.A. // Phys. Rev. **48**, 55 (1935); Pauli W., Rose M. // Phys. Rev. **49**, 462 (1936). Также см. Furry, Oppenheimer (ссылка 64); Peierls (ссылка 44); Weisskopf (ссылка 63).
65. Euler H., Kockel B. // Naturwiss. **23**, 246 (1935); Heisenberg W., Euler H. // Z. f. Phys. **98**, 714 (1936).
66. Dirac P.A.M. // Proc. Camb. Phil. Soc. **30**, 150 (1934).
67. Heisenberg W. // Z. f. Phys. **90**, 209 (1934).
68. Kemmer N., Weisskopf V.F. // Nature. **137**, 659 (1936).
- 68a. Bloch F., Nordsieck A. // Phys. Rev. **52**, 54 (1937). См. также Pauli W., Fierz M. // Nuovo Cimento. **15**, 167 (1938), имеется английский перевод (см. *Early Quantum Electrodynamics*, Ref. 45).
69. Dancoff S.M. // Phys. Rev. **55**, 959 (1939).

- 69a. *Lewis H.W.* // Phys. Rev. **73**, 173 (1948); *Epstein S.* // Phys. Rev. **73**, 177 (1948). См. также *Schwinger J.*, ссылка 84; *Koba Z., Tomonaga S.* // Prog. Theor. Phys. **3/3**, 290 (1948).
- 69b. *Schwinger J. B* *The Birth of Particle Physics*, ed. by L. Brown and L. Hoddeson. Cambridge University Press, Cambridge, 1983. P. 336.
70. *Heisenberg W.* // Ann. d. Phys. **32**, 20 (1938). В *Early Quantum Electrodynamics* (ссылка 45) напечатан английский перевод.
- 70a. *Wentzel G.* // Z. f. Phys. **86**, 479, 635 (1933); Z. f. Phys. **87**, 726 (1934); *Born M., Infeld L.* // Proc. Roy. Soc. **A150**, 141 (1935); *Pauli W.* // Ann. Inst. Henri Poincaré. **6**, 137 (1936).
71. *Wheeler J.A.* // Phys. Rev. **52**, 1107 (1937).
72. *Heisenberg W.* // Z. f. Phys. **120**, 513, 673 (1943); Z. Naturforsch. **1**, 608 (1946). Также см. *Møller C.* // Kon. Dansk. Vid. Sels. Mat.-Fys. Medd. **23**, No. 1 (1945); там же, **23**, No. 19, (1946).
73. См., напр., *Chew G.* *The S-Matrix Theory of Strong Interactions*. W.A. Benjamin, Inc., N.Y., 1961.
74. *Wheeler J.A., Feynman R.P.* // Rev. Mod. Phys. **17**, 157 (1945); там же, **21**, 425 (1949). Расширенный список ссылок, а также обсуждение применений теорий дальнодействия в космологии см., например, *Weinberg S.* *Gravitation and Cosmology*. Wiley, 1972. Section 16.3.
75. *Dirac P.A.M.* // Proc. Roy. Soc. **A180**, 1 (1942). Критический разбор этой статьи изложен в работе *Pauli W.* // Rev. Mod. Phys. **15**, 175 (1943). Обзором классических теорий этого типа, а также других попыток решить проблему расходимостей является статья R.E. Peierls в Rapports du 8<sup>me</sup> Conseil de Physique Solvay, 1948. R. Stoops, Brussels, 1950. P. 241.
76. *Weisskopf V.F.* // Kon. Dan. Vid. Sel., Mat.-fys. Medd. **XIV**, No. 6 (1936), особенно с. 34 и с. 5, 6. Эта работа напечатана также в *Quantum Electrodynamics* (ссылка 35). Имеется английский перевод, см. *Early Quantum Electrodynamics* (ссылка 45). Кроме того, см. *Pauli W.*, *Fierz M.* (ссылка 68а); *Kramers H.A.* (ссылка 79а).
77. *Pasternack S.* // Phys. Rev. **54**, 1113 (1938). Это предположение основывалось на экспериментах Хаустона, см. *Houston W.V.* // Phys. Rev. **51**, 446 (1937); *Williams R.C.* // Phys. Rev. **54**, 558 (1938). Данные, говорящие об обратном, приведены в работе *Drinkwater J.W., Richardson O., Williams W.E.* // Proc. Roy. Soc. **174**, 164 (1940).
78. *Uehling E.A.*, ссылка 64.
79. *Lamb W.E., Rutherford Jr and R.C.* // Phys. Rev. **72**, 241 (1947). Эта работа напечатана в *Quantum Electrodynamics*, ссылка 35.

- 79a. Kramers H.A. // Nuovo Cimento. **15**, 108 (1938). Напечатана в английском переводе в *Early Quantum Electrodynamics*, ссылка 45; Ned. T. Natwink. **11**, 134 (1944); Rapports du 8<sup>me</sup> Conseil de Physique Solvay, 1948. R. Stoops, Brussels, 1950.
80. Bethe H.A. // Phys. Rev. **72**, 339 (1947). Эта работа напечатана также в *Quantum Electrodynamics*, ссылка 35.
81. French J.B., Weisskopf V.F. // Phys. Rev. **75**, 1240 (1949); Kroll N.M., Lamb W.E. // Phys. Rev. **75**, 388 (1949); Schwinger J. // Phys. Rev. **75**, 898 (1949); Feynman R.P. // Rev. Mod. Phys. **20**, 367 (1948); Phys. Rev. **74**, 939, 1430 (1948); **76**, 749, 769 (1949); **80**, 440 (1950); Fukuda H., Miyamoto Y., Tomonaga S. // Prog. Theor. Phys. Rev. Mod. Phys. **4**, 47, 121 (1948). Работа Кролля и Лэмба напечатана в *Quantum Electrodynamics*, ссылка 35.
82. Nafe J.E., Nelson E.B., Rabi I.I. // Phys. Rev. **71**, 914 (1947); Nagel D.E., Julian R.S., Zacharias J.R. // Phys. Rev. **72**, 973 (1947).
83. Kusch P., Foley H.M. // Phys. Rev. **72**, 1256 (1947).
- 83a. Breit G. // Phys. Rev. **71**, 984 (1947). Швингер в своей работе, указанной здесь под номером 84, приводит исправленный вариант результатов Брейта.
84. Schwinger J. // Phys. Rev. **73**, 416 (1948). Эта работа также напечатана в *Quantum Electrodynamics*, ссылка 35.
85. Schwinger J. // Phys. Rev. **74**, 1439 (1948); там же, **75**, 651 (1949); там же, **76**, 790 (1949); там же, **82**, 664, 914 (1951); там же, **91**, 713 (1953); Proc. Nat. Acad. Sci. **37**, 452 (1951). Все эти работы, кроме первых двух, напечатаны в *Quantum Electrodynamics*, ссылка 35.
86. Tomonaga S. // Prog. Theor. Phys. Rev. Mod. Phys. **1**, 27 (1946); Koba Z., Tati T., Tomonaga S., там же., **2**, 101 (1947); Kaneshawa S., Tomonaga S., там же, **3**, 1, 101 (1948); Tomonaga S. // Phys. Rev. **74**, 224 (1948); Ito D., Koba Z., Tomonaga S. // Prog. Theor. Phys. **3**, 276 (1948); Koba Z., Tomonaga S., там же, **3**, 290 (1948). Первая и четвертая работы напечатаны в *Quantum Electrodynamics*, ссылка 35.
87. Feynman R.P. // Rev. Mod. Phys. **20**, 367 (1948); Phys. Rev. **74**, 939, 1430 (1948); там же, **76**, 749, 769 (1949); там же, **80**, 440 (1950). Все работы, кроме второй и третьей, напечатаны в *Quantum Electrodynamics*, ссылка 35.
88. Dyson F.J. // Phys. Rev. **75**, 486, 1736 (1949). Эти статьи напечатаны в *Quantum Electrodynamics*, ссылка 35.
- 88a. Fröhlich H., Heitler W., Kahn B. // Proc. Roy. Soc. **A171**, 269 (1939); Phys. Rev. **56**, 961 (1939).
- 88b. Lamb W.E., Jr // Phys. Rev. **56**, 384 (1939); Phys. Rev. **57**, 458 (1940).

89. Цитата взята из *Serber R.* // The Birth of Particle Physics, c. 270, ссылка 69b.

## Дополнительная литература

1. *Aramaki S.* Development of the Renormalization Theory in Quantum Electrodynamics // Historia Scientiarum. **36**, 97 (1989); ibid. **37**, 91 (1989). [Параграф 1.3.]
2. *Beyer R. T.* Ed. Foundations of Nuclear Physics. Dover Publications, Inc., N.Y., 1949). [Параграф 1.2.]
3. *Brown L.* Yukawa's Predictions of the Meson // Centauros. **25**, 71 (1981). [Параграф 1.2.]
4. *Brown L.M., Hoddeson L.* Eds. The Birth of Particle Physics Cambridge University Press, Cambridge, 1983. [Параграфы 1.1, 1.2, 1.3.]
5. *Cao T.Y., Schweber S.S.* The Conceptual Foundations and the Philosophical Aspects of Renormalization Theory // Synthèse. **97**, 33 (1993). [Параграф 1.3.]
6. *Dirac P.A.M.* The Development of Quantum Theory. Gordon and Breach Science Publishers, N.Y., 1971. [Параграф 1.1.]
7. *Fermi E.* Quantum Theory of Radiation // Rev. Mod. Phys. **4**, 87 (1932). [Параграфы 1.2, 1.3]
8. *Gamow G.* Thirty Years that Shook Physics. Doubleday and Co., Garden City, N.Y., 1966. [Параграф 1.1.]
9. *Jammer M.* The Conceptual Development of Quantum Mechanics. McGraw-Hill Book Co., N.Y., 1966. [Параграф 1.1.]
10. *Mehra J.* The Golden Age of Theoretical Physics: P.A.M. Dirac's Scientific Work from 1924 to 1933 // In *Aspects of Quantum Theory*, ed. by A. Salam, E.P. Wigner. Cambridge University Press, Cambridge, 1972. [Параграф 1.1.]
11. *Miller A.I.* Early Quantum Electrodynamics — A Source Book. Cambridge University Press, Cambridge, UK, 1994. [Параграфы 1.1, 1.2, 1.3.]
12. *Pais A.* Inward Bound. Clarendon Press, Oxford, 1986. [Параграфы 1.1, 1.2, 1.3.]
13. *Schweber S.S.* Feynman and the Visualization of Space-Time Processes // Rev. Mod. Phys. **58**, 449 (1986). [Параграф 1.3.]
14. *Schweber S.S.* Some Chapters for a History of Quantum Field Theory: 1938–1952 // In *Relativity, Groups, and Topology II*, ed. by B.S. DeWitt and R. Stora. North-Holland, Amsterdam, 1984. [Параграфы 1.1, 1.2, 1.3.]

15. Schweber S.S. A Short History of Shelter Island I // In: *B. Shelter Island II*, ed. by R. Jackiw, S. Weinberg, and E. Witten. MIT Press, Cambridge, MA, 1985. [Параграф 1.3.]
16. Schweber S.S. QED and the Men Who Made It: Dyson, Feynman, Schwinger, and Tomonaga. Princeton University Press, Princeton, 1994. [Параграфы 1.1, 1.2, 1.3.]
17. Schwinger J. Ed., Selected Papers in Quantum Electrodynamics. Dover Publications Inc., N.Y., 1958. [Параграфы 1.2, 1.3.]
18. Tomonaga S.-I. // In: *The Physicist's Conception of Nature*. Reidel, Dordrecht, 1973. [Параграфы 1.2, 1.3.]
19. Weinberg S. The Search for Unity: Notes for a History of Quantum Field Theory. Daedalus, Fall 1977. [Параграфы 1.1, 1.2, 1.3.]
20. Weisskopf V.F. Growing Up with Field Theory: The Development of Quantum Electrodynamics in Half a Century, 1979. Bernard Gregory Lecture at CERN, published in L. Brown and L. Hoddeson, op. cit. [Параграфы 1.1, 1.2, 1.3.]
21. Wentzel G. Quantum Theory of Fields (Until 1947) // In: *Theoretical Physics in the Twentieth Century*, ed. by M. Fierz and V.F. Weisskopf (Interscience Publishers Inc., N.Y., 1960). [Параграфы 1.2, 1.3.]
22. Whittaker E. A History of the Theories of Aether and Electricity. Humanities Press, N.Y., 1973. [Параграф 1.1.]
- 23\*. Многие из перечисленных выше в разделе “Литература” классических статей (например, 85–88) даны в переводе в сборнике: “Новое развитие квантовой электродинамики” (ред. Д.Д. Иваненко).— М.: Изд-во иностранной литературы, 1954.

---

\* Добавлено при переводе.

## Г л а в а 2

# РЕЛЯТИВИСТСКАЯ КВАНТОВАЯ МЕХАНИКА

В этой книге мы придерживаемся той точки зрения, что квантовая теория поля в существующей форме (с определенными оговорками) является единственной возможностью согласовать квантовую механику со специальной теорией относительности. Поэтому первая задача состоит в том, чтобы понять, каким образом в свойствах квантовых систем проявляются такие симметрии, как лоренц-инвариантность.

### § 2.1. Квантовая механика

Сначала хорошая новость: в основе квантовой теории поля лежит та же самая, придуманная 1925–26 гг. Шредингером, Гейзенбергом, Паули, Борном и другими квантовая механика, которая используется в атомной, молекулярной, ядерной физике и в физике конденсированного состояния. Предполагается, что читатель с ней знаком. Данный параграф содержит очень краткое ее изложение, причем мы будем следовать Дираку [1], немного обобщив его подход.

(i) Физические состояния представляются лучами в гильбертовом пространстве. Гильбертово пространство является разновидностью комплексного векторного пространства: если  $\Psi$  и  $\Phi$  — векторы в этом пространстве (их часто называют “векторами состояний”), тогда для любых комплексных чисел  $\xi$  и  $\eta$  вектор  $\xi\Phi + \eta\Psi$  также принадлежит этому пространству. Векторы нормируются<sup>1)</sup> следующим образом: для любой пары векторов существует комплексное число  $(\Phi, \Psi)$ , такое что

$$(\Phi, \Psi) = (\Psi, \Phi)^*, \quad (2.1.1)$$

$$(\Phi, \xi_1\Psi_1 + \xi_2\Psi_2) = \xi_1(\Phi, \Psi_1) + \xi_2(\Phi, \Psi_2), \quad (2.1.2)$$

$$(\eta_1\Phi_1 + \eta_2\Phi_2, \Psi) = \eta_1^*(\Phi_1, \Psi) + \eta_2^*(\Phi_2, \Psi). \quad (2.1.3)$$

Норма  $(\Phi, \Psi)$  удовлетворяет условию положительной определенности:  $(\Phi, \Psi) \geq 0$ ; она равна нулю тогда и только тогда, когда  $\Psi = 0$  (кроме того, необходимо ввести определенный набор технических предположений, позволяющий выполнять предельные переходы внутри гильбертова пространства). Луч представляет собой набор нормированных векторов (т.е.  $(\Psi, \Psi) = 1$ ) такой, что  $\Psi$  и  $\Psi'$  принадлежат одному

<sup>1)</sup> Мы будем часто использовать бра–кет обозначения Дирака, т.е. вместо  $(\Psi_1, \Psi_2)$  писать  $\langle 1|2\rangle$ .

и тому же лучу, если  $\Psi' = \xi\Psi$ , где  $\xi$  — произвольное комплексное число, подчиняющееся условию  $|\xi| = 1$ .

(ii) Наблюдаемые представляются эрмитовыми операторами. Эти операторы отображают гильбертово пространство в себя  $\Psi \rightarrow A\Psi$  линейно в том смысле, что

$$A(\xi\Psi + \eta\Phi) = \xi A\Psi + \eta A\Phi, \quad (2.1.4)$$

и удовлетворяют условию действительности  $A^\dagger = A$ , где для любого линейного оператора  $A$  сопряженный ему  $A^\dagger$  определяется согласно правилу

$$(\Phi, A^\dagger\Psi) \equiv (A\Phi, \Psi) = (\Psi, A\Phi)^* \quad (2.1.5)$$

(кроме того, необходимо ввести некоторые технические предположения о непрерывности  $A\Psi$  как функции  $\Psi$ ). Состоянию, представленному лучом  $\mathcal{R}$ , соответствует определенное значение  $\alpha$  наблюдаемой, представленной оператором  $A$ , если векторы  $\Psi$ , принадлежащие этому лучу, являются собственными векторами оператора  $A$ , которым соответствует собственное значение  $\alpha$ :

$$A\Psi = \alpha\Psi \quad \text{для } \Psi \in \mathcal{R}. \quad (2.1.6)$$

Согласно теореме линейной алгебры величина  $\alpha$  действительна, если оператор  $A$  — эрмитов, причем собственные векторы, которым соответствуют разные  $\alpha$ , ортогональны друг другу.

(iii) Если система находится в представленном лучом  $\mathcal{R}$  состоянии и мы выполняем некоторый эксперимент (например, измерение значения одной или нескольких наблюдаемых) с целью проверить, не находится ли она в каком-нибудь из состояний, представленных взаимно ортогональными лучами  $\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2, \dots$ , вероятность обнаружить ее в состоянии, представленном лучом  $\mathcal{R}_n$ , равна

$$P(\mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}_n) = |(\Psi, \Psi_n)|^2, \quad (2.1.7)$$

где  $\Psi$  и  $\Psi_n$  — векторы, принадлежащие лучам  $\mathcal{R}$  и  $\mathcal{R}_n$  соответственно (два луча называются ортогональными, если скалярное произведение любого вектора, принадлежащего первому лучу, и любого вектора, принадлежащего второму лучу, равно нулю). Согласно еще одной элементарной теореме полная вероятность равна

$$\sum_n P(\mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}_n) = 1, \quad (2.1.8)$$

если векторы состояний  $\Psi_n$  образуют полный набор.

## § 2.2. Симметрии

Под преобразованием симметрии будем понимать изменение способа наблюдения системы, не меняющее однако результатов возможных экспериментов. Если с точки зрения наблюдателя  $O$  система находится в состоянии, представленном лучом  $\mathcal{R}, \mathcal{R}_1$  или  $\mathcal{R}_2 \dots$ , то с точки

зрения другого наблюдателя  $O'$  она окажется в состоянии, представленном лучом  $\mathcal{R}'$ ,  $\mathcal{R}'_1$  или  $\mathcal{R}'_2$  соответственно, причем оба наблюдателя должны регистрировать одинаковые вероятности

$$P(\mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}_n) = P(\mathcal{R}' \rightarrow \mathcal{R}'_n) \quad (2.2.1)$$

(это условие преобразования лучей является лишь необходимым, остальные условия мы будем обсуждать в следующей главе). Согласно важной теореме, доказанной Вигнером [1] в начале 1930-х годов, для любого такого преобразования лучей  $\mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}'$  можно определить действующий на гильбертовом пространстве оператор  $U$  такой, что если  $\Psi$  принадлежит  $\mathcal{R}$ , то  $U\Psi$  принадлежит  $\mathcal{R}'$ , причем  $U$  является либо *унитарным* и *линейным*,

$$(U\Phi, U\Psi) = (\Phi, \Psi), \quad (2.2.2)$$

$$U(\xi\Phi + \eta\Psi) = \xi U\Phi + \eta U\Psi, \quad (2.2.3)$$

либо *антиунитарным* и *антилинейным*

$$(U\Phi, U\Psi) = (\Phi, \Psi)^*, \quad (2.2.4)$$

$$U(\xi\Phi + \eta\Psi) = \xi^* U\Phi + \eta^* U\Psi. \quad (2.2.5)$$

В доказательстве Вигнера отсутствуют некоторые детали. Более полное доказательство этой теоремы представлено в конце этой главы, в приложении А.

Как уже упоминалось, оператор, сопряженный линейному оператору  $L$ , определяется согласно правилу

$$(\Phi, L^\dagger \Psi) \equiv (L\Phi, \Psi). \quad (2.2.6)$$

Оператор  $L$  не может быть антилинейным, поскольку в противном случае правая часть (2.2.6) линейна по  $\Phi$ , а левая — антилинейна. Будем определять оператор, сопряженный антилинейному оператору  $A$ , согласно правилу

$$(\Phi, A^\dagger \Psi) \equiv (A\Phi, \Psi)^* = (\Psi, A\Phi). \quad (2.2.7)$$

Тогда условия унитарности или антиунитарности приобретают следующий вид:

$$U^\dagger = U^{-1}. \quad (2.2.8)$$

Всегда существует тривиальное преобразование симметрии  $\mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}$ , представленное тождественным оператором  $U = 1$ , являющимся, конечно, унитарным и линейным. Тогда из условия непрерывности следует, что любая симметрия (аналогичная повороту, трансляции или преобразованиям Лоренца), которую можно привести к тривиальной непрерывным изменением некоторых параметров (например, углов, расстояний или скорости), должна быть представлена линейным унитарным оператором  $U$  (симметрии, представленные антиунитарным и антилинейным оператором, встречаются реже; все они включают изменение направления времени, см. §2.6).

В частности, преобразования симметрии, бесконечно близкие к тривиальному, могут быть представлены линейным унитарным оператором, бесконечно близким к тождественному:

$$U = 1 + i\epsilon t, \quad (2.2.9)$$

где  $\epsilon$  — вещественная бесконечно малая величина. Для того чтобы  $U$  был унитарным и линейным, оператор  $t$  должен быть эрмитовым и линейным. Следовательно, оператору  $t$  может соответствовать наблюдаемая величина. Действительно, большинство наблюдаемых величин в физике (а, быть может, и все), например угловой момент или импульс, возникают как раз таким образом из преобразований симметрии.

Набор преобразований симметрии имеет определенные свойства, определяющие его как *группу*. Если преобразование  $T_1$  переводит луч  $\mathcal{R}_n$  в  $\mathcal{R}'_n$ , а другое преобразование  $T_2$  —  $\mathcal{R}'_n$  в  $\mathcal{R}''_n$ , то результат последовательного применения двух этих преобразований представляет собой третье преобразование симметрии, обозначаемое  $T_2 T_1$ , которое переводит  $\mathcal{R}'_n$  в  $\mathcal{R}''_n$ . Кроме того, для преобразования симметрии, переводящего  $\mathcal{R}_n$  в  $\mathcal{R}'_n$ , существует обратное, обозначаемое как  $T^{-1}$ , которое переводит  $\mathcal{R}'_n$  в  $\mathcal{R}_n$ . Так же существует единичное преобразование  $T = 1$ , переводящее любой луч в самого себя.

Унитарные и антиунитарные операторы  $U(T)$ , соответствующие этим преобразованиям симметрии, обладают свойствами, отражающими структуру группы. Однако существует дополнительная сложность, обусловленная тем, что в отличие от самих преобразований симметрии операторы  $U(T)$  действуют на векторы в гильбертовом пространстве, а не на лучи. Поэтому, если преобразование  $T_1$  переводит  $\mathcal{R}_n$  в  $\mathcal{R}'_n$ , то в результате действия оператора  $U(T_1)$  на вектор  $\Psi_n$ , принадлежащий лучу  $\mathcal{R}_n$ , должен получиться вектор  $U(T_1)\Psi_n$ , принадлежащий лучу  $\mathcal{R}'_n$ , и если  $T_2$  переводит этот луч в  $\mathcal{R}''_n$ , то при действии на  $U(T_1)\Psi_n$  должен получиться вектор  $U(T_2)U(T_1)\Psi_n$ , принадлежащий лучу  $\mathcal{R}''_n$ . Но  $U(T_2T_1)\Psi_n$  принадлежит тому же лучу, и эти векторы могут отличаться только фазовым множителем  $\phi_n(T_2, T_1)$

$$U(T_2)U(T_1)\Psi_n = e^{i\phi_n(T_2, T_1)}U(T_2T_1)\Psi_n. \quad (2.2.10)$$

Более того, за исключением одного важного случая, линейность (или антилинейность)  $U(T)$  гарантирует, что эти фазы не зависят от состояния  $\Psi_n$ . Чтобы доказать это, рассмотрим два вектора  $\Psi_A, \Psi_B$ , не являющиеся пропорциональными друг другу. Тогда, применяя уравнение (2.2.10) к состоянию  $\Psi_{AB} \equiv \Psi_A + \Psi_B$ , получим

$$\begin{aligned} e^{i\phi_{AB}}U(T_2T_1)(\Psi_A + \Psi_B) &= U(T_2)U(T_1)(\Psi_A + \Psi_B) = \\ &= U(T_2)U(T_1)\Psi_A + U(T_2)U(T_1)\Psi_B = \\ &= e^{i\phi_A}U(T_2T_1)\Psi_A + e^{i\phi_B}U(T_2T_1)\Psi_B. \end{aligned} \quad (2.2.11)$$

Для любого унитарного или антиунитарного оператора существует

обратный (сопряженный ему), который также является унитарным или антиунитарным. Умножая (2.2.11) на  $U^{-1}(T_2 T_1)$  слева, имеем

$$e^{\pm i\phi_{AB}}(\Psi_A + \Psi_B) = e^{\pm i\phi_A} \Psi_A + e^{\pm i\phi_B} \Psi_B, \quad (2.2.12)$$

знак плюс или минус в экспоненте соответствуют унитарному или антиунитарному оператору  $U(T_2 T_1)$ . Поскольку  $\Psi_A$  и  $\Psi_B$  линейно независимы, это возможно только если

$$e^{i\phi_{AB}} = e^{i\phi_A} = e^{i\phi_B}. \quad (2.2.13)$$

Таким образом, как уже говорилось, фазовый множитель в уравнении (2.2.10) не зависит от вектора состояния  $\Psi_n$ , и поэтому это уравнение можно писать в виде операторного соотношения

$$U(T_2)U(T_1) = e^{i\phi(T_2, T_1)} U(T_2 T_1). \quad (2.2.14)$$

В случае  $\phi = 0$  это означает, что  $U(T)$  является представлением группы преобразования симметрии. Если фаза  $\phi(T_2, T_1)$  произвольна, мы получаем то, что в математике называется проективным представлением или представлением “с точностью до фазы”. Для получения ответа на вопрос, является ли пространство физических векторов состояний обычным или проективным представлением, информации о структуре алгебры Ли недостаточно. Тем не менее, как мы увидим, она дает возможность определить, имеет ли данная группа какие-либо существенно проективные представления вообще.

На самом деле может оказаться невозможным приготовить систему в состоянии, соответствующем  $\Psi_A + \Psi_B$ . Например, общеизвестно, что нельзя создать суперпозицию двух состояний с целым и полуцелым полными угловыми моментами. В таких случаях будем говорить, что существует “правило супертбора” между различными классами состояний [3] и фазы  $\phi(T_2, T_1)$  могут зависеть от того, на каком классе состояний действуют операторы  $U(T_2)U(T_1)$  и  $U(T_2, T_1)$ . Мы рассмотрим более подробно возможность появления таких фаз и проективных представлений в § 2.7. Как будет показано, любую группу симметрии, обладающую проективными представлениями, всегда можно расширить (не меняя, тем не менее, соответствующих физических следствий симметрии) так, что все ее представления окажутся непроективными, с  $\phi = 0$ . Пока просто будем предполагать, что такое расширение выполнено, и считать, что  $\phi = 0$  в уравнении (2.2.14).

Существует класс групп, получивший название *связных групп Ли*, который представляет для физики особенный интерес. По определению связной называется группа преобразований  $T(\theta)$ , задающихся конечным набором непрерывных вещественных параметров, например  $\theta^a$ , так, что любой элемент группы можно соединить с единичным элементом путем, целиком лежащим внутри данной группы. Групповой закон умножения тогда принимает вид

$$T(\bar{\theta})T(\theta) = T(f(\bar{\theta}, \theta)), \quad (2.2.15)$$

где  $f^a(\bar{\theta}, \theta)$  — функция от  $\bar{\theta}$  и  $\theta$ . Если принять значение  $\theta^a = 0$  как координаты единичного элемента группы, то должно быть выполнено условие

$$f^a(\theta, 0) = f^a(0, \theta) = \theta^a. \quad (2.2.16)$$

Как уже упоминалось, принадлежащие таким непрерывным группам преобразования должны быть представлены в физическом гильбертовом пространстве унитарными (а не антиунитарными) операторами  $U(T(\theta))$ . Для группы Ли эти операторы можно представить (по крайней мере, в некоторой окрестности единичного элемента) в виде следующего ряда:

$$U(T(\theta)) = 1 + i\theta^a t_a + \frac{1}{2} \theta^b \theta_c t_{bc} + \dots, \quad (2.2.17)$$

где  $t_a$ ,  $t_{bc} = t_{cb}$  и т.д. — операторы, не зависящие от  $\theta_s$ , а  $t_a$  — эрмитовы. Предположим, что  $U(T(\theta))$  образуют обычное (т.е. непроективное) представление такой группы преобразований:

$$U(T(\bar{\theta}))U(T(\theta)) = U(T(f(\bar{\theta}, \theta))). \quad (2.2.18)$$

Поймем, как это условие будет выглядеть после разложения по степеням  $\theta^a$  и  $\bar{\theta}^a$ . Согласно (2.2.16), во втором порядке выражение для  $f^a(\bar{\theta}, \theta)$  должно иметь вид

$$f^a(\bar{\theta}, \theta) = \theta^a + \bar{\theta}^a + f^a{}_{bc} \bar{\theta}^b \theta_c + \dots, \quad (2.2.19)$$

где  $f^a{}_{bc}$  — действительные коэффициенты (наличие любых слагаемых, пропорциональных  $\theta^2$  или  $\bar{\theta}^2$ , привело бы к нарушению (2.2.16)). В результате уравнение (2.2.18) приобретает вид

$$\begin{aligned} & \left[ 1 + i\bar{\theta}^a t_a + \frac{1}{2} \bar{\theta}^b \bar{\theta}_c t_{bc} + \dots \right] \times \left[ 1 + i\theta^a t_a + \frac{1}{2} \theta^b \theta_c t_{bc} + \dots \right] = \\ & = 1 + i(\theta^a + \bar{\theta}^a + f^a{}_{bc} \bar{\theta}^b \theta_c + \dots) t_a + \\ & + \frac{1}{2} (\theta^b + \bar{\theta}^b + \dots) (\theta^c + \bar{\theta}^c + \dots) t_{bc} + \dots \end{aligned} \quad (2.2.20)$$

Члены порядка 1,  $\theta$ ,  $\bar{\theta}$ ,  $\theta^2$  и  $\bar{\theta}^2$  в правой и левой частях уравнения (2.2.20) автоматически совпадают, а благодаря существованию членов, пропорциональных  $\bar{\theta}\theta$ , возникает нетривиальное условие

$$t_{bc} = -t_b t_c - i f^a{}_{bc} t_a. \quad (2.2.21)$$

Из этого соотношения следует, что если задана структура группы, т.е. функция  $f(\theta, \bar{\theta})$ , и тем самым заданы ее квадратичные коэффициенты  $f^a{}_{bc}$ , то в  $U(T(\theta))$ , используя генераторы  $t_a$ , присутствующие в слагаемых первого порядка, можно вычислить слагаемые второго порядка. Существует однако условие согласования: оператор  $t_{bc}$  должен быть *симметричен* по  $b$  и  $c$  (поскольку он является второй производной  $U(T(\theta))$  по  $\theta^b$  и  $\theta^c$ ), поэтому для выполнения уравнения (2.2.21)

необходимо, чтобы

$$[t_b, t_c] = iC^a{}_{bc}t_a, \quad (2.2.22)$$

где  $C^a{}_{bc}$  — набор действительных констант, получивших название *структурных констант*

$$C^a{}_{bc} \equiv -f^a{}_{bc} + f^a{}_{cb}. \quad (2.2.23)$$

Такой набор коммутационных соотношений называют *алгеброй Ли*. В § 2.7 будет показано, что коммутационные соотношения (2.2.22) являются единственным условием, гарантирующим, что процесс рекуррентного восстановления следующих членов разложения по предыдущим может быть продолжен: из бесконечной последовательности соотношений типа (2.2.21) можно получить весь ряд  $U(T(\theta))$ , если известны члены первого порядка — генераторы  $t_a$ . Это не обязательно означает, что операторы  $U(T(\theta))$  однозначно определяются для любых  $\theta^a$ , если известны  $t_a$ . Однако  $U(T(\theta))$  в самом деле определяются однозначно по крайней мере в малой окрестности единичного элемента  $\theta^a = 0$ , так что уравнение (2.2.15) справедливо, если  $\theta$ ,  $\bar{\theta}$  и  $f(\theta, \bar{\theta})$  принадлежат этой окрестности. В § 2.7 мы выясним, каким образом можно ослабить условие локальности относительно аргумента  $\theta^a$ .

Довольно важным является следующий случай, с которым нам не раз придется сталкиваться в дальнейшем: предположим, что функция  $f(\theta, \bar{\theta})$  (возможно, только на некотором подмножестве всех  $\theta^a$ ) представляет собой просто сумму

$$f^a(\theta, \bar{\theta}) = \theta^a + \bar{\theta}^a. \quad (2.2.24)$$

Это имеет место, например, для трансляций в пространстве–времени или поворотов вокруг любой фиксированной оси (но *не* комбинаций этих двух типов преобразований). В этом случае коэффициенты  $f^a{}_{bc}$  и структурные константы (2.2.23) обращаются в нуль. Тогда все генераторы коммутируют друг с другом:

$$[t_b, t_c] = 0. \quad (2.2.25)$$

Такая группа называется *абелевой*, и для нее несложно вычислить  $U(T(\theta))$  при произвольных  $\theta^a$ . Из уравнений (2.2.18) и (2.2.24) для любого целого  $N$  имеем

$$U(T(\theta)) = \left[ U\left(T\left(\frac{\theta}{N}\right)\right) \right]^N.$$

Устремляя  $N \rightarrow \infty$  и оставляя в  $U(T(\theta/N))$  члены первого порядка малости, получаем

$$U(T(\theta)) = \lim_{N \rightarrow \infty} \left[ 1 + \frac{i}{N} \theta^a t_a \right]^N$$

и, следовательно,

$$U(T(\theta)) = \exp(it_a \theta^a). \quad (2.2.26)$$

### § 2.3. Квантовые преобразования Лоренца

Согласно принципу относительности Эйнштейна “инерциальные” системы отсчета физически эквивалентны друг другу. Эйнштейновский принцип отличается от галилеевского, справедливого в рамках ньютонаской механики, благодаря преобразованиям, связывающим координаты в различных инерциальных системах отсчета. Если  $x^\mu$  — координаты в одной инерциальной системе отсчета ( $x^1, x^2, x^3$  — пространственные декартовы координаты, а  $x^0 = t$  — временная координата, скорость света будем считать равной единице), тогда в любой другой инерциальной системе отсчета координаты  $x'^\mu$  должны удовлетворять условию

$$\eta_{\mu\nu} dx'^\mu dx'^\nu = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu, \quad (2.3.1)$$

или, что эквивалентно,

$$\eta_{\mu\nu} \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\rho} \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\sigma} = \eta_{\rho\sigma}. \quad (2.3.2)$$

Здесь  $\eta_{\mu\nu}$  — диагональная матрица с элементами

$$\eta_{11} = \eta_{22} = \eta_{33} = +1, \quad \eta_{00} = -1, \quad (2.3.3)$$

причем имеет место следующее правило суммирования: будем суммировать по всем индексам (таким, как  $\mu$  и  $\nu$  в (2.3.2)), встречающимся в одном и том же слагаемом дважды — как верхний индекс и как нижний. Эти преобразования обладают особым свойством: для всех инерциальных систем отсчета скорость света одинакова (и равна единице)<sup>1)</sup>. Световая волна, движущаяся с единичной скоростью, удовлетворяет условию  $|dx/dt| = 1$  или, что эквивалентно,  $\eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = dx^2 - dt^2$ , откуда следует, что  $\eta_{\mu\nu} dx'^\mu dx'^\nu = 0$ , и, следовательно,  $|dx'/dt'| = 1$ .

Любое координатное преобразование  $x^\mu \rightarrow x'^\mu$ , удовлетворяющее условию (2.3.2), является *линейным* [3а]

$$x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu + a^\mu, \quad (2.3.4)$$

где  $a^\mu$  — произвольные константы, а  $\Lambda^\mu{}_\nu$  — постоянная матрица, удовлетворяющая условиям

$$\eta_{\mu\nu} \Lambda^\mu{}_\rho \Lambda^\nu{}_\sigma = \eta_{\rho\sigma}. \quad (2.3.5)$$

<sup>1)</sup> Существует более широкий класс координатных преобразований, которые называются *конформными преобразованиями*. Для них квадрат элемента длины  $\eta_{\mu\nu} dx'_\mu dx'_\nu$  пропорционален, (хотя, вообще говоря, не равен)  $\eta_{\mu\nu} dx_\mu dx_\nu$ , поэтому они также оставляют скорость света инвариантной. Конформная инвариантность в двух измерениях имеет огромное значение в теории струн и статистической механике, однако физическая уместность таких преобразований в четырех пространственно-временных измерениях не выяснена до сих пор.

Иногда оказывается полезным переписать условия, которым подчиняются преобразования Лоренца, в другом виде. Для матрицы  $\eta_{\mu\nu}$  существует обратная матрица, которая обозначается  $\eta^{\mu\nu}$ . Она совершенно случайно имеет такие же компоненты, т.е. является диагональной, причем  $\eta^{00} = -1$ ,  $\eta^{11} = \eta^{22} = \eta^{33} = +1$ . Умножая уравнение (2.3.5) на  $\eta^{\sigma\tau}\Lambda^\kappa_\tau$ , получаем

$$\eta_{\mu\nu}\Lambda^\mu_\rho(\Lambda^\nu_\sigma\Lambda^\kappa_\tau\eta^{\sigma\tau}) = \Lambda^\kappa_\rho = \eta_{\mu\nu}\eta^{\nu\kappa}\Lambda^\mu_\rho.$$

После умножения на матрицу, обратную к  $\eta_{\mu\nu}\Lambda^\mu_\rho$ , имеем

$$\Lambda^\nu_\sigma\Lambda^\kappa_\tau\eta^{\sigma\tau} = \eta^{\nu\kappa}. \quad (2.3.6)$$

Эти преобразования образуют группу. Если сначала совершиТЬ преобразование Лоренца (2.3.4), а затем — преобразование  $x'^\mu \rightarrow x''^\mu$ , где

$$x''^\mu = \bar{\Lambda}^\mu_\rho x'^\rho + \bar{a}^\mu = \bar{\Lambda}^\mu_\rho(\Lambda^\rho_\nu x^\nu + a^\rho) + \bar{a}^\mu,$$

результат будет таким же, какой дает преобразование Лоренца  $x^\mu \rightarrow x''^\mu$ , где

$$x''^\mu = (\bar{\Lambda}^\mu_\rho\Lambda^\rho_\nu)x^\nu + (\bar{\Lambda}^\mu_\rho a^\rho + \bar{a}^\mu) \quad (2.3.7)$$

(заметим, что если  $\Lambda^\mu_\nu$  и  $\bar{\Lambda}^\mu_\nu$  удовлетворяют соотношению (2.3.5), то  $\bar{\Lambda}^\mu_\rho\Lambda^\rho_\nu$  также удовлетворяют этому соотношению и поэтому являются преобразованиями Лоренца; черту мы используем здесь только для того, чтобы отличать одно преобразование Лоренца от другого). Следовательно, действующее на физические состояния преобразование  $T(\Lambda, a)$  удовлетворяет закону композиции

$$T(\bar{\Lambda}, \bar{a})T(\Lambda, a) = T(\bar{\Lambda}\Lambda, \bar{a} + \bar{a}). \quad (2.3.8)$$

Взяв детерминант от (2.3.5), получаем

$$(\text{Det } \Lambda)^2 = 1, \quad (2.3.9)$$

поэтому для  $\Lambda^\mu_\nu$  существует обратная матрица  $(\Lambda^{-1})^\nu_\rho$ , которая, как мы видим из (2.3.5), имеет вид

$$(\Lambda^{-1})^\rho_\nu = \Lambda_\nu^\rho \equiv \eta_{\nu\mu}\eta^{\rho\sigma}\Lambda^\mu_\sigma. \quad (2.3.10)$$

Обратным к  $T(\Lambda, a)$  преобразованием, согласно (2.3.8), будет

$$T(\Lambda^{-1}, -\Lambda^{-1}a),$$

а единичным преобразованием является  $T(1, 0)$ .

В соответствии с предыдущим параграфом, преобразование

$$T(\Lambda, a)$$

индуцирует некоторое унитарное линейное преобразование, действующее на векторы в физическом гильбертовом пространстве

$$\Psi \rightarrow U(\Lambda, a)\Psi.$$

Операторы  $U$  удовлетворяют правилу композиции

$$U(\bar{\Lambda}, \bar{a})U(\Lambda, a) = U(\bar{\Lambda}\Lambda, \bar{\Lambda}a + \bar{a}). \quad (2.3.11)$$

(как уже упоминалось, для того чтобы избежать появления фазового множителя в левой части уравнения (2.3.11), необходимо, вообще говоря, расширить группу Лоренца; как это сделать, будет обсуждаться в § 2.7).

Полная группа преобразований  $T(\Lambda, a)$  называется *неоднородной группой Лоренца* или *группой Пуанкаре*. Она имеет ряд важных подгрупп. Во-первых, это преобразования с  $\Lambda^\mu = 0$ , образующие, очевидно, подгруппу с

$$T(\bar{\Lambda}, 0)T(\Lambda, 0) = T(\bar{\Lambda}\Lambda, 0), \quad (2.3.12)$$

которую называют *однородной группой Лоренца*. Из (2.3.9) следует, что либо  $\text{Det } \Lambda = +1$ , либо  $\text{Det } \Lambda = -1$ ; преобразования с  $\text{Det } \Lambda = +1$  также, очевидно, образуют подгруппу однородной и неоднородной групп Лоренца. Далее, воспользовавшись 00-компонентами уравнений (2.3.5) и (2.3.6), имеем

$$(\Lambda^0{}_0)^2 = 1 + \Lambda^i{}_0 \Lambda^i{}_0 = 1 + \Lambda^0{}_i \Lambda^0{}_i. \quad (2.3.13)$$

Здесь по  $i$ , пробегающему значения 1, 2 и 3, ведется суммирование. Мы видим, что или  $\Lambda^0{}_0 \geq +1$ , или  $\Lambda^0{}_0 \leq -1$ . Преобразования с  $\Lambda^0{}_0 \geq +1$  образуют подгруппу. Заметим, что если  $\Lambda^\mu{}_\nu$  и  $\bar{\Lambda}^\mu{}_\nu$  — два таких преобразования, то

$$(\bar{\Lambda}\Lambda)^0{}_0 = \bar{\Lambda}^0{}_0 \Lambda^0{}_0 + \bar{\Lambda}^0{}_1 \Lambda^1{}_0 + \bar{\Lambda}^0{}_2 \Lambda^2{}_0 + \bar{\Lambda}^0{}_3 \Lambda^3{}_0.$$

Но из (2.3.13) следует, что 3-вектор  $(\Lambda^1{}_0, \Lambda^2{}_0, \Lambda^3{}_0)$  имеет длину

$$\sqrt{(\Lambda^0{}_0)^2 - 1}.$$

Аналогично, 3-вектор  $(\bar{\Lambda}^1{}_0, \bar{\Lambda}^2{}_0, \bar{\Lambda}^3{}_0)$  имеет длину

$$\sqrt{(\bar{\Lambda}^0{}_0)^2 - 1}.$$

Поэтому скалярное произведение этих двух векторов ограничено сверху величиной

$$|\bar{\Lambda}^0{}_1 \Lambda^1{}_0 + \bar{\Lambda}^0{}_2 \Lambda^2{}_0 + \bar{\Lambda}^0{}_3 \Lambda^3{}_0| \leq \sqrt{(\Lambda^0{}_0)^2 - 1} \sqrt{(\bar{\Lambda}^0{}_0)^2 - 1} \quad (2.3.14)$$

и, следовательно,

$$(\bar{\Lambda}\Lambda)^0{}_0 \geq \bar{\Lambda}^0{}_0 \Lambda^0{}_0 - \sqrt{(\Lambda^0{}_0)^2 - 1} \sqrt{(\bar{\Lambda}^0{}_0)^2 - 1} \geq 1.$$

Подгруппу группы Лоренца с  $\text{Det } \Lambda = +1$  и  $\Lambda^0{}_0 \geq +1$  называют *собственной ортохронной группой Лоренца*. Поскольку невозможно, непрерывно изменяя параметры, перескочить от элемента с  $\text{Det } \Lambda = +1$  к элементу с  $\text{Det } \Lambda = -1$  или от элемента с  $\Lambda^0{}_0 \geq +1$  к элементу

с  $\Lambda^0_0 \leq -1$ , то любое преобразование Лоренца, которое может быть получено из тождественного непрерывным изменением параметров, должно иметь  $\text{Det } \Lambda$  и  $\Lambda^0_0$  того же знака, что и тождественное, и, следовательно, должно принадлежать собственной ортохронной группе Лоренца.

Любое лоренцево преобразование является либо собственным и ортохронным, либо может быть записано как произведение элемента собственной ортохронной группы Лоренца на одно из дискретных преобразований  $\mathcal{P}$ ,  $\mathcal{T}$  или  $\mathcal{PT}$ , где  $\mathcal{P}$  — оператор пространственной инверсии, отличные от нуля матричные элементы которого равны

$$\mathcal{P}^0_0 = 1, \quad \mathcal{P}^1_1 = \mathcal{P}^2_2 = \mathcal{P}^3_3 = -1, \quad (2.3.15)$$

а  $\mathcal{T}$  — оператор обращения времени, отличные от нуля матричные элементы которого равны

$$\mathcal{T}^0_0 = -1, \quad \mathcal{T}^1_1 = \mathcal{T}^2_2 = \mathcal{T}^3_3 = +1. \quad (2.3.16)$$

Таким образом, изучение полной группы Лоренца сводится к изучению ее собственной ортохронной подгруппы и свойств пространственной инверсии и обращения времени. В § 2.6 мы отдельно рассмотрим пространственную инверсию и обращение времени, а до тех пор будем иметь дело только с однородной или неоднородной собственными ортохронными группами Лоренца.

## § 2.4. Алгебра Пуанкаре

Как было показано в § 2.2, большое количество информации о любой группе симметрии Ли содержится в свойствах ее элементов, близких к тождественному. Для неоднородной группы Лоренца тождественным является преобразование  $\Lambda^\mu_\nu = \delta^\mu_\nu$ ,  $a^\mu = 0$ . Будем поэтому изучать преобразования вида

$$\Lambda^\mu_\nu = \delta^\mu_\nu + \omega^\mu_\nu, \quad a^\mu = \epsilon^\mu, \quad (2.4.1)$$

где  $\omega^\mu_\nu$  и  $\epsilon^\mu$  — бесконечно малые (инфinitезимальные) параметры. Условие Лоренца (2.3.5) для этих преобразований имеет вид

$$\eta_{\rho\sigma} = \eta_{\mu\nu}(\delta^\mu_\rho + \omega^\mu_\rho)(\delta^\nu_\sigma + \omega^\nu_\sigma) = \eta_{\sigma\rho} + \omega_{\sigma\rho} + \omega_{\rho\sigma} + O(\omega^2).$$

Здесь мы использовали общее правило, состоящее в том, что индексы можно опускать или поднимать с помощью умножения на  $\eta_{\mu\nu}$  или  $\eta^{\mu\nu}$ .

$$\begin{aligned} \omega_{\sigma\rho} &\equiv \eta_{\mu\sigma}\omega^\mu_\rho, \\ \omega^\mu_\rho &\equiv \eta^{\mu\sigma}\omega_{\sigma\rho}. \end{aligned}$$

Оставляя в условии Лоренца (2.3.5) слагаемые только первого порядка по  $\omega$ , легко видеть, что из этого условия следует антисимметричность  $\omega_{\mu\nu}$ :

$$\omega_{\mu\nu} = -\omega_{\nu\mu} \quad (2.4.2)$$

Антисимметричный тензор второго ранга в четырех измерениях имеет  $(4 \times 3/2) = 6$  независимых компонент, поэтому с учетом четырех компонент  $\epsilon^\mu$  неоднородные преобразования Лоренца описываются  $6 + 4 = 10$  параметрами.

Поскольку оператор  $U(1, 0)$  переводит любой луч в себя, он должен быть пропорционален единичному оператору<sup>1)</sup> и соответствующим выбором фазы может быть к нему приведен. Тогда для инфинитезимального преобразования Лоренца (2.4.1) оператор  $U(1 + \omega, \epsilon)$  должен равняться 1 плюс слагаемые, линейные по  $\omega_{\mu\nu}$  и  $\epsilon_\rho$ . Перепишем это в виде

$$U(1 + \omega, \epsilon) = 1 + \frac{1}{2} i\omega_{\rho\sigma} J^{\rho\sigma} - i\epsilon_\rho P^\rho + \dots \quad (2.4.3)$$

Здесь  $J^{\rho\sigma}$  и  $P^\rho$  — операторы, не зависящие от  $\omega$  и  $\rho$ , а многоточие обозначает слагаемые более высокого порядка по  $\omega$  и/или  $\epsilon$ . Для того чтобы оператор  $U(1 + \omega, \epsilon)$  был унитарным, операторы  $J^{\rho\sigma}$  и  $P^\rho$  обязаны быть эрмитовыми:

$$J^{\rho\sigma\dagger} = J^{\rho\sigma}, \quad P^{\rho\dagger} = P^\rho. \quad (2.4.4)$$

Поскольку матрица  $\omega_{\rho\sigma}$  антисимметрична, коэффициент  $J^{\rho\sigma}$  также можно считать антисимметричным

$$J^{\rho\sigma} = -J^{\sigma\rho}. \quad (2.4.5)$$

Как мы увидим,  $P^1$ ,  $P^2$  и  $P^3$  являются компонентами оператора импульса,  $J^{23}$ ,  $J^{31}$  и  $J^{12}$  — компонентами вектора углового момента, а  $P^0$  — оператором энергии или *гамильтонианом*<sup>2)</sup>.

Исследуем теперь трансформационные свойства  $J^{\rho\sigma}$  и  $P^\rho$  по отношению к преобразованиям Лоренца. Рассмотрим произведение

$$U(\Lambda, a)U(1 + \omega, \epsilon)U^{-1}(\Lambda, a),$$

где  $\Lambda^\mu{}_\nu$  и  $a^\mu$  — параметры некоторого нового преобразования, не свя-

<sup>1)</sup> В отсутствие правил суперотбора от возможной зависимости коэффициента пропорциональности от состояния, на которое действует оператор  $U(1, 0)$ , можно избавиться при помощи тех же рассуждений, которыми мы пользовались в § 2.2, чтобы исключить зависимость фаз в проективных представлениях групп симметрии от состояний, на которые эти симметрии действуют. При наличии правил суперотбора может оказаться необходимым переопределить  $U(1, 0)$  за счет фазового множителя, зависящего от сектора, на котором  $U(1, 0)$  действует.

<sup>2)</sup> Как будет показано, подобное отождествление генераторов с операторами углового момента сделано вследствие коммутационных соотношений для  $J^{\mu\nu}$ . С другой стороны, посредством только коммутационных соотношений нельзя отличить  $P^\mu$  от  $-P^\mu$ , поэтому выбор знака перед  $\epsilon_\rho P_\rho$  в (2.4.3) является вопросом соглашения. В § 3.1 будет показано, что выбор знака в (2.4.3) совместим с обычным определением гамильтониана  $P^0$ .

занные с  $\omega$  и  $\epsilon$ . Согласно уравнению (2.3.11) произведение

$$U(\Lambda^{-1}, -\Lambda^{-1}a)U(\Lambda, a)$$

равно  $U(1, 0)$ , поэтому оператор  $U(\Lambda^{-1}, -\Lambda^{-1}a)$  является обратным к  $U(\Lambda, a)$ . Тогда из уравнения (2.3.11) следует, что

$$U(\Lambda, a)U(1 + \omega, \epsilon)U^{-1}(\Lambda, a) = U(\Lambda(1 + \omega)\Lambda^{-1}, \Lambda\epsilon - \Lambda\omega\Lambda^{-1}a). \quad (2.4.6)$$

В первом порядке по  $\omega$  и  $\epsilon$  имеем

$$\begin{aligned} U(\Lambda, a) & \left[ \frac{1}{2} \omega_{\rho\sigma} J^{\rho\sigma} - \epsilon_\rho P^\rho \right] U^{-1}(\Lambda, a) = \\ & = \frac{1}{2} (\Lambda\omega\Lambda^{-1})_{\mu\nu} J^{\mu\nu} - (\Lambda\epsilon - \Lambda\omega\Lambda^{-1}a)_\mu P^\mu. \end{aligned} \quad (2.4.7)$$

Приравнивая коэффициенты при  $\omega_{\rho\sigma}$  и  $\epsilon_\rho$  в обеих частях уравнения (и используя (2.3.10)), находим, что

$$U(\Lambda, a)J^{\rho\sigma}U^{-1}(\Lambda, a) = \Lambda_\mu{}^\rho \Lambda_\nu{}^\sigma (J^{\mu\nu} - a^\mu P^\mu + a^\nu P^\nu), \quad (2.4.8)$$

$$U(\Lambda, a)P^\rho U^{-1}(\Lambda, a) = \Lambda_\mu{}^\rho P^\mu. \quad (2.4.9)$$

В случае однородных преобразований Лоренца (с  $a^\mu = 0$ ) из этих соотношений просто следует, что  $J^{\mu\nu}$  является тензором, а  $P^\mu$  — вектором. В случае чистых трансляций (для которых  $\Lambda^\mu{}_\nu = \delta^\mu{}_\nu$ ) получаем, что  $P^\rho$  является трансляционно-инвариантным, а  $J^{\rho\sigma}$  — нет. В частности, изменение пространственно-пространственных компонент  $J^{\rho\sigma}$  под действием пространственных сдвигов представляет собой обычновенное изменение углового момента при смещении точки, по отношению к которой он вычисляется.

Применим теперь соотношения (2.4.8) и (2.4.9) к преобразованиям, которые сами по себе являются малыми, т.е.  $\Lambda^\mu{}_\nu = \delta^\mu{}_\nu + \omega^\mu{}_\nu$  и  $a^\mu = \epsilon^\mu$  с инфинитезимальными  $\omega^\mu{}_\nu$  и  $\epsilon^\mu$ , не связанными с предыдущими  $\omega$  и  $\epsilon$ . Используя уравнение (2.4.3) и удерживая слагаемые только первого порядка по  $\omega^\mu{}_\nu$  и  $\epsilon^\mu$ , приводим уравнения (2.4.8) и (2.4.9) к виду

$$i \left[ \frac{1}{2} \omega_{\mu\nu} J^{\mu\nu} - \epsilon_\mu P^\mu, J^{\rho\sigma} \right] = \omega_\mu{}^\rho J^{\mu\nu} - \omega_\nu{}^\rho J^{\rho\nu} - \epsilon^\rho P^\sigma + \epsilon^\sigma P^\rho, \quad (2.4.10)$$

$$i \left[ \frac{1}{2} \omega_{\mu\nu} J^{\mu\nu} - \epsilon_\mu P^\mu, P^\rho \right] = \omega_\mu{}^\rho P^\mu. \quad (2.4.11)$$

Приравнивая коэффициенты при  $\omega_{\mu\nu}$  и  $\epsilon_\mu$  в обеих частях уравнений, получаем следующие коммутационные соотношения

$$i[J^{\mu\nu}, J^{\rho\sigma}] = \eta^{\nu\rho} J^{\mu\sigma} - \eta^{\mu\rho} J^{\nu\sigma} - \eta^{\sigma\mu} J^{\rho\nu} + \eta^{\sigma\nu} J^{\rho\mu}, \quad (2.4.12)$$

$$i[P^\mu, J^{\rho\sigma}] = \eta^{\mu\rho} P^\sigma - \eta^{\mu\sigma} P^\rho, \quad (2.4.13)$$

$$[P^\mu, P^\rho] = 0. \quad (2.4.14)$$

Мы построили алгебру Ли группы Пуанкаре.

В квантовой механике особую роль играют сохраняющиеся операторы, т.е. операторы, коммутирующие с оператором энергии  $H = P^0$ . Рассматривая уравнения (2.4.13) и (2.4.14) можно понять, что таковыми являются 3-вектор импульса

$$\mathbf{P} = \{P^1, P^2, P^3\}, \quad (2.4.15)$$

3-вектор углового момента

$$\mathbf{J} = \{J^{23}, J^{31}, J^{12}\} \quad (2.4.16)$$

и, конечно, энергия  $P^0$ . Остальные генераторы образуют так называемый 3-вектор “буста”:

$$\mathbf{K} = \{J^{01}, J^{02}, J^{03}\}. \quad (2.4.17)$$

Они не соответствуют сохраняющейся величине, поэтому мы не используем собственные значения  $\mathbf{K}$  для обозначения физических состояний. В трехмерных обозначениях коммутационные соотношения (2.4.12), (2.4.13) и (2.4.12) могут быть записаны в виде

$$[J_i, J_j] = i\epsilon_{ijk} J_k, \quad (2.4.18)$$

$$[J_i, K_j] = i\epsilon_{ijk} K_k, \quad (2.4.19)$$

$$[K_i, K_j] = -i\epsilon_{ijk} J_k, \quad (2.4.20)$$

$$[J_i, P_j] = i\epsilon_{ijk} P_k, \quad (2.4.21)$$

$$[K_i, P_j] = -iH\delta_{ij}, \quad (2.4.22)$$

$$[J_i, H] = [P_i, H] = [H, H] = 0, \quad (2.4.23)$$

$$[K_i, H] = -iP_i, \quad (2.4.24)$$

где  $i, j$  и  $k$  — индексы, пробегающие значения 1, 2 и 3, а  $\epsilon_{ijk}$  — полностью антисимметричная величина такая, что  $\epsilon_{123} = +1$ . Как легко видеть, коммутационные соотношения (2.4.18) абсолютно аналогичны коммутационным соотношениям для оператора углового момента.

Чистые трансляции  $T(1, a)$  образуют подгруппу неоднородной группы Лоренца с групповым умножением, заданным (2.3.8):

$$T(1, \bar{a})T(1, a) = T(1, \bar{a} + a). \quad (2.4.25)$$

Они обладают свойством аддитивности в смысле (2.2.24), поэтому, используя соотношение (2.4.3) и повторяя рассуждения, которые привели нас к (2.2.26), находим, что конечные трансляции представлены на гильбертовом пространстве операторами

$$U(1, a) = \exp(-iP^\mu a_\mu). \quad (2.4.26)$$

Точно так же можно показать, что поворот  $R_\theta$  на угол  $|\theta|$  вокруг направления  $\theta$  представлен на гильбертовом пространстве оператором

$$U(R_\theta, 0) = \exp(i\mathbf{J} \cdot \boldsymbol{\theta}). \quad (2.4.27)$$

Интересно сравнить алгебру Пуанкаре с алгеброй Ли группы симметрии ньютоновской механики — группы Галилея. Ее можно вывести, воспользовавшись преобразованиями группы Галилея и следуя затем той же самой процедуре, которая использовалась для получения алгебры Пуанкаре. Однако поскольку у нас уже есть соотношения (2.4.18)–(2.4.24), значительно проще получить галилеевскую алгебру как нерелятивистский предел алгебры Пуанкаре. Такой способ называется *сужением Инену–Вигнера* [4, 5]. Для системы частиц с характерной массой  $m$  и скоростью  $v$  операторы импульса и углового момента оказываются порядка  $\mathbf{J} \sim 1$ ,  $\mathbf{P} \sim mv$ . С другой стороны, оператор энергии равен  $H = M + W$ , где  $M$  — полная масса, а энергия  $W$  — сумма кинетического и потенциального членов, имеющие порядок  $M \sim m$ ,  $W \sim mv^2$ . Внимательное рассмотрение соотношений (2.4.18)–(2.4.24) показывает, что в пределе  $v \ll 1$  они приобретают следующий вид:

$$\begin{aligned}[J_i, J_j] &= i\epsilon_{ijk} J_k, \\ [J_i, K_j] &= i\epsilon_{ijk} K_k, \\ [K_i, K_j] &= 0, \\ [J_i, P_j] &= i\epsilon_{ijk} P_k, \\ [K_i, P_j] &= -iM\delta_{ij}, \\ [J_i, W] &= [P_i, W] = 0, \\ [K_i, W] &= -iP_i, \\ [J_i, M] &= [P_i, M] = [K_i, M] = [W, M] = 0,\end{aligned}$$

где  $\mathbf{K}$  имеет порядок  $1/v$ . Заметим, что результат произведения операций трансляции  $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x} + \mathbf{a}$  и “буста”  $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x} + \mathbf{v}t$  должен представлять собой преобразование  $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x} + \mathbf{v}t + \mathbf{a}$ , что, однако, неверно для действия этих операторов на гильбертовом пространстве:

$$\exp(-i\mathbf{K} \cdot \mathbf{v}) \exp(-i\mathbf{P} \cdot \mathbf{a}) = \exp(iM\mathbf{a} \cdot \mathbf{v}/2) \exp(-i(\mathbf{K} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{P} \cdot \mathbf{a})).$$

Появление фазового множителя  $\exp(iM\mathbf{a} \cdot \mathbf{v}/2)$  показывает, что данное представление является проективным, с правилами суперотбора, запрещающими суперпозицию состояний с различными массами. В этом отношении математика группы Пуанкаре проще математики группы Галилея. Однако, ничто не мешает нам формально расширить группу Галилея, введя в ее алгебру Ли еще один коммутирующий со всеми остальными генератором, собственные значения которого равны массам различных состояний. В этом случае физические состояния образуют обычное, а не проективное представление расширенной группы симметрии. Данное различие является не более чем вопросом обозначений, за исключением того факта, что при таком переопределении галилеевской группы нет необходимости в правилах суперотбора для масс.

## § 2.5. Одночастичные состояния

Рассмотрим теперь классификацию одночастичных состояний по отношению к тому, как на них действуют преобразования неоднородной группы Лоренца.

Все компоненты 4-вектора энергии–импульса коммутируют друг с другом, поэтому естественно выразить физические векторы состояний через собственные векторы 4-импульса. Если обозначить все остальные степени свободы значком  $\sigma$ , векторы состояний  $\Psi_{p,\sigma}$ , которые мы рассматриваем, удовлетворяют условию

$$P^\mu \Psi_{p,\sigma} = p^\mu \Psi_{p,\sigma}. \quad (2.5.1)$$

Для основных состояний, состоящих, например, из нескольких свободных частиц, значок  $\sigma$  может принимать как непрерывные, так и дискретные значения. Положим в качестве части определения *одночастичного состояния*, что значок  $\sigma$  может принимать только дискретные значения, и далее будем ограничиваться только этим случаем. (Однако, связанное состояние двух и более частиц, например, нижнее состояние атома водорода, следует рассматривать как одночастичное состояние. Такое состояние не является *элементарной* частицей, но в данном случае различия между составной и элементарной частицами к делу не относятся.)

Из уравнений (2.5.1) и (2.4.26) следует, что состояния  $\Psi_{p,\sigma}$  при трансляциях преобразуются следующим образом:

$$U(1, a)\Psi_{p,\sigma} = e^{-ip \cdot a}\Psi_{p,\sigma}.$$

Рассмотрим теперь, как эти состояния преобразуются под действием однородных преобразований Лоренца.

Используя (2.4.9), можно видеть, что в результате действия квантовым однородным преобразованием Лоренца  $U(\Lambda, 0) \equiv U(\Lambda)$  на состояние  $\Psi_{p,\sigma}$  получается собственный вектор 4-импульса с собственным значением  $\Lambda p$ :

$$\begin{aligned} P^\mu U(\Lambda)\Psi_{p,\sigma} &= U(\Lambda)[U^{-1}(\Lambda)P^\mu U(\Lambda)]\Psi_{p,\sigma} = \\ &= U(\Lambda)(\Lambda_\rho^{-1\mu} P^\rho)\Psi_{p,\sigma} = \Lambda^\mu{}_\rho p^\rho U(\Lambda)\Psi_{p,\sigma}. \end{aligned} \quad (2.5.2)$$

Следовательно, вектор  $U(\Lambda)\Psi_{p,\sigma}$  должен быть линейной комбинацией векторов состояний  $\Psi_{\Lambda p, \sigma'}$ :

$$U(\Lambda)\Psi_{p,\sigma} = \sum_{\sigma'} C_{\sigma', \sigma}(\Lambda, p)\Psi_{\Lambda p, \sigma'}. \quad (2.5.3)$$

В общем случае, используя подходящие линейные комбинации  $\Psi_{p,\sigma}$ , можно, выбрав соответствующим образом значки  $\sigma$ , привести матрицу  $C_{\sigma, \sigma'}(\Lambda, p)$  к блочно-диагональному виду, или, другими словами, сделать так, чтобы  $\Psi_{p,\sigma}$ , с  $\sigma$  в пределах одного блока, являлась

представлением неоднородной группы Лоренца. Естественно отождествить состояния частиц определенного типа с компонентами представления неоднородной группы Лоренца, которое неприводимо в том смысле, что его нельзя разложить на представления указанным способом<sup>1)</sup>. Наша задача теперь состоит в том, чтобы получить структуру коэффициентов  $C_{\sigma,\sigma'}(\Lambda, p)$  в неприводимом представлении неоднородной группы Лоренца.

Заметим, что единственными функциями от  $p^\mu$ , инвариантными относительно любых собственных ортохронных преобразований Лоренца  $\Lambda^\mu_\nu$ , являются инвариантный квадрат

$$p^2 \equiv \eta_{\mu\nu} p^\mu p^\nu$$

и, в случае  $p^2 \leq 0$ , знак компоненты  $p^0$ . Следовательно, для каждого значения  $p^2$  и (если  $p^2 \leq 0$ ) знака  $p^0$ , можно выбрать “стандартный” 4-импульс, например  $k^\mu$ , и выразить любой  $p^\mu$  из этого класса в следующем виде:

$$p^\mu = L^\mu_\nu(p)k^\nu, \quad (2.5.4)$$

где  $\Lambda^\mu_\nu$  — некоторое стандартное преобразование Лоренца, зависящее от  $p^\mu$  и от нашего выбора стандартного  $k^\mu$ . Затем можно определить состояния  $\Psi_{p,\sigma}$  с импульсом  $p$ , как

$$\Psi_{p,\sigma} \equiv N(p)U(L(p))\Psi_{k,\sigma}, \quad (2.5.5)$$

где  $N(p)$  — нормировочный множитель, значение которого мы установим позднее. До настоящего момента о том, как связаны значки  $\sigma$  для разных импульсов, ничего не было сказано; уравнение (2.5.5) устраивает этот пробел.

Действуя на него произвольным однородным преобразованием Лоренца, находим

$$\begin{aligned} U(\Lambda)\Psi_{p,\sigma} &= N(p)U(\Lambda L(p))\Psi_{k,\sigma} = \\ &= N(p)U(L(\Lambda p))U(L^{-1}(\Lambda p)\Lambda L(p))\Psi_{k,\sigma}. \end{aligned} \quad (2.5.6)$$

Суть последнего шага состоит в том, что преобразование Лоренца  $L^{-1}(\Lambda p)\Lambda L(p)$  переводит  $k$  в  $L(p)k = p$ , затем в  $\Lambda p$ , и, наконец, обратно в  $k$ , поэтому оно принадлежит подгруппе однородной группы

<sup>1)</sup> Конечно, различные виды частиц могут соответствовать изоморфным представлениям, т.е. представлениям, для которых матрицы  $C_{\sigma,\sigma'}(\Lambda, p)$  являются либо идентичными, либо идентичными с точностью до преобразования подобия. В некоторых случаях может оказаться удобным определить виды частиц как неприводимые представления большей группы, включающей неоднородную собственную ортохронную группу Лоренца в качестве подгруппы. Например, как будет показано, в случае безмассовых частиц, взаимодействие которых симметрично относительно инверсии пространства, все компоненты неприводимого представления неоднородной группы Лоренца, включающей пространственную инверсию, принято трактовать как один вид частиц.

Лоренца, состоящей из лоренцевых преобразований  $W^\mu{}_\nu$ , оставляющих инвариантным  $k^\mu$ :

$$W^\mu{}_\nu k^\nu = k^\mu. \quad (2.5.7)$$

Эта подгруппа называется *малой группой* [5]. Для любого  $W$ , удовлетворяющего соотношению (2.5.7), имеем

$$U(W)\Psi_{k,\sigma} = \sum_{\sigma'} D_{\sigma'\sigma}(W)\Psi_{k,\sigma'}. \quad (2.5.8)$$

Коэффициенты  $D(W)$  организуют представление малой группы. Это означает, что для любых элементов  $\bar{W}$ ,  $W$  имеет место соотношение

$$\begin{aligned} \sum_{\sigma'} D_{\sigma'\sigma}(\bar{W}W)\Psi_{k,\sigma'} &= U(\bar{W}W)\Psi_{k,\sigma} = U(\bar{W})U(W)\Psi_{k,\sigma} = \\ &= U(\bar{W})\sum_{\sigma''} D_{\sigma''\sigma}(W)\Psi_{k,\sigma''} = \sum_{\sigma'\sigma''} D_{\sigma''\sigma}(W)D_{\sigma'\sigma''}(\bar{W})\Psi_{k,\sigma'}, \end{aligned}$$

и поэтому

$$D_{\sigma'\sigma}(\bar{W}W) = \sum_{\sigma''} D_{\sigma'\sigma''}(\bar{W})D_{\sigma''\sigma}(W). \quad (2.5.9)$$

В частности, можно применить уравнение (2.5.8) к малой группе преобразований

$$W(\Lambda, p) \equiv L^{-1}(\Lambda p)\Lambda L(p), \quad (2.5.10)$$

тогда уравнение (2.5.6) примет вид

$$U(\Lambda)\Psi_{p,\sigma'} = N(p) \sum_{\sigma'} D_{\sigma'\sigma}(W(\Lambda, p))U(L(\Lambda p))\Psi_{k,\sigma'},$$

или, согласно определению (2.5.5):

$$U(\Lambda)\Psi_{p,\sigma'} = \frac{N(p)}{N(\Lambda p)} \sum_{\sigma'} D_{\sigma'\sigma}(W(\Lambda, p))\Psi_{\Lambda p, \sigma'}. \quad (2.5.11)$$

Если оставить в стороне вопрос о нормировке, задача определения коэффициентов  $C_{\sigma'\sigma}$ , входящих в закон преобразования (2.5.3), сводится к задаче нахождения представлений малой группы. Подобный метод получения представлений группы, например неоднородной группы Лоренца, из представлений малой группы называется методом индуцированных представлений [6].

В табл. 2.1 приведен наиболее удобный способ выбора стандартного импульса  $k^\mu$  и соответствующей малой группы для различных классов 4-импульса.

## Таблица 2.1

Стандартные импульсы и соответствующие малые группы для различных классов 4-импульсов. Здесь  $\kappa$  — некоторая произвольная положительная величина с размерностью энергии (что касается ее численного значения, будем считать, что она равна например 1 эВ). Ответ на вопрос, какова малая группа, обычно довольно очевиден:  $SO(3)$  — обычная группа вращений в трех измерениях (исключая пространственные инверсии), поскольку поворот является единственным ортохронным преобразованием Лоренца, оставляющим инвариантной частицу с нулевым моментом;  $SO(2, 1)$  и  $SO(3, 1)$  — группы Лоренца в (2 + 1) и (3 + 1) измерениях соответственно. Группа  $ISO(2)$  является группой евклидовой геометрии и состоит из поворотов и трансляций в двух измерениях. Почему она является малой группой для случая  $p^2 = 0$ , объясняется ниже

	Стандартный $k^\mu$	Малая группа
(a) $p^2 = -M^2 < 0, p^0 > 0$	$(0, 0, 0, M)$	$SO(3)$
(b) $p^2 = -M^2 < 0, p^0 < 0$	$(0, 0, 0, -M)$	$SO(3)$
(c) $p^2 = 0, p^0 > 0$	$(0, 0, \kappa, \kappa)$	$ISO(2)$
(d) $p^2 = 0, p^0 < 0$	$(0, 0, \kappa, -\kappa)$	$ISO(2)$
(e) $p^2 = N^2 > 0$	$(0, 0, N, 0)$	$SO(2, 1)$
(f) $p^\mu = 0$	$(0, 0, 0, 0)$	$SO(3, 1)$

Из этих шести классов 4-импульса только (a), (c) и (f) можно интерпретировать в терминах физических состояний. Здесь нет необходимости обсуждать случай (f) —  $p^\mu = 0$ , поскольку он соответствует вакууму, инвариантному по отношению к действию  $U(\Lambda)$ . Будем рассматривать только случаи (a) и (c), описывающие частицы с массой  $M > 0$  и нулевой массой соответственно.

Здесь уместно остановиться и разобраться с вопросом о нормировке этих состояний. В соответствии с обычной процедурой ортонормализации квантовой механики можно выбрать состояния с стандартным  $k^\mu$  в качестве ортогональных, в том смысле, что

$$(\Psi_{k',\sigma}, \Psi_{k,\sigma}) = \delta^3(\mathbf{k}' - \mathbf{k})\delta_{\sigma'\sigma}. \quad (2.5.12)$$

(Дельта-функция необходима, поскольку  $\Psi_{k,\sigma}$  и  $\Psi_{k',\sigma'}$  являются собственными состояниями эрмитова оператора с собственными значениями  $\mathbf{k}$  и  $\mathbf{k}'$  соответственно.) Отсюда следует, что представление малой группы в уравнениях (2.5.8) и (2.5.11) должно быть унитарным<sup>2)</sup>:

$$D^\dagger(W) = D^{-1}(W). \quad (2.5.13)$$

<sup>2)</sup> Малые группы  $SO(2, 1)$  и  $SO(3, 1)$  для  $p^2 > 0$  и  $p^\mu = 0$  не имеют нетривиальных конечномерных унитарных представлений. Поэтому если бы существовали нетривиально преобразующиеся относительно малой группы состояния с импульсом  $p^\mu$ , таким что  $p^2 > 0$  или  $p^\mu = 0$ , их число было бы бесконечно.

Чему равны скалярные произведения состояний в случае произвольных импульсов? Используя унитарность оператора  $U(\Lambda)$  в уравнениях (2.5.5) и (2.5.11), получаем следующее выражение для скалярного произведения:

$$(\Psi_{p',\sigma'}, \Psi_{p,\sigma}) = N(p)(U^{-1}(L(p))\Psi_{p',\sigma'}, \Psi_{k,\sigma}) = \\ = N(p)N^*(p')D(W(L^{-1}(p), p'))_{\sigma\sigma'}^*\delta(\mathbf{k}' - \mathbf{k}),$$

где  $k' \equiv L^{-1}(p)p'$ . Поскольку  $k = L^{-1}(p)p$ , дельта-функция  $\delta^3(\mathbf{k} - \mathbf{k}')$  пропорциональна  $\delta^3(\mathbf{p} - \mathbf{p}')$ . При  $p = p'$  малая группа в данном случае оказывается тривиальной,  $W(L^{-1}(p), p) = 1$ , и поэтому скалярное произведение равно

$$(\Psi_{p',\sigma'}, \Psi_{p,\sigma}) = |N(p)|^2\delta_{\sigma'\sigma}\delta^3(\mathbf{k}' - \mathbf{k}). \quad (2.5.14)$$

Осталось вычислить коэффициент пропорциональности между

$$\delta^3(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \quad \text{и} \quad \delta^3(\mathbf{p} - \mathbf{p}').$$

Заметим, что лоренц-инвариантный интеграл от произвольной скалярной функции  $f(p)$  по поверхности, на которой лежит 4-импульс, подчиняющийся условиям  $-p^2 = M^2 \leq 0$  и  $p^0 > 0$  (т.е. случаи (а) или (с)) может быть переписан в следующем виде:

$$\int d^4p \delta(p^2 + M^2)\theta(p^0)f(p) = \\ = \int d^3\mathbf{p} dp^0 \delta((p^0)^2 - \mathbf{p}^2 - M^2)\theta(p^0)f(\mathbf{p}, p^0) = \\ = \int d^3\mathbf{p} \frac{f(\mathbf{p}, \sqrt{\mathbf{p}^2 + M^2})}{2\sqrt{\mathbf{p}^2 + M^2}}$$

( $\theta(p^0)$  — ступенчатая функция:  $\theta(x) = 1$  при  $x \leq 0$ ,  $\theta(x) = 0$  при  $x < 0$ ). Как мы видим, при интегрировании по “массовой оболочке”  $p^2 + M^2 = 0$  инвариантным элементом объема является

$$d^3\mathbf{p}/\sqrt{\mathbf{p}^2 + M^2}. \quad (2.5.15)$$

Дельта-функция определяется выражением

$$F(\mathbf{p}) = \int F(\mathbf{p}')\delta^3(\mathbf{p} - \mathbf{p}')d^3\mathbf{p}' = \\ = \int F(\mathbf{p}')[\sqrt{\mathbf{p}'^2 + M^2}\delta^3(\mathbf{p} - \mathbf{p}')] \frac{d^3\mathbf{p}'}{\sqrt{\mathbf{p}'^2 + M^2}},$$

поэтому инвариантная дельта-функция имеет вид

$$\sqrt{\mathbf{p}'^2 + M^2}\delta^3(\mathbf{p}' - \mathbf{p}) = p^0\delta^3(\mathbf{p}' - \mathbf{p}). \quad (2.5.16)$$

Поскольку  $p$  и  $p'$  связаны с  $k$  и  $k'$  преобразованием Лоренца,  $L(p)$ , то

$$p^0\delta^3(\mathbf{p}' - \mathbf{p}) = k^0\delta^3(\mathbf{p}' - \mathbf{p})$$

и, следовательно,

$$(\Psi_{p',\sigma'}, \Psi_{p,\sigma}) = |N(p)|^2 \delta_{\sigma'\sigma} \left( \frac{p^0}{k^0} \right) \delta^3(\mathbf{p}' - \mathbf{p}). \quad (2.5.17)$$

Иногда нормировочный множитель  $N(p)$  выбирают просто равным единице. Однако в этом случае пришлось бы следить за появлением в скалярных произведениях множителя  $p^0/k^0$ . Чаще нормировочный множитель выбирают в виде

$$N(p) = \sqrt{k^0/p^0}. \quad (2.5.18)$$

В этом случае

$$(\Psi_{p',\sigma'}, \Psi_{p,\sigma}) = \delta_{\sigma'\sigma} \delta^3(\mathbf{p}' - \mathbf{p}). \quad (2.5.19)$$

Рассмотрим теперь случаи, представляющие физический интерес: частицы массы  $M > 0$  и частицы с нулевой массой.

### *Положительно определенная масса*

Малой группой является группа трехмерных вращений. Ее универсальное представление можно разложить в прямую сумму неприводимых унитарных представлений [7]  $D^{(j)}_{\sigma\sigma'}(R)$  размерности  $2j+1$ , где  $j = 0, 1/2, 1, \dots$  Эти представления можно строить из обычных матриц бесконечно малых поворотов  $R_{ik} = \delta_{ik} + \Theta_{ik}$ , где  $\Theta_{ik} = -\Theta_{ki}$  — инфинитезимальные параметры:

$$D^{(j)}_{\sigma'\sigma}(1 + \Theta) = \delta_{\sigma'\sigma} + \frac{i}{2} \Theta_{ik} (J_{ik}^{(j)})_{\sigma'\sigma}, \quad (2.5.20)$$

$$(J_{23}^{(j)} \pm i J_{31}^{(j)})_{\sigma'\sigma} = (J_1^{(j)} \pm i J_2^{(j)})_{\sigma'\sigma} = \delta_{\sigma',\sigma \pm 1} \sqrt{(j \mp \sigma)(j \pm \sigma + 1)}, \quad (2.5.21)$$

$$(J_{12}^{(j)})_{\sigma'\sigma} = (J_3^{(j)})_{\sigma'\sigma} = \sigma \delta_{\sigma'\sigma}, \quad (2.5.22)$$

а  $\sigma$  пробегает значения  $j, j-1, \dots, -j$ . Для частиц с массой  $M > 0$  и спином  $j$  уравнение (2.5.11) теперь принимает вид

$$U(\Lambda) \Psi_{p,\sigma} = \sqrt{\frac{(\Lambda p)^0}{p^0}} \sum_{\sigma'} D^{(j)}_{\sigma'\sigma}(W(\Lambda, p)) \Psi_{\Lambda p, \sigma'}, \quad (2.5.23)$$

где  $W(\Lambda, p)$  (поворот Вигнера [5]) — элемент малой группы, заданный уравнением (2.5.10):

$$W(\Lambda, p) = L^{-1}(\Lambda p) \Lambda L(p).$$

Чтобы получить его в явном виде, необходимо выбрать “стандартный буст”  $L(p)$ , переводящий 4-импульс  $k^\mu = (0, 0, 0, M)$  в  $p^\mu$ :

$$\begin{aligned} L^i_k(p) &= \delta_{ik} + (\gamma - 1)\hat{p}_i\hat{p}_k, \\ L^i_0(p) &= L^0_i(p) = \hat{p}_i\sqrt{\gamma^2 - 1}, \\ L^0_0(p) &= \gamma, \end{aligned} \quad (2.5.24)$$

где

$$\hat{p}_i \equiv p_i/|\mathbf{p}|, \quad \gamma \equiv \sqrt{\mathbf{p}^2 + M^2}/M.$$

Важно то, что когда  $\Lambda^\mu_\nu$  является произвольным трехмерным поворотом  $\mathcal{R}$ , поворот Вигнера  $W(\Lambda, p)$  совпадает с  $\mathcal{R}$  для любых  $p$ . Чтобы показать это, заметим, что буст (2.5.24) можно представить в виде

$$L(p) = R(\hat{\mathbf{p}})B(|\mathbf{p}|)R^{-1}(\hat{\mathbf{p}}),$$

где  $R(\hat{\mathbf{p}})$  — поворот (определенный обычным образом, см. ниже, уравнение (2.5.47)), совмещающий направления  $\mathbf{p}$  и оси  $Oz$ , а

$$B(|\mathbf{p}|) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma & \sqrt{\gamma^2 - 1} \\ 0 & 0 & \sqrt{\gamma^2 - 1} & \gamma \end{bmatrix}.$$

Тогда для произвольного поворота  $\mathcal{R}$  имеем

$$W(\mathcal{R}, p) = R(\mathcal{R}\hat{\mathbf{p}})B^{-1}(|\mathbf{p}|)R^{-1}(\mathcal{R}\hat{\mathbf{p}})\mathcal{R}R(\hat{\mathbf{p}})B(|\mathbf{p}|)R^{-1}(\hat{\mathbf{p}}).$$

Но поворот  $R^{-1}(\mathcal{R}\hat{\mathbf{p}})\mathcal{R}R(\hat{\mathbf{p}})$  переводит ось  $Oz$  сначала в направление  $\hat{\mathbf{p}}$ , затем — в направление  $\mathcal{R}\hat{\mathbf{p}}$  и, наконец, обратно в ось  $Oz$ . Поэтому он представляет собой просто поворот на некоторый угол  $\theta$  вокруг оси  $Oz$

$$R^{-1}(\mathcal{R}\hat{\mathbf{p}})\mathcal{R}R(\hat{\mathbf{p}}) = R(\theta) \equiv \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

С учетом того, что  $R(\theta)$  коммутирует с  $B(|\mathbf{p}|)$ , получаем

$$W(\mathcal{R}, p) = R(\mathcal{R}\hat{\mathbf{p}})B^{-1}(|\mathbf{p}|)R(\theta)B(|\mathbf{p}|)R^{-1}(\hat{\mathbf{p}}) = R(\mathcal{R}\hat{\mathbf{p}})R(\theta)R^{-1}(\hat{\mathbf{p}})$$

и, следовательно,

$$W(\mathcal{R}, p) = \mathcal{R}.$$

Таким образом, состояния, описывающие движущуюся массивную частицу (и, если обобщить, многочастичные состояния), преобразуются под действием преобразований вращения так же, как в нерелятивистской квантовой механике. Еще один важный момент состоит в том, что весь аппарат сферических гармоник, коэффициентов Клебша—Гордана и т.д. может быть полностью перенесен из нерелятивистской в релятивистскую квантовую механику.

### Нулевая масса

Во-первых, необходимо изучить структуру малой группы. Рассмотрим произвольный элемент малой группы  $W^\mu{}_\nu$  с  $\bar{W}^\mu{}_\nu k^\nu = k^\mu$ , где  $k^\mu$  — стандартный 4-импульс,  $k^\mu = (0, 0, 1, 1)$ . Действуя на временноподобный 4-вектор  $t^\mu = (0, 0, 0, 1)$  таким преобразованием Лоренца, получим 4-вектор  $Wt$ , причем

$$(Wt)^\mu (Wt)_\mu = t^\mu t_\mu = -1,$$

$$(Wt)^\mu k_\mu = t^\mu k_\mu = -1.$$

Любой 4-вектор, удовлетворяющий второму условию, можно записать в виде

$$(Wt)^\mu = (\alpha, \beta, \zeta, 1 + \zeta).$$

Тогда первое условие приводит к соотношению

$$\zeta = (a^2 + \beta^2)/2. \quad (2.5.25)$$

Таким образом, действие  $W^\mu{}_\nu$  на  $t^\nu$  совпадает с действием на  $t^\nu$  преобразования Лоренца

$$S^\mu{}_\nu(\alpha, \beta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\alpha & \alpha \\ 0 & 1 & -\beta & \beta \\ \alpha & \beta & 1 - \zeta & \zeta \\ \alpha & \beta & -\zeta & 1 + \zeta \end{bmatrix}. \quad (2.5.26)$$

Из этого не следует, что  $W$  равно  $S(\alpha, \beta)$ , однако, как можно видеть,  $S^{-1}(\alpha, \beta)W$  является преобразованием Лоренца, которое оставляет инвариантным временноподобный 4-вектор  $(0, 0, 0, 1)$  и, следовательно, представляет собой чистый поворот. Кроме того,  $S^\mu{}_\nu$  аналогично  $W^\mu{}_\nu$  оставляет инвариантным светоподобный 4-вектор  $(0, 0, 1, 1)$ . Поэтому  $S^{-1}(\alpha, \beta)W$  является поворотом на некоторый угол  $\theta$  вокруг оси  $Oz$

$$S^{-1}(\alpha, \beta)W = R(\theta), \quad (2.5.27)$$

где

$$R^\mu{}_\nu(\theta) \equiv \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Следовательно, элемент малой группы наиболее общего вида таков:

$$W(\theta, \alpha, \beta) = S(\alpha, \beta)R(\theta). \quad (2.5.28)$$

Что это за группа? Заметим, что преобразования с  $\theta = 0$  или с  $\alpha = \beta = 0$  образуют подгруппы:

$$S(\bar{\alpha}, \bar{\beta})S(\alpha, \beta) = S(\bar{\alpha} + \alpha, \bar{\beta} + \beta), \quad (2.5.29)$$

$$R(\bar{\theta})R(\theta) = R(\bar{\theta} + \theta). \quad (2.5.30)$$

Эти подгруппы являются *абелевыми*, т.е. их элементы коммутируют друг с другом. Более того, подгруппа с  $\theta = 0$  является *инвариантной* в том смысле, что результат действия элемента группы на другой ее элемент тоже принадлежит группе:

$$R(\theta)S(\alpha, \beta)R^{-1}(\theta) = S(\alpha \cos \theta + \beta \sin \theta, -\alpha \sin \theta + \beta \cos \theta). \quad (2.5.31)$$

С помощью уравнений (2.5.29)–(2.5.31) легко вывести произведения любых групповых элементов. Можно заметить, что правила умножения для этой группы совпадают с правилами умножения группы  $ISO(2)$ , состоящей из трансляций (на вектор  $(\alpha, \beta)$ ) и поворотов (на угол  $\theta$ ) в двух измерениях.

Группа, не имеющая инвариантных подгрупп, обладает некоторыми простыми свойствами и по этой причине называется *полупростой*. Как было показано, малая группа  $ISO(2)$ , подобно неоднородной группе Лоренца, *не* является полупростой. Это приводит к интересным усложнениям. Во-первых, рассмотрим алгебру Ли группы  $ISO(2)$ . Для инфинитезимальных  $\theta, \alpha, \beta$  произвольный элемент группы имеет вид

$$W(\theta, \alpha, \beta)^\mu{}_\nu = \delta^\mu{}_\nu + \omega^\mu{}_\nu,$$

$$\omega_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 0 & \theta & -\alpha & \alpha \\ -\theta & 0 & -\beta & \beta \\ \alpha & \beta & 0 & 0 \\ -\alpha & -\beta & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Тогда из разложения (2.4.3) тогда можно видеть, что соответствующим оператором, действующим на гильбертовом пространстве, является

$$U(W(\theta, \alpha, \beta)) = 1 + i\alpha A + i\beta B + i\theta J_3, \quad (2.5.32)$$

где  $A$  и  $B$  — эрмитовы операторы:

$$A = -J^{13} + J^{10} = J_2 + K_1, \quad (2.5.33)$$

$$B = -J^{23} + J^{20} = -J_1 + K_2, \quad (2.5.34)$$

а  $J_3 = J_{12}$ . Из уравнений (2.4.18)–(2.4.20), либо непосредственно из уравнений (2.5.29)–(2.5.31) можно видеть, что эти генераторы подчиняются коммутационным соотношениям

$$[J_3, A] = +iB, \quad (2.5.35)$$

$$[J_3, B] = -iA, \quad (2.5.36)$$

$$[A, B] = 0. \quad (2.5.37)$$

Так как  $A$  и  $B$  — коммутирующие эрмитовы операторы, их (подобно генератором импульса неоднородной группы Лоренца одновременно можно привести к диагональному виду) диагонализованы состояния-

ми  $\Psi_{k,a,b}$

$$\begin{aligned} A\Psi_{k,a,b} &= a\Psi_{k,a,b}, \\ B\Psi_{k,a,b} &= b\Psi_{k,a,b}. \end{aligned}$$

Проблема состоит в том, что если мы найдем один такой набор ненулевых собственных значений  $A$  и  $B$ , то получим и весь непрерывный спектр. Из уравнения (2.5.31) имеем

$$\begin{aligned} U[R(\theta)]AU^{-1}[R(\theta)] &= A \cos \theta - B \sin \theta, \\ U[R(\theta)]BU^{-1}[R(\theta)] &= A \sin \theta + B \cos \theta \end{aligned}$$

и, следовательно, для произвольного  $\theta$

$$\begin{aligned} A\Psi_{k,a,b}^\theta &= (a \cos \theta - b \sin \theta)\Psi_{k,a,b}^\theta, \\ B\Psi_{k,a,b}^\theta &= (a \sin \theta + b \cos \theta)\Psi_{k,a,b}^\theta, \end{aligned}$$

где

$$\Psi_{k,a,b}^\theta \equiv U^{-1}(R(\theta))\Psi_{k,a,b}.$$

У безмассовых частиц не наблюдается никаких непрерывных степеней свободы, подобных  $\theta$ ; для того чтобы исключить возникновение континуума состояний, необходимо потребовать, чтобы физические состояния (обозначим их  $\Psi_{k,\sigma}$ ) являлись собственными векторами операторов  $A$  и  $B$  с  $a = b = 0$ :

$$A\Psi_{k,\sigma} = B\Psi_{k,\sigma} = 0. \quad (2.5.38)$$

Эти состояния отличаются собственными значениями оставшегося генератора

$$J_3\Psi_{k,\sigma} = \sigma\Psi_{k,\sigma}. \quad (2.5.39)$$

Так как импульс  $\mathbf{k}$  направлен вдоль оси  $Oz$ ,  $\sigma$  равна компоненте углового момента вдоль направления движения или *спиральности*.

Теперь можно определить свойства преобразований Лоренца для произвольных безмассовых одночастичных состояний. Во-первых, воспользовавшись рассуждениями § 2.2, обобщим соотношение (2.5.32) на случай конечных  $\alpha$  и  $\beta$

$$U(S(\alpha, \beta)) = \exp(i\alpha A + i\beta B) \quad (2.5.40)$$

и конечных  $\theta$

$$U(R(\theta)) = \exp(iJ_3\theta). \quad (2.5.41)$$

Произвольный элемент  $W$  малой группы можно переписать в виде (2.5.28), поэтому

$$U(W)\Psi_{k,\sigma} = \exp(i\alpha A + i\beta B) \exp(i\theta J_3\theta)\Psi_{k,\sigma} = \exp(i\theta\sigma)\Psi_{k,\sigma}$$

и из уравнения (2.5.8) следует

$$D_{\sigma'\sigma}(W) = \exp(i\theta\sigma)\delta_{\sigma'\sigma},$$

где  $\theta$  — угол, который можно определить, представив  $W$  в виде

(2.5.28). Закон преобразования Лоренца для безмассового состояния с произвольной спиральностью имеет вид (см. уравнения (2.5.11), (2.5.18))

$$U(\Lambda)\Psi_{p,\sigma} = \frac{(\Lambda p)^0}{p^0} \exp(i\sigma\theta(\Lambda, p))\Psi_{\Lambda p, \sigma}, \quad (2.5.42)$$

где  $\theta(\Lambda, p)$  определяется выражением

$$W(\Lambda, p) \equiv L^{-1}(\Lambda p)\Lambda L(p) \equiv S(\alpha(\Lambda, p), \beta(\Lambda, p))R(\theta(\Lambda, p)). \quad (2.5.43)$$

Как будет показано в § 5.9, электромагнитная калибровочная инвариантность возникает из части малой группы, параметризованной  $\alpha$  и  $\beta$ .

Пока не возникало причин, благодаря которым спиральность  $\sigma$  не может принимать любое действительное значение. Как мы увидим в § 2.7, существуют топологические соображения, ограничивающие допустимые значения  $\sigma$  целыми и полуцелыми значениями, такие же как и в случае массивных частиц.

Чтобы вычислить элемент малой группы (2.5.43) при заданных  $\Lambda$  и  $p$  (и, кроме того, получить возможность вычислить в следующем параграфе действие пространственной или временной инверсии на рассматриваемые состояния), необходимо зафиксировать вид стандартного лоренцевского преобразования, переводящего  $k^\mu = (0, 0, k, k)$  в  $p^\mu$ . Удобно выбирать его в виде

$$L(p) = R(\hat{\mathbf{p}})B(|\mathbf{p}|/\kappa), \quad (2.5.44)$$

где  $B(u)$  — чистый буст вдоль оси  $Oz$ :

$$B(u) \equiv \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (u^2 + 1)/(2u) & (u^2 - 1)/(2u) \\ 0 & 0 & (u^2 - 1)/(2u) & (u^2 + 1)/(2u) \end{bmatrix}, \quad (2.5.45)$$

а  $R(\hat{\mathbf{p}})$  — чистые повороты, совмещающие направления оси  $Oz$  и единичного вектора  $\hat{\mathbf{p}}$ . Возьмем, например, вектор  $\hat{\mathbf{p}}$  с полярной и азимутальной компонентами  $\theta$  и  $\phi$ :

$$\hat{\mathbf{p}} = (\sin \theta \cos \phi, \sin \theta \sin \phi, \cos \theta). \quad (2.5.46)$$

Тогда  $R(\hat{\mathbf{p}})$  можно рассматривать как поворот на угол  $\theta$  вокруг оси  $Oy$ , переводящий вектор  $(0, 0, 1)$  в  $(\sin \theta, 0, \cos \theta)$ , плюс поворот на угол  $\phi$  вокруг оси  $Oz$ :

$$U(R(\hat{\mathbf{p}})) = \exp(-i\phi J_3) \exp(-i\theta J_2), \quad (2.5.47)$$

где  $0 \leq \theta \leq \pi$ ,  $0 \leq \phi < 2\pi$ . (Мы используем  $U(R(\hat{\mathbf{p}}))$  вместо  $R(R(\hat{\mathbf{p}}))$ , дополнительно уточняя область изменения  $\phi$  и  $\theta$ , поскольку изменение  $\theta$  и  $\phi$  на  $2\pi$  соответствует повороту  $R(\hat{\mathbf{p}})$ , но другому знаку  $U(R(\hat{\mathbf{p}}))$  при действии им на состояние с полуцелым спином.) По-

скольку оператор (2.5.47) является поворотом, совмещающим ось  $Oz$  с направлением вектора (2.5.46), любой другой выбор  $R(\mathbf{p})$  может отличаться от принятого только поворотом вокруг оси  $Oz$ , соответствующим простому переопределению фазы одночастичных состояний.

Заметим, что спиральность является лоренц-инвариантной величиной: безмассовая частица с определенной спиральностью выглядит одинаково (если не брать в расчет ее импульс) во всех инерциальных системах отсчета. Действительно, можно думать, что безмассовые частицы, отличающиеся значением спиральности, являются различными видами частиц. Однако как будет показано в следующем параграфе, частицы с противоположной спиральностью связаны симметрией пространственной инверсии. Так, поскольку электромагнитные и гравитационные взаимодействия симметричны относительно инверсии пространства, безмассовые частицы со спиральностью  $\pm 1$ , отвечающие за электромагнитные взаимодействия, называют *фотонами*, а безмассовые частицы с спиральностью  $\pm 2$ , которые, как считается, отвечают за гравитационное взаимодействие, называют *гравитонами*. С другой стороны (предположительно), безмассовые частицы со спиральностью  $\pm 1/2$ , излучающиеся при ядерном бета-распаде, не участвуют ни в каких взаимодействиях (кроме гравитационного), сохраняющих пространственную инверсию. Поэтому этим частицы называют по-разному: *нейтрино* в случае спиральности  $-1/2$  и *антинейтрино* в случае спиральности  $+1/2$ .

Хотя спиральность безмассовой частицы лоренц-инвариантна, сано состояние, описывающее частицу лоренц-инвариантным не является. В частности, из-за наличия в уравнении (2.5.42) зависящего от спиральности фазового множителя  $\exp(i\sigma\theta)$ , состояние, являющееся линейной суперпозицией одночастичных состояний с противоположными спиральностями, под действием преобразования Лоренца превращается в другую суперпозицию. Например, произвольное однофotonное состояние с 4-импульсом  $p$  можно представить в виде

$$\Psi_{p;\alpha} = \alpha_+ \Psi_{p,+1} + \alpha_- \Psi_{p,-1},$$

где

$$|\alpha_+|^2 + |\alpha_-|^2 = 1.$$

Общим является случай *эллиптической поляризации*, когда коэффициенты  $|\alpha_{\pm}|$  не равны нулю и не совпадают друг с другом. *Круговая поляризация* представляет собой предельный случай, когда  $\alpha_+$  или  $\alpha_-$  обращаются в нуль. *Линейной поляризации* соответствует случай, когда  $|\alpha_+| = |\alpha_-|$ . Общая фаза  $\alpha_+$  и  $\alpha_-$  не имеет физического смысла, в случае линейной поляризации ее можно подобрать таким образом, чтобы  $\alpha_- = \alpha_+^*$ , однако относительная фаза важна. Действительно, в случае линейных поляризаций с  $\alpha_- = \alpha_+^*$ , фазу  $\alpha_+$  можно определить как угол между плоскостью поляризации и неко-

торым фиксированным направлением, перпендикулярным к направлению импульса  $\mathbf{p}$ . Из уравнения (2.5.42) следует, что при преобразованиях Лоренца  $\Lambda^\mu{}_\nu$ , этот угол изменяется на величину  $\theta(\Lambda, p)$ . Плоскость поляризации гравитонов можно определить аналогичным образом. В этом случае, вследствие уравнения (2.5.42) преобразование Лоренца  $\Lambda$  поворачивает плоскость поляризации на угол  $2\theta(\Lambda, p)$ .

## § 2.6. Пространственная инверсия и обращение времени

Как мы видели в § 2.3, любое однородное преобразование Лоренца является либо собственным и ортохронным (т.е.  $\text{Det } \Lambda = +1$  и  $\Lambda^0{}_0 \geq +1$ ), либо собственным ортохронным преобразованием, помноженным на  $\mathcal{P}$  или  $\mathcal{T}$ , или  $\mathcal{PT}$ , где  $\mathcal{P}$  и  $\mathcal{T}$  — преобразования пространственной инверсии и обращения времени

$$\mathcal{P}^\mu{}_\nu = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathcal{T}^\mu{}_\nu = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Обычно считается очевидным, что фундаментальный закон умножения группы Пуанкаре,

$$U(\bar{\Lambda}, \bar{a})U(\Lambda, a) = U(\bar{\Lambda}\Lambda, \bar{\Lambda}a + \bar{a}),$$

справедлив, даже если  $\Lambda$  и/или  $\bar{\Lambda}$  включают множители, зависящие от  $\mathcal{P}$  и/или  $\mathcal{T}$ . В частности, полагают, что существуют операторы, соответствующие  $\mathcal{P}$  и  $\mathcal{T}$ :

$$\mathsf{P} \equiv U(\mathcal{P}, 0), \quad \mathsf{T} \equiv U(\mathcal{T}, 0),$$

такие что

$$\mathsf{P}U(\Lambda, a)\mathsf{P}^{-1} = U(\mathcal{P}\Lambda\mathcal{P}^{-1}, \mathcal{P}a), \quad (2.6.1)$$

$$\mathsf{T}U(\Lambda, a)\mathsf{T}^{-1} = U(\mathcal{T}\Lambda\mathcal{T}^{-1}, \mathcal{T}a) \quad (2.6.2)$$

для любого собственного ортохронного преобразования Лоренца  $\Lambda^\mu{}_\nu$  и трансляции  $a^\mu$ . Эти законы преобразования объясняют смысл утверждения о том, что  $\mathsf{P}$  или  $\mathsf{T}$  “сохраняются”.

В 1956–1957 гг. стало ясно [8], что сохранение  $\mathsf{P}$  имеет место, только если не учитываются эффекты слабых взаимодействий, подобные тем, которые приводят к ядерному бета-распаду. Вера в справедливость утверждения относительно свойств обращения времени существовала еще некоторое время, но в 1964 г. появились косвенные доказательства [9] того, что сохранение  $\mathsf{T}$  также носит только приближенный

характер (см. §3.3). Ниже мы убедимся, что операторы  $\mathsf{P}$  и  $\mathsf{T}$ , удовлетворяющие уравнениям (2.6.1) и (2.6.2), действительно существуют, однако следует помнить, что это утверждение не является точным.

Применим уравнения (2.6.1) и (2.6.2) к инфинитезимальным преобразованиям, т.е.

$$\Lambda^\mu{}_\nu = \delta^\mu{}_\nu + \omega^\mu{}_\nu, \quad a^\mu = \epsilon^\mu,$$

где  $\omega_{\mu\nu} = -\omega_{\nu\mu}$  и  $\epsilon_\mu$  — бесконечно малые параметры. Используя (2.4.3) и приравнивая коэффициенты при  $\omega_{\rho\sigma}$  и  $\epsilon_\rho$  в уравнениях (2.6.1) и (2.6.2), мы найдем трансформационные свойства генераторов Пуанкаре относительно преобразований  $\mathsf{P}$  и  $\mathsf{T}$ :

$$\mathsf{P}iJ^{\rho\sigma}\mathsf{P}^{-1} = i\mathcal{P}_\mu{}^\rho\mathcal{P}_\nu{}^\sigma J^{\mu\nu}, \quad (2.6.3)$$

$$\mathsf{P}iP^\rho\mathsf{P}^{-1} = i\mathcal{P}_\mu{}^\rho P^\mu, \quad (2.6.4)$$

$$\mathsf{T}iJ^{\rho\sigma}\mathsf{T}^{-1} = i\mathcal{T}_\mu{}^\rho\mathcal{T}_\nu{}^\sigma J^{\mu\nu}, \quad (2.6.5)$$

$$\mathsf{T}iP^\rho\mathsf{T}^{-1} = i\mathcal{T}_\mu{}^\rho P^\mu. \quad (2.6.6)$$

Они очень напоминают соотношения (2.4.8) и (2.4.9), за исключением того, в обеих частях этих уравнений мы несократили множители  $i$ . Для того чтобы от них избавиться, необходимо понять, являются ли операторы  $\mathsf{P}$  и  $\mathsf{T}$  линейными и унитарными или антилинейными и антиунитарными.

Для этого, подставив  $\rho = 0$  в уравнение (2.6.4), получаем

$$\mathsf{P}iH\mathsf{P}^{-1} = iH,$$

где  $H \equiv P^0$  — оператор энергии. Если оператор  $\mathsf{P}$  является антиунитарным и антилинейным, он антисимметрическим относительно  $i$ , поэтому

$$\mathsf{P}H\mathsf{P}^{-1} = -H.$$

Тогда для любого состояния  $\Psi$  с энергией  $E > 0$  должно существовать другое состояние  $\mathsf{P}^{-1}\Psi$  с энергией  $-E < 0$ . Состояний с отрицательной энергией (энергией, меньшей энергии вакуума) не существует, поэтому мы вынуждены выбрать другой вариант:  $\mathsf{P}$  является линейным и унитарным и коммутирует с  $H$ .

С другой стороны, подставляя  $\rho = 0$  в уравнение (2.6.6), имеем

$$\mathsf{T}iH\mathsf{T}^{-1} = -iH.$$

Если предположить, что оператор  $\mathsf{T}$  является линейным и унитарным, можно просто отбросить  $i$  и получить

$$\mathsf{T}H\mathsf{T}^{-1} = -H,$$

что опять приводит к неприятному заключению: для любого состояния  $\Psi$  с энергией  $E$  существует другое состояние  $\mathsf{T}^{-1}\Psi$  с энергией  $-E$ . Чтобы избежать этого, необходимо считать, что оператор  $\mathsf{T}$  является антилинейным и антиунитарным.

Теперь, когда известно, что оператор  $P$  — линеен, а  $T$  — антилинеен, уравнения (2.6.3)–(2.6.6) можно переписать в более удобной форме через генераторы (2.4.15)–(2.4.17). В трехмерных обозначениях они имеют вид

$$PJP^{-1} = +J, \quad (2.6.7)$$

$$PKP^{-1} = -K, \quad (2.6.8)$$

$$PPP^{-1} = -P, \quad (2.6.9)$$

$$TJT^{-1} = -J, \quad (2.6.10)$$

$$TKT^{-1} = +K, \quad (2.6.11)$$

$$TPT^{-1} = -P \quad (2.6.12)$$

и, как показано выше,

$$PHP^{-1} = THT^{-1} = H. \quad (2.6.13)$$

Физически существенным является тот факт, что оператор  $P$  обязан сохранять знак  $J$ , поскольку орбитальная часть является векторным произведением  $\mathbf{r} \times \mathbf{p}$  двух векторов, каждый из которых меняет знак при пространственной инверсии системы координат. С другой стороны, оператор  $T$  должен менять знак  $J$ , так как после обращения времени наблюдатель будет видеть, что все тела врачаются в противоположном направлении. Заметим, что уравнение (2.6.10) согласуется с коммутационными соотношениями для углового момента  $\mathbf{J} \times \mathbf{J} = i\mathbf{J}$ , поскольку  $T$  меняет знак не только  $J$ , но и  $i$ . Можно легко проверить, что уравнения (2.6.7)–(2.6.13) согласуются со всеми коммутационными соотношениями (2.4.18)–(2.4.24).

Рассмотрим теперь, как операторы  $P$  и  $T$  действуют на одиночественные состояния.

### $P: M > 0$ .

Одиночественные состояния  $\Psi_{k,\sigma}$  определены как собственные векторы операторов  $P$ ,  $H$  и  $J_3$ , которым соответствуют собственные значения 0,  $M$  и  $\sigma$ . Из уравнений (2.6.7), (2.6.9) и (2.6.13) легко видеть, что то же самое должно иметь место и для состояния  $P\Psi_{k,\sigma}$ , следовательно (за исключением случаев вырождения), эти состояния могут отличаться только фазой:

$$P\Psi_{k,\sigma} = \eta_\sigma \Psi_{k,\sigma},$$

с фазовым множителем ( $|\eta| = 1$ ), зависящим или не зависящим от спина на  $\sigma$ . Покажем, что  $\eta_\sigma$  не зависит от  $\sigma$ . Из уравнений (2.5.8), (2.5.20) и (2.5.21) легко видеть, что

$$(J_1 \pm iJ_2)\Psi_{k,\sigma} = \sqrt{(j \mp \sigma)(j \pm \sigma + 1)} \Psi_{k,\sigma \pm 1}, \quad (2.6.14)$$

где  $j$  — спин частицы. Действуя оператором  $P$  на обе части этого

уравнения, получим, что

$$\eta_\sigma = \eta_{\sigma \pm 1},$$

поэтому  $\eta_\sigma$  действительно не зависит от  $\sigma$ . Таким образом, справедливо соотношение

$$P\Psi_{k,\sigma} = \eta\Psi_{k,\sigma}, \quad (2.6.15)$$

где фаза  $\eta$ , которую называют *внутренней четностью*, зависит только от типа частиц, на которые действует оператор  $P$ .

Чтобы получить состояния с конечным импульсом, нужно применить унитарный оператор  $U(L(p))$ , соответствующий “бусту” (2.5.24):

$$\Psi_{p,\sigma} = \sqrt{M/p^0} U(L(p)) \Psi_{k,\sigma}.$$

Заметим, что

$$\mathcal{P}L(p)\mathcal{P}^{-1} = L(\mathcal{P}p),$$

$$\mathcal{P}p = (-\mathbf{p}, \sqrt{\mathbf{p}^2 + M^2}),$$

поэтому, используя уравнения (2.6.1) и (2.6.15), имеем

$$\Psi_{p,\sigma} = \sqrt{M/p^0} U(L(\mathcal{P}p)) \eta\Psi_{k,\sigma},$$

или, другими словами,

$$P\Psi_{p,\sigma} = \eta\Psi_{\mathcal{P}p,\sigma}. \quad (2.6.16)$$

### **T: M > 0.**

Из уравнений (2.6.10), (2.6.12) и (2.6.13) можно видеть, что действуя оператором  $T$  на одночастичное состояние с нулевым импульсом  $\Psi_{k,\sigma}$ , мы получим состояние с

$$\begin{aligned} P(T\Psi_{k,\sigma}) &= 0, \\ H(T\Psi_{k,\sigma}) &= M(T\Psi_{k,\sigma}), \\ J_3(T\Psi_{k,\sigma}) &= -\sigma(T\Psi_{k,\sigma}), \end{aligned}$$

и поэтому

$$T\Psi_{k,\sigma} = \zeta_\sigma \Psi_{k,-\sigma},$$

где  $\zeta_\sigma$  — фазовый множитель. Применяя оператор  $T$  к уравнению (2.6.14) и учитывая, что  $T$  антисимметрический с  $\mathbf{J}$  и  $i$ , найдем, что

$$(-J_1 \pm iJ_2)\zeta_\sigma \Psi_{k,-\sigma} = \sqrt{(j \mp \sigma)(j \pm \sigma + 1)} \zeta_{\sigma \pm 1} \Psi_{k,-\sigma \mp 1}.$$

Снова применяя соотношение (2.6.14) к левой части этого уравнения, мы видим, что квадратные корни сокращаются, и поэтому

$$-\zeta_\sigma = \zeta_{\sigma \pm 1}.$$

Запишем решение как

$$\zeta_\sigma = \zeta(-)^{j-\sigma}$$

с другой фазой  $\zeta$ , зависящей только от вида частиц:

$$T\Psi_{k,\sigma} = \zeta(-)^{j-\sigma} \Psi_{k,-\sigma}. \quad (2.6.17)$$

Однако в отличие от “внутренней четности”  $\eta$  фаза обращения времени  $\zeta$  не имеет физического смысла. Это связано с тем, что одночастичное состояние можно переопределить посредством изменения фазы вида

$$\Psi_{k,\sigma} \rightarrow \Psi'_{k,\sigma} = \zeta^{1/2} \Psi_{k,\sigma}$$

так, чтобы фаза  $\zeta$  исчезла из закона преобразования:

$$\mathsf{T}\Psi'_{k,\sigma} = \zeta^{*1/2} \mathsf{T}\Psi_{k,\sigma} = \zeta^{*1/2} \zeta(-)^{j-\sigma} \Psi_{k,\sigma} = (-)^{j-\sigma} \Psi'_{k,-\sigma}.$$

Поэтому в дальнейшем в уравнении (2.6.17) мы будем сохранять произвольную фазу  $\zeta$ , чтобы иметь возможность произвольного выбора фазы одночастичного состояния. Необходимо однако иметь в виду, что эта фаза фактически неважна.

Чтобы получить состояния с конечным импульсом, снова применим “буст” (2.5.24). Заметим, что

$$\begin{aligned} \mathcal{F}L(p)\mathcal{F}^{-1} &= L(\mathcal{P}p), \\ \mathcal{P}p &= (-\mathbf{p}, \sqrt{\mathbf{p}^2 + M^2}) \end{aligned}$$

(т.е. изменение знака каждого элемента  $L^\mu{}_\nu$  с нечетным числом *временных* индексов совпадает с изменением знаков элементов с нечетным числом *пространственных* индексов). Используя уравнения (2.6.2) и (2.5.5), тогда получаем

$$\mathsf{T}\Psi_{p,\sigma} = \zeta(-)^{j-\sigma} \Psi_{\mathcal{P}p,-\sigma}. \quad (2.6.18)$$

### **P: M = 0.**

Действуя на состояние  $\Psi_{k,\sigma}$ , являющееся собственным вектором оператора  $P^\mu$  с собственным значением  $k^\mu = (0, 0, k, k)$  и собственным вектором  $J_3$  с собственным значением  $\sigma$ , оператором четности  $\mathsf{P}$ , мы получим состояние с 4-импульсом  $(\mathcal{P}k)^\mu = (0, 0, -k, k)$  и  $J_3$ , равным  $\sigma$ . Таким образом, оператор  $\mathsf{P}$  переводит состояние со спиральностью (компонентой спина в направлении движения)  $\sigma$  в состояние со спиральностью  $-\sigma$ . Как упоминалось ранее, из симметрии относительно пространственной инверсии следует, что если существуют частицы с ненулевой спиральностью, то существуют и частицы с противоположной спиральностью. Так как оператор  $\mathsf{P}$  не оставляет инвариантным обычный импульс, удобно рассматривать вместо него оператор  $U(R_2^{-1})\mathsf{P}$ , где  $R_2$  — поворот, переводящий  $k$  в  $\mathcal{P}k$ . Его удобно выбрать, как поворот на  $180^\circ$  вокруг оси  $Oy$ :

$$U(R_2) = \exp(i\pi J_2). \quad (2.6.19)$$

Поскольку оператор  $U(R_2^{-1})$  меняет знак  $J_3$ , имеем

$$U(R_2^{-1})\mathsf{P}\Psi_{k,\sigma} = \eta_\sigma \Psi_{k,-\sigma}, \quad (2.6.20)$$

где  $\eta_\sigma$  — фазовый множитель. Теперь оператор  $R_2^{-1}$  коммутирует с лоренцевским “бустом” (2.5.45), а  $\mathcal{P}$  коммутирует с поворотом

$R(\hat{\mathbf{p}})$ , совмещающим направления оси  $Oz$  и  $\mathbf{p}$ . Поэтому действуя оператором  $P$  на уравнение (2.5.5), для произвольного 4-импульса  $p^\mu$  находим

$$\begin{aligned} P\Psi_{p,\sigma} &= \sqrt{\frac{\kappa}{p^0}} U\left(R(\hat{\mathbf{p}})R_2B\left(\frac{|\mathbf{p}|}{\kappa}\right)\right)U(R_2^{-1})P\Psi_{k,\sigma} = \\ &= \sqrt{\frac{\kappa}{p^0}} \eta_\sigma U\left(R(\hat{\mathbf{p}})R_2B\left(\frac{|\mathbf{p}|}{\kappa}\right)\right)\Psi_{k,-\sigma}. \end{aligned}$$

Заметим, что  $R(\hat{\mathbf{p}})$  — поворот, совмещающий направления оси  $Oz$  и  $-\hat{\mathbf{p}}$ , но оператор  $U(R(\hat{\mathbf{p}})\mathbf{R}_2)$  не вполне совпадает с  $U(R(-\hat{\mathbf{p}}))$ . Согласно уравнению (2.5.47)

$$U(R(-\hat{\mathbf{p}})) = \exp(-i(\phi \pm \pi)J_3) \exp(-i(\pi - \theta)J_2),$$

где азимутальный угол выбирается в виде  $\phi + \pi$  или  $\phi - \pi$  в зависимости от того, выполнено  $0 \leq \phi < \pi$  или  $\pi \leq \phi < 2\pi$ , и поэтому всегда лежит в интервале от 0 до  $2\pi$ . Тогда

$$\begin{aligned} U^{-1}(R(-\hat{\mathbf{p}}))U(R(\hat{\mathbf{p}})R_2) &= \exp(i(\pi - \theta)J_2) \times \\ &\quad \times \exp(i(\phi \pm \pi)J_3) \exp(-i\phi J_3) \exp(-i\theta J_2) \exp(i\pi J_2) = \\ &= \exp(i(\pi - \theta)J_2) \exp(\pm i\pi J_3) \exp(i(\pi - \theta)J_2). \end{aligned}$$

Но поворот на  $\pm 180^\circ$  вокруг оси  $Oz$  меняет знак  $J_2$ , поэтому

$$U(R(\hat{\mathbf{p}})R_2) = U(R(-\hat{\mathbf{p}})) = \exp(\pm i\pi J_3). \quad (2.6.21)$$

Кроме того,  $R(-\hat{\mathbf{p}})B(|\mathbf{p}|/\mathbf{k})$  является стандартным “бустом”  $L(\mathcal{P}p)$  в направлении  $\mathcal{P}p = (-\mathbf{p}, \mathbf{p}^0)$ . Окончательно имеем

$$P\Psi_{p,\sigma} = \eta_\sigma \exp(\mp i\pi\sigma)\Psi_{\mathcal{P}p,-\sigma} \quad (2.6.22)$$

с фазой  $-\pi\sigma$  или  $+\pi\sigma$  в зависимости от того является ли вторая компонента  $\mathbf{p}$  положительной или отрицательной. Изменение знака под действием оператора четности в случае безмассовых частиц с полуцелым спином обусловлено принятым в уравнении (2.5.47) соглашением относительно вида оператора поворота, определяющего состояние безмассовой частицы с произвольным импульсом. Так как группа вращений является неодносвязной, разрывность подобного рода неизбежна.

### **T: M = 0.**

Действуя на состояние  $\Psi_{k,\sigma}$  с собственными значениями  $P^\mu$  и  $J_3$ , равными  $k^\mu = (0, 0, k, k)$  и  $\sigma$ , оператором обращения времени  $T$ , мы получим состояние с собственными значениями операторов  $P^\mu$  и  $J_3$ , равными  $(\mathcal{P}k)^\mu = (0, 0, -k, k)$  и  $-\sigma$ . Таким образом, оператор  $T$  не меняет спиральности  $\mathbf{J} \cdot \hat{k}$ , и сам по себе не несет информации о том, существуют ли для любых безмассовых частиц со спиральностью  $\sigma$  частицы со спиральностью  $-\sigma$ . Так как оператор  $T$ , аналогично  $P$ , не

оставляет стандартный 4-импульс  $k$  инвариантным, удобно рассматривать генератор  $U(R_2^{-1})\mathbf{T}$ , где  $R_2$  — поворот (2.6.19), совмещающий направления  $k$  и  $\mathcal{P}k$ . Этот оператор коммутирует с  $J_3$ , поэтому

$$U(R_2^{-1})\mathbf{T}\Psi_{k,\sigma} = \zeta_\sigma \Psi_{k,\sigma} \quad (2.6.23)$$

с другой фазой  $\zeta_\sigma$ . Поскольку  $R_2^{-1}\mathcal{T}$  коммутирует с бустом (2.5.45), а  $\mathcal{T}$  коммутирует с поворотом  $R(\hat{p})$ , действуя оператором  $\mathbf{T}$  на состояние (2.5.5), находим

$$\mathbf{T}\Psi_{p,\sigma} = \sqrt{\frac{\kappa}{p^0}} U \left[ R(\hat{p}) R_2 B\left(\frac{|\mathbf{p}|}{\kappa}\right) \right] \zeta_\sigma \Psi_{k,\sigma}. \quad (2.6.24)$$

Используя соотношение (2.6.21), окончательно получаем

$$\mathbf{T}\Psi_{p,\sigma} = \zeta_\sigma \exp(\pm i\pi\sigma) \Psi_{\mathcal{P}p,\sigma}. \quad (2.6.25)$$

В зависимости от того, является ли вторая компонента  $\mathbf{p}$  положительной или отрицательной, реализуется верхний или нижний знак.

\* \* \*

Интересно отметить, что действие квадрата оператора обращения времени  $\mathbf{T}^2$  на массивные и безмассовые одночастичные состояния устроено очень просто. Используя соотношение (2.6.18) и учитывая, что оператор  $\mathbf{T}$  является антиунитарным, получаем, что для массивных одночастичных состояний

$$\mathbf{T}^2 \Psi_{p,\sigma} = \mathbf{T} \zeta(-)^{j-\sigma} \Psi_{\mathcal{P}p,-\sigma} = \zeta^*(-)^{j-\sigma} \zeta(-)^{j+\sigma} \Psi_{p,\sigma}$$

или, другими словами,

$$\mathbf{T}^2 \Psi_{p,\sigma} = (-)^{2j} \Psi_{p,\sigma}. \quad (2.6.26)$$

Рассмотрим случай безмассовых частиц. Если вторая компонента  $\mathbf{p}$  положительна, то вторая компонента  $\mathcal{P}\mathbf{p}$  отрицательна, и наоборот. Поэтому из уравнения (2.6.25) следует, что

$$\begin{aligned} \mathbf{T}^2 \Psi_{p,\sigma} &= \mathbf{T} \zeta_\sigma \exp(\pm i\pi\sigma) \Psi_{\mathcal{P}p,\sigma} = \zeta_\sigma^* \exp(\mp i\pi\sigma) \zeta_\sigma \exp(\mp i\pi\sigma) \Psi_{p,\sigma} = \\ &= \exp(\mp 2i\pi\sigma) \Psi_{p,\sigma}. \end{aligned}$$

Если  $\sigma$  является целым или полуцелым, это выражение можно переписать в виде

$$\mathbf{T}^2 \Psi_{p,\sigma} = (-)^{2|\sigma|} \Psi_{p,\sigma}. \quad (2.6.27)$$

Под “спином” безмассовой частицы мы обычно понимаем абсолютное значение спиральности, поэтому уравнение (2.6.27) совпадает с уравнением (2.6.26).

Этот результат имеет одно интересное следствие. Когда оператор  $T^2$  действует на некоторое состояние  $\Psi$  системы невзаимодействующих частиц, безмассовых либо массивных, для каждой частицы возникает множитель  $(-)^{2j}$  или  $(-)^{2|\sigma|}$ . Следовательно, если состояние содержит нечетное количество частиц с полуцелым спином или спиральностью (плюс любое количество частиц с целым спином или спиральностью), меняется знак перед полной волновой функцией:

$$T^2\Psi = -\Psi. \quad (2.6.28)$$

Если теперь “включить” различные взаимодействия, этот эффект сохранится при условии, что взаимодействия инвариантны относительно обращения времени, вращательная инвариантность не играет никакой роли. (Например, это справедливо, если на систему действуют произвольные статические гравитационные и электрические поля.) Теперь, предположим, что  $\Psi$  является собственным состоянием гамильтонiana  $H$ . Так как оператор  $T$  коммутирует с гамильтонианом,  $T\Psi$  также будет собственным состоянием гамильтониана. Возникает вопрос: соответствуют ли эти состояния одной и той же физической ситуации? Если это так, то  $T\Psi$  отличается от  $\Psi$  только фазой:

$$T\Psi = \zeta\Psi,$$

но тогда

$$T^2\Psi = T(\zeta\Psi) = \zeta^*T\Psi = |\zeta|^2\Psi = \Psi,$$

что противоречит уравнению (2.6.28). Как можно видеть, любое собственное состояние  $\Psi$  гамильтониана, удовлетворяющее уравнению (2.6.28), должно быть вырождено. Этот эффект получил название “вырождения Крамерса” [10]. Конечно, если имеется инвариантность относительно вращений, этот эффект тривиален, поскольку полный угловой момент  $j$  любого состояния системы должен быть полуцелым, и поэтому имеется  $2j + 2 = 2, 4, \dots$  вырожденных состояний. Неожиданность состоит в том, что (по меньшей мере) двукратное вырождение сохраняется, даже если вращательная инвариантность возмущена внешними полями (например, электростатическим полем), если они инвариантны по отношению к действию  $T$ . В частности, если частица имеет электрический или гравитационный дипольный момент, вырождение  $2j + 1$  состояний этой частицы, отличающихся значением проекции момента на ось  $Oz$  полностью снимается в статическом электрическом или гравитационном поле. Поэтому существование у частицы дипольного момента запрещено инвариантностью относительно обращения времени.

Для полноты следует упомянуть, что операторы  $P$  и  $T$  могут оказывать более сложное действие на мультиплеты частиц с одинаковыми массами. Эта ситуация будет рассмотрена в приложении А. В действительности же она скорее всего не реализуется.

## § 2.7. Проективные представления<sup>1)</sup>

Как указывалось в § 2.2, группа симметрии может быть представлена на физических состояниях проективно. Это означает, что элементы  $T$ ,  $\bar{T}$ , и т.д. группы симметрии могут быть представлены на физическом гильбертовом пространстве унитарными операторами  $U(T)$ ,  $U(\bar{T})$  и т.д., удовлетворяющими правилу композиции

$$U(T)U(\bar{T}) = \exp(i\phi(T, \bar{T}))U(T\bar{T}) \quad (2.7.1)$$

с действительной фазой  $\phi$  (здесь черта означает только то, что один оператор симметрии отличается от другого). Основным требованием, которому должна удовлетворять фаза  $\phi$  в уравнении (2.7.1), является условие ассоциативности

$$U(T_3)(U(T_2)U(T_1)) = (U(T_3)U(T_2))U(T_1),$$

означающее, что

$$\phi(T_2, T_1) + \phi(T_3, T_2T_1) = \phi(T_3, T_2) + \phi(T_3T_2, T_1). \quad (2.7.2)$$

Хотя любая фаза вида

$$\phi(T, \bar{T}) = \alpha(T\bar{T}) - \alpha(T) - \alpha(\bar{T}) \quad (2.7.3)$$

автоматически удовлетворяет уравнению (2.7.2), проективное представление с такой фазой эквивалентно обычному представлению, что легко видеть, совершив замену  $U(T)$  на

$$\tilde{U}(T) \equiv U(T) \exp(i\alpha(T)),$$

для которого

$$\tilde{U}(T)\tilde{U}(\bar{T}) = \tilde{U}(T\bar{T}).$$

Любой набор функций  $\phi(T, \bar{T})$ , удовлетворяющих уравнению (2.7.2) и отличающихся друг от друга на произвольную функцию  $\Delta\phi(T, \bar{T})$  вида (2.7.3), называется “два-коциклом”. Коцикл, содержащий функцию  $\phi = 0$ , является тривиальным. Как легко видеть, он состоит из функций вида (2.7.3), которые можно устраниТЬ переопределением  $U(T)$ . Нас интересует, допускает ли группа симметрии какие-либо нетривиальные два-коциклы, т.е. может ли она иметь на физическом гильбертовом пространстве представление, являющееся *существенно* проективным в том смысле, что фазу  $\phi(T, \bar{T})$  нельзя устраниТЬ переопределением  $U(T)$ .

Для ответа на этот вопрос полезно понять, как нетривиальная фаза  $\phi$  из уравнения (2.7.1) изменяет коммутационные соотношения для

---

<sup>1)</sup> Материал этого параграфа выходит за рамки основного содержания книги и может быть опущен при первом чтении.

генераторов инфинитезимальных преобразований. Если  $\bar{T}$  или  $T$  — тождественные преобразования, фаза  $\phi$  должна равняться нулю

$$\phi(T, 1) = \phi(1, \bar{T}) = 0. \quad (2.7.4)$$

Если и  $T$ , и  $\bar{T}$  близки к тождественному преобразованию, фаза должна быть мала. Параметризуем групповые элементы координатами  $\theta^a$  (см. § 2.2) и воспользуемся соотношением  $T(0) \equiv 1$ . Тогда из уравнения (2.7.4) следует, что разложение  $\phi(T(\theta), T(\bar{\theta}))$  вблизи  $\theta = \bar{\theta} = 0$  должно начинаться с членов порядка  $\theta\bar{\theta}$ :

$$\phi(T(\theta), T(\bar{\theta})) = f_{ab}\theta^a\bar{\theta}^b + \dots, \quad (2.7.5)$$

где  $f_{ab}$  — некоторые действительные константы. Разложив (2.7.1) в ряд и подставив в него (2.7.5), после несложных преобразований (см. вывод соотношения (2.2.22)) имеем

$$[t_b, t_c] = iC^a{}_{bc}t_a + iC_{bc}1, \quad (2.7.6)$$

где  $C_{bc}$  — антисимметричный коэффициент:

$$C_{bc} = -f_{bc} + f_{cb}. \quad (2.7.7)$$

Возникновение в правой части коммутационного соотношения членов, пропорциональных единичному элементу (так называемых *центральных зарядов*) отражает тот факт, что фаза в проективном представлении группы для алгебры Ли нетривиальна.

Из тождества Якоби следует существование важного соотношения, связывающего константы  $C_{ab}$  и  $C^a{}_{bc}$ . Вычислим коммутатор (2.7.6) с  $t_d$ , а затем выполним в ответе замену индексов  $b, c, d$ , на  $c, b, d$  и  $d, b, c$ . Сумма трех двойных коммутаторов в левой части тождества Якоби тождественно равна нулю, и поэтому

$$C^a{}_{bc}C^e{}_{ad} + C^a{}_{cd}C^e{}_{ab} + C^a{}_{db}C^e{}_{ac} = 0 \quad (2.7.8)$$

и

$$C^a{}_{bc}C_{ad} + C^a{}_{cd}C_{ab} + C^a{}_{db}C_{ac} = 0. \quad (2.7.9)$$

Всегда существует класс ненулевых  $C_{ab}$ , удовлетворяющих уравнению (2.7.9):

$$C_{ab} = C^e{}_{ab}\phi_e. \quad (2.7.10)$$

Здесь  $\phi_e$  — произвольный набор действительных констант. Для таких решений центральные заряды из уравнения (2.7.6) можно устраниТЬ, если переопределить генераторы:

$$t_a \rightarrow \tilde{t}_a \equiv t_a + \phi_a. \quad (2.7.11)$$

Тогда новые генераторы будут удовлетворять коммутационным соотношениям без центральных зарядов:

$$[\tilde{t}_b, \tilde{t}_c] = iC^a{}_{bc}\tilde{t}_a. \quad (2.7.12)$$

В рамках некоторой произвольной алгебры Ли решения уравнения (2.7.9), отличные от (2.7.10), могут и не существовать.

Теперь мы можем сформулировать основную теорему, объясняющую, когда может возникать существенно проективное представление. Фазу любого представления  $U(T)$  данной группы можно выбрать так, чтобы в уравнении (2.7.1)  $\phi$  было равно нулю, если выполнены два условия:

а) генераторы группы в этом представлении можно переопределить (см. (2.7.11)) так, чтобы все центральные заряды алгебры Ли были устранины;

б) группа односвязна, т.е. любые два ее элемента можно соединить непрерывной кривой, лежащей внутри группы, и любые две таких кривые могут быть непрерывно трансформированы друг в друга (эквивалентным является утверждение о том, что любая петля, начинаящаяся и заканчивающаяся одним и тем же элементом, может быть стянута в точку).

Эта теорема будет доказана в приложении Б, кроме того, там будет прокомментирован случай неодносвязных групп. Как можно видеть, существуют только два (стандартных) пути возникновения существенно проективного представления: алгебраический, поскольку группа представлена проективно даже вблизи единицы, либо топологический, так как группа неодносвязна, и, следовательно, существует такой путь, идущий из 1 в  $\bar{T}$ , что путь, идущий из 1 через  $T$  в  $\bar{T}$ , нельзя непрерывно в него деформировать. В последнем случае фаза  $\phi$  в уравнении (2.7.1) зависит от выбора стандартных путей, ведущих из начала к различным элементам группы, которые используются для определения соответствующих  $U$ -операторов.

Рассмотрим по очереди каждую из этих возможностей в случае неоднородной группы Лоренца.

### (A) Алгебра

При наличии центральных зарядов коммутационные соотношения для генераторов неоднородной группы Лоренца вместо (2.4.12)–(2.4.14) имеют вид

$$i[J^{\mu\nu}, J^{\rho\sigma}] = \eta^{\nu\rho} J^{\mu\sigma} - \eta^{\mu\rho} J^{\nu\sigma} - \eta^{\sigma\mu} J^{\rho\nu} + \eta^{\sigma\nu} J^{\rho\mu} + C^{\rho\sigma,\mu\nu}, \quad (2.7.13)$$

$$i[P^\mu, J^{\rho\sigma}] = \eta^{\mu\rho} P^\sigma - \eta^{\mu\sigma} P^\rho + C^{\rho\sigma,\mu}, \quad (2.7.14)$$

$$i[J^{\mu\nu}, P^\rho] = \eta^{\nu\rho} P^\mu - \eta^{\mu\rho} P^\nu + C^{\rho,\mu\nu}, \quad (2.7.15)$$

$$i[P^\mu, P^\rho] = C^{\rho,\mu}. \quad (2.7.16)$$

Как мы видим,  $C$  также удовлетворяют условиям антисимметрии:

$$C^{\rho\sigma,\mu\nu} = -C^{\mu\nu,\rho\sigma}, \quad (2.7.17)$$

$$C^{\rho\sigma,\mu} = -C^{\mu,\rho\sigma}, \quad (2.7.18)$$

$$C^{\rho,\mu} = -C^{\mu,\rho}. \quad (2.7.19)$$

Покажем теперь, что существуют дополнительные алгебраические соотношения на эти константы, благодаря которым их можно устранить переопределением  $J^{\mu\nu}$  и  $P^\mu$  (т.е. переопределением фазы операторов  $U(\Lambda, a)$ ). Воспользуемся тождествами Якоби

$$[J^{\mu\nu}, [P^\rho, P^\sigma]] + [P^\sigma, [J^{\mu\nu}, P^\rho]] + [P^\rho, [P^\sigma, J^{\mu\nu}]] = 0, \quad (2.7.20)$$

$$[J^{\lambda\eta}, [J^{\mu\nu}, P^\rho]] + [P^\rho, [J^{\lambda\eta}, J^{\mu\nu}]] + [J^{\mu\nu}, [P^\rho, J^{\lambda\eta}]] = 0, \quad (2.7.21)$$

$$[J^{\lambda\eta}, [J^{\mu\nu}, J^{\rho\sigma}]] + [J^{\rho\sigma}, [J^{\lambda\eta}, J^{\mu\nu}]] + [J^{\mu\nu}, [J^{\rho\sigma}, J^{\lambda\eta}]] = 0 \quad (2.7.22)$$

(тождество Якоби, включающее три  $P$ , удовлетворяется автоматически и, следовательно, не дает никакой новой информации). Используя уравнения (2.7.13)–(2.7.16) и (2.7.20)–(2.7.22), находим, что

$$0 = \eta^{\nu\rho} C^{\mu,\sigma} - \eta^{\mu\rho} C^{\nu,\sigma} - \eta^{\nu\sigma} C^{\mu,\rho} + \eta^{\mu\sigma} C^{\nu,\rho}, \quad (2.7.23)$$

$$0 = \eta^{\nu\rho} C^{\mu,\lambda\eta} - \eta^{\mu\rho} C^{\nu,\lambda\eta} - \eta^{\mu\nu} C^{\rho,\lambda\nu} + \eta^{\lambda\mu} C^{\rho,\eta\nu} + \\ + \eta^{\lambda\nu} C^{\rho,\mu\eta} - \eta^{\eta\nu} C^{\rho,\mu\lambda} + \eta^{\rho\lambda} C^{\eta,\mu\nu} - \eta^{\rho\eta} C^{\lambda,\mu\nu}, \quad (2.7.24)$$

$$0 = \eta^{\nu\rho} C^{\mu\sigma,\lambda\eta} - \eta^{\mu\rho} C^{\nu\sigma,\lambda\eta} - \eta^{\sigma\mu} C^{\rho\nu,\lambda\eta} + \eta^{\sigma\nu} C^{\rho\mu,\lambda\eta} + \\ + \eta^{\eta\mu} C^{\lambda\nu,\rho\sigma} - \eta^{\lambda\mu} C^{\eta\nu,\rho\sigma} - \eta^{\nu\lambda} C^{\mu\eta,\rho\sigma} + \eta^{\nu\eta} C^{\mu\lambda,\rho\sigma} + \\ + \eta^{\sigma\lambda} C^{\rho\eta,\mu\nu} - \eta^{\rho\lambda} C^{\sigma\eta,\mu\nu} - \eta^{\eta\rho} C^{\lambda\sigma,\mu\nu} + \eta^{\eta\sigma} C^{\lambda\rho,\mu\nu}. \quad (2.7.25)$$

Сворачивая (2.7.23) с  $\eta_{\nu\rho}$ , получаем

$$C^{\mu,\sigma} = 0. \quad (2.7.26)$$

Возможно, что константы  $C^{\mu,\lambda\eta}$  и  $C^{\rho\sigma,\mu\nu}$  не равны нулю, тем не менее их алгебраическая структура достаточно проста, и их можно легко устраниć переопределением соответственно  $P^\mu$  и  $J^{\mu\nu}$ . Свертка уравнения (2.7.24) с  $\eta_{\nu\rho}$  дает

$$C^{\mu,\lambda\eta} = \eta^{\mu\eta} C^\lambda - \eta^{\mu\lambda} C^\eta, \quad (2.7.27)$$

$$C^\lambda \equiv \frac{1}{3} \eta_{\rho\nu} C^{\rho,\lambda\nu}. \quad (2.7.28)$$

Кроме того, сворачивая (2.7.25) с  $\eta_{\nu\rho}$ , можно получить, что

$$C^{\mu\sigma,\lambda\eta} = \eta^{\eta\mu} C^{\lambda\sigma} - \eta^{\lambda\mu} C^{\eta\sigma} + \eta^{\sigma\lambda} C^{\eta\mu} - \eta^{\eta\sigma} C^{\lambda\mu}, \quad (2.7.29)$$

$$C^{\lambda\sigma} \equiv \frac{1}{2} \eta_{\nu\rho} C^{\lambda\nu,\sigma\rho} \quad (2.7.30)$$

(эти выражения автоматически удовлетворяют уравнениям (2.7.24) и (2.7.25), поэтому из тождеств Якоби нельзя получить никакой новой информации). Теперь мы видим, что если  $C$  не равны нулю, то их можно устраниć, определив новые генераторы

$$\tilde{P}^\mu \equiv P^\mu + C^\mu, \quad (2.7.31)$$

$$\tilde{J}^{\mu\sigma} \equiv J^{\mu\sigma} + C^{\mu\sigma}, \quad (2.7.32)$$

для которых коммутационные соотношения не содержат центральные заряды:

$$i[\tilde{J}^{\mu\nu}, \tilde{J}^{\rho\sigma}] = \eta^{\nu\rho}\tilde{J}^{\mu\sigma} - \eta^{\mu\rho}\tilde{J}^{\nu\sigma} - \eta^{\sigma\mu}\tilde{J}^{\rho\nu} + \eta^{\sigma\nu}\tilde{J}^{\rho\mu}, \quad (2.7.33)$$

$$i[\tilde{J}^{\mu\nu}, \tilde{P}^\rho] = \eta^{\nu\rho}\tilde{P}^\mu - \eta^{\mu\rho}\tilde{P}^\nu, \quad (2.7.34)$$

$$i[\tilde{P}^\mu, \tilde{P}^\rho] = 0. \quad (2.7.35)$$

Далее мы всегда будем рассматривать только коммутационные соотношения вида (2.7.33)–(2.7.35), опуская тильду.

Равенство нулю центрального заряда в алгебре  $J^{\mu\nu}$  можно сразу вывести из того, что данная алгебра является “полупростой” (полупростыми алгебрами Ли являются алгебры Ли, не имеющие “инвариантных абелевых” подалгебр и состоящие из коммутирующих между собой генераторов, причем их коммутаторы с любыми другими генераторами также принадлежат подалгебре). Существует общая теорема [11], согласно которой в полупростых алгебрах Ли любые центральные заряды можно обратить в нуль переопределением генераторов, аналогичным (2.7.32). С другой стороны, полная алгебра Пуанкаре, заданная генераторами  $J^{\mu\nu}$  и  $P^\mu$ , не является полупростой ( $P^\mu$  образуют инвариантную абелеву подалгебру). Поэтому для того чтобы показать, что ее центральные заряды также могут быть таким образом обращены в нуль, было необходимо привлечение другой идеи. В самом деле, неполупростая алгебра Галилея, которая обсуждалась в § 2.4, действительно допускает центральный заряд — массу  $M$ .

Как можно видеть, неоднородная группа Лоренца удовлетворяет первому из двух условий, необходимых для исключения существенно проективного представления. Удовлетворяет ли она второму?

### (Б) Топология

Для того чтобы исследовать топологию неоднородной группы Лоренца, очень удобно представить неоднородное преобразование Лоренца комплексными матрицами  $2 \times 2$ . Для конструирования эрмитовой матрицы  $2 \times 2$  можно использовать любой действительный 4-вектор  $V^\mu$ :

$$v \equiv V^\mu \sigma_\mu = \begin{pmatrix} V^0 + V^3 & V^1 - iV^2 \\ V^1 + iV^2 & V^0 - V^3 \end{pmatrix}, \quad (2.7.36)$$

где  $\sigma_\mu$  — обычные матрицы Паули с  $\sigma_0 \equiv 1$ . Обратно, всякую эрмитову матрицу  $2 \times 2$  можно представить в таком виде, поэтому она определяет действительный 4-вектор  $V^\mu$ .

Свойство эрмитовости сохраняется при преобразованиях

$$v \rightarrow \lambda v \lambda^\dagger, \quad (2.7.37)$$

где  $\lambda$  — произвольная комплексная  $2 \times 2$  матрица. Более того, ковариантный квадрат 4-вектора равен

$$V_\mu V^\mu = (V^1)^2 + (V^2)^2 + (V^3)^2 - (V^0)^2 = -\text{Det } v. \quad (2.7.38)$$

Этот детерминант также сохраняется при преобразованиях (2.7.37), если

$$|\text{Det } \lambda| = 1. \quad (2.7.39)$$

Таким образом, любая комплексная  $2 \times 2$  матрица  $\lambda$ , удовлетворяющая уравнению (2.7.39), определяет действительное линейное преобразование  $V^\mu$ , оставляющее инвариантным уравнение (2.7.38), т.е. неоднородное преобразование Лоренца  $\Lambda(\lambda)$ :

$$\lambda V^\mu \sigma_\mu \lambda^\dagger = (\Lambda^\mu{}_\nu(\lambda) V^\nu) \sigma_\mu. \quad (2.7.40)$$

Для двух таких матриц  $\lambda$  и  $\bar{\lambda}$  имеем

$$\begin{aligned} (\lambda \bar{\lambda}) V^\mu \sigma_\mu (\lambda \bar{\lambda})^\dagger &= \lambda (\bar{\lambda} V^\mu \sigma_\mu \bar{\lambda}^\dagger) \lambda^\dagger = \\ &= \lambda \Lambda^\mu{}_\nu(\bar{\lambda}) V^\nu \sigma_\mu \lambda^\dagger = \Lambda^\mu{}_\rho(\lambda) \Lambda^\rho{}_\nu(\bar{\lambda}) V^\nu \sigma_\mu, \end{aligned}$$

и поэтому

$$\Lambda(\lambda \bar{\lambda}) = \Lambda(\lambda) \Lambda(\bar{\lambda}). \quad (2.7.41)$$

Однако, две матрицы  $\lambda$ , отличающиеся только полной фазой, одинаково действуют на  $v$  в уравнении (2.7.37), и, таким образом, соответствуют одному и тому же преобразованию Лоренца. Поэтому удобно подобрать фазу матриц  $\lambda$  так, чтобы

$$\text{Det } \lambda = 1, \quad (2.7.42)$$

что согласуется с уравнением (2.7.41). Комплексные матрицы  $2 \times 2$  с равным единице детерминантом образуют группу  $SL(2, C)$  ( $SL$  означает “специальные линейные”, т.е. равенство единице детерминанта матриц, входящих в группу, а  $C$  обозначает “комплексные”). Элементы этой группы зависят от  $4 - 1 = 3$  комплексных или 6 действительных параметров, от такого же количества параметров зависят элементы группы Лоренца. Тем не менее  $SL(2, C)$  отличается от группы Лоренца: если  $\lambda$  — матрица в  $SL(2, C)$ , тогда  $-\lambda$  — тоже принадлежит этой группе, причем обе матрицы совершают одно и тоже преобразование Лоренца в уравнении (2.7.37). Действительно, легко видеть, что матрица

$$\lambda(\theta) = \begin{pmatrix} e^{i\theta/2} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta/2} \end{pmatrix}$$

совершает преобразование Лоренца  $\Lambda(\lambda(\theta))$ , представляющее собой просто вращение на угол  $\theta$  вокруг оси  $Oz$ , и, следовательно,

$$\lambda = -1$$

производит вращение на угол  $2\pi$ . Группа Лоренца отличается от  $SL(2, C)$  и напоминает скорее<sup>2)</sup>  $SL(2, C)/Z_2$  — группу комплексных матриц  $2 \times 2$  с единичным детерминантом и отождествленными элементами  $\lambda$  и  $-\lambda$ .

Какова топология группы Лоренца? Согласно теореме о полярном разложении [12] любую комплексную несингулярную матрицу  $\lambda$  можно записать в виде

$$\lambda = ue^h,$$

где  $u$  — унитарная, а  $h$  — эрмитова матрица:

$$u^\dagger u = 1, \quad h^\dagger = h.$$

Поскольку  $\text{Det } u$  равен по модулю единице, а  $\text{Det } \exp h = \exp \text{Tr } h$  является действительным и положительным, для выполнения (2.7.42) необходимо, чтобы

$$\text{Det } u = 1,$$

$$\text{Tr } h = 0$$

(множитель  $u$  означает существование подгруппы вращений группы Лоренца; если  $u$  унитарен, то

$$\text{Tr}(uvu^+) = \text{Tr } v,$$

поэтому

$$V^0 = \frac{1}{2} \text{Tr } v$$

является левоинвариантным по отношению к  $\Lambda(u)$ ). Это разложение является единственным, поэтому  $SL(2, C)$  с топологической точки зрения представляет собой просто прямое произведение (т.е. набор пар точек) пространства всех  $u$  на пространство всех  $h$ . Любая эрмитова бесследовая матрица  $h$  размера  $2 \times 2$  может быть представлена как

$$h = \begin{pmatrix} c & a - ib \\ a + ib & -c \end{pmatrix}$$

с произвольными действительными числами  $a, b, c$ . Поэтому пространство всех  $h$  с топологической точки зрения совпадает с обычным трехмерным плоским пространством  $R_3$ . С другой стороны, любую унитарную матрицу  $2 \times 2$  с единичным детерминантом можно представить в виде

$$u = \begin{pmatrix} d + ie & f + ig \\ -f + ig & d - ie \end{pmatrix},$$

---

<sup>2)</sup> Группа  $Z_2$  состоит из элементов  $+1$  и  $-1$ . Вообще, когда мы пишем  $G/H$ , где  $H$  — инвариантная подгруппа группы  $G$ , то имеем в виду группу  $G$  с отождествленными элементами  $g$  и  $gh$ , если  $g \in G$  и  $h \in H$ . Подгруппа  $Z_2$  тривиально инвариантна, потому что ее элементы коммутируют со всеми элементами  $SL(2, C)$ .

где на  $d, e, f, g$  накладывается условие

$$d^2 + e^2 + f^2 + g^2 = 1.$$

Поэтому пространство  $SU(2)$  всех  $u$  топологически эквивалентно  $S_3$ , трехмерной поверхности шара в плоском четырехмерном пространстве. Таким образом,  $SL(2, C)$  имеет такую же топологию, как прямое произведение  $R_3 \times S_3$ . Это произведение односвязно: любая кривая, соединяющая две точки из  $R_3$  или  $S_3$ , может быть деформирована в любую другую. То же самое верно и для прямого произведения (сфера  $S_n$ , за исключением круга  $S_1$ , являются односвязными). Нас, однако, интересует  $SL(2, C)/Z_2$ , а не  $SL(2, C)$ . Отождествление  $\lambda$  с  $-\lambda$  эквивалентно отождествлению унитарных множителей  $u$  и  $-u$  (поскольку  $e^h$  всегда положительно определена). Поэтому группа Лоренца имеет топологию  $R_3 \times S_3/Z_2$ , где  $S_3/Z_2$  — трехмерная сферическая поверхность с отождествленными противоположными точками сферы. Эта поверхность *неодносвязна*. Например, путь на  $S_3$  из  $u$  в  $u'$  нельзя непрерывно деформировать в путь на  $S_3$  из  $u$  в  $-u'$  даже в том случае, когда эти два пути связывают одинаковые точки из  $S_3/Z_2$ . Фактически,  $S_3/Z_2$  двусвязна; пути между любыми двумя точками распадаются на два класса в зависимости от того, включают они или нет инверсию  $u \rightarrow -u$ , и любой путь из одного класса может быть деформирован в другой путь из того же класса. Эквивалентным является утверждение о том, что двойная петля, идущая дважды по одному и тому же пути из любого элемента назад в него же, может быть непрерывно деформирована в точку (как будет обсуждаться в приложении В, с точки зрения математика это означает, что фундаментальной или первой гомотопической группой для  $S_3/Z_2$  является  $Z_2$ ). Аналогично, неоднородная группа Лоренца имеет ту же топологию, что и  $R_4 \times R_3 \times S_3/Z_2$ , и, следовательно, также является двусвязной.

Так как группа Лоренца (однородная и неоднородная) неодносвязна, она действительно имеет существенно проективное представление. Однако поскольку дважды проходящая через  $1, \Lambda, \bar{\Lambda}$  и обратно в  $1$  двойная петля *действительно* может быть деформирована в точку, верно соотношение

$$[U(\Lambda)U(\bar{\Lambda})U^{-1}(\Lambda\bar{\Lambda})]^2 = 1$$

и, следовательно, фаза  $\phi(\Lambda, \bar{\Lambda})$  равна  $\pi$  или  $-\pi$ :

$$U(\Lambda)U(\bar{\Lambda}) = \pm U(\Lambda\bar{\Lambda}). \quad (2.7.43)$$

Аналогично, для неоднородной группы Лоренца имеем

$$U(\Lambda, a)U(\bar{\Lambda}, \bar{a}) = \pm U(\Lambda\bar{\Lambda}, \Lambda\bar{a} + a). \quad (2.7.44)$$

Такие “представления с точностью до знака” хорошо известны в физике; они описывают состояния с целым спином, для которых знаки

в уравнениях (2.7.43) и (2.7.44) всегда равны  $+1$ , и состояния с полуцелым спином, для которых эти знаки равны  $+1$  или  $-1$  в зависимости от того, является или не является путь, проходящий через  $1$ ,  $\Lambda$ ,  $\bar{\Lambda}$  и обратно в  $1$ , непрерывно деформируемым в точку. Разница возникает из-за того, что вращение на угол  $2\pi$  вокруг оси  $Oz$ , действуя на состояние с третьей компонентой углового момента  $\sigma$ , умножает его на фазу  $e^{2i\pi\sigma}$  и, поэтому, ничего не меняя в случае целого спина, меняет знак, когда действует на состояние с полуцелым спином (эти два случая соответствуют двум неприводимым представлениям первой гомотопической группы,  $Z_2$ ). Таким образом, из уравнений (2.7.43) или (2.7.44) следует правило суперотбора: нельзя смешивать состояния с целым и полуцелым спином.

В случае конечных масс ограничение на возможные значения спина было предварительно получено чисто алгебраическими средствами из хорошо известных представлений генераторов малой группы. В данном случае это просто матрицы углового момента  $\tilde{J}^{(j)}$  с целым или полуцелым  $j$ . С другой стороны, в случае нулевой массы действие преобразований малой группы на физические одночастичные состояния представляет собой вращение вокруг импульса, поэтому для ограничения на целую и полуцелую спиральность нет *алгебраических* причин. Существует, однако, *топологическая* причина: вращение вокруг импульса на угол  $4\pi$  можно непрерывно деформировать в отсутствие вращения вообще. Поэтому множитель  $\exp(4\pi i\sigma)$  должен быть равен единице, а  $\sigma$  должна быть целой или полуцелой величиной.

Вместо того чтобы работать с проективными представлениями и накладывать правило суперотбора, можно расширить группу Лоренца, рассматривая вместо  $SL(2, C)/Z_2$  группу  $SL(2, C)$ . Инвариантность по отношению к обычным вращениям запрещает переходы между состояниями целого и полуцелого полного спина. Таким образом, единственная разница состоит в том, что теперь группа является односвязной и, следовательно, имеет только обычные, непроективные представления, и правило суперотбора вывести нельзя. Из этого не следует, что действительно можно спроектировать физические системы на состояния — линейные суперпозиции состояний с целым и полуцелым спином. На самом деле, для того чтобы показать, что такие суперпозиции невозможны, нельзя использовать существующую в природе лоренц-инвариантность.

Аналогичные замечания справедливы в случае любой другой группы симметрии. Если ее алгебра Ли содержит центральные заряды, то ее всегда можно расширить так, чтобы обратить центральные заряды в нуль. Для этого надо включить в алгебру генераторы, которые коммутируют с любым элементом алгебры и имеют собственные значения, равные центральным зарядам. Мы придерживались этой схемы в конце § 2.4, когда присоединяли к алгебре Ли галилеевской группы оператор массы. В расширенной алгебре Ли нет центральных зарядов.

дов, поэтому часть группы вблизи единицы имеет только обычные представления, и правила суперотбора не возникает. Аналогично, даже если группа Ли  $G$  неодносвязна, всегда можно перейти к  $C/H$ , где  $C$  — односвязная “универсальная накрывающая группа” группы  $G$ , а  $H$  — ее инвариантная подгруппа<sup>3)</sup>. Вообще говоря, в качестве группы симметрии вместо  $G$  можно взять группу  $C$  — все физические следствия симметрий будут совпадать, за исключением того, что для группы  $G$  возникает правило суперотбора, а для группы  $C$  — нет. Говоря кратко, проблема правил суперотбора является довольно академической. *Можно или нет спроектировать физические системы на произвольную суперпозицию состояний?* Этот вопрос нельзя решить, основываясь на принципах симметрии, поскольку какую бы мы ни выбрали группу симметрии природы, всегда существует другая группа, имеющая такие же физические следствия, за исключением отсутствия правила суперотбора.

## Приложение А. Теорема о представлении симметрии

В этом приложении будет дано доказательство фундаментальной теоремы Вигнера [2], согласно которой любое преобразование симметрии можно представить на гильбертовом пространстве физических состояний операторами, которые являются либо линейными и унитарными, либо антилинейными и антиунитарными. В основном при доказательстве мы будем пользоваться тем, что всякое преобразование симметрии представляет собой преобразование луча  $T$ , сохраняющее вероятности переходов в том смысле, что если  $\Psi_1$  и  $\Psi_2$  — векторы состояний, принадлежащие лучам  $\mathcal{R}_1$  и  $\mathcal{R}_2$ , то любые векторы состояний  $\Psi'_1$  и  $\Psi'_2$ , принадлежащие преобразованному лучам  $T\mathcal{R}_1$  и  $T\mathcal{R}_2$  удовлетворяют соотношению

$$|(\Psi'_1, \Psi'_2)|^2 = |(\Psi_1, \Psi_2)|^2. \quad (2.A.1)$$

Потребуем также, чтобы для любого преобразования симметрии существовало обратное преобразование, сохраняющее вероятности переходов в том же самом смысле.

Сначала рассмотрим некоторый полный ортонормированный набор векторов состояний  $\Psi_k$ , принадлежащих лучам  $\mathcal{R}_k$ , такой что

$$(\Psi_k, \Psi_l) = \delta_{kl}. \quad (2.A.2)$$

---

<sup>3)</sup> Первой гомотопической группой для  $C/H$  является  $H$ . Как мы видели, накрывающей группой неоднородной группы Лоренца является  $SL(2, C)$ , а накрывающей группой группы трехмерных вращений —  $SU(2)$ . Подобная связь с  $SL$  и  $SU$  группами имеет место только для 3, 4 или 6 измерений. В случае произвольной размерности  $d$  накрывающей группе группы  $SO(d)$  дают специальное название “ $Spin(d)$ ”.

Пусть  $\Psi'_k$  — некоторая произвольная выборка векторов состояний, принадлежащих преобразованным лучам  $T\mathcal{S}_k$ . Из уравнения (2.A.1) имеем

$$|(\Psi'_k, \Psi'_l)|^2 = |(\Psi_k, \Psi_l)|^2 = \delta_{kl}.$$

Но  $(\Psi'_k, \Psi'_k)$  — действительная положительная величина по определению, следовательно она равна единице, и

$$(\Psi'_k, \Psi'_l) = \delta_{kl}. \quad (2.A.3)$$

Как легко видеть, преобразованные состояния  $\Psi'_k$  также образуют полный набор: если бы имелся какой-нибудь ненулевой вектор состояния  $\Psi'$ , ортогональный ко всем  $\Psi'_k$ , тогда обратное преобразование луча, которому принадлежит  $\Psi'$ , состояло бы из ненулевых векторов состояний  $\Psi''$ , для которых при любых  $k$

$$|(\Psi_k, \Psi'')|^2 = |(\Psi'_k, \Psi')|^2 = 0,$$

что невозможно, поскольку по предположению  $\Psi_k$  образуют полный набор.

Зафиксируем теперь свободу в выборе фаз состояний  $\Psi'_k$ . Для этого выделим одно из состояний  $\Psi_k$ , например  $\Psi_1$ , и рассмотрим векторы

$$\Upsilon_k \equiv \frac{1}{\sqrt{2}} [\Psi_1 + \Psi_2], \quad (2.A.4)$$

принадлежащие некоторому лучу  $\mathcal{S}_k$ , где  $k \neq 1$ . Любой вектор состояния  $\Upsilon'_k$ , принадлежащий преобразованному лучу  $T\mathcal{S}_k$ , можно разложить по векторам состояний  $\Psi'_l$ :

$$\Upsilon'_k = \sum_l c_{kl} \Psi'_l.$$

Из уравнения (2.A.1) имеем

$$|c_{kk}| = |c_{k1}| = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Если  $l \neq k$  и  $l \neq 1$ , то

$$c_{kl} = 0.$$

При любом фиксированном  $k$  соответствующим выбором фаз векторов состояний  $\Upsilon'_k$  и  $\Psi'_k$  можно точно зафиксировать фазы двух ненулевых коэффициентов  $c_{kk}$  и  $c_{k1}$  так, чтобы они были равны  $1/\sqrt{2}$ . Выбранные таким образом векторы состояний  $\Upsilon'_k$  и  $\Psi'_k$  будут обозначаться  $U\Upsilon_k$  и  $U\Psi_k$ . Как было показано,

$$U \frac{1}{\sqrt{2}} [\Psi_k + \Psi_1] = U\Upsilon_k = \frac{1}{\sqrt{2}} [U\Psi_k + U\Psi_1]. \quad (2.A.5)$$

Однако остается найти  $U\Psi$  для произвольных векторов состояний  $\Psi$ .

Рассмотрим произвольный вектор состояния  $\Psi$ , принадлежащий некоторому лучу  $\mathcal{R}$ , и разложим его по  $\Psi_k$ :

$$\Psi = \sum_k C_k \Psi_k. \quad (2.A.6)$$

Аналогично, любое состояние  $\Psi'$ , принадлежащее преобразованному лучу  $\mathcal{R}$ , можно разложить по полному ортогональному набору  $U\Psi_k$ :

$$\Psi' = \sum_k C'_k U\Psi_k. \quad (2.A.7)$$

Из равенства  $|(\Psi_k, \Psi)|^2$  и  $|(\Psi_k, \Psi')|^2$  следует, что при любых  $k$  (включая  $k = 1$ )

$$|C_k|^2 = |C'_k|^2, \quad (2.A.8)$$

а из равенства  $|(\Psi_k, \Psi)|^2$  и  $|(\Psi_k, \Psi')|^2$  — что при любых  $k \neq 1$

$$|C_k + C_1|^2 = |C'_k + C'_1|^2. \quad (2.A.9)$$

Разделив (2.A.9) на (2.A.8), получаем

$$\operatorname{Re}(C_k/C_1) = \operatorname{Re}(C'_k/C'_1), \quad (2.A.10)$$

откуда с учетом соотношения (2.A.8) находим

$$\operatorname{Im}(C_k/C_1) = \pm \operatorname{Im}(C'_k/C'_1), \quad (2.A.11)$$

и, следовательно, либо

$$C_k/C_1 = C'_k/C'_1, \quad (2.A.12)$$

либо

$$C_k/C_1 = (C'_k/C'_1)^*. \quad (2.A.13)$$

Более того, можно показать, что для всех  $k$  реализуется один и тот же случай (этот шаг в доказательстве был опущен Вигнером). Для этого предположим, что при некотором  $k$  справедливо соотношение  $C_k/C_1 = C'_k/C'_1$ , а при некотором  $l \neq k$  вместо этого имеет место  $C_l/C_1 = (C'_l/C'_1)^*$ . Предположим далее, что оба соотношения комплексны, так что они действительно существенно отличаются друг от друга (для этого необходимо выполнение условий  $k \neq l$ ,  $k \neq 1$  и  $l \neq 1$ .) Покажем теперь, что это невозможно.

Определим вектор состояния  $\Phi \equiv \frac{1}{\sqrt{3}} [\Psi_1 + \Psi_k + \Psi_l]$ . Так как любые отношения коэффициентов в этом случае действительны, нужно получить такие же отношения для любого вектора состояния  $\Phi'$ , принадлежащего преобразованному лучу:

$$\Phi' = \frac{\alpha}{\sqrt{3}} [U\Psi_1 + U\Psi_k + U\Psi_l],$$

где  $\alpha$  — фазовый множитель с  $|\alpha| = 1$ . Тогда из равенства вероятностей переходов  $|(\Phi, \Psi)|$  и  $|(\Phi', \Psi')|$  следует, что

$$\left| 1 + \frac{C'_k}{C'_1} + \frac{C'_l}{C'_1} \right|^2 = \left| 1 + \frac{C_k}{C_1} + \frac{C_l}{C_1} \right|^2$$

и

$$\left| 1 + \frac{C_k}{C_1} + \frac{C_l^*}{C_1^*} \right|^2 = \left| 1 + \frac{C_k}{C_1} + \frac{C_l}{C_1} \right|^2.$$

Это справедливо лишь в том случае, когда

$$\operatorname{Re}\left(\frac{C_k}{C_1} \frac{C_l^*}{C_1^*}\right) = \operatorname{Re}\left(\frac{C_k}{C_1} \frac{C_l}{C_1}\right),$$

или, другими словами, когда

$$\operatorname{Im}\left(\frac{C_k}{C_1}\right) \operatorname{Im}\left(\frac{C_l}{C_1}\right) = 0.$$

Следовательно, либо отношение  $C_k/C_1$ , либо  $C_l/C_1$  действительно для любой пары  $k, l$ , что противоречит исходному предположению. Таким образом, для данного преобразования симметрии  $T$ , примененного к вектору состояния  $\sum_k C_k \Psi_k$ , при любом  $k$  справедливо либо уравнение (2.A.12), либо уравнение (2.A.13).

Вторая возможность была Вигнером исключена, поскольку, как он показал, всякое преобразование симметрии, для которого она реализуется, должно включать обращение времени, а в представленном им доказательстве рассматривались только симметрии типа вращений, оставляющие направление времени инвариантным. В нашем подходе симметрии, включающие обращение времени, ничем не выделены, поэтому следует учесть, что для каждой симметрии  $T$  и вектора состояния  $\sum_k C_k \Psi_k$  справедливо либо уравнение (2.A.12), либо уравнение (2.A.13). В зависимости от того какая из возможностей реализуется, будем определять  $U\Psi$  как особый вектор из класса векторов состояний  $\Psi'$ , принадлежащих лучу  $T\mathcal{R}$  с фазой, такой что либо  $C_1 = C'_1$ , либо  $C_1 = C'^*_1$  соответственно. В этом случае или

$$U\left(\sum_k C_k \Psi_k\right) = \sum_k C_k U\Psi_k \quad (2.A.14)$$

или

$$U\left(\sum_k C_k \Psi_k\right) = \sum_k C_k^* U\Psi_k. \quad (2.A.15)$$

Остается доказать, что для данного преобразования симметрии и любых значений коэффициентов  $C_k$  должен реализоваться или случай (2.A.14), или (2.A.15). Предположим, что (2.A.14) справедливо для вектора состояния  $\sum_k A_k \Psi_k$ , а (2.A.15) — для вектора состояния

$\sum_k B_k \Psi_k$ . Тогда из инвариантности вероятностей переходов следует, что

$$\left| \sum_k B_k^* A_k \right|^2 = \left| \sum_k B_k A_k \right|^2,$$

или, что эквивалентно,

$$\sum_{kl} \operatorname{Im}(A_k^* A_l) \operatorname{Im}(B_k^* B_l) = 0. \quad (2.A.16)$$

Возможность того, что уравнение (2.A.16) справедливо для пары векторов состояний  $\sum_k A_k \Psi_k$  и  $\sum_k B_k \Psi_k$ , принадлежащих различным лу- чам, исключить нельзя. Однако, для любой пары таких векторов со- стояний и любых  $A_k$  и  $B_k$  с различными фазами (чтобы уравнения (2.A.14) и (2.A.15) не были тождественны) всегда можно найти третий вектор состояния  $\sum_k C_k \Psi_k$ , для которого<sup>1)</sup>

$$\sum_{kl} \operatorname{Im}(C_k^* C_l) \operatorname{Im}(A_k^* A_l) \neq 0 \quad (2.A.17)$$

и

$$\sum_{kl} \operatorname{Im}(C_k^* C_l) \operatorname{Im}(B_k^* B_l) \neq 0. \quad (2.A.18)$$

Как было показано, из уравнения (2.A.17) следует, что и для  $\sum_k A_k \Psi_k$ , и для  $\sum_k C_k \Psi_k$  справедливо одно из уравнений (2.A.14) и (2.A.15), а из уравнения (2.A.18) следует, что и для  $\sum_k B_k \Psi_k$ , и для  $\sum_k C_k \Psi_k$  также справедливо одно из этих уравнений. Поэтому то же самое справедливо для пары векторов состояний  $\sum_k A_k \Psi_k$  и  $\sum_k B_k \Psi_k$ , с которых мы начали. Таким образом, было показано, что для данного преобразо-

<sup>1)</sup> Если для некоторой пары  $k, l$  и  $A_k^* A_l$ , и  $B_k^* B_l$  являются комплексны- ми, выберем равными нулю все  $C$ , за исключением  $C_k$  и  $C_l$ . Эти два коэффициента подберем так, чтобы они имели разные фазы. Если для некоторой пары  $k, l$   $A_k^* A_l$  является комплексным, а  $B_k^* B_l$  — действительным числом, то должна существовать другая пара  $m, n$  (возможно, либо  $m = k$  или  $l$ , либо  $n = k$  или  $l$ , но они не могут быть равны  $k$  или  $l$  одновременно), для которой  $B_m^* B_n$  является комплексным. Если также  $A_m^* A_n$  комплексно, то выберем равными нулю все  $C$ , за исключением  $C_m$  и  $C_n$ . Эти же два коэффициента подберем так, чтобы они имели различные фазы. Если  $A_m^* A_n$  действительно, тогда выберем равными нулю все  $C$ , за исключением  $C_k$ ,  $C_l$ ,  $C_m$ , и  $C_n$ , а эти четыре коэффициента подберем так, чтобы все они имели разные фазы. В случае, когда  $B_k^* B_l$  комплексно, а  $A_k^* A_l$  действительно, поступаем аналогично.

вания симметрии  $T$  все векторы состояний удовлетворяют либо уравнению (2.A.14), либо уравнению (2.A.15).

Теперь легко видеть, что определенный таким образом квантово-механический оператор  $U$  является либо линейным и унитарным, либо антилинейным и антиунитарным. Во-первых, предположим, что уравнение (2.A.14) справедливо для всех векторов состояний  $\sum_k C_k \Psi_k$ .

Любые два вектора состояний  $\Psi$  и  $\Phi$  можно представить в виде

$$\Psi = \sum_k A_k \Psi_k, \quad \Phi = \sum_k B_k \Psi_k,$$

и поэтому, с учетом уравнения (2.A.14), имеем

$$\begin{aligned} U(\alpha\Psi + \beta\Phi) &= U \sum_k (\alpha A_k + \beta B_k) \Psi_k = \sum_k (\alpha A_k + \beta B_k) U \Psi_k = \\ &= \alpha \sum_k A_k U \Psi_k + \beta \sum_k B_k U \Psi_k. \end{aligned}$$

Снова используя уравнение (2.A.14), получаем

$$U(\alpha\Psi + \beta\Phi) = \alpha U\Psi + \beta U\Phi, \quad (2.A.19)$$

поэтому  $U$  является *линейным*. Аналогично, с учетом (2.A.2) и (2.A.3), получаем, что скалярное произведение преобразованных состояний равно

$$(U\Psi, U\Phi) = \sum_{kl} A_k^* B_l (U\Psi_k, U\Psi_l) = \sum_k A_k^* B_k$$

и, следовательно,

$$(U\Psi, U\Phi) = (\Psi, \Phi), \quad (2.A.20)$$

поэтому  $U$  является *унитарным*.

Тот случай, когда все векторы состояний удовлетворяют уравнению (2.A.15), почти полностью аналогичен рассмотренному. Читатель, вероятно, может провести все рассуждения самостоятельно, но поскольку антилинейные операторы могут быть ему незнакомы, мы немного обсудим и этот случай. Предположим, что для всех векторов состояний  $\sum_k C_k \Psi_k$  справедливо уравнение (2.A.15). Любые два вектора состояний  $\Psi$  и  $\Phi$  можно, как и раньше, разложить по базису, и поэтому

$$\begin{aligned} U(\alpha\Psi + \beta\Phi) &= U \sum_k (\alpha A_k + \beta B_k) \Psi_k = \\ &= \sum_k (\alpha^* A_k^* + \beta^* B_k^*) U \Psi_k = \alpha^* \sum_k A_k^* U \Psi_k + \beta^* \sum_k B_k^* U \Psi_k. \end{aligned}$$

Снова воспользовавшись уравнением (2.A.15), получаем

$$U(\alpha\Psi + \beta\Phi) = \alpha^* U\Psi + \beta^* U\Phi, \quad (2.A.21)$$

поэтому  $U$  является *антилинейным*. Кроме того, с учетом (2.А.2) и (2.А.3), находим, что скалярное произведение преобразованных состояний равно

$$(U\Psi, U\Phi) = \sum_{kl} A_k B_l^*(U\Psi_k, U\Psi_l) = \sum_k A_k B_k^*,$$

и, следовательно,

$$(U\Psi, U\Phi) = (\Psi, \Phi)^*, \quad (2.А.22)$$

поэтому  $U$  является *антиунитарным*.

## Приложение В. Групповые операторы и гомотопические классы

Здесь будет доказана сформулированная в § 2.7 теорема, согласно которой фазы операторов  $U(T)$  дискретных преобразований симметрии  $T$  можно выбрать так, чтобы эти операторы осуществляли представление группы симметрии (а не проективное представление). Для этого необходимо выполнение двух условий: а) генераторы группы можно определить так, чтобы алгебра Ли не имела центральных зарядов, и б) группа симметрии является односвязной. В приложении также будут рассмотрены встречающиеся для неодносвязных групп проективные представления и их связь с гомотопическими классами.

Для доказательства теоремы напомним метод, с помощью которого строились операторы, соответствующие преобразованиям симметрии (см. § 2.2). Сначала нужно ввести набор действительных переменных  $\theta^a$ , параметризующий преобразования так, чтобы они удовлетворяли правилу композиции (2.2.15):

$$T(\bar{\theta})T(\theta) = T(f(\bar{\theta}, \theta)).$$

Нашей целью является построение операторов  $U(T(\theta)) \equiv U[\theta]$ , удовлетворяющих соответствующему условию<sup>1)</sup>

$$U[\bar{\theta}]U[\theta] = U[f(\bar{\theta}, \theta)]. \quad (2.В.1)$$

Для этого выберем в пространстве параметров группы произвольные “стандартные” пути  $\Theta_\theta^a(s)$ , идущие из начала отсчета в каждую точку  $\theta$  и подчиняющиеся условиям  $\Theta_\theta^a(0) = 0$ ,  $\Theta_\theta^a(1) = \theta^a$ . Определим  $U_\theta(s)$  вдоль каждого такого пути как решение дифференциального уравнения

$$\frac{d}{ds} U_\theta(s) = it_a U_\theta(s) h^a{}_b(\Theta_\theta(s)) \frac{d\Theta_\theta^b(s)}{ds} \quad (2.В.2)$$

<sup>1)</sup> Чтобы отличать операторы  $U$  как функции параметров группы от операторов, являющихся функциями самих групповых преобразований, будем использовать квадратные скобки.

с начальным условием

$$U_\theta(0) = 1, \quad (2.B.3)$$

где

$$[h^{-1}]^a{}_b(\theta) \equiv \left[ \frac{\partial f^a(\bar{\theta}, \theta)}{\partial \bar{\theta}^b} \right]_{\bar{\theta}=0}. \quad (2.B.4)$$

В конечном счете операторы  $U[\theta]$  и  $U_\theta(1)$  будут отождествлены, но сначала мы должны установить некоторые свойства  $U_\theta(s)$ .

Чтобы проверить, выполняется ли правило композиции, рассмотрим две точки,  $\theta_1$  и  $\theta_2$ , и определим путь  $\mathcal{P}$ , начинающийся в нуле, проходящий через  $\theta_1$  и заканчивающийся в  $f(\theta_2, \theta_1)$ :

$$\Theta_{\mathcal{P}}^a(s) \equiv \begin{cases} \Theta_{\theta_1}^a(2s), & 0 \leq s \leq 1/2, \\ f^a(\Theta_{\theta_2}(2s-1), \theta_1), & 1/2 \leq s \leq 1. \end{cases} \quad (2.B.5)$$

В конце первого сегмента имеем  $U_{\mathcal{P}}(1/2) = U_{\theta_1}(1)$ . Чтобы вычислить  $U_{\mathcal{P}}(s)$  вдоль второго сегмента, необходимо знать производную  $f^a(\Theta_{\theta_2}(2s-1), \theta_1)$ . Для ее нахождения удобно воспользоваться фундаментальным условием ассоциативности:

$$f^a(f(\theta_3, \theta_2), \theta_1) = f^a(\theta_3, f(\theta_2, \theta_1)). \quad (2.B.6)$$

Приравнивая в пределе  $\theta_3 \rightarrow 0$  коэффициенты при  $\theta^c{}_3$ , получим, что

$$\frac{\partial f^a(\theta_2, \theta_1)}{\partial \theta_2^b} h^c{}_a(f(\theta_2, \theta_1)) = h^c{}_b(\theta_2). \quad (2.B.7)$$

Таким образом, дифференциальное уравнение (2.B.2) для  $U_{\mathcal{P}}(s)$  вдоль второго сегмента совпадает с дифференциальным уравнением для  $U_{\theta_2}(2s-1)$ . Хотя начальные условия для этих операторов различные,  $U_{\mathcal{P}}(s)U_{\theta_1}^{-1}(1)$  удовлетворяет тому же дифференциальному уравнению, что и  $U_{\theta_2}(2s-1)$ , и тому же начальному условию — равенству единице при  $s = 1/2$ . Поэтому можно заключить, что для  $1/2 \leq s \leq 1$  справедливо соотношение

$$U_{\mathcal{P}}(s)U_{\theta_1}^{-1}(s) = U_{\theta_2}(2s-1)$$

и, в частности,

$$U_{\mathcal{P}}(1) = U_{\theta_2}(1)U_{\theta_1}(1). \quad (2.B.8)$$

Однако, из этого не следует, что  $U_\theta(1)$  удовлетворяет правилу композиции (2.B.1), так как, хотя путь  $\Theta_{\mathcal{P}}(s)$  и проходит из  $\theta^a = 0$  в  $\theta^a = f^a(\theta_2, \theta_1)$ , он, вообще говоря, не будет совпадать ни с одним из “стандартных” путей  $\Theta_{f(\theta_1, \theta_2)}$ , проходящих непосредственно из  $\theta^a = 0$  в  $\theta^a = f^a(\theta_2, \theta_1)$ . Чтобы отождествить  $U[\theta]$  с  $U_\theta(1)$ , необходимо показать, что  $U_\theta(1)$  не зависит от пути из нуля в  $\theta$ .

Для этого рассмотрим вариацию  $\delta U$  оператора  $U_\theta(s)$ , возникающую из-за бесконечно малого изменения  $\delta\theta(s)$  на пути из нуля в  $\theta$ .

Варьирование (2.В.6) приводит к дифференциальному уравнению

$$\frac{d}{ds} \delta U = it_a \delta U h^a{}_b(\Theta) \frac{d\Theta^b}{ds} + it_a U h^a{}_{b,c}(\Theta) \delta \Theta^c \frac{d\Theta^b}{ds} + it_a U h^a{}_b(\Theta) \frac{d\delta \Theta^b}{ds},$$

где  $h^a{}_{b,c} \equiv \partial h^a{}_b / \partial \Theta^c$ . Воспользовавшись коммутационными соотношениями Ли (2.2.22) (без центральных зарядов), после несложных преобразований получаем

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} (U^{-1} \delta U) &= \frac{d}{ds} (iU^{-1} t_a U h^a{}_b \delta \Theta^b) + iU^{-1} t_a U \delta \Theta^b \frac{d\Theta^c}{ds} \times \\ &\quad \times (h^a{}_{c,b} - h^a{}_{b,c} + C^a{}_{ed} h^e{}_b h^d{}_c). \end{aligned} \quad (2.В.9)$$

Однако, переходя в (2.В.6) к пределу  $\theta_3, \theta \rightarrow 0$ , можно найти, что для любых  $\theta$

$$h(\theta)^a{}_{b,c} = -f^a{}_{de} h(\theta)^d{}_b h(\theta)^e{}_c, \quad (2.В.10)$$

где  $f^a{}_{d,e}$  — коэффициенты, определенные согласно (2.2.19). Составляя тензор, антисимметричный по индексам  $b$  и  $c$ , легко видеть, что последний член в уравнении (2.В.9) обращается в нуль:

$$h^a{}_{c,b} - h^a{}_{b,c} + C^a{}_{ed} h^e{}_b h^d{}_c = 0. \quad (2.В.11)$$

Таким образом, из (2.В.9) следует, что величина

$$U^{-1} \delta U - iU^{-1} t_a U h^a{}_b \delta \Theta^b = 0.$$

вдоль пути  $\theta(s)$  является постоянной. Следовательно,  $U_\theta(1)$  не меняется при любых вариациях пути, оставляющих его концы  $\Theta(0) = 0$  и  $\Theta(1) = \theta$  (и  $U_\theta(0) = 1$ ) неподвижными. Поскольку в условии (б) требуется, чтобы произвольный путь из  $\theta(0) = 0$  в  $\theta(1) = \theta$  можно было непрерывно деформировать в любой другой,  $U_\theta(1)$  можно считать независимой от пути функцией  $\theta$ :

$$U_\theta(1) \equiv U[\theta]. \quad (2.В.12)$$

В частности, так как путь  $\mathcal{P}$  проходит из 0 в  $f(\theta_1, \theta_2)$ , имеем

$$U_{\mathcal{P}}(1) = U[f(\theta_2, \theta_1)], \quad (2.В.13)$$

и из уравнения (2.В.8) следует, что  $U[\theta]$  удовлетворяет групповому закону умножения (2.В.1).

После того как непроективное представление  $U[\theta]$  построено, остается доказать, что любое проективное представление  $\tilde{U}[\theta]$  той же группы с теми же генераторами  $t_a$  может отличаться от  $U[\theta]$  только фазой:

$$\tilde{U}[\theta] = e^{i\alpha(\theta)} U[\theta],$$

а величину  $\phi$ , входящую в закон умножения для  $\tilde{U}[\theta]$

$$\tilde{U}[\theta'] \tilde{U}[\theta] = e^{i\phi(\theta', \theta)} \tilde{U}[f(\theta', \theta)]$$

можно удалить переопределением фазы оператора  $\tilde{U}[\theta]$ . Для этого рассмотрим оператор

$$U[\theta]^{-1}U[\theta']^{-1}\tilde{U}[\theta']\tilde{U}[\theta] = U[f(\theta', \theta)]^{-1}\tilde{U}[f(\theta', \theta)]e^{i\phi(\theta', \theta)}.$$

Так как генераторы  $U[\theta]$  и  $\tilde{U}[\theta]$  совпадают, производная по  $\theta'^a$  от левой части при  $\theta' = 0$  обращается в нуль и

$$0 = \frac{\partial}{\partial\theta^b} \{U[\theta]^{-1}\tilde{U}[\theta]\} + i\phi_b(\theta)U[\theta]^{-1}\tilde{U}[\theta],$$

где

$$\phi_b(\theta) \equiv h^a{}_b(\theta) \left[ \frac{\partial}{\partial\theta'^b} \phi(\theta', \theta) \right]_{\theta'=0}.$$

Дифференцируя по  $\theta^c$  и выполняя антисимметризацию по индексам  $b$  и  $c$ , немедленно получаем, что

$$0 = \frac{\partial\phi_b(\theta)}{\partial\theta^c} - \frac{\partial\phi_c(\theta)}{\partial\theta^b}.$$

Из этого выражения и известной теоремы [13] следует, что в случае односвязного пространства  $\phi_b$  является градиентом некоторой функции  $\beta$ :

$$\phi_b(\theta) = \frac{\partial\beta(\theta)}{\partial\theta^b}.$$

Таким образом, величина

$$U[\theta]^{-1}\tilde{U}[\theta]e^{i\beta(\theta)}$$

на самом деле не зависит от  $\theta$ . Положив без ограничения общности  $\theta = 0$ , мы видим, что  $\tilde{U}$  просто пропорционален  $U$ :

$$\tilde{U}[\theta] = U[\theta] \exp(-i\beta(\theta) + i\beta(0)),$$

что и требовалось доказать.

\* \* \*

Эти рассуждения позволяют получить некоторую информацию о природе фазовых множителей, возникающих в групповом законе умножения, когда алгебра Ли не имеет центральных зарядов, а соответствующая группа неодносвязна. Предположим, что путь  $\mathcal{P}$ , имеющий начало в точке 0, проходящий через  $\theta$  и заканчивающийся в точке  $f(\bar{\theta}, \theta)$ , нельзя деформировать в стандартный путь, проходящий из 0 в  $f(\bar{\theta}, \theta)$ , или, другими словами, петлю, проходящую через 0,  $\theta$  и  $f(\bar{\theta}, \theta)$ , нельзя непрерывно деформировать в точку. В этом случае возможна ситуация, когда

$$U^{-1}(f(\theta_1, \theta_2))U(\theta_2)U(\theta_1)$$

является фазовым множителем  $\exp(i\phi(\theta_1, \theta_2)) \neq 1$ , но величина  $\phi$  — одна и та же для любых петель, в которые этот контур может быть

непрерывно деформирован. Набор, состоящий из всех проходящих через точку 0 петель, которые могут быть непрерывно деформированы в данную петлю, называют ее *гомотопическим классом* [14]. Как было показано,  $\phi(\theta_1, \theta_2)$  зависит только от гомотопического класса петли, проходящей через точки 0,  $\theta$  и  $f(\bar{\theta}, \theta)$ . Набор гомотопических классов образует группу. “Произведение” гомотопических классов петель  $\mathcal{L}_1$  и  $\mathcal{L}_2$  является гомотопическим классом петли, образованной движением сначала вокруг  $\mathcal{L}_1$ , а затем вокруг  $\mathcal{L}_2$ ; “обратным” к гомотопическому классу петли  $\mathcal{L}$  является гомотопический класс петли, полученной движением вокруг  $\mathcal{L}$  в противоположном направлении; “единицей” гомотопического класса петель является та петля, которая может быть непрерывно деформирована в точку. Эта группа известна как *первая гомотопическая* или *фундаментальная группа* рассматриваемого пространства. Легко видеть, что фазовые множители образуют представление этой группы: если обход вдоль петли  $\mathcal{L}$  дает фазовый множитель  $e^{i\phi}$ , а обход вдоль петли  $\mathcal{L}$  — фазовый множитель  $e^{i\bar{\phi}}$ , то обход обеих петель дает фазовый множитель  $e^{i\phi}e^{i\bar{\phi}}$ . Следовательно, можно перечислить все возможные типы проективных представлений данной группы  $\mathcal{I}$  (не содержащей центральных зарядов), если известны одномерные представления первой гомотопической группы пространства ее параметров. Подробнее гомотопические группы будут обсуждаться в т. II.

## Приложение С. Инверсии и вырождение мультиплетов

Обычно предполагалось, что инверсии  $T$  и  $P$  переводят одночастичные состояния в другие одночастичные состояния того же типа, возможно, с добавлением фазовых множителей, зависящих от вида частиц. В § 2.6 было отмечено, что на вырожденные мультиплеты одночастичных состояний инверсии могут оказывать более сложное действие, чем на одночастичные состояния. По-видимому, такая возможность впервые была обнаружена Вигнером [15] в 1964 г. В этом приложении мы изучим свойства обобщенных операторов инверсии, для которых роль инверсных фаз играют конечные матрицы. При этом ограничения, введенные Вигнером при обсуждении этих свойств, будут несколько ослаблены.

Начнем с обращения времени. Вигнер наложил на оператор инверсии существенное ограничение, предположив, что его квадрат пропорционален единичному оператору. Так как оператор  $T$  является антиунитарным, легко видеть, что соответствующий коэффициент пропорциональности для  $T^2$  должен быть равен  $\pm 1$ . При этом возможно, что знак коэффициента пропорциональности различен для

подпространств с разными правилами суперотбора. Если знак  $T^2$  на пространстве состояний с четными или нечетными значениями  $2j$  противоположен знаку  $(-1)^{2j}$  (см. § 2.6), физические состояния должны допускать более сложные представления оператора  $T$ , чем это предполагалось до сих пор. Однако, если допустить такую возможность, по-видимому, нет серьезного основания требовать, чтобы оператор  $T^2$  был пропорционален единичному. Апелляция к структуре расширенной группы Пуанкаре звучит неубедительно: единственным полезным определением любого оператора инверсии является такое, которое делает соответствующую четность точно или приближенно сохраняющейся величиной. При этом может оказаться так, что оператор  $T^2$  не будет пропорциональным единичному оператору.

Чтобы исследовать более общий случай, предположим, что на массивное одночастичное состояние оператор обращения времени действует следующим образом:

$$T\Psi_{\mathbf{p},\sigma,n} = (-1)^{j-\sigma} \sum_m \mathcal{T}_{mn} \Psi_{-\mathbf{p},-\sigma,m}, \quad (2.C.1)$$

где  $\mathbf{p}$ ,  $j$  и  $\sigma$  — импульс, спин и  $z$ -компоненты спина частиц, а  $n$  и  $m$  — индексы, обозначающие состояния внутри расщепленных мультиплетов частиц (возникновение множителя  $(-1)^{j-\sigma}$  и изменение знаков  $\mathbf{p}$  и  $\sigma$  выводится так же, как это было сделано в § 2.6). О свойствах матрицы  $\mathcal{T}_{mn}$  ничего не известно, за исключением того, что, поскольку оператор  $T$  является антиунитарным, эта матрица также должна быть унитарной.

Поймем теперь, как подходящим выбором базиса одночастичных состояний можно упростить данное преобразование. Определяя новые состояния с помощью унитарного преобразования

$$\Psi'_{\mathbf{p},\sigma,n} = \sum_m \mathcal{U}_{mn} \Psi_{\mathbf{p},\sigma,n},$$

получим преобразование, аналогичное (2.C.1). Однако роль матрицы  $\mathcal{T}_{mn}$  теперь играет

$$\mathcal{T}' = \mathcal{U}^{-1} \mathcal{T} \mathcal{U}^*. \quad (2.C.2)$$

В общем случае выбором базиса одночастичных состояний сделать матрицу  $\mathcal{T}'$  диагональной нельзя, поскольку оператор  $T$  является антиунитарным. Однако ее можно привести к блочно-диагональному виду, где роль блоков играют либо фазы  $1 \times 1$ , либо матрицы  $2 \times 2$  вида

$$\begin{pmatrix} 0 & e^{i\phi/2} \\ e^{-i\phi/2} & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.C.3)$$

где  $\phi$  — различные действительные фазы.

(Докажем это. Сначала заметим, что из уравнения (2.C.2) следует, что

$$\mathcal{T}' \mathcal{T}'^* = \mathcal{U}^{-1} \mathcal{T} \mathcal{T}^* \mathcal{U}.$$

Это преобразование является унитарным, поэтому его можно выбрать для диагонализации унитарной матрицы  $\mathcal{T}\mathcal{T}^*$ . Тогда, опуская штрихи, имеем

$$\mathcal{T} = D\mathcal{T}^T, \quad (2.C.4)$$

где  $D$  — унитарная диагональная матрица, имеющая на главной диагонали, например, фазы  $e^{i\phi_n}$ . Отсюда непосредственно следует, что диагональная компонента  $\mathcal{T}_{nn}$  не обращается в нуль, если  $e^{i\phi_n} = 1$ . Более того, если  $e^{i\phi_n} = 1$ , но  $e^{i\phi_m} \neq 1$ , то из (2.C.4) можно видеть, что  $\mathcal{T}_{nm} = \mathcal{T}_{mn} = 0$ . Выпишем сначала все столбцы и строки, для которых  $e^{i\phi_n} = 1$ . Тогда матрица  $\mathcal{T}$  приобретет вид

$$\mathcal{T} = \begin{pmatrix} \mathcal{A} & 0 \\ 0 & \mathcal{B} \end{pmatrix}, \quad (2.C.5)$$

где матрица  $\mathcal{A}$  является симметричной и унитарной, а все диагональные элементы  $\mathcal{B}$  обращаются в нуль. Так как  $\mathcal{A}$  симметрична, ее можно представить в виде экспоненты от симметричной антиэрмитовой матрицы и диагонализовать преобразованием (2.C.2), действующим только на  $\mathcal{A}$ , с соответствующей действительной ортогональной подматрицей из  $\mathcal{U}$ . Поэтому нужно рассмотреть только подматрицу  $\mathcal{B}$ , содержащую строки и столбцы, для которых  $e^{i\phi_n} \neq 1$ . При  $n \neq m$  из уравнения (2.C.4) следует  $\mathcal{T}_{nm} = e^{i\phi_n} \mathcal{T}_{mn}$  и  $\mathcal{T}_{mn} = e^{i\phi_m} \mathcal{T}_{nm}$ , поэтому  $\mathcal{T}_{nm} = e^{i\phi_n} e^{i\phi_m} \mathcal{T}_{nm}$  и  $\mathcal{T}_{mn} = e^{i\phi_n} e^{i\phi_m} \mathcal{T}_{mn}$ . Следовательно, если  $e^{i\phi_n} e^{i\phi_m} \neq 1$ , то  $\mathcal{T}_{nm} = \mathcal{T}_{mn} = 0$ . Если сначала выписать все столбцы и строки  $\mathcal{B}$  с данной фазой  $e^{i\phi_1} \neq 1$ , затем — столбцы и строки с противоположной фазой, затем — столбцы и строки с некоторой другой фазой  $e^{i\phi_2} \neq 1$ , не равной  $e^{\pm i\phi_1}$ , затем — столбцы и строки с противоположной фазой и т.д., матрица  $\mathcal{B}$  будет приведена к блочно-диагональному виду

$$\mathcal{B} = \begin{pmatrix} \mathcal{B}_1 & 0 & \dots \\ 0 & \mathcal{B}_2 & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}, \quad (2.C.6)$$

где

$$\mathcal{B}_i = \begin{pmatrix} 0 & e^{i\phi_i/2} \mathcal{C}_i \\ e^{-i\phi_i/2} \mathcal{C}_i^T & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.C.7)$$

Более того, из унитарности  $\mathcal{T}$  и  $\mathcal{B}$  следует, что  $\mathcal{C}_i \mathcal{C}_i^\dagger = \mathcal{C}_i^\dagger \mathcal{C}_i$ , поэтому матрица  $\mathcal{C}_i$  является квадратной и унитарной. Под действием (2.C.2), где матрица  $\mathcal{U}$  имеет такую же блочно-диагональную структуру, как матрица  $\mathcal{T}$ , а матрица в  $i$ -ом блоке имеет вид

$$\begin{pmatrix} V_i & 0 \\ 0 & W_i \end{pmatrix},$$

причем  $V_i$  и  $W_i$  унитарны, подматрица  $\mathcal{C}_i$  преобразуется как

$$\mathcal{C}_i \rightarrow V_i^{-1} \mathcal{C}_i W_i^*.$$

Поэтому можно легко выбрать преобразование, приводящее  $\mathcal{C}_i$  к единичному виду. Таким образом, между парами столбцов и строк в пределах каждого блока с фазами  $e^{i\phi_i}$  и  $e^{-i\phi_i}$  устанавливается соответствие. Теперь, чтобы привести матрицу  $\mathcal{B}$  к блочно-диагональному виду с блоками  $2 \times 2$  вида (2.C.3), необходимо только переставить столбцы и строки так, чтобы в пределах  $i$ -го блока оказались столбцы и строки с фазой  $e^{i\phi_i}$ , чередующиеся с соответствующими столбцами и строками с фазой  $e^{-i\phi_i}$ .

Важно отметить, что если  $e^{i\phi} \neq 1$ , состояния для диагонализации преобразования обращения времени выбрать нельзя. Если имеются пары состояний  $\Psi_{\mathbf{p},\sigma,\pm}$ , на которые  $T$  действует матрицей (2.C.3), то

$$T\Psi_{\mathbf{p},\sigma,\pm} = e^{\pm i\phi/2}(-1)^{j-\sigma}\Psi_{-\mathbf{p},-\sigma,\mp}. \quad (2.C.8)$$

Тогда на произвольную линейную комбинацию этих состояний обращение времени действует следующим образом:

$$\begin{aligned} T(c_+\Psi_{\mathbf{p},\sigma,\pm} + c_-\Psi_{\mathbf{p},\sigma,-}) &= \\ &= (-)^{j-\sigma}(e^{i\phi/2}c_+^*\Psi_{-\mathbf{p},-\sigma,-} + e^{-i\phi/2}c_-^*\Psi_{-\mathbf{p},-\sigma,+}). \end{aligned}$$

Для того чтобы состояние  $c_+\Psi_{\mathbf{p},\sigma,+} + c_-\Psi_{\mathbf{p},\sigma,-}$  под действием  $T$  приобретало фазу  $\lambda$ , необходимо, чтобы

$$e^{i\phi/2}c_+^* = \lambda c_-, \quad e^{-i\phi/2}c_-^* = \lambda c_+.$$

Но комбинация этих уравнений дает  $e^{\pm i\phi/2}c_\pm^* = |\lambda|^2 c_\pm^* e^{\mp i\phi/2}$ , что возможно, только если либо коэффициенты  $c_+ = c_- = 0$ , либо фазовый множитель  $e^{i\phi}$  равен единице. Таким образом, при  $e^{i\phi} \neq 1$  из инвариантности по отношению к обращению времени следует двукратное вырождение таких состояний (помимо вырождения, связанного со спином).

Конечно, если существует оператор “внутренней” симметрии  $S$ , под действием которого эти состояния преобразуются согласно

$$S\Psi_{\mathbf{p},\sigma,\pm} = e^{\pm i\phi/2}\Psi_{-\mathbf{p},\sigma,\mp},$$

тогда можно ввести новый оператор обращения времени как  $T' \equiv S^{-1}T$ ; он не будет смешивать состояния  $\Psi_{\mathbf{p},\sigma,\pm}$  друг с другом. Только в случае, когда подобная внутренняя симметрия отсутствует, удвоение состояний можно приписать самому обращению времени.

Вернемся теперь к вопросу о квадрате  $T$ . Повторно действуя преобразованием (2.C.8), получим

$$T^2\Psi_{\mathbf{p},\sigma,\pm} = (-1)^{2j}e^{\mp i\phi}\Psi_{\mathbf{p},\sigma,\pm}. \quad (2.C.9)$$

Если принять вслед за Вигнером, что оператор  $T^2$  пропорционален единичному оператору, то  $e^{i\phi} = e^{-i\phi}$ , и, поскольку в этом случае фаза является действительной, фазовый множитель должен быть равен +1

или  $-1$ . Выбирая  $e^{i\phi} = -1$ , мы все же заработали бы двукратное вырождение одночастичных состояний, (помимо вырождения, связанного со спином), т.е. удвоение существовало бы для *любых* частиц. Однако нет причин отказаться от свободы в выборе фазы  $\phi$  в уравнении (2.C.8), она может обращаться в нуль для одних частиц и не обращаться — для других. Таким образом, тот факт, что для наблюдаемых частиц нет дополнительного двукратного вырождения, не исключает возможность существования частицы, для которой такое вырождение имело бы место.

Можно рассмотреть такие более сложные представления оператора четности  $P$ , как

$$P\Psi_{\mathbf{p},\sigma,n} = \sum_m \mathcal{P}_{nm} \Psi_{-\mathbf{p},\sigma,m}, \quad (2.C.10)$$

где  $\mathcal{P}$  — произвольная унитарная матрица. В отличие от случая обращения времени, эту матрицу всегда можно диагонализовать соответствующим выбором базиса состояний. Однако этот выбор базиса может не совпадать с тем, в котором структура оператора обращения времени проста. Поэтому, в принципе операторы  $P$  и  $T$  могут совместно приводить к дополнительному вырождению, которое нельзя вывести из свойств  $P$  и  $T$  по отдельности.

Как было отмечено в гл. 5, считается, что в рамках любой квантовой теории поля сохраняется  $CPT$ . Этот оператор действует на одиночественные состояния согласно правилу

$$CPT\Psi_{\mathbf{p},\sigma,n} = (-1)^{j-\sigma} \Psi_{\mathbf{p},-\sigma,n^c}, \quad (2.C.11)$$

где  $n^c$  обозначает античастицу (или “зарядово-сопряженную” частицу), соответствующую частице  $n$ . В этом преобразовании мы не вводим никаких фаз или матриц (хотя, конечно, их всегда можно ввести комбинированием  $CPT$  с некоторой внутренней симметрией). Отсюда следует, что

$$(CPT)^2 \Psi_{\mathbf{p},\sigma,n} = (-1)^{2j} \Psi_{\mathbf{p},-\sigma,n}, \quad (2.C.12)$$

поэтому указанная Вигнером возможность того, что под действием  $(CPT)^2$  возникает знак  $-(-1)^{2j}$ , в квантовой теории поля не реализуется.

Насколько хорошей симметрией является  $T$ , настолько хороша и  $CP \equiv (CPT)T^{-1}$ . На состояния, преобразующиеся под действием оператора  $T$  обычным способом,

$$T\Psi_{\mathbf{p},\sigma,n} \propto \Psi_{-\mathbf{p},-\sigma,n} \quad (2.C.13)$$

оператор  $CP$  также оказывает обычное действие:

$$CP\Psi_{\mathbf{p},\sigma,n} \propto \Psi_{-\mathbf{p},\sigma,n^c}. \quad (2.C.14)$$

Таким образом, оператор  $C \equiv CPP^{-1}$  просто заменяет все частицы на

соответствующие античастицы:

$$C\Psi_{\mathbf{p},\sigma,n} \propto \Psi_{\mathbf{p},\sigma,n^c}. \quad (2.C.15)$$

С другой стороны, когда  $T$  имеет необычное представление (2.C.8), из уравнения (2.C.11) следует, что

$$CP\Psi_{\mathbf{p},\sigma,\pm} = e^{\mp i\phi/2} \Psi_{-\mathbf{p},\sigma,\mp^c}. \quad (2.C.16)$$

В частности, возможно, что вырождение, обозначенное значком  $\pm$ , аналогично вырождению “частица–античастица”, так что античастицей (определенной по отношению к CPT) состояния  $\Psi_\pm$  является  $\Psi_\mp$ . В этом случае оператор CP обладает необычным свойством — он *не* меняет местами частицы и античастицы. Пока речь идет о таких частицах, CP и T играют роль операторов, которые мы обычно называем P и CT. На остальные частицы CP и T оказывают обычное действие.

В физике неизвестны примеры частиц, задающих необычные представления операторов инверсии, поэтому в дальнейшем мы эту возможность рассматривать не будем. С этого момента будет предполагаться, что инверсии оказывают на физические состояния действие, обычное в смысле определения из § 2.6.

## Задачи

**1.** Предположим, что наблюдатель  $\mathcal{O}$  видит  $W$ -бозон (частица со спином 1 и массой  $m \neq 0$ ) с импульсом  $\mathbf{p}$ , параллельным оси  $Oy$ , и  $z$ -компонентой спина  $\sigma$ . Второй наблюдатель  $\mathcal{O}'$  движется относительно первого со скоростью  $\mathbf{v}$  в направлении  $z$ . Каким представляется наблюдателю  $\mathcal{O}'$  состояние  $W$ -бозона?

**2.** Предположим, что наблюдатель  $\mathcal{O}$  видит фотон с импульсом  $\mathbf{p}$ , направленным вдоль  $Oy$ , и вектором поляризации, направленным вдоль  $Oz$ . Второй наблюдатель  $\mathcal{O}'$  движется относительно первого со скоростью  $\mathbf{v}$  в направлении  $Oz$ . В каком состоянии находится фотон с точки зрения наблюдателя  $\mathcal{O}'$ ?

**3.** Постройте коммутационные соотношения для генераторов галилеевой группы непосредственно из группового закона умножения (без использования результатов, полученных для группы Лоренца). Включите наиболее общий набор центральных зарядов, которые нельзя исключить переопределением генераторов группы.

**4.** Покажите, что операторы  $P_\mu P^\mu$  и  $\bar{W}_\mu W^\mu$  коммутируют со всеми операторами лоренцевских преобразований  $U(\Lambda, a)$ , где

$$W_\mu \equiv \epsilon_{\mu\nu\rho\lambda} J^{\nu\rho} P^\lambda.$$

**5.** Рассмотрим физику в двух пространственных и одном временном измерениях, предполагая инвариантность относительно “группы

Лоренца”  $SO(2, 1)$ . Как бы вы описали спиновые состояния одной *массивной* частицы? Как эти состояния ведут себя при преобразованиях Лоренца? Что можно сказать относительно инверсий  $P$  и  $T$ ?

**6.** То же, что в задаче 5, только теперь будем предполагать инвариантность относительно “группы Лоренца”  $O(2, 1)$ . Как описываются спиновые состояния одной *массивной* частицы в этом случае? Как эти состояния ведут себя при преобразованиях Лоренца? Что можно сказать относительно инверсий  $P$  и  $T$ ?

## Литература

1. *Dirac P.A.M.* The Principles of Quantum Mechanics, 4th edn. Oxford University Press, Oxford, 1958. [Рус. пер.: Дирак П.А.М. Принципы квантовой механики.— М.: Наука, 1979.]
2. *Wigner E.P.* Gruppentheorie und ihre Anwendung auf die Quantenmechanik der Atomspectren. Braunschweig, 1931. PP. 251–253 (English translation, Academic Press, Inc, N.Y., 1959). Случай безмассовых частиц рассмотрен также в *Wigner E.P.* В *Theoretical Physics*. International Atomic energy Agency, Vienna, 1963. P. 64.
3. *Wick G.C.*, *Wightman A.S.*, and *Wigner E.P.* // Phys. Rev. **88**, 101 (1952).
- 3а. См., например, *Weinberg S.* Gravitation and Cosmology. Wiley, N.Y., 1972. Section 2.1.
4. *Inönü E.* and *Wigner E.P.* // Nuovo Cimento. **IX**, 705 (1952).
5. *Wigner E.P.* // Ann. Math. **40**, 149 (1939).
6. *Mackey G.W.* // Ann. Math. **55**, 101(1952); **58**, 193 (1953); Acta. Math. **99**, 265 (1958); Induced Representations of Groups and Quantum Mechanics. Benjamin, N.Y., 1968.
7. См., например, *Edmonds A.R.* Angular Momentum in Quantum Mechanics. Princeton University Press, Princeton, 1957. Chapter 4; *Rose M.E.* Elementary Theory of Angular Momentum. John Wiley & Sons, N.Y., 1957. Глава IV; *Landau L.D.* and *Lifshitz E.M.* Quantum Mechanics — Non Relativistic Theory, 3rd edn. Pergamon Press, Oxford, 1977. Section 58 [Ландау Л.Д., Либштадт Е.М. Квантовая механика. Нерелятивистская теория.— М.: Наука, 1989.]; *Wu-Ki Tung* Group Theory in Physics. World Scientific, Singapore, 1984. Section 7.3 и 8.1.
8. *Lee T.D.* and *Yang C.N.* // Phys. Rev. **104**, 254 (1956); *Wu C.S.*, et al. Phys. Rev. **105**, 1413 (1957); *Garwin R.*, *Lederman L.*, and *Weinrich M.* // Phys. Rev. **105**, 1415 (1957); *Friedman J.I.* and *Telegdi V.L.* // Phys. Rev. **105**, 1681 (1957).

9. Christenson J.H., Cronin J.W., Fitch V.L., and Turlay R. // Phys. Rev. Letters. **13**, 138 (1964).
10. Kramers H.A. // Proc. Acad. Sci. Amsterdam. **33**, 959 (1930); см. также Dyson F.J. // J. Math. Phys. **3**, 140 (1962).
11. Bargmann V. // Ann. Math. **59**, 1 (1954). Theorem 7.1.
12. См., например, Turnbull H.W. and Aitken A.C. An Introduction to the Theory of Canonical Matrices. Dover Publications, N.Y., 1961. P. 194.
13. См., например, Flander H. Differential Forms. Academic Press, N.Y., 1963. Section 3.6.
14. Введением в гомотопические классы и группы может служить, например, Hocking J.G. and Young G.S. Topology. Adison-Wesley, Reading, MA, 1961. Chapter 4; Nash C. and Sen S. Topology and Geometry for Physicist. Academic Press, L., 1983. Chapters 3 and 5.
15. Wigner E.P. B Group Theoretical Concepts and Methods in Elementary Particle Physics, ed. by F. Gürsey. Gordon and Breach, N.Y., 1964. P. 37.
16. Теория групп и элементарные частицы // Сб. статей.—М.: Мир, 1967.
17. Петрашень М.И., Трифонов Е.Д. Применение теории групп в квантовой механике.—М.: Наука, 1967.
18. Дубровин Б.А., Новиков С.П., Фоменко А.Т. Современная геометрия.—М.: Наука, 1979.

## Г л а в а 3

# ТЕОРИЯ РАССЕЯНИЯ

Общие принципы релятивистской квантовой механики, которым была посвящена предыдущая глава, до сих пор применялись нами только к состояниям, описывающим одну стабильную частицу. Такие одночастичные состояния сами по себе не представляют ценности — что-то интересное может произойти лишь в том случае, когда две или более частиц взаимодействуют друг с другом. Однако обычно в экспериментах за поведением частиц во время их взаимодействия не следят. Типичным (по крайней мере, в ядерной физике и физике элементарных частиц) является эксперимент, в ходе которого некоторые частицы сближаются, изначально находясь на макроскопическом расстоянии друг от друга, и взаимодействуют на микроскопически малом расстоянии, после чего продукты этого взаимодействия снова расходятся на расстояние макроскопически большое. Физические состояния до и после взаимодействия состоят из частиц, которые находятся друг от друга настолько далеко, что их взаимодействием можно пренебречь, т.е. эти состояния могут быть описаны как прямые произведения одночастичных состояний, о которых шла речь в предыдущей главе. Величины, которые измеряются в таком эксперименте — функции распределения вероятности или “сечения рассеяния” для переходов между начальным и конечным состояниями удаленных друг от друга и эффективно невзаимодействующих частиц. Эта глава будет посвящена формализму [1], используемому для вычисления этих вероятностей и сечений рассеяния.

### § 3.1. Начальное и конечное состояния

Можно считать, что состояние, описывающее несколько невзаимодействующих частиц, преобразуется под действием группы Лоренца как прямое произведение одночастичных состояний. В качестве индексов, характеризующих одночастичные состояния, мы будем использовать их 4-импульсы  $p^\mu$ , проекции спинов на ось  $Oz$  (или спиральности — в случае безмассовых частиц) и, так как мы теперь, возможно, будем иметь дело с несколькими сортами частиц, дискретные индексы  $n$ , включающие в себя массу, заряд и т.д. Общее правило преобразования такого состояния под действием группы Лоренца вы-

глядит следующим образом:

$$U(\Lambda, a)\Psi_{p_1, \sigma_1, n_1; p_2, \sigma_2, n_2; \dots} = \exp(-ia_\mu((\Lambda p_1)^\mu + (\Lambda p_2)^\mu + \dots)) \times \\ \times \sqrt{\frac{(\Lambda p_1)^0 (\Lambda p_2)^0 \dots}{p_1^0 p_2^0 \dots}} \sum_{\sigma'_1 \sigma'_2 \dots} D_{\sigma'_1 \sigma_1}^{(j_1)}(W(\Lambda, p_1)) D_{\sigma'_2 \sigma_2}^{(j_2)}(W(\Lambda, p_2)) \dots \times \\ \times \Psi_{\Lambda p_1, \sigma'_1, n_1; \Lambda p_2, \sigma'_2, n_2; \dots}, \quad (3.1.1)$$

где  $W(\Lambda, p)$  — вигнеровский поворот (2.5.10), а  $D_{\sigma' \sigma}^{(j)}(W)$  — соответствующие  $(2j+1)$ -мерные матрицы представления трехмерной группы вращений. (Такая ситуация имеет место для массивных частиц. В том случае, если частицы безмассовые,  $D_{\sigma' \sigma}^{(j)}(W(\Lambda, p))$  нужно заменить на  $\delta_{\sigma' \sigma} \exp(i\sigma\theta(\Lambda, p))$ , где  $\theta$  — угол, определяемый уравнением (2.5.43).) Состояния нормируются так же, как в (2.5.19):

$$(\Psi_{p'_1, \sigma'_1, n'_1; p'_2, \sigma'_2, n'_2; \dots}, \Psi_{p_1, \sigma_1, n_1; p_2, \sigma_2, n_2; \dots}) = \\ = \delta^3(\mathbf{p}'_1 - \mathbf{p}_1) \delta_{\sigma'_1 \sigma_1} \delta_{n'_1 n_1} \delta^3(\mathbf{p}'_2 - \mathbf{p}_2) \delta_{\sigma'_2 \sigma_2} \delta_{n'_2 n_2} \dots \pm \\ \pm \text{перестановки}, \quad (3.1.2)$$

где член “ $\pm$  перестановки” включен для учета возможности того, что частицы  $n'_1, n'_2, \dots$  оказываются того же типа, что и частицы  $n_1, n_2, \dots$  (Как будет более подробно показано в гл. 4, знак “ $-$ ” возникает, когда перестановка включает нечетную перестановку частиц с полуцелым спином, в противном случае возникнет знак “ $+$ ”. В данной главе это не будет для нас важным.)

Мы часто будем использовать какую-нибудь греческую букву, например  $\alpha$ , для обозначения всего набора индексов  $p_1, \sigma_1, n_1; p_2, \sigma_2, n_2; \dots$  Уравнение (3.1.2) в этих обозначениях можно переписать как

$$(\Psi_{\alpha'}, \Psi_\alpha) = \delta(\alpha' - \alpha), \quad (3.1.3)$$

где  $\delta(\alpha' - \alpha)$  обозначает произведение дельта-функций и символов Кронекера в правой части (3.1.2). Кроме того, при суммировании по состояниям мы будем писать

$$\int d\alpha \dots \equiv \sum_{n_1 \sigma_1 n_2 \sigma_2 \dots} \int d^3 p_1 d^3 p_2 \dots, \quad (3.1.4)$$

В частности, соотношение полноты для состояний, нормированных условием (3.1.3), выглядит так:

$$\Psi = \int d\alpha \Psi_\alpha (\Psi_\alpha, \Psi). \quad (3.1.5)$$

Правило преобразования (3.1.1) годится лишь для частиц, которые по тем или иным причинам не взаимодействуют друг с другом. В самом деле, если положить  $\Lambda^\mu{}_\nu = \delta^\mu{}_n u$  и  $a^\mu = (0, 0, 0, \tau)$  так, что  $U(\Lambda, a) = \exp(iH\tau)$ , то можно увидеть, что  $\Psi_\alpha$  должно быть собственным состоянием гамильтониана

$$H\Psi_\alpha = E_\alpha \Psi_\alpha, \quad (3.1.6)$$

отвечающим энергии, равной сумме энергий одночастичных состояний:

$$E_\alpha = p_1^0 + p_2^0 + \dots \quad (3.1.7)$$

С другой стороны, правило преобразования (3.1.1) на самом деле применимо к любым процессам рассеяния при  $t \rightarrow \pm\infty$ . Как было отмечено в начале этой главы, в любом эксперименте по рассеянию в начальный момент времени  $t \rightarrow -\infty$  мы имеем дело с частицами, находящимися настолько далеко друг от друга, что взаимодействие между ними еще отсутствует, а в конечный момент времени  $t \rightarrow +\infty$  — с настолько удаленными друг от друга частицами, что они уже перестали взаимодействовать. Таким образом, существует не один, а два набора состояний, преобразующихся согласно (3.1.1): *начальное и конечное состояния<sup>1)</sup>*  $\Psi_\alpha^+$  и  $\Psi_\alpha^-$  являются прямыми произведениями одночастичных состояний, характеризующихся индексом  $\alpha$ , если измерения выполняются соответственно при  $t \rightarrow -\infty$  и  $t \rightarrow +\infty$ .

Заметим, что это определение зависит от системы отсчета. Чтобы обеспечить явную инвариантность относительно группы Лоренца в используемом нами формализме, не будем позволять векторам состояний изменяться со временем —  $\Psi$  будет содержать полную информацию об истории жизни системы частиц. (Такая картина известна как *гейзенберговская*, в отличие от шредингеровской картины, когда постоянными остаются операторы, а векторы состояний меняются со временем.) Таким образом,  $\Psi_\alpha^\pm$  не являются пределами зависящего от времени вектора состояния  $\Psi(t)$  при  $t \rightarrow \pm\infty$ .

Однако в определении подразумевается, что выбрана инерциальная система отсчета, в которой наблюдатель следит за системой; различные наблюдатели видят векторы состояния, которые *физически эквивалентны*, а не *одинаковы*. Например, предположим, что некий наблюдатель  $\mathcal{O}$  настраивает свои часы таким образом, что  $t = 0$  соответствует некоторому моменту в процессе рассеяния, а другой наблюдатель  $\mathcal{O}'$ , покоящийся относительно первого, устанавливает свои часы так, что момент  $t' = 0$  соответствует  $t = \tau$ ; таким образом, временные координаты обоих наблюдателей связаны посредством  $t' = t - \tau$ . Тогда, если первый наблюдатель  $\mathcal{O}$  видит, что система находится в состоянии  $\Psi$ , второй,  $\mathcal{O}'$ , видит, что система — в состоянии  $U(1, -\tau)\Psi = \exp(-iH\tau)\Psi$ . Следовательно, вид состояния задолго до или после столкновения частиц (какой бы базис ни выбрал наблюдатель  $\mathcal{O}$ ) может быть найден применением оператора трансляции во времени,  $\exp(-iH\tau)$ , с  $\tau \rightarrow -\infty$  или  $\tau \rightarrow +\infty$  соответственно. Конечно, если физическое состояние в самом деле является собственным состоянием гамильтонiana, оно не может быть локализовано во

---

<sup>1)</sup> Выбор меток “+” и “−” для начального и конечного состояний может показаться противоречивым, но это дань традиции. Их происхождение можно проследить из знаков в (3.1.16).

времени — оператор  $\exp(-iH\tau)$  обеспечивает появление несущественного фазового множителя  $\exp(-iE_\alpha\tau)$ . Это значит, что мы должны рассматривать волновые пакеты, суперпозиции  $\int d\alpha g(\alpha)\Psi_\alpha$  состояний с амплитудами, гладко меняющимися на интервале энергий  $\Delta E$ . Начальное и конечное состояния определены так, что

$$\exp(-iH\tau) \int d\alpha g(\alpha)\Psi_\alpha^\pm = \int d\alpha e^{-iE_\alpha\tau} g(\alpha)\Psi_\alpha^\pm$$

является суперпозицией состояний свободных частиц соответственно для  $\tau \ll -1/\Delta E$  и  $\tau \gg +1/\Delta E$ .

Для большей ясности предположим, что генератор  $H$  трансляций во времени разбит на две части: гамильтониан свободных частиц  $H_0$  и отвечающий за взаимодействие член  $V$ :

$$H = H_0 + V, \quad (3.1.8)$$

таким образом, что  $H_0$  обладает собственными состояниями  $\Phi_\alpha$ , аналогичными состояниям  $\Psi_\alpha^\dagger$  и  $\Psi_\alpha^-$  полного гамильтониана:

$$H_0\Phi_\alpha = E_\alpha\Phi_\alpha, \quad (3.1.9)$$

$$(\Phi_{\alpha'}, \Phi_\alpha) = \delta(\alpha' - \alpha). \quad (3.1.10)$$

Отметим, что согласно нашему предположению у  $H_0$  такой же спектр, как и у полного гамильтониана  $H$ . Это имеет место, если массы, входящие в  $H_0$ , являются реально наблюдаемыми и не обязательно совпадают с “затравочными” массами в  $H$ ; разница между этими величинами, если она есть, должна быть включена в  $V$ , а не в  $H_0$ . Кроме того, любые связанные состояния  $H$  должны быть включены в спектр  $H_0$ , как если бы они были элементарными частицами<sup>2)</sup>.

Начальное и конечное состояния могут быть теперь определены как собственные векторы  $H$ , а не  $H_0$ :

$$H\Psi_\alpha^\pm = E_\alpha\Psi_\alpha^\pm, \quad (3.1.11)$$

удовлетворяющие условию

$$\int d\alpha e^{-iE_\alpha\tau} g(\alpha)\Psi_\alpha^\pm \rightarrow \int d\alpha e^{-iE_\alpha\tau} g(\alpha)\Phi_\alpha \quad (3.1.12)$$

соответственно для  $\tau \rightarrow -\infty$  и  $\tau \rightarrow +\infty$ .

Условие (3.1.12) равносильно

$$\exp(-iH\tau) \int d\alpha g(\alpha)\Psi_\alpha^\pm \rightarrow \exp(-iH_0\tau) \int d\alpha g(\alpha)\Phi$$

<sup>2)</sup> С другой стороны, в нерелятивистских задачах энергию связи можно включить в  $H_0$ . Применяя этот метод к “столкновениям перегруппировки” (rearrangement collisions), когда либо начальное, либо конечное состояния содержат связанные состояния частиц, нужно использовать различные расщепления  $H$  на  $H_0$  и  $V$  для начального и конечного состояний.

соответственно для  $\tau \rightarrow -\infty$  и  $\tau \rightarrow +\infty$ . Иногда его удобно переписать в виде формулы для начального и конечного состояний:

$$\Psi_\alpha^\pm = \Omega(\mp\infty)\Phi_\alpha, \quad (3.1.13)$$

где

$$\Omega(\tau) \equiv \exp(+iH\tau) \exp(-iH_0\tau). \quad (3.1.14)$$

Следует помнить, что осмыслиенные результаты можно получить, только если действовать оператором  $\Omega(\mp\infty)$  на гладкую суперпозицию собственных состояний гамильтонiana.

Одно из следствий определения (3.1.12) заключается в том, что начальное и конечное состояния нормированы точно так же, как состояния, отвечающие свободным частицам. В самом деле, заметим, что так как левая часть соотношения (3.1.12) получена действием оператора  $\exp(-iH\tau)$  на не зависящее от времени состояние, его норма так же не зависит от времени и, следовательно, равна норме состояния с  $\tau \rightarrow \infty$ , т.е. норме правой части (3.1.12):

$$\begin{aligned} \int d\alpha d\beta \exp(-i(E_\alpha - E_\beta)\tau) g(\alpha) g^*(\beta) (\Psi_\beta^\pm, \Psi_\alpha^\pm) &= \\ &= \int d\alpha d\beta \exp(-i(E_\alpha - E_\beta)\tau) g(\alpha) g^*(\beta) (\Phi_\beta, \Phi_\alpha). \end{aligned}$$

Так как предполагается, что это утверждение справедливо для любых гладких функций  $g(\alpha)$ , скалярные произведения состояний должны быть равны

$$(\Psi_\beta^\pm, \Psi_\alpha^\pm) = (\Phi_\beta, \Phi_\alpha) = \delta(\beta - \alpha). \quad (3.1.15)$$

Для некоторых приложений полезно иметь явное (хотя и формальное) решение уравнения на собственные значения энергии (3.1.11), удовлетворяющее условию (3.1.12). Чтобы получить его, перепишем (3.1.12) в следующем виде:

$$(E_\alpha - H_0)\Psi_\alpha^\pm = V\Psi_\alpha^\pm.$$

Оператор  $E_\alpha - H_0$  необратим; он является оператором уничтожения не только для состояния свободных частиц  $\Phi_\alpha$ , но и для всего континуума других состояний свободных частиц  $\Phi_\beta$ , соответствующих той же энергии. Так как начальное и конечное состояния не отличаются от  $\Phi_\alpha$  при  $V \rightarrow 0$ , формальное решение можно записать как сумму  $\Phi_\alpha$  и члена, пропорционального  $V$ :

$$\Psi_\alpha^\pm = \Phi_\alpha + (E_\alpha - H_0 \pm i\epsilon)^{-1}V\Psi_\alpha^\pm, \quad (3.1.16)$$

или, раскладывая по полному набору собственных состояний гамильтонiana:

тониана свободных частиц,

$$\Psi_\alpha^\pm = \Phi_\alpha + \int d\beta \frac{T_{\beta\alpha}^\pm \Phi_\beta}{E_\alpha - E_\beta \pm i\epsilon}, \quad (3.1.17)$$

$$T_{\beta\alpha}^\pm \equiv (\Phi_\beta, V\Psi_\alpha^\pm), \quad (3.1.18)$$

где  $\epsilon$  — некоторая бесконечно малая положительная величина, введенная для того, чтобы придать смысл оператору, обратному к  $E_\alpha - H_0$ . Это соотношение известно как *уравнение Липпмана–Швингера* [1a]. Мы воспользуемся им в конце следующего параграфа, чтобы привести несколько более строгое доказательство того, что начальное и конечное состояния являются ортонормированными.

Осталось убедиться в том, что (3.1.17) с  $+\epsilon$  или  $-\epsilon$  в знаменателе удовлетворяет условию (3.1.12) соответственно для начального и конечного состояний. Для этого рассмотрим суперпозиции

$$\Psi_g^\pm(t) \equiv \int d\alpha e^{-iE_\alpha t} g(\alpha) \Psi_\alpha^\pm, \quad (3.1.19)$$

$$\Phi_g(t) \equiv \int d\alpha e^{-iE_\alpha t} g(\alpha) \Phi_\alpha. \quad (3.1.20)$$

Нужно показать, что  $\Psi_g^+(t)$  и  $\Psi_g^-(t)$  стремятся к  $\Phi_g(t)$  соответственно при  $t \rightarrow -\infty$  и  $t \rightarrow +\infty$ . Пользуясь (3.1.19) и (3.1.17), имеем

$$\Psi_g^\pm(t) = \Phi_g(t) + \int d\alpha \int d\beta \frac{e^{-iE_\alpha t} g(\alpha) T_{\beta\alpha}^\pm \Phi_\beta}{E_\alpha - E_\beta \pm i\epsilon}. \quad (3.1.21)$$

Поменяем порядок интегрирования и сначала рассмотрим интегралы

$$\mathcal{F}_\beta^\pm \equiv \int d\alpha \frac{e^{iE_\alpha t} g(\alpha) T_{\beta\alpha}^\pm}{E_\alpha - E_\beta \pm i\epsilon}.$$

При  $t \rightarrow -\infty$  контур интегрирования по  $E_\alpha$  можно замкнуть в верхней полуплоскости полуокружностью большого радиуса. Вкладом от нее можно пренебречь, так как множитель  $\exp(-iE_\alpha t)$  экспоненциально мал при  $t \rightarrow -\infty$  и  $\text{Im } E_\alpha > 0$ . Тогда интеграл определяется суммой по сингулярностям подынтегрального выражения в верхней полуплоскости. Вообще говоря, функции  $g(\alpha)$  и  $T_{\beta\alpha}^\pm$  могут сами иметь сингулярности при некоторых  $E_\alpha$  с конечными положительными мнимыми частями, но их вклад также экспоненциально подавлен при  $t \rightarrow -\infty$  (строго говоря,  $-t$  должно быть много больше обратной ширины волнового пакета  $g(\alpha)$  и длительности столкновения, управляющей положением сингулярностей  $g(\alpha)$  и  $T_{\beta\alpha}^\pm$  в комплексной плоскости  $E_\alpha$ ). Остается сингулярность  $(E_\alpha - E_\beta \pm i\epsilon)^{-1}$ , находящаяся в верхней полуплоскости для  $\mathcal{F}_\beta^-$ , но не  $\mathcal{F}_\beta^+$ , и следует заключить, что  $\mathcal{F}_\beta^+$  при  $t \rightarrow -\infty$  обращается в нуль. Точно так же, замыкая контур в нижней полуплоскости при  $t \rightarrow +\infty$ , можно показать, что в этом пределе

обращается в нуль  $\mathcal{F}_\beta^-$ . Следовательно,  $\Psi_g^\pm(t)$  стремится к  $\Phi_g(t)$  при  $t \rightarrow \mp\infty$  в полном соответствии с определением (3.1.12).

\* \* \*

На будущее отметим, что существует удобное представление множителя  $(E_\alpha - E_\beta \pm i\epsilon)^{-1}$  в уравнении (3.1.17). В общем случае можно написать

$$(E \pm i\epsilon)^{-1} = \frac{\mathcal{P}_\epsilon}{E} \mp i\pi\delta_\epsilon(E), \quad (3.1.22)$$

где

$$\frac{\mathcal{P}_\epsilon}{E} = \frac{E}{E^2 + \epsilon^2}, \quad (3.1.23)$$

$$\delta_\epsilon(E) = \frac{\epsilon}{\pi(E^2 + \epsilon^2)}. \quad (3.1.24)$$

Функция (3.1.23) равна  $1/E$  для  $|E| \gg \epsilon$  и обращается в нуль при  $E \rightarrow 0$ . Таким образом, при  $\epsilon \rightarrow 0$  она ведет себя точно так же, как “функция главного значения”  $\mathcal{P}/E$ , позволяющая придавать смысл интегралам от  $1/E \cdot f(E)$ , где  $f(E)$  — произвольная гладкая функция, посредством исключения бесконечно узкого интервала с центром в точке  $E = 0$ . Функция (3.1.24) имеет порядок  $\epsilon$  при  $|E| \gg \epsilon$  и дает единицу при интегрировании по всем  $E$ , так что в пределе  $\epsilon \rightarrow 0$  она ведет себя так же, как известная дельта-функция  $\delta(E)$ . С учетом этих рассуждений бесконечно малую величину  $\epsilon$  в (3.1.22) можно выбросить и просто писать

$$(E \pm i\epsilon)^{-1} = \frac{\mathcal{P}}{E} \mp i\pi\delta(E). \quad (3.1.25)$$

### § 3.2. *S*-матрица

В типичном эксперименте сначала при  $t \rightarrow -\infty$  готовят состояние с определенным набором частиц, а затем выполняют некоторые измерения, чтобы понять, на что это состояние становится похожим при  $t \rightarrow +\infty$ . Если приготовленное при  $t \rightarrow -\infty$  состояние содержит частицы, характеризующиеся набором индексов  $\alpha$ , оно тождественно состоянию  $\Psi_\alpha^+$ , и если в результате эксперимента найдено, что при  $t \rightarrow +\infty$  оно содержит частицы, характеризующиеся набором индексов  $\beta$ , то оно становится тождественным состоянию  $\Psi_\beta^-$ . Таким образом, амплитуда вероятности перехода  $\alpha \rightarrow \beta$  определяется скалярным произведением

$$S_{\beta\alpha} = (\Psi_\beta^-, \Psi_\alpha^+). \quad (3.2.1)$$

Эта матрица комплексных амплитуд называется *S-матрицей* [2]. Если бы частицы не взаимодействовали друг с другом и начальное состояние совпадали,  $S_{\beta\alpha}$  была бы просто равна  $\delta(\alpha - \beta)$ .

Вероятность процесса  $\alpha \rightarrow \beta$ , таким образом, равна  $|S_{\beta\alpha} - \delta(\alpha - \beta)|^2$ . В § 3.4 мы покажем, какое отношение  $S_{\beta\alpha}$  имеет к наблюдаемым вероятностям и сечениям процессов.

Возможно, следует подчеркнуть, что начальное и конечное состояния не принадлежат различным гильбертовым пространствам. Они отличаются только индексом  $\alpha$ , т.е. набором частиц, который они описывают при  $t \rightarrow -\infty$  или  $t \rightarrow +\infty$ . Любое начальное состояние может быть разложено по полному набору конечных состояний с коэффициентами разложения, определяемыми (3.2.1).

Так как  $S_{\beta\alpha}$  является матрицей, связывающей два полных базиса ортонормированных состояний, она должна быть унитарной. Чтобы увидеть это, применим соотношение полноты (3.1.5) к конечным состояниям:

$$\int d\beta S_{\beta\gamma}^* S_{\beta\alpha} = \int d\beta (\Psi_\gamma^+, \Psi_\beta^-)(\Psi_\beta^-, \Psi_\alpha^+) = (\Psi_\gamma^+, \Psi_\alpha^+).$$

Воспользовавшись (3.1.15), получим

$$\int d\beta S_{\beta\gamma}^* S_{\beta\alpha} = \delta(\gamma - \alpha), \quad (3.2.2)$$

или, кратко,  $S^\dagger S = 1$ . Точно так же, применяя соотношение полноты для начальных состояний, имеем<sup>1)</sup>

$$\int d\beta S_{\gamma\beta} S_{\alpha\beta}^* = \delta(\gamma - \alpha) \quad (3.2.3)$$

или  $SS^\dagger = 1$ .

Часто вместо того чтобы работать с *S*-матрицей, удобно иметь дело с оператором *S*, матричные элементы которого в базисе собственных состояний гамильтониана свободных частиц равны соответствующим элементам *S*-матрицы

$$(\Phi_\beta, S\Phi_\alpha) \equiv S_{\beta\alpha}. \quad (3.2.4)$$

Явное, хотя и исключительно формальное, выражение (3.1.13) позволяет получить следующую формулу для оператора *S*:

$$S = \Omega(\infty)^\dagger \Omega(-\infty) = U(+\infty, -\infty), \quad (3.2.5)$$

где

$$U(\tau, \tau_0) \equiv \Omega(\tau)^\dagger \Omega(\tau_0) = \exp(iH_0\tau) \exp(-iH(\tau - \tau_0)) \exp(-iH_0\tau_0). \quad (3.2.6)$$

В следующем параграфе это выражение будет использовано для проверки лоренц-инвариантности *S*-матрицы, а в § 3.5 — чтобы вывести формулу для *S*-матрицы в нестационарной теории возмущений.

<sup>1)</sup> Другое доказательство будет дано в конце этого параграфа. Заметим, что для бесконечных матриц условия унитарности  $S^\dagger S = 1$  и  $SS^\dagger = 1$  не эквивалентны.

Методы, развитые в предыдущем параграфе, можно использовать для вывода другого полезного представления  $S$ -матрицы. Вернемся к уравнению (3.1.21) для начального состояния  $\Psi^+$ , но на этот раз перейдем к пределу  $t \rightarrow +\infty$ . Теперь нам нужно замкнуть контур интегрирования по  $E_\alpha$  в *нижней* полуплоскости, и хотя сингулярности в  $T_{\beta\alpha}^+$  и  $g(\alpha)$ , как и раньше, не дают вклада при  $t \rightarrow +\infty$ , вклад от сингулярного множителя  $(E_\alpha - E_\beta + i\epsilon)^{-1}$  будет нетривиальным. Мы проходим вдоль контура от  $E_\alpha = -\infty$  до  $E_\alpha = +\infty$ , затем назад до  $E_\alpha = -\infty$  вдоль большой полуокружности в нижней полуплоскости и таким образом обходим сингулярность по часовой стрелке. Согласно теореме о полюсах интеграл по  $E_\alpha$  равен значению подынтегрального выражения при  $E_\alpha = E_\beta - i\epsilon$ , умноженному на  $-2\pi i$ . Таким образом, в пределе  $\epsilon \rightarrow 0+$  и  $t \rightarrow +\infty$  интеграл по  $\alpha$  в (3.1.21) имеет следующее асимптотическое поведение:

$$\mathcal{F}_\beta^+ \rightarrow -2i\pi e^{-iE_\beta t} \int d\alpha \delta(E_\alpha - E_\beta) g(\alpha) T_{\beta\alpha}^+,$$

и, следовательно, при  $t \rightarrow +\infty$

$$\Psi_g^+(t) \rightarrow \int d\beta e^{-iE_\beta t} \Phi_\beta \left[ g(\beta) - 2i\pi \int d\alpha \delta(E_\alpha - E_\beta) g(\alpha) T_{\beta\alpha}^+ \right].$$

Раскладывая  $\Psi_g^+$  в выражении (3.1.19) по полному набору конечных состояний, имеем

$$\Psi_g^+(t) = \int d\alpha e^{-iE_\alpha t} g(\alpha) \int d\beta \Psi_\beta^- S_{\beta\alpha}.$$

Так как  $S_{\beta\alpha}$  содержит множитель  $\delta(E_\beta - E_\alpha)$ , это выражение может быть переписано следующим образом:

$$\Psi_g^+(t) = \int d\beta \Psi_\beta^- e^{-iE_\beta t} \int d\alpha g(\alpha) S_{\beta\alpha}.$$

Используя свойство (3.1.12) конечных состояний, можно увидеть, что оно имеет при  $t \rightarrow +\infty$  такое асимптотическое поведение:

$$\Psi_g^+(t) \rightarrow \int d\beta \Phi_\beta e^{-iE_\beta t} \int d\alpha g(\alpha) S_{\beta\alpha}.$$

Сравнивая это выражение с предыдущим, получаем, что

$$\int d\alpha g(\alpha) S_{\beta\alpha} = g(\beta) - 2i\pi \int d\alpha \delta(E_\alpha - E_\beta) g(\alpha) T_{\beta\alpha}^+,$$

или, другими словами,

$$S_{\beta\alpha} = \delta(\beta - \alpha) - 2i\pi \delta(E_\alpha - E_\beta) T_{\beta\alpha}^+. \quad (3.2.7)$$

Отсюда легко понять, что для  $S$ -матрицы существует простая аппроксимация: если взаимодействие  $V$  слабо, в (3.1.18) можно пренебречь

разницей между начальным состоянием и состояниями свободных частиц. В этом случае уравнение (3.2.7) сводится к выражению

$$S_{\beta\alpha} \approx \delta(\beta - \alpha) - 2i\pi\delta(E_\alpha - E_\beta)(\Phi_\beta, V\Phi_\alpha). \quad (3.2.8)$$

Такое приближение называется *борновским* [3]. Поправки высших порядков будут рассматриваться в § 3.5.

\* \* \*

Чтобы дать не использующее переходов к пределам  $t \rightarrow \mp\infty$  доказательство того, что начальные и конечные состояния ортонормированы, а *S*-матрица и ее представление (3.2.7) унитарны, можно воспользоваться уравнением Липпмана–Швингера (3.1.16). Во-первых, используя (3.1.16) для правой и левой частей матричного элемента  $(\Psi_\beta^\pm, V\Psi_\alpha^\pm)$  и приравнивая результаты, мы найдем, что

$$\begin{aligned} (\Psi_\beta^\pm, V\Phi_\alpha) + (\Psi_\beta^\pm, V(E_\alpha - H_0 \pm i\epsilon)^{-1}V\Psi_\alpha^\pm) &= \\ &= (\Phi_\beta, V\Psi_\alpha^\pm) + (\Psi_\beta^\pm, V(E_\beta - H_0 \mp i\epsilon)^{-1}V\Psi_\alpha^\pm). \end{aligned}$$

Суммируя по полному набору  $\Phi_\gamma$  промежуточных состояний, получим такое уравнение:

$$\begin{aligned} T_{\alpha\beta}^{\pm*} - T_{\beta\alpha}^\pm &= - \int d\gamma T_{\gamma\beta}^{\pm*} T_{\gamma\alpha} \times \\ &\times ([E_\alpha - E_\gamma \pm i\epsilon]^{-1} - [E_\beta - E_\gamma \mp i\epsilon]^{-1}). \quad (3.2.9) \end{aligned}$$

Чтобы доказать ортонормированность [4] начальных и конечных состояний, разделим (3.2.9) на  $E_\alpha - E_\beta \pm 2i\epsilon$ . В результате имеем

$$\begin{aligned} \left( \frac{T_{\alpha\beta}^\pm}{E_\beta - E_\alpha \pm 2i\epsilon} \right)^* + \frac{T_{\beta\alpha}^\pm}{E_\alpha - E_\beta \pm 2i\epsilon} &= \\ &= - \int d\gamma \left( \frac{T_{\gamma\beta}^\pm}{E_\beta - E_\gamma \pm i\epsilon} \right)^* \frac{T_{\gamma\alpha}^\pm}{E_\alpha - E_\gamma \pm 2i\epsilon}. \end{aligned}$$

Слагаемые  $2\epsilon$  в знаменателях левой части можно свободно заменить на  $\epsilon$  — существенно лишь то, что они являются бесконечно малыми и положительными. Мы видим, что матрица

$$\delta(\beta - \alpha) + \frac{T_{\beta\alpha}^\pm}{E_\beta - E_\alpha \pm i\epsilon}$$

унитарна. Вместе с (3.1.7) это утверждение является доказательством того, что  $\Psi_\alpha^\pm$  образуют два набора ортонормированных состояний. Точно так же доказывается унитарность *S*-матрицы: нужно умножить (3.2.9) на  $\delta(E_\beta - E_\alpha)$  вместо  $(E_\alpha - E_\beta \pm 2i\epsilon)^{-1}$ .

### § 3.3. Симметрии $S$ -матрицы

В этом параграфе мы поймем, что подразумевается под инвариантностью  $S$ -матрицы по отношению к различным преобразованиям симметрии и каковы условия на гамильтониан, позволяющие обеспечить эту инвариантность.

#### *Инвариантность относительно группы Лоренца*

Для любого ортохронного преобразования Лоренца  $x \rightarrow \Lambda x + a$  можно определить унитарный оператор  $U(\Lambda, a)$ , действующий на начальное или конечное состояния согласно (3.1.1). Когда мы говорим, что некоторая теория лоренц-инвариантна, мы имеем в виду, что *и на начальное, и на конечное* состояния действует один и тот же оператор  $U(\Lambda, a)$ . Так как он унитарен, то

$$S_{\beta\alpha} = (\Psi_\beta^-, \Psi_\alpha^+) = (U(\Lambda, a)\Psi_\beta^-, U(\Lambda, a)\Psi_\alpha^-),$$

и, используя (3.1.1), мы получаем условие лоренц-инвариантности (на самом деле — ковариантности)  $S$ -матрицы: для любых преобразований Лоренца  $\Lambda^\mu{}_\nu$  и трансляций  $a^\mu$  имеет место соотношение

$$\begin{aligned} S_{p'_1, \sigma'_1, n'_1; p'_2, \sigma'_2, n'_2; \dots, p_1, \sigma_1, n_1; p_2, \sigma_2, n_2; \dots} &= \\ &= \exp(ia_\mu \Lambda^\mu{}_\nu (p'_1{}^\nu + p'_2{}^\nu + \dots - p_1^\nu - p_2^\nu - \dots)) \times \\ &\quad \times \sqrt{\frac{(\Lambda p_1)^0 (\Lambda p_2)^0 \dots (\Lambda p'_1)^0 (\Lambda p'_2)^0 \dots}{p_1^0 p_2^0 \dots p'_1{}^0 p'_2{}^0 \dots}} \times \\ &\quad \times \sum_{\bar{\sigma}_1 \bar{\sigma}_2 \dots} D_{\bar{\sigma}_1 \sigma_1}^{(j_1)}(W(\Lambda, p_1)) D_{\bar{\sigma}_2 \sigma_2}^{(j_2)}(W(\Lambda, p_2)) \dots \times \\ &\quad \times \sum_{\bar{\sigma}'_1 \bar{\sigma}'_2 \dots} D_{\bar{\sigma}'_1 \sigma'_1}^{(j'_1)*}(W(\Lambda, p'_1)) D_{\bar{\sigma}'_2 \sigma'_2}^{(j'_2)}(W(\Lambda, p'_2)) \dots \times \\ &\quad \times S_{\Lambda p'_1, \bar{\sigma}'_1, n'_1; \Lambda p'_2, \bar{\sigma}'_2, n'_2; \dots, \Lambda p_1, \bar{\sigma}_1, n_1; \Lambda p_2, \bar{\sigma}_2, n_2; \dots} \end{aligned} \quad (3.3.1)$$

(здесь штрихи используются для того, чтобы отличить начальные состояния от конечных, а черта над буквой — для обозначения переменной, по которой производится суммирование). Если левая часть этого выражения не зависит от параметра  $a_\mu$ , то от него не зависит и правая часть. Таким образом, если импульс не сохраняется,  $S$ -матрица обращается в нуль. Ее часть, отвечающую за взаимодействия частиц, можно записать в следующей форме:

$$S_{\beta\alpha} - \delta(\beta - \alpha) = -2\pi i M_{\beta\alpha} \delta^4(p_\beta - p_\alpha) \quad (3.3.2)$$

(однако, как будет показано в следующей главе, амплитуда  $M_{\beta\alpha}$  сама содержит члены с дельта-функциями).

Уравнение (3.3.1) следует рассматривать не как теорему, а как определение того, что мы понимаем под лоренц-инвариантностью  $S$ -матрицы, так как унитарный оператор, действующий на векторы начального и конечного состояний согласно уравнению (3.1.1), существует только для особого выбора гамильтонианов. Сформулируем накладываемые на гамильтониан условия, при которых  $S$ -матрица будет лоренц-инвариантной. Для этого удобно работать с  $S$ -оператором, матричные элементы которого заданы соотношением (3.2.4)

$$S_{\beta\alpha} = (\Phi_\beta, S\Phi_\alpha).$$

Согласно данному в гл. 2 определению собственных состояний  $\Phi_\alpha$  гамильтониана свободных частиц, они преобразуются по некоторому представлению неоднородной группы Лоренца. Поэтому всегда можно определить унитарный оператор  $U_0(\Lambda, a)$ , осуществляющий преобразование (3.1.1) этих состояний:

$$\begin{aligned} U_0(\Lambda, a)\Phi_{p_1, \sigma_1, n_1; p_2, \sigma_2, n_2; \dots} &= \exp(-ia_\mu \Lambda^\mu{}_\nu (p_1^\nu + p_2^\nu + \dots)) \times \\ &\times \sqrt{\frac{(\Lambda p_1)^0 (\Lambda p_2)^0 \dots}{p_1^0 p_2^0}} \sum_{\sigma'_1 \sigma'_2 \dots} D_{\sigma'_1 \sigma'_1}^{(j_1)*}(W(\Lambda, p_1)) D_{\sigma'_2 \sigma'_2}^{(j_2)}(W(\Lambda, p_2)) \dots \times \\ &\times \Phi_{\Lambda p_1, \sigma'_1, n_1; \Lambda p_2, \sigma'_2, n_2; \dots}. \end{aligned}$$

Уравнение (3.1.1) будет справедливым, если этот унитарный оператор коммутирует с  $S$ -оператором:

$$U_0(\Lambda, a)^{-1} SU_0(\Lambda, a) = S.$$

Это условие можно также переписать через бесконечно малые преобразования Лоренца: как и в ситуации, которая обсуждалась в § 2.4, существует некоторый набор эрмитовых операторов — импульса  $\mathbf{P}_0$ , углового момента  $\mathbf{J}_0$  и генератора бустов  $\mathbf{K}_0$ , которые вместе с  $H_0$  являются генераторами бесконечно малых преобразований неоднородной группы Лоренца, действующими на состояния гамильтониана свободных частиц. Уравнение (3.1.1) эквивалентно тому утверждению, что  $S$ -матрица не подвержена влиянию этих преобразований или, другими словами, они коммутируют с  $S$ -оператором:

$$[H_0, S] = [\mathbf{P}_0, S] = [\mathbf{J}_0, S] = [\mathbf{K}_0, S] = 0. \quad (3.3.3)$$

Так как операторы  $H_0$ ,  $\mathbf{P}_0$ ,  $\mathbf{J}_0$  и  $\mathbf{K}_0$  генерируют бесконечно малые преобразования неоднородной группы Лоренца, они автоматически удовлетворяют коммутационным соотношениям (2.4.18)–(2.4.24):

$$[J_0^i, J_0^j] = i\epsilon_{ijk} J_0^k, \quad (3.3.4)$$

$$[J_0^i, K_0^j] = i\epsilon_{ijk} K_0^k, \quad (3.3.5)$$

$$[K_0^i, K_0^j] = -i\epsilon_{ijk} J_0^k, \quad (3.3.6)$$

$$[J_0^i, P_0^j] = i\epsilon_{ijk}P_0^k, \quad (3.3.7)$$

$$[K_0^i, P_0^j] = -iH_0\delta_{ij}, \quad (3.3.8)$$

$$[J_0^i, H_0] = [P_0^i, H_0] = [P_0^i, P_0^j] = 0, \quad (3.3.9)$$

$$[K_0^i, H_0] = -iP_0^i, \quad (3.3.10)$$

где  $i, j, k$  и т.д. — индексы, пробегающие значения 1, 2, 3, а  $\epsilon_{ijk}$  — совершенно антисимметричный тензор такой, что  $\epsilon_{123} = +1$ .

Точно так же можно определить набор “точных генераторов”, операторов  $\mathbf{P}$ ,  $\mathbf{J}$ ,  $\mathbf{K}$ , вместе с гамильтонианом  $H$  генерирующих преобразования (3.1.1), например начальных состояний (как уже упоминалось, совсем не очевидно, что те же самые операторы генерируют точно такие же преобразования конечных состояний). Групповая структура указывает на то, что эти точные генераторы удовлетворяют таким же коммутационным соотношениям:

$$[J^i, J^j] = i\epsilon_{ijk}J^k, \quad (3.3.11)$$

$$[J^i, K^j] = i\epsilon_{ijk}K^k, \quad (3.3.12)$$

$$[K^i, K^j] = -i\epsilon_{ijk}J^k, \quad (3.3.13)$$

$$[J^i, P^j] = i\epsilon_{ijk}P^k, \quad (3.3.14)$$

$$[K^i, P^j] = -iH\delta_{ij}, \quad (3.3.15)$$

$$[J^i, H] = [P^i, H] = [P^i, P^j] = 0, \quad (3.3.16)$$

$$[K^i, H] = -iP^i. \quad (3.3.17)$$

Фактически во всех известных теориях поля эффект взаимодействия состоит в добавлении к гамильтониану члена  $V$ , без изменения операторов импульса и углового момента:

$$H = H_0 + V, \quad \mathbf{P} = \mathbf{P}_0, \quad \mathbf{J} = \mathbf{J}_0. \quad (3.3.18)$$

(единственное известное исключение — теории с нетривиальными топологическими решениями, такими как магнитные монополи; в этом случае от взаимодействия зависит угловой момент состояния). В (3.3.18) подразумевается, что коммутационные соотношения (3.3.11), (3.3.14) и (3.3.16) справедливы при условии, что отвечающая за взаимодействие часть гамильтониана коммутирует с операторами импульса и углового момента системы свободных частиц:

$$[V, \mathbf{P}_0] = [V, \mathbf{J}_0] = 0. \quad (3.3.19)$$

Из уравнения Липпмана–Швингера (3.1.16) или (3.1.13) легко видеть, что действующие на начальное (и конечное) состояния генераторы трансляций и поворотов просто совпадают с  $\mathbf{P}_0$  и  $\mathbf{J}_0$ . Также можно заметить, что  $\mathbf{P}_0$  и  $\mathbf{J}_0$  коммутируют с оператором  $U(t, t_0)$ , определенным согласно (3.2.6), и, следовательно, с  $S$ -оператором  $U(-\infty, \infty)$ .

Далее, как мы уже знаем, из-за того что в обеих частях (3.2.7) имеются дельта-функции, обеспечивающие сохранение энергии,  $S$ -оператор коммутирует с  $H_0$ . Таким образом, осталось показать, что с  $S$ -оператором коммутирует генератор бустов  $\mathbf{K}_0$ .

Генератор бустов  $\mathbf{K}$  не может быть равен  $\mathbf{K}_0$ , так как в этом случае из (3.3.15) и (3.3.8) следует, что  $H = H_0$ , что неверно, если есть взаимодействие. Следовательно, когда мы добавляем к  $H_0$  некоторое взаимодействие  $V$ , нужно добавлять поправку  $\mathbf{W}$  к генератору бустов:

$$\mathbf{K} = \mathbf{K}_0 + \mathbf{W}. \quad (3.3.20)$$

Обратим теперь внимание на соотношение (3.3.17). В нашем случае оно может быть переписано в виде

$$[\mathbf{K}_0, V] = -[\mathbf{W}, H]. \quad (3.3.21)$$

Само по себе оно бессодержательно, поскольку для любого  $V$  можно определить  $\mathbf{W}$  через его матричные элементы между собственными состояниями гамильтониана  $H$  как  $-(\Psi_\beta, [\mathbf{K}_0, V]\Psi_\alpha)/(E_\beta - E_\alpha)$ . Вспомним, что ключевой момент определения лоренцевой инвариантности теории состоит не в том, что должен существовать некоторый набор точных генераторов, удовлетворяющих (3.3.11)–(3.3.17), а в том, что эти операторы должны одинаково действовать на начальное и конечное состояния. Поэтому мало просто найти оператор  $\mathbf{K}$ , удовлетворяющий (3.3.21). Это соотношение становится содержательным, если потребовать гладкости матричных элементов  $\mathbf{W}$  как функций энергии, в частности, отсутствия у них сингулярностей вида  $(E_\beta - E_\alpha)^{-1}$ . Покажем теперь, что из уравнения (3.3.21) и условия гладкости  $\mathbf{W}$  действительно следует, что  $[\mathbf{K}_0, S] = 0$ .

Для этого рассмотрим коммутатор  $\mathbf{K}_0$  и оператора  $U(t, t_0)$ , определенного согласно уравнению (3.2.6), в случае конечных  $t$  и  $t_0$ . Используя (3.3.10) и тот факт, что  $\mathbf{P}_0$  коммутирует с  $H_0$ , получим

$$[\mathbf{K}_0, \exp(iH_0t)] = t\mathbf{P}_0 \exp(iH_0t)$$

и из уравнения (3.3.21) (эквивалентного (3.3.17))

$$[\mathbf{K}, \exp(iHt)] = t\mathbf{P} \exp(iHt) = t\mathbf{P}_0 \exp(iHt).$$

Операторы импульса в коммутаторе  $\mathbf{K}_0$  и  $U$  сократятся, и мы получим следующее выражение:

$$[\mathbf{K}_0, U(\tau, \tau_0)] = -\mathbf{W}(\tau)U(\tau, \tau_0) + U(\tau, \tau_0)\mathbf{W}(\tau_0), \quad (3.3.22)$$

где

$$\mathbf{W}(t) \equiv \exp(iH_0t)\mathbf{W} \exp(-iH_0t). \quad (3.3.23)$$

Если матричные элементы  $\mathbf{W}$ , взятые между собственными состояниями  $H_0$ , являются достаточно гладкими функциями энергии, то матричные элементы  $\mathbf{W}(t)$  между гладкими суперпозициями собственных состояний гамильтониана обращаются при  $t \rightarrow \pm\infty$  в нуль,

и из уравнения (3.3.22) можно получить

$$0 = [\mathbf{K}_0, U(\infty, -\infty)] = [\mathbf{K}_0, S], \quad (3.3.24)$$

что и требовалось. Таким образом, соотношение (3.3.21) с учетом условия гладкости матричных элементов  $\mathbf{W}$ , гарантирующего обращение в нуль  $\mathbf{W}(t)$ , является достаточным условием лоренц-инвариантности  $S$ -матрицы. Предположение о гладкости довольно естественно, поскольку оно очень похоже на условие, при котором  $V(t)$  при  $t \rightarrow \pm\infty$  обращается в нуль, что необходимо для осмысленности самой идеи  $S$ -матрицы.

Используя (3.3.22) с  $\tau = 0$  и  $\tau_0 = \mp\infty$ , можно также показать, что

$$\mathbf{K}\Omega(\mp\infty) = \Omega(\mp\infty)\mathbf{K}_0, \quad (3.3.25)$$

где  $\Omega(\mp\infty)$  — оператор, который согласно (3.1.13) переводит собственное состояние  $\Phi_\alpha$  гамильтониана свободных частиц в соответствующее начальное или конечное состояние  $\Psi_\alpha^\pm$ . Кроме того, как тривиально следует из (3.3.18) и (3.3.19), то же самое верно для операторов импульса и углового момента:

$$\mathbf{P}\Omega(\mp\infty) = \Omega(\mp\infty)\mathbf{P}_0, \quad (3.3.26)$$

$$\mathbf{J}\Omega(\mp\infty) = \Omega(\mp\infty)\mathbf{J}_0. \quad (3.3.27)$$

Наконец, так как все  $\Phi_\alpha$  и  $\Psi_\alpha^\pm$  являются собственными состояниями  $H_0$  и  $H$ , соответствующими одному собственному значению  $E_\alpha$ , получаем

$$H\Omega(\mp\infty) = \Omega(\mp\infty)H_0. \quad (3.3.28)$$

Из (3.3.25)–(3.3.28) следует, что начальные и конечные состояния в самом деле преобразуются под действием неоднородной группы Лоренца точно так же, как собственные состояния гамильтониана свободных частиц. Кроме того, поскольку мы имеем дело с преобразованиями подобия, то генераторы  $\mathbf{K}$ ,  $\mathbf{P}$ ,  $\mathbf{J}$  и  $H$  удовлетворяют, как мы видим, тем же коммутационным соотношениям, что и  $\mathbf{K}_0$ ,  $\mathbf{P}_0$ ,  $\mathbf{J}_0$  и  $H_0$ . Поэтому при доказательстве лоренц-инвариантности  $S$ -матрицы нет необходимости использовать остальные включающие  $\mathbf{K}$  коммутационные соотношения (3.3.12), (3.3.13) и (3.3.15).

### *Внутренние симметрии*

Существует множество симметрий (таких, как, например, симметрия по отношению к замене нейтронов протонами в ядерной физике или симметрия “зарядового сопряжения”, связывающая частицы и античастицы) которые не имеют прямого отношения к лоренц-инвариантности и потому не меняются в любой инерциальной системе отсчета. Подобному преобразованию симметрии  $T$  соответствует некоторый унитарный оператор  $U(T)$ , действующий в гильбертовом про-

пространстве физических состояний. Он индуцирует линейные преобразования в пространстве индексов, нумерующих типы частиц:

$$U(T)\Psi_{p_1,\sigma_1,n_1;p_2,\sigma_2,n_2;\dots} = \sum_{\bar{n}_1,\bar{n}_2;\dots} \mathcal{D}_{\bar{n}_1 n_1}(T) \mathcal{D}_{\bar{n}_2 n_2}(T) \dots \Psi_{p_1,\sigma_1,\bar{n}_1;p_2,\sigma_2,\bar{n}_2;\dots} \quad (3.3.29)$$

В соответствии с гл. 2 оператор  $U(T)$  должен подчиняться правилу группового умножения:

$$U(\bar{T})U(T) = U(\bar{T}T), \quad (3.3.30)$$

Здесь запись  $\bar{T}T$  означает, что на состояние сначала нужно действовать преобразованием  $T$ , а затем другим преобразованием  $\bar{T}$ . Действуя оператором  $U(T)$  на уравнение (3.3.29), можно видеть, что матрицы  $\mathcal{D}$  удовлетворяют аналогичному соотношению

$$\mathcal{D}(\bar{T})\mathcal{D}(T) = \mathcal{D}(\bar{T}T). \quad (3.3.31)$$

Кроме того, если взять скалярное произведение состояний, полученных действием  $U(T)$  на два различных конечных состояния и воспользоваться условием нормировки (3.1.2), то можно обнаружить, что матрица  $\mathcal{D}(T)$  унитарна:

$$\mathcal{D}^\dagger(T) = \mathcal{D}^{-1}(T). \quad (3.3.32)$$

Наконец, вычисляя скалярное произведение состояний, полученных действием  $U(T)$  на конечное и начальное состояния, получим, что  $\mathcal{D}$  коммутирует с  $S$ -матрицей:

$$\begin{aligned} & \sum_{\bar{N}_1 \bar{N}_2 \dots} \sum_{\bar{N}'_1 \bar{N}'_2 \dots} \mathcal{D}_{\bar{N}'_1 n'_1}^*(T) \mathcal{D}_{\bar{N}'_2 n'_2}^*(T) \dots \mathcal{D}_{\bar{N}_1 n_1}^*(T) \mathcal{D}_{\bar{N}_2 n_2}^*(T) \dots \times \\ & \times S_{p'_1 \sigma'_1 \bar{N}'_1; p'_2 \sigma'_2 \bar{N}'_2; \dots, p_1 \sigma_1 \bar{N}_1; p_2 \sigma_2 \bar{N}_2; \dots} = S_{p'_1 \sigma'_1 n'_1; p'_2 \sigma'_2 n'_2; \dots, p_1 \sigma_1 n_1; p_2 \sigma_2 n_2; \dots} \end{aligned} \quad (3.3.33)$$

Это уравнение вновь следует считать определением того, что мы понимаем под инвариантностью теории относительно преобразований внутренней симметрии  $T$ , поскольку для того чтобы его вывести, нужно, помимо всего прочего, потребовать, чтобы *один и тот же* оператор  $U(T)$  индуцировал преобразование (3.3.29) и для начального, и для конечного состояний. Это будет справедливым в том случае, когда существует “невозмущенный” оператор  $U_0(T)$ , действующий подобным образом на собственные состояния гамильтонiana свободных частиц:

$$\begin{aligned} & U_0(T)\Phi_{p_1 \sigma_1 n_1; p_2 \sigma_2 n_2; \dots} = \\ & = \sum_{\bar{N}_1 \bar{N}_2 \dots} \mathcal{D}_{\bar{N}'_1 n'_1}(T) \mathcal{D}_{\bar{N}'_2 n'_2}(T) \dots \Phi_{p_1 \sigma_1 \bar{N}_1; p_2 \sigma_2 \bar{N}_2; \dots} \end{aligned} \quad (3.3.34)$$

и коммутирующий как со свободной частью гамильтониана, так и с членом, отвечающим за взаимодействие:

$$U_0^{-1}(T)H_0U_0(T) = H_0, \quad (3.3.35)$$

$$U_0^{-1}(T)VU_0(T) = V. \quad (3.3.36)$$

Из уравнения Липпмана–Швингера (3.1.17) или из (3.1.13) следует, что оператор  $U_0(T)$  действует согласно (3.3.29) как на начальное и конечное состояния, так и на собственные состояния гамильтониана свободных частиц. Поэтому (3.3.29) можно выводить, взяв в качестве  $U(T)$  просто оператор  $U_0(T)$ .

Особенно важным для физики является случай однопараметрической группы Ли, когда  $T$  является такой функцией одного параметра  $\theta$ , что

$$T(\bar{\theta})T(\theta) = T(\bar{\theta} + \theta). \quad (3.3.37)$$

Как было показано в § 2.2, соответствующие операторы, действующие в гильбертовом пространстве состояний, должны иметь вид

$$U(T(\theta)) = \exp(iQ\theta), \quad (3.3.38)$$

где  $Q$  — эрмитов оператор. Аналогично, матрицы  $\mathcal{D}(T)$  равны

$$\mathcal{D}_{n'n}(T(\theta)) = \delta_{n'n} \exp(iq_n\theta), \quad (3.3.39)$$

где  $q_n$  — некоторый набор действительных чисел, зависящих от типов частиц. Из уравнения (3.3.33) следует, что числа  $q$  должны сохраняться:  $S_{\beta\alpha}$  обращается в нуль, если не выполнено условие

$$q_{n'_1} + q_{n'_2} + \dots = q_{n_1} + q_{n_2} + \dots \quad (3.3.40)$$

Классический пример такого закона сохранения — сохранение электрического заряда. Кроме того, во всех известных процессах сохраняется барионный заряд (число барионов, таких как протоны, нейтроны и гипероны, минус число антибарионов) и лептонный заряд (число лептонов, таких как электроны, мюоны,  $\tau$ -частицы и нейтрино, минус число соответствующих античастиц). Но, как будет отмечено в т. II, сегодня считается, что эти законы сохранения являются лишь приближенными. Существуют и другие приближенные законы сохранения: например сохранение квантового числа “странный”, которое было введено в физику для объяснения относительно большого времени жизни некоторых частиц, открытых в 1947 г. в космических лучах Рочестером и Батлером [5].

Так, мезоны, получившие название<sup>1)</sup>  $K^+$ - и  $K^0$ -частиц имеют странность, равную  $-1$ , а такие знакомые неспециалисту частицы,

---

<sup>1)</sup> Верхний индекс обозначает электрический заряд заряд частицы в единицах заряда электрона. Гипероном называется любая частица, несущая ненулевую странность и единичный барионный заряд.

как протон, нейтрон и  $\pi$ -мезоны (или пионы), несут нулевую странность. Сохранение странности в сильных взаимодействиях объясняет, почему странные частицы почти всегда рождаются парами, как в реакциях типа  $\pi^+ + n \rightarrow K^+ + \Lambda^0$ . Такие относительно медленные распады странных частиц на частицы с нулевой странностью, как  $\Lambda_0 \rightarrow p + \pi^-$  и  $K^+ \rightarrow \pi^+ + \pi^0$ , показывают, что взаимодействия, не сохраняющие странность, очень слабы.

Одним из примеров “неабелевой” внутренней симметрии, когда генераторы не коммутируют друг с другом, является симметрия по отношению к вращению изотопического спина. Она была открыта [6] в 1937 г. благодаря эксперименту [7], в котором было обнаружено, что сильное взаимодействие между двумя протонами почти равно сильному взаимодействию между протоном и нейтроном. Группа симметрии в этой случае совпадает с  $SU(2)$ , аналогичной накрывающей группы трехмерных вращений; ее генераторы  $t_i$  удовлетворяют коммутационным соотношениям, аналогичным (2.4.18):

$$[t_i, t_j] = i\epsilon_{ijk}t_k.$$

Благодаря этой симметрии частицы образуют<sup>2)</sup> вырожденные  $(2T + 1)$ -компонентные мультиплеты ( $T$  — целое или полуцелое число), различаясь внутри мультиплета компонентами  $t_3$  аналогично тому, как это имеет место для обычного спина и инвариантности по отношению к вращениям в пространстве. Например, в такие мультиплеты собраны нуклоны  $p$  и  $n$  с  $T = 1/2$  и  $t_3 = 1/2, -1/2$ , пионы  $\pi^+, \pi^0$  и  $\pi^-$  с  $T = 1$  и  $t_3 = +1, 0, -1$  и  $\Lambda^0$ -гиперон с  $T = 0$  и  $t_3 = 0$ . Эти примеры иллюстрируют соотношение между электрическим зарядом  $Q$ , третьей компонентой изоспина  $t_3$ , барионным зарядом  $B$  и странностью  $S$ :

$$Q = t_3 + (B + S)/2.$$

Первоначально оно было выведено как следствие наблюдавшихся в экспериментах правил отбора. В 1960 г. Гелл-Манн и Нееман интерпретировали это соотношение как погружение изоспина  $T$  и “гиперзаряда”  $Y \equiv B + S$  в алгебру Ли группы  $SU(3)$ , соответствующей большей, чем изоспиновая, неабелевой внутренней симметрии, которая сильно нарушена. Как будет показано в т. II, изоспиновая и  $SU(3)$ -симметрия являются случайными следствиями малости масс трех из шести кварков в современной теории сильных взаимодействий, квантовой хромодинамике.

Инвариантность по отношению к вращению в изотопическом пространстве с точки зрения ее следствий для процессов с сильным взаимодействием можно анализировать теми же методами, что и инвариантность по отношению к вращениям в обычном пространстве.

---

<sup>2)</sup> Это утверждение носит приближенный характер, как и сохранение изотопического спина.

Например, как следует из уравнения (3.3.33),  $S$ -матрица реакции  $A + B \rightarrow C + D$  должна иметь вид (если опустить все индексы, кроме изоспиновых)

$$S_{t_{C3}t_{D3}, t_{A3}t_{B3}} = \sum_{T,t_3} C_{T_C T_D}(Tt_3; t_{C3}t_{D3}) C_{T_A T_B}(Tt_3; t_{A3}t_{B3}) S_T,$$

где  $C_{j_1 j_2}(j\sigma; \sigma_1 \sigma_2)$  — коэффициент Клебша–Гордана [9] преобразования от состояния со спином  $j$  и  $z$ -проекцией спина  $\sigma$  к состояниям со спинами  $j_1$ ,  $j_2$  и соответствующими проекциями спина  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$ , а  $S_T$  — “редуцированная”  $S$ -матрица, зависящая от  $T$  и от всех импульсных и спиновых переменных, но не от проекций изоспина  $t_{A3}$ ,  $t_{B3}$ ,  $t_{C3}$ ,  $t_{D3}$ . Подобно любым следствиям изоспиновой симметрии, это соотношение носит лишь приближенный характер: изоспин не сохраняется в электромагнитных (и других) взаимодействиях. Это следует, например, из того, что разные компоненты изоспинового мультиплета (такие, как  $p$  и  $n$ ) имеют различные электрические заряды и немного отличающиеся массы.

### Четность

Поскольку симметрия по отношению к преобразованию  $\mathbf{x} \rightarrow -\mathbf{x}$  соблюдается, должен существовать некоторый унитарный оператор  $P$ , под действием которого начальное и конечное состояния преобразуются как прямые произведения одночастичных состояний:

$$\mathcal{P} \Psi^{\pm}_{p_1 \sigma_1 n_1; p_2 \sigma_2 n_2; \dots} = \eta_{n_1} \eta_{n_2} \dots \Psi^{\pm}_{\mathcal{P} p_1 \sigma_1 n_1; \mathcal{P} p_2 \sigma_2 n_2; \dots} \quad (3.3.41)$$

где  $\eta_n$  — внутренняя четность частицы типа  $n$ , а  $\mathcal{P}$  меняет знак пространственных компонент  $p^\mu$ . (Такое соотношение имеет место для массивных частиц, а обобщение на безмассовые частицы выполняется тривиально.) Условие сохранения четности для  $S$ -матрицы выглядит следующим образом:

$$\begin{aligned} S_{p'_1 \sigma'_1 n'_1; p'_2 \sigma'_2 n'_2; \dots, p_1 \sigma_1 n_1; p_2 \sigma_2 n_2; \dots} &= \\ &= \eta_{n'_1}^* \eta_{n'_2}^* \dots, \eta_{n_1} \eta_{n_2} \dots \times \\ &\times S_{\mathcal{P} p'_1 \sigma'_1 n'_1; \mathcal{P} p'_2 \sigma'_2 n'_2; \dots, \mathcal{P} p_1 \sigma_1 n_1; \mathcal{P} p_2 \sigma_2 n_2; \dots} \end{aligned} \quad (3.3.42)$$

Как и для внутренних симметрий, удовлетворяющий (3.3.41) оператор  $P$  существует, только когда действующий на собственные состояния гамильтониана свободных частиц оператор  $P_0$  коммутирует с  $H_0$  и  $V$ .

Фазы  $\eta_n$  можно найти из динамических моделей или результатов эксперимента. Однако они не могут быть определены однозначно, так как всегда можно переопределить  $P$ , взяв его комбинацию с любым другим оператором внутренней симметрии. Например, если  $P$  сохра-

няется, то сохраняется и

$$\mathsf{P}' \equiv \mathsf{P} \exp(i\alpha B + i\beta L + i\gamma Q),$$

где  $B$ ,  $L$  и  $Q$  — соответственно барионный, лептонный и электрический заряды, а  $\alpha$ ,  $\beta$  и  $\gamma$  — некоторые действительные числа; и оператор  $\mathsf{P}$ , и оператор  $\mathsf{P}'$  можно с равным правом называть оператором четности. Нейтрон, протон и электрон обладают различными зарядами  $B$ ,  $L$  и  $Q$ . Следовательно, соответствующим выбором  $\alpha$ ,  $\beta$  и  $\gamma$  можно всегда добиться равенства четностей каждой из этих частиц единице. Однако после того как мы таким образом определили четности этих трех частиц, фиксируются четности всех остальных, например пиона (он излучается в процессе  $n \rightarrow p + \pi^-$ ). Кроме того, всегда однозначно определена внутренняя четность любой частицы, не несущей никакого сохраняющегося квантового числа. Пример такой частицы — нейтральный пion  $\pi^0$ .

Эти рассуждения позволяют ответить на вопрос, всегда ли внутренняя четность должна принимать значения  $\pm 1$ . На первый взгляд, это должно следовать из того, что оператор пространственной инверсии  $\mathsf{P}$  удовлетворяет соотношению  $\mathsf{P}^2 = 1$ . Однако оператор сохраняющейся четности может отличаться от оператора инверсии фазовым множителем. В любом случае, выполнено условие  $\mathsf{P}^2 = 1$  или нет, оператор  $\mathsf{P}^2$  действует точно так же, как оператор внутренней симметрии:

$$\mathsf{P}^2 \Psi_{p_1 \sigma_1 n_1; p_2 \sigma_2 n_2; \dots}^\pm = \eta_{n_1}^2 \eta_{n_2}^2 \dots \Psi_{p_1 \sigma_1 n_1; p_2 \sigma_2 n_2; \dots}^\pm.$$

Если эта внутренняя симметрия является частью непрерывной группы фазовых преобразований, такой как группа умножения на  $\exp(i\alpha B + i\beta L + i\gamma Q)$  с произвольными  $\alpha$ ,  $\beta$  и  $\gamma$ , оператор  $I_P$ , равный квадратному корню из  $\mathsf{P}^{-1}$ , тоже будет принадлежать этой группе и будут выполняться соотношения  $I_P^2 \mathsf{P}^2 = 1$  и  $[I_P, \mathsf{P}] = 0$  (например, если  $\mathsf{P}^2 = \exp(i\alpha B + \dots)$ , то  $I_P = \exp(-i\alpha B/2 + \dots)$ ). Таким образом, можно определить новый оператор четности как  $\mathsf{P}' \equiv \mathsf{P} I_P$  с  $\mathsf{P}'^2 = 1$ . Нет причины, по которой нельзя было бы считать  $\mathsf{P}'$  оператором четности, поскольку четность, определенная таким образом, тоже сохраняется. Кроме того, внутренняя четность любой частицы в этом случае будет равна  $\pm 1$ .

Единственным классом теорий, для которых четность не всегда можно определить так, чтобы все внутренние четности были равны  $\pm 1$ , являются теории с дискретной симметрией, не входящей ни в какую непрерывную группу симметрии, состоящую из фазовых преобразований [10]. Например, сохранение оператора  $(-1)^F$ , где  $F$  — полное число частиц с полуцелым спином, является следствием сохранения углового момента. Все известные частицы с полуцелым спином устроены так, что сумма барионного и лептонного зарядов  $B + L$  является нечетным числом, так что, насколько нам известно,  $(-1)^F = (-1)^{B+L}$ . Если это верно, оператор  $(-1)^F$  принадлежит некоторой непрерыв-

ной группе, состоящей из операторов  $\exp(i\alpha(B + L))$  с произвольными действительными  $\alpha$ , и обратный квадратный корень из него равен  $\exp(-i\pi(B + L)/2)$ . В этом случае, если  $P^2 = (-1)^F$ , оператор  $P$  может быть переопределен так, что все внутренние четности совпадут с  $\pm 1$ . Однако если бы была открыта частица с полуцелым спином и четным значением  $B + L$  (например, майорановское нейтрино с  $j = 1/2$  и  $B + L = 0$ ), можно было бы зафиксировать  $P^2 = (-1)^F$  и в том случае, когда невозможно требовать, чтобы оператор четности имел только собственные значения  $\pm 1$ . В этом случае  $P^4 = 1$ , так что все внутренние четности равны  $\pm 1$  или  $\pm i$  (для майорановских нейтрино).

Как следует из уравнения (3.3.42),  $S$ -матрица является четной или нечетной относительно обращения знаков всех 3-импульсов в зависимости от того, равно произведение внутренних четностей частиц конечного состояния произведению внутренних четностей частиц начального состояния, взятому со знаком “+” или “−”. В 1951 г. [11] было обнаружено, что в реакции  $\pi^- + d \rightarrow n + n$  дейtron может поглотить пион из основного состояния  $\pi^-d$ -атома с  $l = 0$  (как было отмечено в § 3.7, в релятивистской физике с квантовым числом  $l$ , соответствующим орбитальному угловому моменту, можно работать точно так же, как и в нерелятивистской квантовой механике). В начальном состоянии полный угловой момент  $j = 1$  (спин пиона равен нулю, а спин дейтрана — единице), следовательно, конечное состояние должно обладать орбитальным угловым моментом  $l = 1$  и полным спином  $s = 1$ . Другие варианты  $l = 1, s = 0; l = 0, s = 1; l = 2, s = 1$ , не вступающие в противоречие с сохранением углового момента, на самом деле запрещены условием антисимметричности конечного состояния по отношению к перестановкам нейтронов. Так как в конечном состоянии  $l = 1$ , матричный элемент нечетен относительно обращения направлений всех 3-импульсов, и мы можем заключить, что внутренние четности частиц в реакции должны быть связаны соотношением

$$\eta_d \eta_{\pi^-} = -\eta_n^2.$$

Как известно, дейtron является связанным состоянием протона и нейтрона с четным орбитальным угловым моментом (обычно  $l = 0$ ), причем у протона и нейтрона должна быть одинаковая внутренняя четность. Поэтому  $\eta_d = \eta_n^2$ , и  $\eta_{\pi^-} = -1$ , т.е. отрицательный пион является псевдоскалярной частицей. Как оказывается, частицы  $\pi^+$  и  $\pi^0$  тоже несут отрицательную внутреннюю четность, что следует из существования изоспиновой симметрии между этими частицами.

Отрицательная четность пиона имеет грандиозные последствия для теории. Любая частица с нулевым спином, распадающаяся на три пиона, должна иметь внутреннюю четность  $\eta_\pi^3 = -1$ , так как в системе отсчета, где она покоятся, матричный элемент может зависеть только от скалярных произведений импульсов пионов. Это следует

из инвариантности относительно вращений (скалярное произведение вида  $\mathbf{p}_1 \cdot (\mathbf{p}_2 \times \mathbf{p}_3)$  обращается в нуль, так как  $\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 + \mathbf{p}_3 = 0$ ). По той же причине любая частица с нулевым спином, распадающаяся на два пиона, должна иметь внутреннюю четность  $\eta_\pi^2 = +1$ . В частности, среди частиц с ненулевой странностью, открытых в конце 40-х годов, были две частицы с нулевым спином (это следовало из формы углового распределения продуктов их распада). Одна,  $\tau$ -частица, была обнаружена по ее распаду на три пиона, и, таким образом, обладала четностью, равной  $-1$ . Другая,  $\theta$ -частица, распадалась на два пиона и несла четность  $+1$ . Чем подробнее изучались процессы с участием  $\tau$  и  $\theta$ , тем больше крепло убеждение в том, что они имеют одинаковые массы и времена жизни. Это вызывало сильное беспокойство. В 1965 г., после того как были предложены многочисленные неправильные объяснения этой загадки, Ли и Янг [12] наконец разрушили гордиев узел и предположили, что  $\tau$  и  $\theta$  на самом деле являются одной и той же частицей (известной сегодня как  $K^\pm$ ), а четность попросту не сохраняется в слабых взаимодействиях, ответственных за эти распады.

Как будет показано в следующем параграфе, вероятность некоторого физического процесса  $\alpha \rightarrow \beta$  (где  $\alpha \neq \beta$ ) пропорциональна  $|S_{\beta\alpha}|^2$ , причем коэффициент пропорциональности инвариантен по отношению к изменению знаков 3-импульсов на противоположные. Если состояния  $\alpha$  и  $\beta$  содержат определенное число частиц каждого типа, фазовые множители в (3.3.42) не влияют на  $|S_{\beta\alpha}|^2$ , и из (3.3.42) следует, что вероятность процесса  $\alpha \rightarrow \beta$  инвариантна относительно преобразования четности. Как мы видели, для распадов  $K$ -мезонов на два или три пиона это утверждение является простым следствием инвариантности относительно вращений в пространстве, но в более сложных случаях оно носит нетривиальный характер. Например, следуя теории Ли и Янга, Ву вместе с группой физиков из Национального бюро стандартов проводила опыты по измерению углового распределения электронов, являющихся продуктами бета-распада поляризованных ядер кобальта  $\text{Co}^{60} \rightarrow \text{Ni}^{60} + e^- + \bar{\nu}$  (в этом эксперименте не измерялись ни импульс антинейтрино, ни импульс ядра никеля). Как оказалось, с наибольшей вероятностью электроны излучались в противоположном спину распадающегося ядра направлении, что конечно было бы невозможно в случае инвариантности относительно преобразования четности. Похожий эффект наблюдался при распаде положительного мюона (который сам рождался в процессе  $\pi^+ \rightarrow \mu^+ + \nu$  и потому был поляризован) на позитрон, нейтрино и антинейтрино. Таким образом, стало ясно, что четность не обязательно должна сохраняться в ответственных за бета-распад слабых взаимодействиях. Тем не менее она сохраняется в сильных и электромагнитных взаимодействиях по причинам, о которых будет говориться в § 12.5, и потому продолжает играть важную роль в теоретической физике.

*Обращение времени*

Как было показано в § 2.6, под действием оператора обращения времени  $T$  одиночастичное состояние  $\Psi_{p,\sigma,n}$  превращается в умноженное на  $\zeta_n(-1)^{j-\sigma}$  состояние  $\Psi_{\mathcal{P}p,-\sigma,n}$  с перевернутыми спином и импульсом. Многочастичное состояние преобразуется как прямое произведение одиночастичных состояний с учетом перестановки начального и конечного состояний:

$$\begin{aligned} T\Psi_{p_1\sigma_1n_1;p_2\sigma_2n_2;\dots}^{\pm} = \\ = \zeta_{n_1}(-1)^{j_1-\sigma_1}\zeta_{n_2}(-1)^{j_2-\sigma_2}\dots\Psi_{\mathcal{P}p_1-\sigma_1n_1;\mathcal{P}p_2-\sigma_2n_2;\dots}^{\mp} \end{aligned} \quad (3.3.43)$$

(это верно только для массивных частиц, а обобщение на безмассовые частицы выполняется тривиально). Будет более удобным переписать это выражение в сокращенном виде:

$$T\Psi_{\alpha}^{\pm} = \Psi_{\mathcal{T}\alpha}^{\mp}, \quad (3.3.44)$$

где  $\mathcal{T}$  обозначает обращение знаков всех импульсов и спинов и выполненное согласно (3.3.43) умножение на фазовые множители. Так как оператор  $T$  антиунитарен, то

$$(\Psi_{\beta}^{-}, \Psi_{\alpha}^{+}) = (T\Psi_{\alpha}^{+}, T\Psi_{\beta}^{-}), \quad (3.3.45)$$

так что условие инвариантности относительно обращения времени для  $S$ -матрицы имеет вид

$$S_{\beta\alpha} = S_{\mathcal{T}\alpha, \mathcal{T}\beta}, \quad (3.3.46)$$

или, более подробно,

$$\begin{aligned} S_{p'_1\sigma'_1n'_1;p'_2\sigma'_2n'_2;\dots,p_1\sigma_1n_1;p_2\sigma_2n_2;\dots} = \\ = \zeta_{n'_1}(-1)^{j'_1-\sigma'_1}\zeta_{n'_2}(-1)^{j'_2-\sigma'_2}\dots\zeta_{n_1}^{*}(-1)^{j_1-\sigma_1}\zeta_{n_2}^{*}(-1)^{j_2-\sigma_2}\dots\times \\ \times S_{\mathcal{P}p_1-\sigma_1n_1;\mathcal{P}p_2-\sigma_2n_2;\dots,\mathcal{P}p'_1-\sigma'_1n'_1;\mathcal{P}p'_2-\sigma'_2n'_2;\dots} \end{aligned} \quad (3.3.47)$$

Заметим, что, помимо изменения знаков всех импульсов и спинов, меняются местами начальное и конечное состояния, чего и следует ожидать при обращении времени.

$S$ -матрица удовлетворяет этому правилу преобразования, если оператор  $T_0$ , соответствующий обращению времени для собственных состояний гамильтониана свободных частиц:

$$T_0\Phi_{\alpha} \equiv \Phi_{\mathcal{T}\alpha}, \quad (3.3.48)$$

коммутирует не только с гамильтонианом свободных частиц (что выполняется автоматически), но и с членом, отвечающим за взаимодействие:

$$T_0^{-1}H_0T_0 = H_0, \quad (3.3.49)$$

$$T_0^{-1}VT_0 = V. \quad (3.3.50)$$

В этом случае, если положить  $T = T_0$  и воспользоваться (3.1.13) или

(3.1.16), можно показать, что обращение времени в самом деле действует согласно (3.3.44). Например, действуя оператором  $T$  на уравнение Липпмана–Швингера (3.1.16) и используя (3.3.48)–(3.3.50), можно получить, что

$$T\Psi_\alpha^\pm = \Phi_{\mathcal{T}\alpha} + [E_\alpha - H_0 \mp i\epsilon]^{-1} V T \Psi_\alpha^\pm$$

(знак перед слагаемым  $\pm i\epsilon$  поменялся из-за антиунитарности  $T$ ). Так как это выражение совпадает с уравнением Липпмана–Швингера для  $\Psi_{\mathcal{T}\alpha}^\pm$ , мы снова убеждаемся в справедливости (3.3.44). Аналогично, из-за антиунитарности  $T$  знак перед  $i$  в экспоненте от  $\Omega(t)$  изменяется на обратный, и, таким образом,

$$T\Omega(-\infty)\Phi_\alpha = \Omega(\infty)\Phi_{\mathcal{T}\alpha},$$

что вновь приводит к (3.3.44).

Инвариантность по отношению к обращению времени (3.3.46) не похожа на сохранение четности в том смысле, что из условия ее выполнения не следует равенство вероятностей процессов  $\alpha \rightarrow \beta$  и  $\mathcal{T}\alpha \rightarrow \mathcal{T}\beta$ . Однако в том случае, когда  $S$ -матрицу можно представить в виде

$$S_{\beta\alpha} = S_{\beta\alpha}^{(0)} + S_{\beta\alpha}^{(1)}, \quad (3.3.51)$$

некоторый аналог равенства этих вероятностей все же имеет место. Здесь предполагается, что хотя матричный элемент  $S^{(1)}$  в общем случае мал по сравнению с  $S^{(0)}$ , для некоторых процессов  $S^{(0)}$  может обращаться в нуль. Например, такими процессами являются бета-распады ядер  $N \rightarrow N' + e^- + \bar{\nu}$ : в  $S^{(0)}$  дают вклад сильные и электромагнитные взаимодействия, а  $S^{(1)}$  целиком определяется слабыми взаимодействиями. В § 3.5 будет показано, как с помощью борновского приближения  $S$ -матрицу таких процессов можно привести к виду (3.3.51). С точностью до членов первого порядка по  $S^{(1)}$  условие унитарности  $S$ -оператора дает

$$1 = S^\dagger S = S^{(0)\dagger} S^{(0)} + S^{(0)\dagger} S^{(1)} + S^{(1)\dagger} S^{(0)}.$$

Используя соотношение  $S^{(0)\dagger} S^{(0)} = 1$ , можно получить условие на  $S^{(1)}$ :

$$S^{(1)} = -S^{(0)} S^{(1)\dagger} S^{(0)}. \quad (3.3.52)$$

Если  $S^{(1)}$  и  $S^{(0)}$  обладают симметрией относительно обращения времени (3.3.46), то это условие можно переписать в виде

$$S_{\beta\alpha}^{(1)} = - \int d\gamma \int d\gamma' S_{\beta\gamma'}^{(0)} S_{\mathcal{T}\gamma'\mathcal{T}\gamma}^{(1)*} S_{\gamma\alpha}^{(0)}. \quad (3.3.53)$$

Если просуммировать по полным<sup>3)</sup> относительно  $S^{(0)}$  наборам  $\mathcal{F}_1$

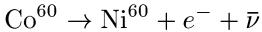
<sup>3)</sup> Под полнотой мы подразумеваем следующее: если матричный элемент  $S_{\alpha'\alpha}^{(0)}$  не равен нулю, и либо  $\alpha$ , либо  $\alpha'$  принадлежат набору  $\mathcal{F}_1$ , то ему принадлежат оба этих состояния; то же самое верно для  $\mathcal{F}_2$ .

и  $\mathcal{F}_2$  начальных и конечных состояний, вероятности процессов  $\alpha \rightarrow \beta$  и  $\mathcal{T}\alpha \rightarrow \mathcal{T}\beta$  при условии унитарности  $S^{(0)}$  будут одинаковыми.

В самом простом случае — когда начальное и конечное состояния являются собственными векторами  $S^{(0)}$ , соответствующими собственным значениям  $e^{2i\delta_\alpha}$  и  $e^{2i\delta_\beta}$ , — каждый из наборов  $\mathcal{F}_1$  и  $\mathcal{F}_2$  содержит только одно состояние. Величины  $\delta_\alpha$  и  $\delta_\beta$  называются “фазовыми сдвигами”; они действительны, поскольку  $S^{(0)}$  унитарна. Тогда уравнение (3.3.53) приобретает вид

$$S_{\beta\alpha}^{(1)} = -e^{2i(\delta_\alpha + \delta_\beta)} S_{\mathcal{T}\beta\mathcal{T}\alpha}^{(1)*}, \quad (3.3.54)$$

и ясно, что матрицы  $|S|$  процессов  $\alpha \rightarrow \beta$  и  $\mathcal{T}\alpha \rightarrow \mathcal{T}\beta$  совпадают. В частности, именно так обстоит дело для бета-распада ядер (если пренебречь относительно слабым кулоновским взаимодействием ядра и электрона в конечном состоянии), поскольку начальное и конечное состояния являются собственными для той части  $S$ -матрицы, которая отвечает за сильные взаимодействия (и  $\delta_\alpha = \delta_\beta = 0$ ). Таким образом, вероятность бета-распада не изменится, если изменить направления импульсов всех частиц и их  $z$ -компонент спина на обратные (и если симметрия по отношению к обращению времени действительно имеет место). Это не противоречит результатам экспериментов 1956 г. [13, 14], в которых было обнаружено нарушение сохранения четности. Например, существование инвариантности по отношению к обращению времени вполне согласуется с тем наблюдением, что в распаде



электроны с наибольшей вероятностью вылетают в противоположном спину ядра  $\text{Co}^{60}$  направлении. Как будет показано ниже, косвенное доказательство того, что симметрия по отношению к обращению времени все таки нарушается, было получено в 1964 г., но она по-прежнему остается хорошей приближенной симметрией в слабых, сильных и электромагнитных взаимодействиях.

В некоторых случаях можно использовать базис состояний, для которого  $\mathcal{T}\alpha = \alpha$  и  $\mathcal{T}\beta = \beta$ . Тогда уравнение (3.3.54) приобретает вид

$$S_{\beta\alpha}^{(1)} = -e^{2i(\delta_\alpha + \delta_\beta)} S_{\beta\alpha}^{(1)*}, \quad (3.3.55)$$

т.е., как мы видим,  $iS_{\beta,\alpha}^{(1)}$  обладает фазой  $\delta_\alpha + \delta_\beta \bmod \pi$ . Это утверждение известно как *теорема Уотсона* [15]. Фазы в (3.3.54) и (3.3.55) могут быть измерены в процессах, для которых существует интерференция между различными конечными состояниями. Например, в распаде  $\Lambda$ -гиперона со спином  $1/2$  на нуклон и пион конечное состояние может иметь орбитальный угловой момент  $l = 0$  и  $l = 1$ . Интерференция между этими двумя состояниями влияет на угловое распределение импульсов вылетающих пионов относительно спина  $\Lambda$ -гиперона,

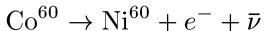
которое, согласно теореме Уотсона, зависит от разницы  $\delta_s - \delta_p$  фазовых сдвигов этих состояний.

### $\text{PT}$ -симметрия

Хотя из экспериментов 1957 г. по нарушению четности и не следовало, что симметрия по отношению к обращению времени нарушается, сразу было показано, что не сохраняется произведение  $\text{PT}$ . Если такая симметрия существует, оператор  $\text{PT}$  антиунитарен (по тем же причинам, что и  $T$ ). Следовательно, в процессах, подобных бета-распаду ядер, должны существовать соотношения, аналогичные (3.3.54):

$$S_{\beta\alpha}^{(1)} = -e^{2i(\delta_\alpha + \delta_\beta)} S_{\mathcal{PT}\beta\mathcal{PT}\alpha}^{(1)*},$$

здесь оператор  $\mathcal{PT}$  меняет знаки всех  $z$ -компонент спина, не влияя на знаки импульсов. Если пренебречь кулоновским взаимодействием между частицами в конечном состоянии, то, как легко видеть, в процессе



направление вылета электрона, параллельное или антипараллельное спину ядра  $\text{Co}^{60}$ , не является предпочтительным, что противоречит эксперименту.

### $C$ -, $\text{CP}$ - и $\text{CPT}$ -симметрии

Как мы уже говорили, существует симметрия относительно преобразования зарядового сопряжения, меняющего местами частицы и античастицы. С формальной точки зрения это означает существование некоторого унитарного оператора  $C$ , действующего на многочастичные состояния согласно

$$C\Psi_{p_1\sigma_1n_1;p_2\sigma_2n_2;\dots}^\pm = \xi_{n_1}\xi_{n_2}\dots\Psi_{p_1\sigma_1n_1^c;p_2\sigma_2n_2^c;\dots}^\pm, \quad (3.3.56)$$

где  $n^c$  — античастицы, соответствующие частицам типа  $n$ , а  $\xi_n$  — новый фазовый множитель. Если это так для начального и конечного состояний,  $S$ -матрица удовлетворяет условию инвариантности:

$$\begin{aligned} S_{p'_1\sigma'_1n'_1;p'_2\sigma'_2n'_2;\dots,p_1\sigma_1n_1;p_2\sigma_2n_2;\dots} &= \\ &= \xi_{n'_1}^*\xi_{n'_2}^*\dots\xi_{n_1}\xi_{n_2}\dots S_{p'_1\sigma'_1n'^c_1;p'_2\sigma'_2n'^c_2;\dots,p_1\sigma_1n^c_1;p_2\sigma_2n^c_2;\dots} \end{aligned} \quad (3.3.57)$$

Это условие справедливо, если существует оператор  $C_0$ , действующий на собственные состояния гамильтонiana свободных частиц согласно (3.3.56) и коммутирующий с  $H_0$  и  $V$ . В этом случае  $C = C_0$ .

Фазы  $\xi_n$  называют зарядовыми четностями. Подобно обычным четностям  $\eta_n$ , они не могут быть однозначно определены, поскольку

для любого заданного согласно (3.3.56) оператора  $C$  можно построить оператор с такими же свойствами и другими  $\xi_n$ , умножая  $C$  на

$$\exp(i\alpha B + i\beta B + i\gamma Q),$$

где  $\alpha$ ,  $\beta$  и  $\gamma$  произвольны. Единственным классом частиц, для которых в определении зарядовых четностей нет произвола, являются истинно нейтральные частицы, подобные фотону или нейтрально-му пиону — они не несут сохраняющихся квантовых чисел и являются собственными античастицами. Если мы имеем дело с процессами, в которых участвуют только такие частицы, из уравнения (3.3.57) следует, что произведения зарядовых четностей начального и конечного состояний равны друг другу. Например, как мы увидим далее, зарядовая четность фотона должна быть равна  $\eta_\gamma = -1$ . Поэтому из существования распада  $\pi^0 \rightarrow 2\gamma$  следует, что  $\eta_{\pi^0} = +1$ , а процесс  $\pi^0 \rightarrow 3\gamma$  невозможен, что и имеет место на самом деле. Зарядовые четности нейтрального пиона и фотона действительны:  $+1$  и  $-1$ . Внутренние зарядовые четности любых частиц будут равными единице по модулю, как и в случае обычной четности, если любые внутренние симметрии являются элементами непрерывных групп фазовых преобразований: тогда  $C$  можно переопределить, умножив его на обратный квадратный корень оператора симметрии  $C^2$  из той же группы, и новый оператор  $C$  будет удовлетворять условию  $C^2 = 1$ .

В общем случае из уравнения (3.3.57) следует, что вероятность процесса не изменится, если все участвующие в нем частицы заменить на античастицы. Из результатов экспериментов 1957 г. по несохранению четности не следовало непосредственно, что это неверно (до того момента, как стали изучать бета-распад антисебакальта, должно было пройти еще довольно долгое время), однако, как было показано, в теории слабого взаимодействия, модифицированной Ли и Янгом [12] для того, чтобы учесть несохранение четности,  $C$  не сохраняется. Сегодня известно, что ни  $C$ , ни  $P$  не сохраняются в процессах типа бета-распада или распада мюона и пиона, за которые ответственно слабое взаимодействие. Однако оба квантовых числа сохраняются в сильных и электромагнитных взаимодействиях.

Хотя ранние эксперименты по несохранению четности и показали, что  $C$  и  $P$  не сохраняются в слабых взаимодействиях, оставалась возможность того, что сохраняется их произведение  $CP$ , и довольно долгое время в это верили (хотя и не до конца). Сохранение  $CP$  позволяло сделать довольно важные выводы о свойствах нейтральных  $K$ -мезонов. В 1954 г. Гелл-Манн и Пайс [16] показали, что так как  $K^0$ -мезон не совпадает с собственной античастицей (он несет ненулевую странность), частицами, вероятности распада которых являются наблюдаемыми, будут не  $K^0$  и  $\bar{K}^0$ , а их линейные комбинации  $K^0 \pm \bar{K}^0$ . Первоначально это было выведено из условия сохранения

зарядовой четности  $C$ , но на самом деле достаточно потребовать сохранения  $CP$ . Если определить фазы  $CP$ -оператора и  $K^0$ ,  $\bar{K}^0$ -состояний так, что

$$CP\Psi_{K^0} = \Psi_{\bar{K}^0}$$

и

$$CP\Psi_{\bar{K}^0} = \Psi_{K^0},$$

то самосопряженные относительно зарядовой четности одночастичные состояния будут выглядеть следующим образом:

$$\Psi_{K_1^0} \equiv \frac{1}{\sqrt{2}} [\Psi_{K^0} + \Psi_{\bar{K}^0}]$$

с собственным значением  $CP$ , равным +1, и

$$\Psi_{K_2^0} \equiv \frac{1}{\sqrt{2}} [\Psi_{K^0} - \Psi_{\bar{K}^0}]$$

с собственным значением  $CP$ , равным -1. Среди всех возможных распадов этих состояний наиболее быстрым является распад на два пиона. Однако из сохранения  $CP$  следует, что он возможен только<sup>4)</sup> для  $K_1$ . Поэтому следует ожидать, что поскольку  $K_2^0$  распадается по медленным каналам, например на три пиона или пион, электрон (или мюон) и нейтрино, то он имеет большее время жизни. Однако в 1964 г. Фитч и Кронин [17] показали, что все же существует небольшая вероятность распада долгоживущего  $K$ -мезона на два пиона. Из этого следует, что в слабых взаимодействиях  $CP$  не сохраняется, хотя его закон сохранения и нарушается в меньшей степени, чем закон сохранения  $C$  или  $P$ .

Как мы увидим в гл. 5, существуют веские причины считать, что хотя ни  $C$ , ни  $CP$  строго не сохраняются, произведение  $CPT$  будет сохраняться в любых процессах (по крайней мере, в квантовой теории поля). Именно благодаря  $CPT$ -симметрии существует однозначное соответствие между частицами и античастицами. В частности, тот факт, что  $CPT$  коммутирует с гамильтонианом, указывает на равенство масс стабильных частиц и их античастиц. Поскольку оператор  $CPT$  является антиунитарным, он устанавливает связь между  $S$ -матрицей некоторого процесса и  $S$ -матрицей “обратного” процесса, в котором мы меняем знаки  $z$ -компонент спинов на обратные, а частицы заменяются на античастицы.

Пусть теперь  $S$ -матрица имеет вид суммы малого слагаемого  $S^{(1)}$ , отвечающего за взаимодействие, и большого слагаемого  $S^{(0)}$ , диагонального в выбранном базисе начальных и конечных состояний.

<sup>4)</sup> Нейтральные  $K$ -мезоны имеют нулевой спин, так что конечное состояние, содержащее два пиона, должно иметь  $l = 0$  и, следовательно,  $P = +1$ . Далее, для состояния, содержащего два  $\pi^0$  должно быть  $C = +1$ , так как зарядовая четность  $\pi^0$  равна +1. То же самое верно для состояния  $\pi^+ - \pi^-$  с  $l = 0$ , так как  $C$  меняет два пиона местами.

Тогда, если просуммировать по полным относительно  $S^{(0)}$  наборам начальных и конечных состояний, вероятности процессов, отличающихся друг от друга заменой частиц античастицами и обращением знаков  $z$ -компонент спинов, равны. В самом деле, можно прибегнуть к тем же аргументам, которые использовались в аналогичной ситуации при изучении следствий сохранения  $\Theta$ .

Например, хотя плотность вероятности распада некоторой частицы на пару  $\beta_1, \beta_2$  с  $S_{\beta_1 \beta_2}^{(0)} \neq 0$  может отличаться от плотности вероятности распада соответствующей античастицы на  $\mathcal{CPT}\beta_1$  и  $\mathcal{CPT}\beta_2$ , в § 3.5 мы увидим, что полная вероятность распада частицы в точно-сти равна полной вероятности распада античастицы.

Теперь можно понять, почему эксперименты 1957 г. по нарушению четности в контексте существующей теории электрослабого взаимодействия можно интерпретировать как доказательство того, что сохранение С и Р сильно нарушено, а сохранение CP — нет. Поскольку мы имеем дело с квантовой теорией поля, то автоматически выполнено условие сохранения CPT. Из экспериментов следует, что для бета-распада сильно нарушена PT-, но не T-симметрия. Поэтому в рамках любой совместимой с этими экспериментами теории, для которой сохраняется CPT, будет так же нарушена C-, но не CP-симметрия.

Аналогично, из наблюдений слабого нарушения CP в экспериментах 1964 г. и предполагаемой инвариантности всех взаимодействий по отношению к CPT незамедлительно следует, что в слабых взаимодействиях также не сохраняется T. Это утверждение пытались проверить путем более детального изучения свойств  $K^0 - \bar{K}^0$ -системы, но до сих пор не удалось получить другое прямое свидетельство нарушения T-инвариантности.

### § 3.4. Вероятности и сечения рассеяния

$S$ -матрица  $S_{\beta\alpha}$  имеет смысл амплитуды вероятности перехода  $\alpha \rightarrow \beta$ , но как с помощью этой величины получить вероятности переходов и сечения, измеряемые в эксперименте? В частности, из (3.3.2) видно, что  $S_{\beta\alpha}$  содержит множитель  $\delta^4(p_\beta - p_\alpha)$ , обеспечивающий сохранение полной энергии и импульса. Как быть с множителем  $[\delta^4(p_\beta - p_\alpha)]^2$  в вероятности перехода  $|S_{\beta\alpha}|^2$ ? Чтобы дать ответ на подобного рода вопросы, нужно понять, каким образом выполняются эксперименты. Вообще говоря, нужно использовать волновые пакеты, описывающие частицы, находившиеся до столкновения на большом расстоянии друг от друга, и затем следить за их эволюцией во времени. Вместо этого мы далее представим быстрый, простой, но менее строгий вывод основных результатов. В качестве оправдания можно сказать, что (насколько известно автору) в физике нет интересных за-

дач, для решения которых было бы необходимо использовать технику волновых пакетов.

Представим себе, что система физических частиц, с которой мы имеем дело, помещена в коробку макроскопического объема  $V$ . Например, можно взять куб и отождествить точки на противоположных гранях, так что из требования однозначности волновой функции будет следовать условие квантования импульсов:

$$\mathbf{p} = \frac{2\pi}{L} (n_1, n_2, n_3), \quad (3.4.1)$$

где  $n_i$  — целые числа, а  $L^3 = V$ . В этом случае все трехмерные дельта-функции сводятся к

$$\delta_V^3(\mathbf{p}' - \mathbf{p}) \equiv \frac{1}{(2\pi)^3} \int_V d^3x e^{i(\mathbf{p}-\mathbf{p}')x} = \frac{V}{(2\pi)^3} \delta_{\mathbf{p}', \mathbf{p}}, \quad (3.4.2)$$

где  $\delta_{\mathbf{p}', \mathbf{p}}$  — обычный символ Кронекера, равный единице, если  $\mathbf{p}' = \mathbf{p}$ , и нулю — в противном случае. Из условия нормировки (3.1.2) следует, что скалярные произведения таких состояний содержат не только суммы произведений символов Кронекера, но и множитель  $[V/(2\pi)^3]^N$ , где  $N$  — число частиц, содержащихся в данном состоянии.

Для вычисления вероятностей переходов нужно использовать состояния с единичной нормой, поэтому рассмотрим состояния, живущие в нашей коробке:

$$\Psi_\alpha^{\text{коробка}} \equiv [(2\pi)^3/V]^{N_\alpha/2} \Psi_\alpha, \quad (3.4.3)$$

которые нормированы так, что

$$(\Psi_\beta^{\text{коробка}}, \Psi_\alpha^{\text{коробка}}) = \delta_{\beta\alpha}, \quad (3.4.4)$$

где  $\delta_{\beta\alpha}$  — произведение символов Кронекера для каждой из компонент 3-импульса, спина и индекса, нумерующего типы частиц плюс члены, соответствующие перестановкам частиц.  $S$ -матрица может быть записана в виде

$$S_{\beta\alpha} = [V/(2\pi)^3]^{(N_\beta+N_\alpha)/2} S_{\beta\alpha}^{\text{коробка}}, \quad (3.4.5)$$

где  $S_{\beta\alpha}^{\text{коробка}}$  — матричный элемент между состояниями (3.4.3).

Конечно, если частицы никогда не покидают коробку, любой возможный переход будет происходить снова и снова. Чтобы вычислить вероятность перехода, имеющую физический смысл, нашу систему необходимо, кроме всего прочего, поместить в “коробку во времени”. Будем предполагать, что взаимодействие включено только в течение некоторого времени  $T$ . Отсюда сразу следует, что дельта-функция,

отвечающая за сохранение энергии, заменяется на

$$\delta_T(E_\alpha - E_\beta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-T/2}^{T/2} \exp(i(E_\alpha - E_\beta)t) dt. \quad (3.4.6)$$

Тогда вероятность того, что некоторая многочастичная система, находящаяся в состоянии  $\alpha$  до того, как взаимодействие включается, перейдет в состояние  $\beta$  после того, как взаимодействие выключат, равна

$$P(\alpha \rightarrow \beta) = |S_{\beta\alpha}^{\text{коробка}}|^2 = [(2\pi)^3/V]^{(N_\alpha + N_\beta)} |S_{\beta\alpha}|^2. \quad (3.4.7)$$

Такова вероятность перехода в определенное состояние  $\beta$ , локализованное внутри коробки. Число одиночастичных состояний в коробке объемом  $V$  и элементе импульсного пространства  $d^3 p$  равно  $V d^3 p / (2\pi)^3$ , поскольку оно совпадает с числом всех возможных троек целочисленных параметров  $n_1, n_2, n_3$ , для которых импульс лежит в элементе объема  $d^3 p$ , окружающем точку  $\mathbf{p}$ . Будем определять интервал  $d\beta$ , которому принадлежит конечное состояние, как произведение  $d^3 \mathbf{p}$  для каждого из возможных конечных состояний, так что полное число состояний в этом интервале равно

$$d\mathcal{N}_\beta = [V/(2\pi)^3]^{N_\beta} d\beta. \quad (3.4.8)$$

Таким образом, полная вероятность того, что система окажется в одном из конечных состояний, принадлежащих интервалу  $d\beta$ , равна

$$dP(\alpha \rightarrow \beta) = P(\alpha \rightarrow \beta) d\mathcal{N}_\beta = [(2\pi)^3/V]^{N_\alpha} |S_{\beta\alpha}|^2 d\beta. \quad (3.4.9)$$

В этом параграфе мы будем рассматривать конечные состояния  $\beta$ , не только отличающиеся (пусть и незначительно) от начального состояния  $\alpha$ , но и удовлетворяющие более сильному условию: никакой из поднаборов частиц, содержащийся в состоянии  $\beta$  (и отличный от всего состояния) не несет такой же 4-импульс, как соответствующий поднабор частиц в состоянии  $\alpha$  (на языке, которым мы будем пользоваться в следующей главе, это означает, что рассматривается только связная часть  $S$ -матрицы). Для таких состояний можно определить матричный элемент  $M_{\beta\alpha}$ , не содержащий дельта-функций:

$$S_{\beta\alpha} \equiv -2i\pi\delta_V^3(\mathbf{p}_\beta - \mathbf{p}_\alpha)\delta_T(E_\beta - E_\alpha)M_{\beta\alpha}. \quad (3.4.10)$$

Благодаря тому что мы поместили систему в коробку, квадраты дельта-функций в  $|S_{\beta\alpha}|^2$  для  $\beta \neq \alpha$  можно понимать как

$$\begin{aligned} [\delta_V^3(\mathbf{p}_\beta - \mathbf{p}_\alpha)]^2 &= \delta_V^3(\mathbf{p}_\beta - \mathbf{p}_\alpha)\delta_V^3(0) = \delta_V^3(\mathbf{p}_\beta - \mathbf{p}_\alpha)V/(2\pi)^3, \\ [\delta_T(E_\beta - E_\alpha)]^2 &= \delta_T(E_\beta - E_\alpha)\delta_T(0) = \delta_T(E_\beta - E_\alpha)T/(2\pi), \end{aligned}$$

так что из уравнения (3.4.9) можно получить такое выражение для дифференциальной вероятности перехода:

$$dP(\alpha \rightarrow \beta) = (2\pi)^2 [(2\pi)^3 / V]^{N_\alpha - 1} (T/2\pi) |M_{\beta\alpha}|^2 \delta_V^3(\mathbf{p}_\beta - \mathbf{p}_\alpha) \delta_T(E_\beta - E_\alpha) d\beta.$$

Если теперь считать  $V$  и  $T$  очень большими величинами, произведение дельта-функций в этом выражении совпадет с  $\delta^4(p_\beta - p_\alpha)$ . В этом пределе вероятность перехода оказывается пропорциональной времени  $T$ , в течение которого взаимодействие было включено. Коэффициент пропорциональности можно понимать как вероятность перехода в единицу времени:

$$d\Gamma(\alpha \rightarrow \beta) \equiv dP(\alpha \rightarrow \beta)/T = (2\pi)^{3N_\alpha - 2} V^{1-N_\alpha} |M_{\beta\alpha}|^2 \delta^4(p_\beta - p_\alpha) d\beta, \quad (3.4.11)$$

где теперь

$$S_{\beta\alpha} \equiv -2\pi i \delta^4(p_\beta - p_\alpha) M_{\beta\alpha}. \quad (3.4.12)$$

Эта формула является основной при использовании  $S$ -матрицы для предсказаний результатов реальных экспериментов. К объяснению смысла множителя  $\delta^4(p_\alpha - p_\beta)$  мы вернемся чуть позднее в этом параграфе.

Особенно важными являются два случая.

### **$N_\alpha = 1$ .**

Тогда в (3.4.11) объем  $V$  сокращается, и мы получаем дифференциальную вероятность перехода некоторого одночастичного состояния  $\alpha$  в произвольное многочастичное состояние  $\beta$ :

$$d\Gamma(\alpha \rightarrow \beta) = 2\pi |M_{\beta\alpha}|^2 \delta^4(p_\beta - p_\alpha) d\beta. \quad (3.4.13)$$

Конечно же, это выражение имеет смысл, только если время взаимодействия  $T$  много меньше среднего времени жизни  $\tau_\alpha$  частицы  $\alpha$ , поэтому мы не можем перейти к пределу  $T \rightarrow \infty$  в определении  $\delta_T(E_\alpha - E_\beta)$ . Эта дельта-функция имеет неустранимую ширину  $\Delta E \approx 1/T \geq 1/\tau_\alpha$ , поэтому уравнением (3.4.13) можно пользоваться только тогда, когда полная вероятность распада  $1/\tau_\alpha$  много меньше любой характерной энергии в процессе.

### **$N_\alpha = 2$ .**

В этом случае вероятность (3.4.11) пропорциональна  $1/V$ , или, другими словами, плотности числа частиц первого типа, взятой в точке, где находится частица второго типа. Обычно экспериментаторы представляют свои результаты не в виде вероятности перехода в единице объема, а как *вероятность перехода в единице потока*, получившую название *сечения*. Поток частиц произвольного типа определяется как произведение плотности  $1/V$  на относительную скорость  $u_\alpha$ :

$$\Phi_\alpha = u_\alpha / V \quad (3.4.14)$$

(общее определение для  $u_\alpha$  будет дано ниже, пока нам достаточно знать, что если одна из частиц находится в покое, то  $u_\alpha$  совпадает со скоростью другой). Тогда дифференциальное сечение имеет вид

$$d\sigma(\alpha \rightarrow \beta) \equiv d\Gamma(\alpha \rightarrow \beta)/\Phi_\alpha = (2\pi)^4 u_\alpha^{-1} |M_{\beta\alpha}|^2 \delta^4(p_\beta - p_\alpha) d\beta. \quad (3.4.15)$$

Хотя случаи  $N_\alpha = 1$  и  $N_\alpha = 2$  являются наиболее важными, любые вероятности переходов с  $N_\alpha \geq 3$  тоже в принципе измеримы, и некоторые из таких процессов играют важную роль в химии, астрофизике и т.д. Например, одна из основных реакций, в которых высвобождается энергия Солнца, — образование дейтрона и нейтрино из двух протонов и электрона. В § 3.6 мы применим основную формулу для вероятности перехода (3.4.11) к процессам с произвольным числом частиц  $N_\alpha$  в начальном состоянии.

Теперь перейдем к вопросу о трансформационных свойствах вероятностей переходов и сечений по отношению к преобразованиям Лоренца. Это поможет нам дать более общее определение относительной скорости  $u_\alpha$  в уравнении (3.4.15). Правило преобразования (3.3.1)  $S$ -матрицы усложнено тем, что в нем содержатся зависящие от импульса матрицы, связанные со спином каждой частицы. Чтобы избежать этого усложнения, возведем модуль (3.3.1) в квадрат (после выделения лоренц-инвариантной дельта-функции как в (3.4.12)) и просуммируем по всем спинам. Из унитарности матриц  $D_{\bar{\sigma}\sigma}^{(j)}(W)$  (или матриц, играющих их роль в случае нулевых масс) следует, что, несмотря на множители в (3.3.1), содержащие энергию частиц, полная сумма лоренц-инвариантна. Таким образом, величина

$$\sum_{\text{по спинам}} |M_{\beta\alpha}|^2 \prod_\beta E \prod_\alpha E \equiv R_{\beta\alpha} \quad (3.4.16)$$

является скалярной функцией 4-импульсов частиц в состояниях  $\alpha$  и  $\beta$  (под  $\prod_\alpha E$  и  $\prod_\beta E$  мы понимаем произведения всех энергий  $p^0 = \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}$  одночастичных состояний, содержащихся в  $\alpha$  и  $\beta$ ).

Теперь можно записать просуммированную по спинам одночастичных состояний вероятность перехода (3.4.13) в виде

$$\sum_{\text{по спинам}} d\Gamma(\alpha \rightarrow \beta) = 2\pi E_\alpha^{-1} R_{\beta\alpha} \delta^4(p_\beta - p_\alpha) d\beta / \prod_\beta E.$$

Множитель  $d\beta / \prod_\beta E$  является произведением лоренц-инвариантных элементов объема импульсного пространства (2.5.15), поэтому он сам лоренц-инвариантен, как и множители  $R_{\beta\alpha}$  и  $\delta^4(p_\beta - p_\alpha)$ . Остается единственный множитель  $1/E_\alpha$ , где  $E_\alpha$  — энергия одной частицы в начальном состоянии. Мы заключаем, что вероятность распада имеет такие же трансформационные свойства как  $1/E_\alpha$ . Это не что иное,

как обычное лоренцево сокращение времени — чем быстрее частица, тем медленнее она распадается.

Аналогично, выражение (3.4.15) для просуммированного по спинам сечения рассеяния может быть переписано в виде

$$\sum_{\text{по спинам}} d\sigma(\alpha \rightarrow \beta) = (2\pi)^4 u_\alpha^{-1} E_1^{-1} E_2^{-1} R_{\beta\alpha} \delta^4(p_\beta - p_\alpha) d\beta / \prod_\beta E,$$

где  $E_1$  и  $E_2$  — энергии двух частиц в начальном состоянии  $\alpha$ . Сечение рассеяния (просуммированное по спинам) принято определять как некоторую лоренц-инвариантную функцию 4-импульсов. Множители  $R_{\beta\alpha}$ ,  $\delta^4(p_\beta - p_\alpha)$  и  $d\beta / \prod_\beta E$ , как мы уже выяснили, лоренц-

инвариантны. Это значит, что относительную скорость  $u_\alpha$  в произвольной инерциальной системе отсчета необходимо определить так, чтобы произведение  $u_\alpha E_1 E_2$  являлось лоренцевым скаляром. Как мы уже заметили раньше, в системе отсчета, где одна из частиц (например, частица 1) неподвижна,  $u_\alpha$  совпадает со скоростью другой частицы. Это условие однозначно определяет вид  $u_\alpha$  в произвольной системе отсчета<sup>1)</sup>:

$$u_\alpha = \sqrt{(p_1 \cdot p_2)^2 - m_1^2 m_2^2} / E_1 E_2, \quad (3.4.17)$$

где  $p_1$ ,  $p_2$  и  $m_1$ ,  $m_2$  — 4-импульсы и массы частиц в начальном состоянии  $\alpha$ .

Как побочный результат получаем, что в системе центра масс, где полный 3-импульс обращается в нуль:

$$p_1 = (\mathbf{p}, E_1), \quad p_2 = (-\mathbf{p}, E_2),$$

из (3.4.17) следует, что

$$u_\alpha = \frac{|\mathbf{p}|(E_1 + E_2)}{E_1 E_2} = \left| \frac{\mathbf{p}_1}{E_1} - \frac{\mathbf{p}_2}{E_2} \right|, \quad (3.4.18)$$

как и должна вести себя относительная скорость. Однако в этой системе отсчета  $u_\alpha$  не совпадает ни с какой физической скоростью. В самом деле, как легко видеть из (3.4.18), для ультрарелятивистских частиц она достигает значения 2.

Поймем теперь, каков смысл множителя  $\delta^4(p_\beta - p_\alpha) d\beta$  в общей формуле для вероятности перехода (3.4.11) и выражениях (3.4.13) и (3.4.15) для вероятности распада и сечения процесса. Переайдем в

<sup>1)</sup> Из уравнения (3.4.17) очевидностью следует, что  $E_1 E_2 u_\alpha$  — скаляр. Когда частица 1 поконится, мы имеем  $\mathbf{p}_1 = 1$ ,  $E_1 = m_1$ , так что  $p_1 \cdot p_2 = -m_1 E_2$ . Тогда из уравнения (3.4.17) находим

$$u_\alpha = \sqrt{E_2^2 - m_2^2} / E_2 = |\bar{p}_2| / E_2,$$

что совпадает со скоростью частицы 2.

систему центра масс, для которой полный 3-импульс начального состояния равен нулю:

$$\mathbf{p}_\alpha = 0 \quad (3.4.19)$$

(в случае  $N_\alpha = 1$  это означает, что распадающаяся частица покоятся). Если конечное состояние содержит частицы с импульсами  $\mathbf{p}'_1, \mathbf{p}'_2, \dots$ , то

$$\delta^4(p_\beta - p_\alpha) d\beta = \delta^3(\mathbf{p}'_1 + \mathbf{p}'_2 + \dots) \delta(E'_1 + E'_2 + \dots - E) d^3 p'_1 d^3 p'_2 \dots, \quad (3.4.20)$$

где  $E \equiv E_\alpha$  — полная энергия начального состояния. Любой из интегралов по  $\mathbf{p}'_k$ , например по  $\mathbf{p}'_1$ , можно тривиально взять, опуская дельта-функцию по импульсам:

$$\delta^4(p_\beta - p_\alpha) d\beta \rightarrow \delta(E'_1 + E'_2 + \dots - E) d^3 p'_2 \dots, \quad (3.4.21)$$

и принимая, что везде, где возникает  $\mathbf{p}'_1$  (например, в  $E'_1$ ), его следует заменить на

$$\mathbf{p}'_1 = \mathbf{p}'_2 - \mathbf{p}'_3 - \dots \quad (3.4.22)$$

Дельта-функцией по энергии можно воспользоваться, чтобы взять *один* из оставшихся интегралов.

В простейшем случае имеются только две частицы в конечном состоянии. Тогда из (3.4.21) имеем

$$\delta^4(p_\beta - p_\alpha) d\beta \rightarrow \delta(E'_1 + E'_2 - E) d^3 \mathbf{p}'_2,$$

или, подробнее,

$$\delta^4(p_\beta - p_\alpha) d\beta \rightarrow \delta\left(\sqrt{|\mathbf{p}'_1|^2 + m'^2_1} + \sqrt{|\mathbf{p}'_2|^2 + m'^2_2} - E\right) |\mathbf{p}'_1|^2 d|\mathbf{p}'_1| d\Omega, \quad (3.4.23)$$

где

$$\mathbf{p}'_2 = -\mathbf{p}'_1$$

и  $d\Omega \equiv \sin\theta d\theta d\phi$  — элемент телесного угла для  $\mathbf{p}'_1$ . Это уравнение можно упростить, если воспользоваться обычным выражением

$$\delta(f(x)) = \delta(x - x_0) / |f'(x_0)|,$$

где  $f(x)$  — произвольная действительная функция, имеющая единственный простой нуль в точке  $x = x_0$ . В нашем случае аргумент  $E'_1 + E'_2 - E$  дельта-функции в (3.4.23) обращается в нуль в точке  $|p'_1| = k'$ , где

$$k' = \sqrt{(E^2 - m'^2_1 - m'^2_2)^2 - 4m'^2_1 m'^2_2} / 2E, \quad (3.4.24)$$

$$E'_1 = \sqrt{k'^2 + m'^2_1} = \frac{E^2 - m'^2_2 + m'^2_1}{2E}, \quad (3.4.25)$$

$$E'_2 = \sqrt{k'^2 + m'^2_2} = \frac{E^2 - m'^2_1 + m'^2_2}{2E}, \quad (3.4.26)$$

и производная

$$\left[ \frac{d}{d|\mathbf{p}'_1|} \left( \sqrt{|\mathbf{p}'_1|^2 + m'_1{}^2} + \sqrt{|\mathbf{p}'_1|^2 + m'_2{}^2} - E \right) \right]_{|\mathbf{p}'_1|=k'} = \frac{k'}{E'_1} + \frac{k'}{E'_2} = \frac{k'E}{E'_1 E'_2}. \quad (3.4.27)$$

Таким образом, дельта-функцию и дифференциал  $d|\mathbf{p}'_1|$  в (3.4.23) можно опустить, если поделить это уравнение на (3.4.27):

$$\delta^4(p_\beta - p_\alpha) d\beta \rightarrow \frac{k'E'_1 E'_2}{E} d\Omega, \quad (3.4.28)$$

здесь предполагается, что  $k'$ ,  $E'_1$  и  $E'_2$  определяются из уравнений (3.4.24)–(3.4.26). В частности, плотность вероятности (3.4.13) распада одиночичного состояния с нулевым импульсом и энергией  $E$  на две частицы равна

$$\frac{d\Gamma(\alpha \rightarrow \beta)}{d\Omega} = \frac{2\pi k'E'_1 E'_2}{E} |M_{\beta\alpha}|^2, \quad (3.4.29)$$

и дифференциальное сечение (3.4.15) рассеяния двух частиц  $1, 2 \rightarrow 1', 2'$  приводится к виду

$$\frac{d\sigma(\alpha \rightarrow \beta)}{d\Omega} = \frac{(2\pi)^4 k'E'_1 E'_2}{E u_\alpha} |M_{\beta\alpha}|^2 = \frac{(2\pi)^4 k'E'_1 E'_2 E_1 E_2}{E^2 k} |M_{\beta\alpha}|^2, \quad (3.4.30)$$

где  $k \equiv |\mathbf{p}_1| = |\mathbf{p}_2|$ .

Рассмотренный выше случай  $N_\beta = 2$  является особенно простым. Для  $N_\alpha = 3$  так же имеется один простой результат, который стоит выписать. В этом случае из уравнения (3.4.21) имеем

$$\begin{aligned} \delta^4(p_\beta - p_\alpha) d\beta \rightarrow \\ \rightarrow d^3\mathbf{p}'_2 d^3\mathbf{p}'_3 \delta \left( \sqrt{(\mathbf{p}'_2 + \mathbf{p}'_3)^2 + m'_1{}^2} + \sqrt{\mathbf{p}'_2{}^2 + m'_2{}^2} + \sqrt{\mathbf{p}'_3{}^2 + m'_3{}^2} - E \right). \end{aligned}$$

Здесь элемент объема в пространстве импульсов представлен в виде

$$d^3 p'_2 d^3 p'_3 = |\mathbf{p}'_2|^2 d|\mathbf{p}'_2| |\mathbf{p}'_3|^2 d|\mathbf{p}'_3| d\Omega_3 d\phi_{23} d\cos\theta_{23},$$

где  $d\Omega_3$  — элемент телесного угла для  $\mathbf{p}'_3$ , а  $\theta_{23}$  и  $\phi_{23}$  — полярный и азимутальный углы между векторами  $\mathbf{p}'_2$  и  $\mathbf{p}'_3$ . Положение плоскости, проходящей через векторы  $\mathbf{p}'_2$  и  $\mathbf{p}'_3$ , определяется  $\phi_{23}$  и направлением  $\mathbf{p}'_3$ , а оставшийся угол  $\theta_{23}$  можно найти из условия сохранения энергии:

$$\begin{aligned} \sqrt{|\mathbf{p}'_2|^2 + 2|\mathbf{p}'_2||\mathbf{p}'_3|\cos\theta_{23} + |\mathbf{p}'_3|^2 + m'_1{}^2} + \\ + \sqrt{|\mathbf{p}'_2|^2 + m'_2{}^2} + \sqrt{|\mathbf{p}'_3|^2 + m'_3{}^2} = E. \end{aligned}$$

Производная аргумента дельта-функции по  $\cos\theta_{23}$  равна

$$\frac{\partial E'_1}{\partial \cos\theta_{23}} = \frac{|\mathbf{p}'_2||\mathbf{p}'_3|}{E'_1},$$

и интеграл по  $\cos \theta_{23}$  берется просто отбрасыванием дельта-функции и делением на эту производную:

$$\delta^4(p_\beta - p_\alpha) d\beta \rightarrow |\mathbf{p}'_2| d|\mathbf{p}'_2| |\mathbf{p}'_3| d|\mathbf{p}'_3| E'_1 d\Omega_3 d\phi_{23}.$$

Переходя от импульсов к энергиям, окончательно имеем

$$\delta^4(p_\beta - p_\alpha) d\beta \rightarrow E'_1 E'_2 E'_3 dE'_2 dE'_3 d\Omega_3 d\phi_{23}. \quad (3.4.31)$$

Вспомним, что величина (3.4.16), полученная суммированием  $|M_{\beta\alpha}|^2$  по спинам и умножением на произведение энергий, является скалярной функцией 4-импульсов. Если предположить, что этот скаляр — константа, то, как следует из (3.4.31), для некоторого фиксированного начального состояния распределение вероятности процесса в плоскости  $E'_2, E'_3$  будет однородным. Любое отклонение этого распределения от однородности несет информацию о том, какова динамика процесса распада, включая вопрос о существовании центробежных барьеров и промежуточных резонансных состояний. Зависимость вероятности процесса от  $E'_2$  и  $E'_3$  называется *графиком Далица* [19], поскольку она использовалась Далицем в 1953 г. для анализа свойств распада  $K^+ \rightarrow \pi^+ + \pi^+ + \pi^-$ .

### § 3.5. Теория возмущений

С точки зрения истории наиболее полезной техникой для вычисления элементов  $S$ -матрицы оказалась теория возмущений, разложение по степеням взаимодействия  $V$  в гамильтониане  $H = H_0 + V$ . Из (3.2.7) и (3.1.18) можно получить выражение для  $S$ -матрицы вида

$$S_{\beta\alpha} = \delta(\beta - \alpha) - 2i\pi\delta(E_\beta - E_\alpha)T_{\beta\alpha}^+, \quad T_{\beta\alpha}^+ = (\Phi_\beta, V\Psi_\alpha^+),$$

где  $\Psi_\alpha^+$  удовлетворяет уравнению Липпмана–Швингера (3.1.17):

$$\Psi_\alpha^+ = \Phi_\alpha + \int d\gamma \frac{T_{\gamma\alpha}^+ \Phi_\gamma}{E_\alpha - E_\gamma + i\epsilon}.$$

Подействовав на это уравнение оператором  $V$  и взяв скалярное произведение результата этой операции с  $\Phi_\beta$ , мы получим следующее интегральное уравнение на  $T^+$ :

$$T_{\beta\alpha}^+ = V_{\beta\alpha} + \int d\gamma \frac{V_{\beta\gamma} T_{\gamma\alpha}^+}{E_\alpha - E_\gamma + i\epsilon}, \quad (3.5.1)$$

где

$$V_{\beta\alpha} \equiv (\Phi_\beta, V\Phi_\alpha). \quad (3.5.2)$$

Если решать (3.5.1) методом последовательных приближений, получается ряд теории возмущений для  $T_{\beta\alpha}^+$

$$\begin{aligned} T_{\beta\alpha}^+ = V_{\beta\alpha} + \int d\gamma \frac{V_{\beta\gamma} V_{\gamma\alpha}}{E_\alpha - E_\gamma + i\epsilon} + \\ + \int d\gamma d\gamma' \frac{V_{\beta\gamma} V_{\gamma\gamma'} V_{\gamma'\alpha}}{(E_\alpha - E_\gamma + i\epsilon)(E_\alpha - E_{\gamma'} + i\epsilon)} + \dots \end{aligned} \quad (3.5.3)$$

Метод вычисления матричных элементов, основанный на уравнении (3.5.3), доминировал в 30-е годы, теперь его называют *старомодной теорией возмущений*. Очевидным недостатком такого подхода является то, что благодаря содержащим энергию знаменателям оказывается скрытой явная лоренц-инвариантность  $S$ -матрицы. Тем не менее его все еще используют, например, чтобы прояснить, каким образом из-за промежуточных состояний в  $S$ -матрице возникают сингулярности. В большей части этой книги мы будем пользоваться модифицированной версией уравнения (3.5.3), получившей название *инвариантной теории возмущений*. Этот метод имеет то достоинство, что в его рамках лоренц-инвариантность  $S$ -матрицы оказывается значительно более прозрачной. Однако менее ясным становится вопрос о вкладе промежуточных состояний.

Чтобы простейшим способом вывести инвариантную теорию возмущений, нужно воспользоваться уравнением (3.2.5), из которого следует, что  $S$ -оператор равен

$$S = U(\infty, -\infty),$$

где

$$U(\tau, \tau_0) \equiv \exp(iH_0\tau) \exp(-iH(\tau - \tau_0)) \exp(-iH_0\tau_0).$$

Дифференцируя это выражение для  $U(\tau, \tau_0)$  по  $\tau$ , получаем дифференциальное уравнение

$$i \frac{d}{d\tau} U(\tau, \tau_0) = V(\tau)U(\tau, \tau_0), \quad (3.5.4)$$

где

$$V(t) \equiv \exp(iH_0t)V \exp(-iH_0t). \quad (3.5.5)$$

Говорят, что таким образом зависящие от времени операторы определены в *представлении взаимодействия*, в отличие от гейзенберговского представления квантовой механики, где

$$O_H(t) = \exp(iHt)O_H \exp(-iHt).$$

Уравнению (3.5.4) и начальному условию  $U(\tau_0, \tau_0) = 1$  очевидным образом удовлетворяет решение интегрального уравнения

$$U(\tau, \tau_0) = 1 - i \int_{\tau_0}^{\tau} dt V(t)U(t, \tau_0). \quad (3.5.6)$$

Если искать это решение методом последовательных приближений, можно получить разложение  $U(\tau, \tau_0)$  по степеням  $V$ :

$$\begin{aligned} U(\tau, \tau_0) = 1 - i \int_{\tau_0}^{\tau} dt_1 V(t_1) + (-i)^2 \int_{\tau_0}^{\tau} dt_1 \int_{\tau_0}^{\tau} dt_2 V(t_1)V(t_2) + \\ + (-i)^3 \int_{\tau_0}^{\tau} dt_1 \int_{\tau_0}^{t_1} dt_2 \int_{\tau_0}^{t_2} dt_3 V(t_1)V(t_2)V(t_3) + \dots \quad (3.5.7) \end{aligned}$$

Полагая теперь  $\tau = \infty$  и  $\tau_0 = -\infty$ , найдем ряд теории возмущений для  $S$ -оператора:

$$\begin{aligned} S = 1 - i \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 V(t_1) + (-i)^2 \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 \int_{-\infty}^{t_1} dt_2 V(t_1)V(t_2) + \\ + (-i)^3 \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 \int_{-\infty}^{t_1} dt_2 \int_{-\infty}^{t_2} dt_3 V(t_1)V(t_2)V(t_3) + \dots \quad (3.5.8) \end{aligned}$$

Аналогичный результат можно получить непосредственно из разложения (3.5.3) старомодной теории возмущений, если воспользоваться фурье-представлением содержащих энергию знаменателей в (3.5.3):

$$(E_\alpha - E_\gamma + i\epsilon)^{-1} = -i \int_0^\infty d\tau \exp(i(E_\alpha - E_\gamma)\tau). \quad (3.5.9)$$

Здесь мы подразумеваем, что для вычисления интеграла нужно вставить множитель  $e^{-\epsilon\tau}$ , обеспечивающий сходимость, и в ответе перейти к пределу  $\epsilon \rightarrow 0+$ .

Существует способ переписать (3.5.8) в форме, очень полезной при вычислениях, сохраняющих явную лоренц-инвариантность. Определим *хронологически упорядоченное произведение* зависящих от времени операторов как произведение, в котором операторы, соответствующие более поздним моментам времени, располагаются левее операторов, соответствующих ранним моментам времени. Например:

$$\begin{aligned} T\{V(t)\} &= V(t), \\ T\{V(t_1)V(t_2)\} &= \theta(t_1 - t_2)V(t_1)V(t_2) + \theta(t_2 - t_1)V(t_2)V(t_1) \end{aligned}$$

и т.д., где  $\theta(\tau)$  — функция Хевисайда, равная единице при  $\tau > 0$  и нулю при  $\tau < 0$ . Хронологически упорядоченное произведение  $n$  множителей  $V$  равно сумме по всем  $n!$  перестановкам  $V$ , каждой из которых соответствует один и тот же интеграл по  $t_1, t_2, \dots, t_n$ , так что

уравнение (3.5.8) приобретает вид

$$S = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n!} \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 dt_2 \dots dt_n T\{V(t_1) \dots V(t_n)\}. \quad (3.5.10)$$

Этот ряд иногда называют *рядом Дайсона* [20]. Его можно просуммировать, если  $V(t)$ , взятые в разные моменты времени, коммутируют; сумма ряда имеет вид

$$S = \exp \left( -i \int_{-\infty}^{\infty} dt V(t) \right).$$

Конечно, случай коммутативности не является типичным. Вообще говоря, (3.5.10) даже не сходится и в лучшем случае является асимптотическим разложением по степеням констант взаимодействия, которые содержит  $V$ . Однако иногда уравнение (3.5.10) переписывают в виде

$$S = T \exp \left( -i \int_{-\infty}^{\infty} dt V(t) \right),$$

где  $T$  означает хронологическое упорядочение для каждого члена степенного разложения экспоненты.

Теперь мы можем указать большой класс теорий поля, для которых  $S$ -матрица явно лоренц-инвариантна. Поскольку ее элементы — матричные элементы оператора  $S$ , взятые между собственными состояниями свободного гамильтониана  $\Phi_{\alpha}$ ,  $\Phi_{\beta}$  и т.д., мы хотим потребовать, чтобы  $S$ -оператор коммутировал с оператором  $U_0(\Lambda, a)$ , осуществляющим преобразования Лоренца для этих состояний. Эквивалентное требование состоит в том, чтобы  $S$ -оператор коммутировал с генераторами  $U_0(\Lambda, a)$ :  $H_0$ ,  $\mathbf{P}_0$ ,  $\mathbf{J}_0$  и  $\mathbf{K}_0$ . Чтобы обеспечить выполнение этого условия, предположим, что  $V(t)$  является некоторым интегралом по пространству:

$$V(t) = \int d^3x \mathcal{H}(\mathbf{x}, t), \quad (3.5.11)$$

где  $\mathcal{H}(x)$  — некоторый скаляр, т.е.

$$U_0(\Lambda, a) \mathcal{H}(x) U_0^{-1}(\Lambda, a) = \mathcal{H}(\Lambda x + a). \quad (3.5.12)$$

Сравнивая коэффициенты при  $a^0$  в случае бесконечно малых преобразований, можно проверить, что  $\mathcal{H}(x)$  зависит от времени совместимым с (3.5.5) образом. Тогда  $S$  может быть переписана как сумма интегралов по пространству–времени:

$$S = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n!} \int d^4x_1 \dots d^4x_n T\{\mathcal{H}(x_1) \dots \mathcal{H}(x_n)\}. \quad (3.5.13)$$

Инвариантность относительно преобразований Лоренца теперь очевидна, если не считать вопроса об инвариантности хронологического упорядочения произведения операторов.

Последовательность двух моментов времени, относящихся к точкам  $x_1, x_2$  лоренц-инвариантна, если интервал  $x_1 - x_2$  не является пространственноподобным, т.е. если  $(x_1 - x_2)^2 < 0$ . Поэтому хронологическое упорядочение в (3.5.13) не выделяет никакой системы отсчета, если все  $\mathcal{H}(x)$ , отделенные друг от друга пространственноподобным или нулевым<sup>1)</sup> интервалом, коммутируют друг с другом (хотя это условие и не является необходимым):

$$[\mathcal{H}(x), \mathcal{H}(x')] = 0 \quad \text{для} \quad (x - x')^2 \geqslant 0. \quad (3.5.14)$$

Чтобы дать формальное, не основывающееся на теории возмущений, доказательство того, что удовлетворяющее (3.5.12) и (3.5.14) взаимодействие вида (3.5.11) в самом деле приводит к  $S$ -матрице с правильными трансформационными свойствами относительно преобразований Лоренца, можно воспользоваться результатами параграфа 3.3. Из (3.5.12) имеем для бесконечно малого буста

$$i[\mathbf{K}_0, \mathcal{H}(\mathbf{x}, t)] = t \nabla \mathcal{H}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{x} \frac{\partial}{\partial t} \mathcal{H}(\mathbf{x}, t). \quad (3.5.15)$$

Интегрируя по  $\mathbf{x}$  и полагая  $t = 0$ , получаем

$$[\mathbf{K}_0, V] = \left[ \mathbf{K}_0, \int d^3x \mathcal{H}(\mathbf{x}, 0) \right] = [H_0, \mathbf{W}], \quad (3.5.16)$$

где

$$\mathbf{W} \equiv - \int d^3x \mathbf{x} \mathcal{H}(\mathbf{x}, 0). \quad (3.5.17)$$

Если (как в типичном случае) матричные элементы  $\mathcal{H}(\mathbf{x}, 0)$  между собственными состояниями  $H_0$  являются гладкими функциями собственных значений энергии, то же самое утверждение относительно гладкости верно и для  $V$ , что требуется для справедливости теории рассеяния, и для  $\mathbf{W}$ , что необходимо для доказательства лоренц-инвариантности. Другое условие, выполнение которого необходимо для лоренц-инвариантности, коммутационное соотношение (3.3.21), так же справедливо тогда и только тогда, когда

$$0 = [\mathbf{W}, V] = \int d^3x \int d^3y \mathbf{x} [\mathcal{H}(\mathbf{x}, 0), \mathcal{H}(\mathbf{y}, 0)]. \quad (3.5.18)$$

Хотя это выражение и следует из условия “причинной связности” (3.5.14), оно является более слабым достаточным условием лоренц-инвариантности  $S$ -матрицы.

<sup>1)</sup> Мы пишем условие на  $x$  и  $x'$  в виде  $(x - x')^2 \geqslant 0$ , а не  $(x - x')^2 > 0$ , поскольку, как мы увидим в гл. 6, при  $x = x'$  лоренц-инвариантность может быть нарушена сингулярностями.

Хотя теории этого класса не являются единственными, для которых имеет место инвариантность относительно преобразований Лоренца, лоренц-инвариантная теория самого общего вида не слишком сильно от них отличается. В частности, всегда существует подобное (3.5.14) коммутационное соотношение, выполнение которого необходимо. Для нерелятивистских систем аналога этого условия не существует, поскольку в нерелятивистском пределе хронологическое упорядочение всегда инвариантно относительно преобразований Галилея. *Именно из-за этого условия обединение лоренц-инвариантности и квантовой механики так сильно ограничивает свободу выбора теории.*

\* \* \*

Методы, которые мы развивали в этом параграфе, оказываются полезными в том случае, когда оператор взаимодействия  $V$  достаточно мал. Существует модифицированная версия теории возмущений, известная как *борновское приближение искааженной волны*, которая полезна, когда  $V$  содержит два члена:

$$V = V_s + V_w, \quad (3.5.19)$$

где взаимодействие  $V_w$  — слабое, а  $V_s$  — сильное. Определим  $\Psi_{s\alpha}^\pm$  как начальное и конечное состояния в том случае, когда  $V_w = 0$ :

$$\Psi_{s\alpha}^\pm = \Phi_\alpha + (E_\alpha - H_0 \pm i\epsilon)^{-1} V_s \Psi_{s\alpha}^\pm. \quad (3.5.20)$$

Тогда (3.1.16) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} T_{\beta\alpha}^+ &= (\Phi_\beta, V \Psi_\alpha^+) = \\ &= ([\Psi_{s\beta}^- - (E_\beta - H_0 - i\epsilon)^{-1} V_s \Psi_{s\beta}^-], (V_s + V_w) \Psi_\alpha^+) = \\ &= (\Psi_{s\beta}^-, V_w \Psi_\alpha^+) + (\Psi_{s\beta}^-, [V_s - V_s (E_\beta - H_0 + i\epsilon)^{-1} (V_s + V_w)] \Psi_\alpha^+) \end{aligned}$$

и

$$T_{\beta\alpha}^+ = (\Psi_{s\beta}^-, V_w \Psi_\alpha^+) + (\Psi_{s\beta}^-, V_s \Phi_\alpha). \quad (3.5.21)$$

Если бы во взаимодействии оставалась только сильная часть, первый член справа в этом выражении обратился бы в нуль:

$$T_{s\beta\alpha}^+ \equiv (\Phi_\beta, V_s \Psi_{s\alpha}^+) = (\Psi_{s\beta}^-, V_s \Phi_\alpha) \quad (3.5.22)$$

(для доказательства достаточно везде в выводе (3.5.21) опустить члены, пропорциональные  $V_w$ ). Выражение (3.5.21) оказывается наиболее полезным, когда второй член справа в нем равен нулю, т.е. когда за некоторую реакцию  $\alpha \rightarrow \beta$  отвечает именно слабая часть взаимодействия. Например, в ядерном бета-распаде за превращение нейтронов в протоны отвечают слабые ядерные силы, хотя и нельзя пренебречь сильным ядерным взаимодействием, оказывающим воздействие на начальные и конечные состояния ядер. Для таких процессов матричный

элемент (3.5.22) обращается в нуль, и уравнение (3.5.21) приобретает вид

$$T_{\beta\alpha}^+ = (\Psi_{s\beta}^-, V_w \Psi_\alpha^+). \quad (3.5.23)$$

До сих пор все выводы носили точный характер. Однако такой способ переписать  $T$ -матрицу заслуживает внимания, когда  $V_w$  настолько слабо, что можно пренебречь его влиянием на состояние  $\Psi_\alpha^+$  в (3.5.23) и заменить  $\Psi_\alpha^+$  на  $\Psi_{s\alpha}^+$ , для которого учтен вклад только  $V_s$ . В этом приближении (3.5.23) приобретает вид

$$T_{\beta\alpha}^+ \approx (\Psi_{s\beta}^-, V_w \Psi_{s\alpha}^+). \quad (3.5.24)$$

Этот ответ является справедливым в первом порядке по  $V_w$  и во всех порядках по  $V_s$ . Такое приближение в физике используется повсеместно; например, при помощи (3.5.24) вычисляются элементы  $S$ -матрицы для бета- или гамма-распада, когда в  $V_s$  дает вклад сильное ядерное взаимодействие, в  $V_w$  — соответственно слабое или электромагнитное взаимодействие, а  $\Psi_{s\beta}^-$  и  $\Psi_{s\alpha}^+$  — конечное и начальное ядерные состояния.

### § 3.6. Следствия унитарности

Из унитарности  $S$ -матрицы следует интересное и полезное соотношение, связывающее матричный элемент  $M_{\alpha\alpha}$  для некоторого многочастичного состояния  $\alpha$  и полное сечение рассеяния. Вспомним, что в общем случае, когда состояние  $\beta$  может совпадать или не совпадать с  $\alpha$ ,  $S$ -матрица имеет вид (3.3.2)

$$S_{\beta\alpha} = \delta(\beta - \alpha) - 2\pi i \delta^4(p_\beta - p_\alpha) M_{\beta\alpha}.$$

Тогда из условия унитарности следует, что

$$\begin{aligned} \delta(\gamma - \alpha) &= \int d\beta S_{\beta\gamma}^* S_{\beta\alpha} = \delta(\gamma - \alpha) - 2\pi i \delta^4(p_\beta - p_\alpha) M_{\gamma\alpha} + \\ &+ 2\pi i \delta^4(p_\gamma - p_\alpha) M_{\alpha\gamma}^* + 4\pi^2 \int d\beta \delta^4(p_\beta - p_\gamma) \delta^4(p_\beta - p_\alpha) M_{\beta\gamma}^* M_{\beta\alpha}. \end{aligned}$$

Взаимно уничтожая члены  $\delta(\gamma - \alpha)$  и сокращая множители

$$2\pi \delta^4(p_\gamma - p_\alpha),$$

получаем для  $p_\gamma = p_\alpha$ :

$$0 = -i M_{\gamma\alpha} + i M_{\alpha\gamma}^* + 2\pi \int d\beta \delta^4(p_\beta - p_\alpha) M_{\beta\gamma}^* M_{\beta\alpha}. \quad (3.6.1)$$

Это соотношение особенно полезно, когда  $\alpha = \gamma$ . В этом случае оно имеет вид

$$\text{Im } M_{\alpha\alpha} = -\pi \int d\beta \delta^4(p_\beta - p_\alpha) |M_{\beta\alpha}|^2. \quad (3.6.2)$$

Если воспользоваться уравнением (3.4.11), это выражение можно переписать как формулу для полного сечения рассеяния некоторого начального состояния  $\alpha$  в объеме  $V$ :

$$\begin{aligned}\Gamma_\alpha &\equiv \int d\beta \frac{d\Gamma(\alpha \rightarrow \beta)}{d\beta} = \\ &= (2\pi)^{3N_\alpha-2} V^{1-N_\alpha} \int d\beta \delta^4(p_\beta - p_\alpha |M_{\beta\alpha}|^2) = \\ &= -\frac{1}{\pi} (2\pi)^{3N_\alpha-2} V^{1-N_\alpha} \operatorname{Im} M_{\alpha\alpha}. \quad (3.6.3)\end{aligned}$$

В частности, когда  $\alpha$  — двухчастичное состояние, эта формула приобретает вид

$$\operatorname{Im} M_{\alpha\alpha} = -\frac{u_\alpha \sigma_\alpha}{16\pi^3}, \quad (3.6.4)$$

где  $u_\alpha$  — относительная скорость (3.4.17) в состоянии  $\alpha$ , а  $\sigma_\alpha$  — *полное сечение* рассеяния для этого состояния, определяемое (3.4.15):

$$\sigma_\alpha \equiv \int d\beta d\sigma(\alpha \rightarrow \beta)/d\beta = (2\pi)^4 u_\alpha^{-1} \int d\beta |M_{\beta\alpha}|^2 \delta^4(p_\beta - p_\alpha). \quad (3.6.5)$$

Обычно это соотношение переписывают несколько иначе — через *амплитуду рассеяния*  $f(\alpha \rightarrow \beta)$ . Из уравнения (3.4.30) следует, что дифференциальное сечение рассеяния двух частиц в системе центра масс равно

$$\frac{d\sigma(\alpha \rightarrow \beta)}{d\Omega} = \frac{(2\pi)^4 k' E'_1 E'_2 E_1 E_2}{k E^2} |M_{\beta\alpha}|^2, \quad (3.6.6)$$

где  $k'$  и  $k$  — абсолютные значения импульсов в конечном и начальных состояниях. Поэтому будем определять амплитуду рассеяния как<sup>1)</sup>

$$f(\alpha \rightarrow \beta) \equiv -\frac{4\pi^2}{E} \sqrt{\frac{k' E'_1 E'_2 E_1 E_2}{k}} M_{\beta\alpha}. \quad (3.6.7)$$

Тогда дифференциальное сечение рассеяния равно

$$\frac{d\sigma(\alpha \rightarrow \beta)}{d\Omega} = |f(\alpha \rightarrow \beta)|^2. \quad (3.6.8)$$

В частности, для *упругого* рассеяния двух частиц друг на друге получаем

$$f(\alpha \rightarrow \beta) \equiv -\frac{4\pi^2 E_1 E_2}{E} M_{\beta\alpha}. \quad (3.6.9)$$

<sup>1)</sup> Фаза  $f$  носит условный характер, она определяется из квантовомеханической интерпретации [21]  $f$  как коэффициента перед уходящей волной в решении стационарного уравнения Шредингера. Нормировка  $f$ , которую мы здесь используем, является для неупругого рассеяния немного нетрадиционной. Обычно  $f$  определяется так, что в формуле для дифференциального сечения возникает отношение начальной и конечной скоростей.

Используя выражение (3.4.18) для относительной скорости  $u_\alpha$ , находим теперь, что являющееся следствием унитарности соотношение (3.6.3) приобретает вид

$$\text{Im } f(\alpha \rightarrow \alpha) = \frac{k}{4\pi} \sigma_\alpha. \quad (3.6.10)$$

Переписанное в таком виде, оно получило название *оптической теоремы* [22].

Благодаря оптической теореме можно многое узнать о высокoenергетических свойствах рассеяния. Можно ожидать, что амплитуда рассеяния  $f$  является гладкой функцией угла рассеяния, поэтому должен существовать некоторый телесный угол  $\Delta\Omega$ , такой что  $|f|^2$  внутри него и  $|f|^2$  для рассеяния на нулевой угол равны (скажем, могут отличаться не больше чем в два раза). Тогда полное сечение рассеяния ограничено снизу величиной

$$\sigma_\alpha \geq \int |f|^2 d\Omega \geq \frac{1}{2} |f(\alpha \rightarrow \alpha)|^2 \Delta\Omega \geq \frac{1}{2} |\text{Im } f(\alpha \rightarrow \alpha)|^2 \Delta\Omega.$$

Если теперь воспользоваться (3.6.10), можно получить верхнюю границу для  $\Delta\Omega$ :

$$\Delta\Omega \leq 32\pi^2/k^2 \sigma_\alpha. \quad (3.6.11)$$

Как мы увидим в следующем параграфе, обычно при больших энергиях полное сечение процесса медленно растет или стремится к константе. Поэтому из уравнения (3.6.11) следует, что ширина окружающего направление  $\theta = 0$  телесного угла, внутри которого сечение приблизительно постоянно, падает при  $k \rightarrow \infty$  как  $1/k^2$ . Пик в сечении при  $\theta = 0$ , ширина которого уменьшается с ростом энергии, называют *дифракционным пиком*.

Если вернуться теперь к общему случаю произвольного числа участвующих в реакции частиц, можно, воспользовавшись (3.6.2) и условием СРТ-инвариантности, вывести соотношение между полными сечениями процессов, отличающихся заменой всех частиц античастицами. Поскольку оператор СРТ является антиунитарным, из его сохранения вообще говоря нельзя получить никакого простого соотношения между процессом  $\alpha \rightarrow \beta$  и соответствующим процессом, в котором все частицы заменены на античастицы. Однако сохранение СРТ обеспечивает связь между некоторым процессом и процессом, *обратным*, в котором участвуют античастицы. Покажем, что из СРТ-инвариантности следует условие на  $S$ -матрицу:

$$S_{\beta,\alpha} = S_{\mathcal{CPT}\alpha, \mathcal{CPT}\beta}. \quad (3.6.12)$$

(Здесь  $\mathcal{CPT}$  обозначает обращение всех  $z$ -компонент спина, замену всех частиц античастицами, умножение матричного элемента на некоторые фазовые множители для частиц в начальном состоянии и на комплексно-сопряженные им фазовые множители для частиц

в конечном состоянии.) Для этого воспользуемся той же самой аргументацией, которая помогла нам при выводе (3.3.46) из условия инвариантности по отношению к обращению времени. Поскольку из СРТ-инвариантности следует равенство масс частиц и античастиц, для коэффициента при  $\delta^4(p_\alpha - p_\beta)$  в  $S_{\beta\alpha}$  выполняется аналогичное соотношение:

$$M_{\beta,\alpha} = M_{\mathcal{CPT}\alpha, \mathcal{CPT}\beta}. \quad (3.6.13)$$

В частности, когда начальное и конечное состояния одинаковы, все фазовые множители сокращаются, и из (3.6.13) следует, что

$$M_{p_1\sigma_1n_1; p_2\sigma_2n_2; \dots, p_1\sigma_1n_1; p_2\sigma_2n_2; \dots} = M_{p_1-\sigma_1n_1^c; p_2-\sigma_2n_2^c; \dots, p_1-\sigma_1n_1^c; p_2-\sigma_2n_2^c; \dots} \quad (3.6.14)$$

где стоящий над  $n$  индекс  $c$  обозначает зарядовое спряжение к  $n$ . Таким образом, из обобщенной оптической теоремы (3.6.2) следует, что *полные сечения процесса, для которого начальное состояние описывается некоторым набором частиц, и процесса, в котором мы заменили частицы на античастицы и перевернули все спины, совпадают*:

$$\Gamma_{p_1\sigma_1n_1; p_2\sigma_2n_2; \dots} = \Gamma_{p_1-\sigma_1n_1^c; p_2-\sigma_2n_2^c; \dots} \quad (3.6.15)$$

Применяя это соотношение к одночастичным состояниям, можно видеть, что совпадают амплитуды распада некоторой частицы и ее античастицы, спин которой перевернут. Из инвариантности относительно вращений в пространстве следует, что время жизни частицы не может зависеть от ее  $z$ -компоненты спина, поэтому нестабильные частицы и их античастицы имеют одинаковые времена жизни.

\* \* \*

Соображения, аналогичные тем, что позволили нам из условия унитарности  $S^+S = 1$  получить (3.6.2), также дают возможность использовать другое условие унитарности  $SS^+ = 1$  для вывода

$$\text{Im } M_{\alpha\alpha} = -\pi \int d\beta \delta^4(p_\beta - p_\alpha) |M_{\alpha\beta}|^2. \quad (3.6.16)$$

Комбинируя это выражение с (3.6.2), можно получить соотношение взаимности

$$\int d\beta \delta^4(p_\beta - p_\alpha) |M_{\beta\alpha}|^2 = \int d\beta \delta^4(p_\beta - p_\alpha) |M_{\alpha\beta}|^2, \quad (3.6.17)$$

или, другими словами,

$$\int d\beta c_\alpha \frac{d\Gamma(\alpha \rightarrow \beta)}{d\beta} = \int d\beta c_\beta \frac{d\Gamma(\beta \rightarrow \alpha)}{d\beta}, \quad (3.6.18)$$

где  $c_\alpha \equiv [V/(2\pi)^3]^{N_\alpha}$ . Его можно использовать для вывода некоторых важных результатов кинетической теории [23]. Если  $P_\alpha d\alpha$  — вероятность того, что система находится в элементе объема  $d\alpha$  пространства

многочастичных состояний  $\Phi_\alpha$ , то связанное с переходами во все другие состояния уменьшение  $P_\alpha$  равно

$$P_\alpha \int d\beta d\Gamma(\alpha \rightarrow \beta) / d\beta,$$

а связанное с переходами из других состояний увеличение  $P_\alpha$  равно

$$\int d\beta P_\beta d\Gamma(\beta \rightarrow \alpha) / d\alpha.$$

Следовательно, скорость изменения  $P_\alpha$  равна

$$\frac{dP_\alpha}{dt} = \int d\beta P_\beta \frac{d\Gamma(\beta \rightarrow \alpha)}{d\alpha} - P_\alpha \int d\beta \frac{d\Gamma(\alpha \rightarrow \beta)}{d\beta}. \quad (3.6.19)$$

Отсюда немедленно следует, что  $\int P_\alpha d\alpha$  не зависит от времени (чтобы в этом убедиться, достаточно во втором слагаемом под знаком интеграла поменять  $\alpha$  и  $\beta$  местами). С другой стороны, скорость изменения энтропии

$$-\int d\alpha P_\alpha \ln(P_\alpha/c_\alpha)$$

равна

$$\begin{aligned} -\frac{d}{dt} \int d\alpha P_\alpha \ln(P_\alpha/c_\alpha) &= -\int d\alpha \int d\beta (\ln(P_\alpha/c_\alpha) + 1) \times \\ &\times \left[ P_\beta \frac{d\Gamma(\beta \rightarrow \alpha)}{d\alpha} - P_\alpha \frac{d\Gamma(\alpha \rightarrow \beta)}{d\beta} \right]. \end{aligned}$$

Если опять поменять местами во втором члене  $\alpha$  и  $\beta$ , это уравнение можно переписать в виде

$$-\frac{d}{dt} \int d\alpha P_\alpha \ln(P_\alpha/c_\alpha) = \int d\alpha \int d\beta P_\beta \ln\left(\frac{P_\beta c_\alpha}{P_\alpha c_\beta}\right) \frac{d\Gamma(\beta \rightarrow \alpha)}{d\alpha}.$$

Функция  $y \ln(y/x)$  для любых положительных  $x$  и  $y$  удовлетворяет неравенству<sup>2)</sup>

$$y \ln\left(\frac{y}{x}\right) \geq y - x$$

Таким образом, скорость изменения энтропии ограничена снизу величиной

$$-\frac{d}{dt} \int d\alpha P_\alpha \ln(P_\alpha/c_\alpha) \geq \int d\alpha \int d\beta \left[ \frac{P_\beta}{c_\beta} - \frac{P_\alpha}{c_\alpha} \right] c_\beta \frac{d\Gamma(\beta \rightarrow \alpha)}{d\alpha},$$

или, если во втором члене справа совершить замену  $\alpha \leftrightarrow \beta$ ,

$$-\frac{d}{dt} \int d\alpha P_\alpha \ln(P_\alpha/c_\alpha) \geq \int d\alpha \int d\beta \frac{P_\beta}{c_\beta} \left[ c_\beta \frac{d\Gamma(\beta \rightarrow \alpha)}{d\alpha} - c_\alpha \frac{d\Gamma(\alpha \rightarrow \beta)}{d\beta} \right].$$

<sup>2)</sup> Разница между левой и правой частью при  $x \rightarrow y$  стремится к положительнй величине  $(x - y)^2/2y$ . Ее производная по  $x$  при  $x > y$  и  $x < y$  соответственно положительна и отрицательна.

Из условия унитарности (3.6.18) (если вновь поменять местами  $\alpha$  и  $\beta$ ) следует, что интеграл по  $\alpha$  в правой части этого неравенства обращается в нуль, поэтому можно сделать вывод, что энтропия всегда растет:

$$-\frac{d}{dt} \int d\alpha P_\alpha \ln(P_\alpha/c_\alpha) \geq 0. \quad (3.6.20)$$

Это утверждение известно как “ $H$ -теорема Больцмана”. В учебниках по статистической физике ее часто выводят в борновском приближении, когда величина  $|M_{\beta\alpha}|^2$  симметрична по индексам  $\alpha$  и  $\beta$ , и потому

$$c_\beta d\Gamma(\beta \rightarrow \alpha)/d\alpha = c_\alpha d\Gamma(\alpha \rightarrow \beta)/d\beta,$$

или с использованием инвариантности по отношению к обращению времени, из которой следует, что  $|M_{\beta\alpha}|^2$  не изменится, если совершиТЬ замену  $\alpha \leftrightarrow \beta$ , а также заменить знаки всех импульсов и спинов. Конечно, ни борновское приближение, ни инвариантность по отношению к обращению времени не являются точными. Поэтому замечательно, что для вывода  $H$ -теоремы нам понадобилось только условие унитарности (3.6.18).

Рост энтропии прекращается, когда вероятность  $P_\alpha$  приобретает вид произведения  $c_\alpha$  на функцию только сохраняющихся величин, например энергии или заряда. В этом случае из законов сохранения следует, что  $d\Gamma(\beta \rightarrow \alpha)/d\alpha$  обращается в нуль (если  $P_\alpha/c_\alpha \neq P_\beta/c_\beta$ ) и в первом справа члене уравнения (3.6.19) можно заменить  $P_\beta$  на  $P_\alpha c_\beta/c_\alpha$ . Воспользовавшись условием унитарности (3.6.18), находим, что  $P_\alpha$  не зависит от времени. Чтобы получить этот результат, вновь нет необходимости в использовании ни борновского приближения, ни в инвариантности относительного обращения времени.

### § 3.7. Разложение по парциальным амплитудам<sup>1)</sup>

Часто оказывается удобным работать с  $S$ -матрицей в таком базисе, где все переменные, за исключением полного импульса и энергии, дискретны. Его возможно выбрать, поскольку компоненты импульсов  $\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_n$  в  $n$ -частичном состоянии с определенными полным импульсом  $\mathbf{p}$  и энергией  $E$  образуют  $(3n - 4)$ -мерное *компактное* пространство. Например, в случае  $n = 2$  частиц это пространство представляет собой двумерную сферическую поверхность в системе центра масс  $\mathbf{p} = 0$ . Любая определенная на таком компактном пространстве функция может быть разложена в ряд по обобщенным “парциальным волнам”, подобным сферическим гармоникам, которые часто используются для разложения функций на двумерной сфере. Таким образом, мы

---

<sup>1)</sup> Материал этого параграфа выходит за рамки основного содержания книги и может быть опущен при первом чтении.

можем определить базис  $n$ -частичных состояний, в котором все переменные, кроме  $\mathbf{p}$  и  $E$ , дискретны: собственные состояния гамильтониана свободных частиц в этом базисе будем обозначать как  $\Phi_{E\mathbf{p}N}$ , где  $N$  — индекс, содержащий все спины, типы частиц и любые другие индексы обобщенных парциальных волн. Удобно выбрать эти состояния нормированными так, что их скалярные произведения равны

$$(\Phi_{E'\mathbf{p}'N'}, \Phi_{E\mathbf{p}N}) = \delta(E' - E)\delta^3(\mathbf{p}' - \mathbf{p})\delta_{N',N}. \quad (3.7.1)$$

Тогда  $S$ -оператор имеет в этом базисе матричные элементы

$$(\Phi_{E'\mathbf{p}'N'}, S\Phi_{E\mathbf{p}N}) = \delta(E' - E)\delta^3(\mathbf{p}' - \mathbf{p})S_{N',N}(E, \mathbf{p}), \quad (3.7.2)$$

где  $S_{N',N}$  — некоторая унитарная матрица. Аналогично,  $T$ -оператор, матричные элементы  $(\Phi_\beta, T\Phi_\alpha)$  которого определены так же, как матричные элементы  $T_{\beta\alpha}^+$  в (3.1.18), в нашем новом базисе имеет вид (в согласии с (3.4.12))

$$(\Phi_{E'\mathbf{p}'N'}, T\Phi_{E\mathbf{p}N}) = \delta^3(\mathbf{p}' - \mathbf{p})M_{N',N}(E, \mathbf{p}), \quad (3.7.3)$$

и соотношение (3.2.7) становится обычным матричным уравнением

$$S_{N',N}(E, \mathbf{p}) = \delta_{N',N} - 2i\pi M_{N',N}(E, \mathbf{p}). \quad (3.7.4)$$

Общий случай будет рассмотрен в следующем параграфе, а в этом мы сконцентрируем свое внимание на реакциях с двухчастичным начальным состоянием.

Рассмотрим, например, некоторое состояние, описывающее две нетождественные частицы типов  $n_1, n_2$  с ненулевыми массами  $M_1, M_2$  и произвольными спинами  $s_1, s_2$ . В этом случае состояния характеризуются полным импульсом  $\mathbf{p} = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2$ , энергией  $E$ , типами  $n_1, n_2$ ,  $z$ -компонентами спинов  $\sigma_1, \sigma_2$  и парой целых чисел  $l, m$  (причем  $|m| \leq l$ ), определяющих зависимость состояния от направления, скажем  $\mathbf{p}_1$ . Можно построить другой удобный дискретный базис, если, используя коэффициенты Клебша–Гордана [9], определить по спинам двух частиц полный спин системы  $s$  с  $z$ -компонентой  $\mu$ , а по полному спину и орбитальному угловому моменту  $l$  с  $z$ -компонентой  $m$  найти полный момент  $j$  с  $z$ -компонентой  $\sigma$ . В результате получим базис состояний  $\Phi_{E\mathbf{p}j\sigma ls n}$  (где  $n$  — “индекс канала”, содержащий  $n_1$  и  $n_2$ ), заданный их скалярными произведениями с состояниями, несущими определенные импульсы частиц и их  $z$ -компоненты спинов:

$$\begin{aligned} (\Phi_{p_1\sigma_1 p_2\sigma_2 n'}, \Phi_{E\mathbf{p}j\sigma ls n}) &\equiv (|\mathbf{p}_1|E_1 E_2/E)^{-1/2}\delta^3(\mathbf{p} - \mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2) \times \\ &\times \delta\left(E - \sqrt{\mathbf{p}_1^2 + M_1^2} - \sqrt{\mathbf{p}_2^2 + M_2^2}\right)\delta_{n',n} \times \\ &\times \sum_{m,\mu} C_{s_1,s_2}(s, \mu; \sigma_1, \sigma_2) C_{ls}(j, \sigma; m, \mu) Y_l^m(\hat{\mathbf{p}}_1), \end{aligned} \quad (3.7.5)$$

где  $Y_l^m$  — обычные сферические гармоники [24]. Благодаря множителю

$$(|\mathbf{p}_1|E_1 E_2 / E)^{-1/2}$$

эти состояния оказываются нормированными должным образом в системе центра масс:

$$(\Phi_{E' \mathbf{p}' j' \sigma' l' s' n'}, \Phi_{E 0 j \sigma l s n}) = \delta^3(\mathbf{p}') \delta(E' - E) \delta_{j', j} \delta_{\sigma', \sigma} \delta_{l', l} \delta_{s', s} \delta_{n', n}. \quad (3.7.6)$$

Для того чтобы избежать повторного учета вклада тождественных частиц, нужно интегрировать только по половине фазового пространства двух частиц. Поэтому в скалярное произведение (3.7.6) должен быть добавлен множитель  $\sqrt{2}$ .

Матричные элементы произвольного инвариантного относительно вращений и трансляций оператора  $O$  в системе центра масс должны иметь вид

$$(\Phi_{E' \mathbf{p}' j' \sigma' l' s' n'}, O \Phi_{E 0 j \sigma l s n}) = \delta^3(\mathbf{p}') O_{l' s' n', l s n}^j(E) \delta_{j j'} \delta_{\sigma \sigma'}. \quad (3.7.7)$$

(Диагональность скалярного произведения относительно  $j$  и  $\sigma$  следует из того, что  $O$  коммутирует с  $\mathbf{J}^2$  и  $J_3$ , а независимость коэффициента при  $\delta_{\sigma' \sigma}$  от  $\sigma$  — из коммутации  $O$  с  $J_1 \pm J_2$ . Эти утверждения являются частными случаями общего результата, известного как теорема Вигнера–Эккарта [25].) Применяя это правило к оператору  $M$ , матричные элементы которого равны  $M_{\beta \alpha}$ , можно найти, что в системе центра масс амплитуда рассеяния (3.6.7) имеет вид

$$\begin{aligned} f(\mathbf{k} \sigma_1, -\mathbf{k} \sigma_2, n \rightarrow \mathbf{k}' \sigma'_1, -\mathbf{k}' \sigma'_2, n') &\equiv \\ &\equiv -4\pi^2 \sqrt{\frac{k' E'_1 E'_2 E_1 E_2}{E'^2 k}} M_{\mathbf{k}' \sigma'_1 - \mathbf{k}' \sigma'_2 n', \mathbf{k} \sigma_1 - \mathbf{k} \sigma_2 n} = \\ &= -\frac{4\pi^2}{k} \sum_{j \sigma' l' m' s' \mu' l m s \mu} C_{s_1, s_2}(s, \mu; \sigma_1 \sigma_2) C_{l s}(j, \sigma; m, \mu) \times \\ &\times C_{s'_1, s'_2}(s', \mu'; \sigma'_1 \sigma'_2) C_{l' s'}(j, \sigma; m', \mu') \times \\ &\times Y_{l'}^{m'}(\hat{\mathbf{k}'}) Y_l^{m*}(\hat{\mathbf{k}}) M_{l' s' n', l s n}^j(E). \end{aligned} \quad (3.7.8)$$

Дифференциальное сечение рассеяния равно  $|f|^2$ . Выберем начальный импульс  $\mathbf{k}$  лежащим вдоль  $Oz$ . В этом случае

$$Y_l^m(\hat{\mathbf{k}}) = \delta_{m0} \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}}. \quad (3.7.9)$$

Интегрируя  $|f|^2$  по направлениям конечного импульса  $\mathbf{k}'$ , суммируя по  $z$ -компонентам спинов конечного состояния и усредняя по  $z$ -компонентам спинов начального состояния, можно получить полное

сечение<sup>2)</sup> перехода из канала  $n$  в канал  $n'$ :

$$\begin{aligned}\sigma(n \rightarrow n'; E) &= \\ &= \frac{\pi}{k^2(2s_1 + 1)(2s_2 + 1)} \sum_{jls l's'} (2j + 1) |\delta_{l'l} \delta_{s's} \delta_{n,n} - S_{l'l's'n', lsn}^j(E)|^2.\end{aligned}\quad (3.7.10)$$

Суммирование по всем каналам задачи двух тел в (3.7.10) даст полное сечение всех упругих и неупругих реакций двух частиц:

$$\begin{aligned}\sum_{n'} \sigma(n \rightarrow n'; E) &= \\ &= \frac{\pi}{k^2(2s_1 + 1)(2s_2 + 1)} \sum_{jls} (2j + 1) [(1 - S^j(E)) \dagger (1 - S^j(E))]_{lsn, lsn}.\end{aligned}\quad (3.7.11)$$

Для сравнения, из уравнений (3.7.8), (3.7.9), (3.7.4) и правил суммирования коэффициентов Клебша–Гордана следует такое выражение для усредненной по спинам амплитуды рассеяния на нулевой угол:

$$f(n, E) = \frac{i}{2k(2s_1 + 1)(2s_2 + 1)} \sum_{jls} (2j + 1) [1 - S_{lsn, lsn}^j]$$

Воспользовавшись оптической теоремой (3.6.10), получаем, что полное сечение равно

$$\sigma_{\text{полное}}(n, E) = \frac{2\pi}{k^2(2s_1 + 1)(2s_2 + 1)} \sum_{jls} (2j + 1) \operatorname{Re}[1 - S^j(E)]_{lsn, lsn}.\quad (3.7.12)$$

Если при энергии  $E$  из канала  $n$  может быть осуществлен переход только в двухчастичные каналы, матрица  $S^j(E)$  (или, по меньшей мере, ее часть, включающая канал  $n$ ) унитарна. Следовательно,

$$[(1 - S^j(E))^\dagger (1 - S^j(E))]_{lsn, lsn} = 2 \operatorname{Re}[1 - S^j(E)]_{lsn, lsn}, \quad (3.7.13)$$

<sup>2)</sup> При выводе этого выражения мы используем стандартные правила суммирования [9] коэффициентов Клебша–Гордана: во-первых,

$$\sum_{\sigma_1, \sigma_2} C_{s_1, s_2}(s, \mu; \sigma_1, \sigma_2) C_{s_1, s_2}(\bar{s}, \bar{\mu}; \sigma_1, \sigma_2) = \delta_{s\bar{s}} \delta_{\mu\bar{\mu}}$$

и аналогичное соотношение для членов со штрихом, во-вторых,

$$\sum_{m\bar{\sigma}} C_{ls}(j, \sigma; m, \tilde{\sigma}) C_{ls}(\bar{j}, \bar{\sigma}; m, \tilde{\sigma}) = \delta_{j\bar{j}} \delta_{\sigma\bar{\sigma}}$$

и, наконец,

$$\sum_{\sigma\mu} C_{ls}(j, \sigma; 0, \mu) = \frac{2j + 1}{2l + 1} \delta_{l\bar{l}}.$$

так что (3.7.12) и (3.7.11) совпадают. С другой стороны, когда открываются каналы, соответствующие трем и более частицам, разница между (3.7.12) и (3.7.11) дает полное сечение рождения дополнительных частиц:

$$\begin{aligned} \sigma_{\text{рождения}}(n; E) &= \\ &= \frac{\pi}{k^2(2s_1 + 1)(2s_2 + 1)} \sum_{jls} (2j + 1)[1 - S^j(E)^\dagger S^j(E)]_{l'sn, l'sn}, \end{aligned} \quad (3.7.14)$$

поэтому она должна быть положительна.

Разложение по парциальным амплитудам оказывается особенно полезным при изучении процессов, для которых релевантная часть  $S$ -матрицы диагональна. Это, например, имеет место, когда начальный канал  $n$  содержит только две частицы со спином 0, а энергия такова, что никакие другие каналы открыться не могут (как в рассеянии  $\pi^+ - \pi^+$  или  $\pi^+ - \pi^0$  при энергиях ниже порога рождения дополнительных пионов, если пренебречь слабым и электромагнитным взаимодействиями). Для пары таких частиц имеем  $j = l$ , и из закона сохранения углового момента следует, что  $S$ -матрица диагональна. Если в процессах участвуют частицы с ненулевым спином, то  $S$ -матрица также может оказаться диагональной. Например, для рассеяния пиона на нуклоне  $j = l + 1/2$  или  $j = l - 1/2$ , но при заданном  $j$  эти два состояния несут противоположную четность и поэтому не могут быть связаны ненулевыми элементами  $S$ -матрицы. В любом случае, если при некоторых  $n$  и  $E$  элементы  $S$ -матрицы  $S_{N', jlsn}(E, 0)$  не равны нулю только когда  $N'$  — двухчастичное состояние  $j, l, s, n$ , из унитарности следует, что

$$S_{l's'n', lns}^j(E) = \exp(2i\delta_{jlsn}(E))\delta_{l'l}\delta_{s's}\delta_{n'n}, \quad (3.7.15)$$

где  $\delta_{jlsn}(E)$  — некоторый действительный фазовый множитель, получивший название *фазового сдвига*. Эту формулу часто используют и в том случае, когда двухчастичная часть  $S$ -матрицы диагональна, но каналы с большим числом частиц тоже открыты. В этом случае, поскольку сечение (3.7.14) должно оставаться положительным, у фазового сдвига появляется положительная мнимая часть. Когда фазовые сдвиги действительны, сечение упругих реакций (3.7.10) и полное сечение (3.7.12) равны

$$\begin{aligned} \sigma(n \rightarrow n; E) &= \\ &= \sigma_{\text{полное}}(n, E) = \frac{4\pi}{k^2(2s_1 + 1)(2s_2 + 1)} \sum_{jls} (2j + 1) \sin^2 \delta_{jlsn}(E). \end{aligned} \quad (3.7.16)$$

В нерелятивистской квантовой механике этот результат часто выводится из свойств волновой функции (в координатном представлении) частицы в некотором потенциале. Наш вывод преследовал цель показать, что разложение по парциальным амплитудам применимо

для упругих столкновений даже при релятивистских скоростях и что справедливость этого утверждения не зависит ни от каких дополнительных предположений кроме унитарности и инвариантности.

Часто оказывается полезным использовать технику фазовых сдвигов в задачах, где открытые каналы образуют неприводимые представления внутренней группы симметрии. Классическим примером такой группы является симметрия по отношению к вращению изотопического спина, когда в индекс канала  $n$  входят изоспины двух частиц  $T_1, T_2$  и их  $z$ -компоненты  $t_1, t_2$ . Состояния в канале  $n$  можно представить в виде линейных комбинаций  $t$  компонент неприводимых представлений  $T$  с коэффициентами разложения, равными коэффициентам Клебша–Гордана  $C_{T_1 T_2}(T, t; t_1, t_2)$ . Предположим, что для тех каналов и энергий, которые нас интересуют,  $S$ -матрица диагональна по индексам  $l, s, j, T$  и  $t$ . Из унитарности и инвариантности относительно вращений в изоспиновом пространстве следует, что  $S$ -матрицу можно переписать в виде

$$S^j_{l's'T't'l'sTt} = \exp[2i\delta_{jlsT}(E)]\delta_{l'l}\delta_{s's}\delta_{T'T}\delta_{t't}, \quad (3.7.17)$$

где  $\delta_{jlsT}(E)$  — действительный фазовый сдвиг, не зависящий от  $t$  согласно теореме Вигнера–Эккарта. Выражение для одноканальных сечений рассеяния можно найти из (3.7.10), и полное сечение (3.7.12) равно

$$\begin{aligned} \sigma_{\text{полное}}(t_1, t_2; E) &= \\ &= \frac{4\pi}{k^2(2s_1+1)(2s_2+1)} \sum_{jlsTt} (2j+1) C_{T_1 T_2}(T, t; t_1, t_2)^2 \sin^2 \delta_{jlsT}(E). \end{aligned} \quad (3.7.18)$$

Например, в случае пион–пионного рассеяния имеются фазовые сдвиги  $\delta_{ll0T}(E)$  с  $T = 0$  или  $T = 2$  для любых четных  $l$  и  $T = 1$  для любых нечетных  $l$ , а для пион–нуклонного рассеяния — фазовые сдвиги  $\delta_{jj\pm 1/21/2T}$  для  $T = 1/2$  или  $T = 3/2$ .

Многие свойства амплитуд рассеяния и фазовых сдвигов возле порога реакции можно получить из соображений аналитичности, почти не зависящих ни от каких предположений относительно динамики. Если не реализуются особые обстоятельства, приводящие к образованию сингулярностей в импульсном пространстве, можно считать, что матричный элемент  $M_{\mathbf{k}'\sigma'_1-\mathbf{k}'\sigma'_2 n'; \mathbf{k}\sigma_1-\mathbf{k}\sigma_2 n}$  является в окрестности  $k = 0$  или  $k' = 0$  ( $k = k' = 0$  в случае упругого рассеяния) аналитической функцией<sup>3)</sup> 3-импульсов  $\mathbf{k}$  и  $\mathbf{k}'$ . Возвращаясь к разло-

<sup>3)</sup> Например, в борновском приближении (3.2.8)  $M$  пропорциональна фурье-образу матричного элемента взаимодействия в координатном пространстве. Поэтому она является аналитической функцией вблизи нулевого импульса, если матричный элемент достаточно быстро падает с ростом расстояний между частицами. Главное исключение из этого правила — дальнодействующие силы, например, сила Кулона.

жению  $M$  по парциальным амплитудам (3.7.8), можно заметить, что  $k^l Y_l^m(\hat{\mathbf{k}})$  — простая полиномиальная функция 3-вектора  $\mathbf{k}$ . Поэтому, чтобы  $M_{\mathbf{k}'\sigma'_1-\mathbf{k}'\sigma'_2n';\mathbf{k}\sigma_1-\mathbf{k}\sigma_2n}$  была при  $k = 0$  или  $k' = 0$  аналитической функцией 3-импульсов  $\mathbf{k}$  и  $\mathbf{k}'$ , коэффициенты  $M_{l's'n',lsn}^j$ , или, что равносильно,  $\delta_{ll'}\delta_{s's}\delta_{n'n} - S_{l's'n',lsn}^j$ , при  $k \rightarrow 0$  и/или  $k' \rightarrow 0$  должны вести себя как  $k^{l+1/2}k'^{l+1/2}$ . Следовательно, при малых  $k$  и/или  $k'$  основной вклад в амплитуду рассеяния вносят низшие парциальные волны начального и/или конечного состояний. Все возможные ситуации делятся на три класса.

### Экзотермические реакции

В этом случае  $k'$  стремится к конечному значению при  $k \rightarrow 0$ , и величина  $\delta_{ll'}\delta_{s's}\delta_{n'n} - S_{l's'n',lsn}^j$  ведет себя как  $k^{l+1/2}$ . Сечение (3.7.11) в этом пределе спадает как  $k^{2l-1}$ , где  $l$  — *низший* орбитальный угловой момент, при котором может произойти данная реакция. Наиболее типичным является случай  $l = 0$ , когда сечение имеет порядок  $1/k$ . Это имеет место, например, для поглощения медленных нейтронов сложным ядром или для аннигиляции электрон-позитронных пар с образованием фотонов при низких энергиях, когда связанные с силой Кулона эффекты высшего порядка несущественны. Вероятность реакции, равная сечению, умноженному на поток (который падает как  $k$ ) ведет себя при  $k \rightarrow 0$  как константа. Однако когда пучок проходит сквозь мишень с заданной толщиной, именно сечение определяет вероятность поглощения, и для поглощения медленных нейтронов материалом типа бора из-за множителя  $1/k$  эта вероятность очень велика.

### Эндотермические реакции

Реакция невозможна, пока  $k$  не достигнет порога, при котором  $k' = 0$ . Сразу над порогом  $\delta_{ll'}\delta_{s's}\delta_{n'n} - S_{l's'n',lsn}^j$  ведет себя как  $(k')^{l'+1/2}$ , а сечение (3.7.11) — как  $k'^{2l'+1}$ , где  $l'$  — *низший* возможный при пороговой энергии орбитальный угловой момент. Наиболее типичным опять является случай  $l' = 0$ , когда сечение над порогом ведет себя как  $k'$ , т.е. как  $\sqrt{E - E_{\text{порог.}}}$ . Это имеет место, например, для ассоциативного рождения странных частиц или для рождения электрон-позитронных пар при рассеянии фотонов.

### Упругие реакции

В этом случае  $k = k'$ , поэтому  $k$  и  $k'$  должны вместе обращаться в нуль (это происходит, когда  $n = n'$  или когда в  $n'$  входят частицы, принадлежащие тем же изотопическим мультиплетам, что и частицы

из  $n$ ). При упругом рассеянии всегда существуют парциальные волны с  $l = l' = 0$ , так что в пределе  $k \rightarrow 0$  амплитуда рассеяния (3.7.8) стремится к постоянной величине:

$$f(\mathbf{k}, \sigma_1, -\mathbf{k}, \sigma_2, n \rightarrow \mathbf{k}', \sigma'_1, -\mathbf{k}' \sigma'_2, n') \rightarrow$$

$$\rightarrow \sum_{s\sigma} C_{s_1, s_2}(s, \sigma; \sigma_1, \sigma_2) C_{s'_1, s'_2}(s, \sigma; \sigma'_1, \sigma'_2) a_s(n \rightarrow n'), \quad (3.7.19)$$

где  $a$  — некоторая константа, получившая название *длины рассеяния*. Она может быть найдена, если рассмотреть предел

$$S_{0sn'0sn}^s \rightarrow \delta_{n'n} + 2ika_s(n \rightarrow n') \quad (3.7.20)$$

при  $k = k' \rightarrow 0$ . Суммируя  $4\pi|f|^2$  по спинам частиц конечного состояния и усредняя по спинам начального, получим полное сечение перехода  $n \rightarrow n'$  при  $k = k' = 0$ :

$$\sigma(n \rightarrow n'; k = 0) = \frac{4\pi}{(2s_1 + 1)(2s_2 + 1)} \sum_s (2s + 1) a_s^2(n \rightarrow n'). \quad (3.7.21)$$

Классическим примером ситуации, в которой работает эта формула, является рассеяние протонов на нейтронах. В этом случае существуют две длины рассеяния —  $a_0$  для спин-синглетного состояния и  $a_1$  для спин-триплетного состояния, причем первая намного больше второй.

Разложение по парциальным амплитудам также можно использовать для грубой оценки поведения сечений при высоких энергиях. Следует ожидать, что с уменьшением длины волны сечение ведет себя согласно законам классической физики: прицельное расстояние для частицы с импульсом  $k$  и угловым моментом  $l$  равно  $l/k$ , поэтому можно считать, что поток частиц с  $l \leq kR$  реагирует только с частью мишени в форме диска радиуса  $R$ . Этую картину можно интерпретировать как следующее условие на элементы  $S$ -матрицы:

$$S_{lsn, lsn}^j \rightarrow \begin{cases} 0, & l \ll kR_n, \\ 1, & l \gg kR_n, \end{cases} \quad (3.7.22)$$

где  $R_n$  — некоторая величина, аналогичная радиусу взаимодействия для канала  $n$ . При данном  $l \gg s$  имеются  $2s + 1$  значений  $j$ . Они все достаточно близки к  $l$ , чтобы можно было приближенно писать  $2j + 1 \approx 2l + 1$ , поэтому сумма в (3.7.12) по  $j$  и  $s$  просто дает множитель порядка

$$\sum_{js} (2j + 1) = (2l + 1) \sum_s (2s + 1) = (2l + 1)(2s_1 + 1)(2s_2 + 1).$$

Из (3.7.12) тогда получаем следующее выражение для сечения в пределе  $k \gg 1/R_n$ :

$$\sigma_{\text{полное}}(n; E) \rightarrow \frac{2\pi}{k^2} \sum_{l \leq kR_n} (2l + 1) \rightarrow 2\pi R_n^2. \quad (3.7.23)$$

Точно так же из (3.7.10) находим сечение упругого рассеяния:

$$\sigma(n \rightarrow n; E) \rightarrow \pi R_n^2. \quad (3.7.24)$$

Разница между (3.7.23) и (3.7.24) равна сечению неупругого рассеяния  $\pi R_n^2$ . Именно такой ответ следует ожидать в классике для сечения столкновений частиц с абсолютно непрозрачным диском радиуса  $R_n$  (немного удивительный ответ  $\pi R_n^2$  для сечения упругого рассеяния можно интерпретировать как результат дифракции на диске). Если предположить, что  $S_{lsn, lsn}^j$  в (3.7.22) является комплексной величиной только для прицельных расстояний  $l/k$ , лежащих внутри малого интервала ширины  $\Delta_n \ll R_n$ , окружающего  $l/k = R_n$ , и воспользоваться неравенством  $|\text{Im}(1 - S_{lsn, lsn}^j)| \leq 2$ , можно найти верхнюю границу для действительной части амплитуды рассеяния на нулевой угол:

$$|\text{Re } f(n; E)| \leq 2kR_n\Delta_n \ll |\text{Im } f(n; E)|. \quad (3.7.25)$$

Эксперимент подтверждает, что при высоких энергиях действительная часть амплитуды рассеяния на нулевой угол мала.

До сих пор ничего не было сказано о зависимости от энергии самой величины  $R_n$ . В качестве очень грубой оценки можно под  $R_n$  понимать расстояние, на котором множитель  $\exp(-\mu r)$  в потенциале Юкавы (1.2.74) становится порядка некоторой степени энергии  $E$ . В этом случае при  $E \rightarrow \infty$  величина  $R_n$  ведет себя как  $\log E$ , а сечение — как  $(\log E)^2$ . На основе очень общих предположений было строго показано, что полное сечение не может при  $E \rightarrow \infty$  расти быстрее, чем  $(\log E)^2$ , и результаты экспериментов показывают, что полное сечение протон-протонного рассеяния при высоких энергиях в самом деле ведет себя как  $(\log E)^2$ . Поэтому похоже, что та грубая картина рассеяния при высоких энергиях, которую мы нарисовали, имеет отношение к действительности.

### § 3.8. Резонансные состояния<sup>1)</sup>

Часто случается так, что участвующие в процессе частицы формируют некоторое промежуточное состояние, содержащее единственную нестабильную частицу  $R$ , которая в конце концов распадается, образуя частицы — составляющие конечного состояния. Если вероятность распада  $R$  мала, в сечении при энергии промежуточного состояния  $R$  появляется *резонансный пик*.

Как мы увидим, характер поведения сечений возле резонансного пика можно определить исключительно из условия унитарности. Это

---

<sup>1)</sup> Материал этого параграфа выходит за рамки основного содержания книги и может быть опущен при первом чтении.

очень удобно, поскольку существует целый ряд сильно отличающихся друг от друга механизмов образования резонансного состояния:

а) простейшим является случай, когда полный гамильтониан можно разделить на два члена — гамильтониан  $H_0 + V_s$  с “сильным взаимодействием”, для которого  $R$  является собственным состоянием, и слабое возмущение  $V_w$ , благодаря которому  $R$  распадается с образованием различных состояний, включая начальное и конечное состояния  $\alpha$  и  $\beta$  нашего процесса. Например, существует нейтральная частица  $Z_0$  с  $j = 1$  и массой 91 ГэВ, которая в отсутствие слабых взаимодействий была бы стабильной. Благодаря этим взаимодействиям возможен распад  $Z_0$  на электрон-позитронные пары, мюон-антимюонные пары и т.д., однако скорость распада  $Z_0$  много меньше, чем ее масса. В 1989 г.  $Z_0$ -бозон наблюдали как резонансное состояние<sup>2)</sup> в электрон-позитронных столкновениях  $e^+ + e^- \rightarrow Z^0 \rightarrow e^+ + e^-$ ,  $e^+ + e^- \rightarrow Z^0 \rightarrow \mu^+ + \mu^-$  и т.д. на коллайдерах CERN'a и Стэнфорда.

б) в некоторых случаях частицы оказываются долгоживущими потому, что существует потенциальный барьер, препятствующий их распаду на составляющие. Это имеет место, например, для ядерного альфа-распада: излучение альфа-частицы (ядра  $\text{He}^4$ ) некоторым ядром разрешено энергетическими соображениями, но сильное кулоновское отталкивание между альфа-частицей и ядром формирует вокруг дочернего ядра ограниченную барьером область, проникновение альфа-частицы в которую запрещено в рамках классики. Распад может осуществляться только благодаря квантовомеханическому подбарьерному проникновению, что обеспечивает экспоненциальное подавление его вероятности. Такое нестабильное состояние может быть обнаружено как резонанс при рассеянии альфа-частицы на дочернем ядре. Например, основное состояние ядра  $\text{Be}^8$  нестабильно относительно распада на две альфа-частицы и может быть обнаружено как резонанс в рассеянии  $\text{He}^4 - \text{He}^4$ . Кроме кулоновского барьера существует еще центробежный барьер, благодаря которому возрастает время жизни альфа-, бета- и гамма-нестабильных ядер с высокими спинами.

в) сложные системы могут оказаться нестабильными по статистическим причинам даже в том случае, когда нет ни потенциальных барьеров, ни нарушающих стабильность слабых взаимодействий. Например, возбужденное состояние некоторого тяжелого ядра может

---

<sup>2)</sup> Как можно видеть на этом примере, достаточно, чтобы резонансное состояние распадалось *относительно* медленно. Время жизни  $Z_0$  равно  $2,6 \times 10^{-25}$  сек, и этого мало даже для того, чтобы двигающаяся с почти световой скоростью частица  $Z_0$  пересекла атомное ядро. Важно лишь то, что скорость распада  $Z_0$  в 36 раз меньше характерной скорости  $\hbar/M_Z$  изменения ее волновой функции в покоящейся относительно  $Z_0$  системе отсчета.

распадаться только тогда, когда благодаря статистической флуктуации большая часть его энергии оказывается принадлежащей одному нейтрону. Такое состояние можно наблюдать как резонанс при расщеплении нейтронов на дочерних ядрах.

Эти механизмы образования долгоживущих состояний сильно отличаются друг от друга. Поэтому является большой удачей, что многие свойства резонансных состояний могут быть выведены только из унитарности, без обращения к деталям механизма, рождающего резонанс.

Прежде всего рассмотрим зависимость матричных элементов реакции от энергии в окрестности резонанса. Волновой пакет

$$\int d\alpha g(\alpha) \Psi_\alpha^+ \exp(-iE_\alpha t)$$

начальных состояний зависит от времени согласно (3.1.19):

$$\begin{aligned} \int d\alpha g(\alpha) \Psi_\alpha^+ e^{-iE_\alpha t} &= \\ &= \int d\alpha g(\alpha) \Phi_\alpha e^{-iE_\alpha t} + \int d\beta \Phi_\beta \int d\alpha \frac{e^{-iE_\alpha t} g(\alpha) T_{\beta\alpha}^+}{E_\alpha - E_\beta + i\epsilon}. \end{aligned}$$

Как упоминалось в § 3.1, лежащий в нижней половине комплексной плоскости  $E_\alpha$  полюс функции  $T_{\beta\alpha}^+$  будет давать вклад во второй член, который экспоненциально падает при  $t \rightarrow \infty$ . В частности, полюс при  $E_\alpha = E_R - i\Gamma/2$  обеспечивает появление в выражении для *амплитуды* члена, который ведет себя как  $\exp(-iE_R t - \Gamma t/2)$ . Он соответствует состоянию, *вероятность* зарегистрировать которое падает как  $\exp(-\Gamma t)$ . Можно сделать вывод, что долгоживущее состояние с энергией  $E_R$  и малой скоростью распада  $\Gamma$  обеспечивает появление в амплитуде рассеяния члена

$$T_{\beta\alpha}^+ \sim (E_\alpha - E_R + i\Gamma/2)^{-1} + \text{константа.} \quad (3.8.1)$$

Чтобы продвинуться дальше, будет удобно выбрать в качестве базиса обсуждавшиеся в предыдущем параграфе ортонормированные дискретные многочастичные состояния  $\Phi_{\mathbf{p}EN}$  (здесь  $\mathbf{p}$  и  $E$  — полный импульс и энергия, а  $N$  — некоторый индекс, принимающий дискретный, хотя и бесконечный, ряд значений). В таком базисе  $S$ -матрица выглядит следующим образом:

$$S_{\mathbf{p}'E'N',\mathbf{p}EN} = \delta^3(\mathbf{p}' - \mathbf{p}) \delta(E' - E) S_{N'N}(\mathbf{p}, E). \quad (3.8.2)$$

Вблизи резонанса следует ожидать, что амплитуда  $S(0, E) \equiv \mathcal{S}(E)$  в системе центра масс имеет вид

$$\mathcal{S}_{N'N}(E) \equiv S_{N'N}(0, E) = \mathcal{S}_0 N' N + \frac{\mathcal{R}_{N'N}}{E - E_R + i\Gamma/2}, \quad (3.8.3)$$

где  $\mathcal{S}_0$  и  $\mathcal{R}$  приблизительно постоянны по крайней мере на относительно малом интервале энергий  $|E - E_R| \leq \Gamma$ .

Соотношение унитарности для  $S$ -матрицы в данном базисе оказывается обычным матричным уравнением:

$$\mathcal{S}(E)^\dagger \mathcal{S}(E) = 1. \quad (3.8.4)$$

Применяя его к (3.8.3), можно получить, что нерезонансная фоновая  $S$ -матрица унитарна:

$$\mathcal{S}_0^\dagger \mathcal{S}_0 = 1, \quad (3.8.5)$$

а оставшаяся матрица  $\mathcal{R}$  удовлетворяет двум условиям:

$$\mathcal{S}_0^\dagger \mathcal{R} + \mathcal{R}^\dagger \mathcal{S}_0 = 0, \quad (3.8.6)$$

$$-\frac{i}{2} \Gamma \mathcal{S}_0^\dagger \mathcal{R} + \frac{i}{2} \Gamma \mathcal{R}^\dagger \mathcal{S}_0 + \mathcal{R}^\dagger \mathcal{R} = 0. \quad (3.8.7)$$

Их можно переписать в более ясном виде, если положить

$$\mathcal{R} \equiv -i\Gamma \mathcal{A} \mathcal{S}_0. \quad (3.8.8)$$

Условия унитарности для матрицы  $\mathcal{A}$  тогда выглядят следующим образом:

$$\mathcal{A}^\dagger = \mathcal{A}, \quad \mathcal{A}^2 = \mathcal{A}. \quad (3.8.9)$$

Любая подобная эрмитова идемпотентная матрица называется *матрицей проекции*. Ее всегда можно представить в виде суммы по диагональным ортонормированным векторам  $u^{(r)}$ :

$$\mathcal{A}_{N'N} = \sum_r u_{N'}^{(r)} u_N^{(r)*}, \quad \sum_N u_N^{(r)*} u_N^{(s)} = \delta_{rs}. \quad (3.8.10)$$

Таким образом, дискретная часть  $S$ -матрицы равна

$$\mathcal{S}_{N'N}(E) = \sum_{N''} \left[ \delta_{N'N''} - i \frac{\Gamma}{E - E_R + i\Gamma/2} \sum_r u_{N'}^{(r)} u_{N''}^{(r)*} \right] \mathcal{S}_{0N''N}. \quad (3.8.11)$$

Можно считать, что каждый член в сумме по  $r$  соответствует своему резонансному состоянию, но все эти состояния имеют одинаковые  $E_R$  и  $\Gamma$ .

Какое это имеет отношение к вероятностям и сечениям переходов? Будем игнорировать для простоты нерезонансное фоновое рассеяние, полагая  $\mathcal{S}_{0N'N}$  равной  $\delta_{N'N}$ ; к общему случаю мы вернемся немного позднее. Тогда из уравнения (3.8.11) для обсуждавшихся в прошлом параграфе двухчастичных дискретных состояний в системе центра масс следует, что

$$\begin{aligned} & \mathcal{S}_{j'\sigma'l's'n', j\sigma sln}(E) = \\ & = \delta_{j'j} \delta_{\sigma'\sigma} \delta_{l'l} \delta_{s's} \delta_{n'n} - i \frac{\Gamma}{E - E_R + i\Gamma/2} \sum_r u_{j'\sigma'l's'n'}^{(r)} u_{j\sigma lsn}^{(r)*}. \end{aligned} \quad (3.8.12)$$

Во всех случаях индекс  $r$  включает в себя  $\sigma_R$  —  $z$ -компоненту полного углового момента резонансного состояния; для резонансного состояния

с моментом  $j_R$  она пробегает  $2j_R + 1$  значений. Если нет дополнительного вырождения, в  $r$  содержится только  $\sigma_R$ , и

$$u_{j\sigma lsn}^{(\sigma_R)} = \delta_{j_R, j} \delta_{\sigma_R, \sigma} u_{lsn}, \quad (3.8.13)$$

где  $u_{lsn}$  — некоторый набор комплексных амплитуд, не зависящих от  $\sigma$  благодаря теореме Вигнера–Эккарта. Теперь из (3.8.12) и (3.7.7) можно найти выражение для амплитуды  $S^j$ :

$$S_{l's'n', lsn}^j(E) = \delta_{l'l} \delta_{s's} \delta_{n'n} - i \delta_{j,j_R} \frac{\Gamma}{E - E_R + i\Gamma/2} u_{l's'n'} u_{lsn}^*. \quad (3.8.14)$$

Кроме того, уравнение (3.8.10) приобретает вид

$$\sum_{lsn} |u_{lsn}|^2 + \dots = 1, \quad (3.8.15)$$

где точки обозначают положительные вклады от любых состояний, содержащих три или более частиц. Далее мы увидим, что величины  $|u_{lsn}|^2$  можно интерпретировать как отношения между амплитудами каналов распада резонансного состояния на возможные двухчастичные состояния.

Из (3.7.12) теперь получаем полное сечение всех реакций в канале  $n$ :

$$\sigma_{\text{полное}}(n; E) = \frac{\pi(2j_R + 1)}{k^2(2s_1 + 1)(2s_2 + 1)} \frac{\Gamma \Gamma_n}{(E - E_R)^2 + \gamma/4}, \quad (3.8.16)$$

где

$$\Gamma_n \equiv \Gamma \sum_{ls} |u_{lsn}|^2. \quad (3.8.17)$$

Это один из вариантов известной формулы Брейта–Вигнера [27]. Аналогично можно вычислить сечение перехода через резонансное состояние из некоторого начального двухчастичного канала  $n$  в конечный двухчастичный канал  $n'$ . Используя (3.8.14) и (3.7.10), получаем

$$\sigma(n \rightarrow n'; E) = \frac{\pi(2j_R + 1)}{k^2(2s_1 + 1)(2s_2 + 1)} \frac{\Gamma_n \Gamma_{n'}}{(E - E_R)^2 + \gamma/4}. \quad (3.8.18)$$

Из этой формулы следует, что вероятность распада резонансного состояния в любой из конечных двухчастичных каналов  $n'$  пропорциональна  $\Gamma_{n'}$ . Согласно (3.8.15) сумма  $\Gamma_n$  (включающая вклады от конечных состояний, содержащих три и более частиц) равна полной скорости распада  $\Gamma$ , поэтому можно заключить, что  $\Gamma_n$  равна скорости распада резонансного состояния в канал  $n$ .

Как можно видеть, в (3.8.16) и (3.8.18) при энергии, равной  $E_R$ , имеется резонансный пик с (взятой на половине от максимума) шириной, равной скорости распада  $\Gamma$  (величины  $\Gamma_n$  часто называют парциальными ширинами). Так как  $\Gamma_n \leq \Gamma$ , полное сечение при резонансной энергии ограничено величиной  $(2\pi/k)^2$ , равной квадрату длины

волны. Это ограничение выполняется даже в классической физике, где роль унитарности играет закон сохранения энергии: например, при взаимодействии звуковых волн с пузырьками в морской воде или при взаимодействии гравитационных волн с регистрирующей антенной (поскольку в этом случае для любой лабораторной массы потеря энергии за счет гравитационного излучения очень мала, соответствующее сечение значительно меньше квадрата длины волны [28] даже при резонансной энергии).

Часто оказывается так, что резонанс и регистрируется, точности измерений недостаточно, чтобы определить его ширину. В этом случае величиной, которая измеряется в эксперименте, является интеграл от сечения по резонансному пику. Для полного сечения (3.8.16) он равен

$$\int \sigma_{\text{полное}}(n; E) dE = \frac{2\pi^2(2j_R + 1)\Gamma_n}{k_R^2(2s_1 + 1)(2s_2 + 1)}. \quad (3.8.19)$$

В таких экспериментах могут быть найдены только парциальные ширины распада резонанса на частицы начального состояния, но не полная ширина или соотношения амплитуд каналов распада.

Этот формализм можно также применить к ситуации, когда резонансные состояния с определенной  $z$ -компонентой спина формируют мультиплет, связанный с какой-нибудь группой симметрии. Например, с той точностью, с которой соблюдается симметрия по отношению к вращениям в изотопическом пространстве, можно говорить, что для несущего полный изоспин  $T_R$  резонанса индекс  $r$ , нумерующий резонансные состояния, включает в себя, помимо  $z$ -компоненты углового момента  $\sigma_R$ , третью компоненту изоспина  $t_R$ , пробегающую значения  $-T_R, -T_R + 1, \dots, T_R$ . В этом случае ответы для полного и парциальных сечений не меняются, поскольку каждый двухчастичный канал  $n$  несет определенные значения  $t_1, t_2$ ,  $z$ -компоненту изоспинов частиц и, следовательно, имеет ненулевой матричный элемент только с резонансным состоянием, для которого  $t_R = t_1 + t_2$ . Парциальные ширины могут зависеть от  $t_1$  и  $t_2$  только через множители  $C_{t_1, t_2}(T_R, t_R; t_1, t_2)^2$ .

Существование резонансного состояния проявляется в характерном поведении фазовых сдвигов. Возвращаясь к общему выражению (3.8.11) (и по-прежнему полагая  $\mathcal{S}_0 = 1$ ), мы видим, что для каждого резонансного состояния  $r$  существует собственный вектор  $u_N^{(r)}$  матрицы  $\mathcal{S}_{N'N}(E)$ , соответствующий собственному значению

$$\exp(2i\delta^{(r)}(E)) = 1 - i \frac{\Gamma}{E - E_R + i\Gamma/2},$$

или, другими словами,

$$\operatorname{tg} \delta^{(r)}(E) = -\frac{\Gamma/2}{E - E_R}. \quad (3.8.20)$$

Если рассмотреть окружающую резонанс область энергий с шириной  $\Gamma$ , можно видеть, что “собственная фаза”  $\delta^{(r)}(E)$  испытывает при пересечении резонансной энергии скачок от значения  $\nu\pi$  (где  $\nu$  — положительное или отрицательное целое число) до  $(\nu+1)\pi$ . Однако чтобы получить из этого утверждения какую-нибудь информацию о сечениях реакций, необходимо знать собственные векторы  $u_N^{(r)}$ , которые, вообще говоря, имеют компоненты, соответствующие произвольному числу частиц с различными импульсами, спинами и типами.

Эти наблюдения оказываются гораздо более полезными, когда запрещены (обычно благодаря какому-нибудь закону сохранения) переходы из канала  $N$  в любой другой канал. В этом случае нетрудно учесть вклад в (3.8.11) нерезонансной фоновой матрицы рассеяния  $\mathcal{S}_0$ . Для того чтобы при некотором  $N$  и любом  $N' \neq N$  матричный элемент  $\mathcal{S}_{N'N}$  обращался в нуль, необходимо, чтобы то же самое было справедливо для  $\mathcal{S}_{0N'N}$  и для  $u_{N'}^{(r)}$  с  $r$ , таким что  $u_N^{(r)} \neq 0$ . Из условия унитарности (3.8.5) тогда следует, что для этого  $N$

$$\mathcal{S}_{0N'N} = \exp(2i\delta_{0N})\delta_{N'N},$$

а из уравнения (3.8.10) вытекает, что

$$u_N^{(r)*} u_N^{(s)} = \delta_{rs},$$

и в (3.8.10) имеется единственный член  $r$ , для которого  $u_N^{(r)} \neq 0$ . В этом случае из (3.8.11) следует

$$\mathcal{S}_{N'N}(E) = \delta_{N'N} \left[ 1 - \frac{i\gamma}{E - E_R + i\Gamma/2} \right] \exp(2i\delta_{0N}) \equiv \delta_{N'N} \exp(2i\delta_N(E)),$$

и полный фазовый сдвиг равен

$$\delta_N(E) = \sigma_{0N} - \arctg \left( \frac{\Gamma/2}{E - E_R} \right). \quad (3.8.21)$$

Как легко видеть, при пересечении резонансной энергии  $E_R$  фазовый сдвиг  $\delta_N(E)$  испытывает скачок от значения  $\delta_{0N}$  ниже резонанса к значению  $\delta_{0N} + \pi$  выше резонанса. Эти предположения оказываются справедливыми для различных процессов с начальным состоянием, содержащим две частицы, таких, как обсуждавшиеся в предыдущем параграфе пион-пионное и пион-нуклонное рассеяния при энергиях ниже порога рождения дополнительных пионов, с индексом  $N$ , содержащим полный и орбитальный угловой моменты  $j, l$  (для пион-пионного рассеяния  $j = l$ ),  $z$ -компоненту полного углового момента  $\sigma$ , а также изоспин  $T$  и его  $z$ -компоненту  $t$ . Из теоремы Вигнера-Эккарта следует, что фазовые сдвиги зависят от  $j, l$  и  $T$ , но не от  $t$  или  $\sigma$ . В этих каналах лежат хорошо известные резонансы: для пион-пионного рассеяния при 770 МэВ существует резонанс, получивший название  $\rho$ -частицы, с  $j = l = 1$ ,  $T = 1$  и  $\Gamma = 150$  МэВ, а для пион-

нуклонного рассеяния — резонанс  $\Delta$  при энергии 1232 МэВ с  $j = 3/2$ ,  $l = 1$ ,  $T = 3/2$  и  $\Gamma = 110\text{--}120$  МэВ.

Из (3.7.12) или (3.7.18) следует, что полное сечение достигает пика, когда резонансный фазовый сдвиг проходит через  $\pi/2$  (или  $\pi n/2$ , где  $n$  — нечетное целое число). Обычно нерезонансные фазовые сдвиги довольно малы, поэтому, как было показано раньше,  $\sigma_{\text{полное}}$  достигает пика, когда  $\delta_l$  проходит через  $\pi/2$ , при близкой к  $E_R$  энергии. Однако иногда случается так, что нерезонансный фоновый фазовый сдвиг  $\delta_{0N}$  оказывается приближенно равным  $\pi/2$ . В этом случае, когда фазовый сдвиг достигает при  $E_R$  значения  $\pi$ , в сечении появляется узкий провал, связанный с деструктивной интерференцией между резонансом и фоновой нерезонансной амплитудой. Такие провалы впервые наблюдались в 1922 г. Размзаузером и Таунсендом [29] в опытах по рассеянию электронов на атомах инертного газа.

## Задачи

**1.** Рассмотрим теорию с сепарабельным взаимодействием, имеющим вид

$$(\Phi_\beta, V \Phi_\alpha) = g u_\beta u_\alpha^*,$$

где  $g$  — действительная константа взаимодействия, а  $u_\alpha$  — набор комплексных величин, подчиняющихся условия

$$\sum_\alpha |u_\alpha|^2 = 1.$$

Воспользовавшись уравнением Липмана–Швингера (3.1.16), найдите точные решения для начального и конечного состояний, а также  $S$ -матрицу.

**2.** Предположим, что в  $e^+ - e^-$ -рассеянии при энергии 150 ГэВ обнаружено резонансное состояние, причем сечение (в системе центра масс, усредненное по спинам начального состояния и просуммированное по спинам конечного состояния) в пике резонанса равно  $10^{-34}$  см $^2$ . Чему равно отношение амплитуд каналов распада для  $R \rightarrow e^- + e^+$ ? Чему равно полное сечение рассеяния  $e^+ - e^-$  в пике резонанса? При ответе на любой из этих вопросов можно игнорировать фоновое нерезонансное рассеяние.

**3.** Выразите через кинематические переменные и матричный элемент  $M_{\beta\alpha}$  дифференциальное сечение рассеяния для задачи двух тел в лабораторной системе отсчета, где одна из частиц исходно покоятся. Этот результат нужно вывести точно, без использования полученного в этой главе выражения для дифференциального сечения в системе центра масс.

**4.** Выведите разложение (3.5.8) инвариантной теории возмущений непосредственно из разложения старомодной теории возмущений (3.5.3).

5. Определим состояния “стоячей волны”  $\Psi_\alpha^0$  через модифицированное уравнение Липпмана–Швингера следующим образом:

$$\Psi_\alpha^0 = \Phi_\alpha + \frac{\mathcal{P}}{E_\alpha - H_0} V \Psi_\alpha^0.$$

Покажите, что матрица

$$K_{\beta\alpha} \equiv \pi\delta(E_\beta - E_\alpha)(\Phi_\beta, V\Psi_\alpha^0)$$

эрмитова. Найдите, каким образом можно выразить через нее  $S$ -матрицу.

6. Выразите дифференциальные сечения  $\pi^{+}-p$ - и  $\pi^{-}-p$ -рассеяния через фазовые сдвиги для состояний с определенными полным угловым моментом, четностью и изоспином.

7. Покажите, что определенные согласно (3.7.5) состояния  $\Phi_{E\mathbf{p}\sigma sn}$  правильно нормированы и их скалярные произведения заданы соотношением (3.7.6).

## Литература

1. Более детально это описано в *Goldberger M.L. and Watson K.W. Collision Theory*. John Wiley & Sons, N.Y., 1964; *Newton R.G. Scattering Theory of Waves and Particles*, 2nd edn. Springer-Verlag, N.Y., 1982. [Рус. пер.: Гольдбергер М. и Уотсон К. Теория столкновений.—М.: Мир, 1967; Ньютон Р. Теория рассеяния волн и частиц.—М.: Мир, 1969.]
- 1a. *Lippmann B. and Schwinger J.* // Phys. Rev. **79**, 469 (1950).
2. *Wheeler J.A.* // Phys. Rev. **52**, 1107 (1937); *Heisenberg W.* // Z. Phys. **120**, 513, 673 (1943).
3. *Born M.* // Z. Phys. **37**, 863 (1926); **38**, 803 (1926).
4. *Møller C.* // Kgl. Danske Videnskab. Mat. Fys. Medd. **23**, No. 1 (1945); **22**, No. 19 (1946).
5. *Rochester G.S. and Butler C.C.* // Nature. **160**, 855 (1947). В качестве исторического обзора можно рекомендовать *Rochester G.D.* // *B Pions to Quarks – Particle Physics in the 1950s*, ed. by L.M. Brown, M. Dresden and L. Hoddeson. Cambridge University Press, Cambridge, UK, 1989.
6. *Breit G., Condon E.U. and Present R.S.* // Phys. Rev. **50**, 825 (1936); *Cassen B. and Condon E.U.* // Phys. Rev. **50**, 846 (1936); *Breit G. and Feenberg E.* // Phys. Rev. **50**, 850 (1936).
7. *Tuve M.A., Heydenberg N. and Hafstad L.R.* // Phys. Rev. **50**, 806 (1936).

8. *Gell-Mann M.* // Cal. Tech. Synchrotron Laboratory Report CTSL-20 (1961); *Phys. Rev.* **125**, 1067 (1962); *Ne'eman Y.* // *Nucl. Phys.* **26**, 222 (1961).
9. См. *Edmonds A.R.* *Angular Momentum in Quantum Mechanics*. Princeton University Press, Princeton, 1957. Chap. 3 (где  $C_{j_1 j_2}(j m; m_1 m_2)$  обозначается как  $(j_1 j_2 j m | j_1 m_1 j_2 m_2)$ ); *Rose M.E.* *Elementary Theory of Angular Momentum*. John Wiley & Sons, N.Y., 1957. Chap. III (где  $C_{j_1 j_2}(j m; m_1 m_2)$  обозначается как  $C(j_1 j_2 j; m_1 m_2 m)$ ).
10. *Feinberg G.* and *Weinberg S.* // *Nuovo Cimento. Serie X*, **14**, 571 (1959).
11. *Chinowsky W.* and *Steinberger J.* // *Phys. Rev.* **95**, 1561 (1954); см. также *Ferretti B.* *Report of an International Conference on Fundamental Particles and Low Temperatures*, Cambridge, 1946. The Physical Society, London, 1947.
12. *Lee T.D.* and *Yang C.N.* // *Phys. Rev.* **104**, 254 (1956).
13. *Wu C.S.* et al. // *Phys. Rev.* **88**, 1163 (1952).
14. *Garwin R.*, *Lederman L.* and *Weinrich M.* // *Phys. Rev.* **105**, 1415 (1957); *Friedman J.I.* and *Telegdi V.L.* // *Phys. Rev.* **105**, 1681 (1957).
15. *Watson K.M.* // *Phys. Rev.* **88**, 1163 (1952).
16. *Gell-Mann M.* and *Pais A.* // *Phys. Rev.* **97**, 1387 (1955); см. также *Pais A.* and *Piccioni O.* // *Phys. Rev.* **100**, 1487 (1955).
17. *Christenson J.H.*, *Cronin J.W.*, *Fitch V.L.* and *Turlay R.* // *Phys. Rev. Letters*. **13**, 138 (1964).
18. *Schubert K.R.* et al. // *Phys. Lett.* **31B**, 662 (1970). В этой статье данные по нейтральным каонам анализируются без предположения о **CPT**-инвариантности. Найдено, что вклад в амплитуду, сохраняющий **CPT** и нарушающий **T**, имеет действительную и мнимую части в пределах пяти стандартных отклонений от нуля, а вклад, сохраняющий **T** и нарушающий **CPT**, — в пределах одного стандартного отклонения от нуля.
19. *Dalitz R.H.* // *Phil. Mag.* **44**, 1068 (1953); см. также *Fabri E.* // *Nuovo Cimento*. **11**, 479 (1954).
20. *Dyson F.J.* // *Phys. Rev.* **75**, 486, 1736 (1949).
21. См. *Schiff L.I.* *Quantum Mechanics*, 1st edn. McGraw-Hill, N.Y., 1949. Section 19. [Рус. пер.: *Шифф Л.* Квантовая механика.—М.: Изд-во иностранной литературы, 1959. Параграф 19.]
22. Впервые это было доказано в рамках классической электродинамики. См. *Kramers H.A.* *Atti Congr. Intern. Fisici*, Como, 1927;

- перепечатано в *Kramers H.A. Collected Scientific Papers*. North-Holland, Amsterdam, 1956. Доказательство в квантовой механике см. в *Feenberg E.* // Phys. Rev. **40**, 40 (1932); *Bohr N., Peierls R.E. and Placzek G.* // Nature. **144**, 200 (1939).
23. Общая версия этого утверждения была представлена в поздних 1960-х в неопубликованной работе *Yang C.N. and Yang C.P.* См. также *Aharony A.* // In Modern Developments in Thermodynamics. Wiley, N.Y., 1973. С. 95–114 и ссылки в этой работе.
24. См. *Edmonds A.R. Angular Momentum in Quantum Mechanics*. Princeton University Press, Princeton, 1957. Chapter 2; *Rose M.E. Elementary Theory of Angular Momentum*. John Wiley & Sons, N.Y., 1957. Appendix III; *Landau L.D. and Lifshitz E.M. Quantum Mechanics — Non Relativistic Theory*, 3rd edn. Pergamon Press, Oxford, 1977. Section 28. [Ландau Л., Лифшиц Е. Квантовая механика. Нерелятивистская теория.—М.: Наука, 1974. Параграф 28.]
25. *Wigner E.P. Gruppentheorie*. Friedrich Vieweg und Sohn, Braunschweig, 1931; *Eckart C.* // Rev. Mod. Phys. **2**, 305 (1930). [*Pyc. nep.*: Вигнер Е. Теория групп и ее приложения к квантовомеханической теории атомных спектров.—М.: Изд-во иностранной литературы, 1961.]
26. *Froissart M.* // Phys. Rev. **123**, 1053 (1961).
27. *Breit G. and Wigner E.P.* // Phys. Rev. **49**, 519 (1936).
28. См. *Weinberg S. Gravitation and Cosmology*. Wiley, N.Y., 1972. Section 10.7. [*Pyc. nep.*: Вейнберг С. Гравитация и космология.—М.: Мир, 1975. Параграф 10.7.]
29. *Kollath R.* // Phys. Zeit. **31**, 985 (1931).

## Г л а в а 4

# ПРИНЦИП КЛАСТЕРНОЙ РАЗЛОЖИМОСТИ

До сих пор мы почти ничего не могли сказать про структуру гамильтониана  $H$ . Этот оператор можно определить, задав все его матричные элементы, соответствующие переходам между состояниями с произвольным числом частиц. Как мы покажем ниже, любой такой оператор можно представить в виде функции некоторых других операторов, рождающих и уничтожающих частицы. Мы видели в гл. 1, что операторы рождения и уничтожения впервые были использованы на ранних этапах развития квантовой механики для канонического квантования электромагнитного и ряда других полей. Они оказались очень естественной частью формализма тех теорий, в рамках которых могут рождаться и уничтожаться как массивные частицы, так и фотоны. Одним из первых примеров использования этих операторов была созданная в начале 30-х годов теория бета-распада Ферми.

Тем не менее имеется более веская причина, по которой гамильтониан должен строиться из операторов рождения и уничтожения. Она никак не связана с возможностью рождения и уничтожения частиц на практике. Огромное достоинство рассматриваемого формализма заключается в том, что если гамильтониан выражен через сумму произведений операторов рождения и уничтожения с несингулярными коэффициентами, то  $S$ -матрица будет автоматически удовлетворять важному физическому принципу — принципу кластерной разложимости [1]. Этот принцип утверждает, что результаты экспериментов, разделенных достаточно большим расстоянием, никак не коррелированы друг с другом. Именно по этой причине формализм операторов рождения и уничтожения широко применяется в нерелятивистской квантовой статистической механике, где число частиц, как правило, фиксировано. Из принципа кластерной разложимости следует, что релятивистская квантовая теория обязательно должна быть теорией поля. Предпринималось множество попыток построения лоренц-инвариантной теории, не являющейся локальной теорией поля. В принципе, неполевые теории, приводящие к лоренц-инвариантной двухчастичной  $S$ -матрице [2], возможны, однако все попытки сталкивались с трудностями при рассмотрении систем, состоящих из трех и более частиц: либо трехчастичная  $S$ -матрица оказывается не лоренц-инвариантной, либо нарушается принцип кластерной разложимости.

В этой главе мы сначала изучим базис состояний с произвольным числом бозонов и фермионов, а затем дадим определение операторов

рождения и уничтожения. Кроме того, мы покажем, как, используя введенную технику, можно построить гамильтонианы, приводящие к  $S$ -матрицам, удовлетворяющим условию кластерной разложимости.

## § 4.1. Бозоны и фермионы

В гильбертовом пространстве физических состояний можно выбрать базис, состоящий из состояний, содержащих 0, 1, 2, … свободных частиц. Это могут быть состояния свободных частиц, “in” или “out” состояния. Для определенности мы далее будем рассматривать состояния свободных частиц общего вида

$$\Phi_{\mathbf{p}_1 \sigma_1 n_1, \mathbf{p}_2 \sigma_2 n_2, \dots},$$

причем все результаты одинаково справедливы и для “in”, и для “out” состояний. Как обычно, буквой  $\sigma$  обозначаются  $z$ -компоненты спина (или спиральности — для безмассовых частиц), а индекс  $n$  маркирует различные сорта частиц.

Теперь мы должны рассмотреть вопрос, опущенный нами в гл. 3, а именно вопрос о свойствах симметрии этих состояний. Насколько мы знаем, все частицы являются либо фермионами, либо бозонами. Разница между ними следующая: состояние не меняется при перестановке двух одинаковых бозонов и меняет знак при перестановке двух одинаковых фермионов, т.е.

$$\Phi_{\dots \mathbf{p} \sigma n \dots \mathbf{p}' \sigma' n' \dots} = \pm \Phi_{\dots \mathbf{p}' \sigma' n \dots \mathbf{p} \sigma n \dots}. \quad (4.1.1)$$

Здесь верхний индекс соответствует бозонам, нижний — фермионам, а точками обозначены остальные частицы, образующие рассматриваемое состояние. (Это свойство можно переформулировать как условие на “волновые функции”, которые являются коэффициентами при векторах, принадлежащих многочастичному базису в пространстве физически допустимых векторов состояния.) Об этих двух случаях часто говорят, как о “статистиках” Бозе и Ферми. В следующей главе мы увидим, что для частиц с целым и полуцелым спином Бозе и Ферми статистики соответственно оказываются единственными возможными, но на данном этапе нам это не понадобится. В этом параграфе мы приведем нестрогое доказательство того, что все частицы должны быть либо бозонами, либо фермионами, а затем получим нормировочные условия для состояний, содержащих много бозонов или много фермионов.

Сначала заметим, что если две частицы с импульсами и спинами  $\mathbf{p}$ ,  $\sigma$  и  $\mathbf{p}'$ ,  $\sigma'$  принадлежат одному и тому же типу  $n$ , тогда векторы состояний  $\Phi_{\dots \mathbf{p} \sigma n \dots \mathbf{p}' \sigma' n' \dots}$  и  $\Phi_{\dots \mathbf{p}' \sigma' n' \dots \mathbf{p} \sigma n \dots}$  обозначают одно и тоже физическое состояние. В противном случае частицы не были бы тождественными и различались бы по расположению их значков в записи

вектора состояния. Поскольку векторы состояний физически неразличимы, они должны принадлежать одному и тому же личу, т.е. должно выполняться равенство

$$\Phi_{\dots \mathbf{p}\sigma n\dots \mathbf{p}'\sigma'n\dots} = \alpha_n \Phi_{\dots \mathbf{p}'\sigma'n\dots \mathbf{p}\sigma n}, \quad (4.1.2)$$

где  $\alpha_n$  — комплексное число, равное по модулю единице. Мы можем рассматривать эту формулу как определение тождественных частиц.

Сейчас самое главное — установить, от чего может зависеть фаза  $\alpha_n$ ? Если она зависит только от типа частицы  $n$ , то тогда, меняя две частицы в выражении (4.1.2) местами еще раз, мы получим

$$\Phi_{\dots \mathbf{p}\sigma n\dots \mathbf{p}'\sigma'n\dots} = \alpha_n^2 \Phi_{\dots \mathbf{p}\sigma n\dots \mathbf{p}'\sigma'n}.$$

Отсюда находим, что  $\alpha_n^2 = 1$ . Это приводит нас к единственным возможным законам преобразования (4.1.1).

От чего еще может зависеть фаза  $\alpha_n$ ? Она могла бы зависеть от числа и типа остальных частиц в рассматриваемом состоянии (обозначенных точками в (4.1.1) и (4.1.2)). Однако это равносильно тому, что симметрия вектора состояний на Земле зависит от частиц, находящихся где-то в другом месте Вселенной. Это та самая ситуация, которая противоречит принципу кластерной разложимости, обсуждавшему нами в этой главе. Кроме того, фаза  $\alpha_n$  не может нетривиальным образом зависеть от спинов переставляемых частиц, поскольку в противном случае такие фазы должны принадлежать представлению группы трехмерных вращений, в то время как нетривиальных одномерных представлений (т.е. с помощью фазы) трехмерной группы вращений не существует. Фаза  $\alpha_n$ , вероятно, могла бы зависеть от импульсов переставляемых частиц, но из лоренц-инвариантности в этом случае следовало бы, что фаза  $\alpha_n$  зависит только от скаляра  $p_1^\mu p_2^\mu$ , который, очевидно, симметричен относительно перестановки частиц 1 и 2. Тем самым такая зависимость не повлияла бы на общий ход рассуждений, приводящих к равенству  $\alpha_n^2 = 1$ .

Логический недостаток приведенных выше аргументов (хотя наши обозначения и затушевывают это) состоит в том, что состояния  $\Phi_{\mathbf{p}_1\sigma_1 n, \mathbf{p}_2\sigma_2 n, \dots}$  могут содержать фазовый множитель, зависящий от траектории в импульсном пространстве, двигаясь по которой частицы приобретают импульсы  $\mathbf{p}_1$ ,  $\mathbf{p}_2$  и т.д. В этом случае повторная перестановка частиц может так изменить фазу состояния, что квадрат  $\alpha_n^2$  оказывается отличным от единицы. Мы увидим в § 9.7, что это может иметь место в двумерном пространстве, но не в пространстве трех и большего числа измерений.

Что же происходит в случае перестановки частиц различного типа? Мы можем избежать необходимости отвечать на этот вопрос, установив следующий порядок импульсов в индексе вектора состояний: сначала указываются импульсы и спиральности фотонов, затем импульсы и  $z$ -компоненты спинов электронов и т.д., пока мы не переберем всю таблицу элементарных частиц. Есть другой вариант: мы раз-

решаем произвольный порядок индексов и *постулируем*, что вектор состояния с произвольным порядком индексов, равен произведению вектора с индексами, упорядоченными некоторым условленным образом, на фазовый множитель. Зависимость последнего от перестановки частиц различных типов может быть какой угодно. Чтобы работать с симметриями, связывающими частицы разных типов (например изоспиновой инвариантностью), удобно принять следующее соглашение, обобщающее выражение (4.1.1): вектор состояния симметричен относительно перестановок любых двух бозонов, любого бозона с любым фермионом, а также антисимметричен относительно перестановок любых двух фермионов, независимо от того, являются частицы тождественными или нет<sup>1)</sup>.

Нормировка многочастичных состояний должна быть согласована с условиями симметрии. Для краткости обозначим через  $q$  все квантовые числа одной частицы: импульс  $\mathbf{p}$ ,  $z$ -проекцию спина  $\sigma$  (или спиральность в случае безмассовых частиц) и тип частицы  $n$ .  $N$ -частичное состояние в этих обозначениях имеет вид  $\Phi_{q_1 \dots q_N}$  ( $N = 0$  для вакуумного состояния  $\Phi_0$ ). В случаях  $N = 0$  и  $N = 1$  вопроса о симметрии не возникает:

$$(\Phi_0, \Phi_0) = 1 \quad (4.1.3)$$

и

$$(\Phi_{q'}, \Phi_q) = \delta(q' - q), \quad (4.1.4)$$

где  $\delta(q' - q)$  — произведение дельта-функций и символов Кронекера для всех квантовых чисел частицы,

$$\delta(q' - q) \equiv \delta^3(\mathbf{p}' - \mathbf{p})\delta_{\sigma'\sigma}\delta_{n'n}. \quad (4.1.5)$$

С другой стороны, состояния с  $N = 2$ ,  $\Phi_{q'_1 q'_2}$  и  $\Phi_{q'_2 q'_1}$ , физически эквивалентны, т.е. мы должны положить

$$(\Phi_{q'_1 q'_2}, \Phi_{q_1 q_2}) = \delta(q'_1 - q_1)\delta(q'_2 - q_2) \pm \delta(q'_2 - q_1)\delta(q'_1 - q_2). \quad (4.1.6)$$

Знак “−” используется в случае, когда обе частицы — фермионы, а знак “+” — во всех остальных. Эта формула, очевидно, согласуется со свойствами симметрии, упомянутыми выше. В общем случае

$$(\Phi_{q'_1 q'_2 \dots q'_M}, \Phi_{q_1 q_2 \dots q_N}) = \delta_{NM} \sum_{\mathcal{P}} \delta_{\mathcal{P}} \prod_i \delta(q_i - q'_{\mathcal{P}i}). \quad (4.1.7)$$

Здесь сумма берется по всем перестановкам  $\mathcal{P}$  целых чисел  $1, 2, \dots, N$ .

---

<sup>1)</sup> На самом деле симметрия и антисимметрия вектора состояния относительно перестановок частиц одного типа, но с разными спиральностями или  $z$ -проекциями спина, есть вопрос соглашения, поскольку мы с самого начала могли бы записать импульсы всех фотонов со спиральностью  $+1$ , затем импульсы всех фотонов со спиральностью  $-1$ , затем импульсы всех электронов с проекцией спина  $+1/2$  и т.д. Однако чтобы было проще пользоваться вращательной симметрией, мы *условимся*, что вектор состояния симметричен относительно перестановок двух частиц с разной спиральностью или проекцией спина, если эти частицы являются тождественными бозонами, и антисимметричен — если тождественными фермионами.

Например, в первом слагаемом в (4.1.6)  $\mathcal{P}$  — тождественная перестановка ( $\mathcal{P}1 = 1$ ,  $\mathcal{P}2 = 2$ ), в то время как во втором слагаемом  $\mathcal{P}$  задается формулами  $\mathcal{P}1 = 2$ ,  $\mathcal{P}2 = 1$ . Кроме того, множитель  $\delta_{\mathcal{P}}$  равен  $-1$ , если оператор  $\mathcal{P}$  содержит нечетное число перестановок фермионов, и  $+1$  — во всех остальных случаях. Легко видеть, что выражение (4.1.7) обладает желаемыми симметрийными и антисимметрийными свойствами при перестановках  $q_i$  и  $q'_j$ .

## § 4.2. Операторы рождения и уничтожения

Операторы рождения и уничтожения задаются своим действием на нормированные многочастичные состояния, рассмотренные в предыдущем параграфе. *Оператор рождения*  $a^\dagger(q)$  (или, расписывая аргумент в скобках,  $a^\dagger(\mathbf{p}, \sigma, n)$ ) есть, по определению, оператор, рождающий частицу с набором квантовых чисел  $q$ , причем соответствующий индекс ставится перед всеми остальными:

$$a^\dagger(q)\Phi_{q_1 q_2 \dots q_N} \equiv \Phi_{qq_1 q_2 \dots q_N}. \quad (4.2.1)$$

В частности,  $N$ -частичное состояние можно получить из вакуумного состояния с помощью  $N$  операторов рождения:

$$a^\dagger(q_1)a^\dagger(q_2)\dots a^\dagger(q_N)\Phi_0 = \Phi_{q_1\dots q_N}. \quad (4.2.2)$$

Оператор рождения принято обозначать символом  $a^\dagger(q)$ . Оператор же, сопряженный ему (обозначаемый  $a(q)$ ), можно тогда вычислить, используя соотношение (4.1.7). Как мы сейчас покажем, оператор  $a(q)$  уничтожает одну частицу, входящую в состояние, на которое он действует. По этой причине  $a(q)$  называется *оператором уничтожения*. В частности, если частицы  $qq_1\dots q_n$  либо все являются бозонами, либо все являются фермионами, справедливо следующее соотношение:

$$a(q)\Phi_{q_1 q_2 \dots q_N} = \sum_{r=1}^N (\pm)^{r+1} \delta(q - q_r) \Phi_{q_1 \dots q_{r-1} q_{r+1} \dots q_N}, \quad (4.2.3)$$

где  $+1$  соответствует бозонам, а  $-1$  — фермионам. (Доказать это можно следующим образом. Мы хотим вычислить скалярное произведение состояния  $a(q)\Phi_{q_1 q_2 \dots q_N}$  и произвольного вектора  $\Phi_{q'_1 \dots q'_M}$ . Используя (4.2.1), получим

$$(\Phi_{q'_1 \dots q'_M}, a(q)\Phi_{q_1 \dots q_N}) \equiv (a^\dagger(q)\Phi_{q'_1 \dots q'_M}, \Phi_{q_1 \dots q_N}) = (\Phi_{qq'_1 \dots q'_M}, \Phi_{q_1 \dots q_N}).$$

Теперь воспользуемся равенством (4.1.7). Суммирование по всем перестановкам  $\mathcal{P}$  чисел  $1, 2, \dots, N$  можно свести к суммированию по целому числу  $r$ , переводимому перестановкой  $\mathcal{P}$  в единицу (т.е.  $\mathcal{P}r = 1$ ), и по отражениям  $\overline{\mathcal{P}}$  оставшихся чисел  $1, \dots, r-1, r+1, \dots, N$  в  $1, \dots, N-1$ . Справедливо равенство

$$\delta_{\mathcal{P}} = (\pm)^{r-1} \delta_{\overline{\mathcal{P}}},$$

где верхний знак соответствует бозонам, а нижний — фермионам. Следовательно, используя (4.1.7) дважды, получим

$$\begin{aligned} (\Phi_{q'_1 \dots q'_M}, a(q)\Phi_{q_1 \dots q_N}) &= \delta_{N,M+1} \times \\ &\times \sum_{r=1}^N \sum_{\mathcal{P}} (\pm)^{r-1} \delta_{\mathcal{P}} \delta(q - q_r) \prod_{i=1}^M \delta(q'_i - q_{\mathcal{P}i}) = \\ &= \delta_{N,M+1} \sum_{r=1}^N (\pm)^{r-1} \delta(q - q_r) (\Phi_{q'_1 \dots q'_M}, \Phi_{q_1 \dots q_{r-1} q_{r+1} \dots q_N}). \end{aligned}$$

Левая и правая части (4.2.3) имеют одинаковые матричные элементы со всеми состояниями  $\Phi_{q'_1 \dots q'_M}$  и, следовательно, равны. Наше утверждение доказано.) Следует отметить, что оператор  $a(q)$  уничтожает вакуум (как для бозонов, так и для фермионов):

$$a(q)\Phi_0 = 0. \quad (4.2.4)$$

Определенные выше операторы рождения и уничтожения удовлетворяют важным коммутационным и антикоммутационным соотношениям. Применяя оператор  $a(q')$  к (4.2.1) и используя (4.2.3), получим

$$\begin{aligned} a(q')a^\dagger(q)\Phi_{q_1 \dots q_N} &= \delta(q' - q)\Phi_{q_1 \dots q_N} + \\ &+ \sum_{r=1}^N (\pm)^{r+2} \delta(q' - q_r) \Phi_{q_{q_1 \dots q_{r-1} q_{r+1} \dots q_N}}. \end{aligned}$$

(Знак  $(\pm)^{r+2}$  во втором члене связан с тем, что  $q_r$  находится на  $(r+1)$ -ом месте в индексе  $\Phi_{q_{q_1 \dots q_N}}$ .) С другой стороны, применение оператора  $a^\dagger(q)$  к (4.2.3) дает

$$a^\dagger(q)a(q')\Phi_{q_1 \dots q_N} = \sum_{r=1}^N (\pm)^{r+1} \delta(q' - q_r) \Phi_{q_{q_1 \dots q_{r-1} q_{r+1} \dots q_N}}.$$

Вычитая (или прибавляя), находим

$$[a(q')a^\dagger(q) \mp a^\dagger(q)a(q')]\Phi_{q_1 \dots q_N} = \delta(q' - q)\Phi_{q_1 \dots q_N}.$$

Это справедливо для любых состояний  $\Phi_{q_1 \dots q_N}$  (и, как легко показать, верно для состояний, содержащих как бозоны, так и фермионы). Поэтому выполняется операторное соотношение

$$a(q')a^\dagger(q) \mp a^\dagger(q)a(q') = \delta(q' - q). \quad (4.2.5)$$

Кроме того, из (4.2.2) получаем

$$a^\dagger(q')a^\dagger(q) \mp a^\dagger(q)a(q') = 0, \quad (4.2.6)$$

а также

$$a(q')a(q) \mp a(q)a(q') = 0. \quad (4.2.7)$$

Как всегда, верхний знак соответствует бозонам, нижний — фермионам. Как мы условились в предыдущем параграфе, операторы рождения и/или уничтожения частиц двух разных типов коммутируют,

если одна из частиц является бозоном, и антикоммутируют, если обе частицы — фермионы.

Приведенные выше рассуждения могли бы быть проведены в обратном порядке (во многих книгах именно так и делается). Это означает, что мы могли бы начать с соотношений коммутации (4.2.5)–(4.2.7), выведенных с помощью процедуры канонического квантования некоторой заданной теории поля. Многочастичные состояния будут определяться тогда формулой (4.2.2), а их скалярные произведения (4.1.7) получаются из коммутационных соотношений. Как мы видели в гл. 1, такая последовательность гораздо больше соответствует путем исторического развития рассматриваемого формализма. Мы не пошли этим путем, поскольку хотим абстрагироваться от всех частных особенностей, связанных с существующими теориями поля, и потому, почему теории поля таковы, какими мы их знаем.

Докажем теперь теорему, сформулированную в начале главы: *любой* оператор  $\mathcal{O}$  может быть представлен в виде суммы произведений операторов рождения и уничтожения:

$$\begin{aligned} \mathcal{O} = \sum_{N=0}^{\infty} \sum_{M=0}^{\infty} & \int dq'_1 \dots dq'_N dq_1 \dots dq_M \times \\ & \times a^\dagger(q'_1) \dots a^\dagger(q'_N) a(q_M) \dots a(q_1) \times \\ & \times C_{NM}(q'_1 \dots q'_N q_1 \dots q_M). \end{aligned} \quad (4.2.8)$$

Таким образом, мы хотим показать, что это выражение может иметь любые наперед заданные матричные элементы при соответствующем выборе коэффициентов  $C_{MN}$ . Мы проведем это доказательство методом математической индукции. Во-первых, выбором  $C_{00}$  мы можем добиться любого желаемого значения произведения  $(\Phi_0, \mathcal{O}\Phi_0)$ , независимо от значений коэффициентов  $C_{NM}$  с  $N > 0$  и/или  $M > 0$ . Используя (4.2.4) убеждаемся, что

$$(\Phi_0, \mathcal{O}\Phi_0) = C_{00}.$$

Теперь предположим, что это верно для всех матричных элементов оператора  $\mathcal{O}$  между  $N$ - и  $M$ -частичными состояниями, где  $N < L$ ,  $M \leq K$  или  $N \leq L$ ,  $M < K$ . Т.е. матричные элементы будут иметь любые желаемые значения при соответствующем выборе коэффициентов  $C_{NM}$ . Чтобы увидеть, что из этого следует такое же утверждение для  $L$ - и  $K$ -частичных состояний, используем (4.2.8) для вычисления

$$(\Phi_{q'_1 \dots q'_L}, \mathcal{O}\Phi_{q_1 \dots q_K}) = L! K! C_{LK}(q'_1 \dots q'_L q_1 \dots q_K) +$$

+ члены, включающие  $C_{NM}$  с  $N < L$ ,  $M \leq K$  или  $N \leq L$ ,  $M < K$ .

Какими бы ни были  $C_{NM}$  с  $N < L$ ,  $M \leq K$  или  $N \leq L$ ,  $M < K$ , очевидно, что существует значение  $C_{LK}$ , такое что этот матричный элемент будет иметь желаемое значение.

Нет необходимости представлять операторы в форме (4.2.8), т.е. ставить операторы рождения слева от операторов уничтожения. (Такую запись часто называют “нормальным” порядком операторов.) В случае, если этот порядок не имеет места, мы всегда можем перетащить операторы рождения влево, воспользовавшись коммутационными соотношениями. При этом из-за наличия в выражении (4.2.5) дельта-функции возникают новые слагаемые.

Рассмотрим, например, произвольный аддитивный оператор  $F$  (импульс, заряд и т.п.), для которого справедливо выражение

$$F\Phi_{q_1\dots q_N} = (f(q_1) + \dots + f(q_N))\Phi_{q_1\dots q_N}. \quad (4.2.9)$$

Такой оператор можно переписать в форме (4.2.8) используя только член с  $N = M = 1$ :

$$F = \int dq a^\dagger(q)a(q)f(q). \quad (4.2.10)$$

В частности, гамильтониан свободной частицы имеет вид

$$H_0 = \int dq a^\dagger(q)a(q)E(q), \quad (4.2.11)$$

где  $E(q)$  — энергия частицы:

$$E(\mathbf{p}, \sigma, n) = \sqrt{\mathbf{p}^2 + m_n^2}.$$

В дальнейшем нам понадобятся законы преобразования операторов рождения и уничтожения при различных операциях симметрии. Рассмотрим сначала неоднородные собственные ортохронные преобразования Лоренца. Напомним, что  $N$ -частичное состояние преобразуется следующим образом:

$$\begin{aligned} U_0(\Lambda, \alpha)\Phi_{\mathbf{p}_1\sigma_1n_1, \mathbf{p}_2\sigma_2n_2, \dots} &= e^{-i(\Lambda p_1)\cdot\alpha}e^{-i(\Lambda p_2)\cdot\alpha}\dots\sqrt{\frac{(\Lambda p_1)^0(\Lambda p_2)^0\dots}{p_1^0p_2^0}}\times \\ &\times \sum_{\bar{\sigma}_1\bar{\sigma}_2\dots} D_{\bar{\sigma}_1\sigma_1}^{(j_1)}(W(\Lambda, p_1))D_{\bar{\sigma}_2\sigma_2}^{(j_2)}(W(\Lambda, p_2))\dots \\ &\dots\Phi_{\mathbf{p}_{1\Lambda}\bar{\sigma}_1n_1, \mathbf{p}_{2\Lambda}\bar{\sigma}_2n_2, \dots}. \end{aligned}$$

Здесь  $\mathbf{p}_\Lambda$  — пространственная часть 4-вектора  $\Lambda p$ , символом  $D_{\bar{\sigma}'\sigma}^{(j)}$  обозначено спинорное представление трехмерной группы вращений, использованное нами в § 2.5, а  $W(\Lambda, p)$  — само вращение,

$$W(\Lambda, p) \equiv L^{-1}(\Lambda p)\Lambda L(p).$$

Здесь  $L(p)$  — обычный “буст”, сообщающий покоявшейся частице 4-импульс  $p^\mu$ . (Конечно, величины  $m$  и  $j$  зависят от типа частицы  $n$ . Сказанное справедливо в случае  $m \neq 0$ . Случай же безмассовых частиц мы рассмотрим в следующей главе.) Теперь эти состояния могут быть записаны в виде, аналогичном (4.2.1):

$$\Phi_{\mathbf{p}_1\sigma_1n_1, \mathbf{p}_2\sigma_2n_2, \dots} = a^\dagger(\mathbf{p}_1\sigma_1n_1)a^\dagger(\mathbf{p}_2\sigma_2n_2)\dots\Phi_0,$$

где  $\Phi_0$  — лоренц-инвариантное вакуумное состояние

$$U_0(\Lambda, \alpha)\Phi_0 = \Phi_0.$$

Для того чтобы состояние (4.2.2) преобразовывалось нужным образом, необходимо и достаточно, чтобы операторы рождения удовлетворяли следующему правилу:

$$\begin{aligned} U_0(\Lambda, \alpha)a^\dagger(\mathbf{p}\sigma n)U_0^{-1}(\Lambda, \alpha) &= e^{-i(\Lambda p)\cdot\alpha}\sqrt{(\Lambda p)^0/p^0} \times \\ &\quad \times \sum_{\bar{\sigma}} D_{\bar{\sigma}\sigma}^{(j)}(W(\Lambda, p))a^\dagger(\mathbf{p}_\Lambda\bar{\sigma}n). \end{aligned} \quad (4.2.12)$$

Аналогично, операторы  $C$ ,  $P$  и  $T$ , осуществляющие зарядовое сопряжение, пространственную инверсию и инверсию времени для свободных частиц<sup>1)</sup>, преобразуют оператор рождания следующим образом:

$$Ca^\dagger(\mathbf{p}\sigma n)C^{-1} = \xi_n a^\dagger(\mathbf{p}\sigma n^c), \quad (4.2.13)$$

$$Pa^\dagger(\mathbf{p}\sigma n)P^{-1} = \eta_n a^\dagger(-\mathbf{p}\sigma n), \quad (4.2.14)$$

$$Ta^\dagger(\mathbf{p}\sigma n)T^{-1} = \zeta_n (-1)^{j-\sigma} a^\dagger(-\mathbf{p} - \sigma n). \quad (4.2.15)$$

Как отмечалось в предыдущем параграфе, хотя мы и работаем с операторами рождения и уничтожения свободных частиц, изложенный выше формализм может быть применен к “in” и “out” состояниям. В последнем случае мы можем ввести операторы  $a_{in}$  и  $a_{out}$ , определяя их через действие на рассматриваемые состояния. Они удовлетворяют соотношениям (4.2.12), однако в этом случае оператор  $U_0(\Lambda, \alpha)$ , осуществляющий преобразование Лоренца для свободной частицы, заменяется на оператор  $U(\Lambda, \alpha)$ .

### § 4.3. Кластерная разложимость и связные амплитуды

Отсутствие корреляции между результатами двух экспериментов, разнесенных в пространстве на достаточно большое расстояние, является одним из фундаментальных принципов физики, как, впрочем, и любой другой науки. Вероятности столкновений различных частиц, измеренные в “Fermilab”, не могут зависеть от того, какие эксперименты проводятся в то же самое время в ЦЕРН. Если бы этот прин-

<sup>1)</sup> Мы опустили индекс “0” у этих операторов, поскольку практически во всех случаях, когда сохраняются  $C$ ,  $P$  и/или  $T$ , операторы, порождающие эти преобразования, для “in” и “out” состояний совпадают с операторами для свободных частиц. Однако в случае непрерывных преобразований Лоренца это несправедливо, и тогда необходимо различать операторы  $U_0(\Lambda, \alpha)$  и  $U(\Lambda, \alpha)$ .

цип нарушался, мы не смогли бы сделать никаких предсказаний о результатах эксперимента, не зная в деталях состояния всей Вселенной.

Важным следствием принципа кластерной разложимости является факторизация  $S$ -матриц: если многочастичные процессы  $\alpha_1 \rightarrow \beta_1$ ,  $\alpha_2 \rightarrow \beta_2$ , ...,  $\alpha_N \rightarrow \beta_N$  изучаются в  $\mathcal{N}$  очень удаленных друг от друга лабораториях, то  $S$ -матричный элемент всего процесса имеет следующий вид<sup>1)</sup>:

$$S_{\beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_N, \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_N} \rightarrow S_{\beta_1 \alpha_1} S_{\beta_2 \alpha_2} \dots S_{\beta_N \alpha_N}. \quad (4.3.1)$$

Эта формула справедлива, если для любого  $i \neq j$  расстояние, разделяющее все частицы в состояниях  $\alpha_i$  и  $\beta_i$  и все частицы в состояниях  $\alpha_j$  и  $\beta_j$ , очень велико. Такая факторизация  $S$ -матрицы гарантирует факторизацию вероятностей соответствующих переходов, а это и есть условие независимости процессов, разделенных достаточно большими расстояниями.

Существует некий комбинаторный триюк, при помощи которого мы можем переписать (4.3.1) в более удобной форме. Дадим следующее определение *связной* части  $S$ -матрицы,  $S_{\beta \alpha}^C$ <sup>2)</sup>:

$$S_{\beta \alpha} = \sum_{\text{способы разбиения}} (\pm) S_{\beta_1 \alpha_1}^C S_{\beta_2 \alpha_2}^C \dots \quad (4.3.2)$$

Суммирование здесь ведется по всевозможным способам разбиения совокупности частиц, образующих состояние  $\alpha$ , на кластеры  $\alpha_1, \alpha_2, \dots$ , и совокупности частиц, образующих состояние  $\beta$  на кластеры  $\beta_1, \beta_2, \dots$ . При этом разбиения, различающиеся перестановкой частиц

<sup>1)</sup> Мы вернулись к обозначениям гл. 3: группа частиц заданного типа с заданными импульсом и спином обозначается греческими буквами  $\alpha$  или  $\beta$ , а чтобы отличить различные состояния друг от друга, используются числовые индексы. Сумма  $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_N$  представляет собой состояние, составленное из всех частиц в состояниях  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N$ . Тот же смысл имеет и сумма  $\beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_N$ .

<sup>2)</sup> Это разложение было использовано в классической (Урсэлл, Майер и др.) и квантовой (Ли, Янг и др. [3]) статистической механике. Голдстон [4] и Хугенхольц [5] использовали рассматриваемый метод для вычисления энергий основных состояний различных многочастичных систем. Во всех этих приложениях связные части функций Грина, статсумм, резольвент и т.д. выделялись для того, чтобы в дальнейшем можно было работать с объектами, имеющими простую зависимость от объема. Здесь мы преследуем ту же цель. Как мы увидим ниже, связная часть  $S$ -матрицы пропорциональна дельта-функции импульса (которая в ящике переходит в дельта-символ Кронекера), умноженной на объем. Метод, аналогичный разложению на кластеры, используется в теории шума [6]. В последней корреляционная функция нескольких случайных величин раскладывается на “кумулянты” (если случайная величина является функцией большого числа  $N$  независимых флуктуаций, то каждый кумулянт пропорционален  $N$ ).

внутри кластеров или кластеров между собой, входят в сумму один раз. Выбор знака “+” или “−” зависит от четности числа парных перестановок фермионов, сделанных для приведения  $\alpha, \beta$  к нужному виду ( $\alpha \rightarrow \alpha_1\alpha_2\dots$  и  $\beta \rightarrow \beta_1\beta_2\dots$ ). Термин “связный” используется потому, что в рамках диаграммной техники, рассматриваемой нами в следующем параграфе, матрице  $S_{\beta\alpha}^C$  соответствуют “связные” диаграммы.

Данное определение  $S_{\beta\alpha}^C$  рекурсивно. Для любого  $\alpha$  и  $\beta$  правая часть (4.3.2) есть член  $S_{\beta\alpha}^C$  плюс сумма  $\Sigma'$  всевозможных произведений двух и более  $S^C$ -матричных элементов, причем полное число частиц в каждом из состояний  $\alpha_j$  и  $\beta_j$  должно быть *меньше* числа частиц в состояниях  $\alpha$  и  $\beta$ :

$$S_{\beta\alpha} = S_{\beta\alpha}^C + \sum'_{\text{способы разбиения}} (\pm) S_{\beta_1\alpha_1}^C S_{\beta_2\alpha_2}^C \dots$$

Предположим, что элементы матрицы  $S^C$  в этой сумме выбираются таким образом, что равенство (4.3.2) оказывается справедливым для состояний  $\beta$  и  $\alpha$ , полное число частиц в которых меньше, чем, скажем,  $N$ . В этом случае конкретные значения  $S$ -матричных элементов в сумме  $\Sigma'$  не важны, и мы всегда можем подобрать член  $S_{\beta\alpha}^C$  так, чтобы соотношение (4.3.2) выполнялось для всех состояний  $\alpha, \beta$ , полное число частиц в которых равно  $N$ <sup>3)</sup>. Таким образом, равенство (4.3.2) само по себе не несет никакой полезной информации, а просто является определением матрицы  $S^C$ .

Если состояния  $\alpha$  и  $\beta$  содержат по одной частице с квантовыми числами  $q$  и  $q'$  соответственно, то правая часть равенства (4.3.2) будет содержать только слагаемое  $S_{\beta\alpha}^C$ . Таким образом, для одночастичных состояний

$$S_{q'q}^C \equiv S_{q'q} = \delta(q' - q). \quad (4.3.3)$$

(Если забыть о возможности вырождения, пропорциональность матрицы  $S_{q'q}$  дельта-функции  $\delta(q' - q)$  следует из законов сохранения. Отсутствие коэффициента пропорциональности в формуле (4.3.3) связано со специальным выбором относительной фазы “in” и “out” состояний.) Здесь мы предполагаем, что одночастичные состояния стабильны, т.е. не имеют места переходы между одночастичными состояниями и всеми остальными (в том числе и вакуумом).

<sup>3)</sup> Обсудим техническую сторону вопроса. Приведенные рассуждения справедливы, только если мы пренебрегаем возможностью того, что один или несколько связных матричных элементов в выражении (4.3.2) соответствуют состояниям  $\alpha_j$  и  $\beta_j$ , не содержащим частиц вовсе. По этой причине мы должны положить связный вакуумно-вакуумный элемент  $S_{0,0}^C$  равным нулю. Вакуумно-вакуумная  $S$ -матрица  $S_{0,0}$  в отсутствие изменяющегося во времени внешнего поля есть, по определению, просто единичная матрица  $S_{0,0} = 1$ . Более подробно этот вопрос будет рассмотрен в т. II, где изучаются вакуумно-вакуумные амплитуды во внешних полях.

Для переходов между двухчастичными состояниями выражение (4.3.2) примет вид

$$S_{q'_1 q'_2, q_1 q_2} = S_{q'_1 q'_2, q_1 q_2}^C + \delta(q'_1 - q_1)\delta(q'_2 - q_2) \pm \delta(q'_1 - q_2)\delta(q_2 - q'_1). \quad (4.3.4)$$

(Мы воспользовались формулой (4.3.3).) Знак “–” берется, если обе частицы — фермионы, знак “+” — во всех остальных случаях. Очевидно, что два члена с дельта-функциями совпадают с нормой (4.1.6), т.е.  $S_{\beta\alpha}^C = (S - 1)_{\beta\alpha}$ . Однако общий случай более сложен.

При трех- и четырехчастичных переходах выражение (4.3.2) имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} S_{q'_1 q'_2 q'_3, q_1 q_2 q_3} &= S_{q'_1 q'_2 q'_3, q_1 q_2 q_3}^C + \\ &+ \delta(q'_1 - q_1)S_{q'_2 q'_3, q_2 q_3}^C \pm \text{все перестановки} + \\ &+ \delta(q'_1 - q_1)\delta(q'_2 - q_2)\delta(q'_3 - q_3) \pm \text{все перестановки} \end{aligned} \quad (4.3.5)$$

и

$$\begin{aligned} S_{q'_1 q'_2 q'_3 q'_4, q_1 q_2 q_3 q_4} &= S_{q'_1 q'_2 q'_3 q'_4, q_1 q_2 q_3 q_4}^C + \\ &+ S_{q'_1 q'_2, q_1 q_2}^C S_{q'_3 q'_4, q_3 q_4}^C \pm \text{все перестановки} + \\ &+ \delta(q'_1 - q_1)S_{q'_2 q'_3 q'_4, q_2 q_3 q_4}^C \pm \text{все перестановки} + \\ &+ \delta(q'_1 - q_1)\delta(q'_2 - q_2)S_{q'_3 q'_4, q_3 q_4}^C \pm \text{все перестановки} + \\ &+ \delta(q'_1 - q_1)\delta(q'_2 - q_2)\delta(q'_3 - q_3)\delta(q'_4 - q_4) \pm \text{все перестановки}. \end{aligned} \quad (4.3.6)$$

(С учетом всех перестановок, выражение (4.3.5) содержит  $1 + 9 + 6 = 16$  слагаемых, а выражение (4.3.6) —  $1 + 18 + 16 + 72 + 24 = 131$  слагаемых. Слагаемых было бы еще больше, если бы мы не предположили стабильность одночастичных состояний.) Как уже отмечалось выше, определение матрицы  $S_{\beta\alpha}^C$  рекурсивно: мы использовали (4.3.4) при вычислении  $S_{\beta\alpha}^C$  для двухчастичных состояний, а затем для получения  $S_{\beta\alpha}^C$  в случае трехчастичных состояний. Потом мы использовали полученные выражения для вычисления  $S_{\beta\alpha}^C$  в четырехчастичном случае и т.д.

Принцип кластерной разложимости накладывает дополнительное ограничение на связную часть  $S$ -матрицы, а именно матрица  $S_{\beta\alpha}^C$  должна равняться нулю, если одна или несколько частиц в состояниях  $\beta$  и/или  $\alpha$  удалены на очень большое расстояние от остальных частиц<sup>4)</sup>.

<sup>4)</sup> Понятие “далеко” имеет смысл, только если мы произведем над  $S^C$  преобразование Фурье, при котором все 3-импульсы  $\mathbf{p}$  заменяются на пространственные 3-векторы  $\mathbf{x}$ .

Чтобы убедиться в справедливости этого утверждения, давайте предположим, что частицы из  $\beta$  и  $\alpha$  разбиты на кластеры  $\beta_1, \beta_2, \dots$  и  $\alpha_1, \alpha_2, \dots$ , причем если  $i \neq j$ , то все частицы из кластера  $\alpha_i + \beta_i$  расположены далеко от частиц из кластера  $\alpha_j + \beta_j$ . Теперь, если мы предположим, что матричный элемент  $S_{\beta' \alpha'}^C$  равен нулю, если одна или несколько частиц в  $\beta'$  или  $\alpha'$  расположены далеко от всех остальных частиц, то этот матричный элемент равен нулю и в том случае, когда частицы из состояний  $\beta'$  и/или  $\alpha'$  принадлежат разным кластерам. Таким образом, определение (4.3.2) приводит к выражению

$$S_{\beta\alpha} \rightarrow \sum^{(1)} (\pm) S_{\beta_{11}\alpha_{11}}^C S_{\beta_{12}\alpha_{12}}^C \dots \times \sum^{(2)} (\pm) S_{\beta_{21}\alpha_{21}}^C S_{\beta_{22}\alpha_{22}}^C \dots \times \dots, \quad (4.3.7)$$

где  $\sum^{(j)}$  есть сумма по всевозможным способам разбиения кластеров  $\beta_j$  и  $\alpha_j$  на подкластеры  $\beta_{j1}, \beta_{j2}, \dots$  и  $\alpha_{j1}, \alpha_{j2}, \dots$  Возвращаясь к равенству (4.3.2), мы видим, что это и есть желаемое свойство факторизации (4.3.1).

Давайте теперь рассмотрим в качестве примера четырехчастичную реакцию  $1234 \rightarrow 1'2'3'4'$ . Будем считать, что частицы 1, 2, 1', 2' находятся очень далеко от частиц 3, 4, 3', 4'. Тогда, если матричный элемент  $S_{\beta\alpha}^C$  равен нулю, когда одна или несколько частиц находятся на большом расстоянии от остальных, то выражение (4.3.6) содержит только следующие слагаемые (в более компактных обозначениях):

$$\begin{aligned} S_{1'2'3'4,1234} &\rightarrow S_{1'2',12}^C S_{3'4',34}^C + \\ &+ (\delta_{1'1}\delta_{2'2} \pm \delta_{1'2}\delta_{2'1}) S_{3'4',34}^C + (\delta_{3'3}\delta_{4'4} \pm \delta_{3'4}\delta_{4'3}) S_{1'2',12}^C + \\ &+ (\delta_{1'1}\delta_{2'2} \pm \delta_{1'2}\delta_{2'1})(\delta_{3'3}\delta_{4'4} \pm \delta_{3'4}\delta_{4'3}). \end{aligned}$$

Сравнивая полученное выражение с (4.3.4), мы видим, что это и есть требуемое условие факторизации (4.3.1)

$$S_{1'2'3'4,1234} \rightarrow S_{1'2',12}^C S_{3'4',34}^C.$$

Выше мы сформулировали принцип кластерной разложимости в координатном пространстве: матричный элемент  $S_{\beta\alpha}^C$  стремится к нулю, если какие-либо частицы в состояниях  $\beta$  или  $\alpha$  удалены от остальных. Однако более удобно переформулировать это утверждение в импульсном представлении. Матричные элементы в координатном представлении определяются через преобразование Фурье:

$$\begin{aligned} S_{\mathbf{x}'_1 \mathbf{x}'_2 \dots \mathbf{x}_1 \mathbf{x}_2 \dots}^C &\equiv \int d^3 \mathbf{p}'_1 d^3 \mathbf{p}'_2 \dots d^3 \mathbf{p}_1 d^3 \mathbf{p}_2 \dots S_{\mathbf{p}'_1 \mathbf{p}'_1 \dots \mathbf{p}_1 \mathbf{p}_2 \dots}^C \times \\ &\times e^{i\mathbf{p}'_1 \cdot \mathbf{x}'_1} e^{i\mathbf{p}'_2 \cdot \mathbf{x}'_2} \dots e^{-i\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{x}'_1} e^{-i\mathbf{p}_2 \cdot \mathbf{x}_2} \dots \quad (4.3.8) \end{aligned}$$

(Мы временно опускаем индексы, обозначающие спин и тип частиц, поскольку они не затрагиваются фурье-преобразованием.) Если бы

поведение  $|S_{\mathbf{p}'_1 \mathbf{p}'_2 \dots \mathbf{p}_1 \mathbf{p}_2 \dots}^C|$  было достаточно хорошим (иными словами, если бы этот матричный элемент был интегрируем по Лебегу), то к интегралу (4.3.8) была бы применима теорема Римана–Лебега [7], из которой следовало бы, что интеграл (4.3.8) стремится к нулю на бесконечности. Однако в нашем случае это слишком строгое требование. В силу трансляционной инвариантности связная часть  $S$ -матрицы (как и сама  $S$ -матрица) может зависеть только от разности координат и поэтому не меняется при одновременном изменении всех  $x_i$  и  $x'_j$ , если только их разность остается постоянной. Отсюда следует, что в импульсном представлении элементы матриц  $S^C$  и  $S$  должны быть пропорциональны трехмерным дельта-функциям, выражющим закон сохранения импульса, а также дельта-функции, соответствующей закону сохранения энергии. Это и делает функцию  $|S_{\mathbf{p}'_1 \mathbf{p}'_2 \dots \mathbf{p}_1 \mathbf{p}_2 \dots}^C|$  неинтегрируемой по Лебегу. Таким образом, мы можем написать

$$S_{\mathbf{p}'_1 \mathbf{p}'_2 \dots \mathbf{p}_1 \mathbf{p}_2 \dots}^C = \delta^3(\mathbf{p}'_1 + \mathbf{p}'_2 + \dots - \mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2 - \dots) \times \\ \times \delta(E'_1 + E'_2 + \dots - E_1 - E_2 - \dots) C_{\mathbf{p}'_1 \mathbf{p}'_2 \dots \mathbf{p}_1 \mathbf{p}_2 \dots} \quad (4.3.9)$$

Данное выражение ничему не противоречит: принцип кластерной разложимости требует только, чтобы выражение (4.3.8) стремилось к нулю, если *разности* между какими-либо  $\mathbf{x}_i$  и/или  $\mathbf{x}'_i$  становятся большими. Принцип нарушался бы, если матрица  $C$  сама содержала бы дополнительные дельта-функции от линейных комбинаций 3-импульсов. Предположим, например, что в  $C$  содержится дельта-функция, требующая обращения в нуль суммы импульсов  $\mathbf{p}'_i$  и  $-\mathbf{p}_j$  для какой-либо подгруппы частиц. Тогда выражение (4.3.8) не изменится, если рассматриваемая подгруппа частиц без изменения расстояния между частицами подгруппы будет как целое удалена на бесконечно большое расстояние от всех остальных частиц. А это противоречит принципу кластерной разложимости. Иными словами, принцип кластерной разложимости утверждает, что *связная часть S-матрицы, в отличие от самой S-матрицы, содержит только дельта-функцию, выражющую закон сохранения 4-импульса.*

Чтобы быть более точными, мы можем потребовать, чтобы функция  $C_{\mathbf{p}'_1 \mathbf{p}'_2 \dots \mathbf{p}_1 \mathbf{p}_2 \dots}$  в выражении (4.3.9) была гладкой функцией импульсов. Но как определить понятие “гладкая функция”? Проще всего было бы постулировать, что функция  $C_{\mathbf{p}'_1 \mathbf{p}'_2 \dots \mathbf{p}_1 \mathbf{p}_2 \dots}$  в точке

$$\mathbf{p}'_1 = \mathbf{p}'_2 = \dots = \mathbf{p}_1 = \mathbf{p}_2 = \dots = 0$$

есть аналитическая функция всех импульсов. Действительно, это условие гарантировало бы экспоненциально быстрое убывание матричного элемента  $S_{\mathbf{x}'_1 \mathbf{x}'_2 \dots \mathbf{x}_1 \mathbf{x}_2 \dots}^C$  при удалении какого-либо из  $\mathbf{x}$  или  $\mathbf{x}'$  от всех остальных. Однако экспоненциальное убывание  $S^C$  — не самая важная часть принципа кластерной разложимости и, фактиче-

ски, условие аналитичности выполняется не во всех теориях. Наиболее важно то, что в теориях, содержащих безмассовые частицы, матрица  $S^C$  может иметь полюсы при определенных значениях  $\mathbf{p}$  и  $\mathbf{p}'$ . Например, как мы увидим в гл. 10, если безмассовая частица может испускаться в процессе  $1 \rightarrow 3$  и поглощаться в процессе  $2 \rightarrow 4$ , то матричный элемент  $S_{34,12}^C$  содержит слагаемое, пропорциональное

$$1/(p_1 - p_3)^2.$$

После фурье-преобразования, эти полюсы приведут к появлению в  $S_{\mathbf{x}_1' \mathbf{x}_2' \dots, \mathbf{x}_1 \mathbf{x}_2 \dots}^C$  членов, убывающих как отрицательная степень разности координат [1]. Нет особой необходимости формулировать принцип кластерной разложимости с такой строгостью, чтобы исключить подобные случаи. Т.е. условие “гладкости” функции  $S^C$  следует понимать следующим образом: возможно появление полюсов и разрезов при некоторых значениях  $\mathbf{p}$  и  $\mathbf{p}'$ , но таких жестких особенностей, как дельта-функция, быть не должно.

#### § 4.4. Структура взаимодействия

Зададимся теперь следующим вопросом: каким гамильтонианам соответствуют  $S$ -матрицы, удовлетворяющие принципу кластерной разложимости? Вот здесь нам и пригодится формализм операторов рождения и уничтожения. Ответом на поставленный вопрос является следующая теорема:  $S$ -матрица удовлетворяет принципу кластерной разложимости тогда (и, насколько мне известно, только тогда), когда гамильтониан может быть представлен в виде (4.2.8):

$$\begin{aligned} H = \sum_{N=0}^{\infty} \sum_{M=0}^{\infty} & \int dq'_1 \dots dq'_N dq_1 \dots dq_M \times \\ & \times a^\dagger(q'_1) \dots a^\dagger(q'_N) a(q_M) \dots a(q_1) \times \\ & \times h_{NM}(q'_1 \dots q'_N, q_1 \dots q_M). \end{aligned} \quad (4.4.1)$$

Функция  $h_{NM}$  содержит только *одну* дельта-функцию, выражющую закон сохранения трехмерного импульса:

$$\begin{aligned} h_{NM}(\mathbf{p}'_1 \sigma'_1 n'_1 \dots \mathbf{p}'_N \sigma'_N n'_N, \mathbf{p}_1 \sigma_1 n_1 \dots \mathbf{p}_M \sigma_M n_M) = \\ = \delta^3(\mathbf{p}'_1 + \dots + \mathbf{p}'_N - \mathbf{p}_1 - \dots - \mathbf{p}_M) \times \\ \times \tilde{h}_{NM}(\mathbf{p}'_1 \sigma'_1 n'_1 \dots \mathbf{p}'_N \sigma'_N n'_N, \mathbf{p}_1 \sigma_1 n_1 \dots \mathbf{p}_M \sigma_M n_M), \end{aligned} \quad (4.4.2)$$

где  $\tilde{h}_{NM}$  не содержит дельта-функций вовсе. Следует отметить, что уравнение (4.4.1) само по себе не имеет смысла — как мы видели в § 4.2, *любой* оператор может быть представлен в такой форме. Только равенство (4.4.1) совместно с условием (4.4.2), содержащим одну

дельта-функцию, гарантируют выполнение принципа кластерной разложимости.

Справедливость этой теоремы в случае теории возмущений станет очевидной, когда мы разовьем формализм фейнмановских диаграмм в гл. 6. Доверчивый читатель может пропустить остаток этой главы и перейти к следующей, в которой будут рассмотрены приложения данной теоремы. Тем не менее доказательство содержит ряд поучительных моментов и помогает понять, почему формализм теории поля, рассматриваемый в дальнейшем, оказывается незаменимым инструментом при описании Природы.

Для доказательства теоремы мы воспользуемся нестационарной теорией возмущений. (Одно из преимуществ такого подхода состоит в том, что комбинаторика, лежащая в основе принципа кластерной разложимости, становится более прозрачной. Если  $E$  есть сумма энергий отдельных частиц, то тогда временной множитель  $e^{-iE't}$  волновой функции всей системы равен произведению временных множителей волновых функций соответствующих частиц, в то время как множитель  $(E - E_\alpha + i\epsilon)^{-1}$  получить таким образом нельзя.)  $S$ -матрица дается выражением (3.5.10)<sup>1)</sup>:

$$S_{\beta\alpha} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n!} \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 \dots dt_n (\Phi_\beta, T\{V(t_1) \dots V(t_n)\} \Phi_\alpha), \quad (4.4.3)$$

здесь гамильтониан представлен в виде суммы гамильтониана свободных частиц  $H_0$  и члена  $V$ , описывающего взаимодействие:

$$V(t) \equiv \exp(iH_0t)V \exp(-iH_0t). \quad (4.4.4)$$

Состояния  $\Phi_\alpha$  и  $\Phi_\beta$  можно представить в виде произведения операторов рождения, действующих на вакуум  $\Phi_0$  (см. формулу (4.2.2)). Взаимодействие же  $V(t)$  само является суммой произведений операторов рождения и уничтожения, так что каждое слагаемое в (4.3.3) может быть переписано в виде суммы вакуумных средних произведений операторов рождения и уничтожения. Используя коммутационные (или антикоммутационные) соотношения (4.2.5), мы можем перетащить все операторы уничтожения вправо от операторов рождения. Каждая перестановка операторов рождения и уничтожения приводит к появлению двух членов

$$a(q')a^\dagger(q) = \pm a^\dagger(q)a(q') + \delta(q' - q).$$

Последовательно переставляя операторы уничтожения, будем получать все новые и новые члены. Но из равенства (4.2.4) следует, что

<sup>1)</sup> Мы здесь приняли соглашение о том, что при  $n = 0$  временноупорядоченное произведение в (4.4.3) является единичным оператором. Поэтому слагаемое, соответствующее  $n = 0$ , приводит к появлению дельта-функции  $\delta(\beta - \alpha)$  в выражении для  $S_{\beta\alpha}$ .

любой оператор уничтожения, перемещенный в крайнее правое положение и действующий на  $\Phi_0$ , дает нуль. В конце концов, из всей совокупности слагаемых у нас останутся только дельта-функции. Таким образом, вакуумное среднее от произведения операторов рождения и уничтожения дается суммой, каждый член которой есть произведение дельта-функций со знаком плюс или минус. Отсюда следует, что подынтегральное выражение в (4.4.3), независимо от того, какой вид имеет взаимодействие  $V(t)$ , может быть представлено в виде суммы произведений дельта-функций, проинтегрированной и просуммированной по импульсам, спинам и сортам частиц в аргументах дельта-функций.

Каждому члену, полученному таким образом, может быть поставлена в соответствие некоторая диаграмма. (Однако это еще не фейнмановский формализм, потому что пока мы не собираемся устанавливать соответствие между графическими элементами диаграмм и числовыми величинами. Здесь мы используем диаграммы только для того, чтобы проследить за трехмерными дельта-функциями импульсов.) Нарисуем  $n$  точек (каждому оператору  $V(t)$  соответствует одна точка), которые будем называть *вершинами*. Для каждой дельта-функции, возникшей из-за перестановки оператора уничтожения, входившего в  $V(t)$ , с оператором рождения, входившим в начальное состояние  $\Phi_\alpha$ , нарисуем линию, идущую снизу и заканчивающуюся на соответствующей вершине. Для каждой дельта-функции, возникшей из-за перестановки оператора уничтожения, входившего в сопряженное конечное состояние  $\Phi_\beta$ , с оператором рождения, входившим в  $V(t)$ , нарисуем линию, идущую от соответствующей вершины вверх. Для каждой дельта-функции, возникшей из-за перестановки операторов рождения и уничтожения, входивших в операторы взаимодействия  $V(t)$ , нарисуем линию между соответствующими вершинами. Окончательно, для каждой дельта-функции, возникшей из-за перестановки операторов рождения и уничтожения, входивших в начальное и конечное состояния, нарисуем линию, идущую снизу вверх через диаграмму. Каждая дельта-функция, соответствующая одной из этих линий, требует равенства импульсов пары операторов рождения и уничтожения, представленных линией на диаграмме. Кроме этого, каждая вершина вносит дополнительно, как минимум, по одной дельта-функции, которая гарантирует сохранение импульса в вершине.

Такая диаграмма может быть связной (каждая точка связана с остальными набором линий) или несвязной. В последнем случае она разбивается на несколько связных частей. Операторы  $V(t)$ , вершины которых принадлежат различным связным кускам, эффективно коммутируют, поскольку отсутствуют члены, соответствующие рождению и уничтожению частицы операторами из разных связных частей диаграммы. Если же операторы  $V(t)$  не коммутируют, то обе

вершины принадлежат одному и тому же связному куску. Таким образом, матричный элемент (4.4.3) может быть представлен в виде суммы произведений вкладов всех связных частей диаграммы:

$$\begin{aligned} & (\Phi_\beta, T\{V(t_1) \dots V(t_n)\} \Phi_{\alpha_j}) = \\ &= \sum_{\text{кластеризация}} (\pm) \prod_{j=1}^{\nu} (\Phi_{\beta_j}, T\{V(t_{j1}) \dots V(t_{jn_j})\} \Phi_{\alpha_j})_C. \end{aligned} \quad (4.4.5)$$

Здесь суммирование ведется по всем способам разбиения набора операторов  $V(t)$  и совокупности входящих и выходящих частиц на  $\nu$  кластеров (включая сумму по  $\nu$  от 1 до  $n$ ). При этом  $n_j$  операторов  $V(t_{j1}) \dots V(t_{jn_j})$ , а также наборы частиц  $\alpha_j$  и  $\beta_j$  принадлежат  $j$ -му кластеру. Конечно, отсюда следует, что

$$n = n_1 + \dots + n_\nu.$$

Символом  $\alpha$  обозначим совокупность всех частиц из подмножеств  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_\nu$ , и аналогично для конечного состояния. Некоторые из кластеров в выражении (4.4.5) могут не содержать вершин, т.е.  $n_j = 0$ . Для таких множителей мы должны положить соответствующий матричный элемент (4.4.5) равным нулю, если только  $\beta_j$  и  $\alpha_j$  не являются оба одночастичными состояниями (в последнем случае он оказывается просто дельта-функцией  $\delta(\beta_j - \alpha_j)$ ), поскольку единственными связными диаграммами, не содержащими вершин, являются линии, идущие через всю диаграмму снизу вверх. Индекс  $C$  в формуле (4.4.5) означает, что мы должны пренебречь вкладом всех несвязных диаграмм, т.е. таких диаграмм, в которых какой-либо оператор  $V(t)$  или какая-либо начальная или конечная частица не связаны со всеми остальными последовательностью рождений и уничтожений.

Подставим теперь соотношение (4.4.5) в выражение (4.4.3). По каждой временной переменной ведется интегрирование от  $-\infty$  до  $+\infty$ . Поэтому неважно, каким образом времена  $t_1, \dots, t_n$  рассортированы по кластерам. В результате сумма по кластерам дает множитель  $n!/n_1!n_2!\dots n_\nu!$ , равный числу всевозможных разбиений  $n$  вершин на  $\nu$  кластеров, содержащих  $n_1, n_2, \dots$  вершин соответственно:

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 \dots dt_n (\Phi_\beta, T\{V(t_1) \dots V(t_n)\} \Phi_{\alpha}) = \\ &= \sum_{\text{способы разбиения}} (\pm) \sum_{\substack{n_1 \dots n_\nu \\ n_1 + \dots + n_\nu = n}} \frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_\nu!} \prod_{j=1}^{\nu} \int_{-\infty}^{\infty} dt_{j1} \dots dt_{jn_j} \times \\ & \quad \times (\Phi_{\beta_j}, T\{V(t_{j1}) \dots V(t_{jn_j})\} \Phi_{\alpha_j})_C. \end{aligned}$$

Здесь первое суммирование ведется по всевозможным способам разбиения частиц в начальных и конечных состояниях на кластеры

$\alpha_1 \dots \alpha_\nu$  и  $\beta_1 \dots \beta_\nu$  (в том числе ведется и суммирование по числу кластеров  $\nu$ ). Множитель  $n!$  сокращается с  $1/n!$  из (4.4.3), а множитель  $(-i)^n$  в (4.4.5) может быть записан в виде произведения  $(-i)^{n_1} \dots (-i)^{n_\nu}$ . В результате вместо суммирования по  $n$  и последующего суммирования по  $n_1, \dots, n_\nu$ , ограниченного условием  $n_1 + \dots + n_\nu = n$ , мы можем независимо просуммировать по каждому  $n_1, \dots, n_\nu$ . Это в конечном итоге дает

$$S_{\beta\alpha} = \sum_{\text{способы разбиения}} (\pm) \prod_{j=1}^{\nu} \sum_{n_j=0}^{\infty} \frac{(-i)^{n_j}}{n_j!} \int_{-\infty}^{\infty} dt_{j_1} \dots dt_{j_{n_j}} \times \\ \times (\Phi_{\beta_j}, T\{V(t_{j_1}) \dots V(t_{j_{n_j}})\} \Phi_{\alpha_j})_C.$$

Сравнивая это выражение с определением (4.3.2), мы видим, что связные матричные элементы  $S_{\beta\alpha}^C$  даются формулой

$$S_{\beta\alpha}^C = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n!} \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 \dots dt_n (\Phi_{\beta_j}, T\{V(t_{j_1}) \dots V(t_{j_{n_j}})\} \Phi_{\alpha_j})_C. \quad (4.4.6)$$

(Индекс  $j$  опущен у всех  $t$  и  $n$ , поскольку они в данном выражении всего лишь переменные, по которым производится суммирование.) Мы видим, что матричный элемент  $S_{\beta\alpha}^C$  вычисляется по очень простому правилу:  $S_{\beta\alpha}^C$  есть сумма всех связных вкладов в  $S$ -матрицу, в том смысле, что мы отбрасываем все члены, в которых содержатся либо операторы  $V(t)$ , либо начальные или конечные частицы, несвязные со всеми остальными последовательностью рождений и уничтожений. Данная формулировка оправдывает использованный нами термин “связный” для  $S_{\beta\alpha}^C$ .

Как мы уже видели, импульс сохраняется в каждой вершине и вдоль каждой линии, т.е. он сохраняется и в каждой связной части  $S$ -матрицы:  $S_{\beta\alpha}^C$  содержит множитель  $\delta^3(\mathbf{p}_\beta - \mathbf{p}_\alpha)$ . Однако мы хотим доказать, что  $S_{\beta\alpha}^C$  не содержат других дельта-функций.

Давайте предположим, что функция  $h_{NM}$  в гамильтониане (4.4.1), записанного через оператор рождения и уничтожения, пропорциональна трехмерной дельта-функции, которая обеспечивает сохранение импульса. Это предположение автоматически выполняется для гамильтониана свободной частицы  $H_0$  и взаимодействия  $V(t)$ . Возвращаясь к графической интерпретации матричных элементов, мы видим, что каждая вершина вносит одну трехмерную дельта-функцию. (Другие дельта-функции в матричном элементе  $V_{\gamma\delta}$  сохраняют импульс частиц, которые не создаются и не уничтожаются в этой вершине.) Большинство из этих дельта-функций фиксирует импульсы промежуточных частиц, а импульсы, циркулирующие по петлям внутри диаграммы, — нет. (Любая линия, которая будучи разрезанной делает диаграмму несвязной, несет фиксированный импульс, так как он

является некой линейной комбинацией импульсов, входящих и выходящих из диаграммы. Если диаграмма содержит  $L$  линий, которые все могут быть одновременно разрезаны и при этом диаграмма остается связной, то мы будем говорить, что она имеет  $L$  независимых петель и, соответственно,  $L$  импульсов, не зафиксированных законом сохранения.) При  $V$  вершинах,  $I$  внутренних линиях и  $L$  петлях будет  $V$  дельта-функций, из которых  $I - L$  фиксируют внутренние импульсы, а остальные  $V - I + L$  связывают импульсы входящих или выходящих частиц. Однако по известному топологическому тождеству<sup>2)</sup> для графа, состоящего из  $C$  связных частей, число вершин внутренних линий и петель удовлетворяет соотношению

$$V - I + L = C. \quad (4.4.7)$$

Соответственно в связном матричном элементе  $S_{\beta\alpha}^C$ , который происходит от графа с  $C = 1$ , будет только одна трехмерная дельта-функция  $\delta^3(\mathbf{p}_\beta - \mathbf{p}_\alpha)$ , что и требовалось доказать.

Для этих рассуждений не важен факт интегрирования по времени от  $-\infty$  до  $+\infty$ . Т.е. таким же образом может быть показано, что если коэффициенты  $h_{N,M}$  в выражении для гамильтониана содержат по одной дельта-функции, то  $U(t, t_0)$  можно разложить на связные части, каждая из которых содержит единственную дельта-функцию. С другой стороны, связная часть  $S$ -матрицы,  $S_{\beta\alpha}^C$ , содержит дельта-функцию энергии,  $\delta(E_\beta - E_\alpha)$ , более того в гл. 6 при рассмотрении фейнмановских диаграмм мы увидим, что она единственна, в то же время в  $U(t, t_0)$  такая дельта-функция не входит.

Требование, чтобы  $h_{NM}$  из (4.4.1) содержала только одну трехмерную дельта-функцию импульса, очень нетривиально и имеет далеко идущие последствия. Например, предположим, что  $V$  имеет ненулевой матричный элемент перехода между двухчастичными состояниями. Тогда выражение (4.4.1) должно содержать член с  $N = M = 2$  и коэффициент

$$v_{2,2}(\mathbf{p}'_1 \mathbf{p}'_2, \mathbf{p}_1 \mathbf{p}_2) = V_{\mathbf{p}'_1 \mathbf{p}'_2, \mathbf{p}_1 \mathbf{p}_2}. \quad (4.4.8)$$

(Мы здесь временно опустили индексы спина и типа частиц.) Но тогда матричный элемент трехчастичного взаимодействия будет иметь вид

$$\begin{aligned} V_{\mathbf{p}'_1 \mathbf{p}'_2 \mathbf{p}'_3, \mathbf{p}_1 \mathbf{p}_2 \mathbf{p}_3} &= v_{3,3}(\mathbf{p}'_1 \mathbf{p}'_2 \mathbf{p}'_3, \mathbf{p}_1 \mathbf{p}_2 \mathbf{p}_3) + \\ &+ v_{2,2}(\mathbf{p}'_1 \mathbf{p}'_2, \mathbf{p}_1 \mathbf{p}_2) \delta^3(\mathbf{p}'_3 - \mathbf{p}_3) \pm \text{перестановки}. \end{aligned} \quad (4.4.9)$$

<sup>2)</sup> Граф, состоящий из единственной вершины, имеет  $V = 1$ ,  $L = 0$  и  $C = 1$ . Если мы добавим  $V - 1$  вершин и наименьшее необходимое для связности графа число внутренних линий, то мы получим  $I = V - 1$ ,  $L = 0$  и  $C = 1$ . Любые дополнительные внутренние линии, добавленные (без добавления новых вершин) к этому связному графу, создадут такое же количество петель, т.е.  $I = V + L - 1$  и  $C = 1$ . Если несвязный граф состоит из  $C$  таких связных частей, тогда, просуммировав  $I$ ,  $V$  и  $L$  по связным частям, мы получим соотношение  $\sum I = \sum V + \sum L - C$ .

Как уже было отмечено в начале этой главы, мы могли бы попробовать построить релятивистскую квантовую теорию, которая не являлась бы теорией поля. Для этого выбором  $v_{2,2}$  мы были бы должны гарантировать лоренц-инвариантность двухчастичной  $S$ -матрицы, а оставшуюся часть гамильтонiana подобрать таким образом, чтобы не было рассеяния в состояниях, содержащих три и более частиц, т.е. нам надо было бы выбрать  $v_{3,3}$ , сокращающим все остальные члены в (4.4.9):

$$v_{3,3}(\mathbf{p}'_1 \mathbf{p}'_2 \mathbf{p}'_3, \mathbf{p}_1 \mathbf{p}_2 \mathbf{p}_3) = -v_{2,2}(\mathbf{p}'_1 \mathbf{p}'_2, \mathbf{p}_1 \mathbf{p}_2) \delta^3(\mathbf{p}'_3 - \mathbf{p}_3) \mp \text{перестановки}. \quad (4.4.10)$$

Однако это означало бы, что каждый член содержит две дельта-функции (вспомним, что в  $v_{2,2}(\mathbf{p}'_1 \mathbf{p}'_2, \mathbf{p}_1 \mathbf{p}_2)$  входит множитель  $\delta^3(\mathbf{p}'_1 + \mathbf{p}'_2 - \mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2)$ ), что нарушило бы принцип кластерной разложимости. Таким образом, в теории, удовлетворяющей принципу кластерной разложимости, существование двухчастичных процессов рассеяния неизбежно влечет за собой наличие рассеяний с участием трех и более частиц.

\* \* \*

Член  $v_{3,3}$  в формуле (4.4.9) не создает особых сложностей при поисках решения трехчастичной задачи в квантовых теориях, удовлетворяющих принципу кластерной разложимости. Однако дополнительные дельта-функции в других членах осложняют процесс решения уравнения Липмана–Швингера. Дело в том, что из-за наличия этих дельта-функций ядро  $(E_\alpha - E_\beta + i\epsilon)^{-1} V_{\beta\alpha}$  уравнения перестает быть квадратично интегрируемым, даже если мы исключим дельта-функцию, сохраняющую общий импульс, вынеся ее за скобки, как общий множитель. Вследствие этого данное ядро не может быть аппроксимировано конечной матрицей, даже очень большого ранга. Для того чтобы решить задачи с тремя и более частицами, необходимо заменить уравнение Липмана–Швингера на уравнение, имеющее связную правую часть. Такие уравнения были разработаны для рассеяния трех и более частиц [8, 9], и могут быть решены в нерелятивистском случае. Однако они оказываются бесполезными в релятивистских теориях и не будут рассматриваться здесь подробно.

Однако переписывание уравнения Липмана–Швингера в таком виде все же имеет некий смысл. Все наши рассуждения в этом параграфе основывались на теории возмущений, и я не знаю ни одного непертурбативного доказательства основной теоремы этого параграфа. Однако можно показать [9], что переписанные непертурбативные динамические уравнения *согласуются* с тем требованием, что  $U^C(t, t_0)$  (а поэтому и  $S^C$ ) должны содержать только дельта-функцию, отвечающую закону сохранения импульса, как того требует принцип кластерной разложимости. Конечно это справедливо, только если га-

мультониан удовлетворяет условию, что каждая функция  $h_{N,M}$  содержит одну сохраняющую импульс дельта-функцию.

## Задачи

**1.** Введем определение производящих функций для  $S$ -матрицы и ее связной части:

$$\begin{aligned} F[v] &\equiv 1 + \sum_{N=1}^{\infty} \sum_{M=1}^{\infty} \frac{1}{N! M!} \int v^*(q'_1) \dots v^*(q'_N) v(q_1) \dots v(q_M) \times \\ &\quad \times S_{q'_1 \dots q'_N, q_1 \dots q_M} dq'_1 \dots dq'_N dq_1 \dots dq_M, \\ F^C[v] &\equiv \sum_{N=1}^{\infty} \sum_{M=1}^{\infty} \frac{1}{N! M!} \int v^*(q'_1) \dots v^*(q'_N) v(q_1) \dots v(q_M) \times \\ &\quad \times S_{q'_1 \dots q'_N, q_1 \dots q_M}^C dq'_1 \dots dq'_N dq_1 \dots dq_M. \end{aligned}$$

Выполните формулу, связывающую  $F[v]$  и  $F^C[v]$  (при этом можете ограничиться чисто бозонным случаем).

**2.** Рассмотрим взаимодействие

$$\begin{aligned} V = g \int d^3 \mathbf{p}_1 d^3 \mathbf{p}_2 d^3 \mathbf{p}_3 d^3 \mathbf{p}_4 \delta^3(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_3 - \mathbf{p}_4) \times \\ \times a^\dagger(\mathbf{p}_1) a^\dagger(\mathbf{p}_2) a(\mathbf{p}_3) a(\mathbf{p}_4), \end{aligned}$$

где  $g$  — вещественная постоянная, а  $a(\mathbf{p})$  — оператор уничтожения безспинового бозона с массой  $M > 0$ . Используя теорию возмущений, вычислите в первом порядке по  $g$   $S$ -матричный элемент, отвечающий рассеянию этих частиц в системе центра масс. Каково соответствующее сечение рассеяния?

**3.** Когерентным будем называть состояние  $\Phi_\lambda$ , являющееся собственным для оператора уничтожения  $a(q)$  (с собственным значением, равным  $\lambda(q)$ ). Представьте  $\Phi_\lambda$  в виде суперпозиции многочастичных состояний  $\Phi_{q_1 q_2 \dots q_N}$ .

## Литература

1. Принцип кластерной разложимости был впервые четко сформулирован, по-видимому, в работе *Wichmann E.H., Crichton J.H.* // Phys. Rev. **132**, 2788 (1963).
2. См., например, *Bakamjian B., Thomas L.H.* // Phys. Rev. **92**, 1300 (1953).
3. Для ссылок см. *Lee T.D., Yang C.N.* // Phys. Rev. **113**, 1165 (1959).

4. Goldstone J. // Proc. Roy. Soc. L. **A239**, 267 (1957).
5. Hugenholtz N.M. // Physica **23**, 481 (1957).
6. См., например, Kubo R. // J. Math. Phys. **4**, 174 (1963).
7. Titchmarsh E.C. Introduction to the Theory of Fourier Integrals. Oxford University Press, Oxford, 1937. Section 1.8.
8. Faddeev L.D. // Zh. Exper. i Teor. Fiz. **39**, 1459 (1961) (перевод с русского языка статьи в Soviet Phys. JETP. **12**, 1014 (1961)); Dokl. Akad. Nauk. SSSR. **138**, 565 (1961) и **145**, 30 (1962) (переводы с русского языка в Soviet Physics. Doklady. **6**, 384 (1961) и **7**, 600 (1963)).
9. Weinberg S. // Phys. Rev. **133**, B232 (1964).

## Г л а в а 5

# КВАНТОВЫЕ ПОЛЯ И АНТИЧАСТИЦЫ

Теперь у нас есть все необходимое для того, чтобы ввести понятие квантового поля [1]. В процессе построения квантовых полей мы встретимся с некоторыми из самых замечательных и универсальных следствий объединения квантовой механики с теорией относительности — связью между спином и статистикой, существованием античастиц и наличием различных соотношений между характеристиками частиц и античастиц, включая известную СРТ-теорему.

### § 5.1. Свободные поля

В гл. 3 мы показали, что  $S$ -матрица будет лоренц-инвариантной, если взаимодействие можно представить в виде

$$V(t) = \int d^3x \mathcal{H}(\mathbf{x}, t), \quad (5.1.1)$$

где  $\mathcal{H}$  является лоренцевым скаляром,

$$U_0(\Lambda, a)\mathcal{H}(x)U_0^{-1}(\Lambda, a) = \mathcal{H}(\Lambda x + a), \quad (5.1.2)$$

и, кроме того, удовлетворяет соотношению

$$[\mathcal{H}(x), \mathcal{H}(x')] = 0 \quad \text{при} \quad (x - x')^2 \geq 0. \quad (5.1.3)$$

Далее мы увидим, что возможны и более общие конструкции, но все они не слишком сильно отличаются от приведенной. (Пока что мы оставляем открытым вопрос о том, ограничены ли преобразования  $\Lambda$  собственной ортохронной группой Лоренца или допускается также и пространственная инверсия.) Чтобы гарантировать соблюдение принципа кластерной разложимости, мы попытаемся построить  $\mathcal{H}(x)$  из операторов рождения и уничтожения. Но в соответствии с (4.2.12) при преобразованиях Лоренца такие операторы умножаются на матрицы, зависящие от приписанного оператору импульса. Сразу же возникает следующая задача: как получить из таких операторов скалярное выражение? Решение состоит в том, чтобы конструировать  $\mathcal{H}(x)$  из *полей* — уничтожающих полей  $\psi_l^+(x)$  и рождающих полей  $\psi_l^-(x)$ :

$$\psi_l^+(x) \sum_{\sigma n} d^3p u_l(x; \mathbf{p}, \sigma, n) a(\mathbf{p}, \sigma, n), \quad (5.1.4)$$

$$\psi_l^-(x) \sum_{\sigma n} d^3 p v_l(x; \mathbf{p}, \sigma, n) a^\dagger(\mathbf{p}, \sigma, n), \quad (5.1.5)$$

где коэффициенты<sup>1)</sup>  $u_l(x; \mathbf{p}, \sigma, n)$  и  $v_l(x; \mathbf{p}, \sigma, n)$  выбираются так, что под действием преобразований Лоренца поля умножаются на независящую от координат матрицу:

$$U_0(\Lambda, a) \psi_l^+(x) U_0^{-1}(\Lambda, a) = \sum_{\bar{l}} D_{l\bar{l}}(\Lambda^{-1}) \psi_{\bar{l}}^+(\Lambda x + a), \quad (5.1.6)$$

$$U_0(\Lambda, a) \psi_l^-(x) U_0^{-1}(\Lambda, a) = \sum_{\bar{l}} D_{l\bar{l}}(\Lambda^{-1}) \psi_{\bar{l}}^-(\Lambda x + a), \quad (5.1.7)$$

(В принципе, мы могли бы ввести различные матрицы преобразований  $D^\pm$  для рождающих и уничтожающих полей. Но в дальнейшем мы увидим, что поля всегда можно выбрать так, чтобы эти матрицы были одинаковыми.) Применяя второе преобразование Лоренца, получаем

$$D(\Lambda^{-1}) D(\bar{\Lambda}^{-1}) = D((\bar{\Lambda}\Lambda)^{-1}),$$

Полагая  $\Lambda_1 = (\Lambda)^{-1}$  и  $\Lambda_2 = (\bar{\Lambda})^{-1}$ , видим, что матрицы  $D$  дают *представление* однородной группы Лоренца:

$$D(\Lambda_1) D(\Lambda_2) = D(\Lambda_1 \Lambda_2). \quad (5.1.8)$$

Существует много таких представлений — например, скалярное  $D(\Lambda) = 1$ , векторное  $D(\Lambda)^\mu{}_\nu = \Lambda^\mu{}_\nu$  и семейства тензорных и спинорных представлений. Упомянутые представления неприводимы, т.е. не существует способа посредством замены базиса одновременно привести все матрицы представления  $D(\Lambda)$  к блочно-диагональному виду с числом блоков не меньше двух. Но пока что мы не будем требовать неприводимости рассматриваемого представления: в общем случае оно будет даваться блочно-диагональными матрицами с произвольным числом блоков, каждый из которых задает неприводимое представление. Иначе говоря, индекс  $l$  будет состоять из индекса, пробегающего типы описываемых частиц и блоки неприводимых представлений, и индекса, пробегающего компоненты отдельного неприводимого представления. Впоследствии мы разделим наши поля на неприводимые поля, каждое из которых описывает только частицы одного типа (и соответствующие им античастицы) и неприводимо преобразуется под действием группы Лоренца.

После того, как мы научимся строить поля, удовлетворяющие правилам преобразования (5.1.6) и (5.1.7), мы сможем конструировать

---

<sup>1)</sup> Напоминаем, что индексы суммирования  $n$  и  $\sigma$  пробегают возможные типы частиц и значения  $z$ -компонент спина соответственно.

плотность гамильтониана взаимодействия вида

$$\mathcal{H}(x) = \sum_{NM} \sum_{l'_1 \dots l'_N} \sum_{l_1 \dots l_M} g_{l'_1 \dots l'_N, l_1 \dots l_M} \times \\ \times \psi_{l'_1}^-(x) \dots \psi_{l'_N}^-(x) \psi_{l_1}^+(x) \dots \psi_{l_M}^+(x). \quad (5.1.9)$$

Такая плотность будет скаляром в смысле соотношения (5.1.2), если выбрать постоянные коэффициенты  $g_{l'_1 \dots l'_N, l_1 \dots l_M}$  лоренц-ковариантными, т.е. удовлетворяющими для всех  $\Lambda$  соотношению

$$\sum_{l'_1 \dots l'_N} \sum_{l_1 \dots l_M} D_{l'_1 \bar{l}_1}(\Lambda^{-1}) \dots D_{l'_N \bar{l}'_N}(\Lambda^{-1}) D_{l_1 \bar{l}_1}(\Lambda^{-1}) \dots D_{l_M \bar{l}_M}(\Lambda^{-1}) \times \\ \times g_{l'_1 \dots l'_N, l_1 \dots l_M} = g_{\bar{l}'_1 \dots \bar{l}'_N, \bar{l}_1 \dots \bar{l}_M}. \quad (5.1.10)$$

(Отметим, что мы не рассматриваем производные отдельно, поскольку считаем производные компонент поля просто другими типами компонент поля.) Задача нахождения коэффициентов  $g_{l'_1 \dots l'_N, l_1 \dots l_M}$ , удовлетворяющих (5.1.10), принципиально не отличается от задачи определения коэффициентов Клебша–Гордана, при помощи которых можно образовывать скалярные относительно вращений комбинации различных представлений трехмерной группы вращений (и на практике не является существенно более трудной). Впоследствии мы научимся объединять рождающие и уничтожающие поля так, чтобы плотности гамильтониана взаимодействия в разделенных пространственно-подобным интервалом точках коммутировали.

Что же следует взять в качестве коэффициентных функций  $u_l(x; \mathbf{p}, \sigma, n)$  и  $v_l(x; \mathbf{p}, \sigma, n)$ ? Из уравнения (4.2.12) и сопряженного к нему следуют законы преобразования<sup>2)</sup> операторов уничтожения и рождения

$$U_0(\Lambda, b)a(\mathbf{p}, \sigma, n)U_0^{-1}(\Lambda, b) = \\ = \exp(i(\Lambda p) \cdot b) \sqrt{(\Lambda p)^0 / p^0} \sum_{\bar{\sigma}} D_{\sigma \bar{\sigma}}^{(j_n)}(W^{-1}(\Lambda, p))a(\mathbf{p}_{\Lambda}, \bar{\sigma}, n), \quad (5.1.11)$$

$$U_0(\Lambda, b)a^\dagger(\mathbf{p}, \sigma, n)U_0^{-1}(\Lambda, b) = \\ = \exp(-i(\Lambda p) \cdot b) \sqrt{(\Lambda p)^0 / p^0} \sum_{\bar{\sigma}} D_{\sigma \bar{\sigma}}^{(j_n)*}(W^{-1}(\Lambda, p))a^\dagger(\mathbf{p}_{\Lambda}, \bar{\sigma}, n), \quad (5.1.12)$$

где  $j_n$  — спин частиц типа  $n$ , а  $\mathbf{p}_{\Lambda}$  — 3-векторная часть импульса  $\Lambda p$ . (Чтобы привести (5.1.11) и (5.1.12) к такому виду, мы воспользовались унитарностью матриц вращения  $D_{\sigma \bar{\sigma}}^{(j_n)}$ .) Как мы видели в § 2.5,

<sup>2)</sup> Приведенные ниже формулы справедливы для массивных частиц. Случай частиц нулевой массы будет рассмотрен в § 5.9.

элемент объема  $d^3 p / p^0$  лоренц-инвариантен, так что мы можем заменить  $d^3 p$  в (5.1.4) и (5.1.5) на  $d^3(\Lambda p) p^0 / (\Lambda p)^0$ . В результате получаем

$$U_0(\Lambda, b) \psi_l^+(x) U_0^{-1}(\Lambda, b) = \sum_{\sigma \bar{\sigma} n} \int d^3(\Lambda p) u_l(x; \mathbf{p}, \sigma, n) \times \\ \times \exp(i(\Lambda p) \cdot b) D_{\sigma \bar{\sigma}}^{(j_n)}(W^{-1}(\Lambda, p)) \sqrt{p^0 / (\Lambda p)^0} a(\mathbf{p}_\Lambda, \bar{\sigma}, n),$$

и

$$U_0(\Lambda, b) \psi_l^-(x) U_0^{-1}(\Lambda, b) = \sum_{\sigma \bar{\sigma} n} \int d^3(\Lambda p) v_l(x; \mathbf{p}, \sigma, n) \times \\ \times \exp(-i(\Lambda p) \cdot b) D_{\sigma \bar{\sigma}}^{(j_n)*}(W^{-1}(\Lambda, p)) \sqrt{p^0 / (\Lambda p)^0} a^\dagger(\mathbf{p}_\Lambda, \bar{\sigma}, n).$$

Мы видим, что поля будут удовлетворять законам преобразований (5.1.6) и (5.1.7) если и только если

$$\sum_{\bar{l}} D_{l \bar{l}}(\Lambda^{-1}) u_{\bar{l}}(\Lambda x + b; \mathbf{p}_\Lambda, \sigma, n) = \\ = \sqrt{p^0 / (\Lambda p)^0} \sum_{\bar{\sigma}} D_{\sigma \bar{\sigma}}^{(j_n)}(W^{-1}(\Lambda, p)) \exp(i(\Lambda p) \cdot b) u_l(x; \mathbf{p}, \bar{\sigma}, n)$$

и

$$\sum_{\bar{l}} D_{l \bar{l}}(\Lambda^{-1}) v_{\bar{l}}(\Lambda x + b; \mathbf{p}_\Lambda, \sigma, n) = \\ = \sqrt{p^0 / (\Lambda p)^0} \sum_{\bar{\sigma}} D_{\sigma \bar{\sigma}}^{(j_n)*}(W^{-1}(\Lambda, p)) \exp(-i(\Lambda p) \cdot b) v_l(x; \mathbf{p}, \bar{\sigma}, n).$$

Последние формулы можно переписать в несколько более удобном виде как

$$\sum_{\bar{\sigma}} u_{\bar{l}}(\Lambda x + b; \mathbf{p}_\Lambda, \bar{\sigma}, n) D_{\bar{\sigma} \sigma}^{(j_n)}(W(\Lambda, p)) = \\ = \sqrt{p^0 / (\Lambda p)^0} \sum_l D_{l \bar{l}}(\Lambda) \exp(i(\Lambda p) \cdot b) u_l(x; \mathbf{p}, \sigma, n) \quad (5.1.13)$$

и

$$\sum_{\bar{\sigma}} v_{\bar{l}}(\Lambda x + b; \mathbf{p}_\Lambda, \bar{\sigma}, n) D_{\bar{\sigma} \sigma}^{(j_n)*}(W(\Lambda, p)) = \\ = \sqrt{p^0 / (\Lambda p)^0} \sum_l D_{\bar{l} l}(\Lambda) \exp(-i(\Lambda p) \cdot b) v_l(x; \mathbf{p}, \sigma, n). \quad (5.1.14)$$

Это фундаментальные соотношения, которые позволяют нам выразить коэффициентные функции  $u_l$  и  $v_l$  через конечное число свободных параметров.

Мы рассмотрим соотношения (5.1.13) и (5.1.14) последовательно для трех типов собственных ортохронных преобразований Лоренца — трансляций, бустов и вращений.

### Трансляции

Пусть сначала в уравнениях (5.1.13) и (5.1.14)  $\Lambda = 1$ , а  $b$  произвольно. Сразу же получаем, что  $u_l(x; \mathbf{p}, \sigma, n)$  и  $v_l(x; \mathbf{p}, \sigma, n)$  должны иметь вид

$$u_l(x; \mathbf{p}, \sigma, n) = (2\pi)^{-3/2} e^{ip \cdot x} u_l(\mathbf{p}, \sigma, n), \quad (5.1.15)$$

$$v_l(x; \mathbf{p}, \sigma, n) = (2\pi)^{-3/2} e^{-ip \cdot x} v_l(\mathbf{p}, \sigma, n), \quad (5.1.16)$$

так что поля представляют собой фурье-преобразования

$$\psi_l^+(x) = \sum_{\sigma, n} (2\pi)^{-3/2} \int d^3 p u_l(\mathbf{p}, \sigma, n) e^{ip \cdot x} a(\mathbf{p}, \sigma, n) \quad (5.1.17)$$

и

$$\psi_l^-(x) = \sum_{\sigma, n} (2\pi)^{-3/2} \int d^3 p v_l(\mathbf{p}, \sigma, n) e^{-ip \cdot x} a^\dagger(\mathbf{p}, \sigma, n). \quad (5.1.18)$$

Множители  $(2\pi)^{-3/2}$  можно было бы включить в определение  $u_l$  и  $v_l$ , но в интегралах Фурье их принято выписывать явно. Из (5.1.15) и (5.1.16) получаем, что соотношения (5.1.13) и (5.1.14) выполняются тогда и только тогда, когда для любого однородного преобразования Лоренца  $\Lambda$

$$\sum_{\bar{\sigma}} u_{\bar{l}}(\mathbf{p}_\Lambda, \bar{\sigma}, n) D_{\bar{\sigma}\sigma}^{(j_n)}(W(\Lambda, p)) = \sqrt{\frac{p^0}{(\Lambda p)^0}} \sum_l D_{\bar{l}l}(\Lambda) u_l(\mathbf{p}, \sigma, n) \quad (5.1.19)$$

и

$$\sum_{\bar{\sigma}} v_{\bar{l}}(\mathbf{p}_\Lambda, \bar{\sigma}, n) D_{\bar{\sigma}\sigma}^{(j_n)*}(W(\Lambda, p)) = \sqrt{\frac{p^0}{(\Lambda p)^0}} \sum_l D_{\bar{l}l}(\Lambda) v_l(\mathbf{p}, \sigma, n). \quad (5.1.20)$$

### Бусты

Положим теперь в (5.1.19) и (5.1.20)  $\mathbf{p} = 0$ . Пусть  $\Lambda$  — буст  $L(q)$ , переводящий частицу массы  $m$  из состояния покоя в состояние с 4-импульсом  $q^\mu$ . Тогда  $L(p) = 1$  и

$$W(\Lambda, p) \equiv L^{-1}(\Lambda p) \Lambda L(p) = L^{-1}(q) L(q) = 1.$$

В этом частном случае равенства (5.1.19) и (5.1.20) сводятся к

$$u_{\bar{l}}(\mathbf{q}, \sigma, n) = (m/q^0)^{1/2} \sum_l D_{\bar{l}l}(L(q)) u_l(0, \sigma, n) \quad (5.1.21)$$

и

$$v_{\bar{l}}(\mathbf{q}, \sigma, n) = (m/q^0)^{1/2} \sum_l D_{\bar{l}l}(L(q)) v_l(0, \sigma, n). \quad (5.1.22)$$

Иначе говоря, если нам известны соответствующие нулевому импульсу функции  $u_l(0, \sigma, n)$  и  $v_l(0, \sigma, n)$ , то для каждого представления  $D(\Lambda)$  однородной группы Лоренца мы знаем функции  $u_l(\mathbf{p}, \sigma, n)$  и  $v_l(\mathbf{p}, \sigma, n)$  при любом  $\mathbf{p}$ . (Явные выражения для матриц  $D_{\bar{l}l}(L(q))$  в случае произвольного представления группы Лоренца будут приведены в § 5.7.)

### Вращения

Пусть теперь  $\mathbf{p} = 0$ , а преобразование Лоренца  $\Lambda$  таково, что  $\mathbf{p}_\Lambda = 0$ ; иначе говоря, преобразование  $\Lambda$  — это вращение  $R$ . Очевидно, что в этом случае  $W(\Lambda, p) = R$ , так что соотношения (5.1.19) и (5.1.20) принимают вид

$$\sum_{\bar{\sigma}} u_{\bar{l}}(0, \bar{\sigma}, n) D_{\bar{\sigma}\sigma}^{(j_n)}(R) = \sum_l D_{\bar{l}l}(R) u_l(0, \sigma, n) \quad (5.1.23)$$

и

$$\sum_{\bar{\sigma}} v_{\bar{l}}(0, \bar{\sigma}, n) D_{\bar{\sigma}\sigma}^{(j_n)*}(R) = \sum_l D_{\bar{l}l}(R) v_l(0, \sigma, n) \quad (5.1.24)$$

или, эквивалентно,

$$\sum_{\bar{\sigma}} u_{\bar{l}}(0, \bar{\sigma}, n) \mathbf{J}_{\bar{\sigma}\sigma}^{(j_n)} = \sum_l \mathcal{J}_{\bar{l}l} u_l(0, \sigma, n) \quad (5.1.25)$$

и

$$\sum_{\bar{\sigma}} v_{\bar{l}}(0, \bar{\sigma}, n) \mathbf{J}_{\bar{\sigma}\sigma}^{(j_n)*} = - \sum_l \mathcal{J}_{\bar{l}l} v_l(0, \sigma, n), \quad (5.1.26)$$

где  $\mathbf{J}^{(j)}$  и  $\mathcal{J}$  — матрицы углового момента в представлениях  $D^{(j)}(R)$  и  $D(R)$  соответственно. Любое представление  $D(\Lambda)$  однородной группы Лоренца при ограничении на пространственные вращения  $R$  дает представление группы вращений; равенства (5.1.25) и (5.1.26) означают, что если поле  $\psi_l^\pm(x)$  описывает частицу спина  $j$ , то полученное таким образом представление  $D(R)$  должно содержать в качестве неприводимой компоненты соответствующее спину  $j$  представление  $D^{(j)}(R)$  (при этом коэффициенты  $u_l(0, \sigma, n)$  и  $v_l(0, \sigma, n)$  просто указывают, как это представление  $D^{(j)}(R)$  вложено в  $D(R)$ ). В § 5.6 мы увидим, что любое *неприводимое* представление однородной группы Лоренца не более чем однократно содержит любое неприводимое представление группы вращений, так что если поля  $\psi_l^+(x)$  и  $\psi_l^-(x)$  преобразуются неприводимым образом, то они определены однозначно с точностью до общего масштабного множителя. Вообще, число свободных параметров для рождающего или уничтожающего поля (включая масштабный множитель) равно числу неприводимых компонент поля.

Теперь можно непосредственно показать, что коэффициентные функции  $u_l(\mathbf{p}, \sigma, n)$  и  $v_l(\mathbf{p}, \sigma, n)$ , даваемые формулами (5.1.21) и (5.1.22), где  $u_l(0, \sigma, n)$  и  $v_l(0, \sigma, n)$  удовлетворяют соотношениям (5.1.23) и (5.1.24), автоматически удовлетворяют более общим требованиям (5.1.19), (5.1.20). Мы оставляем это читателю в качестве упражнения.

Вернемся к принципу кластерной разложимости. После подстановки (5.1.17) и (5.1.19) в формулу (5.1.9) для плотности гамильтониана взаимодействия и интегрирования по координате  $\mathbf{x}$ , запишем гамильтониан взаимодействия в виде

$$\begin{aligned} V = \sum_{NM} \int d^3\mathbf{p}'_1 \dots d^3\mathbf{p}'_N d^3\mathbf{p}_1 \dots d^3\mathbf{p}_M \times \\ \times \sum_{\sigma'_1 \dots \sigma'_N} \sum_{\sigma_1 \dots \sigma_M} \sum_{n'_1 \dots n'_N} \sum_{n_1 \dots n_M} a^\dagger(\mathbf{p}'_1 \sigma'_1 n'_1) \dots a^\dagger(\mathbf{p}'_N \sigma'_N n'_N) \times \\ \times a(\mathbf{p}_M \sigma_M n_M) \dots a(\mathbf{p}_1 \sigma_1 n_1) \times \\ \times \mathcal{V}_{NM}(\mathbf{p}'_1 \sigma'_1 n'_1 \dots \mathbf{p}'_N \sigma'_N n'_N, \mathbf{p}_1 \sigma_1 n_1 \dots \mathbf{p}_M \sigma_M n_M), \quad (5.1.27) \end{aligned}$$

где коэффициентные функции даются выражением

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_{NM}(\mathbf{p}'_1 \sigma'_1 n'_1 \dots, \mathbf{p}_1 \sigma_1 n_1 \dots) = \\ = \delta^3(\mathbf{p}_1 + \dots - \mathbf{p}_1 - \dots) \tilde{\mathcal{V}}_{NM}(\mathbf{p}'_1 \sigma'_1 n'_1 \dots, \mathbf{p}_1 \sigma_1 n_1 \dots) \quad (5.1.28) \end{aligned}$$

с

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{V}}_{NM}(\mathbf{p}'_1 \sigma'_1 n'_1 \dots \mathbf{p}'_N \sigma'_N n'_N, \mathbf{p}_1 \sigma_1 n_1 \dots \mathbf{p}_M \sigma_M n_M) = \\ = (2\pi)^{3-3N/2-3M/2} \sum_{l'_1 \dots l'_N} \sum_{l_1 \dots l_M} g_{l'_1 \dots l'_N, l_1 \dots l_M} \times \\ \times v_{l'_1}(\mathbf{p}'_1 \sigma'_1 n'_1) \dots v_{l'_N}(\mathbf{p}'_N \sigma'_N n'_N) \times \\ \times u_{l_1}(\mathbf{p}_1 \sigma_1 n_1) \dots u_{l_M}(\mathbf{p}_M \sigma_M n_M). \quad (5.1.29) \end{aligned}$$

Такой вид взаимодействия гарантирует выполнение для  $S$ -матрицы принципа кластерной разложимости:  $\mathcal{V}_{NM}$  содержит в качестве множителя единственную дельта-функцию, коэффициент  $\tilde{\mathcal{V}}_{NM}$  при которой не имеет более сильных чем точки ветвления сингулярностей при нулевом импульсе частиц (по крайней мере, для конечного числа типов полей). Фактически мы можем обратить это рассуждение — любой оператор может быть записан в виде (5.1.27), и в соответствии с принципом кластерной разложимости коэффициент  $\mathcal{V}_{NM}$  можно представить в виде (5.1.28) как произведение единственной сохраняющей импульс дельта-функции на гладкую функцию. Любая достаточно гладкая функция (не содержащая дополнительных дельта-функций) может быть записана в виде, аналогичном

(5.1.29)<sup>3)</sup>. Таким образом, из принципа кластерной разложимости и лоренц-инвариантности естественным образом следует, что плотность взаимодействия должна быть построена из рождающих и уничтожающих полей.

Если бы нашей единственной задачей было построение скалярной плотности взаимодействия, удовлетворяющей принципу кластерной разложимости, то нам подошли бы все многочлены (5.1.9) от операторов рождения и уничтожения, ограничения на коэффициенты которых исчерпывались бы условиями инвариантности (5.1.10) и подходящими условиями действительности. Но для лоренц-инвариантности  $S$ -матрицы необходимо, чтобы плотность взаимодействия удовлетворяла коммутационному соотношению (5.1.3). Это условие не выполнено автоматически для любой функции рождающих и уничтожающих полей. Действительно,

$$[\psi_l^+(x), \psi_{\bar{l}}^-(y)]_{\mp} = (2\pi)^{-3} \sum_{\sigma n} \int d^3 p u_l(\mathbf{p}, \sigma, n) v_{\bar{l}}(\mathbf{p}, \sigma, n) e^{ip \cdot (x-y)}. \quad (5.1.30)$$

(Выбор знака “ $\mp$ ” указывает на взятие коммутатора или антисимметрического коммутатора в зависимости от того, являются ли рождаемые и уничтожаемые операторами  $\psi_l^+$  и  $\psi_{\bar{l}}^-$  частицы соответственно бозонами или фермионами.) В общем случае эта величина не обращается в нуль даже при пространственноподобном интервале между  $x$  и  $y$ . Разумется, построение плотности взаимодействия только из операторов рождения или только из операторов уничтожения не решает проблемы, поскольку тогда гамильтониан оказывается неэрмитовым. Единственный выход состоит в том, чтобы объединить рождающие и уничтожающие поля в линейные комбинации

$$\psi_l(x) \equiv \kappa_l \psi_l^+(x) + \lambda_l \psi_l^-(x), \quad (5.1.31)$$

и выбрать константы  $\kappa$  и  $\lambda$  (и все остальные свободные параметры) так, чтобы при пространственноподобном интервале  $x - y$  выполнялось равенство

$$[\psi_l(x), \psi_{l'}(y)]_{\mp} = [\psi_l(x), \psi_{l'}^\dagger(y)]_{\mp} = 0. \quad (5.1.32)$$

В последующих параграфах этой главы мы увидим, как сделать это для различных неприводимо преобразующихся полей. (Включение в (5.1.31) констант  $\kappa$  и  $\lambda$  позволяет нам выбирать нормировку операторов рождения и уничтожения любым удобным способом.) Плотность гамильтониана взаимодействия  $\mathcal{H}(x)$  будет удовлетворять коммутационному соотношению (5.1.3), если она будет построена из полей

<sup>3)</sup> Для произвольных функций индексы  $l$  и  $l'$ , возможно, будут принимать бесконечное число значений. Ограничение областей изменения  $l$  и  $l'$  конечными интервалами связано с принципом перенормируемости, который будет обсуждаться в гл. 12.

(5.1.31) и сопряженных к ним, причем число входящих в нее полей, рождающих и уничтожающих фермионы, будет четным.

Условие (5.1.32) часто называется условием *причинности*, поскольку при пространственноподобном интервале между  $x$  и  $y$  никакой сигнал не может достичь  $y$  из  $x$ , так что измерение  $\psi_l$  в точке  $x$  не должно оказывать влияния на результат измерения  $\psi_{l'}$  или  $\psi_{l'}^\dagger$  в точке  $y$ . Такой взгляд на причинность уместен в случае электромагнитного поля, любая из компонент которого может быть измерена в данной точке пространства времени, как было показано в классической работе Бора и Розенфельда [2]. Но мы будем иметь дело и с такими полями, как дираковское поле электрона, которые не представляются измеримыми в каком-либо смысле. Мы будем придерживаться той точки зрения, что условие (5.1.32) необходимо для лоренци-инвариантности  $S$ -матрицы, не делая никаких дополнительных предположений о причинности или измеримости.

При построении полей (5.1.31), удовлетворяющих (5.1.32), мы встречаемся еще с одним ограничением. Может оказаться, что частицы, рождаемые и уничтожаемые этими полями, несут ненулевые сохраняющиеся квантовые числа (например, электрический заряд). В частности, если частицы типа  $n$  обладают электрическим зарядом  $q(n)$  (оператор электрического заряда обозначим через  $Q$ ), то

$$\begin{aligned} [Q, a(\mathbf{p}, \sigma, n)] &= -q(n)a(\mathbf{p}, \sigma, n), \\ [Q, a^\dagger(\mathbf{p}, \sigma, n)] &= +q(n)a^\dagger(\mathbf{p}, \sigma, n). \end{aligned}$$

Чтобы плотность взаимодействия  $\mathcal{H}(x)$  коммутировала с оператором заряда  $Q$  (или каким-либо другим генератором симметрии), она должна быть построена из полей, коммутаторы которых с  $Q$  имеют простой вид

$$[Q, \psi_l(x)] = -q_l \psi_l(x). \quad (5.1.33)$$

В этом случае мы можем добиться желаемого обращения коммутатора в нуль, выбрав плотность взаимодействия  $\mathcal{H}(x)$  равной сумме произведений полей  $\psi_{l_1}\psi_{l_2} \dots$  и  $\psi_{m_1}^\dagger\psi_{m_2}^\dagger \dots$ , где для каждого слагаемого

$$q_{l_1} + q_{l_2} + \dots - q_{m_1} - q_{m_2} - \dots = 0.$$

Заметим теперь, что соотношение (5.1.33) будет выполнено для некоторой компоненты  $\psi_l^+(x)$  уничтожающего поля тогда и только тогда, когда все типы частиц  $n$ , уничтожаемых этим полем, обладают одинаковым зарядом  $q(n) = q_l$ . Аналогично, (5.1.33) будет выполнено для компоненты  $\psi_l^-(x)$  рождающего поля тогда и только тогда, когда все типы частиц  $\bar{n}$ , рождаемых этим полем, несут один и тот же заряд  $q(\bar{n}) = -q_l$ . Мы видим, что в теории с сохранением некоторых квантовых чисел (таких, как электрический заряд) должно происходить удвоение числа типов частиц, несущих ненулевые сохраняющиеся квантовые числа: если некоторая компонента уничтожающего

поля уничтожает частицу типа  $n$ , то та же компонента рождающего поля должна рождать частицу типа  $\bar{n}$ , известную как *античастица* для частицы типа  $n$ , с противоположными значениями сохраняющихся квантовых чисел. *Такова причина существования античастиц.*

Если представление  $D(\Lambda)$  не является неприводимым, то мы можем выбрать базис так, что матрицы из  $D(\Lambda)$  будут иметь в нем блочно-диагональный вид. Тогда поля, принадлежащие различным блокам, не будут смешиваться при преобразованиях Лоренца. Кроме того, преобразования Лоренца не затрагивают типы частиц. Поэтому вместо того, чтобы работать с одним сложным полем, содержащим много неприводимых компонент и описывающим много типов частиц, мы с этого момента ограничимся рассмотрением полей, неприводимо преобразующихся под действием группы Лоренца (включающей или не включающей пространственную инверсию), уничтожающих частицы только одного типа и рождающих только соответствующие античастицы. Индекс  $n$  при этом становится излишним и будет опускаться. При этом, вообще говоря, возникает необходимость рассматривать много полей такого вида, некоторые из которых, возможно, будут построены из производных полей других типов. В последующих параграфах мы завершим нахождение коэффициентных функций  $u_l(\mathbf{p}, \sigma)$  и  $v_l(\mathbf{p}, \sigma)$ , определим отношение параметров  $\kappa$  и  $\lambda$  и выведем различные соотношения между параметрами частиц и античастиц. Сначала мы рассмотрим поля, преобразующиеся по простейшим неприводимым представлениям группы Лоренца — скалярному, векторному и дираковскому спинорному. Впоследствии мы повторим рассуждения для случая самого общего неприводимого представления.

Скажем несколько слов об уравнениях поля. Из формул (5.1.31), (5.1.17) и (5.1.18) следует, что все компоненты поля массы  $m$  удовлетворяют уравнению Клейна–Гордона

$$(\square - m^2)\psi_l(x) = 0. \quad (5.1.34)$$

Некоторые поля удовлетворяют и другим полевым уравнениям — в случае, если число компонент поля превосходит число независимых состояний частиц. Традиционно в квантовой теории поля принято исходить из таких уравнений (или из приводящих к ним лагранжианов) и выводить разложения полей по одночастичным операторам рождения и уничтожения. Мы будем придерживаться иного подхода: начиная с частиц, мы получим выражения для полей, используя условие лоренц-инвариантности. Полевые уравнения при этом возникают почти автоматически как побочные результаты построения полей.

\* \* \*

Следует отметить одну техническую тонкость. В соответствии с доказанной в § 4.4 теоремой, теория удовлетворяет принципу кластерной разложимости, если взаимодействие можно представить как

сумму составленных из операторов рождения и уничтожения произведений (в каждом из которых все операторы рождения стоят левее всех операторов уничтожения) с коэффициентами, содержащими лишь одну сохраняющую импульс делта функцию. Поэтому мы должны записывать взаимодействие в “нормально упорядоченном” виде

$$V = \int d^3x : \mathcal{F}(\psi(x), \psi^\dagger(x)) :, \quad (5.1.35)$$

где двоеточия означают, что заключенное между ними выражение следует переписать (игнорируя не обращающиеся в нуль коммутаторы, но сохраняя возникающие из-за перестановок фермионных операторов знаки минус) так, чтобы все операторы рождения стояли левее всех операторов уничтожения. Используя коммутационные или антакоммутационные соотношения для полей, можно переписать любую нормально упорядоченную функцию полей в виде суммы обычных произведений полей с  $c$ -числовыми коэффициентами. Существование для  $: \mathcal{F} :$  такого представления делает очевидным тот факт, что  $: \mathcal{F}(\psi(x), \psi^\dagger(x)) :$  будет коммутировать с  $: \mathcal{F}(\psi(y), \psi^\dagger(y)) :$  при пространственноподобном интервале между  $x$  и  $y$ , если поля  $\psi(x)$  и  $\psi^\dagger(x)$  удовлетворяют (5.1.32) и содержат четное число фермионных компонент.

## § 5.2. Причинные скалярные поля

Сначала мы рассмотрим однокомпонентные рождающие и уничтожающие поля  $\phi^+(x)$  и  $\phi^-(x)$ , преобразующиеся по простейшему представлению группы Лоренца — скалярному, где  $D(\Lambda) = 1$ . При ограничении на пространственные вращения оно дает скалярное представление группы вращений, соответствующее  $\mathcal{J} = 0$ . Поэтому уравнения (5.1.25) и (5.1.26) имеют решение только при  $j = 0$ , когда  $\sigma$  и  $\bar{\sigma}$  принимают только нулевые значения. Таким образом, скалярное поле может описывать только частицу нулевого спина. Предположим пока, что поле описывает только один тип частиц (без отличных от них античастиц). Опуская индекс типа частиц  $n$ , спиновый индекс  $\sigma$  и индекс компоненты  $l$ , получаем, что величины  $u_l(0\sigma n)$  и  $v_l(0\sigma n)$  сводятся к константам  $u(0)$  и  $v(0)$ . Принято выбирать нормировку полей рождения и уничтожения так, чтобы обе эти константы имели значение  $(2m)^{-1/2}$ . Уравнения (5.1.21) и (5.1.22) дают просто

$$u(\mathbf{p}) = (2p^0)^{-1/2} \quad (5.2.1)$$

и

$$v(\mathbf{p}) = (2p^0)^{-1/2}. \quad (5.2.2)$$

Следовательно, поля (5.1.17) и (5.1.18) в скалярном случае имеют

вид

$$\phi^+(x) = \int d^3 p (2\pi)^{-3/2} (2p^0)^{-1/2} a(\mathbf{p}) e^{ip \cdot x} \quad (5.2.3)$$

и

$$\phi^-(x) = \int d^3 p (2\pi)^{-3/2} (2p^0)^{-1/2} a^\dagger(\mathbf{p}) e^{-ip \cdot x} = \phi^{+\dagger}(x). \quad (5.2.4)$$

Плотность гамильтониана  $\mathcal{H}(x)$ , являющаяся полиномом от  $\phi^+(x)$  и  $\phi^-(x)$ , автоматически будет удовлетворять соотношению (5.1.9) (иметь трансформационные свойства скаляра). Остается удовлетворить второму условию лоренц-инвариантности  $S$ -матрицы, коммутативности операторов  $\mathcal{H}(x)$  и  $\mathcal{H}(y)$  при пространственноподобном интервале между  $x$  и  $y$ . Если бы  $\mathcal{H}(x)$  был полиномом только от  $\phi^+(x)$ , наша задача была бы тривиальной. Все операторы уничтожения коммутируют или антисимметричны, так что при любых  $x$  и  $y$  поле  $\phi^+(x)$  коммутирует или антисимметрично с полем  $\phi^+(y)$  в зависимости от того, является частица бозоном или фермионом:

$$[\phi^+(x), \phi^+(y)]_\mp = 0. \quad (5.2.5)$$

Поэтому плотность гамильтониана  $\mathcal{H}(x)$ , представляющая собой произвольный многочлен от  $\phi^+(x)$  (в случае фермионов — произвольный четный многочлен), заведомо будет коммутировать с  $\mathcal{H}(y)$  при любых  $x$  и  $y$ . Но, разумеется, из эрмитовости гамильтониана следует, что вместе с  $\phi^+(x)$  плотность  $\mathcal{H}(x)$  должна содержать и  $\phi^{+\dagger}(x) = \phi^-(x)$ , а  $\phi^+(x)$  не обязательно коммутирует или антисимметрична с  $\phi^-(y)$  при любом пространственноподобном интервале  $x - y$ . Используя коммутационные (для бозонов) или антисимметрические (для фермионов) соотношения (4.2.5), получаем

$$[\phi^+(x), \phi^-(y)]_\mp = \int \frac{d^3 p d^3 p'}{(2\pi)^3 (2p^0 \cdot 2p'^0)^{1/2}} e^{ip \cdot x} e^{-ip' \cdot y} \cdot \delta^3(\mathbf{p} - \mathbf{p}'),$$

что сводится к единственному интегралу

$$[\phi^+(x), \phi^-(y)]_\mp = \Delta_+(x - y), \quad (5.2.6)$$

где  $\Delta_+$  — стандартное обозначение для

$$\Delta_+(x) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3 p}{2p^0} e^{ip \cdot x}. \quad (5.2.7)$$

Последнее выражение явно лоренц-инвариантно и поэтому для пространственноподобного  $x$  может зависеть только от инвариантного квадрата  $x^2 > 0$ . Следовательно, мы можем вычислить  $\Delta_+(x)$  в системе отсчета, где

$$x^0 = 0, \quad |\mathbf{x}| = \sqrt{x^2}.$$

Согласно (5.2.7), имеем

$$\Delta_+(x) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3 p}{2\sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}} e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} = \frac{4\pi}{(2\pi)^3} \int_0^\infty \frac{p^2 dp}{2\sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}} \frac{\sin(p\sqrt{x^2})}{p\sqrt{x^2}}.$$

После замены переменной интегрирования на  $u \equiv p/m$  интеграл принимает вид

$$\Delta_+(x) = \frac{m}{4\pi^2\sqrt{x^2}} \int_0^\infty \frac{u du}{\sqrt{u^2 + 1}} \sin(m\sqrt{x^2} u), \quad (5.2.8)$$

и может быть выражен через стандартную функцию Ганкеля:

$$\Delta_+(x) = \frac{m}{4\pi^2\sqrt{x^2}} K_1(m\sqrt{x^2}). \quad (5.2.9)$$

Эта величина отлична от нуля. Как же нам следует поступить? Заметим, что хотя функция  $\Delta_+(x)$  и не равна нулю тождественно, при пространственноподобном  $x$  она четна по  $x^\mu$ . Вместо того, чтобы ограничивать себя только полями  $\psi^+(x)$ , попытаемся построить  $\mathcal{H}(x)$  из линейных комбинаций

$$\phi(x) \equiv \kappa\phi^+(x) + \lambda\phi^-(x).$$

Используя обозначения (5.2.6), для пространственноподобных интервалов  $x - y$  получаем

$$\begin{aligned} [\phi(x), \phi^\dagger(y)]_\mp &= |\kappa|^2 [\phi^+(x), \phi^-(y)]_\mp + |\lambda|^2 [\phi^-(x), \phi^+(y)]_\mp = \\ &= (|\kappa|^2 \mp |\lambda|^2) \Delta_+(x - y), \\ [\phi(x), \phi(y)]_\mp &= \kappa\lambda ([\phi^+(x), \phi^-(y)]_\mp + [\phi^-(x), \phi^+(y)]_\mp) = \\ &= \kappa\lambda (1 \mp 1) \Delta_+(x - y). \end{aligned}$$

Обе эти величины обращаются в нуль тогда и только тогда, когда частица является бозоном (т.е. выбираются верхние знаки), а  $\kappa$  и  $\lambda$  равны по модулю:

$$|\kappa| = |\lambda|.$$

Можно изменить относительную фазу  $\kappa$  и  $\lambda$ , переопределив фазы состояний; при этом  $a(\mathbf{p}) \rightarrow e^{i\alpha}a(\mathbf{p})$ ,  $a^\dagger(\mathbf{p}) \rightarrow e^{-i\alpha}a^\dagger(\mathbf{p})$  и соответственно  $\kappa \rightarrow \kappa e^{i\alpha}$ ,  $\lambda \rightarrow \lambda e^{-i\alpha}$ . Полагая  $\alpha = \frac{1}{2} \operatorname{Arg}(\lambda/\kappa)$ , мы можем сделать фазы  $\lambda$  и  $\kappa$  одинаковыми, что с учетом равенства абсолютных величин означает  $\kappa = \lambda$ .

Переопределив нормировку  $\phi(x)$  так, чтобы поглотить общий множитель  $\kappa = \lambda$ , имеем

$$\phi(x) = \phi^+(x) + \phi^{+\dagger}(x) = \phi^\dagger(x). \quad (5.2.10)$$

Плотность взаимодействия  $\mathcal{H}(x)$  будет коммутировать с  $\mathcal{H}(y)$  при пространственноподобном интервале между  $x$  и  $y$ , если она будет задана как нормально упорядоченный полином от самосопряженного скалярного поля  $\phi(x)$ .

Хотя выбор относительной фазы двух слагаемых в (5.2.10) условлен, мы должны использовать одну и ту же фазу для каждого вхождения соответствующего данной частице скалярного поля в плотность гамильтониана взаимодействия. Предположим, например, что плотность взаимодействия содержит не только поле (5.2.10), но и другое соответствующее той же частице скалярное поле

$$\tilde{\phi}(x) = e^{i\alpha} \phi^+(x) + e^{-i\alpha} \phi^{+\dagger}(x),$$

где  $\alpha$  — произвольная фаза. Как и поле  $\phi$ , такое поле  $\tilde{\phi}$  будет удовлетворять условию причинности в том смысле, что  $\tilde{\phi}(x)$  будет коммутировать с  $\tilde{\phi}(y)$  при пространственноподобном интервале между  $x$  и  $y$ ; но при этом  $\tilde{\phi}(x)$  не будет коммутировать с  $\phi(y)$  при пространственноподобном интервале  $x - y$ , так что эти два поля не могут одновременно содержаться в теории.

Если частицы, рождаемые и уничтожаемые полем  $\phi(x)$ , несут некоторое сохраняющееся квантовое число (например, электрический заряд), то взаимодействие  $\mathcal{H}(x)$  будет сохранять это квантовое число в том и только том случае, когда каждое слагаемое в  $\mathcal{H}$  содержит поровну операторов  $a(\mathbf{p})$  и  $a^\dagger(\mathbf{p})$ . Но такое невозможно, если  $\mathcal{H}(x)$  есть полином от  $\phi(x) = \phi^+(x) + \phi^-(x)$ . Иными словами, для того чтобы плотность взаимодействия  $\mathcal{H}(x)$  коммутировала с оператором заряда  $Q$  (или каким-либо другим генератором симметрии), необходимо, чтобы она была построена из полей, имеющих простые коммутационные соотношения с  $Q$ . Таковы, например, поля  $\phi^+(x)$  и сопряженное к нему,

$$[Q, \phi^+(x)]_- = -q\phi^+(x), \\ [Q, \phi^{+\dagger}(x)]_- = +q\phi^{+\dagger}(x),$$

но не самосопряженное поле (5.2.10).

Чтобы преодолеть возникшие трудности, нужно предположить существование *двух* бесспиновых бозонов с одинаковыми массами  $m$  и противоположными зарядами  $+q$  и  $-q$ . Пусть  $\phi^+(x)$  и  $\phi^{+c}(x)$  — уничтожающие поля для этих двух частиц, так что<sup>1)</sup>

$$[Q, \phi^+(x)]_- = -q\phi^+(x),$$

<sup>1)</sup> Символ “*c*” означает “зарядово-сопряженное” (от англ. “charge conjugate”). Следует иметь в виду, что не несущая сохраняющихся квантовых чисел частица может совпадать или не совпадать со своей античастицей; в первом случае  $a^c(\mathbf{p}) = a(\mathbf{p})$ .

$$[Q, \phi^{+c}(x)]_- = +q\phi^{+c}(x).$$

Определим  $\phi(x)$  как линейную комбинацию

$$\phi(x) = \kappa\phi^+(x) + \lambda\phi^{+c\dagger}(x).$$

Очевидно, что коммутационное соотношение для  $\phi(x)$  и  $Q$  имеет тот же вид, что и коммутационное соотношение для  $\phi^+(x)$  и  $Q$ :

$$[Q, \phi(x)]_- = -q\phi(x).$$

Коммутатор или антисимметрическое соотношение для  $\phi(x)$  с сопряженным к нему полем равен следовательно (для пространственноподобного интервала между  $x$  и  $y$ )

$$\begin{aligned} [\phi(x), \phi^\dagger(y)]_\mp &= |\kappa|^2[\phi^+(x), \phi^{+\dagger}(y)] + |\lambda|^2[\phi^{+c\dagger}(x), \phi^{+c}(y)]_\mp = \\ &= (|\kappa|^2 \mp |\lambda|^2)\Delta_+(x - y), \end{aligned}$$

а  $\phi(x)$  и  $\phi(y)$  заведомо коммутируют или антисимметрически коммутируют друг с другом при любых  $x$  и  $y$ , так как  $\phi^+$  и  $\phi^{+c\dagger}$  уничтожают и рождают различные частицы. При выводе последнего результата мы молчаливо предположили равенство масс частицы и античастицы, так что коммутаторы или антисимметрические соотношения давали одну и ту же функцию  $\Delta_+(x - y)$ . Случай ферми-статистики опять оказывается запрещенным, поскольку  $\phi(x)$  антисимметрически коммутирует с  $\phi^\dagger(y)$  при пространственноподобном интервале между  $x$  и  $y$  только при  $\kappa = \lambda = 0$ , когда поля тождественно обращаются в нуль. Поэтому бесспиновая частица должна быть бозоном.

В случае статистики Бозе комплексное поле  $\phi(x)$  будет коммутировать с  $\phi^\dagger(y)$  при пространственноподобном интервале между  $x$  и  $y$  тогда и только тогда, когда  $|\kappa|^2 = |\lambda|^2$ , а массы частицы и античастицы равны. Переопределив относительную фазу состояний этих двух частиц, мы снова можем добиться совпадения фаз  $\kappa$  и  $\lambda$ , что эквивалентно равенству  $\kappa = \lambda$ . От общего множителя можно избавиться, изменяя нормировку поля  $\phi$ , так что

$$\phi(x) = \phi^+(x) + \phi^{+c\dagger}(x)$$

или, подробнее,

$$\phi(x) = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^{3/2} (2p^0)^{1/2}} [a(\mathbf{p})e^{ip \cdot x} + a^{c\dagger}(\mathbf{p})e^{-ip \cdot x}]. \quad (5.2.11)$$

Эта формула дает единственный возможный вид причинного скалярного поля. Ее можно использовать и для истинно нейтральных частиц, совпадающих со своими античастицами (в этом случае  $a^c(\mathbf{p}) = a(\mathbf{p})$ ), и для частиц, не совпадающих со своими античастицами (в этом случае  $a^c(\mathbf{p}) \neq a(\mathbf{p})$ ).

Впоследствии нам потребуется выражение для коммутатора скалярного поля и сопряженного к нему; имеем

$$[\phi(x), \phi^\dagger(y)] = \Delta(x - y), \quad (5.2.12)$$

где

$$\Delta(x - y) \equiv \Delta_+(x - y) - \Delta_+(y - x) = \int \frac{d^3 p}{2p^0(2\pi)^3} [e^{ip \cdot (x-y)} - e^{-ip \cdot (x-y)}]. \quad (5.2.13)$$

Изучим теперь действие различных дискретных симметрий на построенное поле. Для начала, из результатов § 4.2 следует, что поведение операторов рождения и уничтожения при пространственной инверсии описывается формулами<sup>2)</sup>

$$\mathsf{P}a(\mathbf{p})\mathsf{P}^{-1} = \eta^* a(-\mathbf{p}), \quad (5.2.14)$$

$$\mathsf{P}a^{c\dagger}(\mathbf{p})\mathsf{P}^{-1} = \eta^c a^{c\dagger}(-\mathbf{p}), \quad (5.2.15)$$

где  $\eta$  и  $\eta^c$  — внутренние четности частицы и античастицы соответственно. Применяя эти формулы к случаям уничтожающего поля (5.2.3) и поля, зарядово-сопряженного к рождающему полю (5.2.4), после замены переменной интегрирования  $\mathbf{p}$  на  $-\mathbf{p}$  получаем

$$\mathsf{P}\phi^+(x)\mathsf{P}^{-1} = \eta^* \phi^+(\mathcal{P}x), \quad (5.2.16)$$

$$\mathsf{P}\phi^{+c\dagger}(x)\mathsf{P}^{-1} = \eta^c \phi^{+c\dagger}(\mathcal{P}x), \quad (5.2.17)$$

где, как и ранее,  $\mathcal{P}x = (-\mathbf{x}, x^0)$ . Мы видим, что в общем случае результатом применения пространственной инверсии к скалярному полю  $\phi(x) = \phi^+(x) + \phi^{+c\dagger}(x)$  будет новое поле  $\phi_P = \eta^* \phi^+ + \eta^c \phi^{+c\dagger}$ . Оба поля по отдельности удовлетворяют условию причинности, но если  $\phi$  и  $\phi_P$  участвуют в одном взаимодействии, то возникает трудность: эти поля не обязательно коммутируют в точках, разделенных пространственноподобным интервалом. Единственный способ удовлетворить условиям лоренц-инвариантности, сохранения четности и эрмитовости гамильтониана — потребовать, чтобы  $\phi_P$  было пропорционально  $\phi$ . В этом случае

$$\eta^c = \eta^*. \quad (5.2.18)$$

т.е. внутренняя четность  $\eta\eta^c$  состояния, содержащего бесспиновую частицу и ее античастицу, равна +1 (состояние четно). Теперь можно записать просто

$$\mathsf{P}\phi(x)\mathsf{P}^{-1} = \eta^* \phi(\mathcal{P}x). \quad (5.2.19)$$

<sup>2)</sup> Мы опускаем индекс 0 у операторов  $\mathsf{P}$ ,  $\mathsf{C}$  и  $\mathsf{T}$ , поскольку практически всегда, когда эти инверсии являются симметриями, их действие на *in*-состояния, *out*-состояния и состояния свободных частиц описывается одними и теми же операторами.

Эти результаты применимы и к случаю, когда бесспиновая частица является своей античастицей; тогда  $\eta^c = \eta$  и мы получаем, что внутренняя четность такой частицы действительна:  $\eta = \pm 1$ .

Операцию зарядового сопряжения можно рассмотреть аналогично. Согласно формулам § 4.2,

$$\mathbf{C}a(\mathbf{p})\mathbf{C}^{-1} = \xi^* a^c(\mathbf{p}), \quad (5.2.20)$$

$$\mathbf{C}a^{c\dagger}(\mathbf{p})\mathbf{C}^{-1} = \xi^c a^{\dagger}(\mathbf{p}), \quad (5.2.21)$$

где  $\xi$  и  $\xi^c$  — фазы, определяемые действием оператора зарядового сопряжения на одночастичные состояния. Отсюда следует, что

$$\mathbf{C}\phi^+(x)\mathbf{C}^{-1} = \xi^* \phi^{+c}(x), \quad (5.2.22)$$

$$\mathbf{C}\phi^{+c\dagger}(\mathbf{p})\mathbf{C}^{-1} = \xi^c \phi^{+\dagger}(x). \quad (5.2.23)$$

Для того чтобы поле  $\mathbf{C}\phi(x)\mathbf{C}^{-1}$  было пропорционально полю  $\phi^\dagger(x)$ , с которым оно коммутирует в разделенных пространственноподобным интервалом точках, необходимо выполнение равенства

$$\xi^c = \xi^*. \quad (5.2.24)$$

Как и для обычной четности, внутренняя четность относительно зарядового сопряжения  $\xi\xi^c$  состояния, содержащего бесспиновую частицу и ее античастицу, равна  $+1$ . Имеем

$$\mathbf{C}\phi(x)\mathbf{C}^{-1} = \xi^* \phi^\dagger(x). \quad (5.2.25)$$

Снова можно применить полученные результаты к случаю, когда частица является своей античастицей и  $\xi^c = \xi$ . Получаем, что зарядовая четность частицы, как и ее обычная четность, должна быть действительной,  $\xi = \pm 1$ .

Наконец, перейдем к операции обращения времени. Согласно § 4.2,

$$\mathbf{T}a(\mathbf{p})\mathbf{T}^{-1} = \zeta^* a(-\mathbf{p}), \quad (5.2.26)$$

$$\mathbf{T}a^{c\dagger}(\mathbf{p})\mathbf{T}^{-1} = \zeta^c a^{c\dagger}(-\mathbf{p}). \quad (5.2.27)$$

Вспомнив, что оператор  $\mathbf{T}$  антиунитарен, после замены переменной интегрирования  $\mathbf{p}$  на  $-\mathbf{p}$  получаем

$$\mathbf{T}\phi^+(x)\mathbf{T}^{-1} = \zeta^* \phi^+(-\mathcal{P}x), \quad (5.2.28)$$

$$\mathbf{T}\phi^{+c\dagger}(x)\mathbf{T}^{-1} = \zeta^c \phi^{+c\dagger}(-\mathcal{P}x). \quad (5.2.29)$$

Чтобы поле  $\mathbf{T}\phi(x)\mathbf{T}^{-1}$  выражалось через поле  $\phi$ , взятое в точке с обращенным временем  $-\mathcal{P}x$ , должно быть

$$\zeta^c = \zeta^* \quad (5.2.30)$$

и

$$\mathbf{T}\phi(x)\mathbf{T}^{-1} = \zeta^* \phi(-\mathcal{P}x). \quad (5.2.31)$$

### § 5.3. Причинные векторные поля

Теперь мы перейдем к следующему по сложности полю, преобразующемуся как 4-вектор — по простейшему нетривиальному представлению однородной группы Лоренца. Существуют массивные частицы, например  $W^\pm$  и  $Z^0$ , которые при малых энергиях описываются такими полями. Эти частицы играют все возрастающую роль в современной физике элементарных частиц, так что рассматриваемый пример будет иметь не только методическую ценность. Кроме того, хотя здесь мы будем иметь дело с массивными частицами, один из подходов к квантовой электродинамике состоит в описании фотона при помощи массивного векторного поля в пределе очень малой массы. Сначала мы предположим, что наше поле описывает только один тип частиц (и будем опускать индекс  $n$ ); впоследствии мы рассмотрим возможность того, что поле описывает частицу и отличную от нее античастицу.

В 4-векторном представлении группы Лоренца строки и столбцы матриц  $D(\Lambda)$  нумеруются индексами  $\mu$ ,  $\nu$  и т.д., причем

$$D(\Lambda)^\mu{}_\nu \equiv \Lambda^\mu{}_\nu. \quad (5.3.1)$$

Уничтожающая и рождающая части векторного поля записываются в виде

$$\phi^{+\mu}(x) = \sum_{\sigma} (2\pi)^{-3/2} \int d^3 p u^{\mu}(\mathbf{p}, \sigma) a(\mathbf{p}, \sigma) e^{ip \cdot x}, \quad (5.3.2)$$

$$\phi^{-\mu}(x) = \sum_{\sigma} (2\pi)^{-3/2} \int d^3 p v^{\mu}(\mathbf{p}, \sigma) a^\dagger(\mathbf{p}, \sigma) e^{-ip \cdot x}. \quad (5.3.3)$$

Коэффициентные функции  $u^{\mu}(\mathbf{p}, \sigma)$  и  $v^{\mu}(\mathbf{p}, \sigma)$  для произвольного значения импульса можно выразить через их значения при нулевом импульсе при помощи формул (5.1.21) и (5.1.22), которые в нашем случае сводятся к

$$u^{\mu}(\mathbf{p}, \sigma) = (m/p^0)^{1/2} L(p)^\mu{}_\nu u^{\nu}(0, \sigma), \quad (5.3.4)$$

$$v^{\mu}(\mathbf{p}, \sigma) = (m/p^0)^{1/2} L(p)^\mu{}_\nu v^{\nu}(0, \sigma). \quad (5.3.5)$$

(Мы используем обычное соглашение о суммировании по пространственным индексам  $\mu$ ,  $\nu$  и т.д.) Кроме того, коэффициентные функции для нулевого импульса удовлетворяют условиям (5.1.25) и (5.1.26), откуда

$$\sum_{\bar{\sigma}} u^{\mu}(0, \bar{\sigma}) \mathbf{J}_{\bar{\sigma}\sigma}^{(j)} = \mathcal{J}^{\mu}{}_{\nu} u^{\nu}(0, \sigma) \quad (5.3.6)$$

и

$$-\sum_{\bar{\sigma}} v^{\mu}(0, \bar{\sigma}) \mathbf{J}_{\bar{\sigma}\sigma}^{(j)*} = \mathcal{J}^{\mu}{}_{\nu} v^{\nu}(0, \sigma). \quad (5.3.7)$$

Генераторы вращений  $\mathcal{J}^\mu_\nu$  в 4-векторном представлении даются выражением (5.3.1),

$$(\mathcal{J}_k)^0_0 = (\mathcal{J}_k)^0_i = (\mathcal{J}_k)^i_0 = 0, \quad (5.3.8)$$

$$(\mathcal{J}_k)^i_j = -i\epsilon_{ijk}, \quad (5.3.9)$$

где индексы  $i, j, k$  принимают значения 1, 2 и 3. Заметим, в частности, что  $\mathcal{J}^2$  имеет следующие компоненты:

$$(\mathcal{J}^2)^0_0 = (\mathcal{J}^2)^0_i = (\mathcal{J}^2)^i_0 = 0, \quad (5.3.10)$$

$$(\mathcal{J}^2)^i_j = 2\delta^i_j. \quad (5.3.11)$$

Из (5.3.6) и (5.3.7) следует, что

$$\sum_{ol\sigma} u^0(0, \bar{\sigma})(\mathbf{J}^{(j)})_{\bar{\sigma}\sigma}^2 = 0, \quad (5.3.12)$$

$$\sum_{ol\sigma} u^i(0, \bar{\sigma})(\mathbf{J}^{(j)})_{\bar{\sigma}\sigma}^2 = 2u^i(0, \sigma), \quad (5.3.13)$$

и

$$\sum_{ol\sigma} v^0(0, \bar{\sigma})(\mathbf{J}^{(j)*})_{\bar{\sigma}\sigma}^2 = 0, \quad (5.3.14)$$

$$\sum_{ol\sigma} v^i(0, \bar{\sigma})(\mathbf{J}^{(j)*})_{\bar{\sigma}\sigma}^2 = 2v^i(0, \sigma). \quad (5.3.15)$$

Вспомним также, что  $(\mathbf{J}^{(j)})_{\bar{\sigma}\sigma}^2 = j(j+1)\delta_{\bar{\sigma}\sigma}$ . Из (5.3.12)–(5.3.15) видно, что для спина частицы, описываемой векторным полем, имеются ровно две возможности: либо  $j = 0$ , и тогда при  $\mathbf{p} = 0$  только компоненты  $u^0$  и  $v^0$  отличны от нуля, либо  $j = 1$  (так что  $j(j+1) = 2$ ) и при  $\mathbf{p} = 0$  только пространственные компоненты  $u^i$  и  $v^i$  отличны от нуля. Рассмотрим подробнее каждую из этих возможностей.

### Спин нуль

Пользуясь свободой в выборе нормировки поля, мы можем положить значения единственных ненулевых компонент  $u^\mu(0)$  и  $v^\mu(0)$  равными

$$u^0(0) = i(m/2)^{1/2},$$

$$v^0(0) = -i(m/2)^{1/2}.$$

(Индекс  $\sigma$  принимает в этой формуле единственное значение нуль и потому опущен.) Тогда из (5.3.4) и (5.3.5) для произвольного импульса получаем

$$u^\mu(\mathbf{p}) = ip^\mu(2p^0)^{-1/2} \quad (5.3.16)$$

и

$$v^\mu(\mathbf{p}) = -ip^\mu(2p^0)^{-1/2}. \quad (5.3.17)$$

Векторные уничтожающие и рождающие поля в этом случае оказываются не чем иным, как производными скалярных уничтожающих и рождающих полей для бессpinовой частицы  $\phi^\pm$ , которые мы построили в предыдущем параграфе:

$$\phi^{+\mu}(x) = \partial^\mu \phi^+(x), \quad \phi^{-\mu}(x) = \partial^\mu \phi^-(x). \quad (5.3.18)$$

Очевидно, что причинное векторное поле для бессpinовой частицы также будет производной причинного скалярного поля:

$$\phi^\mu(x) = \phi^+(x) + \phi^{-\mu}(x) = \partial^\mu \phi(x). \quad (5.3.19)$$

Поэтому какой-либо дополнительный анализ этого случая не представляется необходимым.

### Спин единица

Из равенств (5.3.6) и (5.3.7) непосредственно видно, что при  $\sigma = 0$  векторы  $u^i(0, 0)$  и  $v^i(0, 0)$  направлены вдоль третьей координатной оси. Выбирая нормировку полей соответствующим образом, мы можем положить эти векторы равными

$$u^\mu(0, 0) = v^\mu(0, 0) = (2m)^{-1/2} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (5.3.20)$$

где компоненты 4-векторов всегда приводятся в порядке 1, 2, 3, 0. Чтобы получить выражения для компонент с другими значениями  $\sigma$ , найдем при помощи формул (5.3.6), (5.3.7) и (5.3.9) результат применения к  $u$  и  $v$  повышающего и понижающего операторов  $J_1^{(1)} \pm iJ_2^{(1)}$ . Имеем

$$u^\mu(0, +1) = -v^\mu(0, -1) = -\frac{1}{\sqrt{2}} (2m)^{-1/2} \begin{bmatrix} 1 \\ +i \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (5.3.21)$$

$$u^\mu(0, -1) = -v^\mu(0, +1) = \frac{1}{\sqrt{2}} (2m)^{-1/2} \begin{bmatrix} 1 \\ -i \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (5.3.22)$$

Пользуясь (5.3.4) и (5.3.5), получаем

$$u^\mu(\mathbf{p}, \sigma) = v^{\mu*}(\mathbf{p}, \sigma) = (2p^0)^{-1/2} e^\mu(\mathbf{p}, \sigma), \quad (5.3.23)$$

где

$$e^\mu(\mathbf{p}, \sigma) \equiv L^\mu{}_\nu(\mathbf{p}) e^\nu(0, \sigma) \quad (5.3.24)$$

и

$$e^\mu(0, 0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad e^\mu(0, +1) = -\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ +i \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad e^\mu(0, -1) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ -i \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (5.3.25)$$

Уничтожающие и рождающие поля (5.3.2) и (5.3.3) в этом случае даются выражениями

$$\phi^{+\mu}(x) = \phi^{-\mu\dagger}(x) = (2\pi)^{-3/2} \sum_{\sigma} \int \frac{d^3 p}{\sqrt{2p^0}} e^\mu(\mathbf{p}, \sigma) a(\mathbf{p}, \sigma) e^{ip \cdot x}. \quad (5.3.26)$$

Поля  $\phi^{+\mu}(x)$  и  $\phi^{+\nu}(y)$  заведомо коммутируют или антисимметричны при любых  $x$  и  $y$ , но о полях  $\phi^{+\mu}(x)$  и  $\phi^{-\nu}(y)$  этого сказать нельзя. Их коммутатор (в случае бозонов) или антисимметричный (в случае фермионов) равен

$$[\phi^{+\mu}(x), \phi^{-\nu}(y)]_{\mp} = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3 2p^0} e^{ip \cdot (x-y)} \Pi^{\mu\nu}(\mathbf{p}), \quad (5.3.27)$$

где

$$\Pi^{\mu\nu}(\mathbf{p}) \equiv \sum_{\sigma} e^\mu(\mathbf{p}, \sigma) e^{\nu*}(\mathbf{p}, \sigma). \quad (5.3.28)$$

Прямое вычисление с использованием (5.3.25) показывает, что  $\Pi^{\mu\nu}(0)$  является матрицей проектора на подпространство, ортогональное направлению орта времени; из (5.3.24) тогда получаем, что  $\Pi^{\mu\nu}(\mathbf{p})$  — матрица проектора на подпространство, ортогональное 4-импульсу  $p^\mu$ :

$$\Pi^{\mu\nu}(\mathbf{p}) = \eta^{\mu\nu} + p^\mu p^\nu / m^2. \quad (5.3.29)$$

Коммутатор или антисимметричный (5.3.27) может, следовательно, быть выражен через функцию  $\Delta_+$ , определенную в предыдущем параграфе:

$$[\phi^{+\mu}(x), \phi^{-\nu}(y)]_{\mp} = \left[ \eta^{\mu\nu} - \frac{\partial^\mu \partial^\nu}{m^2} \right] \Delta_+(x - y). \quad (5.3.30)$$

Для нас важно, что это выражение не обращается в нуль при пространственноподобном интервале между  $x$  и  $y$  и четко по  $x - y$ . Поэтому мы можем повторить рассуждения из предыдущего параграфа и попытаться построить причинное поле, образовав линейную комбинацию рождающих и уничтожающих полей

$$v^\mu(x) \equiv \kappa \phi^{+\mu}(x) + \lambda \phi^{-\mu}(x).$$

Для пространственноподобного интервала  $x - y$  имеем

$$[v^\mu(x), v^\nu(y)]_{\mp} = \kappa \lambda [1 \mp 1] \left[ \eta^{\mu\nu} - \frac{\partial^\mu \partial^\nu}{m^2} \right] \Delta_+(x - y)$$

и

$$[v^\mu(x), v^{\nu\dagger}(y)]_\mp = (|\kappa|^2 \mp |\lambda|^2) \left[ \eta^{\mu\nu} - \frac{\partial^\mu \partial^\nu}{m^2} \right] \Delta_+(x - y).$$

Для обращения обоих этих выражений в нуль необходимо и достаточно, чтобы частица спина единицы была *бозоном*, а для констант  $\kappa$  и  $\lambda$  выполнялось  $|\kappa| = |\lambda|$ . Подходящим образом определяя фазы одночастичных состояний, мы можем сделать равными фазы  $\kappa$  и  $\lambda$  (при этом получим  $\kappa = \lambda$ ). Переопределив нормировку поля, мы избавимся и от оставшегося общего множителя  $\kappa$ . В результате для причинного векторного поля, соответствующего массивной частице спина единицы, получим

$$v^\mu(x) = \phi^{+\mu}(x) + \phi^{+\mu\dagger}(x). \quad (5.3.31)$$

Заметим, что это поле действительно:

$$v^\mu(x) = \phi^{\mu\dagger}(x). \quad (5.3.32)$$

Но если описываемые таким полем частицы обладают ненулевым значением некоторого сохраняющегося квантового числа  $Q$ , то мы не сможем построить при помощи этого поля сохраняющее  $Q$  взаимодействие. Нам следует предположить существование другого бозона, обладающего теми же массой и спином, но несущего противоположный заряд  $Q$ , и построить причинное поле вида

$$v^\mu(x) = \phi^{+\mu}(x) + \phi^{+c\mu\dagger}(x) \quad (5.3.33)$$

или, подробнее,

$$\begin{aligned} v^\mu(x) &= \\ &= (2\pi)^{-3/2} \sum_{\sigma} \int \frac{d^3 p}{\sqrt{2p^0}} [e^\mu(\mathbf{p}, \sigma) a(\mathbf{p}, \sigma) e^{ip \cdot x} + e^{\mu*}(\mathbf{p}, \sigma) a^{c\dagger}(\mathbf{p}, \sigma) e^{-ip \cdot x}], \end{aligned} \quad (5.3.34)$$

Индекс “ $c$ ” указывает на то, что соответствующий оператор рождает античастицу, зарядово-сопряженную к уничтожаемой оператором  $\phi^{+\mu}(x)$  частице. Мы снова получили причинное поле, но на этот раз оно не является действительным. Написанной формулой можно пользоваться для истинно нейтральной частицы спина единица, являющейся своей собственной античастицей — при этом следует положить  $a^c(\mathbf{p}) = a(\mathbf{p})$ . В любом случае коммутатор векторного поля с сопряженным к нему равен

$$[v^\mu(x), v^{\nu\dagger}(y)] = \left[ \eta^{\mu\nu} - \frac{\partial^\mu \partial^\nu}{m^2} \right] \Delta(x - y), \quad (5.3.35)$$

где  $\Delta(x - y)$  дается формулой (5.2.13).

Действительное и комплексное поля, которые мы построили для массивной частицы спина единица, удовлетворяют любопытным полевым уравнениям. Во-первых, поскольку для  $p^\mu$  из показателя экс-

поненты в (5.3.26) выполнено соотношение  $p^2 = -m^2$ , поле удовлетворяет уравнению Клейна–Гордона

$$(\square - m^2)v^\mu(x) = 0 \quad (5.3.36)$$

(аналогично случаю скалярного поля). Во-вторых, поскольку из равенства (5.3.24) следует, что

$$e^\mu(\mathbf{p}, \sigma)p_\mu = 0, \quad (5.3.37)$$

получаем новое уравнение

$$\partial_\mu v^\mu = 0. \quad (5.3.38)$$

В пределе малой массы уравнения (5.3.36) и (5.3.38) принимают вид уравнений для векторного потенциала в электродинамике (в калибровке Лоренца).

Однако мы не можем получить электродинамику из какой-либо теории массивных частиц спина единица посредством устремления массы к нулю. Препятствия становятся очевидными при рассмотрении сечения рождения частиц спина единица при плотности взаимодействия вида  $\mathcal{H} = J_\mu v^\mu$ , где  $J_\mu$  — некоторый 4-вектор тока. После возведения матричного элемента в квадрат и суммирования по  $z$ -компонентам спина частицы спина единица получим для сечения выражение, пропорциональное

$$\sum_\sigma |\langle J_\mu \rangle e^\mu(\mathbf{p}, \sigma)^*|^2 = \langle J_\mu \rangle \langle J_\mu \rangle^* \Pi^{\mu\nu}(\mathbf{p}),$$

где  $\mathbf{p}$  — импульс испускаемой частицы спина единица, а  $\langle J_\mu u \rangle$  — матричный элемент тока (скажем, при  $x = 0$ ) между начальным и конечным состоянием всех остальных частиц. Из-за слагаемого  $p^\mu p^\nu/m^2$  в  $\Pi^{\mu\nu}(\mathbf{p})$  сечение излучения будет, вообще говоря, обращаться в бесконечность при  $m \rightarrow 0$ . Единственный способ избежать этого состоит в том, чтобы потребовать обращения в нуль величины  $\langle J_\mu u \rangle p^\mu$ , что в координатном пространстве представляет собой просто условие *сохранения* тока  $J^\mu$ , т.е.  $\partial_\mu J^\mu = 0$ . Действительно, в необходимости сохранения тока можно убедиться простым подсчетом числа состояний. Массивная частица спина единица обладает тремя независимыми спиновыми состояниями (в качестве которых можно взять состояния со спиральностями +1, 0 и 1), в то время как любая безмассовая частица спина единица (например, фотон) может обладать лишь спиральностями +1 и -1. Условие сохранения тока просто запрещает излучение частиц со спиральностью 0 в пределе нулевой массы.

Дискретные симметрии могут быть рассмотрены аналогично разобранному в предыдущем параграфе случаю скалярного поля. Чтобы найти результат применения пространственной инверсии, нам требуется формула для  $e^\mu(-\mathbf{p}, \sigma)$ . Используя равенство

$$L^\mu{}_\nu(-\mathbf{p}) = \mathcal{P}^\mu{}_\rho L^\rho{}_\tau(\mathbf{p}) \mathcal{P}^\tau{}_\nu$$

и уравнение (5.3.24), получаем

$$e^\mu(-\mathbf{p}, \sigma) = -\mathcal{P}^\mu{}_\nu e^\nu(\mathbf{p}, \sigma). \quad (5.3.39)$$

Кроме того, для определения результата действия операции обращения времени нам нужна формула для  $(-1)^{1+\sigma} e^{\mu*}(-\mathbf{p}, -\sigma)$ . Из равенства  $(-1)^{1+\sigma} e^{\mu*}(0, -\sigma) = -e^\mu(0, \sigma)$  и приведенного выше выражения для  $L^\mu{}_\nu(-\mathbf{p})$  находим

$$(-1)^{1+\sigma} e^{\mu*}(-\mathbf{p}, -\sigma) = \mathcal{P}^\mu{}_\nu e^\nu(\mathbf{p}, \sigma). \quad (5.3.40)$$

При помощи этих результатов и полученных в § 4.2 трансформационных свойств операторов рождения и уничтожения можно непосредственно получить трансформационные свойства рождающих и уничтожающих полей относительно дискретных симметрий. Снова находим, что из условия коммутативности при пространственноподобном интервале между соответствующими точками пространства–времени причинного поля и результата применения к нему операции дискретной симметрии следует, что внутренние фазы частицы спина единица и ее античастицы относительно пространственной инверсии, зарядового сопряжения и обращения времени должны удовлетворять соотношениям

$$\eta^c = \eta^*, \quad (5.3.41)$$

$$\xi^c = \xi^*, \quad (5.3.42)$$

$$\zeta^c = \zeta^*. \quad (5.3.43)$$

В частности, если частица совпадает со своей античастицей, все эти фазы должны быть действительными. Если все эти условия выполнены, то законы преобразования причинного векторного поля (5.3.34) даются формулами

$$\mathsf{P}v^\mu(x)\mathsf{P}^{-1} = -\eta^*\mathcal{P}^\mu{}_\nu v^\nu(\mathcal{P}x), \quad (5.3.44)$$

$$\mathsf{C}v^\mu(x)\mathsf{C}^{-1} = \xi^*v^{\mu\dagger}(x), \quad (5.3.45)$$

$$\mathsf{T}v^\mu(x)\mathsf{T}^{-1} = \zeta^*\mathcal{P}^\mu{}_\nu v^\nu(-\mathcal{P}x). \quad (5.3.46)$$

Например, знак минус в (5.3.44) означает, что векторное поле, преобразующееся как полярный вектор (без дополнительных фаз или знаков, сопровождающих матрицу  $\mathcal{P}^\mu{}_\nu$ ), описывает частицу спина единица с внутренней четностью  $\eta = -1$ .

## § 5.4. Формализм Дирака

Среди совокупности всех представлений однородной группы Лоренца, имеется одно представление, которое играет в физике особую роль. Как мы видели в § 1.1, в теории электрона это представление

впервые использовал Дирак [3]. Однако, как это часто случается, математикам [4] оно к тому времени уже было известно, поскольку это представление лежит в основе одного из двух больших классов представлений групп вращений и групп Лоренца (фактически — их накрывающих групп, см. § 2.7) в пространствах любого числа измерений. С той точки зрения, которой мы здесь придерживаемся, структура и свойства любого квантового поля определяются представлением однородной группы Лоренца, по которому оно преобразуется. Поэтому естественно будет изложить формализм Дирака в том виде, в котором он изначально появился в математике, а не в форме, введенной Дираком.

Под представлением однородной группы Лоренца мы понимаем набор матриц  $D(\Lambda)$ , удовлетворяющих групповому закону умножения

$$D(\bar{\Lambda})D(\Lambda) = D(\bar{\Lambda}\Lambda).$$

Как и при изучении свойств унитарных операторов  $U(\Lambda)$ , можно рассмотреть инфинитезимальный случай

$$\Lambda^\mu{}_\nu = \delta^\mu{}_\nu + \omega^\mu{}_\nu, \quad (5.4.1)$$

$$\omega_{\mu\nu} = -\omega_{\nu\mu}. \quad (5.4.2)$$

Тогда

$$D(\Lambda) = 1 + \frac{i}{2} \omega_{\mu\nu} \mathcal{J}^{\mu\nu}, \quad (5.4.3)$$

где  $\mathcal{J}^{\mu\nu} = -\mathcal{J}^{\nu\mu}$  образуют набор матриц, удовлетворяющих коммутационным соотношениям (2.4.12):

$$i[\mathcal{J}^{\mu\nu}, \mathcal{J}^{\rho\sigma}] = \eta^{\nu\rho} \mathcal{J}^{\mu\sigma} - \eta^{\mu\rho} \mathcal{J}^{\nu\sigma} - \eta^{\sigma\mu} \mathcal{J}^{\rho\nu} + \eta^{\sigma\nu} \mathcal{J}^{\rho\mu}. \quad (5.4.4)$$

Для построения такого набора предположим, что нам удалось найти матрицы  $\gamma^\mu$ , удовлетворяющие антикоммутационным соотношениям

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2\eta^{\mu\nu}. \quad (5.4.5)$$

Пусть теперь

$$\mathcal{J}^{\mu\nu} = -\frac{i}{4} [\gamma^\mu, \gamma^\nu]. \quad (5.4.6)$$

Пользуясь соотношением (5.4.5), легко показать, что

$$[\mathcal{J}^{\mu\nu}, \gamma^\rho] = -i\gamma^\mu \eta^{\nu\rho} + i\gamma^\nu \eta^{\mu\rho}, \quad (5.4.7)$$

откуда сразу следует, что определенные согласно (5.4.6) матрицы действительно удовлетворяют желаемому коммутационному соотношению (5.4.4). Далее мы будем предполагать, что матрицы  $\gamma_\mu$  *неприводимы*, т.е. не существует собственного подпространства, инвариантного относительно всех этих матриц. В противном случае можно выбрать некоторое подмножество компонент поля, преобразующихся согласно (5.4.3) и (5.4.6), с неприводимым набором матриц  $\gamma_\mu$ .

Любое множество матриц, удовлетворяющих соотношениям вида (5.4.5) (или их евклидовым аналогам, получаемым при помощи замены  $\eta_{\mu\nu}$  на символ Кронекера), называется *алгеброй Клиффорда*. Важность построенного представления однородной группы Лоренца (точнее, ее накрывающей группы) определяется тем, что самое общее неприводимое представление группы Лоренца реализуется либо тензором, либо спинором, преобразующимся согласно (5.4.3) и (5.4.6), либо прямым произведением таких тензора и спинора. Мы доказали это утверждение в § 5.6.

Коммутационное соотношение (5.4.7) можно сформулировать иначе, сказав, что  $\gamma^\rho$  — вектор. Последнее следует понимать как выполнение равенства

$$D(\Lambda)\gamma^\rho D^{-1}(\Lambda) = \Lambda_\sigma{}^\rho \gamma^\sigma \quad (5.4.8)$$

с  $D(\Lambda)$  из (5.4.3). В том же смысле единичная матрица является *скаляром*:

$$D(\Lambda) 1 D^{-1}(\Lambda) = 1, \quad (5.4.9)$$

а из (5.4.4) следует, что  $\mathcal{J}^{\rho\sigma}$  — антисимметричный тензор:

$$D(\Lambda) \mathcal{J}^{\rho\sigma} D^{-1}(\Lambda) = \Lambda_\mu{}^\rho \Lambda_\nu{}^\sigma \mathcal{J}^{\mu\nu}. \quad (5.4.10)$$

Из матриц  $\gamma^\mu$  можно построить и другие полностью антисимметричные тензоры

$$\mathcal{A}^{\rho\sigma\tau} \equiv \gamma^{[\rho} \gamma^\sigma \gamma^{\tau]}, \quad (5.4.11)$$

$$\mathcal{P}^{\rho\sigma\tau\eta} = \gamma^{[\rho} \gamma^\sigma \gamma^{\tau]} \gamma^{\eta]}. \quad (5.4.12)$$

Скобки здесь представляют собой стандартные обозначения, предписывающие просуммировать по всем перестановкам, взяв четные перестановки со знаком плюс, а нечетные со знаком минус. Например, правая часть (5.4.11) служит сокращенной записью для

$$\mathcal{A}^{\rho\sigma\tau} \equiv \gamma^\rho \gamma^\sigma \gamma^\tau - \gamma^\rho \gamma^\tau \gamma^\sigma - \gamma^\sigma \gamma^\rho \gamma^\tau + \gamma^\tau \gamma^\rho \gamma^\sigma + \gamma^\sigma \gamma^\tau \gamma^\rho - \gamma^\tau \gamma^\sigma \gamma^\rho.$$

Многократно применяя (5.4.5), можно представить любое произведение  $\gamma$ -матриц в виде линейной комбинации антисимметризованных произведений  $\gamma$ -матриц (с коэффициентами, равными произведениям компонент метрического тензора). Следовательно полностью антисимметричные тензоры образуют базис алгебры матриц, порожденной матрицами Дирака.

В этом формализме автоматически содержится преобразование четности, обычно записываемое как

$$\beta \equiv i\gamma^0. \quad (5.4.13)$$

В приложении к матрицам Дирака оно дает

$$\beta\gamma^i\beta^{-1} = -\gamma^i, \quad \beta\gamma^0\beta^{-1} = +\gamma^0. \quad (5.4.14)$$

(Мы используем здесь латинский индекс, так как греческий принимает значения 0, 1, 2, ...) При применении того же самого преобразования к любому произведению  $\gamma$ -матриц будет возникать знак плюс или минус в зависимости от того, содержит это произведение четное или нечетное число  $\gamma$ -матриц с пространственными индексами. В частности,

$$\beta \mathcal{J}^{ij} \beta^{-1} = \mathcal{J}^{ij}, \quad (5.4.15)$$

$$\beta \mathcal{J}^{i0} \beta^{-1} = -\mathcal{J}^{i0}. \quad (5.4.16)$$

Все сказанное в этом параграфе было применимо в случае любого числа пространственных измерений и любой "метрики"  $\eta_{\mu\nu}$ . В четырех пространственно-временных измерениях появляются особенности, связанные с тем, что полностью антисимметричный тензор может иметь не более четырех индексов, так что последовательность **1**,  $\gamma^\rho$ ,  $\mathcal{J}^{\rho\sigma}$ ,  $\mathcal{A}^{\rho\sigma\tau}$ , ... обрывается на тензоре (5.4.12). Далее, все эти тензоры различным образом преобразуются под действием группы Лоренца и/или преобразования четности, так что все их компоненты линейно независимы.<sup>1)</sup>

Число линейно независимых компонент тензоров равно единице для **1**, четырем для  $\gamma^\rho$ , шести для  $\mathcal{J}^{\rho\sigma}$ , четырем для  $\mathcal{A}^{\rho\sigma\tau}$  и одному для  $\mathcal{P}^{\mu\nu\rho\sigma}$ , что в сумме дает 16 компонент. (Вообще, число линейно независимых компонент полностью антисимметричного тензора с  $n$  индексами в  $d$  измерениях равно биномиальному коэффициенту  $d!/n!(d-n)!$ ) Существует не более  $\nu^2$  линейно независимых матриц размера  $\nu \times \nu$ , так что размерность матриц не меньше  $\sqrt{16} = 4$ . Матрицы Дирака минимальной размерности с необходимостью неприводимы; в противном случае инвариантное относительно них собственное подпространство давало бы пример представления меньшей размерности. Так что далее мы считаем, что  $\gamma$ -матрицы имеют размер  $4 \times 4$ .

(Вообще, в пространстве четного числа  $d$  измерений можно построить антисимметричные тензоры с  $0, 1, \dots, d$  индексами, суммарное количество независимых компонент которых будет равно

$$\sum_{n=0}^d \frac{d!}{n!(d-n)!} = 2^d,$$

так что  $\gamma$ -матрицы должны иметь размерность не ниже  $2^{d/2}$ . В про-

<sup>1)</sup> Линейную независимость рассматриваемых матриц можно показать и другим способом — заметив, что они образуют ортогональное семейство (относительно скалярного произведения, определенного как след произведения матриц). Ни одна из матриц не равна нулю, поскольку каждая компонента каждого тензора пропорциональна произведению различных  $\gamma$ -матриц, а квадрат такого произведения равен взятыму со знаком плюс или минус произведению квадратов  $\gamma$ -матриц, т.е.  $\pm 1$ .

пространстве (пространство–времени) нечетной размерности полностью антисимметричные тензоры рангов  $n$  и  $d - n$  связаны соотношениями<sup>2)</sup>

$$\gamma^{[\mu_1 \gamma^{\mu_2} \dots \gamma^{\mu_r}]} \propto \epsilon^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_d} \gamma_{[\mu_{r+1}} \gamma_{\mu_{r+2}} \dots \gamma_{\mu_d]},$$

где  $r = 0, 1, 2, \dots, d - 1$ , через  $\epsilon^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_d}$  обозначен полностью антисимметричный тензор, а при  $r = 0$  левую часть полагаем равной единичной матрице. При этом существуют лишь  $2^{d-1}$  независимых тензора, так что  $\gamma$ -матрицы должны иметь размерность не ниже  $2^{(d-1)/2}$ .)

Вернемся теперь к четырехмерному пространству–времени и приведем явную конструкцию  $\gamma$ -матриц размера  $4 \times 4$ . Один из наиболее удобных вариантов:

$$\gamma^0 = -i \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \gamma = -i \begin{bmatrix} 0 & \sigma \\ -\sigma & 0 \end{bmatrix}, \quad (5.4.17)$$

где **1** — единичная матрица размера  $2 \times 2$ , а компоненты  $\sigma$  — обычные матрицы Паули

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (5.4.18)$$

(Матрицы  $\sigma_i$  дают конструкцию  $2 \times 2$   $\gamma$ -матриц в трех измерениях.) Можно показать [5], что любой неприводимый набор  $\gamma$ -матриц получается из (5.4.17) посредством перехода к другому базису. При помощи (5.4.17) легко найти выражения для генераторов группы Лоренца (5.4.6):

$$\mathcal{J}^{ij} = \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} \begin{bmatrix} \sigma_k & 0 \\ 0 & \sigma_k \end{bmatrix}, \quad (5.4.19)$$

$$\mathcal{J}^{i0} = +\frac{1}{2} \begin{bmatrix} \sigma_i & 0 \\ 0 & -\sigma_i \end{bmatrix}. \quad (5.4.20)$$

(Здесь  $\epsilon_{ijk}$  — полностью антисимметричный тензор с  $\epsilon_{123} = +1$ .) Заметим, что эти генераторы блочно-диагональны, так что при помощи матриц Дирака мы построили *приводимое* представление собственной ортохронной группы Лоренца, являющееся прямой суммой двух неприводимых представлений с  $\mathcal{J}^{ij} = \pm i \epsilon_{ijk} \mathcal{J}^{k0}$ .

<sup>2)</sup> Это соотношение не разрушается и при включении пространственной инверсии в представление Дирака группы Лоренца в пространстве–времени нечетного числа измерений, поскольку в этом случае тензор  $\epsilon^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_d}$  четен относительно инверсии пространственных координат. Если пространственная инверсия нас не интересует, можно построить неприводимое  $2^{(d-1)/2}$ -мерное представление собственной ортохронной группы Лоренца в пространстве–времени четного числа измерений, наложив приведенное выше условие на антисимметризованные произведения  $r$  и  $d - r$  матриц Дирака. Пример такой конструкции дают подматрицы в (5.4.19) и (5.4.20) ниже.

Удобно переписать выражения для антисимметричных тензоров (5.4.11) и (5.4.12) в более простом виде. Тензор (5.4.12) полностью антисимметричен и потому пропорционален псевдотензору  $\epsilon^{\rho\sigma\tau\mu}$ , заданному условием полной антисимметрии и значением  $\epsilon^{0123} = +1$ . Полагая  $\rho, \sigma, \tau, \mu$  равными 0, 1, 2, 3 соответственно, получаем

$$\mathcal{P}^{\rho\sigma\tau\eta} = 4! i \epsilon^{\rho\sigma\tau\eta} \gamma_5, \quad (5.4.21)$$

где

$$\gamma_5 \equiv -i \gamma^0 \gamma^1 \gamma^2 \gamma^3. \quad (5.4.22)$$

Матрица  $\gamma_5$  является псевдоскаляром в том смысле, что

$$[\mathcal{J}^{\rho\sigma}, \gamma_5] = 0, \quad (5.4.23)$$

$$\beta \gamma_5 \beta^{-1} = -\gamma_5. \quad (5.4.24)$$

Аналогично, тензор  $\mathcal{A}^{\rho\sigma\tau}$  должен быть пропорционален свертке  $\epsilon^{\rho\sigma\tau\mu}$  с некоторой матрицей  $\mathcal{A}_\eta$ ; полагая  $(\rho, \sigma, \tau)$  равным последовательно  $(0, 1, 2)$ ,  $(0, 1, 3)$ ,  $(0, 2, 3)$  и  $(1, 2, 3)$ , находим

$$\mathcal{A}^{\rho\sigma\tau} = 3! i \epsilon^{\rho\sigma\tau\eta} \gamma_5 \gamma_\eta. \quad (5.4.25)$$

Таким образом, в качестве 16 линейно независимых матриц  $4 \times 4$  можно выбрать компоненты скаляра **1**, вектора  $\gamma^\rho$ , антисимметричного тензора  $\mathcal{J}^{\rho\sigma}$ , “аксиального вектора”  $\gamma_5 \gamma_\eta$  и псевдоскаляра  $\gamma_5$ . Легко видеть, что матрица  $\gamma_5$  имеет единичный квадрат

$$\gamma_5^2 = 1 \quad (5.4.26)$$

и антикоммутирует со всеми матрицами  $\gamma_\mu$

$$\{\gamma_5, \gamma^\mu\} = 0. \quad (5.4.27)$$

Обозначение  $\gamma_5$  довольно удачно, поскольку из антикоммутационных соотношений (5.4.26), (5.4.27) и (5.4.5) следует, что матрицы  $\gamma^0, \gamma^1, \gamma^2, \gamma^3, \gamma_5$  образуют алгебру Клиффорда в пяти измерениях. В четырехмерном представлении, где  $\gamma$ -матрицы определены согласно (5.4.17), матрица  $\gamma_5$  имеет вид

$$\gamma_5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (5.4.28)$$

Удобство этого представления во многом определяется тем, что матрицы  $\mathcal{J}^{\rho\sigma}$  и  $\gamma_5$  имеют в нем блочно-диагональный вид. Как мы увидим, это значительно упрощает рассмотрение частиц в ультрарелятивистском пределе  $v \rightarrow c$ . (Однако это не упомянутое в § 1.1 представление, которое исходно ввел Дирак. Дирака в основном интересовали атомные электроны, для которых  $v \ll c$  — в этом случае удобнее работать в представлении, где диагональна матрица  $\gamma_0$ , а не  $\gamma_5$ .)

Построенное нами представление однородной группы Лоренца не унитарно, поскольку генераторы  $\mathcal{J}^{\rho\sigma}$  не все являются эрмитовыми матрицами. В частности, в представлении (5.4.17) генераторы  $\mathcal{J}^{ij}$  эрмитовы, а генераторы  $\mathcal{J}^{i0}$  антиэрмитовы. Для формулировки свойств эрмитовости в явно лоренц-инвариантном виде удобно ввести матрицу  $\beta \equiv i\gamma^0$  (см. (5.4.13)), которая в представлении (5.4.17) имеет вид

$$\beta = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (5.4.29)$$

Из (5.4.17) следует, что

$$\beta\gamma^{\mu\dagger}\beta = -\gamma^\mu, \quad (5.4.30)$$

откуда

$$\beta\mathcal{J}^{\rho\sigma\dagger}\beta = \mathcal{J}^{\rho\sigma}. \quad (5.4.31)$$

Поэтому (неунитарные) матрицы  $D(\Lambda)$  удовлетворяют условию псевдоунитарности

$$\beta D(\Lambda)^\dagger \beta = D(\Lambda)^{-1}. \quad (5.4.32)$$

Далее, матрица  $\gamma_5$  эрмитова и антисимметрична с  $\beta$ , так что

$$\beta\gamma_5^\dagger\beta = -\gamma_5 \quad (5.4.33)$$

и

$$\beta(\gamma_5\gamma_\mu)^\dagger\beta = -\gamma_5\gamma_\mu. \quad (5.4.34)$$

Матрицы Дирака и связанные с ними матрицы имеют важные свойства симметрии относительно операции транспонирования. Из (5.4.17) и (5.4.18) следует, что матрицы  $\gamma_\mu$  симметричны при  $\mu = 0, 2$  и антисимметричны при  $\mu = 1, 3$ , так что

$$\gamma_\mu^T = -\mathcal{C}\gamma_\mu\mathcal{C}^{-1}, \quad (5.4.35)$$

где  $T$  обозначает транспонирование, а

$$\mathcal{C} \equiv \gamma_2\beta = -i \begin{bmatrix} \sigma_2 & 0 \\ 0 & -\sigma_2 \end{bmatrix}. \quad (5.4.36)$$

Отсюда сразу же получаем, что

$$\mathcal{J}_{\mu\nu}^T = -\mathcal{C}\mathcal{J}_{\mu\nu}\mathcal{C}^{-1}, \quad (5.4.37)$$

$$\gamma_5^T = +\mathcal{C}\gamma_5\mathcal{C}^{-1}, \quad (5.4.38)$$

$$(\gamma_5\gamma_\mu)^T = +\mathcal{C}\gamma_5\gamma_\mu\mathcal{C}^{-1}. \quad (5.4.39)$$

Возникающие знаки будут играть большую роль при изучении нами в следующем параграфе свойств различных токов относительно операции зарядового сопряжения. Чтобы получить аналогичные формулы для операции комплексного сопряжения, можно воспользоваться

уже имеющимися результатами для операций транспонирования и эрмитового сопряжения:

$$\gamma_\mu^* = \beta \mathcal{C} \gamma_\mu \mathcal{C}^{-1} \beta, \quad (5.4.40)$$

$$\mathcal{J}_{\mu\nu}^* = -\beta \mathcal{C} \mathcal{J}_{\mu\nu} \mathcal{C}^{-1} \beta, \quad (5.4.41)$$

$$\gamma_5^* = -\beta \mathcal{C} \gamma_5 \mathcal{C}^{-1} \beta, \quad (5.4.42)$$

$$(\gamma_5 \gamma_\mu)^* = -\beta \mathcal{C} \gamma_5 \gamma_\mu \mathcal{C}^{-1} \beta. \quad (5.4.43)$$

## § 5.5. Причинные дираковские поля

Перейдем теперь к построению операторов рождения и уничтожения частиц, преобразующихся по представлению Дирака группы Лоренца, которое мы обсудили в предыдущем параграфе. В соответствии с (5.1.17) и (5.1.18) они должны иметь вид

$$\psi_l^+ = (2\pi)^{-3/2} \sum_{\sigma} \int d^3 p u_l(\mathbf{p}, \sigma) e^{ip \cdot x} a(\mathbf{p}, \sigma) \quad (5.5.1)$$

и

$$\psi_l^-{}^c = (2\pi)^{-3/2} \sum_{\sigma} \int d^3 p v_l(\mathbf{p}, \sigma) e^{-ip \cdot x} a^{c\dagger}(\mathbf{p}, \sigma). \quad (5.5.2)$$

где опущен индекс, указывающий тип частицы. Для того чтобы вычислить фигурирующие в этих формулах коэффициентные функции  $u_l(\mathbf{p}, \sigma)$  и  $v_l(\mathbf{p}, \sigma)$ , мы должны сначала найти  $u_l$  и  $v_l$  для нулевого импульса при помощи (5.1.25) и (5.1.26), а затем применить уравнения (5.1.21) и (5.1.22) для определения этих функций в случае произвольного импульса (при этом в качестве  $D_{\bar{U}}(\Lambda)$  везде следует брать  $4 \times 4$  матрицу дираковского представления однородной группы Лоренца).

Пользуясь (5.4.19), условия (5.1.25) и (5.1.26) можно записать как<sup>1)</sup>

$$\sum_{\bar{\sigma}} u_{\bar{m}\pm}(0, \bar{\sigma}) \mathbf{J}_{\bar{\sigma}\sigma}^{(j)} = \sum_m \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma}_{\bar{m}m} u_{m\pm}(0, \bar{\sigma})$$

и

$$-\sum_{\bar{\sigma}} v_{\bar{m}\pm}(0, \bar{\sigma}) \mathbf{J}_{\bar{\sigma}\sigma}^{(j)*} = \sum_m \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma}_{\bar{m}m} v_{m\pm}(0, \bar{\sigma}).$$

Другими словами, если рассматривать  $u_{m\pm}(0, \sigma)$  и  $v_{m\pm}(0, \sigma)$  как

<sup>1)</sup> Мы опустили здесь индекс  $n$ , обозначающий типы частиц, и заменили четырехкомпонентный индекс  $l$  двумя — двухкомпонентным индексом  $m$ , который нумерует столбцы и строки подматриц в (5.4.19) и (5.4.20), и принимающим значения  $\pm$  индексом, который нумерует столбцы и строки “суперматрицы” в (5.4.19) и (5.4.20).

$(m, \sigma)$ -е элементы матриц  $U_{\pm}$  и  $V_{\pm}$  соответственно,

$$U_{\pm} \mathbf{J}^{(j)} = \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma} U_{\pm} \quad (5.5.3)$$

и

$$-V_{\pm} \mathbf{J}^{(j)*} = \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma} V_{\pm}. \quad (5.5.4)$$

Как  $(2j+1)$ -мерные матрицы  $\mathbf{J}^{(j)}$  и  $-\mathbf{J}^{(j)*}$ , так и  $2 \times 2$  матрицы  $\frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma}$  образуют неприводимые представления алгебры Ли группы вращений. В соответствии с теоремой Шура [6], матрицы  $U_{\pm}$  и  $V_{\pm}$  (называемые сплетающими операторами) должны быть либо нулевыми (этот случай не представляет интереса), либо квадратными и невырожденными. Таким образом, дираковское поле может описывать только частицы спина  $j = \frac{1}{2}$  (так что  $2j+1=2$ ), причем матрицы  $\mathbf{J}^{(1/2)}$  и  $-\mathbf{J}^{(1/2)*}$  должны совпадать с  $\frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma}$  с точностью до преобразования эквивалентности. В действительности для стандартного представления (2.5.21), (2.5.22) генераторов вращений имеем  $\mathbf{J}^{(1/2)} = \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma}$  и  $-\mathbf{J}^{(1/2)*} = \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma}_2 \boldsymbol{\sigma}_2$ . Следовательно,  $U_{\pm}$  и  $V_{\pm} \boldsymbol{\sigma}_2$  коммутируют с  $\boldsymbol{\sigma}$  и пропорциональны единичной матрице:

$$u_{m,\pm}(0, \sigma) = c_{\pm} \delta_{m\sigma}, \quad v_{m,\pm}(0, \sigma) = -id_{\pm}(\boldsymbol{\sigma}_2)_{m\sigma}. \quad (5.5.5)$$

Другими словами,

$$\begin{aligned} u(0, 1/2) &= \begin{bmatrix} c_+ \\ 0 \\ c_- \\ 0 \end{bmatrix}, & u(0, -1/2) &= \begin{bmatrix} 0 \\ c_+ \\ 0 \\ c_- \end{bmatrix}, \\ v(0, 1/2) &= \begin{bmatrix} 0 \\ d_+ \\ 0 \\ d_- \end{bmatrix}, & v(0, -1/2) &= \begin{bmatrix} d_+ \\ 0 \\ d_- \\ 0 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

а спиноры при ненулевом импульсе выглядят как

$$u(\mathbf{p}, \sigma) = \sqrt{m/p^0} D(L(p)) u(0, \sigma), \quad (5.5.6)$$

$$v(\mathbf{p}, \sigma) = \sqrt{m/p^0} D(L(p)) v(0, \sigma). \quad (5.5.7)$$

Рассмотрим теперь постоянные  $c_{\pm}$  и  $d_{\pm}$ . Вообще говоря, в их выборе есть произвол, и мы могли бы даже положить  $c_-$  и  $d_-$  (или  $c_+$  и  $d_+$ ) равными нулю; тогда дираковское поле имело бы только две ненулевых компоненты. Единственный физический принцип, из которого следует соотношение между этими постоянными — сохранение четности. Вспомним, что при пространственной инверсии оператор

уничтожения частицы и оператор рождения античастицы преобразуются как

$$\mathsf{P}a(\mathbf{p}, \sigma)\mathsf{P}^{-1} = \eta^* a(-\mathbf{p}, \sigma), \quad (5.5.8)$$

$$\mathsf{P}a^{c\dagger}(\mathbf{p}, \sigma)\mathsf{P}^{-1} = \eta^c a^{c\dagger}(-\mathbf{p}, \sigma), \quad (5.5.9)$$

и поэтому

$$\mathsf{P}\psi_l^+(x)\mathsf{P}^{-1} = \eta^*(2\pi)^{3/2} \sum_{\sigma} \int d^3 p u_l(-\mathbf{p}, \sigma) e^{ip \cdot \mathcal{P}x} a(\mathbf{p}, \sigma), \quad (5.5.10)$$

$$\mathsf{P}\psi_l^{-c}(x)\mathsf{P}^{-1} = \eta^c(2\pi)^{3/2} \sum_{\sigma} \int d^3 p v_l(-\mathbf{p}, \sigma) e^{-ip \cdot \mathcal{P}x} a^{c\dagger}(\mathbf{p}, \sigma). \quad (5.5.11)$$

Далее, уравнения (5.4.16), (5.1.21) и (5.1.22) дают:

$$u(-\mathbf{p}, \sigma) = \sqrt{m/p^0} \beta D(\Lambda(\mathbf{p})) \beta u(0, \sigma), \quad (5.5.12)$$

$$v(-\mathbf{p}, \sigma) = \sqrt{m/p^0} \beta D(\Lambda(\mathbf{p})) \beta v(0, \sigma). \quad (5.5.13)$$

(Так как  $\beta^2 = 1$ , мы не различаем  $\beta$  и  $\beta^{-1}$ .) Так как действие оператора четности преобразует операторы рождения и уничтожения в точке  $x$  в операторы, пропорциональные им же в точке  $\mathcal{P}x$ , необходимо, чтобы  $\beta u(0, \sigma)$  и  $\beta v(0, \sigma)$  были пропорциональны  $u(0, \sigma)$  и  $v(0, \sigma)$  соответственно:

$$\beta u(0, \sigma) = b_u u(0, \sigma), \quad (5.5.14)$$

причем  $b_u^2 = b_v^2 = 1$ . Тогда закон преобразования полей при пространственной инверсии имеет простой вид:

$$\mathsf{P}\psi^+(x)\mathsf{P}^{-1} = \eta^* b_u \beta \psi^+(\mathcal{P}x), \quad (5.5.15)$$

$$\mathsf{P}\psi^{-c}(x)\mathsf{P}^{-1} = \eta^c b_v \beta \psi^{-c}(\mathcal{P}x). \quad (5.5.16)$$

Изменяя при необходимости нормировку полей, мы можем выбрать коэффициентные функции так, чтобы при нулевом импульсе они имели вид

$$u(0, 1/2) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ b_u \\ 0 \end{bmatrix}, \quad u(0, -1/2) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ b_u \end{bmatrix}, \quad (5.5.17)$$

$$v(0, 1/2) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ b_v \end{bmatrix}, \quad v(0, -1/2) = \frac{-1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ b_v \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (5.5.18)$$

Теперь попытаемся построить поле, являющееся линейной комбинацией операторов рождения и уничтожения,

$$\psi(x) = \kappa \psi^+(x) + \lambda \psi^{-c}(x), \quad (5.5.19)$$

которое коммутирует или антисимметрически само с собой и со своим эрмитово сопряженным в точках, разделенных пространственно-подобным интервалом. Очевидное вычисление дает

$$[\psi_l(x), \psi_{\bar{l}}^\dagger(y)]_\mp = (2\pi)^{-3} \int d^3 p [|\kappa|^2 N_{l\bar{l}}(\mathbf{p}) e^{ip \cdot (x-y)} \mp |\lambda|^2 M_{l\bar{l}}(\mathbf{p}) e^{-ip \cdot (x-y)}], \quad (5.5.20)$$

где

$$N_{l\bar{l}}(\mathbf{p}) \equiv \sum_{\sigma} u_l(\mathbf{p}, \sigma) u_{\bar{l}}^*(\mathbf{p}, \sigma), \quad (5.5.21)$$

$$M_{l\bar{l}}(\mathbf{p}) \equiv \sum_{\sigma} v_l(\mathbf{p}, \sigma) v_{\bar{l}}^*(\mathbf{p}, \sigma). \quad (5.5.22)$$

Пользуясь условием (5.5.14) или явными формулами (5.5.17), (5.5.18) для  $u(0)$  и  $v(0)$ , для нулевого импульса находим:

$$N(0) = \frac{1 + b_u \beta}{2}, \quad M(0) = \frac{1 + b_v \beta}{2}. \quad (5.5.23)$$

Тогда из (5.5.6) и (5.5.7) следует, что

$$N(\mathbf{p}) = \frac{m}{2p^0} D(\Lambda(p)) [1 + b_u \beta] D^\dagger(L(p)), \quad (5.5.24)$$

$$M(\mathbf{p}) = \frac{m}{2p^0} D(\Lambda(p)) [1 + b_v \beta] D^\dagger(L(p)). \quad (5.5.25)$$

Условие псевдоунитарности (5.4.32) дает

$$D(L(p)) \beta D^\dagger(L(p)) = \beta$$

и

$$D(L(p)) D^\dagger(L(p)) = D(L(p)) \beta D^{-1}(L(p)) \beta.$$

Вспоминая, что  $\beta = i\gamma^0$ , при помощи закона преобразования (5.4.8) получаем

$$D(L(p)) \beta D^{-1}(L(p)) = i L_\mu{}^0(p) \gamma^\mu = -ip_\mu \gamma^\mu / m. \quad (5.5.26)$$

Далее<sup>2)</sup>,

$$N(\mathbf{p}) = \frac{1}{2p^0} [-ip^\mu \gamma_\mu + b_u m] \beta, \quad (5.5.27)$$

$$M(\mathbf{p}) = \frac{1}{2p^0} [-ip^\mu \gamma_\mu + b_v m] \beta. \quad (5.5.28)$$

---

<sup>2)</sup> Иногда в определение дираковского спинора добавляют множитель  $\sqrt{p^0/m}$ , так что вместо  $p^0$  в знаменателях спиновых сумм (5.5.27) и (5.5.28) стоит  $m$ . Используемая нами нормировка удобна тем, что гладко ведет себя при  $m = 0$ .

Наконец, подставляя полученные выражения в (5.5.20), приходим к формуле

$$[\psi_l(x), \psi_{\bar{l}}^\dagger(y)]_\mp = \\ = (|\kappa|^2[-\gamma^\mu \partial_\mu + b_u m] \beta \Delta_+(x-y) \mp |\lambda|^2[-\gamma^\mu \partial_\mu + b_v m] \beta \Delta_+(y-x))_{l\bar{l}}, \quad (5.5.29)$$

где  $\Delta_+$  — функция, введенная в параграфе 5.2:

$$\Delta_+(x) \equiv \int \frac{d^3 p}{2p^0(2\pi)^3} e^{ip \cdot x}.$$

Как мы видели в § 5.2, при пространственноподобном интервале  $x - y$  функция  $\Delta_+(x - y)$  является четной по  $x - y$ ; следовательно, ее первая производная будет нечетной функцией. Поэтому необходимым и достаточным условием того, чтобы в коммутаторе или антакоммутаторе обращались в нуль как члены с производными, так и без них, являются равенства

$$|\kappa|^2 = \mp |\lambda|^2 \quad (5.5.30)$$

и

$$|\kappa|^2 b_u = \pm |\lambda|^2 b_v. \quad (5.5.31)$$

Очевидно, что условие (5.5.30) может выполняться только для знака “+”; получаем, что *частицы, описываемые дираковским полем, обязательно подчиняются статистике Ферми*. Тогда  $|\kappa|^2 = |\lambda|^2$  и  $b_u = -b_v$ . Точно так же, как и для скалярного поля, мы можем выбрать  $\kappa = \lambda$ ; переопределив при необходимости общий масштаб и фазу поля  $\psi$ , можно положить

$$\kappa = \lambda = 1. \quad (5.5.32)$$

Наконец, можно заменить  $\psi$  на  $\gamma_5 \psi$  — тогда знаки у  $b_u$  и  $b_v$  одновременно изменятся; выберем  $b_u$  и  $b_v$  так:

$$b_u = -b_v = +1. \quad (5.5.33)$$

Выпишем окончательный результат для дираковского поля:

$$\psi_l(x) = (2\pi)^{-3/2} \sum_{\sigma} \int d^3 p [u_l(\mathbf{p}, \sigma) e^{ip \cdot x} a(\mathbf{p}, \sigma) + \\ + v_l(\mathbf{p}, \sigma) e^{-ip \cdot x} a^\dagger(\mathbf{p}, \sigma)], \quad (5.5.34)$$

где коэффициентные функции при нулевом импульсе имеют следующий вид:

$$u(0, 1/2) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad u(0, -1/2) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad (5.5.35)$$

$$v(0, 1/2) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad v(0, -1/2) = \frac{-1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (5.5.36)$$

Суммы по спинам равны

$$N(\mathbf{p}) = \frac{1}{2p^0} [-ip^\mu \gamma_\mu + m]\beta, \quad (5.5.37)$$

$$M(\mathbf{p}) = \frac{1}{2p^0} [-ip^\mu \gamma_\mu - m]\beta, \quad (5.5.38)$$

поэтому антисимметрический (5.5.20) дается выражением

$$[\psi_l(x), \psi_{\bar{l}}^\dagger(y)] = \{[-\gamma^\mu \partial_\mu + m]\beta\}_{l\bar{l}} \Delta(x - y). \quad (5.5.39)$$

Вернемся теперь к тому требованию, что при пространственной инверсии поле  $\psi(x)$  должно преобразовываться в поле, пропорциональное  $\psi(\mathcal{P}x)$ . Для этого необходимо, чтобы фазы в уравнениях (5.5.15) и (5.5.16) совпадали, поэтому внутренние четности частиц и их античастиц должны быть связаны соотношением

$$\eta^c = -\eta^*. \quad (5.5.40)$$

Т.е. *внутренняя четность*  $\eta^c$  *связанного состояния частицы спина*  $1/2$  *и ее античастицы отрицательна*. Именно поэтому такие мезоны как  $\rho^0$  и  $J/\psi$ , обладающие отрицательной четностью, могут быть интерпретированы как связанные состояния пар кварк–антикварк. Из уравнений (5.5.15) и (5.5.16) теперь следует закон преобразования причинного дираковского поля при пространственной инверсии:

$$\mathsf{P}\psi(x)\mathsf{P}^{-1} = \eta^* \beta\psi(\mathcal{P}x). \quad (5.5.41)$$

Прежде чем двигаться дальше, отметим, что согласно (5.5.14), (5.5.33) и (5.5.26) функции  $u(\mathbf{p}, \sigma)$  и  $v(\mathbf{p}, \sigma)$  являются собственными векторами оператора  $-ip^\mu \gamma_\mu / m$  с собственными значениями  $+1$  и  $-1$  соответственно:

$$(ip^\mu \gamma_\mu + m)u(\mathbf{p}, \sigma) = 0, \quad (-ip^\mu \gamma_\mu + m)v(\mathbf{p}, \sigma) = 0. \quad (5.5.42)$$

Из этого следует, что поле (5.5.34) удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$(\gamma^\mu \partial_\mu + m)\psi(x) = 0. \quad (5.5.43)$$

Это и есть знаменитое уравнение Дирака для свободной частицы со спином  $1/2$ . С нашей точки зрения уравнение Дирака есть просто лоренци-инвариантная запись соглашения, использованного для нахождения поля, обладающего простыми трансформационными свойствами относительно преобразования инверсии. Рассматриваемое поле построено из двух полей, преобразующихся по неприводимым представлениям собственной ортохронной группы Лоренца.

Рассмотрим поведение дираковского поля при зарядовом сопряжении и обращении времени. Для этого нам понадобятся выражения для величин, комплексно-сопряженных к  $u$  и  $v$ . Эти функции действительны при нулевом импульсе; однако матрица  $D(L(p))$  комплексна, т.е. при ненулевом импульсе  $u$  и  $v$  (вообще говоря) комплексны. Из (5.4.41) мы видим, что для произвольного действительного  $\omega_{\mu\nu}$

$$\left[ \exp\left(\frac{1}{2} i \mathcal{J}^{\mu\nu} \omega_{\mu\nu}\right) \right]^* = \beta \mathcal{C} \exp\left(\frac{1}{2} i \mathcal{J}^{\mu\nu} \omega_{\mu\nu}\right) \mathcal{C}^{-1} \beta,$$

в частности,

$$D(L(p))^* = \beta \mathcal{C} D(L(p)) \mathcal{C}^{-1} \beta.$$

Заметим также, что  $C^{-1} \beta u(0, \sigma) = -v(0, \sigma)$  и  $C^{-1} \beta v(0, \sigma) = -u(0, \sigma)$ , поэтому

$$u^*(\mathbf{p}, \sigma) = -\beta \mathcal{C} v(\mathbf{p}, \sigma), \quad (5.5.44)$$

$$v^*(\mathbf{p}, \sigma) = -\beta \mathcal{C} u(\mathbf{p}, \sigma). \quad (5.5.45)$$

Для того чтобы поле при зарядовом сопряжении преобразовывалось в поле, с которым оно коммутирует при пространственно-подобных интервалах, необходимо, чтобы четности частицы и античастицы при зарядовом сопряжении были связаны соотношением (аналогично пространственной четности):

$$\xi^c = \xi^*. \quad (5.5.46)$$

Тогда поле преобразуется по следующему закону:

$$\mathcal{C}\psi(x)\mathcal{C}^{-1} = -\xi^* \beta \mathcal{C} \psi^*(x). \quad (5.5.47)$$

(Мы обозначаем эрмитово сопряженное поле в правой части  $\psi^*$ , а не  $\psi^\dagger$ , как обычно, для того чтобы подчеркнуть, что имеется в виду столбец, а не строка.)

До сих пор мы считали, что частица и античастица различны и не рассматривали случай, когда они на самом деле идентичны. Такие частицы спина  $1/2$  называются *майорановскими фермионами*. Пользуясь теми же аргументами, что и при выводе (5.5.47), легко получить условие действительности поля, описывающего такую частицу:

$$\psi(x) = -\beta \mathcal{C} \psi^*(x). \quad (5.5.48)$$

Внутренняя четность майорановских фермионов при пространственной инверсии должна быть чисто мнимой,  $\eta = \pm i$ , в то время как четность при зарядовом сопряжении — чисто действительной,  $\xi = \pm 1$ .

Внутренняя четность относительно зарядового сопряжения частиц, которые являются связанными состояниями “элементарной” частицы и ее античастицы, может быть различной для случаев фермионов и бозонов. Такие состояния можно записать в виде

$$\Phi \equiv \sum_{\sigma, \sigma'} \int d^3 p \int d^3 p' \chi(\mathbf{p}, \sigma; \mathbf{p}', \sigma') a^\dagger(\mathbf{p}, \sigma) a^{c\dagger}(\mathbf{p}', \sigma') \Phi_0,$$

где  $\Phi_0$  — вакуум. При зарядовом сопряжении такое состояние преобразуется в

$$C\Phi = \xi\xi^c \sum_{\sigma,\sigma'} \int d^3p \int d^3p' \chi(\mathbf{p},\sigma; \mathbf{p}',\sigma') a^\dagger(\mathbf{p},\sigma) a^{c\dagger}(\mathbf{p}',\sigma') \Phi_0.$$

Переобозначая переменные интегрирования и суммирования и пользуясь условием (5.5.46), получаем

$$C\Phi = - \sum_{\sigma,\sigma'} \int d^3p \int d^3p' \chi(\mathbf{p}',\sigma'; \mathbf{p},\sigma) a^\dagger(\mathbf{p},\sigma) a^{c\dagger}(\mathbf{p}',\sigma') \Phi_0.$$

Таким образом, четность связанного состояния дирашковской частицы и ее античастицы при зарядовом сопряжении отрицательна, т.е. если волновая функция  $\chi$  этого состояния является четной или нечетной относительно перестановки импульсов и спинов частицы и античастицы, то применение оператора зарядового сопряжения к такому состоянию дает его же с множителем  $-1$  или  $+1$  соответственно. Классической иллюстрацией этого утверждения является позитроний — связанное состояние электрона и позитрона. Два низших состояния позитрония с очень близкими энергиями имеют нулевой орбитальный момент, но отличаются полным спином: состояния с  $s = 0$  и  $s = 1$  известны как пара- и орто-позитроний. Волновая функция каждого из этих состояний является четной относительно перестановки импульсов; для пара-позитрония она четна относительно перестановки  $z$ -компонент спинов, а для орто-позитрония — нечетна. Таким образом, четность пара-позитрония равна  $C = +1$ , а орто-позитрония —  $C = -1$ . Эти значения замечательно подтверждаются экспериментом: пара-позитроний быстро распадается на два фотона (для каждого из которых  $C = -1$ ), в то время как орто-позитроний распадается гораздо медленнее на три и более фотонов. Точно так же, мезоны  $\rho^0$  и  $\omega^0$  могут быть обнаружены как резонансы при электрон-позитронной аннигиляции через однофотонное промежуточное состояние и поэтому должны иметь четность  $C = -1$ , что согласуется с их интерпретацией как связанных состояний пары кварк-антикварк с нулевым орбитальным моментом и полным спином 1.

Теперь перейдем к обращению времени. Напомним закон преобразования операторов рождения античастицы и уничтожения частицы (см. (4.2.15)):

$$\mathcal{T}a(\mathbf{p},\sigma)\mathcal{T}^{-1} = \zeta^*(-1)^{1/2-\sigma}a(-\mathbf{p},-\sigma), \quad (5.5.49)$$

$$\mathcal{T}a^{c\dagger}(\mathbf{p},\sigma)\mathcal{T}^{-1} = \zeta^c(-1)^{1/2-\sigma}a^{c\dagger}(-\mathbf{p},-\sigma). \quad (5.5.50)$$

Тогда при обращении времени поле (5.5.34) преобразуется как

$$\begin{aligned} \mathcal{T}\psi_l(x)\mathcal{T}^{-1} &= (2\pi)^{-3/2} \sum_{\sigma} \int d^3p (-1)^{1/2-\sigma} \times \\ &\times [\zeta^* u_l^*(\mathbf{p},\sigma) e^{-ip \cdot x} a(-\mathbf{p},-\sigma) + \zeta^c v_l^*(\mathbf{p},\sigma) e^{ip \cdot x} a^{c\dagger}(-\mathbf{p},-\sigma)]. \end{aligned}$$

Для того чтобы выразить правую часть этого выражения через  $\psi$ , перейдем к переменной интегрирования  $-\mathbf{p}$  и индексу суммирования  $-\sigma$ . Нам потребуются выражения для  $u_l^*(-\mathbf{p}, -\sigma)$  и  $v_l^*(-\mathbf{p}, -\sigma)$  через  $u_l(\mathbf{p}, \sigma)$  и  $v_l(\mathbf{p}, \sigma)$  соответственно. Чтобы найти их, воспользуемся тем, что  $J^{i0}$  антисимметрическое с  $\beta$  и коммутирует с  $\gamma_5$ , а также недавним результатом для  $D(L(\mathbf{p}))^*$  и запишем:

$$D^*(L(-\mathbf{p})) = \gamma_5 \beta D^*(L(\mathbf{p})) \beta \gamma_5 = \gamma_5 \mathcal{C} D(L(\mathbf{p})) \mathcal{C}^{-1} \gamma_5.$$

Далее, уравнения (5.4.36), (5.5.35), (5.5.36) дают

$$\gamma_5 \mathcal{C}^{-1} u(0, -\sigma) = (-1)^{1/2-\sigma} u(0, \sigma),$$

$$\gamma_5 \mathcal{C}^{-1} v(0, -\sigma) = (-1)^{1/2-\sigma} v(0, \sigma),$$

поэтому

$$(-1)^{1/2-\sigma} u^*(-\mathbf{p}, -\sigma) = -\gamma_5 \mathcal{C} u(\mathbf{p}, \sigma), \quad (5.5.51)$$

$$(-1)^{1/2-\sigma} v^*(-\mathbf{p}, -\sigma) = -\gamma_5 \mathcal{C} v(\mathbf{p}, \sigma). \quad (5.5.52)$$

Для того чтобы дираковское поле преобразовывалось в поле, пропорциональное исходному, взятому в точке с обращенным временем, необходимо выполнение соотношения

$$\zeta^c = \zeta^* \quad (5.5.53)$$

и тогда

$$\mathsf{T}\psi(x)\mathsf{T}^{-1} = -\zeta^* \gamma_5 \mathcal{C} \psi(-\mathcal{P}x). \quad (5.5.54)$$

Теперь рассмотрим способы построения плотностей взаимодействий для дираковских полей (эти плотности, конечно, должны быть скалярами). Как мы уже отмечали, представление Дирака неунитарно, поэтому  $\psi^\dagger \psi$  не является скаляром. Для того чтобы обойти эту трудность, удобно рассмотреть сопряженное поле, умноженное на  $\beta$ :

$$\bar{\psi} \equiv \psi^\dagger \beta. \quad (5.5.55)$$

Из условия псевдоунитарности (5.4.32) получаем, что составленные с использованием  $\bar{\psi}$  билинейные комбинации преобразуются под действием группы Лоренца следующим образом:

$$U_0(\Lambda)[\bar{\psi}(x)M\psi(x)]U_0^{-1}(\Lambda) = \bar{\psi}(\Lambda x)D(\Lambda)MD^{-1}(\Lambda)\psi(\Lambda x). \quad (5.5.56)$$

Также, для пространственной инверсии имеем

$$\mathsf{P}[\bar{\psi}(x)M\psi(x)]\mathsf{P}^{-1} = \bar{\psi}(\mathcal{P}x)\beta M\beta\psi(\mathcal{P}x). \quad (5.5.57)$$

Следовательно, выбирая в качестве матрицы  $M$  матрицу  $\mathbf{1}$ ,  $\gamma^\mu$ ,  $J^{\mu\nu}$ ,  $\gamma_5 \gamma^\mu$  или  $\gamma_5$ , мы получим билинейную комбинацию  $\bar{\psi}M\psi$ , которая преобразуется как скаляр, вектор, тензор, аксиальный вектор и псевдоскаляр соответственно. (Приставки “аксиальный” и “псевдо” показывают, что свойства этих объектов при пространственной инверсии отличаются от свойств обычных векторов и скаляров: псевдоскаляр

обладает отрицательной четностью, а пространственная и временная части аксиального вектора имеют соответственно положительную и отрицательную четности.) Все эти результаты непосредственно применимы и к случаю, когда два входящих в билинейную комбинацию фермионных поля соответствуют различным частицам; единственное отличие состоит в том, что при пространственной инверсии появляется дополнительный множитель, равный отношению внутренних четностей частиц.

Например, построенная Ферми теория бета-распада содержит плотность взаимодействия  $\bar{\psi}_p \gamma^\mu \psi_n \bar{\psi}_e \gamma_\mu \psi_\nu$ . Как выяснилось впоследствии, наиболее общий вид сохраняющего четность и не содержащего производных лоренц-инвариантного взаимодействия для теории бета-распада дается приведенным выражением, где вместо  $\gamma_\mu$  может стоять любая из матриц 1,  $\gamma^\mu$ ,  $J^{\mu\nu}$ ,  $\gamma_5 \gamma^\mu$  или  $\gamma_5$ . (Мы определили оператор пространственной инверсии таким образом, что протон, нейтрон и электрон имеют четность +1. Если нейтрино — безмассовая частица, то можно считать ее четность также равной +1, так как при необходимости в качестве поля нейтрино можно взять  $\gamma_5 \psi_\nu$ .) Подвергнув сомнению закон сохранения четности, в 1956 г. Ли и Янг [7] показали, что возможны также взаимодействия  $\bar{\psi}_p M \psi_n \bar{\psi}_e M \psi_\nu$  и  $\bar{\psi}_p M \psi_n \bar{\psi}_e M \gamma_5 \psi_\nu$ , где  $M$  принимает значения 1,  $\gamma^\mu$ ,  $J^{\mu\nu}$ ,  $\gamma_5 \gamma^\mu$  или  $\gamma_5$ .

Наконец, изучим свойства таких билинейных комбинаций при зарядовом сопряжении. Пользуясь (5.5.47) и (5.4.35)–(5.4.39), получим:

$$\begin{aligned} C(\bar{\psi} M \psi) C^{-1} &= (\beta \mathcal{C} \psi)^T \beta M (\beta \mathcal{C} \psi^*) = -(\beta \mathcal{C} \psi^*)^T \beta M^T \mathcal{C} \psi = \\ &= \bar{\psi} \mathcal{C}^{-1} M^T \mathcal{C} \psi = \pm \bar{\psi} M \psi, \end{aligned} \quad (5.5.58)$$

причем для матриц 1,  $\gamma_5 \gamma_\mu$ ,  $\gamma_5$  в последнем выражении надо выбирать знак “+”, а для  $\gamma_\mu$  и  $J^{\mu\nu}$  — знак “−”. (Знак минус в первой строке появился из-за ферми-статистики. Мы также опустили с-числовой антисимметратор.) Поэтому бозонное поле, которое взаимодействует с током  $\bar{\psi} M \psi$ , должно обладать зарядовой четностью  $C = +1$  для тока, являющегося скаляром, псевдоскаляром или аксиальным вектором, и четностью  $C = -1$  для тока, являющегося вектором или антисимметричным тензором. Из этого рассуждения понятно, почему  $\pi^0$ , который взаимодействует с псевдоскалярным или аксиальным током нуклонов, имеет  $C = +1$ , в то время как для фотона  $C = -1$ .

## § 5.6. Неприводимые представления однородной группы Лоренца

В этом параграфе мы не будем ограничиваться векторным и дира-ковским полями и рассмотрим общий случай поля, которое преобразуется по произвольному неприводимому представлению однородной

группы Лоренца. Любое поле можно построить как прямую сумму таких неприводимых полей.

Любое представление однородной ортохронной группы Лоренца (или, точнее, ее алгебры Ли) задается набором матриц произвольного размера  $J_{\mu\nu}$ , удовлетворяющих тем же коммутационным соотношениям (5.4.4), что и генераторы группы:

$$[\mathcal{J}_{\mu\nu}, \mathcal{J}_{\rho\sigma}] = i(\mathcal{J}_{\rho\nu}\eta_{\sigma\mu} + \mathcal{J}_{\mu\rho}\eta_{\nu\sigma} - \mathcal{J}_{\sigma\nu}\eta_{\rho\mu} - \mathcal{J}_{\mu\sigma}\eta_{\nu\rho}). \quad (5.6.1)$$

(Конечно,  $J_{\mu\nu} = -J_{\nu\mu}$ , а индексы  $J_{\mu\nu}$ , как всегда, поднимаются и опускаются сверхкой с  $\eta^{\mu\nu}$  или  $\eta_{\mu\nu}$ .) Для начала разделим шесть независимых компонент  $J_{\mu\nu}$  на два 3-вектора: матрицы поворотов (вектора момента)

$$\mathcal{J}_1 = \mathcal{J}_{23}, \quad \mathcal{J}_2 = \mathcal{J}_{31}, \quad \mathcal{J}_3 = \mathcal{J}_{12} \quad (5.6.2)$$

и бустов

$$\mathcal{K}_1 = \mathcal{J}_{10}, \quad \mathcal{K}_2 = \mathcal{J}_{20}, \quad \mathcal{K}_3 = \mathcal{J}_{30}. \quad (5.6.3)$$

Тогда (5.6.1) можно переписать как

$$[\mathcal{J}_i, \mathcal{J}_j] = i\epsilon_{ijk}\mathcal{J}_k, \quad (5.6.4)$$

$$[\mathcal{J}_i, \mathcal{K}_j] = i\epsilon_{ijk}\mathcal{K}_k, \quad (5.6.5)$$

$$[\mathcal{K}_i, \mathcal{K}_j] = -i\epsilon_{ijk}\mathcal{J}_k, \quad (5.6.6)$$

где  $i, j, k$  пробегают значения из множества  $\{1, 2, 3\}$ , а  $\epsilon_{ijk}$  — полностью антисимметричный тензор с  $\epsilon_{123} = +1$ . Уравнение (5.6.4) лишь выражает тот факт, что матрицы  $J$  образуют представление подгруппы вращений группы Лоренца, а (5.6.5) — тот факт, что  $K$  является 3-вектором. Знак “−” в правой части (5.6.6) обусловлен тем, что  $\eta_{00} = -1$ ; этот минус играет очень важную в этом параграфе!

Вместо матриц  $J$  и  $K$  удобно рассматривать два других 3-вектора:

$$\mathcal{A} \equiv \frac{1}{2}(\mathcal{J} + i\mathcal{K}), \quad (5.6.7)$$

$$\mathcal{B} \equiv \frac{1}{2}(\mathcal{J} - i\mathcal{K}). \quad (5.6.8)$$

Как легко видеть, коммутационные соотношения (5.6.4)–(5.6.6) принимают вид:

$$[\mathcal{A}_i, \mathcal{A}_j] = i\epsilon_{ijk}\mathcal{A}_k, \quad (5.6.9)$$

$$[\mathcal{B}_i, \mathcal{B}_j] = i\epsilon_{ijk}\mathcal{B}_k, \quad (5.6.10)$$

$$[\mathcal{A}_i, \mathcal{B}_j] = 0, \quad (5.6.11)$$

Иначе говоря, матрицы  $A$  и  $B$  образуют два представления алгебры  $SU(2)$ , т.е. соответствуют спинам двух невзаимодействующих частиц. (Фактически алгебра Ли группы Лоренца изоморфна прямой сумме двух алгебр  $SU(2)$ .) Занумеруем строки и столбцы этих матриц парой

целых или полуцелых чисел  $a, b$ , пробегающих значения

$$a = -A, -A + 1, \dots, +A, \quad (5.6.12)$$

$$b = -B, -B + 1, \dots, +B, \quad (5.6.13)$$

Тогда<sup>1)</sup>:

$$(\mathcal{A})_{a'b',ab} = \delta_{b'b} \mathbf{J}_{a'a}^{(A)}, \quad (5.6.14)$$

$$(\mathcal{B})_{a'b',ab} = \delta_{a'a} \mathbf{J}_{b'b'}^{(B)}, \quad (5.6.15)$$

где  $\mathbf{J}^{(A)}$  и  $\mathbf{J}^{(B)}$  — стандартные спиновые матрицы для спинов  $A$  и  $B$ ,

$$(\mathbf{J}_3^{(A)})_{a'a} = a\delta_{a'a}, \quad (5.6.16)$$

$$(\mathbf{J}_1^{(A)} \pm i\mathbf{J}_2^{(A)})_{a'a} = \delta_{a',a \pm 1} \sqrt{(A \mp a)(A \pm a + 1)}, \quad (5.6.17)$$

и аналогично для  $\mathbf{J}^{(B)}$ . Таким образом, представление задается парой целых или полуцелых чисел  $A$  и  $B$ . Размерность представления  $(A, B)$  равна  $(2A+1)(2B+1)$ .

Конечномерные представления однородной группы Лоренца неунитарны. Действительно, матрицы  $A$  и  $B$  эрмитовы, поэтому  $J$  — эрмитова матрица, а  $K$  — антиэрмитова. Это вызвано наличием  $i$  в (5.6.7) и (5.6.8), которое обусловлено знаком “−” в (5.6.6). В конечном счете причина в том, что однородная группа Лоренца — это не группа четырехмерных вращений  $SO(4)$ . Она изоморфна некомпактной группе  $SO(3, 1)$ , а конечномерные унитарные представления имеет только компактная группа (если не принимать во внимание представлений, в которых некомпактная часть группы действует тривиально). Но в том, что мы имеем дело с неунитарным представлением, нет ничего страшного — нас интересуют поля, а не волновые функции, которые обязательно должны иметь лоренц-инвариантную положительно определенную норму.

Напротив, группа вращений имеет унитарные представления, причем генераторам соответствуют эрмитовы матрицы:

$$\mathcal{J} = \mathcal{A} + \mathcal{B}. \quad (5.6.18)$$

Очевидно, что поле, преобразующееся по представлению  $(A, B)$  однородной группы Лоренца, имеет компоненты, которые при вращениях

<sup>1)</sup> Можно воспользоваться альтернативным формализмом, который основан на том, что представление группы вращений спина  $j$  (или, как говорят в математике, старшего веса  $j$ ) представляет собой симметризованное произведение  $2j$  представлений спина  $1/2$  — т.е. симметричный  $SU(2)$ -тензор с  $2j$  индексами, каждый из которых принимает 2 значения. Таким образом, можно записывать преобразующиеся по представлению  $(A, B)$  поля с  $2A$  двузначными индексами, соответствующими представлениям  $(1/2, 0)$ , и  $2B$  индексами (помеченными сверху точками), соответствующими представлениям  $(0, 1/2)$ .

соответствуют спину  $j$  с

$$j = A + B, A + B - 1, \dots, |A - B|.$$

Переведем все сказанное выше на более привычный язык тензоров и спиноров. Например, поле типа  $(0, 0)$ , очевидно, есть скаляр с единственной компонентой  $j = 0$ . Поле типа  $(1/2, 0)$  или  $(0, 1/2)$  может иметь только  $j = +1/2$ ; таковы верхняя ( $\gamma_5 = +1$ ) и нижняя ( $\gamma_5 = -1$ ) компоненты дираковского спинора. Поле типа  $(1/2, 1/2)$  содержит компоненты с  $j = 1$  и  $j = 0$ , которые соответствуют пространственной  $\mathbf{v}$  и временной  $v^0$  компонентам 4-вектора  $v^\mu$ . Вообще, поле типа  $(A, A)$  имеет компоненты только с целыми спинами  $2A, 2A - 1, \dots, 0$  и соответствует бесследовому симметричному тензору ранга  $2A$ . (Отметим, что количество независимых компонент симметричного тензора ранга  $2A$  в четырех измерениях равно

$$\frac{4 \cdot 5 \dots (4 + 2A - 1)}{(2A)!} = \frac{(3 + 2A)!}{6(2A)!},$$

а условие бесследовости уменьшает их число до

$$\frac{(3 + 2A)!}{6(2A)!} - \frac{(1 + 2A)!}{6(2A - 2)!} = (2A + 1)^2$$

как и должно быть для поля типа  $(A, A)$ .) Еще один пример: поле типа  $(1, 0)$  или  $(0, 1)$  может иметь только  $j = 1$ ; оно отвечает антисимметричному тензору  $F_{\mu\nu}$ , который удовлетворяет следующему обеспечивающему неприводимость условию “дуальности”:

$$F^{\mu\nu} = \pm \frac{i}{2} \epsilon^{\mu\nu\lambda\rho} F_{\lambda\rho}$$

(для типов  $(1, 0)$  и  $(0, 1)$  соответственно). Конечно, лишь в четырех измерениях антисимметричный тензор  $F^{\mu\nu}$  можно разделить на “самодуальную” и “антисамодуальную” части.

Общий тензор ранга  $N$  преобразуется как прямое произведение  $N$  4-векторных представлений  $(1/2, 1/2)$ . Поэтому его можно разложить (с помощью подходящих процедур симметризации, антисимметризации и вычитания следа) на неприводимые представления  $(A, B)$  с  $A = N/2, N/2 - 1, \dots$  и  $B = N/2, N/2 - 1, \dots$  Таким образом мы можем получить любое неприводимое представление  $(A, B)$ , где  $A \oplus B$  целое. Спиновые представления, для которых  $A + B$  — половина нечетного числа, можно построить, раскладывая на неприводимые представления прямое произведение тензорных представлений и дираковского представления  $(1/2, 0) \oplus (0, 1/2)$ . Например, прямое произведение векторного  $(1/2, 1/2)$  и дираковского  $(1/2, 0) \oplus (0, 1/2)$  представлений дает спинор-вектор  $\psi^\mu$ , который преобразуется по представлению

$$(1/2, 1/2) \otimes [(1/2, 0) \oplus (0, 1/2)] = (1/2, 1) \oplus (1/2, 0) \oplus (1, 1/2) \oplus (0, 1/2).$$

Величина  $\gamma_\mu \psi^\mu$  преобразуется как обычное  $(1/2, 0) \oplus (0, 1/2)$  дираковское поле, поэтому мы можем выделить представление<sup>2)</sup>  $(1/2, 1) \oplus (1, 1/2)$ , потребовав выполнения условия  $\gamma_\mu \psi^\mu = 0$ . Тогда мы получим поле Рариты–Швингера [9].

До сих пор в этом параграфе мы рассматривали представления собственной ортохронной группы Лоренца. В любом представлении группы Лоренца, содержащей пространственную инверсию, должна быть матрица  $\beta$ , которая меняет знаки тензоров с нечетным числом пространственных индексов. В частности,

$$\beta \mathcal{J} \beta^{-1} = +\mathcal{J}, \quad \beta \mathcal{K} \beta^{-1} = -\mathcal{K}. \quad (5.6.19)$$

В терминах матриц (5.6.7) и (5.6.8),

$$\beta \mathcal{A} \beta^{-1} = \mathcal{B}, \quad \beta \mathcal{B} \beta^{-1} = \mathcal{A}. \quad (5.6.20)$$

Поэтому неприводимое представление  $(A, B)$  ортохронной группы Лоренца не является представлением группы Лоренца, содержащим пространственную инверсию, если  $A \neq B$ . Как мы видели выше, представления  $(A, A)$  соответствуют скаляру, вектору и симметричным бесследовым тензорам. При  $A \neq B$  неприводимые представления группы Лоренца, включающей пространственную инверсию, есть прямые суммы  $(A, B) \oplus (B, A)$  размерности  $2(2A+1)(2B+1)$ . Примером является дираковское представление  $(1/2, 0) \oplus (0, 1/2)$ . Матрица (5.4.29) размера  $4 \times 4$  дает  $\beta$ -матрицу для этого представления. Другой знакомый пример — представление  $(1, 0) \oplus (0, 1)$ , которое, как мы видели, представляет собой антисимметричный тензор второго ранга, включающий как самодуальную, так и антисамодуальную части.

## § 5.7. Причинные поля: общий случай<sup>1)</sup>

Теперь мы перейдем к построению полей, преобразующихся по описанным в предыдущем параграфе неприводимым представлениям  $(A, B)$ . Индекс  $l$  следует заменить на пару индексов  $a, b$ , возможные значения которых определяются (5.6.12) и (5.6.13), так что поля при-

<sup>2)</sup> В соответствии с уравнением (5.6.18), такое поле преобразуется при обычных вращениях как прямая сумма двух компонент с  $j = 1/2$  и двух с  $j = 3/2$ . Удвоение устраняется уравнением Дирака  $[\gamma^\nu \partial_\nu + m] \psi^\mu = 0$ ; оставшаяся компонента с  $j = 1/2$  устраняется наложением условия  $\partial_\mu \psi^\mu = 0$ . Если все эти условия выполнены, поле описывает одну частицу спина  $j = 3/2$ .

<sup>1)</sup> Материал этого параграфа выходит за рамки основного содержания книги и может быть опущен при первом чтении.

нимают вид

$$\psi_{ab}(x) = (2\pi)^{-3/2} \sum_{\sigma} \int d^3 p [\kappa a(\mathbf{p}, \sigma) e^{ip \cdot x} u_{ab}(\mathbf{p}, \sigma) + \\ + \lambda a^{c\dagger}(\mathbf{p}, \sigma) e^{-ip \cdot x} v_{ab}(\mathbf{p}, \sigma)], \quad (5.7.1)$$

где  $\kappa$  и  $\lambda$  — произвольные постоянные. Мы не исключаем возможность того, что частица является своей собственной античастицей, в этом случае  $a^c(\mathbf{p}, \sigma) = a(\mathbf{p}, \sigma)$ .

Нашей первой задачей будет нахождение коэффициентных функций  $u_{ab}(0, \sigma)$  и  $v_{ab}(0, \sigma)$  для нулевого импульса. Основные соотношения (5.1.25), (5.1.26) для  $u(0, \sigma)$  и  $v(0, \sigma)$  имеют вид

$$\sum_{\bar{\sigma}} u_{\bar{a}\bar{b}}(0, \bar{\sigma}) \mathbf{J}_{\bar{\sigma}\sigma}^{(j)} = \sum_{a,b} \mathcal{J}_{\bar{a}\bar{b}, ab} u_{ab}(0, \sigma), \\ - \sum_{\bar{\sigma}} v_{\bar{a}\bar{b}}(0, \bar{\sigma}) \mathbf{J}_{\bar{\sigma}\sigma}^{(j)*} = \sum_{a,b} \mathcal{J}_{\bar{a}\bar{b}, ab} v_{ab}(0, \sigma).$$

При помощи (5.6.14), (5.6.15) получаем

$$\sum_{\bar{\sigma}} u_{\bar{a}\bar{b}}(0, \bar{\sigma}) \mathbf{J}_{\bar{\sigma}\sigma}^{(j)} = \sum_a \mathbf{J}_{\bar{a}a}^{(A)} u_{\bar{a}\bar{b}}(0, \bar{\sigma}) + \sum_b \mathbf{J}_{\bar{b}b}^{(B)} u_{\bar{a}\bar{b}}(0, \bar{\sigma}), \quad (5.7.2)$$

$$- \sum_{\bar{\sigma}} u_{\bar{a}\bar{b}}(0, \bar{\sigma}) \mathbf{J}_{\bar{\sigma}\sigma}^{(j)*} = \sum_a \mathbf{J}_{\bar{a}a}^{(A)} v_{a\bar{b}}(0, \bar{\sigma}) + \sum_b \mathbf{J}_{\bar{b}b}^{(B)} v_{a\bar{b}}(0, \bar{\sigma}). \quad (5.7.3)$$

Но уравнение (5.7.2) является определяющим соотношением для коэффициентов Клебша–Гордана  $C_{AB}(j\sigma; ab)$ ! Эти коэффициенты задаются следующим условием: если состояния  $\Psi_{a,b}$  преобразуются при инфинитезимальном вращении согласно

$$\delta\Psi_{ab} = i \sum_{\bar{a}} \boldsymbol{\theta} \cdot \mathbf{J}_{\bar{a}a}^{(A)} \Psi_{\bar{a}\bar{b}} + i \sum_{\bar{b}} \boldsymbol{\theta} \cdot \mathbf{J}_{\bar{b}b}^{(B)} \Psi_{a\bar{b}},$$

то под действием того же самого вращения состояние

$$\Psi^j{}_{\sigma} \equiv \sum_{ab} C_{AB}(j\sigma; ab) \Psi_{ab}$$

преобразуется согласно

$$\delta\Psi^j{}_{\sigma} \equiv i \sum_{\bar{\sigma}} \boldsymbol{\theta} \cdot \mathbf{J}_{\bar{\sigma}\sigma}^{(j)} \Psi^j{}_{\bar{\sigma}}.$$

Из (5.7.2) следует, что коэффициенты  $u_{ab}(0, \sigma)$  удовлетворяют этому условию; следовательно, с точностью до коэффициента пропорциональности  $u_{ab}(0, \sigma)$  совпадает с  $C_{AB}(j\sigma; ab)$ . Коэффициент обычно выбирают так, что

$$u_{ab}(0, \sigma) = (2m)^{-1/2} C_{AB}(j\sigma; ab). \quad (5.7.4)$$

Этот вариант является единственным возможным, поскольку каждое неприводимое представление  $(A, B)$  однородной группы Лоренца содержит представление данного спина  $j$  с кратностью не выше единицы. Далее, из соотношений (5.6.16), (5.6.17) получаем следующее выражение для матриц, комплексно-сопряженных к матрицам углового момента:

$$-\mathbf{J}_{\sigma\sigma'}^{(j)*} = (-1)^{\sigma-\sigma'} \mathbf{J}_{-\sigma,-\sigma'}^{(j)}. \quad (5.7.5)$$

Отсюда следует, что после подстановки  $(-1)^{j-\sigma} v_{ab}(\mathbf{p}, -\sigma)$  в уравнение (5.7.3) последнее приобретает тот же вид, что и (5.7.2). При соответствующем выборе коэффициента пропорциональности единственным решением для  $v(0, \sigma)$  будет

$$v_{ab}(0, \sigma) = (-1)^{j+\sigma} u_{ab}(0, -\sigma). \quad (5.7.6)$$

Теперь нам нужно проделать буст для вычисления коэффициентных функций, соответствующих ненулевому импульсу. При фиксированном направлении  $\hat{\mathbf{p}} \equiv \mathbf{p}/|\mathbf{p}|$  параметры буста (2.5.24) могут быть выражены через величину  $\theta$ , определенную согласно

$$\text{ch } \theta = \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}/m, \quad \text{sh } \theta = |\mathbf{p}|/m. \quad (5.7.7)$$

Вместо  $L^\mu{}_\nu(p)$  мы можем писать  $L^\mu{}_\nu(\theta)$ , где

$$\begin{aligned} L^i{}_k(\theta) &= \delta_{ik} + (\text{ch } \theta - 1)\hat{p}_i\hat{p}_k, \\ L^i{}_0(\theta) &= L^0{}_i(p) = \hat{p}_i \text{sh } \theta, \\ L^0{}_0(\theta) &= \text{ch } \theta. \end{aligned} \quad (5.7.8)$$

Преимущество такой параметризации в том, что

$$L(\bar{\theta})L(\theta) = L(\bar{\theta} + \theta). \quad (5.7.9)$$

Для бесконечно малого  $\theta$  имеем  $[L(\theta)]^\mu{}_\nu \rightarrow \delta^\mu{}_\nu + \omega^\mu{}_\nu$ , где  $\omega^i{}_0 = \omega^0{}_i = \hat{p}_i\theta$  и  $\omega^i{}_j = \omega^0{}_0 = 0$ . При помощи тех же аргументов, что привели нас от (2.2.24) к (2.2.26), получаем

$$D(L(p)) = \exp(-i \cdot \hat{\mathbf{p}} \cdot \mathcal{K}\theta). \quad (5.7.10)$$

Это верно для любого представления группы Лоренца. Для неприводимого представления  $(A, B)$  из (5.6.7) и (5.6.8) следует, что

$$i\mathcal{K} = \mathcal{A} - \mathcal{B} \quad (5.7.11)$$

и, поскольку  $\mathcal{A}$  и  $\mathcal{B}$  коммутируют,

$$D(L(p)) = \exp(-\hat{\mathbf{p}} \cdot \mathcal{A}\theta) \exp(+\hat{\mathbf{p}} \cdot \mathcal{B}\theta). \quad (5.7.12)$$

Пользуясь (5.6.14) и (5.6.15), можно переписать это равенство в более подробном виде

$$D(L(p))_{a'b',ab} = (\exp(-\hat{\mathbf{p}} \cdot \mathbf{J}^{(A)}\theta))_{a'a} (\exp(+\hat{\mathbf{p}} \cdot \mathbf{J}^{(B)}\theta))_{b'b}. \quad (5.7.13)$$

Из (5.7.4) и (5.7.6) получаем тогда для соответствующих произвольному импульсу коэффициентных функций выражения

$$u_{ab}(\mathbf{p}, \sigma) = \frac{1}{\sqrt{2p^0}} \sum_{a'b'} (\exp(-\hat{\mathbf{p}} \cdot \mathbf{J}^{(A)} \theta))_{aa'} (\exp(+\hat{\mathbf{p}} \cdot \mathbf{J}^{(B)} \theta))_{bb'} \times \\ \times C_{AB}(j\sigma; ab) \quad (5.7.14)$$

и

$$v_{ab}(\mathbf{p}, \sigma) = (-1)^{j+\sigma} u_{ab}(\mathbf{p}, -\sigma). \quad (5.7.15)$$

Мы представили явные формулы для поля заданного типа  $(A, B)$ , так что такое поле (5.1.31) единственно с точностью до выбора постоянных множителей  $\kappa$  и  $\lambda$ .

В этом формализме очень легко строить лоренц-инвариантные скалярные взаимодействия. Представление  $(A, B)$  однородной группы Лоренца является прямым произведением представлений  $(A, 0)$  и  $(0, B)$ , так что из общих формул для преобразований Лоренца (5.1.6) и (5.1.7) получаем

$$U_0(\Lambda) \psi_{ab}(x) U_0^{-1}(\Lambda) = \sum_{a'b'} D_{a,a'}^{A0}(\Lambda^{-1}) D_{b,b'}^{0B}(\Lambda^{-1}) \psi_{a'b'}(\Lambda x). \quad (5.7.16)$$

Далее, из (5.6.14) и (5.6.15) следует, что матричные генераторы для представлений  $(A, 0)$  и  $(0, B)$  есть просто спиновые матрицы для спинов  $A$  и  $B$  соответственно. Поэтому мы можем строить скаляры вида

$$\sum_{a_1 a_2 \dots a_n} \sum_{b_1 b_2 \dots b_n} g_{a_1 a_2 \dots a_n; b_1 b_2 \dots b_n} \psi_{a_1 b_1}^{(1)} \psi_{a_2 b_2}^{(2)} \dots \psi_{a_n b_n}^{(n)}, \quad (5.7.17)$$

полагая  $g_{a_1 a_2 \dots a_n; b_1 b_2 \dots b_n}$  равным произведению коэффициента, задающего скалярное спаривание спинов  $A_1, A_2, \dots, A_n$ , и коэффициента, задающего скалярное спаривание спинов  $B_1, B_2, \dots, B_n$ . (Хотя мы в явном виде и не рассматриваем взаимодействия, включающие производные поля, мы все же получим в результате самое общее взаимодействие  $n$  полей, так как для производной поля типа  $(A, B)$  можно привести не содержащее производных выражение через поля других типов.) Например, самый общий лоренцов скаляр, построенный из произведений трех полей типов  $(A_1, B_1)$ ,  $(A_2, B_2)$  и  $(A_3, B_3)$ , равен

$$g \sum_{a_1 a_2 a_3} \sum_{b_1 b_2 b_3} \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_1 & B_2 & B_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix} \psi_{a_1 b_1}^{(1)} \psi_{a_2 b_2}^{(2)} \psi_{a_3 b_3}^{(3)}, \quad (5.7.18)$$

и содержит единственный свободный параметр  $g$ . Это самый общий вид взаимодействия трех полей. (Скобки в (5.7.18) обозначают  $3j$ -символы Вигнера [10]

$$\begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix} \equiv \sum_{m'_3} C_{j_1 j_2}(j_3 m'_3, m_1 m_2) C_{j_3 j_3}(00, m'_3 m_3)$$

при помощи которых можно образовать скаляр из трех спинов.)

Для того чтобы  $S$ -матрица была лоренц-инвариантной, недостаточно потребовать, чтобы плотность гамильтониана взаимодействия  $\mathcal{H}(x)$  была скаляром, как в (5.7.18). Необходимо еще, чтобы  $\mathcal{H}(x)$  коммутировала с  $\mathcal{H}(y)$  при  $x$  и  $y$ , разделенных пространственноподобным интервалом. Чтобы понять, как можно удовлетворить этому условию, рассмотрим коммутатор или антикоммутатор двух полей, соответствующих частицам одинакового типа — поля  $\psi$  типа  $(A, B)$  и поля  $\tilde{\psi}^\dagger$ , сопряженного к полю  $\tilde{\psi}$  типа  $(\tilde{A}, \tilde{B})$ . Имеем

$$[\psi_{ab}(x), \tilde{\psi}_{\tilde{a}\tilde{b}}^\dagger(y)]_\mp = \\ = (2\pi)^{-3} \int d^3 p (2p^0)^{-1} \pi_{ab, \tilde{a}\tilde{b}}(\mathbf{p}) [\kappa \tilde{\kappa}^* e^{ip \cdot (x-y)} \mp \lambda \tilde{\lambda}^* e^{-ip \cdot (x-y)}], \quad (5.7.19)$$

где для бозонов выбирается верхний знак, а для фермионов — нижний. Спиновая сумма  $\pi(\mathbf{p})$  равна

$$(2p^0)^{-1} \pi_{ab, \tilde{a}\tilde{b}}(\mathbf{p}) \equiv \sum_\sigma u_{ab}(\mathbf{p}, \sigma) \tilde{u}_{\tilde{a}\tilde{b}}^*(\mathbf{p}, \sigma) = \sum_\sigma v_{ab}(\mathbf{p}, \sigma) \tilde{v}_{\tilde{a}\tilde{b}}^*(\mathbf{p}, \sigma). \quad (5.7.20)$$

(Мы допускаем отличные от  $\kappa$  и  $\lambda$  значения коэффициентов  $\tilde{\kappa}$  и  $\tilde{\lambda}$  для поля  $\tilde{\psi}$ .) Подробнее,

$$\pi_{ab, \tilde{a}\tilde{b}}(\mathbf{p}) = \sum_{a'b'} \sum_{\tilde{a}'\tilde{b}'} \sum_\sigma C_{AB}(j\sigma, a'b') C_{\tilde{A}\tilde{B}}(j\sigma, \tilde{a}'\tilde{b}') \times \\ \times (\exp(-\hat{\mathbf{p}} \cdot \mathbf{J}^{(A)}\theta))_{aa'} (\exp(+\hat{\mathbf{p}} \cdot \mathbf{J}^{(B)}\theta))_{bb'} \times \\ \times (\exp(-\hat{\mathbf{p}} \cdot \mathbf{J}^{(A)}\theta))_{\tilde{a}\tilde{a}'} (\exp(+\hat{\mathbf{p}} \cdot \mathbf{J}^{(B)}\theta))_{\tilde{b}\tilde{b}'} . \quad (5.7.21)$$

Функция  $\pi(\mathbf{p})$  была найдена в явном виде [11]. Для нас важно, что она равна значению некоторой *полиномиальной* функции  $P$  от  $\mathbf{p}$  и  $p^0$  на массовой оболочке:

$$\pi_{ab, \tilde{a}\tilde{b}}(\mathbf{p}) = P_{ab, \tilde{a}\tilde{b}}(\mathbf{p}, \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}), \quad (5.7.22)$$

и что четность функции  $P$  определяется четностью  $2A + 2\tilde{B}$ :

$$P(-\mathbf{p}, -p^0) = (-1)^{2A+2\tilde{B}} P(\mathbf{p}, p^0). \quad (5.7.23)$$

Мы проверим это для одного фиксированного направления  $\mathbf{p}$ . Считая  $\mathbf{p}$  направленным вдоль третьей координатной оси, из (5.7.21) получаем

$$\pi_{ab, \tilde{a}\tilde{b}}(\mathbf{p}) = \sum_\sigma C_{AB}(j\sigma, ab) C_{\tilde{A}\tilde{B}}(j\sigma, \tilde{a}\tilde{b}) \exp([-a + b - \tilde{a} + \tilde{b}]\theta).$$

Коэффициенты Клебша–Гордана обращаются в нуль, если только не выполнены одновременно условия  $\sigma = a + b$  и  $\sigma = \tilde{a} + \tilde{b}$ , так что мож-

но сделать замену

$$-a + b - \tilde{a} + \tilde{b} = -2a + \sigma + 2\tilde{b} - \sigma = 2\tilde{b} - 2a.$$

Так как  $\exp(\pm\theta) = (p^0 \pm p^3)/m$ , имеем

$$\pi_{ab,\tilde{a}\tilde{b}}(\mathbf{p}) = \sum_{\sigma} C_{AB}(j\sigma, ab) C_{\tilde{A}\tilde{B}}(j\sigma, \tilde{a}\tilde{b}) \begin{cases} [(p^0 + p^3)/m]^{2\tilde{b}-2a} & (\tilde{b} \geq a), \\ [(p^0 - p^3)/m]^{2a-2\tilde{b}} & (a \geq \tilde{b}), \end{cases}$$

где  $p^0 \equiv \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}$ . Видно, что  $\pi(\mathbf{p})$  в самом деле равно значению полиномиальной функции  $P(\tilde{\mathbf{p}}, p^0)$ , взятому в лежащей на массовой оболочке точке. Кроме того,  $2b - 2a$  равно  $2\tilde{B} + 2A$  минус четное целое, так что полиномиальная функция удовлетворяет условию (5.7.23).

Любой многочлен от  $\mathbf{p}$  и  $\sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}$  можно записать в виде выражения, линейного по  $\sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}$ , выразив через  $\mathbf{p}$  четные степени  $\sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}$ . Следовательно,  $\pi(\mathbf{p})$  можно представить в виде

$$\pi_{ab,\tilde{a}\tilde{b}}(\mathbf{p}) = P_{ab,\tilde{a}\tilde{b}}(\mathbf{p}) + 2\sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2} Q_{ab,\tilde{a}\tilde{b}}(\mathbf{p}), \quad (5.7.24)$$

где  $P$  и  $Q$  — многочлены только от  $\mathbf{p}$ , причем

$$P(-\mathbf{p}) = (-1)^{2A+2\tilde{B}} P(\mathbf{p}), \quad (5.7.25)$$

$$Q(-\mathbf{p}) = -(-1)^{2A+2\tilde{B}} Q(\mathbf{p}). \quad (5.7.26)$$

Для пространственноподобного интервала  $x - y$  можно выбрать лоренцеву систему отсчета, в которой  $x^0 = y^0$ . Коммутатор (5.7.19) тогда примет вид

$$\begin{aligned} [\psi_{ab}(x), \tilde{\psi}_{\tilde{a}\tilde{b}}^\dagger(y)]_\mp &= \\ &= [\kappa \tilde{\kappa}^* \mp (-1)^{2A+2\tilde{B}} \lambda \tilde{\lambda}^*] P_{ab,\tilde{a}\tilde{b}}(-i\nabla) \Delta_+(\mathbf{x} - \mathbf{y}, 0) + \\ &\quad + [\kappa \tilde{\kappa}^* \pm (-1)^{2A+2\tilde{B}} \lambda \tilde{\lambda}^*] Q_{ab,\tilde{a}\tilde{b}}(-i\nabla) \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}). \end{aligned}$$

Для обращения этой величины в нуль при  $\mathbf{x} \neq \mathbf{y}$  нужно, чтобы выполнялось соотношение

$$\kappa \tilde{\kappa}^* = \pm (-1)^{2A+2\tilde{B}} \lambda \tilde{\lambda}^*. \quad (5.7.27)$$

Рассмотрим теперь частный случай тождественных  $\psi$  и  $\tilde{\psi}$ , когда  $A = \tilde{A}$  и  $B = \tilde{B}$ . (Подобные коммутаторы неизбежно входят в  $[\mathcal{H}(x), \mathcal{H}(y)]$ , так как содержащий  $\psi$  эрмитов гамильтониан должен содержать и  $\psi^\dagger$ .) В этом случае из (5.7.27) следует, что

$$|\kappa|^2 = \pm (-1)^{2A+2\tilde{B}} |\lambda|^2.$$

Такое возможно тогда и только тогда, когда

$$\pm (-1)^{2A+2\tilde{B}} = +1 \quad (5.7.28)$$

и

$$|\kappa|^2 = |\lambda|^2. \quad (5.7.29)$$

Так как  $2A + 2B$  отличается от  $2j$  на четное целое число, равенство (5.7.28) означает, что *наша частица является бозоном при четном  $2j$  и фермионом при нечетном  $2j$* . Это общая связь между спином и статистикой [12], частные случаи которой встречались нам при рассмотрении скалярного, векторного и дираковского полей.

Вернемся теперь к общему случаю, когда поля  $\psi$  и  $\tilde{\psi}$  могут быть различными. Из (5.7.27) после деления обеих частей на  $|\tilde{\kappa}|^2 = |\tilde{\lambda}|^2$  получаем

$$\frac{\kappa}{\tilde{\kappa}} = (-1)^{2B+2\tilde{B}} \frac{\lambda}{\tilde{\lambda}}.$$

Из этого следует, что для любого поля

$$\lambda = (-1)^{2B} c \kappa, \quad (5.7.30)$$

где постоянная  $c$  одинакова для всех полей, соответствующих данной частице. Далее, из (5.7.29) следует, что  $c$  есть лишь фазовый множитель,  $|c| = 1$ . Поэтому можно полностью исключить все постоянные  $c$ , переопределив относительные фазы операторов  $a(\mathbf{p}, \sigma)$  и  $a^{c\dagger}(\mathbf{p}, \sigma)$  всех полей так, чтобы было  $c = 1$  (при этом  $\lambda = (-1)^{2B} \kappa$ .) От множителя  $\kappa$  также можно избавиться, соответствующим образом изменив масштаб поля. С учетом всего сказанного получаем единственное с точностью до общего множителя выражение для поля типа  $(A, B)$ , соответствующего заданной частице:

$$\begin{aligned} \psi_{ab}(x) = (2\pi)^{-3/2} \sum_{\sigma} \int d^3 p [u_{ab}(\mathbf{p}, \sigma) a(\mathbf{p}, \sigma) e^{ip \cdot x} + \\ + (-1)^{2B} v_{ab}(\mathbf{p}, \sigma) a^{c\dagger}(\mathbf{p}, \sigma) e^{-ip \cdot x}]. \end{aligned} \quad (5.7.31)$$

Различные поля, соответствующие одной и той же частице, на самом деле не представляют физически различные возможности. Например, для  $j = 0$  допустимы поля типа  $(A, A)$  (поскольку из неравенства треугольника  $|A - B| \leq j \leq A + B$  следует  $A = B$ .) Начав со скалярного поля  $\phi$  типа  $(0, 0)$ , можно построить поля типа  $(A, A)$  из производных порядка  $2A$

$$\{\partial_{\mu_1} \dots \partial_{\mu_{2A}}\} \phi, \quad (5.7.32)$$

где  $\{\}$  обозначает взятие бесследовой части — например,

$$\{\partial_{\mu} \partial_{\nu}\} \equiv \frac{\delta^2}{\partial x^{\mu} \partial x^{\nu}} - \frac{1}{4} \eta_{\mu\nu} \square.$$

(Напомним, что бесследовый симметричный тензор ранга  $N$  преобразуется по представлению  $(N/2, N/2)$ .) Но (5.7.31) — *единственное* причинное поле типа  $(A, B)$  для заданной частицы спина  $j$ , так что все поля типа  $(A, A)$  в (5.7.31) для  $j = 0$  с необходимостью являются

линейными комбинациями производных порядка  $2A$  (5.7.32) скалярного поля  $\phi$ .

Вообще, любое поле типа  $(A, B)$ , соответствующее некоторой частице спина  $j$ , может быть представлено в виде дифференциального оператора ранга  $2B$ , действующего на поле  $\phi_\sigma(x)$  типа  $(j, 0)$  (или в виде дифференциального оператора ранга  $2A$ , действующего на поле типа  $(0, j)$ ) [13]. Чтобы убедиться в этом, рассмотрим поле

$$\{\partial_{\mu_1} \dots \partial_{\mu_{2B}}\} \varphi_\sigma. \quad (5.7.33)$$

Оно преобразуется по прямому произведению представлений  $(B, B)$  и  $(j, 0)$ , и согласно правилу векторного сложения может быть разложено по полям, преобразующимся по неприводимым представлениям  $(A, B)$  с  $|j - B| \leq A \leq |j + B|$  (или, эквивалентно,  $|A - B| \leq j \leq |A + B|$ ). Но поскольку формула (5.7.31) дает единственное поле типа  $(A, B)$  для заданной частицы спина  $j$ , оно с необходимостью совпадает с полем типа  $(A, B)$ , полученным в (5.7.33) при помощи дифференцирования<sup>2)</sup>.

Изучим теперь поведение построенных полей относительно различных дискретных преобразований, начиная с пространственной инверсии. Согласно результатам § 4.2, операторы рождения частиц и уничтожения античастиц обладают следующими трансформационными свойствами относительно пространственной инверсии:

$$\mathsf{P}a(\mathbf{p}, \sigma)\mathsf{P}^{-1} = \eta^* a(-\mathbf{p}, \sigma), \quad (5.7.34)$$

$$\mathsf{P}a^{c\dagger}(\mathbf{p}, \sigma)\mathsf{P}^{-1} = \eta^c a^{c\dagger}(-\mathbf{p}, \sigma), \quad (5.7.35)$$

---

<sup>2)</sup> Это рассуждение теряет силу в единственном случае — когда какое-либо полученное таким способом поле типа  $(A, B)$  на самом деле оказывается нулевым. Но тогда поле  $\phi_\sigma$  типа  $(j, 0)$  удовлетворяет уравнению

$$\sum_\sigma M_\sigma(\partial/\partial x)\phi_\sigma(x) = 0,$$

и, следовательно, при любом  $\bar{\sigma}$  имеем

$$\sum_\sigma M_\sigma(ip)u_\sigma(\mathbf{p}, \bar{\sigma}) = 0.$$

Для представления  $(j, \sigma)$  коэффициент Клебша–Гордана  $C_{j0}(j\bar{\sigma}, \sigma 0)$  есть просто символ Кронекера  $\delta_{\bar{\sigma}\sigma}$ , так что

$$\sum_\sigma M_\sigma(ip)D_{\sigma\sigma'}(L(p)) = 0,$$

что возможно только при обращении всех  $M_\sigma(ip)$  в нуль, поскольку матрица  $D(\Lambda)$  имеет обратную  $D(\Lambda^{-1})$ . Поэтому поле  $\phi_\sigma(x)$  типа  $(j, 0)$  не удовлетворяет никакому полевому уравнению, кроме уравнения Клейна–Гордана  $-m^2 \phi_\sigma(x) = 0$ , а возникающие в (5.7.33) поля типов  $(A, B)$  все ненулевые.

где  $\eta$  и  $\eta^c$  — внутренние четности частицы и античастицы соответственно. Поэтому оператор четности  $P$  переводит общее причинное поле типа  $(A, B)$  в поле

$$\mathsf{P}\psi_{ab}^{AB}(x)\mathsf{P}^{-1} = (2\pi)^{-3/2} \sum_{\sigma} \int d^3 p [\eta^* a(-\mathbf{p}, \sigma) e^{ip \cdot x} u_{ab}^{AB}(\mathbf{p}, \sigma) + \eta^c (-1)^{2B} a^{c\dagger}(-\mathbf{p}, \sigma) e^{-ip \cdot x} v_{ab}^{AB}(\mathbf{p}, \sigma)]. \quad (5.7.36)$$

Мы намерены перейти от переменной интегрирования  $\mathbf{p}$  к  $-\mathbf{p}$ , для чего нам нужны выражения для  $u_{ab}(-\mathbf{p}, \sigma)$  и  $v_{ab}(-\mathbf{p})$ . Чтобы получить их, вспомним формулы (5.7.14), (5.7.15) и воспользуемся свойством симметрии коэффициентов Клебша–Гордана [14]

$$C_{AB}(j\sigma; ab) = (-1)^{A+B-j} C_{AB}(j\sigma; ba). \quad (5.7.37)$$

Имеем

$$u_{ab}^{AB}(-\mathbf{p}, \sigma) = (-1)^{A+B-j} u_{ba}^{BA}(\mathbf{p}, \sigma), \quad (5.7.38)$$

$$v_{ab}^{AB}(-\mathbf{p}, \sigma) = (-1)^{A+B-j} v_{ba}^{BA}(\mathbf{p}, \sigma), \quad (5.7.39)$$

так что

$$\begin{aligned} \mathsf{P}\psi_{ab}^{AB}(x)\mathsf{P}^{-1} &= (2\pi)^{-3/2} \sum_{\sigma} \int d^3 p (-1)^{A+B-j} \times \\ &\times [\eta^* a(\mathbf{p}, \sigma) e^{ip \cdot \mathcal{P}x} u_{ba}^{BA}(\mathbf{p}, \sigma) + \eta^c (-1)^{2B} a^{c\dagger}(\mathbf{p}, \sigma) e^{-ip \cdot \mathcal{P}x} v_{ba}^{BA}(\mathbf{p}, \sigma)], \end{aligned} \quad (5.7.40)$$

где, как и ранее,  $\mathcal{P}x = (-\mathbf{x}, x^0)$ . Мы получили аналогичное (5.7.31) выражение для значения причинного поля  $\psi_{ba}^{BA}$  в точке  $\mathcal{P}x$ , за исключением того, что коэффициенты при операторах рождения и уничтожения могут отличаться от коэффициентов в (5.7.31). Но эти коэффициенты *должны* совпадать с точностью до постоянного общего множителя, поскольку с точностью до изменения масштаба (5.7.31) представляет собой единственное причинное поле заданного типа. Поэтому отношение коэффициентов при двух слагаемых в (5.7.40) должно совпадать с соответствующим отношением в (5.7.31) — с заменой  $B$  на  $A$ , так как мы должны получить поле типа  $(B, A)$ :

$$\eta^c (-1)^{2B} / \eta^* = (-1)^{2A}. \quad (5.7.41)$$

Но  $A - B$  отличается от спина  $j$  на целое число, так что

$$\eta^c = \eta^* (-1)^{2j}. \quad (5.7.42)$$

Частные случаи этого результата встречались нам в §§ 5.2, 5.3 и 5.5 (для  $j = 0$ ,  $j = 1$  и  $j = 1/2$  соответственно.) Теперь мы видим, что и в общем случае *внутренняя четность*  $\eta^c \eta$  пары частица–античастица *равна*  $+1$  для бозонов и  $-1$  для фермионов. Из (5.7.42) и (5.7.40)

получаем окончательный ответ для пространственной инверсии:

$$P\psi_{ab}^{AB}(x)P^{-1} = \eta^*(-1)^{A+B-j}\psi_{ba}^{BA}(-\mathbf{x}, x^0). \quad (5.7.43)$$

Рассмотрим приложения этих результатов к полю Дирака. Для верхней  $(1/2, 0)$  и нижней  $(0, 1/2)$  компонент дираковского поля знак  $(-1)^{A+B-j}$  равен  $+1$ , так что оператор четности просто переводит  $\mathbf{x}$  в  $-\mathbf{x}$ , переставляет верхнюю и нижнюю компоненты и умножает все поле на  $\eta^*$ . Перестановка верхней и нижней компонент осуществляется при помощи матрицы  $\beta$  из (5.5.41).

Перейдем теперь к зарядовому сопряжению. Его действие на операторы уничтожения частиц и рождения античастиц задается формулами

$$Ca(\mathbf{p}, \sigma)C^{-1} = \xi^* a^c(\mathbf{p}, \sigma), \quad (5.7.44)$$

$$Ca^\dagger(\mathbf{p}, \sigma)C^{-1} = \xi^c a^\dagger(\mathbf{p}, \sigma), \quad (5.7.45)$$

где  $\xi$  и  $\xi^c$  — четности соответственно частицы и античастицы относительно зарядового сопряжения. Применяя это преобразование к полу (5.7.31), находим

$$\begin{aligned} C\psi_{ab}^{AB}(x)C^{-1} &= (2\pi)^{-3/2} \sum_{\sigma} \int d^3 p u_{ab}^{AB}(\mathbf{p}, \sigma) \times \\ &\times [\xi^* a^c(\mathbf{p}, \sigma) e^{ip \cdot x} + \eta^c (-1)^{2B} a^\dagger(\mathbf{p}, -\sigma) (-1)^{j-\sigma} e^{-ip \cdot x}]. \end{aligned} \quad (5.7.46)$$

Полезно сравнить результат зарядового сопряжения поля типа  $(A, B)$  с результатом эрмитового сопряжения поля типа  $(B, A)$  для частицы того же вида

$$\begin{aligned} \psi_{ba}^{BA\dagger}(x) &= (2\pi)^{-3/2} \sum_{\sigma} \int d^3 p u_{ba}^{BA*}(\mathbf{p}, \sigma) \times \\ &\times [(-1)^{2A} (-1)^{j-\sigma} a^c(\mathbf{p}, -\sigma) e^{ip \cdot x} + a^\dagger(\mathbf{p}, \sigma) e^{-ip \cdot x}]. \end{aligned} \quad (5.7.47)$$

Для нахождения  $u^*$  воспользуемся полученным ранее соотношением

$$\mathbf{J}^{(j)*} = -\mathcal{C} \mathbf{J}^{(j)} \mathcal{C}^{-1}, \quad \mathcal{C}_{\bar{\sigma}\sigma} \propto (-1)^{j-\sigma} \delta_{\bar{\sigma}, -\sigma}.$$

Коэффициент Клебша–Гордана в (5.7.14) действителен, так что

$$\begin{aligned} u_{ba}^{BA}(\mathbf{p}, \sigma)^* &= \frac{1}{\sqrt{2p^0}} \sum_{a'b'} (\exp(-\hat{\mathbf{p}} \cdot \mathbf{J}^{(A)} \theta))_{-a, -a'} (\exp(\hat{\mathbf{p}} \cdot \mathbf{J}^{(B)} \theta))_{-b, -b'} \times \\ &\times (-1)^{a'-a} (-1)^{b'-b} C_{BA}(j\sigma; b'a'). \end{aligned}$$

Используя свойство симметрии коэффициентов Клебша–Гордана [14]

$$C_{BA}(j, -\sigma; -b', -a') = C_{AB}(j\sigma; a'b') \quad (5.7.48)$$

и обращение их в нуль при  $a' + b' \neq \sigma$ , запишем

$$u_{-b, -a}^{BA}(\mathbf{p}, -\sigma)^* = (-1)^{a+b-\sigma} u_{ab}^{AB}(\mathbf{p}, \sigma). \quad (5.7.49)$$

Для эрмитово-сопряженного поля (5.7.47) получим тогда (после замены  $a \rightarrow -a$ ,  $b \rightarrow -b$ ,  $\sigma \rightarrow -\sigma$ )

$$\psi_{-b,-a}^{BA\dagger}(x) = (2\pi)^{-3/2} \sum_{\sigma} \int d^3 p (-1)^{a+b-\sigma} u_{ab}^{AB}(\mathbf{p}, \sigma) \times \\ \times [(-1)^{2A} (-1)^{j+\sigma} a^c(\mathbf{p}, \sigma) e^{ip \cdot x} + a^\dagger(\mathbf{p}, \sigma) e^{-ip \cdot x}].$$

С учетом равенства  $(-)^{-2A-j} = (-)^{2B+j}$  имеем

$$(-1)^{-2A-a-b-j} \psi_{-b,-a}^{BA\dagger}(x) = (2\pi)^{-3/2} \sum_{\sigma} \int d^3 p u_{ab}^{AB}(\mathbf{p}, \sigma) \times \\ \times [a^c(\mathbf{p}, \sigma) e^{ip \cdot x} + (-1)^{j-\sigma+2B} a^\dagger(\mathbf{p}, -\sigma) e^{-ip \cdot x}]. \quad (5.7.50)$$

Для того чтобы коммутатор или антисимметризатор поля  $C\psi_{ab}^{AB}(x)C^{-1}$  с обычными полями обращался в нуль при пространственноподобном интервале между соответствующими точками пространства–времени, необходимо, чтобы это поле было пропорционально  $\psi_{-b,-a}^{BA\dagger}(x)$  (так как последнее является сопряженным к единственному с точностью до множителя причинному полю типа  $(B, A)$ ). Из сравнения (5.7.50) с (5.7.46) находим, что это возможно лишь если четности относительного зарядового сопряжения связаны посредством

$$\xi^c = \xi^*. \quad (5.7.51)$$

В этом случае

$$C\psi_{ab}^{AB}(x)C^{-1} = \xi^* (-1)^{-2A-a-b-j} \psi_{-b,-a}^{BA\dagger}(x). \quad (5.7.52)$$

Мы уже встречались с соотношением (5.7.51) при рассмотрении частиц со спинами 0, 1 и  $1/2$  соответственно в §§ 5.2, 5.3 и 5.5 и отметили некоторые его следствия для состояний электрон–позитрон и кварк–антикварк в § 5.5.

В частности, для частицы, являющейся своей собственной античастицей, равенство (5.7.52) выполняется и в отсутствие оператора зарядового сопряжения в левой части и фазы  $\xi^*$  в правой:

$$\psi_{ab}^{AB}(x) = (-1)^{-2A-a-b-j} \psi_{-b,-a}^{BA\dagger}(x). \quad (5.7.53)$$

Примеры подобных условий действительности уже встречались нам при рассмотрении майорановских частиц спина  $1/2$  в § 5.5.

Наконец, перейдем к операции обращения времени. На операторы уничтожения частиц и рождения античастиц она действует следующим образом:

$$\mathsf{T}a(\mathbf{p}, \sigma)\mathsf{T}^{-1} = \zeta^*(-1)^{j-\sigma} a(-\mathbf{p}, -\sigma), \quad (5.7.54)$$

$$\mathsf{T}a^{c\dagger}(\mathbf{p}, \sigma)\mathsf{T}^{-1} = \zeta^c(-1)^{j-\sigma} a^{c\dagger}(-\mathbf{p}, -\sigma). \quad (5.7.55)$$

Неприводимое поле (5.7.31) имеет поэтому следующие трансформационные свойства:

$$\begin{aligned} \mathbf{T}\psi_{ab}^{AB}(x)\mathbf{T}^{-1} = (2\pi)^{-3/2} \sum_{\sigma} \int d^3 p u_{ab}^{AB*}(\mathbf{p}, \sigma) (-1)^{j-\sigma} \times \\ \times [\zeta^* a(-\mathbf{p}, -\sigma) e^{-ip \cdot x} + \zeta^c (-1)^{2B} a^{c\dagger}(-\mathbf{p}, -\sigma) e^{ip \cdot x}]. \end{aligned} \quad (5.7.56)$$

Чтобы найти комплексно-сопряженную коэффициентную функцию, воспользуемся выражением (5.7.14) и стандартной формулой [14]

$$C_{AB}(j, \sigma; a, b) = (-1)^{A+B-j} C_{AB}(j, -\sigma; -a, -b). \quad (5.7.57)$$

Получаем

$$u_{ab}^{AB*}(-\mathbf{p}, -\sigma) = (-1)^{a+b+\sigma+A+B-j} u_{-a,-b}^{AB}(\mathbf{p}, \sigma). \quad (5.7.58)$$

Заменяя в (5.7.56) переменную интегрирования  $\mathbf{p}$  на  $-\mathbf{p}$  и индекс суммирования  $\sigma$  на  $-\sigma$ , находим, что из условия пропорциональности результата применения оператора обращения времени к полю типа  $(A, B)$  выражению (5.7.31) для общего поля типа  $(A, B)$  следует равенство

$$\zeta^c = \zeta^*. \quad (5.7.59)$$

В этом случае

$$\mathbf{T}\psi_{ab}^{AB}(x)\mathbf{T}^{-1} = (-1)^{a+b+A+B-2j} \zeta^* \psi_{-a,-b}^{AB}(\mathbf{x}, -x^0). \quad (5.7.60)$$

\* \* \*

Стоит отметить, что в полевых теориях с частицами спина  $j \geq 3/2$  время от времени обнаруживались различные трудности [15]. Обычно они возникали при изучении движения частицы высшего спина в  $c$ -числовом внешнем поле. В зависимости от конкретной теории, эти трудности включали нарушения причинности, внутреннюю противоречивость, появление состояний с нефизической массой и нарушения унитарности. Я не буду здесь подробно обсуждать эти проблемы — на мой взгляд, они не имеют отношения к изложенной в этой главе схеме вычислений по следующим причинам.

1) Поля  $\psi_{ab}(x)$  строились непосредственно из операторов рождения и уничтожения физических частиц, так что вопросы о внутренней противоречивости или состояниях с нефизическими массами возникнуть не могут. Мы построили свободные поля, но после введения в гамильтониан слагаемых, отвечающих за взаимодействие частиц, можно будет применить теорию возмущений в представлении взаимодействия и вычислить элементы  $S$ -матрицы, которые автоматически будут удовлетворять условию кластерной декомпозиции. Для эрмитовых гамильтонианов не возникает проблем с унитарностью.

Лоренц-инвариантность гарантируется теорией возмущений при условии, что мы добавим в плотность гамильтониана соответствующие локальные, но не ковариантные слагаемые; хотя строгое доказательство этого факта отсутствует, нет причин сомневаться, что такое изменение плотности гамильтониана всегда возможно. Таким образом, проблемы с частицами высших спинов могут возникнуть только вне рамок теории возмущений.

2) Как будет обсуждаться в § 13.6, решение уравнений поля в присутствии *c*-числового внешнего поля (а именно в этом контексте встретились все проблемы с частицами высших спинов) выходит за рамки теории возмущений в том смысле, что результаты соответствуют суммированию совокупности бесконечного числа членов ряда теории возмущений. Такое частичное суммирование корректно даже для слабых внешних полей, если они достаточно медленно меняются — малость энергетических знаменателей компенсирует слабость поля. Но получаемые таким образом результаты зависят от всех деталей взаимодействия частицы высшего спина с внешним полем: важны не только мультипольные моменты частицы, но и возможные нелинейные по внешнему полю слагаемые в гамильтониане взаимодействия. Сообщалось [15] лишь о трудностях с частицами высших спинов, взаимодействие которых с внешним полем произвольным образом принималось имеющим очень простой вид. Никто не доказал, что сложности остаются и в случае произвольных взаимодействий; в гл. 12 мы увидим, что следует ожидать участия частиц высших спинов во всех взаимодействиях, не запрещенных из соображений симметрии.

3) Фактически имеются серьезные причины считать, что проблемы с частицами высших спинов исчезают в случае достаточно сложных взаимодействий с внешними полями. По крайней мере, нет сомнений в существовании *частиц* высшего спина — таковыми являются, например, различные стабильные ядра и адронные резонансы. Если какие-либо сложности с высшими спинами и имеются, они должны возникать только в случае “точечных” частиц, т.е. частиц, взаимодействия которых с полями имеют особенно простой вид. Следует помнить, что критерий “простоты” зависит от типа поля, при помощи которого мы представляем частицу высшего спина. Свободное поле произвольного типа для данной частицы может быть представлено в виде дифференциального оператора, действующего на поле любого другого типа, так что любое взаимодействие можно переписать в терминах полей произвольно выбранных типов; но взаимодействия, имеющие простой вид при записи через поля одного типа, могут сложным образом выражаться через поля других типов. Так что требование простоты, по-видимому, не имеет объективного содержания.

4) Кроме того, теории типа Калуцы–Клейна в высоких размерностях и струнные теории дают примеры непротиворечивых теорий, в которых заряженная массивная частица спина два взаимодействует

с фоновым электромагнитным полем [16]. (Оказалось, что непротиворечивость теории зависит от предположения о том, что внешнее поле удовлетворяет полевым уравнениям. В ранних работах этим обычно пренебрегали.) В нашей картине взаимодействий частица спина два представляется полем типа  $(1, 1)$ ; но, как мы отмечали выше, можно выразить взаимодействие в терминах любого поля типа  $(A, B)$ , содержащего представление группы вращений с  $j = 2$ .

## § 5.8. СРТ-теорема

Как мы видели, релятивистская инвариантность совместно с квантовой механикой требует существования античастиц. Это означает не только то, что каждой частице соответствует своя античастица (в случае истинной нейтральности совпадающая с ней самой). Имеется точное соотношение между свойствами частиц и античастиц, которое можно сформулировать в следующем виде: *после того, как мы определенным образом выбрали инверсные фазы, произведение СРТ сохраняется при любых инверсиях*. Это утверждение — ни что иное, как хорошо известная СРТ-теорема<sup>1)</sup>.

В качестве первого шага доказательства этого утверждения выясним, как произведение СРТ действует на свободные поля различных типов. Для скалярного, векторного и дираковского полей из §§ 5.2, 5.3 и 5.5 следует, что

$$\text{СРТ } \phi(x)[\text{СРТ}]^{-1} = \zeta^* \xi^* \eta^* \phi^\dagger(-x), \quad (5.8.1)$$

$$\text{СРТ } \phi_\mu(x)[\text{СРТ}]^{-1} = -\zeta^* \xi^* \eta^* \phi_\mu^\dagger(-x), \quad (5.8.2)$$

$$\text{СРТ } \psi(x)[\text{СРТ}]^{-1} = -\zeta^* \xi^* \eta^* \gamma_5 \psi^\dagger(-x) \quad (5.8.3)$$

(конечно, фазы  $\zeta$ ,  $\xi$  и  $\eta$  зависят от сортов частиц, описываемых каждым из полей). Выберем фазы так, что для любых частиц

$$\zeta \xi \eta = 1. \quad (5.8.4)$$

Тогда произвольный тензор  $\phi_{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_n}$ , являющийся прямым произведением некоторого набора скалярных и векторных полей и их произ-

<sup>1)</sup> Первоначальное ее доказательство было дано Паули и Людерсом [17]. В рамках аксиоматической теории поля эта теорема была строго доказана [18]. В ходе доказательства сначала с целью расширить лоренцевскую инвариантность теории до комплексной группы Лоренца использовались предположения относительно комутативности, затем с помощью комплексных лоренцевых преобразований доказывались свойства вакуумных средних от произведений полей относительно преобразования отражения и, наконец, с помощью этих свойств было доказано существование антиунитарного оператора, индуцирующего СРТ-преобразование полей.

водных преобразуется согласно

$$\text{CPT } \phi_{\mu_1 \dots \mu_n}(x)[\text{CPT}]^{-1} = (-1)^n \phi_{\mu_1 \dots \mu_n}^\dagger(-x) \quad (5.8.5)$$

(любой фигурирующий в структуре тензора комплексный численный коэффициент преобразуется в комплексно сопряженный, поскольку оператор **CPT** антиунитарен). Легко видеть, что тензоры, составленные из билинейных форм дираковских полей, преобразуются согласно тому же правилу. Применяя соотношение (5.8.3) к такой билинейной форме, получим

$$\begin{aligned} \text{CPT } [\bar{\psi}_1(x)M\psi_2(x)][\text{CPT}]^{-1} &= \psi_1^T(x)\gamma_5\beta M^*\gamma_5\psi_2^*(-x) = \\ &= [\psi_1^T(-x)\gamma_5 M\gamma_5\psi_2(-x)]^\dagger \end{aligned} \quad (5.8.6)$$

(знак минус из-за антисимметрии  $\beta$  и  $\gamma_5$  уничтожается знаком минус, возникающим благодаря антисимметрии фермионных операторов). Если билинейная форма является тензором ранга  $n$ , то  $M$  — произведение  $n \bmod 2$  матриц Дирака, и  $\gamma_5 M \gamma_5 = (-1)^n M$ . Следовательно, она удовлетворяет уравнению (5.8.5).

Эрмитова скалярная плотность энергии взаимодействия  $\mathcal{H}(x)$  должна содержать только тензоры с *четным* числом пространственно-временных индексов, и поэтому

$$\text{CPT } \mathcal{H}(x)[\text{CPT}]^{-1} = \mathcal{H}(-x). \quad (5.8.7)$$

Более общим (и несколько более простым) образом можно показать, что это справедливо для эрмитовых скаляров, составленных из полей  $\psi_{ab}^{AB}(x)$ , которые принадлежат одному или нескольким неприводимым представлениям однородной группы Лоренца. С учетом полученных в предыдущем параграфе результатов, касающихся действия преобразования инверсии на такие поля, находим

$$\text{CPT } \psi_{ab}^{AB}(x)[\text{CPT}]^{-1} = (-1)^{2B} \psi_{ab}^{AB\dagger}(-x). \quad (5.8.8)$$

(в случае дираковского поля возникновение множителя  $(-1)^{2B}$  обеспечивается матрицей  $\gamma_5$  в уравнении (5.8.3)). Для того чтобы в произведении  $\psi_{a_1 b_1}^{A_1 B_1}(x)\psi_{a_2 b_2}^{A_2 B_2}(x) \dots$  можно было устроить спаривание, пригодное для построения скаляра  $\mathcal{H}(x)$ , необходимо, чтобы и  $A_1 + A_2 + \dots$ , и  $B_1 + B_2 + \dots$  являлись целыми числами. В этом случае  $(-1)^{2B_1+2B_2+\dots} = 1$ , и эрмитов скаляр  $\mathcal{H}(x)$  автоматически удовлетворяет уравнению (5.8.7).

Из уравнения (5.8.7) немедленно следует, что **CPT** коммутирует с оператором взаимодействия  $V \equiv \int d^3x \mathcal{H}(\vec{x}, 0)$ :

$$\text{CPT } V[\text{CPT}]^{-1} = V. \quad (5.8.9)$$

Кроме того, в любой теории **CPT** коммутирует с гамильтонианом свободных частиц  $H_0$ . Таким образом, оператор **CPT**, определенный здесь

согласно его действию на операторы, соответствующие свободным частицам, действует на начальное и конечное состояния так, как описано в § 3.3. Физические следствия соответствующей этому оператору симметрии обсуждались в § 3.3 и § 3.6.

## § 5.9. Поля, соответствующие безмассовым частицам

До сих пор мы имели дело только с полями массивных частиц. Для некоторых из них (например, для скалярного и дираковского полей, обсуждавшихся в § 5.2 и § 5.5) переход к пределу нулевой массы не является особенной проблемой. С другой стороны, в § 5.3 мы видели, что при переходе к безмассовому пределу для векторного поля частицы со спином 1 действительно возникает трудность: по меньшей мере одна из поляризаций в этом пределе стремится к бесконечности. Как мы увидим в этом параграфе, фактически для построения всех неприводимых ( $A, B$ ) полей, соответствующих случаю конечной массы, нельзя использовать операторы рождения и уничтожения физических состояний, соответствующих безмассовым частицам со спином  $j \geq 1$ . Такое ограничение на типы полей естественным образом приведет нас к понятию калибровочной инвариантности.

Как и в случае массивных частиц попробуем построить соответствующее безмассовой частице свободное поле как линейную комбинацию операторов уничтожения  $a(\mathbf{p}, \sigma)$  частиц с импульсом  $\bar{p}$  и спиральностью  $\sigma$  и соответствующих операторов рождения античастиц<sup>1)</sup>  $a^{c\dagger}(\bar{p}, \sigma)$

$$\psi_l(x) = (2\pi)^{-3/2} \int d^3 p \sum_{\sigma} [\kappa a(\mathbf{p}, \sigma) u_l(\mathbf{p}, \sigma) e^{ip \cdot x} + \lambda a^{c\dagger}(\mathbf{p}, \sigma) v_l(\mathbf{p}, \sigma) e^{-ip \cdot x}], \quad (5.9.1)$$

где  $p^0 \equiv |\mathbf{p}|$ . Операторы рождения преобразуются точно так же, как одночастичные состояния в уравнении (2.5.42)

$$U(\Lambda) a^{\dagger}(\mathbf{p}, \sigma) U^{-1}(\Lambda) = \sqrt{\frac{(\Lambda p)^0}{p^0}} \exp(i\sigma\theta(p, \Lambda)) a^{\dagger}(\mathbf{p}_{\Lambda}, \sigma), \quad (5.9.2)$$

$$U(\Lambda) a^{c\dagger}(\mathbf{p}, \sigma) U^{-1}(\Lambda) = \sqrt{\frac{(\Lambda p)^0}{p^0}} \exp(i\sigma\theta(p, \Lambda)) a^{c\dagger}(\mathbf{p}_{\Lambda}, \sigma) \quad (5.9.3)$$

<sup>1)</sup> Здесь мы имеем дело только с одним типом частиц и поэтому опускаем индекс  $n$ . Кроме того,  $\kappa$  и  $\lambda$  — коэффициенты, которые должны быть найдены из условия причинности при некотором удобном выборе нормировки функций  $u_l$  и  $v_l$ .

и, следовательно, справедливо

$$U(\Lambda) a(\mathbf{p}, \sigma) U^{-1}(\Lambda) = \sqrt{\frac{(\Lambda p)^0}{p^0}} \exp(-i\sigma\theta(p, \Lambda)) a(\mathbf{p}_\Lambda, \sigma), \quad (5.9.4)$$

где  $p_\Lambda \equiv \Lambda p$  и  $\theta$  — угол, определяемый из уравнения (2.5.43). Таким образом, если мы хотим, чтобы поле преобразовывалось по некоторому представлению  $D(\Lambda)$  однородной группы Лоренца

$$U(\Lambda) \psi_l(x) U^{-1}(\Lambda) = \sum_{\bar{l}} D_{\bar{l}\bar{l}}(\Lambda^{-1}) \psi_{\bar{l}}(\Lambda x), \quad (5.9.5)$$

функции  $u$  и  $v$  вместо (5.1.19) и (5.1.20) должны удовлетворять соотношениям

$$u_{\bar{l}}(\mathbf{p}_\Lambda, \sigma) \exp(i\sigma\theta(p, \Lambda)) = \sqrt{\frac{p^0}{(\Lambda p)^0}} \sum_l D_{\bar{l}l}(\Lambda) u_l(\mathbf{p}, \sigma), \quad (5.9.6)$$

$$v_{\bar{l}}(\mathbf{p}_\Lambda, \sigma) \exp(-i\sigma\theta(p, \Lambda)) = \sqrt{\frac{p^0}{(\Lambda p)^0}} \sum_l D_{\bar{l}l}(\Lambda) v_l(\mathbf{p}, \sigma) \quad (5.9.7)$$

(снова предполагается, что  $p_\Lambda \equiv \Lambda p$ ). Как и в случае массивных частиц им можно удовлетворить, полагая (вместо (5.1.21) и (5.1.22))

$$u_{\bar{l}}(\mathbf{p}, \sigma) = \sqrt{\frac{|\mathbf{k}|}{p^0}} \sum_l D_{\bar{l}l}(\mathcal{L}(p)) u_l(\mathbf{k}, \sigma), \quad (5.9.8)$$

$$v_{\bar{l}}(\mathbf{p}, \sigma) = \sqrt{\frac{|\mathbf{k}|}{p^0}} \sum_l D_{\bar{l}l}(\mathcal{L}(p)) v_l(\mathbf{k}, \sigma), \quad (5.9.9)$$

где  $\mathbf{k}$  — некоторый импульс, например,  $(0, 0, k)$ , а  $\mathcal{L}(p)$  — какое-нибудь преобразование Лоренца, переводящее состояние, описывающее безмассовую частицу с импульсом  $\mathbf{k}$  в состояние с импульсом  $\mathbf{p}$ . Кроме того, вместо уравнений (5.1.23) и (5.1.24) функции  $u$  и  $v$  должны удовлетворять

$$u_{\bar{l}}(\mathbf{k}, \sigma) \exp(i\sigma\theta(k, W)) = \sum_l D_{\bar{l}l}(W) u_l(\mathbf{k}, \sigma), \quad (5.9.10)$$

$$v_{\bar{l}}(\mathbf{k}, \sigma) \exp(-i\sigma\theta(k, W)) = \sum_l D_{\bar{l}l}(W) v_l(\mathbf{k}, \sigma), \quad (5.9.11)$$

где  $W_\nu^\mu$  — произвольный элемент “малой группы” при  $k = (\mathbf{k}, |\mathbf{k}|)$ , т.е. произвольное лоренцево преобразование, оставляющее 4-импульс инвариантным. Физическое содержание уравнений (5.9.10) и (5.9.11) можно выделить, если рассмотреть отдельно два вида элементов малой группы в (2.5.28). Для матрицы поворота  $R(\theta)$  на угол  $\theta$  вокруг

оси  $Oz$ , согласно (2.5.27) имеющей вид

$$R^\mu{}_\nu = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

из (5.9.10) и (5.9.11) получаем

$$u_{\bar{l}}(\mathbf{k}, \sigma) e^{i\sigma\theta} = \sum_l D_{\bar{l}l}(R(\theta)) u_l(\mathbf{k}, \sigma), \quad (5.9.12)$$

$$v_{\bar{l}}(\mathbf{k}, \sigma) e^{-i\sigma\theta} = \sum_l D_{\bar{l}l}(R(\theta)) v_l(\mathbf{k}, \sigma), \quad (5.9.13)$$

а для комбинированных бустов и поворотов  $S(\alpha, \beta)$  в плоскости  $XY$ , определяемых согласно (2.5.26)

$$S^\mu{}_\nu(\alpha, \beta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\alpha & \alpha \\ 0 & 1 & -\beta & \beta \\ \alpha & \beta & 1 - \gamma & \gamma \\ \alpha & \beta & -\gamma & 1 + \gamma \end{bmatrix},$$

$$\gamma \equiv (\alpha^2 + \beta^2)/2$$

находим, что

$$u_{\bar{l}}(\mathbf{k}, \sigma) = \sum_l D_{\bar{l}l}(S(\alpha, \beta)) u_l(\mathbf{k}, \sigma), \quad (5.9.14)$$

$$v_{\bar{l}}(\mathbf{k}, \sigma) = \sum_l D_{\bar{l}l}(S(\alpha, \beta)) v_l(\mathbf{k}, \sigma). \quad (5.9.15)$$

Уравнения (5.9.12)–(5.9.15) — условия, посредством которых можно получить значения функций  $u$  и  $v$  при некотором фиксированном импульсе  $k$ ; затем с помощью (5.9.8) и (5.9.9) они определяются для произвольного значения импульса. Уравнения на функцию  $v$  получаются из уравнений на функцию  $u$  комплексным сопряжением, поэтому соответствующим выбором констант  $\kappa$  и  $\lambda$  всегда можно нормировать функции  $u$  и  $v$  так, что

$$v_l(\mathbf{k}, \sigma) = u_l(\mathbf{k}, \sigma)^*. \quad (5.9.16)$$

Проблема состоит в том, что для представления общего вида однородной группы Лоренца невозможно найти удовлетворяющую (5.9.14) функцию  $u_l$  — это так даже в случае тех представлений, для которых можно построить поля частиц с заданной спиральностью при  $m \neq 0$ .

Чтобы понять, что происходит, попробуем построить 4-векторное  $[(1/2, 1/2)]$ -поле безмассовой частицы со спиральностью  $\pm 1$ . Для 4-векторного представления имеем

$$D^\mu{}_\nu(\Lambda) = \Lambda^\mu{}_\nu.$$

Функцию  $u_\mu$  удобно выразить через “вектор поляризации”  $e_\mu$

$$u_\mu(\mathbf{k}, \sigma) \equiv (2p^0)^{-1/2} e_\mu(\mathbf{k}, \sigma). \quad (5.9.17)$$

Тогда из уравнения (5.9.8) получаем

$$e_\mu(\mathbf{k}, \sigma) = \mathcal{L}(\mathbf{p})^\mu{}_\nu e^\nu(\mathbf{k}, \sigma). \quad (5.9.18)$$

Теперь уравнения (5.9.12) и (5.9.14) можно переписать в виде

$$e^\mu(\mathbf{k}, \sigma) e^{i\sigma\theta} = R(\theta)^\mu{}_\nu e^\nu(\mathbf{k}, \sigma), \quad (5.9.19)$$

$$e^\mu(\mathbf{k}, \sigma) = S(\alpha, \beta)^\mu{}_\nu e^\nu(\mathbf{k}, \sigma). \quad (5.9.20)$$

Из (5.9.19) находим (с точностью до постоянного множителя, который можно исключить, переопределив коэффициенты  $\kappa$  и  $\lambda$ ), что

$$e^\mu(\mathbf{k}, \pm 1) = (1, \pm i, 0, 0)/\sqrt{2}. \quad (5.9.21)$$

Но из уравнения (5.9.20) помимо всего прочего следует, что  $\alpha \pm i\beta = 0$ , что несправедливо при произвольных действительных  $\alpha$  и  $\beta$ . Таким образом, мы видим, что условиям (5.9.14) и (5.9.10) удовлетворить нельзя, а вместо этого имеется соотношение

$$\begin{aligned} D^\mu{}_\nu(W(\theta, \alpha, \beta)) e^\mu(\mathbf{k}, \pm 1) &= S^\mu{}_\lambda(\alpha, \beta) R^\lambda{}_\nu(\theta) e^\nu(\mathbf{k}, \pm 1) = \\ &= \exp(\pm i\theta) \left\{ e^\mu(\mathbf{k}, \pm 1) + \frac{\alpha \pm i\beta}{\sqrt{2} |\mathbf{k}|} k^\mu \right\}. \end{aligned} \quad (5.9.22)$$

и мы приходим к заключению, что никакое 4-векторное поле нельзя построить из операторов рождения и уничтожения частицы с нулевой массой и спиральностью  $\pm 1$ .

Закроем временно глаза на эту трудность и попытаемся продвинуться дальше, воспользовавшись уравнениями (5.9.18) и (5.9.21), чтобы определить вектор поляризации как функцию импульса, и рассматривая поле вида

$$\begin{aligned} a_\mu(x) &= \int d^3 p (2\pi)^{-3/2} (2p^0)^{-1/2} \times \\ &\times \sum_{\sigma=\pm 1} [e_\mu(\mathbf{p}, \sigma) e^{ip \cdot x} a(\mathbf{p}, \sigma) + e_\mu(\mathbf{p}, \sigma)^* e^{-ip \cdot x} a^{c\dagger}(\mathbf{p}, \sigma)]. \end{aligned} \quad (5.9.23)$$

Позднее мы вернемся к вопросу о том, как это поле может быть использовано в качестве составной части физической теории.

Поле (5.9.23) является решением уравнения

$$\square a^\mu(x) = 0. \quad (5.9.24)$$

Остальные условия, которым оно удовлетворяет, вытекают из свойств вектора поляризации (они понадобятся нам позднее, когда мы перейдем к рассмотрению квантовой электродинамики). Заметим, что лоренцево преобразование  $\mathcal{L}(p)$ , которое переводит соответствующее

безмассовой частице состояние с импульсом  $\mathbf{k}$  в состояние с импульсом  $\mathbf{p}$ , может быть представлено в виде произведения “буста”  $\mathcal{B}(|\mathbf{p}|)$  вдоль оси  $Oz$ , переводящего частицу с энергией  $|\mathbf{k}|$  в частицу с энергией  $|\mathbf{p}|$ , на обычный поворот  $R(\hat{\mathbf{p}})$ , совмещающий направления оси  $Oz$  и импульса  $\mathbf{p}$ . Поскольку  $e^\nu(\mathbf{k}, \pm 1)$  — чисто пространственный вектор, у которого только  $x$ - и  $y$ -компоненты отличны от нуля, буст вдоль  $Oz$  на него не действует, и

$$e^\mu(\mathbf{p}, \pm 1) = R(\hat{\mathbf{p}})^\mu{}_\nu e^\nu(\mathbf{k}, \pm 1). \quad (5.9.25)$$

В частности,  $e^0(\mathbf{k}, \pm 1) = 0$  и  $\mathbf{k} \cdot \mathbf{e}(\mathbf{k}, \pm 1) = 0$ , так что

$$e^0(\mathbf{p}, \pm 1) = 0 \quad (5.9.26)$$

и

$$\mathbf{p} \cdot \mathbf{e}(\mathbf{p}, \pm 1) = 0. \quad (5.9.27)$$

Следовательно,

$$a^0(x) = 0 \quad (5.9.28)$$

и

$$\nabla \cdot \mathbf{a}(x) = 0. \quad (5.9.29)$$

Как мы увидим в гл. 9, этим условиям удовлетворяет вакуумный векторный потенциал электродинамики в так называемой кулоновской или радиационной калибровке.

Тот факт, что в любой лоренцевой системе отсчета  $a^0$  обращается в нуль, ясно указывает на то, что  $a^\mu$  не может быть 4-вектором. Из уравнения (5.9.22) для произвольного импульса  $\mathbf{p}$  и лоренцева преобразования  $\Lambda$  следует, что вместо (5.9.6) имеется соотношение

$$e^\mu(\mathbf{p}_\Lambda, \pm 1) \exp(\pm i\theta(\mathbf{p}, \Lambda)) = D^\mu{}_\nu(\Lambda) e^\nu(\mathbf{p}, \pm 1) + p^\mu \Omega(\mathbf{p}, \Lambda), \quad (5.9.30)$$

и, таким образом, для произвольного преобразования Лоренца

$$U(\Lambda) a_\mu(x) U^{-1}(\Lambda) = \Lambda^\mu{}_\nu a_\nu(\Lambda x) + \partial_\mu \Omega(x, \Lambda), \quad (5.9.31)$$

где  $\Omega(x, \Lambda)$  — некоторая линейная комбинация операторов рождения и уничтожения, точную форму которой мы здесь не рассматриваем. Как будет показано в гл. 8, полем  $a^\mu(x)$  можно пользоваться в качестве составной части лоренц-инвариантной физической теории, если взаимодействие  $a^\mu$  с другими полями инвариантно не только относительно преобразований Лоренца, но и относительно “калибровочных” преобразований  $a_\mu \rightarrow a_\mu + \partial_\mu \Omega$ . Это означает, что взаимодействия поля  $a_\mu$  с другими полями должны иметь вид  $a_\mu j^\mu$ , где  $j^\mu$  — 4-вектор некоторого тока, удовлетворяющий соотношению  $\partial_\mu j^\mu = 0$ .

Хотя и невозможно ввести 4-векторное поле, описывающее безмассовые частицы со спиральностью  $\pm 1$ , проблемы с построением антисимметричного тензорного поля для таких частиц не возникает. Из уравнения (5.9.22) и условия инвариантности  $k^\mu$  относительно малой

группы незамедлительно можно получить, что

$$\begin{aligned} D^\mu{}_\rho(W(\theta, \alpha, \beta))D^\nu{}_\sigma(W(\theta, \alpha, \beta))(k^\rho e^\sigma(\mathbf{k}, \pm 1) - k^\rho e^\sigma(\mathbf{k}, \mp 1)) = \\ = e^{\pm i\theta}(k^\mu e^\nu(\mathbf{k}, \pm 1) - k^\nu e^\mu(\mathbf{k}, \pm 1)). \end{aligned} \quad (5.9.32)$$

Следовательно, коэффициентная функция, удовлетворяющая уравнению (5.9.6) для антисимметричного тензорного представления однородной группы Лоренца, равна (если соответствующим образом выбрать нормировку)

$$u^{\mu\nu}(\mathbf{p}, \pm 1) = i(2\pi)^{-3/2}(2p^0)^{-3/2}[p^\mu e^\nu(\mathbf{p}, \pm 1) - p^\nu e^\mu(\mathbf{p}, \pm 1)], \quad (5.9.33)$$

где  $e^\mu(\mathbf{p}, \pm 1)$  можно найти из уравнения (5.9.25). Используя это выражение совместно с (5.9.23), получаем, что антисимметричное тензорное поле безмассовых частиц со спиральностью  $\pm 1$  имеет вид

$$f_{\mu\nu} = \partial_\mu a_\nu - \partial_\nu a_\mu. \quad (5.9.34)$$

Заметим, что эта величина является тензором, даже если  $a^\mu$  — не 4-вектор, поскольку дополнительный член в (5.9.31) из уравнения (5.9.34) выпадает. Заметим также, что из уравнений (5.9.34), (5.9.24), (5.9.28) и (5.9.29) следует, что  $f^{\mu\nu}$  удовлетворяет уравнениям Максвелла в вакууме:

$$\partial_\mu f^{\mu\nu} = 0, \quad (5.9.35)$$

$$e^{\rho\sigma\mu\nu}\partial_\sigma f_{\mu\nu} = 0. \quad (5.9.36)$$

Чтобы вычислить коммутационные соотношения для таких тензорных полей, необходимо уметь вычислять суммы по спиральностям для билинейных форм  $e^\mu e^{\nu*}$ . С учетом (5.9.21) имеем

$$\sum_{\sigma=\pm} e^i(\mathbf{k}, \sigma)e^j(\mathbf{k}, \sigma)^* = \delta_{ij} - \frac{k^i k^j}{|\mathbf{k}|^2}$$

и, воспользовавшись (5.9.25),

$$\sum_{\sigma=\pm} e^i(\mathbf{p}, \sigma)e^j(\mathbf{p}, \sigma)^* = \delta_{ij} - \frac{p^i p^j}{|\mathbf{p}|^2}. \quad (5.9.37)$$

Прямое вычисление дает следующий ответ:

$$\begin{aligned} [f_{\mu\nu}(x), f_{\rho\sigma}(y)^\dagger] = \\ = (2\pi)^{-3}[-\eta_{\mu\rho}\partial_\nu\partial_\sigma + \eta_{\nu\rho}\partial_\mu\partial_\sigma + \eta_{\mu\sigma}\partial_\nu\partial_\rho - \eta_{\nu\sigma}\partial_\mu\partial_\rho] \times \\ \times \int d^3 p (2p^0)^{-1}[(\kappa|^2 e^{ip \cdot (x-y)} - |\lambda|^2 e^{-ip \cdot (x-y)}]. \end{aligned} \quad (5.9.38)$$

Эта величина обращается в нуль при  $x^0 = y^0$  тогда и только тогда, когда имеет место соотношение

$$|\kappa|^2 = |\lambda|^2. \quad (5.9.39)$$

В этом случае коммутатор полей, взятых в различных пространственно-подобных точках, равен нулю, поскольку  $f_{\mu\nu}$  — тензор. Из уравнения (5.9.39) также следует, что обращается в нуль коммутатор полей  $a^\mu$ , взятых в совпадающие моменты времени. Как мы увидим в гл. 8, этого достаточно для построения лоренц-инвариантной  $S$ -матрицы. Относительную фазу операторов рождения и уничтожения можно подобрать так, чтобы  $\kappa = \lambda$ . В этом случае поля оказываются эрмитовыми, если частицы, которым они соответствуют, являются зарядово самосопряженными. Именно такая ситуация имеет место для фотона.

Почему при построении теорий безмассовых частиц со спином 1 нужно рассматривать поля вида  $a^\mu$ , не ограничиваясь полями  $f^{\mu\nu}(x)$  с простыми трансформационными свойствами относительно группы Лоренца? Наличие в уравнении (5.9.34) производных означает, что матричные элементы плотности взаимодействия, построенной исключительно из тензора  $f^{\mu\nu}$  и его производных, спадают при малой энергии безмассовой частицы быстрее, чем матричные элементы взаимодействия, сконструированного из  $a^\mu$ . Соответственно, взаимодействия в такой теории будут ослабевать с расстоянием быстрее, чем по обычному закону обратных квадратов. Конечно, такая теория тоже имеет право на жизнь, но калибровочно-инвариантные теории векторных полей, описывающих безмассовые частицы со спином 1, принадлежат более широкому классу, в который входят и теории, реализующиеся в природе.

Соответствующие замечания применимы к гравитонам, безмассовым частицам со спиральностью  $\pm 2$ . Из операторов рождения и уничтожения таких частиц мы должны сконструировать тензор  $R_{\mu\nu\rho\sigma}$ , обладающий алгебраическими свойствами тензора кривизны Римана–Кристоффеля, т.е. антисимметричный относительно перестановки индексов в парах  $\mu$ ,  $\nu$  и  $\rho$ ,  $\sigma$  и симметричный относительно перестановки пар между собой. Однако чтобы обеспечить закон обратных квадратов для гравитационного взаимодействия, мы должны ввести поле  $h_{\mu\nu}$ , которое под действием лоренцевых преобразований ведет себя как симметричный тензор. Это поле определено с точностью до калибровочных преобразований, связанных с возможностью выполнять в рамках общей теории относительности произвольные преобразования координат. Следовательно, для того, чтобы построить теорию безмассовых частиц со спиральностью  $\pm 2$ , описывающую дальнодействующие силы, необходимо иметь симметрию, аналогичную общей ковариантности. Как и в случае электромагнитной калибровочной инвариантности, она обеспечивается взаимодействием поля с сохраняющимся “током”  $\theta^{\mu\nu}$ , имеющим теперь два пространственно-временных индекса и удовлетворяющим  $\partial_\mu \theta^{\mu\nu} = 0$ . Тензор энергии–импульса является единственным таким сохраняющимся тензором, если не рассматривать различные являющиеся полными производ-

ными члены, не влияющие на дальнодействующий характер генерируемых сил<sup>2)</sup>). Поля безмассовых частиц со спином  $j \geq 3$  должны взаимодействовать с сохраняющимися тензорами, имеющими 3 или больше пространственно-временных индексов, но поскольку таковых, за исключением полных производных, не существует, то *безмассовые частицы с высшим спином не могут служить переносчиками дальнодействующих сил*.

\* \* \*

Проблемы, с которыми мы столкнулись при построении теории 4-векторных полей со спиральностями  $\pm 1$  и симметричных тензорных полей со спиральностями  $\pm 2$ , являются проявлением некоторого ограничения более общего характера. Чтобы увидеть это, посмотрим, как можно строить поля безмассовых частиц, принадлежащие произвольному представлению однородной группы Лоренца. Как было показано в § 5.6, любое представление  $D(\Lambda)$  однородной группы Лоренца можно разложить на  $(2A+1)(2B+1)$ -размерные представления  $(A, B)$ , для которых генераторы однородной группы Лоренца имеют вид

$$\begin{aligned} (\mathcal{J}_{ij})_{a'b',ab} &= \epsilon_{ijk}[(J_k^{(A)})_{a'a}\delta_{b'b} + (J_k^{(B)})_{b'b}\delta_{a'a}], \\ (\mathcal{J}_{k0})_{a'b',ab} &= -i[(J_k^{(A)})_{a'a}\delta_{b'b} - (J_k^{(B)})_{b'b}\delta_{a'a}], \end{aligned}$$

где  $\mathbf{J}^{(j)}$  — матрицы углового момента для спина  $j$ . Если  $\theta$  — бесконечно-малый параметр,  $D(R(\theta)) = 1 + i\mathcal{J}_{12}\theta$ , поэтому из уравнений (5.9.12) и (5.9.13) следует, что

$$\begin{aligned} \sigma u_{ab}(\mathbf{k}, \sigma) &= (a+b)u_{ab}(\mathbf{k}, \sigma), \\ -\sigma v_{ab}(\mathbf{k}, \sigma) &= (a+b)v_{ab}(\mathbf{k}, \sigma), \end{aligned}$$

и  $u_{ab}(\mathbf{k}, \sigma)$  и  $v_{ab}(\mathbf{k}, \sigma)$  обращаются в нуль при  $\sigma \neq a+b$  и  $\sigma \neq -a-b$  соответственно. Кроме того, если считать  $\alpha$  и  $\beta$  в уравнении (5.9.14) бесконечно-малыми, то

$$\begin{aligned} 0 &= (\mathcal{J}_{31} + \mathcal{J}_{01})_{ab,a'b'}u_{a'b'}(\mathbf{k}, \sigma) = \\ &\quad = (J_2^{(A)} + iJ_1^{(A)})_{aa'}u_{a'b}(\mathbf{k}, \sigma) + (J_2^{(B)} - iJ_1^{(B)})_{bb'}u_{ab'}(\mathbf{k}, \sigma), \\ 0 &= (\mathcal{J}_{32} + \mathcal{J}_{02})_{ab,a'b'}u_{a'b'}(\mathbf{k}, \sigma) = \\ &\quad = (-J_1^{(A)} + iJ_2^{(A)})_{aa'}u_{a'b}(\mathbf{k}, \sigma) + (-J_1^{(B)} - iJ_2^{(B)})_{bb'}u_{ab'}(\mathbf{k}, \sigma), \end{aligned}$$

<sup>2)</sup> Если  $\theta^{\mu_1 \dots \mu_N}$  — некоторый тензорный ток, удовлетворяющий условию  $\partial_{\mu_1}\theta^{\mu_1 \dots \mu_N} = 0$ , то величина  $\int d^3x \theta^{0\mu_2 \dots \mu_N}$ , которая преобразуется как тензор ранга  $N-1$ , сохраняется. К классу таких тензоров относятся скалярные “заряды”, соответствующие различным непрерывным симметриям, и 4-вектор энергии–импульса. На этом весь класс исчерпывается, поскольку сохранение любого другого 4-вектора или тензора высшего ранга приводит к запрету любого процесса рассеяния кроме рассеяния на нулевой угол.

или, в упрощенном виде,

$$(J_1^{(A)} - i J_2^{(A)})_{aa'} u_{a'b}(\mathbf{k}, \sigma) = 0,$$

$$(J_1^{(B)} + i J_2^{(B)})_{bb'} u_{ab'}(\mathbf{k}, \sigma) = 0.$$

Отсюда следует, что  $u_{ab}(\mathbf{k}, \sigma)$  обращается в нуль, если не выполняются условия

$$a = -A, \quad b = +B \quad (5.9.40)$$

и, как очевидно, то же самое справедливо для  $v_{ab}(\mathbf{k}, \sigma)$ . Поэтому мы видим, что поле типа  $(A, B)$  может быть построено только из операторов уничтожения безмассовых частиц со спиральностью  $\sigma$  и операторов рождения их античастиц со спиральностью  $-\sigma$ , где

$$\sigma = B - A. \quad (5.9.41)$$

Например, частицы  $(1/2, 0)$  и  $(0, 1/2)$  дираковского поля безмассовой частицы уничтожают соответственно частицы со спиральностью  $-1/2$  и  $+1/2$  и рождают античастицы соответственно со спиральностями  $+1/2$  и  $-1/2$ . В “двуухкомпонентной” теории нейтрино существует только поле  $(1/2, 0)$  и сопряженное ему поле, поэтому в рамках этой теории нейтрино несут спиральность  $-1/2$ , а антинейтрино — спиральность  $+1/2$ .

Следуя методу, развитому в § 5.7, можно показать что взятые в разных точках пространства поля  $(j, 0)$  и  $(0, j)$  безмассовых частиц со спином  $j$  (т.е. со спиральностью  $\mp j$ ) коммутируют друг с другом и с сопряженными полями, если коэффициенты в (5.9.1) перед членами, отвечающими за рождение и уничтожение, удовлетворяют уравнению (5.9.39). Относительную фазу операторов рождения и уничтожения можно выбрать так, чтобы сделать эти коэффициенты действительными. Как легко видеть, поля  $(A, A + j)$  или  $(B + j, B)$  безмассовых частиц со спином  $j$  являются производными порядка  $2A$  или  $2B$  полей  $(0, j)$  или  $(j, 0)$  соответственно, поэтому нам не нужно рассматривать поля более общего вида.

Теперь легко видеть, почему невозможно построить векторное поле безмассовой частицы со спиральностью  $\pm 1$ . Векторное поле преобразуется по представлению  $(1/2, 1/2)$  и поэтому, согласно уравнению (5.9.41), может описывать только частицу с нулевой спиральностью (безусловно, *возможно* построить векторное поле с нулевой спиральностью — достаточно взять производную  $\partial_\mu \phi$  безмассового скалярного поля  $\phi$ ). Простейшее ковариантное безмассовое поле со спиральностью  $\pm 1$  преобразуется по представлению  $(1, 0) \oplus (0, 1)$ , т.е. является антисимметричным тензором  $f_{\mu\nu}$ . Аналогично, простейшее ковариантное безмассовое поле со спиральностью  $\pm 2$  преобразуется по представлению  $(2, 0) \oplus (0, 2)$ ; это тензор четвертого ранга, подобно тензору кривизны Римана–Кристоффеля антисимметричный по каждой паре индексов и симметричный относительно перестановки пар.

Обсуждение инверсий  $P$ ,  $C$ ,  $T$ , проведенное в предыдущем параграфе, может быть обобщено на случай безмассовых полей с точностью до тривиальных изменений.

## Задачи

**1.** Покажите, что если коэффициентные функции для нулевого импульса удовлетворяют условиям (5.1.23) и (5.1.24), то коэффициентные функции для произвольного импульса (5.1.21) и (5.1.22) удовлетворяют определяющим соотношениям (5.1.19) и (5.1.20).

**2.** Рассмотрим свободное поле  $\psi_l^\mu(x)$ , которое рождает или уничтожает частицу спина  $3/2$  и массы  $m \neq 0$ , совпадающую со своей зарядово-сопряженной частицей. Покажите, как нужно задать для него функцию  $u_l^\mu(\mathbf{p}, \sigma)$  (коэффициент при операторе уничтожения  $a(\mathbf{p}, \sigma)$ ), чтобы под действием группы Лоренца поле преобразовывалось как дираковское поле  $\psi_l$  с лишним 4-векторным индексом  $\mu$ . Каким полевым уравнениям, алгебраическим соотношениям и условиям действительности удовлетворяет такое поле? Найдите матрицу  $P^{\mu\nu}(p)$ , определенную (при  $p^2 = -m^2$ ) равенством

$$\sum_{\sigma} u_l^\mu(\mathbf{p}, \sigma) u_m^{\nu*}(\mathbf{p}, \sigma) \equiv (2p^0)^{-1} P_{lm}^{\mu\nu}(p).$$

Какой вид имеют коммутационные соотношения для этого поля? Как оно преобразуется под действием дискретных симметрий  $P$ ,  $C$ ,  $T$ ?

**3.** Рассмотрим свободное поле  $h^{\mu\nu}(x)$ , для которого

$$h^{\mu\nu}(x) = h^{\nu\mu}(x)$$

и  $h^\mu_\mu(x) = 0$ , рождающее или уничтожающее частицу спина два и массы  $m \neq 0$ . Покажите, как нужно задать для него функцию  $u_l^\mu(\mathbf{p}, \sigma)$  (коэффициент при операторе уничтожения  $a(\mathbf{p}, \sigma)$ ), чтобы под действием группы Лоренца поле преобразовывалось как тензор. Каким уравнениям удовлетворяет такое поле? Найдите функцию  $P^{\mu\nu,\kappa\lambda}(p)$ , заданную равенством

$$\sum_{\sigma} u^{\mu\nu}(\mathbf{p}, \sigma) u^{\kappa\lambda*}(\mathbf{p}, \sigma) \equiv (2p^0)^{-1} P^{\mu\nu,\kappa\lambda}(p).$$

Каковы коммутационные соотношения для этого поля? Каковы его трансформационные свойства относительно отражений  $P$ ,  $C$ ,  $T$ ?

**4.** Покажите, описывающие безмассовую частицу спина  $j$  поля типов  $(A, A+j)$  и  $(B+j, B)$  являются производными порядков  $2A$  и  $2B$  полей типов  $(0, j)$  и  $(j, 0)$  соответственно.

**5.** Найдите трансформационные свойства относительно инверсий  $P$ ,  $C$  и  $T$  поля типа  $(j, 0) + (0, j)$ , описывающего безмассовую частицу спиральности  $\pm j$ .

**6.** Рассмотрим обобщенное дираковское поле  $\psi$ , преобразующееся по представлению  $(j, 0) + (0, j)$  однородной группы Лоренца. Перечислите тензоры, которые можно получить из произведений компонент  $\psi$  и  $\psi^\dagger$ . Проверьте свои результаты, сравнив их с полученными в тексте для случая  $j = 1/2$ .

**7.** Рассмотрим поле  $\psi_{ab}$ , описывающее частицы спина  $j$  и массы  $m \neq 0$ , преобразующееся по представлению  $(A, B)$  однородной группы Лоренца. Предположим, что гамильтониан взаимодействия имеет вид

$$V = \int d^3x [\psi_{ab}(x) J^{ab}(x) + J^{ab\dagger}(x) \psi_{ab}^\dagger(x)],$$

где  $J^{ab}$  — внешний  $c$ -числовой ток. Каково асимптотическое поведение матричного элемента для излучения таких частиц энергии  $E \gg m$  и заданной спиральности? (Предположите, что коэффициенты Фурье тока  $J^{ab}$ , соответствующие различным парам  $a, b$ , имеют один порядок величины и не сильно зависят от  $E$ .)

## Литература

1. Точка зрения, которой мы придерживались в этой главе, представлена в работах: *Weinberg S.* // Phys. Rev. **133**, B1318 (1964); **134**, B882 (1964); **138**, B988 (1965); **181**, 1893 (1969). Аналогичный подход использовал в своих неопубликованных лекциях Е. Вихман (E. Wichmann).
2. *Bohr N. and Rosenfeld L.* // Kgl. Danske Vidensk. Selskab Mat.-Fys. Medd. No. 12 (1933) (имеется перевод на англ. в сборнике Selected Papers of Leon Rosenfeld, ed. by R.S. Cohen and J. Stachel. Reidel, Dordrecht, 1979); Phys. Rev. **78**, 794 (1950).
3. *Dirac P.A.M.* // Proc. Roy. Soc. (London). **A117**, 610 (1928).
4. *Cartan E.* // Bull. Soc. Math. (France). **41**, 53 (1913).
5. См., например, *Jauch J.M. and Rohrlich F.* The Theory of Photons and Electrons. Addison-Wesley, Cambridge, MA, 1955. Приложение A2; *Georgi H.* Lie Algebras in Particle Physics. Benjamin-Cummings, Reading, MA, 1982. С. 15, 198. Оригинальная ссылка — *Schur I.* // Sitz. Preuss. Akad., c. 406 (1905).
6. См., например, *Georgi H.* Lie Algebras in Particle Physics. Benjamin/Cummings, Reading, MA, 1982. С. 15, 198. Оригинальная ссылка — *Schur I.* // Sitz. Preuss. Akad., c. 406 (1905).
7. *Lee T.D. and Yang C.N.* // Phys. Rev. **104**, 254 (1956).
8. См. например, *van der Waerden B.L.* Die gruppentheoretische Methode in der Quantenmechanik. Springer Verlag, Berlin, 1932 [Pyc.

- пер.: Ван дер Варден Б.Л.* Метод теории групп в квантовой механике.— Харьков, 1938.]; *Lyubarski G.Ya.* The Applications of Group Theory in Physics, translated by S. Dedijer. Pergamon Press, N.Y., 1960. [Любарский Г.Я.] Теория групп и ее применения в физике.— М.: Гостехиздат, 1957.]
9. *Rarita W. and Schwinger J.* // Phys. Rev. **60**, 61 (1941).
  10. См., например, *Edmonds A.R.* Angular Momentum in Quantum Mechanics. Princeton University Press, Princeton, 1957. Глава 3.
  11. *Weinberg S.* // Phys. Rev. **181**, 1893 (1969). Section V.
  12. *Fierz M.* // Helv. Phys. Acta. **12**, 3 (1939); *Pauli W.* // Phys. Rev. **58**, 716 (1940). Непертурбативное доказательство в аксиоматической теории поля дали *Lüders G.* и *Zumino B.* // Phys. Rev. **110**, 1450 (1958) и *Burgoyne N.* // Nuovo Cimento. **8**, 807 (1958). См. также *Streater R.F. and Wightman A.S.* PC T, Spin & Statistics, and All That. Benjamin, N.Y., 1968.
  13. Поля в представлении  $(j, 0) + (0, j)$  ввел *Joos H.* // Fortschr. Phys. **10**, 65 (1962); *Weinberg S.* // Phys. Rev. **133**, B1318 (1964).
  14. См. *Edmonds A.R.*, ссылка 10, или *Rose M.E.* Elementary Theory of Angular Momentum. John Wiley & Sons, N.Y., 1957. Глава III.
  15. *Velo G. and Zwanziger D.* // Phys. Rev. **186**, 1337 (1969); **188**, 2218 (1969); *Wightman A.S.* // B Proceedings of the Fifth Coral Gables Conference on Symmetry Principles at High Energy, ed. by T. Gudehus, G. Kaiser, and A. Perlmutter. Gordon and Breach, N.Y., 1969; *Schroer B., Seiler R. and Swieca J.A.* // Phys. Rev. **D2**, 2927 (1970); см. также приведенные там ссылки.
  16. *Nappi C.R. and Witten L.* // Phys. Rev. **D40**, 1095 (1989); *Argyres P.C. and Nappi C.R.* // Phys. Lett. **B224**, 89 (1989). Вывод непротиворечивой теории частиц спина  $j = 3/2$  во внешнем поле из теории Калуцы–Клейна см. в *Rindani S.D. and Sivakumar M.* // J. Phys. G: Nucl. Phys. **12**, 1335 (1986); J. Phys. C: Particles & Fields. **49**, 601 (1991).
  17. *Lüders G.* // Kong. Dansk. Vid. Selskab, Mat.-Fys. Medd. **28**, 5 (1954); Ann. Phys. **2**, 1 (1957); *Pauli W.* // Nuovo Cimento. **6**, 204 (1957). Когда Людерс впервые рассмотрел связь между инверсиями, сохранение Р не подвергалось сомнению, так что его теорема утверждала, что инвариантность относительно С эквивалентна инвариантности относительно Т.
  18. *Jost R.* // Helv. Phys. Acta. **30**, 409 (1957); *Dyson F.J.* // Phys. Rev. **110**, 579 (1958). См. также *Streater and Wightman*, ссылка 12.

## Г л а в а 6

### ПРАВИЛА ФЕЙНМАНА

В предыдущих главах использование ковариантных свободных полей при отыскании плотности функции Гамильтона мотивировалось требованиями лоренц-инвариантности  $S$ -матрицы и кластерной разложимости. Если гамильтониан построен в соответствии с этими требованиями, становится безразлично, какую разновидность теории возмущений мы применяем для вычисления  $S$ -матрицы; результаты будут автоматически удовлетворять требованиям инвариантности и кластерной разложимости в каждом порядке по плотности взаимодействия. Тем не менее имеются явные преимущества использования такой версии теории возмущений, в которой лоренц-инвариантность и кластерная разложимость  $S$ -матрицы очевидны на каждом этапе вычислений. Это неверно для теории возмущений, применявшейся в 1930-х годах, ныне известной как “старая теория возмущений”, которая описана в начале § 3.5. Фейнман, Швингер и Томонага достигли большого успеха в конце 1940-х годов, разработав методы теории возмущений для вычисления  $S$ -матрицы, в которых везде явным образом видны лоренц-инвариантность и кластерная разложимость. В этой главе будут изложены основные принципы диаграммной техники вычислений, впервые предложенной Фейнманом на конференции Поконос в 1948 г. Сам Фейнман пришел к этим диаграммным правилам через свой подход континуального интегрирования, который будет описан в гл. 9. В данной главе мы будем использовать подход, описанный Дайсоном [1] в 1949 г., который вплоть до 1970-х годов являлся основой практически всех пертурбативных вычислений в квантовой теории поля и до сих пор представляет собой понятное введение в правила Фейнмана.

#### § 6.1. Вывод правил Фейнмана

Мы начнем с формулы для  $S$ -матрицы, полученной из разложения Дайсона (3.5.10) и выражения (4.2.2) для свободных полей:

$$\begin{aligned} S_{\mathbf{p}'_1 \sigma'_1 n'_1; \mathbf{p}'_2 \sigma'_2 n'_2; \dots; \mathbf{p}'_N \sigma'_N n'_N; \mathbf{p}_2 \sigma_2 n_2; \dots} &= \\ &= \sum_{N=0}^{\infty} \frac{(-i)^N}{N!} \int d^4 x_1 \dots d^4 x_N (\Phi_0, \dots, a(\mathbf{p}'_2 \sigma'_2 n'_2) a(\mathbf{p}'_1 \sigma'_1 n'_1) \times \\ &\quad \times T\{\mathcal{H}(x_1) \dots \mathcal{H}(x_N)\} a^\dagger(\mathbf{p}_1 \sigma_1 n_1) a^\dagger(\mathbf{p}_2 \sigma_2 n_2) \dots \Phi_0). \quad (6.1.1) \end{aligned}$$

Напомним, что  $\mathbf{p}$ ,  $\sigma$  и  $n$  обозначают импульс, спин и сорт частиц; штрихи обозначают конечные состояния частиц;  $\Phi_0$  — вакуум свободных частиц;  $a, a^\dagger$  — операторы уничтожения, рождения;  $T$  — знак хронологического упорядочивания, который располагает множители  $\mathcal{H}(x)$  в таком порядке, что аргументы  $x^0$  уменьшаются слева направо; наконец,  $\mathcal{H}(x)$  — гамильтониан (плотность функции Гамильтона) взаимодействия, который считается полиномом от полей и сопряженных полей

$$\mathcal{H}(x) = \sum_i g_i \mathcal{H}_i(x), \quad (6.1.2)$$

а каждое слагаемое  $\mathcal{H}_i$  является произведением определенного числа полей и сопряженных им величин каждого типа. Поле каждой частицы сорта  $n$ , преобразующееся по определенному представлению однородной группы Лоренца (с пространственными инверсиями или без них), дается формулой

$$\begin{aligned} \psi_l(x) = \sum_{\sigma} (2\pi)^{-3/2} \int d^3 p [u_l(\mathbf{p}, \sigma, n) a(\mathbf{p}, \sigma, n) e^{ip \cdot x} + \\ + v_l(\mathbf{p}, \sigma, n) a^\dagger(\mathbf{p}, \sigma, n^c) e^{-ip \cdot x}]. \end{aligned} \quad (6.1.3)$$

Здесь  $n^c$  обозначает античастицу сорта  $n$ , а в экспоненте  $e^{\pm ip \cdot x}$  энергия  $p^0$  равна  $\sqrt{\mathbf{p}^2 + m_n^2}$ . Функции-коэффициенты  $u_l$ ,  $v_l$  зависят от лоренц-трансформационных свойств поля и спина частицы, которую это поле описывает; они были вычислены в гл. 5. (Например, в случае скалярного поля для частицы с энергией  $E$  функция  $u_l$  есть просто множитель  $(2E)^{-1/2}$ , а для дираковского поля  $u_l$ ,  $v_l$  являются нормированными дираковскими спинорами, введенными в § 5.5). Индекс  $l$  у полей означает не только сорт частицы, но и представление группы Лоренца, по которому преобразуется поле, а также обозначает все “бегущие” индексы многокомпонентного поля в этом представлении. Нет необходимости отдельно рассматривать взаимодействия с производными от полей, поскольку в нашей записи производная от поля (6.1.3) снова является полем того же вида, но с другими  $u_l$ ,  $v_l$ . Мы будем отличать некие произвольные частицы, например электроны, протоны и т.п., от их античастиц, таких, как позитроны и антiproтоны. Операторы поля, которые уничтожают частицы и создают античастицы, у нас называются просто “поля”; сопряженные им операторы, уничтожающие античастицы и создающие частицы, называются “сопряженные поля”. Разумеется, некоторые частицы могут совпадать с их античастицами, например фотон  $\gamma$  и нейтральный пи-мезон  $\pi^0$ ; для таких полей сопряженные поля пропорциональны самим полям.

Теперь переставим в формуле (6.1.1) все операторы уничтожения направо, применяя нужное число раз (анти)коммутационные соотно-

шения:

$$a(\mathbf{p}\sigma n)a^\dagger(\mathbf{p}'\sigma'n') = \pm a^\dagger(\mathbf{p}'\sigma'n')a(\mathbf{p}\sigma n) + \delta^3(p' - p)\delta_{\sigma'\sigma}\delta_{n'n}, \quad (6.1.4)$$

$$a(\mathbf{p}\sigma n)a(\mathbf{p}'\sigma'n') = \pm a(\mathbf{p}'\sigma'n')a(\mathbf{p}\sigma n), \quad (6.1.5)$$

$$a^\dagger(\mathbf{p}\sigma n)a^\dagger(\mathbf{p}'\sigma'n') = \pm a^\dagger(\mathbf{p}'\sigma'n')a^\dagger(\mathbf{p}\sigma n) \quad (6.1.6)$$

и аналогично для античастиц, причем знак “±” равен “−”, если обе частицы  $n, n'$  — фермионы, и равен “+”, если одна или обе частицы — бозоны. Как только оператор уничтожения оказывается крайним справа (или оператор рождения крайним слева), соответствующий вклад в (6.1.1) пропадает, поскольку эти операторы аннулируют вакуумное состояние:

$$a(\mathbf{p}\sigma n)\Phi_0 = 0, \quad (6.1.7)$$

$$\Phi_0^\dagger a^\dagger(\mathbf{p}\sigma n) = 0. \quad (6.1.8)$$

В уравнении (6.1.1) остается только вклад от  $\delta$ -функциональных слагаемых (6.1.4), остающихся при каждой перестановке оператора уничтожения с оператором рождения из начального или конечного состояния или гамильтониана взаимодействия, которые, таким образом, должны присутствовать парами.

Итак, вклад заданного порядка в (6.1.1) в каждое из слагаемых  $\mathcal{H}_i$  полинома  $\mathcal{H}(\psi(x), \psi^\dagger(x))$  дается суммой (по всем способам спаривания операторов рождения и уничтожения [2]) интегралов от произведений множителей, согласно следующим правилам:

**a)** Спаривание частицы в конечном состоянии с квантовыми числами  $\mathbf{p}', \sigma', n'$  с сопряженным полем  $\psi_l^\dagger(x)$  в  $\mathcal{H}_i(x)$  дает множитель

$$[a(\mathbf{p}'\sigma'n'), \psi_l^\dagger(x)]_\mp = (2\pi)^{-3/2} e^{-ip'\cdot x} u_l^*(\mathbf{p}'\sigma'n'). \quad (6.1.9)$$

**b)** Спаривание античастицы в конечном состоянии с квантовыми числами  $\mathbf{p}', \sigma', n'^c$  с полем  $\psi_l(x)$  в  $\mathcal{H}_i(x)$  дает множитель

$$[a(\mathbf{p}'\sigma'n'^c), \psi_l(x)]_\mp = (2\pi)^{-3/2} e^{-ip'\cdot x} v_l(\mathbf{p}'\sigma'n'). \quad (6.1.10)$$

**в)** Спаривание частицы в начальном состоянии с квантовыми числами  $\mathbf{p}, \sigma, n$  с полем  $\psi_l(x)$  в  $\mathcal{H}_i(x)$  дает множитель

$$[\psi_l(x), a^\dagger(\mathbf{p}\sigma n)]_\mp = (2\pi)^{-3/2} e^{ip\cdot x} u_l^*(\mathbf{p}\sigma n). \quad (6.1.11)$$

**г)** Спаривание античастицы в начальном состоянии с квантовыми числами  $\mathbf{p}, \sigma, n^c$  с сопряженным полем  $\psi_l^\dagger(x)$  в  $\mathcal{H}_i(x)$  дает множитель

$$[\psi_l^\dagger(x), a^\dagger(\mathbf{p}\sigma n^c)]_\mp = (2\pi)^{-3/2} e^{ip\cdot x} v_l^*(\mathbf{p}\sigma n). \quad (6.1.12)$$

**д)** Спаривание (анти)частицы в конечном состоянии с квантовыми числами  $\mathbf{p}', \sigma', n'$  с полем (анти)частицы в начальном состоянии с квантовыми числами  $\mathbf{p}, \sigma, n$  дает множитель

$$[a(\mathbf{p}'\sigma'n'), a(\mathbf{p}\sigma n)]_\mp = \delta^3(\mathbf{p}' - \mathbf{p})\delta_{\sigma'\sigma}\delta_{n'n}. \quad (6.1.13)$$

**е)** Спаривание поля  $\psi_l(x)$  в  $\mathcal{H}_i(x)$  с сопряженным полем  $\psi_m^\dagger(x)$  в  $\mathcal{H}_j(y)$  дает множитель<sup>1)</sup>

$$\begin{aligned} \theta(x-y)[\psi_l^+(x), [\psi_m^{+\dagger}(y)]_\mp] &\pm \theta(y-x)[\psi_m^{-\dagger}(y), [\psi_l^-(x)]_\mp] \equiv \\ &\equiv -i\Delta_{lm}(x, y), \end{aligned} \quad (6.1.14)$$

где  $\psi^+$  и  $\psi^-$  — слагаемые в  $\psi$ , которые соответственно уничтожают частицы и создают античастицы:

$$\psi_l^+(x) = (2\pi)^{-3/2} \int d^3 p \sum_{\sigma} u_l(\mathbf{p}\sigma n) e^{ip\cdot x} a(\mathbf{p}\sigma n), \quad (6.1.15)$$

$$\psi_l^-(x) = (2\pi)^{-3/2} \int d^3 p \sum_{\sigma} v_l(\mathbf{p}\sigma n) e^{-ip\cdot x} a^\dagger(\mathbf{p}\sigma n^c). \quad (6.1.16)$$

Напомним, что  $\theta(x-y)$  — функция Хевисайда (“ступенька”), равная +1 при  $x^0 > y^0$  и нулю при  $x^0 < y^0$ . Эти функции возникают в (6.1.14) из-за хронологизации в (6.1.1); спаривание оператора уничтожения  $\psi^+(x)$  из  $\mathcal{H}(x)$  с оператором рождения  $\psi^{+\dagger}(y)$  из  $\mathcal{H}(y)$  может произойти, только если множитель  $\mathcal{H}(x)$  изначально располагался слева от  $\mathcal{H}(y)$  в уравнении (6.1.1), т.е., если  $x^0 > y^0$ ; аналогично, спаривание оператора уничтожения  $\psi^{-\dagger}(y)$  из  $\mathcal{H}(y)$  с оператором рождения  $\psi^-(x)$  из  $\mathcal{H}(x)$  может произойти, только если из  $\mathcal{H}(y)$  изначально располагался слева от  $\mathcal{H}(x)$  в уравнении (6.1.1), т.е., если  $y^0 > x^0$ . Знак  $\pm$  во втором слагаемом в (6.1.14) будет объяснен чуть позже. Величина (6.1.14) известна под названием *пропагатор*. Она будет вычислена в следующем параграфе.

$S$ -матрица получается в результате перемножения всех этих множителей, наряду с дополнительными числовыми множителями, которые мы обсудим далее, интегрирования по  $x_1, \dots, x_N$ , суммирования по всем спариваниям, а затем по всем видам взаимодействий. Прежде чем мы уточним все детали, полезно описать диаграммный формализм, который позволяет отслеживать все возможные спаривания.

Правила вычисления  $S$ -матрицы удобно сформулировать в терминах *фейнмановских диаграмм* (см. рис. 6.1). Диаграммы состоят из точек, называемых *вершинами*, каждая из которых представляет один из членов  $\mathcal{H}_i(x)$ , и линий, которые соответствуют спариванию операторов уничтожения и рождения. Более точно,

**а)** Спаривание частицы в конечном состоянии с сопряженным полем из некоторого  $\mathcal{H}(x)$  представляется линией, идущей из вер-

<sup>1)</sup> Если взаимодействие записано в нормальную упорядоченной форме, как в (5.1.33), то в одном и том же взаимодействии нет спаривания полей и сопряженных полей. В противном случае потребуется некоторая регуляризация, чтобы придать смысл величине  $\Delta_{lm}(0)$ .

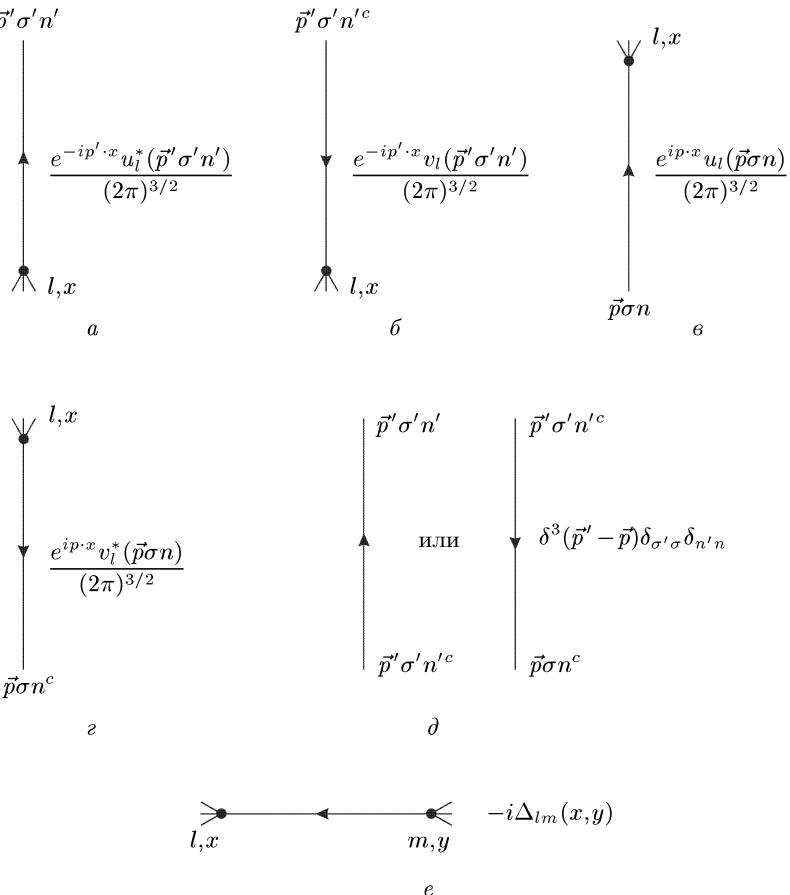


Рис. 6.1. Графическое представление спариваний операторов при вычислении  $S$ -матрицы в координатном представлении. Выражения справа от каждой линии — множители, которые должны войти в подынтегральное выражение  $S$ -матрицы для каждой диаграммы Фейнмана

шины, отвечающей этому  $\mathcal{H}(x)$ , вверх из диаграммы, со стрелкой вверх.

**б)** Спаривание античастицы в конечном состоянии с полем из некоторого  $\mathcal{H}(x)$  также представляется линией, идущей из вершины, отвечающей этому  $\mathcal{H}(x)$ , вверх из диаграммы, но со стрелкой вниз. Для истинно нейтральных (самосопряженных) полей, например фотонов, стрелки опускаются.

**в)** Спаривание частицы в начальном состоянии с полем из некоторого  $\mathcal{H}(x)$  представляется линией, идущей в вершину, отвечающую этому  $\mathcal{H}(x)$ , внутрь диаграммы, со стрелкой вверх.

- г)** Спаривание античастицы в начальном состоянии с полем из некоторого  $\mathcal{H}(x)$  представляется линией, идущей в вершину, отвечающую этому  $\mathcal{H}(x)$ , внутрь диаграммы, со стрелкой вниз.
- д)** Спаривание конечной (анти)частицы с начальной (анти)частицей представляется линией, идущей через диаграмму снизу вверх, не входящую ни в какие вершины, со стрелкой вверх или вниз для частицы и античастицы соответственно.
- е)** Спаривание поля в  $\mathcal{H}(x)$  с сопряженным полем из  $\mathcal{H}(y)$  представляется линией, соединяющей вершины, отвечающие этим  $\mathcal{H}(x)$  и  $\mathcal{H}(y)$ , со стрелкой, направленной от  $y$  к  $x$ .

Заметим, что стрелка направлена в сторону движения частицы и против движения античастицы (как уже было сказано, стрелки для истинно нейтральных частиц следует опускать). Направление стрелки по правилу е) согласуется с этой условностью, потому что сопряженное поле из  $\mathcal{H}_j(y)$  может или создать частицу, уничтоженную полем из  $\mathcal{H}_i(x)$ , или уничтожить античастицу, созданную полем из  $\mathcal{H}_i(x)$ . Отметим также, что, поскольку каждое (сопряженное) поле должно спариваться с другим полем, полное число линий в вершине типа  $i$ , отвечающей члену  $\mathcal{H}_i(x)$  в (6.1.2), равно полному числу множителей (полей и сопряженных полей) в  $\mathcal{H}_i(x)$ . Число линий со стрелкой внутрь вершины или наружу равно соответственно числу полей или сопряженных полей в соответствующем члене взаимодействия.

Чтобы вычислить вклад данного процесса в  $S$ -матрицу для данного порядка  $N_i$  по каждому из взаимодействий  $\mathcal{H}_i(x)$  в уравнении (6.1.2), нужно проделать следующие шаги:

**(i)** Нарисовать все диаграммы Фейнмана, которые содержат  $N_i$  вершин каждого типа  $i$ , входящие снизу линии (анти)частиц в начальном состоянии, выходящие сверху линии (анти)частиц в конечном состоянии, а также любое число внутренних линий, соединяющих вершины, так, чтобы в каждую вершину входило нужное число линий. На линиях указываются стрелки вверх или вниз по вышеописанным правилам. Каждая вершина помечается типом взаимодействия и 4-координатой  $x^\mu$ . Каждая внутренняя или внешняя линия помечается индексом поля  $l$  на том конце, где она входит в вершину (что отвечает полю  $\psi_l(x)$  или  $\psi_l^\dagger(x)$ , которое создает или уничтожает (анти)частицу в этой вершине). Каждая внешняя линия помечается квантовыми числами  $\mathbf{p}$ ,  $\sigma$ ,  $n$  или  $\mathbf{p}'$ ,  $\sigma'$ ,  $n'$  начального или конечного состояния (анти)частицы.

**(ii)** Для каждой вершины типа  $i$  нужно добавить множитель  $-i$ , который происходит от множителя  $(-i)^N$  в формуле (6.1.1), а также множитель  $g_i$  — константу связи для данного взаимодействия  $\mathcal{H}_i(x)$ . Для каждой выходящей вверх линии дополнительно вводится множитель (6.1.9) или (6.1.10), в зависимости от направления стрелки (вверх или вниз). Для каждой входящей снизу линии добавляется множи-

тель (6.1.11), если стрелка указывает вверх, или (6.1.12) — в противном случае. Для каждой линии, проходящей насквозь диаграммы, добавляется множитель (6.1.13). Для каждой внутренней линии, соединяющей вершины, вводится множитель (6.1.14).

**(iii)** Проинтегрировать полученное произведение по всем координатам  $x_1, x_2, \dots$  каждой вершины.

**(iv)** Сложить результаты для всех диаграмм Фейнмана. Полный ряд теории возмущений для  $S$ -матрицы получается сложением вкладов каждого порядка по каждому взаимодействию.

Обратим внимание, что в перечисленных правилах не учитывается множитель  $1/N!$  из формулы (6.1.1), поскольку хронологически упорядоченное произведение есть сумма по  $N!$  перестановкам координат  $x_1, \dots, x_N$ , а каждая перестановка дает одинаковый вклад в окончательный результат. Другими словами, каждая диаграмма Фейнмана с  $N$  вершинами — это одна из  $N!$  идентичных диаграмм, отличающихся лишь перестановками обозначений вершин, что дает множитель  $N!$ , сокращающий  $1/N!$  в формуле (6.1.1). (Из этого правила есть исключения, о которых см. ниже.) По этой причине мы не учтиаем диаграммы Фейнмана, отличающиеся лишь переобозначением вершин.

В некоторых случаях возникают дополнительные комбинаторные множители или знаки, которые необходимо включить во вклад отдельных диаграмм:

**(v)** Предположим, что взаимодействие  $\mathcal{H}_i(x)$  содержит  $M$  множителей *одного и того же поля*. Допустим, каждое из них спарено с сопряженным полем из другого взаимодействия или из начально-го (конечного) состояния. Первое из этих сопряженных полей может быть спарено с любым из  $M$  идентичных полей в  $\mathcal{H}_i(x)$ , второе — только с любым из оставшегося  $M - 1$  поля, и т.д., что дает дополнительный множитель  $M!$ . Для его компенсации константы связи  $g_i$  обычно определяют так, чтобы множитель  $1/M!$  явным образом появился в гамильтониане  $\mathcal{H}_i(x)$ , который содержит  $M$  идентичных полей (или сопряженных полей). Например, самодействие скалярного поля  $M$ -го порядка следует представлять в виде  $g\phi^M/M!$ . Вообще, множитель  $1/M!$  часто выделяют в случаях, когда взаимодействие содержит сумму  $M$  произведений из одного мультиплета группы симметрии или когда по этой или иной причине набор констант взаимодействия полностью симметричен или антисимметричен при перестановках  $M$  бозонных или фермионных полей.

Однако сокращение множителей  $M!$  может быть неполным. Например, рассмотрим фейнмановскую диаграмму, в которой  $M$  идентичных полей в одном взаимодействии  $\mathcal{H}_i(x)$  спариваются с  $M$  соответствующими сопряженными полями в другом взаимодействии  $\mathcal{H}_j(y)$  (см. рис. 6.2). Рассуждая аналогично, находим  $M!$  различных спариваний, так что сокращается лишь один из множителей  $1/M!$

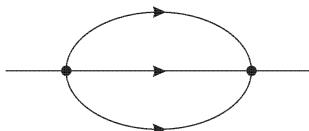


Рис. 6.2. Пример графа, для которого надо добавить дополнительные комбинаторные множители при вычислении  $S$ -матрицы. Для взаимодействия, содержащего, скажем, три сомножителя одного поля (наряду с другими полями) обычно в гамильтониан вводят множитель  $1/3!$ , чтобы сократить множитель  $3!$ , возникающий при суммировании по перестановкам одинаковых полей. В данной же диаграмме возникают два множителя  $1/3!$ , но перестановок всего  $3!$ , так что получается дополнительный множитель  $1/3!$  двух различных взаимодействий. Следовательно, нужно добавить множитель  $1/M!$  для этой диаграммы Фейнмана.

Другие комбинаторные множители возникают, когда некоторые перестановки вершин не меняют диаграмму Фейнмана. Мы уже обсудили сокращение множителя  $1/N!$  в разложении (6.1.1) за счет суммы по идентичным диаграммам, отличающимся лишь переобозначением  $N$  вершин. Однако это сокращение будет неполным, если перестановка вершин не меняет диаграмму. Обычно это наблюдается при вычислении вакуум-вакуумных матричных элементов  $S$ -матрицы

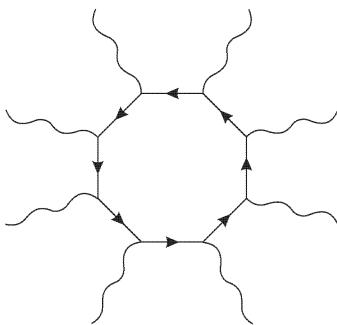


Рис. 6.3. Диаграмма восьмого порядка для перехода вакуум-вакуум с частицами, взаимодействующими только с внешним полем. Внешнее поле здесь изображено волнистыми линиями. Имеется  $7!$  таких диаграмм, отличающихся переобозначением вершин, при условии, что считаются одинаковыми диаграммы, переходящие друг в друга при повороте кольца. Множитель  $1/8!$ , таким образом, сокращается не полностью, что дает дополнительный коэффициент  $1/8$

в теории с квадратичным взаимодействием  $\mathcal{H} = \psi_l^\dagger M_{ll'} \psi_{l'}$ , где  $M$  может зависеть от внешних полей. (Физический смысл таких вакуумных флуктуаций подробно обсуждается в т. II.) Диаграмма Фейнмана  $N$ -го порядка по  $\mathcal{H}$  представляет собой кольцо с  $N$  вершинами (см. рис. 6.3). Имеется лишь  $(N - 1)!$  различных диаграмм этого вида, поскольку перестановка значков со сдвигом в соседние вершины

по кругу дает ту же диаграмму. Значит, этой диаграмме отвечает дополнительный множитель

$$\frac{(N-1)!}{N!} = \frac{1}{N}. \quad (6.1.17)$$

(vi) В теориях с фермионными полями применение формул (6.1.4)–(6.1.6) для перемещения операторов уничтожения и рождения вправо или влево дает дополнительные знаки минус в различных спариваниях. Более точно, знак минус получается, когда для того, чтобы поставить спаренные операторы друг рядом с другом (так, чтобы слева в паре стоял оператор уничтожения), в формуле (6.1.1) нужно сделать нечетное число перестановок местами фермионных операторов. Это можно объяснить так: для вычисления вклада от данного спаривания нужно расположить все операторы уничтожения в формуле (6.1.1) слева от спаренных с каждым из них оператором рождения, игнорируя все (анти)коммутаторы неспаренных операторов, а затем заменить каждую пару спаренных полей на их (анти)коммутатор. Отсюда немедленно следует, что относительный знак двух слагаемых в (6.1.14) для фермионных полей является минусом. Какая бы перестановка ни помещала уничтожающую часть  $\psi^+(x)$  поля в  $\mathcal{H}(x)$  слева от рождающей части  $\psi^{+\dagger}(y)$  сопряженного поля в  $\mathcal{H}(y)$ , при перестановке уничтожающей части  $\psi^{-\dagger}(y)$  сопряженного поля налево от рождающей части  $\psi^-(x)$  поля происходит одна дополнительная замена местами фермионных операторов, что дает знак “–” для фермионов во втором слагаемом левой части уравнения (6.1.14).

Помимо этого, диаграмма Фейнмана может приобрести дополнительный знак “–”. В качестве примера рассмотрим теорию с единственным взаимодействием фермионов вида

$$\mathcal{H}(x) = \sum_{lmk} g_{lmk} \psi_l^\dagger(x) \psi_m(x) \phi_k(x), \quad (6.1.18)$$

где  $g_{lmk}$  — константы общего вида,  $\psi_l(x)$  — набор комплексных фермионных полей, а  $\phi_m(x)$  — набор вещественных бозонных (необязательно скалярных) полей. Заметим, что не только электродинамика, но и вся стандартная модель слабых, электромагнитных и сильных взаимодействий соответствует взаимодействиям такого вида. Для начала рассмотрим процесс рассеяния фермиона на фермионе,  $12 \rightarrow 1'2'$ , с точностью до второго порядка по  $\mathcal{H}$ . Фермионные операторы во вкладе второго порядка в формуле (6.1.1) оказываются расположенными в порядке (с очевидными сокращениями обозначений)

$$a(2') a(1') \psi^\dagger(x) \psi(x) \psi^\dagger(y) \psi(y) a^\dagger(1) a^\dagger(2). \quad (6.1.19)$$

Имеются две связные диаграммы этого порядка, отвечающие спариваниям

$$[a(2') \psi^\dagger(x)] [a(1') \psi^\dagger(y)] [\psi(y) a^\dagger(1)] [\psi(x) a^\dagger(2)] \quad (6.1.20)$$

и

$$[a(1')\psi^\dagger(x)][a(2')\psi^\dagger(y)][\psi(y)a^\dagger(1)][\psi(x)a^\dagger(2)] \quad (6.1.21)$$

(см. рис. 6.4). Переход от (6.1.19) к (6.1.20) требует *четной* перестановки фермионных операторов. Например, можно переместить  $\psi(x)$

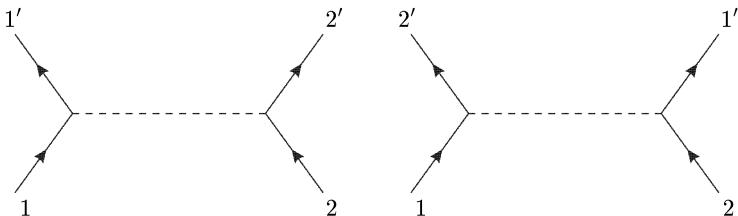


Рис. 6.4. Связные диаграммы второго порядка для фермион-фермионного рассеяния со взаимодействием (6.1.18). Прямые линии здесь представляют фермионы, пунктир — нейтральные бозоны. Вклад этих двух диаграмм имеет относительный знак минус, который возникает от дополнительной перестановки фермионных операторов при спаривании, представленном второй диаграммой

через три оператора направо, а затем переместить  $a(1')$  через один оператор направо. Поэтому дополнительного минуса не возникает во вкладе от спаривания (6.1.20). Само по себе это было бы неважно, поскольку общий знак матричного элемента не влияет на скорость реакции, и в любом случае зависит от соглашений о знаке начального и конечного состояний. Но вклады спариваний (6.1.20) и (6.1.21) имеют разный знак, что легко заметить, поскольку разница между этими спариваниями компенсируется одной перестановкой местами фермионных операторов:  $a(1') \leftrightarrow a(2')$ . На самом деле, относительный знак минус требуется правилами статистики Ферми: амплитуда рассеяния должна быть антисимметрична относительно перестановки одинаковых фермионов ( $1', 2'$  или  $1, 2$ ).

Однако не всегда знаковые факторы можно обосновать таким простым образом, даже в наимизшем порядке теории возмущений. Чтобы убедиться в этом, рассмотрим рассеяние фермиона на антифермионе,  $12^c \rightarrow 1'2'^c$ , во втором порядке по тому же взаимодействию (6.1.18). Фермионные операторы во вкладе второго порядка оказываются в следующем порядке:

$$a(2'^c)a(1')\psi^\dagger(x)\psi(x)\psi^\dagger(y)\psi(y)a^\dagger(1)a^\dagger(2^c). \quad (6.1.22)$$

Здесь снова возникают две диаграммы Фейнмана, отвечающие спариваниям

$$[a(2'^c)\psi(x)][a(1')\psi^\dagger(x)][\psi(y)a^\dagger(1)][\psi^\dagger(y)a^\dagger(2^c)] \quad (6.1.23)$$

и

$$[a(2'^c)\psi(x)][a(1')\psi^\dagger(y)][\psi(y)a^\dagger(1)][\psi^\dagger(x)a^\dagger(2^c)] \quad (6.1.24)$$

(см. рис. 6.5). Переход от (6.1.22) к (6.1.23) требует четной перестановки фермионных операторов (например, можно переместить  $\psi(x)$  через

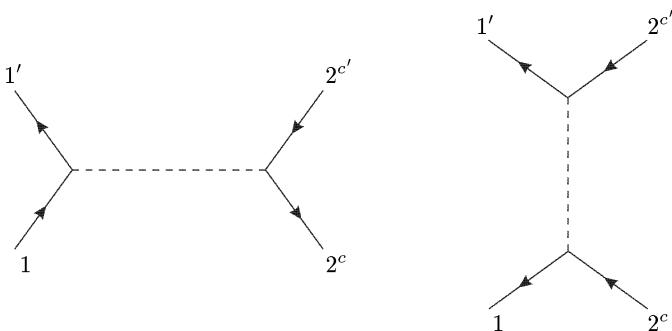


Рис. 6.5. Связные диаграммы второго порядка для фермион-антифермионного рассеяния со взаимодействием (6.1.18). Сплошные линии здесь представляют (анти)фермионы, пунктир — нейтральные бозоны. Вклад этих двух диаграмм отличается знаком минус

два оператора налево, а затем переместить  $\psi^\dagger(y)$  через два оператора направо), поэтому дополнительного минуса не возникает во вкладе от спаривания (6.1.23). С другой стороны, для перехода от (6.1.22) к (6.1.24) требуется нечетная перестановка фермионных операторов (то же, что для (6.1.23), плюс одна перестановка  $\psi^\dagger(x) \leftrightarrow \psi^\dagger(y)$ ), поэтому вклад этого спаривания получает дополнительный минус<sup>2)</sup>.

Дополнительные знаки могут появиться во вкладах высших порядков. В теориях, подобных рассмотренным здесь, со взаимодействием фермионов вида (6.1.18), фермионные линии в диаграммах общего вида образуют либо цепочки, проходящие через диаграмму с произвольным числом взаимодействий с бозонами, как на рис. 6.6, либо фермионные петли, как на рис. 6.7. Рассмотрим вклад фермионной

<sup>2)</sup> На самом деле, этот знак можно объяснить требованиями фермистатистики. Одно и тоже поле может рождать и уничтожать частицу, поэтому имеется связь, известная под названием “перекрестная симметрия”, между процессами, отличающимися заменой частицы (античастицы) в начальном состоянии на античастицу (частицу) в конечном состоянии. В частности, амплитуды процесса  $12^c \rightarrow 1'2'^c$  связаны с амплитудами для “перекрестного” процесса  $12' \rightarrow 1'2$ ; два спаривания (6.1.23) и (6.1.24) отвечают двум диаграммам для этого процесса, который отличается заменой  $1 \leftrightarrow 2'$  или  $1' \leftrightarrow 2$ , так что для антисимметричности амплитуды при перестановке начальных (или конечных) фермионов требуется, чтобы относительный знак двух слагаемых был отрицателен. Однако перекрестная симметрия не является обычной симметрией, поскольку требует аналитического продолжения по кинематическим переменным, и ее сложно применять для процессов общего вида с произвольной точностью.

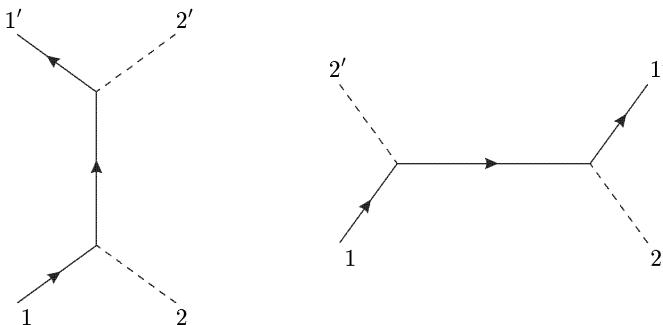


Рис. 6.6. Связные диаграммы второго порядка для бозон-фермионного рас-  
сения со взаимодействием (6.1.18). Сплошные линии — фермионы, пунк-  
тир — нейтральные бозоны

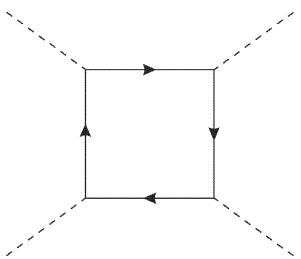


Рис. 6.7. Связная диаграмма наименшего порядка для бозон-бозонного рас-  
сения в теории со взаимодействием (6.1.18). Такая фермионная петля вно-  
сит дополнительный знак минус, который происходит от перестановки спарен-  
ных фермионных полей

петли с  $M$  вершинами в любой процесс. Она отвечает спариванию операторов

$$[\psi(x_1)\bar{\psi}(x_2)][\psi(x_2)\bar{\psi}(x_3)] \dots [\psi(x_M)\bar{\psi}(x_1)]. \quad (6.1.25)$$

С другой стороны, эти операторы входят в (6.1.1) в следующем порядке:

$$\bar{\psi}(x_1)\psi(x_1)\bar{\psi}(x_2)\psi(x_2) \dots \bar{\psi}(x_M)\psi(x_M). \quad (6.1.26)$$

Для перехода от (6.1.26) к (6.1.25) требуется нечетная перестановка фермионных операторов (перемещение  $\bar{\psi}(x_1)$  направо через  $2M - 1$  оператор), так что вклад каждой такой петли сопровождается знаком минус.

Эти правила позволяют вычислить полную  $S$ -матрицу, включая вклады от процессов, в которых различные группы частиц взаимодействуют в удаленных по времени и пространству областях. В гл. 4 уже говорилось, что следует брать лишь *связные* диаграммы Фейнмана, чтобы исключить вклады от таких групповых взаимодействий.

В частности, это исключает диаграммы с линиями, идущими напрямую без взаимодействия, которые дали бы множители (6.1.13).

Чтобы прояснить правила Фейнмана, вычислим вклад низшего порядка в  $S$ -матрицу для рассеяния частиц в двух различных теориях.

### Теория I

Рассмотрим теорию с фермионами и зарядово-самосопряженными (нейтральными) бозонами, со взаимодействием (6.1.18). Связные диаграммы наименее высокого порядка фермион-бозонного рассеяния изображены на рис. 6.6. Согласно правилам, приведенным на рис. 6.1, соответствующий матричный элемент равен

$$\begin{aligned} S_{\mathbf{p}'_1 \sigma'_1 n'_1 \mathbf{p}'_2 \sigma'_2 n'_2, \mathbf{p}_1 \sigma_1 n_1 \mathbf{p}_2 \sigma_2 n_2} = & \\ = (2\pi)^{-6} \sum_{k' l' m' k l m} & (-i)^2 g_{l' m' k'} g_{m l k} u_{l'}^*(\mathbf{p}'_1 \sigma'_1 n'_1) u_l(\mathbf{p}_1 \sigma_1 n_1) \times \\ \times \int d^4 x \int d^4 y & (-i \Delta_{m' m}(y - x)) e^{-ip'_1 \cdot y} e^{ip_1 \cdot x} \times \\ \times [e^{-ip'_2 \cdot y} u_{k'}^*(\mathbf{p}'_2 \sigma'_2 n'_2) e^{ip_2 \cdot x} u_k(\mathbf{p}_2 \sigma_2 n_2) + & \\ + e^{-ip'_2 \cdot x} u_k^*(\mathbf{p}'_2 \sigma'_2 n'_2) e^{ip_2 \cdot y} u_{k'}(\mathbf{p}_2 \sigma_2 n_2)]. & \quad (6.1.27) \end{aligned}$$

Индексы 1 и 2 обозначают здесь соответственно фермионы и бозоны. Для фермион-фермионного рассеяния имеются две диаграммы второго порядка, представленные на рис. 6.4. Они дают  $S$ -матричный элемент

$$\begin{aligned} S_{\mathbf{p}'_1 \sigma'_1 n'_1 \mathbf{p}'_2 \sigma'_2 n'_2, \mathbf{p}_1 \sigma_1 n_1 \mathbf{p}_2 \sigma_2 n_2} = (2\pi)^{-6} \sum_{k' l' m' k l m} & (-i)^2 g_{m' m k'} g_{l' l k} \times \\ \times u_{m'}^*(\mathbf{p}'_2 \sigma'_2 n'_2) u_{l'}^*(\mathbf{p}'_1 \sigma'_1 n'_1) u_m(\mathbf{p}_2 \sigma_2 n_2) u_l(\mathbf{p}_1 \sigma_1 n_1) \times & \\ \times \int d^4 x \int d^4 y & e^{-ip'_2 \cdot x} e^{-ip'_1 \cdot y} e^{ip_2 \cdot x} e^{ip_1 \cdot y} (-i) \Delta_{k' k}(x - y) - \\ - [1' \rightleftharpoons 2'], & \quad (6.1.28) \end{aligned}$$

где последнее слагаемое сокращенно обозначает предыдущее слагаемое, в котором переставлены частицы 1', 2' (или, что то же самое, частицы 1, 2). Во втором порядке нет диаграмм бозон-бозонного рассеяния; наименее высокий порядок, в котором они появляются, равен 4 (см. рис. 6.7). Более конкретные примеры формул типа (6.1.27), (6.1.28) будут приведены в § 6.3, после попытки вычисления пропагатора и перехода в импульсное пространство.

Во взаимодействии (6.1.18) все три сомножителя — различные поля. Было бы поучительно рассмотреть трилинейное взаимодействие, в котором все три поля одинаковы или входят во взаимодействие симметрично.

## Теория II

Теперь рассмотрим в качестве плотности гамильтониана трилинейную форму

$$\mathcal{H}(x) = \frac{1}{3!} \sum_{lmn} g_{lmn} \phi_l(x) \phi_m(x) \phi_n(x) \quad (6.1.29)$$

где  $\phi_l(x)$  — вещественные бозонные поля, а  $g_{lmn}$  — полностью симметричный набор констант связи. Допустим, мы хотим рассмотреть процесс рассеяния  $12 \rightarrow 1'2'$  с точностью до второго порядка по этим константам связи. В каждую из двух вершин должны входить две из четырех внешних линий. (Единственная альтернатива — когда одна из внешних линий входит в одну вершину, а три других — в другую, но тогда получается несвязная диаграмма, поскольку у второй вершины не останется места для внутренней, соединяющей линии.)

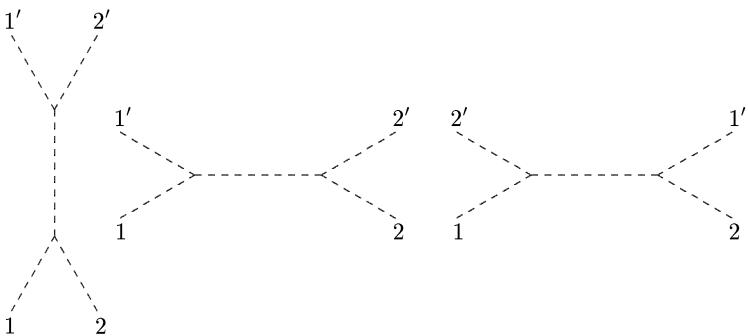


Рис. 6.8. Связные диаграммы второго порядка для бозон-бозонного рассеяния в теории со взаимодействием (6.1.29)

Остающаяся у каждой вершины линия должна соединять их между собой. Возможны три рисунка такого вида, отличающиеся лишь тем, какие пары внешних линий входят в вершины (см. рис. 6.8). По правилам Фейнмана, приведенным выше, получаем вклад в  $S$ -матрицу от этих трех диаграмм:

$$\begin{aligned} S_{\mathbf{p}_1' \sigma'_1 n'_1 \mathbf{p}_2' \sigma'_2 n'_2, \mathbf{p}_1 \sigma_1 n_1 \mathbf{p}_2 \sigma_2 n_2} &= \\ &= (-i)^2 (2\pi)^{-6} \sum_{l' l'' m' m''} g_{ll'm'} g_{mm'm''} \int d^4x \int d^4y (-i \Delta_{l''m''}(x, y)) \times \\ &\times [u_l^*(\mathbf{p}_1' \sigma'_1 n'_1) e^{-ip'_1 \cdot x} u_{l'}^*(\mathbf{p}_2' \sigma'_2 n'_2) e^{-ip'_2 \cdot x} \times \\ &\times u_m(\mathbf{p}_1 \sigma_1 n_1) e^{ip_1 \cdot y} u_{m'}(\mathbf{p}_2 \sigma_2 n_2) e^{ip_2 \cdot y} + \\ &+ u_{l'}^*(\mathbf{p}_1' \sigma'_1 n'_1) e^{-ip'_1 \cdot x} u_l(\mathbf{p}_1 \sigma_1 n_1) e^{ip_1 \cdot x} \times \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \times u_{m'}^*(\mathbf{p}'_2 \sigma'_2 n'_2) e^{-ip'_2 \cdot y} u_m(\mathbf{p}_2 \sigma_2 n_2) e^{ip_2 \cdot y} + \\ & + u_l^*(\mathbf{p}'_2 \sigma'_2 n'_2) e^{-ip'_2 \cdot x} u_l(\mathbf{p}_1 \sigma_1 n_1) e^{ip_1 \cdot x} \times \\ & \times u_{m'}^*(\mathbf{p}'_1 \sigma'_1 n'_1) e^{-ip'_1 \cdot y} u_m(p_2 \sigma_2 n_2) e^{ip_2 \cdot y}. \end{aligned} \quad (6.1.30)$$

В еще более частном случае, когда бозоны являются бесспиновыми частицами одного сорта, взаимодействие (6.1.29) принимает простой вид

$$\mathcal{H} = g\phi^3/3!, \quad (6.1.31)$$

а матричный элемент для скаляр-скалярного рассеяния равен

$$\begin{aligned} S_{\mathbf{p}'_1 \mathbf{p}'_2, \mathbf{p}_1 \mathbf{p}_2} = & \frac{ig^2}{(2\pi)^6 \sqrt{16E'_1 E'_2 E_1 E_2}} \int d^4x \int d^4y \Delta_F(x-y) \times \\ & \times [\exp(-i(p'_1 + p'_2) \cdot x) \exp(i(p_1 + p_2) \cdot y) + \\ & + \exp(i(p_1 - p'_1) \cdot x) \exp(i(p_2 - p'_2) \cdot y) + \\ & + \exp(i(p_1 - p'_2) \cdot x) \exp(i(p_2 - p'_1) \cdot y)], \end{aligned} \quad (6.1.32)$$

где  $\Delta_F(x-y)$  — пропагатор скалярного поля, который мы вычислим в следующем параграфе. В этой теории отсутствуют диаграммы третьего, и вообще нечетного, порядка.

## § 6.2. Вычисление пропагатора

Теперь мы перейдем к вычислению пропагатора (6.1.14), важного компонента правил Фейнмана, который возникает от спаривания поля  $\psi_l(x)$  с сопряженным полем  $\psi_m^\dagger(y)$ . Подставляя формулы (6.1.15) и (6.1.16) в уравнение (6.1.14) и применяя (анти)коммутационные соотношения для операторов рождения-уничтожения, немедленно получаем:

$$\begin{aligned} -\Delta_{lm}(x, y) = & \theta(x-y)(2\pi)^{-3} \int d^3p \sum_\sigma u_l(\mathbf{p}\sigma n) u_m^*(\mathbf{p}\sigma n) e^{ip \cdot (x-y)} \pm \\ & \pm \theta(y-x)(2\pi)^{-3} \int d^3p \sum_\sigma v_m^*(\mathbf{p}\sigma n) v_l^*(\mathbf{p}\sigma n) e^{ip \cdot (y-x)}. \end{aligned} \quad (6.2.1)$$

При вычислении (анти)коммутаторов в гл. 5 было показано, что

$$\sum_\sigma u_l(\mathbf{p}\sigma n) u_m^*(\mathbf{p}\sigma n) = (2\sqrt{\mathbf{p}^2 + m_n^2})^{-1} P_{lm}(\mathbf{p}, \sqrt{\mathbf{p}^2 + m_n^2}), \quad (6.2.2)$$

$$\sum_\sigma v_l(\mathbf{p}\sigma n) v_m^*(\mathbf{p}\sigma n) = \pm (2\sqrt{\mathbf{p}^2 + m_n^2})^{-1} P_{lm}(-\mathbf{p}, -\sqrt{\mathbf{p}^2 + m_n^2}), \quad (6.2.3)$$

где  $P_{lm}(\mathbf{p}, \omega)$  — полином по  $\mathbf{p}$  и  $\omega$ . Здесь, как и в формуле (6.2.1), верхний и нижний знаки отвечают соответственно бозонным и фермионным полям. Например, если  $\psi_l(x)$  и  $\psi_m(y)$  суть скалярные поля (частицы со спином 0)  $\phi(x)$ ,  $\phi(y)$ , то получается просто

$$P(p) = 1. \quad (6.2.4)$$

Если  $\psi_l(x)$  и  $\psi_m(y)$  — дираковские поля (частицы спина 1/2), то

$$P_{lm}(p) = [(-i\gamma_\mu p^\mu + m)\beta]_{lm}, \quad (6.2.5)$$

где  $l, m$  обозначают индексы дираковских 4-компонентных спиноров. (Матрица  $\beta$  здесь появилась, поскольку мы рассматриваем спаривание  $\psi_l(x)$  с  $\psi_m^\dagger(y)$ .) Ее не будет в спаривании  $\psi_l(x)$  и  $\bar{\psi}_m(y) \equiv \psi_m^\dagger(y)\beta$ .) Если  $\psi_l(x)$  и  $\psi_m(y)$  — векторные поля (частицы спина 1), то

$$P_{\mu\nu}(p) = \eta_{\mu\nu} + m^{-2} p_\mu p_\nu. \quad (6.2.6)$$

В общем случае, если  $\psi_l(x)$  и  $\psi_m(y)$  — компоненты полей  $\psi_{ab}(x)$  и  $\psi_{\tilde{a}\tilde{b}}(y)$  частицы со спином  $j$  в неприводимых представлениях  $(A, B)$  и  $(\tilde{A}, \tilde{B})$  однородной группы Лоренца, то

$$\begin{aligned} P_{ab, \tilde{a}\tilde{b}}(p) &= \sum_{a'b'} \sum_{\tilde{a}'\tilde{b}'} \sum_{\sigma} C_{AB}(j\sigma, a'b') C_{\tilde{A}\tilde{B}}(j\sigma, \tilde{a}'\tilde{b}') \times \\ &\quad \times [\exp(-\theta \hat{p} \cdot \mathbf{J}^{(A)})]_{aa'} [\exp(+\theta \hat{p} \cdot \mathbf{J}^{(B)})]_{bb'} \times \\ &\quad \times [\exp(-\theta \hat{p} \cdot \mathbf{J}^{(\tilde{A})})]_{\tilde{a}\tilde{a}'} [\exp(+\theta \hat{p} \cdot \mathbf{J}^{(\tilde{B})})]_{\tilde{b}\tilde{b}'}, \end{aligned} \quad (6.2.7)$$

где  $\text{sh } \theta = |\mathbf{p}|/m$ , а индексы  $a, b, \tilde{a}, \tilde{b}$  пробегают с шагом 1 значения от  $-A$  до  $A$ , от  $-B$  до  $B$ , от  $-\tilde{A}$  до  $\tilde{A}$ , от  $-\tilde{B}$  до  $\tilde{B}$  соответственно, и аналогично для индексов со штрихами.

Подстановка (6.2.2) и (6.2.3) в уравнение (6.2.1) дает

$$\begin{aligned} -i\Delta_{lm}(x, y) &= \theta(x - y) P_{lm} \left( -i \frac{\partial}{\partial x} \right) \Delta_+(x - y) + \\ &\quad + \theta(y - x) P_{lm} \left( -i \frac{\partial}{\partial x} \right) \Delta_+(y - x), \end{aligned} \quad (6.2.8)$$

где  $\Delta_+(x)$  — функция, введенная в гл. 5:

$$\Delta_+(x) = (2\pi)^{-3} \int d^3 p (2p^0)^{-1} e^{ip \cdot x}, \quad (6.2.9)$$

где  $p^0 = +\sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}$ .

Перед тем как продолжить вычисления, следует пояснить, как можно обобщить определение полинома  $P(p)$ . Уравнения (6.2.2) и (6.2.3) определяют его только на так называемой массовой оболочке, т.е. при  $p^0 = \pm\sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}$ . Любой многочлен от 4-импульса на массо-

вой оболочке можно считать линейным по  $p^0$ , поскольку любая степень  $(p^0)^{2\nu}$  или  $(p^0)^{2\nu+1}$  может быть записана в виде  $(\mathbf{p}^2 + m^2)^{2\nu}$  или  $p^0(\mathbf{p}^2 + m^2)^{2\nu}$  соответственно. Поэтому мы зададим полином  $P^{(L)}(q)$  следующими условиями:

$$\begin{aligned} P^{(L)}(p) &= P(p) \quad (\text{где } p^0 = \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}), \\ P^{(L)}(q) &= P^{(0)}(\mathbf{q}) + q^0 P^{(1)}(\mathbf{q}) \quad (\text{для произвольного } q^\mu), \end{aligned} \quad (6.2.10)$$

где  $P^{(0,1)}$  — полиномы, зависящие только от  $\mathbf{q}$ . Используем теперь соотношения

$$\frac{\partial}{\partial x^0} \theta(x^0 - y^0) = -\frac{\partial}{\partial x^0} \theta(y^0 - x^0) = \delta(x^0 - y^0) \quad (6.2.11)$$

(вспомнив, что функция  $\theta(x)$  имеет скачок на единицу в  $x^0$  и постоянна в других местах), чтобы переместить операторы дифференцирования налево от  $\theta$ -функций в формуле (6.2.8):

$$\begin{aligned} \Delta_{lm}(x, y) &= P_{lm}^{(L)} \left( -i \frac{\partial}{\partial x} \right) \Delta_F(x - y) + \\ &\quad + \delta(x^0 - y^0) P_{lm}^{(1)}(-i\nabla) [\Delta_+(x - y) - \Delta_+(y - x)], \end{aligned} \quad (6.2.12)$$

где  $\Delta_F$  — “фейнмановский пропагатор”

$$-i\Delta_F(x) \equiv \theta(x)\Delta_+(x) + \theta(-x)\Delta_+(-x). \quad (6.2.13)$$

Однако при  $x^0 = 0$  функция  $\Delta_+(x)$  четна по  $\mathbf{x}$ , поскольку замену  $\mathbf{x} \rightarrow -\mathbf{x}$  в (6.2.9) можно компенсировать заменой  $\mathbf{p} \rightarrow -\mathbf{p}$  переменной интегрирования. По этой причине можно опустить второе слагаемое в (6.2.12) и получить простое выражение

$$\Delta_{lm}(x, y) = P_{lm}^{(L)} \left( -i \frac{\partial}{\partial x} \right) \Delta_F(x - y). \quad (6.2.14)$$

Для дальнейших вычислений нам понадобится фурье-представление фейнмановского пропагатора. Функции-ступеньки в (6.2.13) записываются в виде интеграла Фурье<sup>1)</sup>

$$\theta(t) = \frac{-1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\exp(-ist)}{s + i\epsilon} ds. \quad (6.2.15)$$

<sup>1)</sup> Для доказательства этой формулы заметим, что при  $t > 0$  можно замкнуть контур интегрирования большой полуокружностью в нижней полуплоскости, ориентированной по часовой стрелке, так что интеграл дает  $-2\pi i$  за счет вычета в полюсе при  $s = -i\epsilon$ . Если же  $t < 0$ , то контур можно замкнуть полуокружностью, ориентированной против часовой стрелки и лежащей в верхней полуплоскости, в которой подынтегральное выражение не имеет полюсов, т.е. интеграл равен нулю.

Это можно объединить с интегралом Фурье (6.2.9) для функции  $\Delta_+(x)$ . Введем новые переменные интегрирования,  $\mathbf{q} = \mathbf{p}$ ,  $q^0 = p^0 = s$  в первом слагаемом уравнения (6.2.13), что дает

$$-i\Delta_F(x) = -\frac{1}{2\pi i} \int d^3 q \int dq^0 \frac{\exp(i\mathbf{q} \cdot \mathbf{x} - iq^0 x^0)}{(2\pi)^3 2\sqrt{\mathbf{q}^2 + m^2}} \times \\ \times [(q^0 - \sqrt{\mathbf{q}^2 + m^2} + i\epsilon)^{-1} + (-q^0 - \sqrt{\mathbf{q}^2 + m^2} + i\epsilon)^{-1}].$$

Приводя подынтегральное выражение к общему знаменателю и используя 4-мерные обозначения, элементарно получаем

$$\Delta_F(x) = (2\pi)^{-4} \int d^4 q \frac{\exp(iq \cdot x)}{q^2 + m^2 - i\epsilon}, \quad (6.2.16)$$

где  $q^2 \equiv \mathbf{q}^2 - (q^0)^2$ . В знаменателе мы заменили  $2\epsilon\sqrt{\mathbf{q}^2 + m^2}$  на  $\epsilon$ , поскольку важно лишь то, что это положительная бесконечно малая величина. Отсюда видно, что  $\Delta_F$  — функция Грина оператора Клейна–Гордона, в том смысле, что

$$(\square - m^2)\Delta_F(x) = -\delta^4(x), \quad (6.2.17)$$

а граничные условия определяются добавкой  $-i\epsilon$  в знаменателе: как видно из формулы (6.2.13), при  $x^0 \rightarrow \infty$  или  $x^0 \rightarrow -\infty$  функция  $\Delta_F(x)$  содержит только положительные или отрицательные частоты, соответственно  $\exp(-ix^0\sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2})$  или  $\exp(ix^0\sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2})$ .

В результате подстановки (6.2.16) в (6.1.14) получаем пропагатор в виде

$$\Delta_{lm}(x, y) = (2\pi)^{-4} \int d^4 q \frac{P_{lm}^{(L)}(q) e^{iq \cdot (x-y)}}{q^2 + m^2 - i\epsilon}. \quad (6.2.18)$$

Здесь возникает следующая проблема. Многочлен  $P(p)$  лоренц-ковариантен, если  $p$  лежит на массовой оболочке, т.е.  $p^2 = -m^2$ , но в уравнении (6.2.18) производится интегрирование по всем  $q^\mu$ , а не только по массовой оболочке. Для произвольных  $q^\mu$  многочлен  $P^{(L)}(q)$  по определению линеен по  $q^0$ , что явно нарушает лоренц-ковариантность, если многочлен не является линейным по каждой пространственной компоненте  $q^i$ . Вместо такого обобщения многочлена  $P(p)$  можно ввести его лоренц-ковариантное обобщение на произвольные  $q^\mu$  (которое мы обозначим просто  $P(q)$ ), в том смысле, что

$$P_{lm}(\Lambda q) = D_{ll'}(\Lambda) D_{mm'}^*(\Lambda) P_{l'm'}(q),$$

где  $\Lambda^\mu_\nu$  — преобразование Лоренца общего вида, а  $D(\Lambda)$  — некоторое представление группы Лоренца. К примеру, в случае скалярных, дираковских и векторных полей такое ковариантное обобщение получается простой заменой импульса  $p^\mu$  на импульс общего вида  $q^\mu$  в формулах (6.2.4), (6.2.5) и (6.2.6). В случае скалярных и дираковских

полей пропагатор и так линеен по  $q^0$ , а потому нет разницы между  $P^{(L)}(q)$  и  $P(q)$ :

$$P_{lm}^{(L)}(q) = P_{lm}(q) \quad (\text{скалярное поле, дираковское поле}). \quad (6.2.19)$$

С другой стороны, в случае векторного (спин-1) поля 00-компоненты ковариантного полинома  $P_{\mu\nu}(q) \equiv \eta_{\mu\nu} + m^{-2} q_\mu q_\nu$  квадратична по  $q^0$ , так что здесь есть разница между  $P^{(L)}(q)$  и  $P(q)$ :

$$\begin{aligned} P_{\mu\nu}^{(L)}(q) &= \eta_{\mu\nu} + m^{-2}[q_\mu q_\nu - \delta_\mu^0 \delta_\nu^0 (q_0^2 - \mathbf{q}^2 - m^2)] = \\ &= P_{\mu\nu}(q) + m^{-2}(q^2 + m^2)\delta_\mu^0 \delta_\nu^0. \end{aligned} \quad (6.2.20)$$

Дополнительное слагаемое здесь фиксировано двумя условиями — оно должно сокращать слагаемое  $(q^0)^2$  в  $P_{00}(q)$ , и должно зануляться на массовой оболочке. Подстановка этого выражения в формулу (6.2.18) дает пропагатор векторного поля

$$\Delta_{\mu\nu}(x, y) = (2\pi)^{-4} \int d^4 q \frac{P_{\mu\nu}(q) e^{iq \cdot (x-y)}}{q^2 + m^2 - i\epsilon} + m^{-2}\delta^{-4}(x-y)\delta_\mu^0 \delta_\nu^0. \quad (6.2.21)$$

Первое слагаемое, очевидно, ковариантно, а второе — не ковариантно, но является локальным, так что его можно сократить путем добавления локального нековариантного члена в гамильтониан. Конкретно, если  $V_\mu(x)$  взаимодействует с другими полями посредством члена  $V_\mu(x)J^\mu(x)$  в гамильтониане, то вклад добавочного слагаемого в (6.2.21) равносителен добавлению взаимодействия

$$-i\mathcal{H}_{eff}(x) = \frac{1}{2} [-iJ^\mu(x)][-iJ^\nu(x)][-im^{-2}\delta_\mu^0 \delta_\nu^0].$$

(Множители  $-i$  — это обычные множители, сопровождающие вершины и пропагаторы. Множитель  $1/2$  компенсирует симметрию — есть два спаривания других полей с гамильтонианом  $\mathcal{H}_{eff}(x)$ , отличающихся только заменой  $J^\mu$  на  $J^\nu$ .) Таким образом, эффект нековариантного слагаемого в (6.2.21) можно сократить, добавив в гамильтониан  $\mathcal{H}(x)$  нековариантное взаимодействие

$$\mathcal{H}_{NC}(x) = -\mathcal{H}_{eff}(x) = \frac{1}{2m^2} [J^0(x)]^2. \quad (6.2.22)$$

Именно сингулярность (при нулевом расстоянии) одновременных коммутаторов векторных полей вынуждает нас использовать более широкий класс взаимодействий, чем просто скалярную плотность гамильтониана. Подробное непертурбативное доказательство лоренцинвариантности  $S$ -матрицы в этой теории будет представлено в следующей главе.

Не стоит думать, что это явление специфично для полей спин на  $j \geq 1$ . Например, рассмотрим векторное поле, построенное из скалярного поля, равное (см. гл. 5) его производной  $\partial_\lambda \phi(x)$ . В случае

спаривания этого поля со скалярным полем,  $\phi^\dagger(y)$ , полином  $P(p)$  на массовой оболочке равен

$$P_\lambda(p) = ip_\lambda, \quad (6.2.23)$$

а спаривание того же поля с  $\partial_\eta\phi^\dagger(y)$  дает многочлен

$$P_{\lambda,\eta} = p_\lambda p_\eta. \quad (6.2.24)$$

Ковариантные многочлены для импульса  $q^\mu$  вне массовой оболочки опять получаются заменой  $q^\mu$  на  $p^\mu$  в формулах (6.2.13) и (6.2.24). Из формулы (6.2.23) мы видим, что  $P_\lambda(q)$  линеен по  $q_0$ , значит, полиномы  $P_\lambda(q)$  и  $P_\lambda^{(L)}(q)$  совпадают. Но в случае формулы (6.2.24) разница между ними есть:

$$\begin{aligned} P_{\lambda,\eta}^{(L)}(q) &= q_\lambda q_\eta - (q_0^2 - \mathbf{q}^2 - m^2)\delta_\lambda^0\delta_\eta^0 = \\ &= P_{\lambda,\eta}(q) + (q^2 + m^2)\delta_\lambda^0\delta_\eta^0, \end{aligned} \quad (6.2.25)$$

так что пропагатор равен

$$\Delta_{\lambda,\eta}(x,y) = (2\pi)^{-4} \int d^4q \frac{q_\lambda q_\eta e^{iq \cdot x}}{q^2 + m^2 - i\epsilon} + \delta_\lambda^0\delta_\eta^0\delta^4(x-y). \quad (6.2.26)$$

Так же как и в предыдущем примере, нековариантный вклад второго слагаемого можно убрать, добавив в гамильтониан нековариантное взаимодействие

$$\mathcal{H}_{NC}(x) = \frac{1}{2} [J^{(0)}(x)]^2, \quad (6.2.27)$$

где  $J^\mu(x)$  — это ток, на который умножается градиент  $\partial_\mu\phi(x)$  в ковариантной части  $\mathcal{H}(x)$ .

Теперь должно стать понятно, что, по крайней мере для массивных частиц, вклады от нековариантных слагаемых в пропагаторе всегда можно уничтожить путем добавления в гамильтониан нековариантных локальных членов. Это объясняется тем, что числитель  $P_{lm}^{(L)}(q)$  в пропагаторе должен быть равен ковариантному полиному  $P_{lm}(q)$ , когда  $q^\mu$  лежит на массовой оболочке, так что разность между ними должна содержать множитель  $q^2 + m^2$ . Этот множитель сокращается со знаменателем  $(q^2 + m^2 - i\epsilon)$  во вкладе этой разности в формулу (6.2.18), следовательно, уравнение (6.2.18) всегда состоит из ковариантного члена и слагаемого, пропорционального дельта-функции  $\delta^4(x-y)$  или ее производным. Вклад последнего слагаемого можно убрать, добавив в гамильтониан взаимодействия член, квадратичный по току, с которым взаимодействуют спаренные поля, или по производным этих полей. В дальнейшем мы будем неявно предполагать, что такое слагаемое уже введено в гамильтониан, а потому будем использовать ковариантный полином  $P_{lm}(q)$  в пропагаторе (6.2.18), и будем опускать индекс  $L$ .

Может показаться, что такая процедура несколько искусственна. К счастью, в каноническом формализме, который мы рассмотрим в следующей главе, нековариантное слагаемое, нужное для сокращения нековариантных членов в пропагаторе, появляется автоматически. Это, в частности, может служить мотивацией для развития канонического формализма.

\* \* \*

Прежде чем закончить этот параграф, следует упомянуть некоторые другие часто встречающиеся в литературе определения пропагатора, эквивалентные уравнению (6.2.1). Во-первых, взятие вакуумного среднего от обеих частей уравнения (6.1.14) дает

$$\begin{aligned} -\Delta_{lm}(x, y) = & \theta(x - y)\langle[\psi_l^+(x), \psi_m^{+\dagger}(y)]_{\mp}\rangle_0 \pm \\ & \pm \theta(y - x)\langle[\psi_m^{-\dagger}(y), \psi_l^-(x)]_{\mp}\rangle_0. \end{aligned} \quad (6.2.28)$$

Здесь  $\langle AB\dots\rangle_0$  обозначает вакуумное среднее ( $\Phi_0, AB\dots\Phi_0$ ). Оба оператора  $\psi_l^+(x)$  и  $\psi_m^{-\dagger}(y)$  уничтожают вакуум, значит, остается только одно слагаемое в каждом (анти)коммутаторе в уравнении (6.2.28), дающее вклад в пропагатор:

$$-i\Delta_{lm}(x, y) = \theta(x - y)\langle\psi_l^+(x)\psi_m^{+\dagger}(y)\rangle_0 \pm \theta(y - x)\langle\psi_m^{-\dagger}(y)\psi_l^-(x)\rangle_0. \quad (6.2.29)$$

Кроме того,  $\psi^{-\dagger}$  и  $\psi^+$  уничтожают вакуумное состояние справа, а  $\psi^-$  и  $\psi^{+\dagger}$  — слева, поэтому  $\psi^+$  и  $\psi^-$  повсюду в уравнении (6.2.29) можно заменить на полное поле  $\psi = \psi^+ + \psi^-$ :

$$-i\Delta_{lm}(x, y) = \theta(x - y)\langle\psi_l(x)\psi_m^\dagger(y)\rangle_0 \pm \theta(y - x)\langle\psi_m^\dagger(y)\phi_l(x)\rangle_0. \quad (6.2.30)$$

Последнюю формулу можно переписать в виде

$$-i\Delta_{lm}(x, y) = \langle T\{\psi_l(x)\psi_m^\dagger(y)\}\rangle_0, \quad (6.2.31)$$

где  $T$  — хронологическое упорядочение (или символ хронологизации), обобщенное теперь<sup>2)</sup> для любых полей, со знаком минус для любой нечетной перестановки фермионных операторов.

### § 6.3. Правила в импульсном пространстве

Правила Фейнмана, сформулированные в § 6.1, позволяют вычислить вклад в  $S$ -матрицу от заданной диаграммы  $N$ -го порядка, путем взятия интеграла по  $N$  4-координатам от произведения функций

<sup>2)</sup> Это не противоречит нашему предыдущему определению хронологического произведения в плотности гамильтониана в гл. 3, поскольку она может содержать лишь четное число фермионных сомножителей.

этих 4-координат. Для (анти)частицы конечного состояния с импульсом  $p'^\mu$ , выходящей из вершины с координатой  $x^\mu$ , в подынтегральное выражение войдет множитель  $\exp(-ip' \cdot x)$ , а для частицы начального состояния с импульсом  $p^\mu$ , входящей в вершину с координатой  $x^\mu$ , войдет множитель  $\exp(+ip \cdot x)$ . Из § 6.2 мы узнали, что множитель, связанный с внутренней линией, соединяющей точки  $y, x$ , можно представить в виде интеграла Фурье по импульсу (вне массовой оболочки)  $q^\mu$  от функции, пропорциональной  $\exp(iq(x - y))$ . Этот 4-импульс можно приписать виртуальной частице, изображаемой внутренней линией, идущей из точки  $y$  в точку  $x$ . Значит, интеграл по пространственно-временной координате просто дает множитель

$$(2\pi)^4 \delta^4 \left( \sum p + \sum q - \sum p' - \sum q' \right), \quad (6.3.1)$$

где  $\sum p'$  и  $\sum p$  обозначают полный 4-импульс частиц в конечном и начальном состояниях, которые покидают вершину или входят в нее, а  $\sum q'$  и  $\sum q$  — полный 4-импульс выходящих и входящих в вершину внутренних линий. Разумеется, вместо интегрирования по координатам теперь нужно будет вычислять фурье-интегралы по импульсам  $q^\mu$ , по одному для каждой внутренней линии.

Эти соображения можно сформулировать в виде новых правил Фейнмана (рис. 6.9) — правил вычисления вкладов в  $S$ -матрицу в виде интегралов по 4-импульсам:

**(i)** Нарисовать все диаграммы интересующего порядка, как описано в § 6.1, но вместо того чтобы помечать вершины координатами, нужно теперь пометить 4-импульсом (общего вида) каждую внутреннюю линию, в соответствии с направлением стрелки на линии (для нейтральных частиц направление не играет роли).

**(ii)** Для каждой вершины типа  $i$  ввести множитель

$$-i(2\pi)^4 g_i \delta^4 \left( \sum p + \sum q - \sum p' - \sum q' \right), \quad (6.3.2)$$

где суммы 4-импульсов имеют тот же смысл, что и в (6.3.1). Эти  $\delta$ -функции гарантируют сохранение 4-импульса в каждой вершине. Для каждой внешней линии, уходящей вверх наружу, включить множители  $(2\pi)^{-3/2} u_l^*(\mathbf{p}' \sigma' n')$  или  $(2\pi)^{-3/2} v_l(\mathbf{p}' \sigma' n')$  соответственно для стрелки вверх или вниз. Для каждой внутренней линии, с индексами  $m$  и  $l$  в начале и в конце (направление определяется стрелкой), переносящей импульс  $q^\mu$ , включить в подынтегральное выражение по  $q$  коэффициент перед  $e^{iq \cdot x}$  в интеграле для  $-i\Delta_{lm}(x)$ :

$$-i(2\pi)^{-4} P_{lm}(q) / (q^2 + m_l^2 - ie). \quad (6.3.3)$$

Напомним, что для скалярной (анти)частицы с импульсом  $q$  функции  $u, v$  равны просто  $(2q^0)^{-1/2}$ , а полином  $P(q)$  — единице. Для частицы со спином  $1/2$  с импульсом  $p$  и массой  $M$  функции  $u, v$  суть

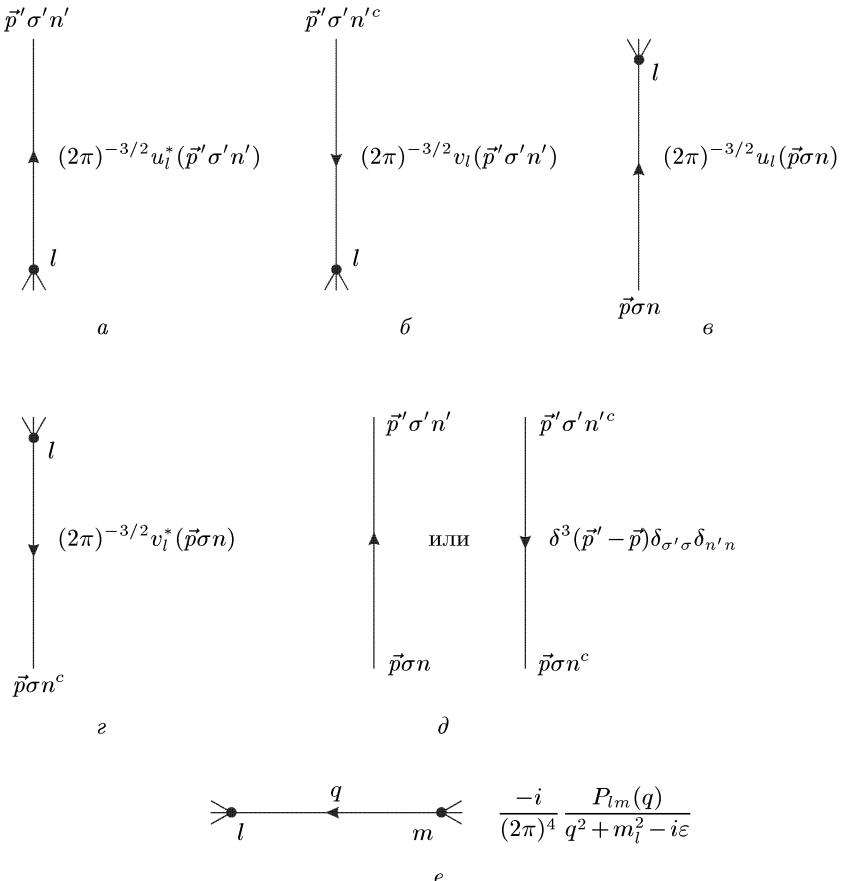


Рис. 6.9. Графическое представление спариваний операторов, возникающее при вычислении  $S$ -матрицы в импульсном представлении. Справа от каждого графического элемента подписан соответствующий ему множитель в выражении, которое интегрируется по импульсам

нормированные дираковские спиноры, описанные в § 5.5, а полином  $P(p)$  есть матрица  $(-i\gamma_\mu p^\mu + M)\beta$ .

**(iii)** Проинтегрировать произведение всех этих множителей по 4-импульсам внутренних линий и просуммировать по индексам  $l, m, \dots$

**(iv)** Сложить результаты для всех возможных фейнмановских диаграмм.

Возможно, понадобится включить добавочные комбинаторные множители, как было разъяснено в пунктах (v), (vi) § 6.1. В конце этого параграфа будут даны некоторые примеры.

Многие из 4-импульсов интегрирования можно устраниТЬ с помощью  $\delta$ -функций от вершин. Поскольку энергия и импульс независимо сохраняются для каждой связной части диаграммы, мы имеем  $C$   $\delta$ -функций в диаграмме с  $C$  связными кусками. Значит, в диаграмме с  $I$  внутренними линиями и  $V$  вершинами число независимых 4-импульсов, не фиксированных  $\delta$ -функциями, равно  $I - (V - C)$ . Очевидно, это выражение равно числу  $L$  независимых петель:

$$L = I - V + C, \quad (6.3.4)$$

которое определяется как наибольшее число внутренних линий, которые можно разрезать, сохранив связность диаграммы, потому что такие и только такие внутренние линии могут обладать независимыми 4-импульсами. Можно считать, что эти импульсы циркулируют в петлях. В частности, *древесная* диаграмма — это граф без петель; после учета всех  $\delta$ -функций импульсов интегрирования в них не остается.

Например, в теории со взаимодействием (6.1.18) элемент  $S$ -матрицы (6.1.27) для фермион-бозонного рассеяния записывается по правилам Фейнмана в импульсном пространстве следующим образом:

$$\begin{aligned} S_{\mathbf{p}_1' \sigma_1' n_1' \mathbf{p}_2' \sigma_2' n_2', \mathbf{p}_1 \sigma_1 n_1 \mathbf{p}_2 \sigma_2 n_2} &= \\ &= \sum_{k' l' m' k l m} (-i)^2 (2\pi)^8 g_{l' m' k'} g_{m l k} u_{l'}^*(\mathbf{p}_1 \sigma_1' n_1') u_l(\mathbf{p}_1 \sigma_1 q_1) \times \\ &\quad \times \int d^4 q \left( -i(2\pi) \right)^{-4} \frac{P_{m' m}(q)}{q^2 + m_m^2 - i\epsilon} \times \\ &\quad \times (2\pi)^{-6} [u_{k'}^*(\mathbf{p}_2' \sigma_2' n_2') u_k(\mathbf{p}_2 \sigma_2 n_2) \delta^4(p_1 + p_2 - q) \delta^4(q - p_{1'} - p_{2'}) + \\ &\quad + u_k^*(\mathbf{p}_2' \sigma_2' n_2') u_{k'}(\mathbf{p}_2 \sigma_2 n_2) \delta^4(p_2 - p_{1'} - q) \delta^4(p_1 - p_{2'} - q)], \end{aligned}$$

где индексы 1, 2 означают соответственно фермионы и бозоны. Интеграл по импульсам здесь тривиален и дает

$$\begin{aligned} S_{\mathbf{p}_1' \sigma_1' n_1' \mathbf{p}_2' \sigma_2' n_2', \mathbf{p}_1 \sigma_1 n_1 \mathbf{p}_2 \sigma_2 n_2} &= i(2\pi)^{-2} \delta^4(p_1 + p_2 - p_1' - p_2') \times \\ &\quad \times \sum_{k' l' m' k l m} g_{l' m' k'} g_{m l k} u_{l'}^*(\mathbf{p}_1 \sigma_1' n_1') u_l(\mathbf{p}_1 \sigma_1 q_1) \times \\ &\quad \times \left[ \frac{P_{m' m}(p_1 + p_2)}{(p_1 + p_2)^2 + m_m^2 - i\epsilon} u_{k'}^*(\mathbf{p}_2 \sigma_2' n_2') u_k(\mathbf{p}_2 \sigma_2 q_2) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{P_{m' m}(p_{2'} - p_1)}{(p_{2'} - p_1)^2 + m_m^2 - i\epsilon} u_k^*(\mathbf{p}_2' \sigma_2' n_2') u_{k'}(\mathbf{p}_2 \sigma_2 q_2) \right]. \quad (6.3.5) \end{aligned}$$

Точно так же для матричного элемента фермион-фермионного рассеяния в той же теории получаем

$$\begin{aligned} S_{\mathbf{p}_1' \sigma_1' n_1' \mathbf{p}_2' \sigma_2' n_2', \mathbf{p}_1 \sigma_1 n_1 \mathbf{p}_2 \sigma_2 n_2} &= i(2\pi)^{-2} \delta^4(p_1 + p_2 - p_1' - p_2') \times \\ &\quad \times \sum_{k' l' m' k l m} g_{m' m k'} g_{l' l k} \frac{P_{k' k}(p_{1'} - p_1)}{(p_{1'} - p_1)^2 + m_k^2 - i\epsilon} \times \end{aligned}$$

$$\times u_{m'}^*(\mathbf{p}'_2 \sigma'_2 n'_2) u_{l'}^*(\mathbf{p}'_1 \sigma'_1 n'_1) u_m(\mathbf{p}_2 \sigma_2 n_2) u_l(\mathbf{p}_1 \sigma_1 n_1) - \\ - [1' \rightleftharpoons 2']. \quad (6.3.6)$$

Из этих результатов очевидна потребность в более компактных обозначениях. Мы можем ввести матрицу констант связи фермион-бозонного взаимодействия:

$$[\Gamma_k]_{lm} \equiv g_{lmk}. \quad (6.3.7)$$

В матричных обозначениях формулы (6.3.5) и (6.3.6) можно записать в виде

$$S_{\mathbf{p}'_1 \sigma'_1 n'_1 \mathbf{p}'_2 \sigma'_2 n'_2, \mathbf{p}_1 \sigma_1 n_1 \mathbf{p}_2 \sigma_2 n_2} = i(2\pi)^{-2} \delta^4(p_1 + p_2 - p'_1 - p'_2) \times \\ \times \sum_{k' k} \left[ \left( u^\dagger(\mathbf{p}'_1 \sigma'_1 n'_1) \Gamma_{k'} \frac{P(p_1 + p_2)}{(p_1 + p_2)^2 + M^2 - i\epsilon} \Gamma_k u(\mathbf{p}_1 \sigma_1 n_1) \right) \times \right. \\ \times u_{k'}^*(\mathbf{p}'_2 \sigma'_2 n'_2) u_k(\mathbf{p}_2 \sigma_2 n_2) + \\ + \left( u^\dagger(\mathbf{p}'_1 \sigma'_1 n'_1) \Gamma_{k'} \frac{P(p_1 - p'_2)}{(p_1 - p'_2)^2 + M^2 - i\epsilon} \Gamma_k u(\mathbf{p}_1 \sigma_1 n_1) \right) \times \\ \left. \times u_k^*(\mathbf{p}'_2 \sigma'_2 n'_2) u_{k'}(\mathbf{p}_2 \sigma_2 q_2) \right] \quad (6.3.8)$$

и

$$S_{\mathbf{p}'_1 \sigma'_1 n'_1 \mathbf{p}'_2 \sigma'_2 n'_2, \mathbf{p}_1 \sigma_1 n_1 \mathbf{p}_2 \sigma_2 n_2} = i(2\pi)^{-2} \delta^4(p_1 + p_2 - p'_1 - p'_2) \times \\ \times \sum_{k' k} \frac{P_{k' k}(p_{1'} - p_1)}{(p_{1'} - p_1)^2 + m_k^2 - i\epsilon} \times \\ \times (u^\dagger(\mathbf{p}'_2 \sigma'_2 n'_2) \Gamma_{k'} u(\mathbf{p}_2 \sigma_2 n_2)) (u^\dagger(\mathbf{p}'_1 \sigma'_1 n'_1) \Gamma_k u(\mathbf{p}_1 \sigma_1 n_1)) - \\ - [1' \rightleftharpoons 2'], \quad (6.3.9)$$

где  $M^2$ ,  $m^2$  — диагональные массовые матрицы фермионов и бозонов. Общее правило состоит в том, что в матричных обозначениях нужно перемножить коэффициенты, матрицы взаимодействия и пропагаторы в порядке *назад*, против стрелок на диаграмме. В тех же обозначениях матричный элемент для бозон-бозонного рассеяния в той же теории записывается в виде суммы по однопетлевым диаграммам на рис. 6.7:

$$S_{\mathbf{p}'_1 \sigma'_1 n'_1 \mathbf{p}'_2 \sigma'_2 n'_2, \mathbf{p}_1 \sigma_1 n_1 \mathbf{p}_2 \sigma_2 n_2} = -(2\pi)^{-6} \delta^4(p_1 + p_2 - p'_1 - p'_2) \times \\ \times \sum_{k_1 k_2 k'_1 k'_2} u_{k'_1}^*(\mathbf{p}_1, \sigma'_1, n'_1) u_{k'_2}^*(\mathbf{p}'_2, \sigma'_2, n'_2) u_{k_1}(\mathbf{p}_1, \sigma_1, n_1) u_{k_2}(\mathbf{p}_2, \sigma_2, n_2) \times \\ \times \int d^4 q \text{ Tr} \left\{ \Gamma_{k'_2} \frac{P(q)}{q^2 + M^2 - i\epsilon} \Gamma_{k'_1} \frac{P(q + p'_1)}{(q + p'_1)^2 + M^2 - i\epsilon} \times \right. \\ \times \Gamma_{k_1} \frac{P(q + p'_1 - p_1)}{(q + p'_1 - p_1)^2 + M^2 - i\epsilon} \Gamma_{k_2} \frac{P(q - p'_2)}{(q - p'_2)^2 + M^2 - i\epsilon} + \dots, \quad (6.3.10)$$

где многоточие в последней строке обозначает слагаемые, получаемые перестановкой бозонов  $1'$ ,  $2'$  и  $2$ . Знак “ $-$ ” в первой части происходит от фермионной петли. Обратим внимание, что после устранения  $\delta$ -функций здесь остается лишь один интеграл по 4-импульсам, как и должно быть для однопетлевой диаграммы. Мы научимся считать подобные интегралы в гл. 11.

Проиллюстрируем наши рассуждения конкретным примером. Рассмотрим теорию, содержащую дираковское поле  $\psi(x)$  с массой  $M$  и псевдоскалярное поле  $\phi(x)$  массы  $m$ , которые взаимодействуют с гамильтонианом  $-ig\bar{\phi}\gamma_5\psi$  (множитель  $-i$  необходим, чтобы гамильтониан был эрмитов при вещественной константе  $g$ ). Вспоминаем, что для скалярного поля многочлен  $P(q) = 1$ , а для спинорного поля  $-P(q) = (-i\gamma \cdot q + M)\beta$ . Кроме того, для скаляра с энергией  $E$  множитель  $u = (2E)^{-1/2}$ , а для спинорного поля нужно брать нормированный дираковский спинор (§ 5.5). Формулы (6.3.8)–(6.3.10) дают вклад наименшего порядка (с учетом только связных диаграмм) для всех трех типов рассеяния частицы на частице:

$$\begin{aligned} S_{\mathbf{p}'_1\sigma'_1\mathbf{p}'_2,\mathbf{p}_1\sigma_1\mathbf{p}_2} &= -i(2\pi)^{-2}g^2(4E'_2E_2)^{-1/2}\delta^4(p_1 + p_2 - p'_1 - p'_2) \times \\ &\times \left[ \left( \bar{u}(\mathbf{p}'_1\sigma'_1)\gamma_5 \frac{-i\gamma_\mu(p_1 + p_2)^\mu + M}{(p_1 + p_2)^2 + M^2 - i\epsilon} \gamma_5 u(\mathbf{p}_1\sigma_1) \right) + \right. \\ &\quad \left. + \left( \bar{u}(\mathbf{p}'_1\sigma'_1)\gamma_5 \frac{-i\gamma_\mu(p_1 - p'_2)^\mu + M}{(p_1 - p'_2)^2 + M^2 - i\epsilon} \gamma_5 u(\mathbf{p}_1\sigma_1) \right) \right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_{\mathbf{p}'_1\sigma'_1\mathbf{p}'_2\sigma'_2,\mathbf{p}_1\sigma_1\mathbf{p}_2\sigma_2} &= -i(2\pi)^{-2}g^2\delta^4(p_1 + p_2 - p'_1 - p'_2) \times \\ &\times (\bar{u}(\mathbf{p}'_2\sigma'_2)\gamma_5 u(\mathbf{p}_2\sigma_2))(\bar{u}(\mathbf{p}'_1\sigma'_1)\gamma_5 u(\mathbf{p}_1\sigma_1)) \times \\ &\times \frac{1}{(p_1' - p_1)^2 + m^2 - i\epsilon} - [1' \Rightarrow 2'], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_{\mathbf{p}'_1\mathbf{p}'_2,\mathbf{p}_1\mathbf{p}_2} &= -i(2\pi)^{-6}g^4(16E_1E_2E'_2E'_2)^{-1/2}\delta^4(p_1 + p_2 - p'_1 - p'_2) \times \\ &\times \int d^4q \text{ Tr} \left\{ \gamma_5 \frac{-i\gamma_\mu q^\mu + M}{q^2 + M^2 - i\epsilon} \gamma_5 \frac{-i\gamma_\mu(q + p'_1)^\mu + M}{(q + p'_1)^2 + M^2 - i\epsilon} \times \right. \\ &\times \left. \gamma_5 \frac{-i\gamma_\mu(q + p'_1 - p_1)^\mu + M}{(q + p'_1 - p_1)^2 + M^2 - i\epsilon} \gamma_5 \frac{-i\gamma_\mu(q - p'_2)^\mu + M}{(q - p'_2)^2 + M^2 - i\epsilon} \right\} + \dots, \end{aligned}$$

а многоточие в последней формуле означает сумму по перестановкам частиц  $2$ ,  $1'$ ,  $2'$ . Множители  $\beta$  в числителях пропагаторов были использованы для замены  $u^\dagger$  на  $\bar{u}$ .

\* \* \*

Существует полезный топологический результат, выражающий закон сохранения линий. Мы можем считать, что все внешние и внутренние линии создаются в вершинах и уничтожаются парами в серединах внутренних линий, или уходят из диаграммы в виде внешних

линий (это не имеет отношения к направлениям стрелок). Приравнивая число создаваемых и уничтожаемых линий, получаем

$$2I + E = \sum_i n_i V_i, \quad (6.3.11)$$

где  $I$  и  $E$  — количества внутренних и внешних линий,  $V_i$  — число вершин типа  $i$ ,  $n_i$  — количество линий, выходящих из вершины типа  $i$ . Эта формула также верна и для каждого типа полей по отдельности. В частности, если все взаимодействия характеризуются одним и тем же числом  $n_i = n$ , получается

$$2I + E = nV, \quad (6.3.12)$$

где  $V$  — полное число вершин. В таком случае можно исключить число  $I$  из уравнений (6.3.4) и (6.3.11), и для связной ( $C = 1$ ) диаграммы получаем число вершин

$$V = \frac{2L + E - 2}{n - 2}. \quad (6.3.13)$$

Например, в случае трилинейного взаимодействия диаграмма для рассеяния ( $E = 4$ ) с  $L = 0, 1, 2, \dots$  петель имеет  $V = 2, 4, 6, \dots$  вершин. Вообще, разложение по степеням константы связи сопровождается ростом числа петель в диаграммах.

## § 6.4. Вычисления вне массовой оболочки

В диаграммах Фейнмана для любого  $S$ -матричного элемента все внешние линии *лежат на массовой оболочке* (on-shell), т.е. для частицы массой  $m$  ее 4-импульс ограничен соотношением  $p_\mu p^\mu = -m^2$ . Однако зачастую бывает нужно рассматривать также диаграммы с произвольными 4-импульсами внешних частиц вне массовой оболочки (off-shell). Например, такую диаграмму можно рассматривать как часть большей диаграммы. В частности, петля на внутренней линии в диаграмме Фейнмана может рассматриваться как диаграмма с двумя внешними линиями, обе из которых не лежат на массовой оболочке.

Естественно, что если мы имеем результат для произвольных импульсов, несложно “посадить” частицы на массовую оболочку, положив нулевую компоненту входящего 4-импульса  $p^\mu$  равной

$$p^0 = +\sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}$$

для частицы в начальном состоянии или

$$p^0 = -\sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}$$

для частицы в конечном состоянии и добавив правильные множители внешних линий —  $(2\pi)^{-3/2} u_l$  и  $(2\pi)^{-3/2} v_l^*$  для начальных

(анти)частиц,  $(2\pi)^{-3/2}u_l^*$  и  $(2\pi)^{-3/2}v_l$  для конечных (анти)частиц. В действительности, в формулировке квантовой теории поля через континуальный интеграл (гл. 9) оказывается проще вывести правила Фейнмана для произвольных внешних импульсов, а затем получить  $S$ -матричные элементы, посадив внешние 4-импульсы на массовые оболочки частиц.

Диаграммы Фейнмана с произвольным импульсом являются частным случаем более широкого обобщения — правил Фейнмана с учетом различных внешних полей. Допустим, мы добавили в гамильтониан сумму слагаемых с разными внешними полями  $\epsilon_a(x)$ , так что взаимодействие  $V(t)$ , входящее в разложение Дайсона (3.5.10) для  $S$ -матрицы, заменяется на

$$V_\epsilon(t) = V(t) + \sum_a \int d^3x \epsilon_a(\mathbf{x}, t) o_a(\mathbf{x}, t). \quad (6.4.1)$$

Токи  $o_a(t)$  зависят от времени обычным образом в представлении взаимодействия:

$$o_a(t) = \exp(iH_0t)o_a(0)/\exp(-iH_0t), \quad (6.4.2)$$

но в остальном это произвольные операторы. Для любого заданного перехода  $\alpha \rightarrow \beta$   $S$ -матрица становится функционалом  $S_{\alpha\beta}[\epsilon]$  от  $c$ -числовых функций  $\epsilon_a(t)$ . Правила Фейнмана для вычисления этого функционала даются очевидным обобщением обычных правил. Кроме обычных вершин, соответствующих взаимодействию  $V(t)$ , появляются дополнительные вершины: если  $o_a(x)$  есть произведение  $n_a$  полей, то в вершину, соответствующую  $o_a$ , должно входить  $n_a$  линий соответствующего сорта, а вклад этой вершины в координатном представлении равен произведению  $-i\epsilon_a(x)$  со всеми числовыми множителями в  $o_a(x)$ . Отсюда следует, что  $r$ -я вариационная производная функционала  $S_{\alpha\beta}[\epsilon]$  по полям  $\epsilon_a(x), \epsilon_b(y), \dots$  при  $\epsilon = 0$  дается диаграммами в координатном представлении с  $r$  дополнительными вершинами, к которым приставлены  $n_a, n_b, \dots$  внутренних линий в отсутствие внешних линий. Эти вершины отмечены координатами  $x, y, \dots$ , по которым не производится интегрирование; каждая из этих вершин дает вклад, равный произведению  $-i$  со всеми числовыми множителями из соответствующего тока  $o_a$ .

В частности, если все эти токи линейны по полям, т.е.

$$V_\epsilon(t) = V(t) + \sum_l \int d^3x \epsilon_l(x, t) \psi_l(x, t),$$

то  $r$ -я вариационная производная функционала  $S_{\alpha\beta}[\epsilon]$  по полям  $\epsilon_l(x), \epsilon_m(y), \dots$  при  $\epsilon = 0$  дается диаграммами в координатном представлении с  $r$  дополнительными вершинами, которые отмечены координатами  $x, y, \dots$ ; в каждую из них входит одна внутренняя линия типа  $l, m, \dots$  Эти линии можно считать внешними линиями, не лежащими

на массовой оболочке, с той лишь разницей, что их вклад в матричный элемент равен не коэффициентной функции (как  $(2\pi)^{-3/2}u_l(p, \sigma)e^{ipx}$  или  $(2\pi)^{-3/2}u_l^*(p, \sigma)e^{-ipx}$ ), а пропагатору, со множителем  $-i$ , который происходит от вершины в конце линии. Диаграмму Фейнмана в импульсном пространстве с частицами в состояниях  $\alpha, \beta$  на массовой оболочке и  $r$  дополнительными внешними линиями типов  $l, m, \dots$ , несущими импульсы  $p, p', \dots$ , мы получим из вариационной производной

$$\left[ \frac{\delta^r S_{\beta\alpha}[\epsilon]}{\delta\epsilon_l(x)\delta\epsilon_m(y)\dots} \right]_{\epsilon=0},$$

удалив пропагаторы от каждой внешней линии вне массовой оболочки, выполнив необходимые преобразования Фурье и добавив все коэффициентные функции  $u_l, u_l^*$  и т.п. и множитель  $(-i)^r$ .

В ряде случаев может пригодиться простое соотношение между суммой вкладов от всех диаграмм теории возмущений для произвольной амплитуды вне массовой оболочки и матричным элементом, взятым между собственными состояниями полного гамильтонiana, от хронологического произведения соответствующих операторов в представлении Гейзенберга. Это соотношение дается теоремой [3], которая утверждает, что с учетом всех порядков теории возмущений<sup>1)</sup>

$$\left[ \frac{\delta^r S_{\beta\alpha}[\epsilon]}{\delta\epsilon_a(x)\delta\epsilon_b(y)\dots} \right]_{\epsilon=0} = (\Psi_\beta^-, T\{-iO_a(x), -iO_b(y)\dots\}\Psi_a^+), \quad (6.4.3)$$

где  $O_a(x)$  — гейзенберговские операторы для  $o_a(x)$

$$O_a(\mathbf{x}, t) = \exp(iHt)o_a(x, 0)\exp(-iHt) = \Omega(t)a_a(x, t)\Omega^{-1}(t), \quad (6.4.4)$$

$$\Omega(t) \equiv e^{iHt}e^{-iH_0t}, \quad (6.4.5)$$

а  $\Psi_\beta^+$  и  $\Psi_\beta^-$  — начальное (“in”) и конечное (“out”) состояния полного гамильтонiana  $H$ .

Покажем это. Из уравнения (3.5.10) легко видеть, что левая часть уравнения (6.4.3) равна

$$\begin{aligned} \left[ \frac{\delta^r S[\epsilon]}{\delta\epsilon_{a_1}(x_1)\dots\delta\epsilon_{a_r}(x_r)} \right]_{\epsilon=0} &= \sum_{N=0}^{\infty} \frac{(-i)^{N+r}}{N!} \int_{-\infty}^{\infty} d\tau_1 \dots d\tau_N \times \\ &\times (\Phi_\beta, T\{V(\tau_1)\dots V(\tau_N)o_{a_1}(x_1)\dots o_{a_r}(x_r)\}\Phi_a). \end{aligned} \quad (6.4.6)$$

Для определенности положим  $x_1^0 \geq x_2^0 \geq \dots \geq x_r^0$ . Теперь можно обозначить через  $\tau_{01}, \dots, \tau_{0N_0}$  все переменные интегрирования  $\tau$ , большие  $x_1^0$ , через  $\tau_{11}, \dots, \tau_{1N_1}$  — все  $\tau$  между  $x_1^0$  и  $x_2^0$ , и т.д., наконец,

---

<sup>1)</sup> Для единственного оператора  $O$  это есть вариант принципа действия Швингера [4].

через  $\tau_{r1}, \dots, \tau_{rN_r}$  — все  $\tau$ , меньшие  $x_r^0$ . Уравнение (6.4.6) принимает вид

$$\begin{aligned} \left[ \frac{\delta^r S[\epsilon]}{\delta \epsilon_{a_1}(x_1) \dots \delta \epsilon_{a_r}(x_r)} \right]_{\epsilon=0} &= \sum_{N=0}^{\infty} \frac{(-i)^{N+r}}{N!} \sum_{N_0 N_1 \dots N_r} \frac{N! \delta_{N, N_0 + M_1 + \dots + N_r}}{N_0! N_1! \dots N_r!} \times \\ &\times \int_{x_1^0}^{\infty} d\tau_{01} \dots d\tau_{0N_0} \int_{x_2^0}^{x_1^0} d\tau_{11} \dots d\tau_{1N_1} \dots \int_{-\infty}^{x_r^0} d\tau_{r1} \dots d\tau_{rN_r} \times \\ &\times (\Phi_\beta, T\{V(\tau_{01}) \dots V(\tau_{0N_0})\} o_{a_1}(x_1) T\{V(\tau_{11}) \dots V(\tau_{1N_1})\} o_{a_2}(x_2) \dots \times \\ &\quad \times \dots o_{a_r}(x_r)) T\{V(\tau_{r1}) \dots V(\tau_{rN_r})\} \Phi_\alpha). \end{aligned}$$

Множитель  $N!/N_0! N_1! \dots N_r!$  — это число разбиений  $N$  переменных  $\tau$  на  $r+1$  группу, каждая из которых содержит  $N_0, N_1, \dots, N_r$  из этих  $\tau$ . Вместо того чтобы суммировать по  $N_0, N_1, \dots, N_r$ , связанным условием  $N_0 + N_1 + \dots + N_r = N$ , а затем суммировать по  $N$ , мы можем просто независимо суммировать по  $N_0, N_1, \dots, N_r$ , заменяя  $N$  во множителе  $(-i)^N$  на сумму  $N_0 + N_1 + \dots + N_r$ . Это дает

$$\begin{aligned} \left[ \frac{\delta^r S[\epsilon]}{\delta \epsilon_{a_1}(x_1) \dots \delta \epsilon_{a_r}(x_r)} \right]_{\epsilon=0} &= (-i)^r (\Phi_\beta, U(\infty, x_1^0) o_{a_1}(x_1) \times \\ &\quad \times U(x_1^0, x_2^0) o_{a_2}(x_2) U(x_2^0, x_3^0) \dots o_{a_r}(x_r) U(x_r^0, -\infty) \Phi_\alpha), \end{aligned} \quad (6.4.7)$$

где

$$u(t', t) = \sum_{N=0}^{\infty} \frac{(-i)^N}{N!} \int_t^{t'} d\tau_1 \dots d\tau_N T\{V(\tau_1) \dots V(\tau_n)\}. \quad (6.4.8)$$

Оператор  $U(t', t)$  удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\frac{d}{dt'} U(t', t) = -iV(t') U(t', t) \quad (6.4.9)$$

с очевидными начальными условиями

$$U(t, t) = 1. \quad (6.4.10)$$

Оно имеет решение

$$U(t', t) = \exp(iH_0 t') \exp(-iH(t' - t)) \exp(-iH_0 t) = \Omega^{-1}(t') \Omega(t), \quad (6.4.11)$$

где  $\Omega$  дается формулой (6.4.5). Подставляя (6.4.11) в (6.4.7) и используя (6.4.4), получаем

$$\begin{aligned} \left[ \frac{\delta S[\epsilon]}{\delta \epsilon_{a_1}(x_1) \dots \delta \epsilon_{a_r}(x_r)} \right]_{\epsilon=0} &= \\ &= (-i)^r (\Omega(\infty) \Phi_\beta, O_{a_1}(x_1) \dots O_{a_r}(x_r) \Omega(-\infty) \Phi_\alpha). \end{aligned} \quad (6.4.12)$$

При выводе этого результата мы предполагали, что  $x_1^0 \geq x_2^0 \geq \dots \geq x_r^0$ , а потому могли заменить произведение операторов в правой части на хронологическое произведение

$$\left[ \frac{\delta S[\epsilon]}{\delta \epsilon_{a_1}(x_1) \dots \delta \epsilon_{a_r}(x_r)} \right]_{\epsilon=0} = (-i)^r (\Omega(\infty) \Phi_\beta, T\{O_{a_1}(x_1) \dots O_{a_r}(x_r)\} \Omega(-\infty) \Phi_\alpha). \quad (6.4.13)$$

Но теперь обе части уравнения полностью симметричны (или антисимметричны для фермионов) по  $a$  и по  $x$ , а значит соотношение выполняется при любом порядке времен  $x_1^0 \dots x_r^0$ . Кроме того, в § 3.1 мы показали, что (в смысле уравнения (3.1.12))

$$\Psi_\beta^\pm = \Omega(\mp\infty) \Phi_\beta. \quad (6.4.14)$$

Следовательно, формула (6.4.13) представляет собой желаемый результат (6.4.3).

## Задачи

**1.** Рассмотрите теорию вещественного скалярного поля  $\phi$  со взаимодействием (в представлении взаимодействия)  $V = g \int d^3x \phi(x)^3 / 3!$ . Вычислите связные матричные элементы для скаляр-скалярного рассеяния с точностью до второго порядка по  $g$ , вычислив все интегралы. Вычислите затем дифференциальное сечение скаляр-скалярного рассеяния в системе центра масс.

**2.** Рассмотрите теорию с нейтральным скалярным полем  $\phi(x)$  бозона  $B$  и комплексным дираковским полем  $\psi(x)$  фермиона  $F$ , со взаимодействием (в представлении взаимодействия)

$$V = ig \int d^3x \bar{\psi}(x) \gamma_5 \psi(x) \phi(x).$$

Нарисуйте все связные диаграммы порядка  $g^2$  и вычислите все соответствующие матричные элементы для процессов  $F^c + B \rightarrow F^c + B$ ,  $F + F^c \rightarrow F + F^c$ ,  $F^c + F \rightarrow B + B$ . Здесь  $F^c$  — античастица для  $F$ . Вычислите все интегралы.

**3.** Рассмотрите теорию вещественного скалярного поля  $\phi(x)$ , со взаимодействием  $V = g \int d^3x \phi(x)^4 / 4!$ . Вычислите матричный элемент для скаляр-скалярного рассеяния в первом порядке по  $g$ , а затем получите дифференциальное сечение скаляр-скалярного рассеяния в системе центра масс. Найдите поправки второго порядка, записав результат в виде одного интеграла по 4-импульсу, вычислив все интегралы по координатам.

**4.** Каков вклад в диаграммы Фейнмана от свертки производной  $\partial_\mu \psi_l(x)$  дираковского поля с сопряженным полем  $\psi_m^\dagger(y)$ ?

5. С помощью теоремы § 6.4 напишите выражения для вакуумных средних операторов в представлении Гейзенберга  $(\Psi_0, \Phi(x)\Psi_0)$  и  $(\Psi_0, T\{\Phi(x), \Phi(y)\}\Psi_0)$  для теории из задачи 1, с точностью до порядков  $g$  и  $g^2$  соответственно.

## Литература

1. *Dyson F.J.* // Phys. Rev. **75**, 486, 1736 (1949).
2. Формальное утверждение этого результата известно под названием *теоремы Вика*, см. *Wick G.C.* // Phys. Rev. **80**, 268 (1950).
3. Мне неизвестно, кто впервые доказал эту теорему. Она была известна в начале 1950-х годов нескольким теоретикам, включая М. Гелл-Манна и Ф.Э. Лоу.
4. *Schwinger J.* // Phys. Rev. **82**, 914 (1951).

## Г л а в а 7

# КАНОНИЧЕСКИЙ ФОРМАЛИЗМ

С тех пор как в конце 1920-х годов в работах Борна, Дирака, Ферми, Гейзенберга, Йордана и Паули родилась квантовая теория поля, ее развитие исторически связано с каноническим формализмом, причем настолько сильно, что сейчас принято начинать рассмотрение любой задачи с постулирования лагранжиана и применения к нему правил канонического квантования. Именно этот подход применяется в большинстве книг по квантовой теории поля. Однако сам по себе исторический прецедент не может быть убедительной причиной для использования этого формализма. Если мы бы построили квантовую теорию поля, приводящую к физически удовлетворительной  $S$ -матрице, разве волновало бы нас, можно ли вывести ее посредством канонического квантования некоторого лагранжиана?

Этот вопрос довольно спорный, поскольку, как мы увидим в § 7.1, все самые известные квантовые теории поля описывают канонические системы, и их легко записать в лагранжевой формулировке. Однако не существует доказательства того, что любая “разумная” квантовая теория поля может быть сформулирована в такой форме. И даже если может, это не объясняет само по себе, почему мы должны *предпочесть* лагранжев формализм для построения различных квантовых теорий поля.

Преимущество лагранжева формализма заключается в том, что с его помощью легко построить теорию, обладающую лоренц-инвариантностью и другими симметриями: классическая лоренц-инвариантная система после канонического квантования дает квантовую лоренц-инвариантную систему. Скоро мы увидим, что такая теория позволяет построить подходящие квантовомеханические операторы, удовлетворяющие коммутационным соотношениям алгебры Пуанкаре, и, следовательно, приводит к лоренц-инвариантной  $S$ -матрице.

Это не так уж тривиально. В предыдущей главе мы видели, что в теориях с производными во взаимодействии или со спином  $j \geq 1$  недостаточно просто взять гамильтониан взаимодействия как интеграл по пространству от скалярной плотности взаимодействия; необходимо добавить неинвариантные слагаемые в плотность взаимодействия, чтобы компенсировать нековариантные вклады в пропагатор. Канонический формализм со скалярным лагранжианом автоматически приводит к таким дополнительным членам. Позднее, когда мы придем к неабелевым калибровочным теориям в т. II, это станет необходимостью; попытки угадать вид гамильтониана в таких теориях без-

надежны, если не начинать с лоренц- и калибровочно-инвариантной плотности лагранжевой функции.

### § 7.1. Канонические переменные

В этом параграфе мы покажем, что все построенные нами квантовые теории поля удовлетворяют правилам коммутации и уравнениям движения гамильтоновой версии канонического формализма. Именно гамильтонов формализм необходим для вычисления  $S$ -матрицы (операторным методом или через континуальное интегрирование), но не всегда легко выбрать гамильтониан, который приведет к лоренц-инвариантной  $S$ -матрице. В этой главе мы будем исходить из лагранжевой формулировки канонического формализма и выводить с ее помощью физически удовлетворительные гамильтонианы. Цель этого параграфа — определить в различных теориях канонические поля и сопряженные им, понять, как выделять слагаемые, отвечающие свободным полям в лагранжиане, а попутно убедиться в том, что канонический формализм действительно пригоден для описания реалистичных теорий.

Сначала покажем, что свободные поля, построенные в гл. 5, автоматически образуют систему квантовых операторов  $q^n(\mathbf{x}, t)$  и канонически им сопряженных операторов  $p_n(\mathbf{x}, t)$ , которые подчиняются известным (анти)коммутационным соотношениям

$$[q^n(\mathbf{x}, t), p_{\bar{n}}(\mathbf{y}, t)]_{\mp} = i\delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y})\delta_{\bar{n}}^n, \quad (7.1.1)$$

$$[q^n(\mathbf{x}, t), q^{\bar{n}}(\mathbf{y}, t)]_{\mp} = 0, \quad (7.1.2)$$

$$[p_n(\mathbf{x}, t), p_{\bar{n}}(\mathbf{y}, t)]_{\mp} = 0, \quad (7.1.3)$$

где индекс  $\mp$  означает коммутатор, если хотя бы одна из частиц — бозон, и антicomмутатор, если обе частицы — фермионы. К примеру, вещественное скалярное поле  $\phi(\mathbf{x})$  для нейтральной (зарядово-самосопряженной) бесспиновой частицы, согласно результатам § 5.2, подчиняется коммутационному соотношению

$$[\phi(x), \phi(y)]_- = \Delta(x - y),$$

где  $\Delta$  есть функция

$$\Delta(x) \equiv \int \frac{d^3k}{2k^0(2\pi)^3} [e^{ik \cdot x} - e^{-ik \cdot x}],$$

где  $k^0 \equiv \sqrt{\mathbf{k}^2 + m^2}$ . Заметим, что

$$\Delta(\mathbf{x}, 0) = 0, \quad \dot{\Delta}(\mathbf{x}, 0) = -i\delta^3(\mathbf{x})$$

(точкой обозначается производная по времени  $x^0$ ). Теперь легко видеть, что поле и его производная по времени, взятые в один момент

времени  $t$ , коммутируют по правилам

$$[\phi(\mathbf{x}, t), \dot{\phi}(\mathbf{y}, t)]_- = i\delta^3(\mathbf{x}, \mathbf{y}), \quad (7.1.4)$$

$$[\phi(\mathbf{x}, t), \phi(\mathbf{y}, t)]_- = 0, \quad (7.1.5)$$

$$[\dot{\phi}(\mathbf{x}, t), \dot{\phi}(\mathbf{y}, t)]_- = 0. \quad (7.1.6)$$

Следовательно, можно определить канонические переменные

$$q(\mathbf{x}, t) \equiv \phi(\mathbf{x}, t), \quad p(\mathbf{x}, t) \equiv \dot{\phi}(\mathbf{x}, t), \quad (7.1.7)$$

которые подчиняются каноническим коммутационным соотношениям (7.1.1)–(7.1.3).

Для комплексного скалярного поля бессpinовой частицы (с нетождественной античастицей) правила коммутации таковы:

$$[\phi(x), \phi^\dagger(y)]_- = \Delta(x - y), \quad [\phi(x), \phi(y)]_- = 0.$$

Значит, канонические переменные свободных частиц, в данном случае комплексные операторы, можно ввести так:

$$q(\mathbf{x}, t) \equiv \phi(\mathbf{x}, t), \quad (7.1.8)$$

$$p(\mathbf{x}, t) \equiv \dot{\phi}^\dagger(\mathbf{x}, t), \quad (7.1.9)$$

Эквивалентно можно написать, что комплексное поле

$$\phi \equiv (\phi_1 + i\phi_2)/\sqrt{2},$$

где  $\phi_k$ ,  $k = 1, 2$ , — эрмитовы, и тогда канонические переменные

$$q^k(\mathbf{x}, t) = \phi_k(\mathbf{x}, t), \quad (7.1.10)$$

$$p_k(\mathbf{x}, t) = \dot{\phi}_k(\mathbf{x}, t), \quad (7.1.11)$$

удовлетворяют коммутационным соотношениям (7.1.1)–(7.1.3).

Для вещественного векторного поля частицы со спином 1 коммутационные соотношения получены в § 5.3 в виде

$$[v^\mu(x), v^\nu(y)]_- = \left[ \eta^{\mu\nu} - \frac{\partial^\mu \partial^\nu}{m^2} \right] \Delta(x - y).$$

Мы пишем  $v^\mu$  вместо  $V^\mu$ , поскольку будем использовать большие буквы для операторов в представлении Гейзенберга. В данном случае канонические переменные можно выбрать так:

$$q^i(\mathbf{x}, t) = v^i(\mathbf{x}, t), \quad (7.1.12)$$

$$p_i(\mathbf{x}, t) = \dot{v}^i(\mathbf{x}, t) + \frac{\partial v^0(\mathbf{x}, t)}{\partial x^i}, \quad (7.1.13)$$

где  $i = 1, 2, 3$ . Читатель может проверить, что (7.1.12) и (7.1.13) подчиняются соотношениям (7.1.1)–(7.1.3). Уравнения движения (5.3.36) и (5.3.38) совместно с уравнением (7.1.13) позволяют выразить  $v^0$  в терминах других переменных в виде

$$v^0 = m^{-2} \nabla \cdot \mathbf{p}, \quad (7.1.14)$$

так что  $v^0$  не считается одной из канонических координат  $q$ . Обобщение на случай комплексных векторных полей делается так же, как для скалярных.

Для дираковского поля не-майорановской частицы со спином  $1/2$  в § 5.6 получены антисимметрические коммутаторы

$$[\psi_n(x), \psi_{\bar{n}}^\dagger(y)]_+ = [(-\gamma^\mu \partial_\mu + m)\beta]_{n,\bar{n}} \Delta(x - y)$$

и

$$[\psi_n(x), \psi_{\bar{n}}(y)]_+ = 0.$$

Здесь было бы неправильно считать независимыми каноническими переменными  $\psi_n$  и  $\psi_n^\dagger$ , поскольку их одновременный антисимметрический коммутатор не равен нулю. Вместо этого обычно определяют

$$q^n(x) \equiv \psi_n(x), \quad (7.1.15)$$

$$p_n(x) \equiv i\psi_n^\dagger(x) \quad (7.1.16)$$

Эти величины удовлетворяют каноническим соотношениям (7.1.1)–(7.1.3).

Для любой системы операторов, подчиняющихся (анти)коммутационным соотношениям вида (7.1.1)–(7.1.3), можно определить квантовомеханическую функциональную производную: для произвольного бозонного функционала  $F[q(t), p(t)]$  от полей  $q^n(\mathbf{x}, t)$ ,  $p_n(\mathbf{x}, t)$  в фиксированный момент  $t$ , определим<sup>1)</sup>

$$\frac{\delta F[q(t), p(t)]}{\delta q^n(\mathbf{x}, t)} \equiv i[p_n(\mathbf{x}, t), F[q(t), p(t)]], \quad (7.1.17)$$

$$\frac{\delta F[q(t), p(t)]}{\delta p_n(\mathbf{x}, t)} \equiv i[F[q(t), p(t)], q^n(\mathbf{x}, t)]. \quad (7.1.18)$$

Это определение мотивировано тем, что если в функционале

$$F[q(t), p(t)]$$

все  $q$ -поля стоят слева от всех  $p$ -полей, то формулы (7.1.17)–(7.1.18) являются соответственно левыми и правыми производными по  $q^n$  и  $p_n$ . Это значит, что для произвольной  $c$ -числовой<sup>2)</sup> вариации  $\delta q$ ,  $\delta p$

<sup>1)</sup> Здесь мы ввели обозначение, которое будем применять в дальнейшем: если  $f(x, y)$  есть функция от двух классов переменных, обозначаемых вкупе  $x$  и  $y$ , то  $F[f(y)]$  означает функционал, зависящий от значений  $f(x, y)$  при всех  $x$  при фиксированном  $y$ . Под словом *бозонный* подразумевается, что функционал содержит четное число фермионных полей.

<sup>2)</sup> В случае бозонов или фермионов величины  $\delta q^n$  и  $\delta p_n$  соответственно коммутируют или антисимметрически коммутируют со всеми фермионными операторами и коммутируют со всеми бозонными операторами.

имеем

$$\delta F[q(t), p(t)] = \int d^3x \sum_n \left( \delta q^n(\mathbf{x}, t) \frac{\delta F[q(t), p(t)]}{\delta q^n(\mathbf{x}, t)} + \frac{\delta F[q(t), p(t)]}{\delta p_n(\mathbf{x}, t)} \delta p_n(\mathbf{x}, t) \right).$$

Для функционалов более общего вида нам нужны определения (7.1.17) и (7.1.18), чтобы учесть различные знаки и одновременные коммутаторы.

В частности,  $H_0$  есть генератор трансляций по времени для свободных частиц, в том смысле, что

$$q^n(\mathbf{x}, t) = \exp(iH_0t)q^n(\mathbf{x}, 0)\exp(-iH_0t), \quad (7.1.19)$$

$$p_n(\mathbf{x}, t) = \exp(iH_0t)p_n(\mathbf{x}, 0)\exp(-iH_0t), \quad (7.1.20)$$

так что операторы свободных частиц зависят от времени по законам

$$\dot{q}^n(\mathbf{x}, t) = i[H_0, q^n(\mathbf{x}, t)] = \frac{\delta H_0}{\delta p_n(\mathbf{x}, t)}, \quad (7.1.21)$$

$$\dot{p}_n(\mathbf{x}, t) = -i[p_n(\mathbf{x}, t), H_0] = -\frac{\delta H_0}{\delta q^n(\mathbf{x}, t)}. \quad (7.1.22)$$

В этих формулах мы узнаем динамические уравнения Гамильтона.

Гамильтониан свободной частицы, как обычно, равен

$$H_0 = \sum_{n,\sigma} \int d^3k a^\dagger(\mathbf{k}, \sigma, n) a(\mathbf{k}, \sigma, n) \sqrt{\mathbf{k}^2 + m_n^2}. \quad (7.1.23)$$

Он может быть переписан в терминах полей  $q, p$  в момент  $t$ . Например, несложно заметить, что для вещественного скалярного поля формула (7.1.13) сводится (с точностью до постоянного слагаемого) к функционалу

$$H_0 = \int d^3x \left[ \frac{1}{2} p^2 + \frac{1}{2} (\nabla q)^2 + \frac{1}{2} m^2 q^2 \right]. \quad (7.1.24)$$

Более точно, используя (7.1.7) и фурье-представление скалярного поля  $\phi$ , приводим (7.1.24) к виду

$$H_0 = \frac{1}{2} \int d^3k k^0 [a(\mathbf{k}), a^\dagger(\mathbf{k})]_+ = \int d^3k k^0 \left( a^\dagger(\mathbf{k}) a(\mathbf{k}) + \frac{1}{2} \delta^3(\mathbf{k} - \mathbf{k}) \right), \quad (7.1.25)$$

что совпадает с формулой (7.1.23), за исключением бесконечного постоянного слагаемого. Подобные слагаемые лишь влияют на выбор точки отсчета энергии (другие названия: нулевая энергия, энергия вакуума) и не имеют физического смысла в отсутствие гравитации<sup>3)</sup>.

<sup>3)</sup> Однако *изменения* в таких слагаемых из-за перемены граничных условий для полей, как, например, в случае квантования в пространстве между параллельными пластинами, имеют физический смысл и даже были измерены [1].

Явный вид  $H_0$  как функционала от  $q, p$  для других полей будет приведен в § 7.5.

В учебниках по квантовой теории поля обычно выводят (7.1.25) как следствие формулы (7.1.24), которая, в свою очередь, следует из вида лагранжиана. На мой взгляд, следует рассуждать в обратном направлении, поскольку уравнение (7.1.25) *обязано* выполняться; если некоторый лагранжиан свободного поля не приводит к (7.1.25) с точностью до постоянного члена, его следует считать неправильным. Наоборот, нужно задаться вопросом, какой лагранжиан приводит к формуле (7.1.25) для бесспиновых частиц, или, в общем случае, приводит к гамильтониану свободных частиц (7.1.23). На этот вопрос можно ответить с помощью преобразования Лежандра, которое осуществляется переходом от гамильтониана к лагранжиану. Лагранжиан свободного поля дается формулой

$$L_0[q(t), \dot{q}(t)] = \sum_n \int d^3x p_n(\mathbf{x}, t) \dot{q}_n(\mathbf{x}, t) - H_0, \quad (7.1.26)$$

где подразумевается, что все  $p_n$  выражены через  $q^n, \dot{q}^n$  (а также, как мы увидим, через некоторые вспомогательные поля). Например, из гамильтониана (7.1.24) и (7.1.7) получаем лагранжиан свободного скалярного поля:

$$\begin{aligned} L_0 = \int d^3x & \left[ p\dot{q} - \frac{1}{2} p^2 - \frac{1}{2} (\nabla q)^2 - \frac{1}{2} n^2 q^2 \right] = \\ & = \int d^3x \left[ -\frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 \right]. \end{aligned} \quad (7.1.27)$$

Каков бы ни был полный лагранжиан скалярного поля, данное слагаемое в нем всегда присутствует и рассматривается как член нулевого порядка в теории возмущений. Подобное упражнение можно проделать и для других канонических систем, но с этого места мы будем просто угадывать вид свободного лагранжиана и проверять, что он действительно дает правильный гамильтониан свободных частиц.

Мы видели, что многочисленные теории свободных полей можно сформулировать канонически. Несложно теперь показать, что это верно и для взаимодействующих полей. Можно ввести канонические переменные в так называемом представлении Гейзенберга, переход к которому дается формулами

$$Q^n(\mathbf{x}, t) \equiv \exp(iHt) q^n(\mathbf{x}, 0) \exp(-iHt), \quad (7.1.28)$$

$$P_n(\mathbf{x}, t) \equiv \exp(iHt) p_n(\mathbf{x}, 0) \exp(-iHt), \quad (7.1.29)$$

где  $H$  есть полный гамильтониан. Поскольку это есть преобразование подобия, коммутирующее с  $H$ , полный гамильтониан в представлении Гейзенберга так же зависит от новых переменных, как старый

гамильтониан — от старых переменных, т.е.:

$$H[Q, P] = e^{iHt} H[q, p] e^{-iHt} = H[q, p].$$

Далее, поскольку (7.1.28), (7.1.29) определяют преобразования подобия, операторы в представлении Гейзенберга удовлетворяют тем же правилам (анти)коммутации:

$$[Q^n(\mathbf{x}, t), P_{\bar{n}}(\mathbf{y}, t)]_{\mp} = i\delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y})\delta_{\bar{n}}^n, \quad (7.1.30)$$

$$[Q^n(\mathbf{x}, t), Q^{\bar{n}}(\mathbf{y}, t)]_{\mp} = 0, \quad (7.1.31)$$

$$[P_n(\mathbf{x}, t), P_{\bar{n}}(\mathbf{y}, t)]_{\mp} = 0. \quad (7.1.32)$$

Однако в новом представлении они зависят от времени:

$$\dot{Q}^n(\mathbf{x}, t) = i[H, Q^n(\mathbf{x}, t)] = \frac{\delta H}{\delta P_n(\mathbf{x}, t)}, \quad (7.1.33)$$

$$\dot{P}_n(\mathbf{x}, t) = -i[P_n(\mathbf{x}, t), H] = -\frac{\delta H}{\delta Q^n(\mathbf{x}, t)}. \quad (7.1.34)$$

Например, можно взять гамильтониан вещественного скалярного поля в виде (7.1.24) плюс интеграл от скалярной плотности взаимодействия  $\mathcal{H}$ , т.е. в терминах гейзенберговских полей:

$$H = \int d^3x \left[ \frac{1}{2} P^2 + \frac{1}{2} (\nabla Q)^2 + \frac{1}{2} m^2 Q^2 + \mathcal{H}(Q) \right]. \quad (7.1.35)$$

В данном случае канонически сопряженная с  $Q$  переменная дается той же формулой, что и для свободных полей:

$$P = \dot{Q}. \quad (7.1.36)$$

Однако как мы увидим, в общем случае связь между канонически сопряженными переменными  $P_n(x)$  и полевыми переменными и их производными по времени не такая, как для свободных полей; эта связь дается формулами (7.1.33), (7.1.34).

## § 7.2. Лагранжев формализм

После того как мы убедились, что разнообразные реалистичные теории можно описать в рамках канонического формализма, следует рассмотреть вопрос о выборе гамильтониана. Как мы увидим в следующем параграфе, простейший способ гарантировать лоренцинвариантность и другие симметрии — это выбрать подходящий лагранжиан и вывести из него гамильтониан. При таком подходе почти нет потери общности — при наличии реалистического гамильтониана обычно можно реконструировать лагранжиан, из которого он получается, т.е. обратить процедуру получения гамильтонианов из лагранжианов, которую мы сейчас опишем (вывод уравнения (7.1.26) — один

из примеров такой реконструкции). И хотя можно переходить от гамильтониана к лагранжиану и наоборот, проще изучать физически удовлетворительные теории, перечисляя возможные лагранжианы, а не гамильтонианы.

Лагранжиан в общем случае есть функционал<sup>1)</sup>  $L[\Psi(t), \dot{\Psi}(t)]$  от набора полей общего вида  $\Psi^l(\mathbf{x}, t)$  и их производных по времени  $\dot{\Psi}^l(\mathbf{x}, t)$ . Сопряженные поля  $\Pi_l(\mathbf{x}, t)$  определяются как вариационные производные<sup>2)</sup>:

$$\Pi_l(\mathbf{x}, t) \equiv \frac{\delta L[\Psi(t), \dot{\Psi}(t)]}{\delta \dot{\Psi}^l(\mathbf{x}, t)}. \quad (7.2.1)$$

Уравнения движения имеют вид

$$\dot{\Pi}_l(\mathbf{x}, t) \equiv \frac{\delta L[\Psi(t), \dot{\Psi}(t)]}{\delta \Psi^l(\mathbf{x}, t)}. \quad (7.2.2)$$

Эти уравнения полезно сформулировать в виде вариационного принципа. Введем функционал от полей  $\Psi^l(x)$  во всем пространстве–времени, известный как *действие*:

$$I[\Psi] \equiv \int_{-\infty}^{\infty} dt L[\Psi(t), \dot{\Psi}(t)]. \quad (7.2.3)$$

При произвольной вариации  $\Psi(x)$  изменение  $I[\Psi]$  равно

$$\delta I[\Psi] = \int_{-\infty}^{\infty} dt \int d^3x \left[ \frac{\delta L}{\delta \Psi^l(x)} \delta \Psi^l(x) + \frac{\delta L}{\delta \dot{\Psi}^l(x)} \delta \dot{\Psi}^l(x) \right].$$

Предполагая, что  $\delta \Psi^l(x)$  исчезает при  $t \rightarrow \pm\infty$ , после интегрирования по частям получаем

$$\delta I[\Psi] = \int d^4x \left[ \frac{\delta L}{\delta \Psi^l(x)} - \frac{d}{dt} \frac{\delta L}{\delta \dot{\Psi}^l(x)} \right] \delta \Psi^l(x). \quad (7.2.4)$$

<sup>1)</sup> Напомним, что функционал  $L$ , в котором в наших обозначениях указывается переменная  $t$ , на самом деле зависит от полей  $\Psi^l(\mathbf{x}, t)$ ,  $\dot{\Psi}^l(\mathbf{x}, t)$ , где умалчиваемые переменные  $l$ ,  $\mathbf{x}$  пробегают все допустимые значения в указанный момент времени  $t$ . Большие буквы для переменных  $\Psi$ ,  $\Pi$  указывают на то, что это взаимодействующие, а не свободные поля.

<sup>2)</sup> Поскольку  $\Psi$  и  $\dot{\Psi}$  неизбежно подчиняются простым (анти)коммутационным соотношениям, мы не можем дать здесь простые определения функциональных производных, как мы делали в предыдущем параграфе для производных по  $Q$ ,  $P$ . Вместо этого мы утверждаем, что вариационные производные определяются так же, как для с-числовых переменных, только со всеми знаками минус и одновременными (анти)коммутаторами, нужными для правильной квантовой записи этих формул. Насколько я знаю, здесь нет каких-либо важных подробностей.

Мы видим, что действие имеет экстремум (стационарную точку) по отношению к вариациям полей  $\delta\Psi^l(x)$ , исчезающим при  $t \rightarrow \pm\infty$ , тогда и только тогда, когда поля удовлетворяют уравнениям движения (7.2.2).

Поскольку уравнения поля определяются функционалом  $I[\Psi]$ , кажется естественным, что лоренц-инвариантная теория должна строиться на основе скалярного  $I[\Psi]$ . В частности, поскольку  $I[\Psi]$  есть интеграл по времени от  $L[\Psi(t), \dot{\Psi}(t)]$ , заключаем, что  $L$  должно быть интегралом по пространству от скалярной функции от  $\Psi(x)$  и  $\partial\Psi(x)/\partial x^\mu$ , которая называется *лагранжевой плотностью*  $\mathcal{L}$ :

$$L[\Psi(t), \dot{\Psi}(t)] = \int d^3x \mathcal{L}(\Psi(x, t), \nabla\Psi(x, t), \dot{\Psi}(x, t)), \quad (7.2.5)$$

т.е. действие имеет вид

$$I[\Psi] = \int d^4x \mathcal{L}(\Psi(x), \partial\Psi(x)/\partial x^\mu). \quad (7.2.6)$$

Все теории поля в современной физике элементарных частиц обладают лагранжианом такого вида.

Варьируя  $\Psi^l(x)$  на величину  $\delta\Psi^l(x)$ , находим вариацию  $L$ :

$$\begin{aligned} \delta L &= \int d^3x \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Psi^l} \delta\Psi^l + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\nabla\Psi^l)} \nabla\delta\Psi^l + \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \dot{\Psi}^l} \delta\dot{\Psi}^l \right], = \\ &= \int d^3x \left[ \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Psi^l} - \nabla \cdot \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\nabla\Psi^l)} \right) \delta\Psi^l + \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \dot{\Psi}^l} \delta\dot{\Psi}^l \right], \end{aligned}$$

так что, опуская очевидные аргументы,

$$\frac{\delta L}{\delta \Psi^l} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Psi^l} - \nabla \cdot \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\nabla\Psi^l)}, \quad (7.2.7)$$

$$\frac{\delta L}{\delta \dot{\Psi}^l} = \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \dot{\Psi}^l}. \quad (7.2.8)$$

Уравнения поля (7.2.2) теперь принимают вид

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial\Psi^l/\partial x^\mu)} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Psi^l}. \quad (7.2.9)$$

Эти уравнения известны как *уравнения Эйлера–Лагранжа*. Как и ожидалось, для скалярной функции  $\mathcal{L}$  эти уравнения лоренц-инвариантны.

Помимо лоренц-инвариантности, действие  $I$  должно быть вещественным. Дело в том, что нам нужно ровно столько уравнений, сколько полей. Поскольку можно разделить любое комплексное поле на вещественную и мнимую части, можно рассматривать функционал  $I$  как зависящий от  $N$  вещественных полей. Если бы он был комплексным, с независимыми вещественными и мнимыми частями, то условие стационарности этих частей дало бы  $2N$  уравнений Эйлера–Лагранжа для  $N$  полей, т.е. (за исключением особых случаев) больше,

чем может быть одновременно выполнено. В следующем параграфе мы также увидим, что вещественность действия гарантирует эрмитовость операторов различных симметрий.

Хотя в лагранжевом формализме легче конструировать лоренц-инвариантные теории с разными симметриями, для вычисления  $S$ -матрицы необходима формула для гамильтониана взаимодействия. В общем случае гамильтониан дается *преобразованием Лежандра*

$$H = \sum_l \int d^3x \Pi_l(\mathbf{x}, t) \dot{\Psi}^l(\mathbf{x}, t) - L[\Psi(t), \dot{\Psi}(t)]. \quad (7.2.10)$$

Хотя уравнение (7.2.1) не позволяет, вообще говоря, однозначно выразить  $\dot{\Psi}^l$  через  $\Psi^l$  и  $\Pi_l$ , легко видеть, что вариационная производная от (7.2.10) по  $\dot{\Psi}^l$  равна нулю, если  $\dot{\Psi}^l$  удовлетворяет уравнению (7.2.1), так что в общем случае  $H$  есть функционал только от  $\Psi^l$  и  $\Pi_l$ . Его вариационные производные по этим переменным равны

$$\begin{aligned} \frac{\delta H}{\delta \Psi^l(\mathbf{x}, t)} \Big|_{\Pi} &= \int d^3y \sum_{l'} \Pi_{l'}(\mathbf{y}, t) \frac{\delta \dot{\Psi}^{l'}(\mathbf{y}, t)}{\delta \Psi^l(\mathbf{x}, t)} \Big|_{\Pi} - \frac{\delta L}{\delta \Psi^l(\mathbf{x}, t)} \Big|_{\dot{\Psi}} - \\ &\quad - \int d^3y \sum_{l'} \frac{\delta L}{\delta \dot{\Psi}^{l'}(\mathbf{y}, t)} \Big|_{\Psi} \frac{\delta \dot{\Psi}^{l'}(\mathbf{y}, t)}{\delta \Psi^l(\mathbf{x}, t)} \Big|_{\Pi}, \\ \frac{\delta H}{\delta \Pi_l(\mathbf{x}, t)} \Big|_{\Psi} &= \dot{\Psi}^l(\mathbf{x}, t) + \int d^3y \sum_{l'} \Pi_{l'}(\mathbf{y}, t) \frac{\delta \dot{\Psi}^{l'}(\mathbf{y}, t)}{\delta \Pi_l(\mathbf{x}, t)} \Big|_{\Psi} - \\ &\quad - \int d^3y \sum_{l'} \frac{\delta L}{\delta \dot{\Psi}^{l'}(\mathbf{y}, t)} \Big|_{\Psi} \frac{\delta \dot{\Psi}^{l'}(\mathbf{y}, t)}{\delta \Pi_l(\mathbf{x}, t)} \Big|_{\Psi}, \end{aligned}$$

где индекс у вертикальной черты означает переменную, зафиксированную при взятии производной. Используя определение (7.2.1) для  $\Pi_l$ , упростим эти выражения до

$$\frac{\delta H}{\delta \Psi^l(\mathbf{x}, t)} \Big|_{\Pi} = - \frac{\delta L}{\delta L \Psi^l(\mathbf{x}, t)} \Big|_{\dot{\Psi}}, \quad (7.2.11)$$

и

$$\frac{\delta H}{\delta \Pi_l(\mathbf{x}, t)} \Big|_{\Psi} = \dot{\Psi}^l(\mathbf{x}, t). \quad (7.2.12)$$

Уравнения движения (7.2.2) равносильны уравнениям

$$\frac{\delta H}{\delta \Psi^l(\mathbf{x}, t)} \Big|_{\Pi} = - \Pi_l(\mathbf{x}, t). \quad (7.2.13)$$

Теперь возникает соблазн отождествить поля  $\Psi^l$  и сопряженные  $\Pi_l$  с каноническими переменными  $Q^n$ ,  $P_n$  из предыдущего параграфа, и потребовать для них те же канонические правила коммутации (7.1.30)–(7.1.32), после чего уравнения (7.2.12) и (7.2.13) совпали бы

с уравнениями Гамильтона (7.1.33), (7.1.34). Так оно и есть в простом случае вещественного скалярного поля  $\Phi$  со взаимодействием без производных. Рассмотрим плотность лагранжевой функции<sup>3)</sup>

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2} \partial_\mu \Phi \partial^\mu \Phi - \frac{m^2}{2} \Phi^2 - \mathcal{H}(\Phi), \quad (7.2.14)$$

которую можно получить, добавив вещественную функцию  $-\mathcal{H}(\Phi)$  к лагранжевой плотности свободного поля, которая была найдена в предыдущем параграфе. Уравнения Эйлера–Лагранжа здесь имеют вид

$$(\square - m^2)\Phi = \mathcal{H}'(\Phi). \quad (7.2.15)$$

Канонически сопряженная переменная для  $\Phi$  равна

$$\Pi = \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \dot{\Phi}} = \dot{\Phi}, \quad (7.2.16)$$

что совпадает с уравнением (7.1.36), если отождествить  $\Phi$  и  $\Pi$  с каноническими переменными  $Q$  и  $P$ . Гамильтониан получается с помощью уравнения (7.2.10) в виде<sup>4)</sup>

$$H = \int d^3x (\Pi \dot{\Phi} - \mathcal{L}) = \int d^3x \left[ \frac{1}{2} \Pi^2 + \frac{1}{2} (\nabla \Phi)^2 + \frac{1}{2} m^2 \Phi^2 + \mathcal{H}(\Phi) \right], \quad (7.2.17)$$

в котором мы узнаем гамильтониан (7.1.35). Это простое упражнение следует рассматривать не как еще один вывод этого гамильтониана, а скорее как подтверждение пригодности лагранжиана (7.2.14) для описания скалярных полей.

Но не всегда все получается так просто. В предыдущем параграфе мы видели, что бывают такие побочные переменные, например 0-компоненты векторного поля или эрмитово сопряженное дираковское поле, которые не являются каноническими переменными  $Q$  и не имеют канонически сопряженных; их присутствие в лагранжиане прориктовано лоренц-инвариантностью.

<sup>3)</sup> Мы не рассматриваем свободный постоянный множитель перед

$$-\frac{1}{2} \partial_\mu \Phi \partial^\mu \Phi,$$

поскольку любую такую постоянную можно поглотить в нормировочный множитель  $\Phi$ . Как мы увидим, отрицательная постоянная здесь привела бы к гамильтониану с неограниченным снизу спектром. Постоянная  $m$  называется *голая масса*. Гамильтониан наиболее общего вида, удовлетворяющий требованию перенормируемости (гл. 12), имеет именно такой вид, причем  $\mathcal{H}(\Phi)$  должен быть полиномом 4 степени.

<sup>4)</sup> Чтобы можно было интерпретировать  $H$  как энергию, гамильтониан должен быть ограничен снизу. Положительность первых двух слагаемых говорит о том, что мы правильно угадали знак первого слагаемого в (7.2.14).

Остается требование ограниченности снизу функции  $\frac{1}{2} m^2 \Phi^2 + \mathcal{H}(\Phi)$ .

С точки зрения лагранжева формализма особые свойства поблевых переменных такого рода объясняются тем, что сами они присутствуют в лагранжиане, а их производные по времени — нет. Такие переменные мы будем обозначать через  $C^r$ ; остальные полевые переменные можно отождествить с каноническими переменными  $Q^n$ . Они имеют канонически сопряженные

$$P_n(\mathbf{x}, t) = \frac{\delta L[Q(t), \dot{Q}(t), C(t)]}{\delta \dot{Q}^n(\mathbf{x}, t)}, \quad (7.2.18)$$

и подчиняются правилам коммутации (7.1.30)–(7.1.32). Для переменных  $C^r$  нет сопряженных переменных. Поскольку

$$\frac{\delta L}{\delta \dot{C}^r} = 0,$$

гамильтониан (7.2.10) в общем случае

$$H = \sum_n \int d^3x P_n \dot{Q}^n - L[Q(t), \dot{Q}(t), C(t)], \quad (7.2.19)$$

но эта формула бесполезна до тех пор, пока мы не выразили  $C^r$ ,  $\dot{Q}^l$  через  $Q$ ,  $P$ . Уравнения движения для  $C^r$  содержат только поля и их первые производные по времени:

$$0 = \frac{\delta L[Q(t), \dot{Q}(t), C(t)]}{\delta C^r(\mathbf{x}, t)}. \quad (7.2.20)$$

В несложных случаях, которые обсуждаются в данной главе, эти уравнения, совместно с (7.2.18), можно разрешить относительно  $C^r$ ,  $\dot{Q}^l$ , выразив их через  $Q$ ,  $P$ . В § 7.6 показывается, как в таких случаях можно избежать фактического решения этих уравнений. В калибровочных теориях, например в электродинамике, нужно применять другие методы: либо выбор калибровки, как в гл. 8, либо более современные ковариантные методы, обсуждаемые в т. II.

После того как мы записали гамильтониан как функционал от гейзенберговых операторов  $Q$ ,  $P$ , для использования теории возмущений нужно перейти к представлению взаимодействия. Гамильтониан не зависит от времени, поэтому его можно записать через переменные  $P_n$ ,  $Q^n$  при  $t = 0$ , которые совпадают с операторами  $p_n$ ,  $q^n$  в представлении взаимодействия при  $t = 0$ . Полученный таким образом гамильтониан можно переписать через операторы в представлении взаимодействия  $p_n$ ,  $q^n$  и разбить на две части — правильный гамильтониан свободных частиц  $H_0$  и гамильтониан взаимодействия  $V$ . Наконец, с помощью уравнений временной зависимости (7.1.21) и (7.1.22) и (анти)коммутационных соотношений (7.1.1)–(7.1.3) переменные  $q$ ,  $p$  выражаются через линейные комбинации операторов рождения–уничтожения.

В § 7.5 будет представлен ряд примеров применения этой процедуры, а сейчас ограничимся одним простейшим примером — скалярным полем с гамильтонианом (7.2.17). Разбиваем  $H$  на гамильтониан свободных частиц и взаимодействие:

$$H = H_0 + V, \quad (7.2.21)$$

$$H_0 = \int d^3x \left[ \frac{1}{2} \Pi^2 + \frac{1}{2} (\nabla\Phi)^2 + \frac{1}{2} m^2 \Phi^2 \right], \quad (7.2.22)$$

$$V = \int d^3x \mathcal{H}(\Phi). \quad (7.2.23)$$

Здесь  $\Phi$  и  $\Pi$  взяты в одно и то же время  $t$ , гамильтониан  $H$  не зависит от времени, поскольку  $H_0$  и  $V$  обычно также не зависят от времени.

Перейдем к представлению взаимодействия. Записав уравнения (7.1.28), (7.1.29) при  $t = 0$ , можем просто заменить  $\Phi$ ,  $\Pi$  на операторы в представлении взаимодействия  $\phi$ ,  $\pi$ , поскольку, согласно (7.1.28) и (7.1.29), они совпадают в этот момент времени. Для вычисления взаимодействия  $V(t)$  в представлении взаимодействия применяем универсальное преобразование (3.5.5):

$$V(t) = \exp(iH_0t)V\exp(-iH_0t) = \int d^3x \mathcal{H}(\phi(\mathbf{x}, t)). \quad (7.2.24)$$

То же преобразование оставляет  $H_0$  без изменений:

$$\begin{aligned} H_0 &= \exp(iH_0t)H_0\exp(-iH_0t) = \\ &= \int d^3x \left[ \frac{1}{2} \pi^2(\mathbf{x}, t) + \frac{1}{2} (\nabla\phi(\mathbf{x}, t))^2 + \frac{1}{2} m^2 \phi^2 \right]. \end{aligned} \quad (7.2.25)$$

Связь между  $\pi$  и  $\dot{\phi}$  берется из уравнения (7.1.21):

$$\dot{\phi}(\mathbf{x}, t) = \frac{\delta H_0}{\delta \pi(\mathbf{x}, t)} = \pi(\mathbf{x}, t). \quad (7.2.26)$$

(в данном случае это совпадает с (7.2.16), но, как мы увидим, в общем случае это не так). Уравнения движения для  $\phi$  следуют из (7.1.22):

$$\dot{\pi}(\mathbf{x}, t) = -\frac{\delta H_0}{\delta \dot{\phi}(\mathbf{x}, t)} = +\nabla^2\phi(\mathbf{x}, t) - m^2\phi(\mathbf{x}, t), \quad (7.2.27)$$

что совместно с (7.2.26) дает уравнения поля

$$(\square - m^2)\phi(x) = 0. \quad (7.2.28)$$

Общее вещественное решение можно записать в виде

$$\phi(x) = (2\pi)^{-3/2} \int d^3p (2p^0)^{-1/2} [e^{ip \cdot x} a(\mathbf{p}) + e^{-ip \cdot x} a^\dagger(\mathbf{p})], \quad (7.2.29)$$

где подразумевается, что

$$p^0 = \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2},$$

а  $a(\mathbf{p})$  — некий пока неизвестный оператор, зависящий от  $\mathbf{p}$ . Уравнение (7.2.26) дает канонически сопряженную переменную в виде

$$\pi(x) = -i(2\pi)^{-3/2} \int d^3 p (p^0/2)^{1/2} [e^{ip \cdot x} a(\mathbf{p}) - e^{-ip \cdot x} a^\dagger(\mathbf{p})]. \quad (7.2.30)$$

Для того чтобы получить желаемые коммутационные соотношения

$$[\phi(\mathbf{x}, t), \pi(\mathbf{y}, t)]_- = i\delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \quad (7.2.31)$$

$$[\phi(\mathbf{x}, t), \phi(\mathbf{y}, t)]_- = 0, \quad (7.2.32)$$

$$[\pi(\mathbf{x}, t), \pi(\mathbf{y}, t)]_- = 0, \quad (7.2.33)$$

необходимо потребовать, чтобы операторы  $a$  удовлетворяли известным коммутационным соотношениям

$$[a(\mathbf{p}), a^\dagger(\mathbf{p}')] = \delta^3(\mathbf{p} - \mathbf{p}'), \quad (7.2.34)$$

$$[a(\mathbf{p}), a(\mathbf{p}')]=0. \quad (7.2.35)$$

В предыдущем параграфе было показано, что использование этих фурье-разложений приводит к обычной формуле (4.2.11) для свободного гамильтониана с точностью до несущественной аддитивной постоянной. Как отмечалось выше, эти результаты следует считать не альтернативным выводом формул (7.2.29), (7.2.34), (7.2.35) (которые были выведены в гл. 5 на совсем других основаниях), а скорее проверкой первых двух слагаемых уравнения (7.2.14). Теперь можно применять теорию возмущений для вычисления  $S$ -матрицы, приняв за взаимодействие  $V(t)$  формулу (7.2.24), где поле  $\phi(x)$  дается формулой (7.2.29).

Мы применим описанные алгоритмы к более сложным и интересным теориям в § 7.5.

\* \* \*

При рассмотрении различных лагранжианов физических теорий обычно используют интегрирование по частям, отождествляя плотности лагранжиана, отличающиеся на полную производную  $\partial_\mu \mathcal{F}^\mu$ . Очевидно, что полная производная не дает вклада в действие и потому не влияет на уравнения движения. Не менее очевидно, что пространственный градиент  $\nabla \cdot \mathcal{F}$  в лагранжевой плотности не дает вклада в лагранжиан и тем самым не влияет на квантовую теорию, построенную на этом лагранжиане<sup>5)</sup>. Менее очевидно, что производная по времени  $\partial_0 \mathcal{F}^0$  тоже не влияет на квантовую теорию. Чтобы увидеть это, рассмотрим сначала результат прибавления к лагранжиану слага-

<sup>5)</sup> При обычном условии исчезновения полей на бесконечности. Эти результаты могут быть неверны в более сложных топологиях, как мы увидим в т. II.

гаемого более общего вида:

$$\Delta L(t) = \int d^3x D_{n,\mathbf{x}}[Q(t)]\dot{Q}^n(\mathbf{x}, t), \quad (7.2.36)$$

где  $D$  есть произвольный функционал (зависящий от  $n, \mathbf{x}$ ) от значений  $Q$  в данный момент времени. Формула для сопряженных переменных  $P(t)$  как функционалов от  $Q(t), \dot{Q}(t)$  получает добавку

$$\Delta P_n(\mathbf{x}, t) = \frac{\delta \Delta L(t)}{\delta \dot{Q}(\mathbf{x}, t)} = D_{n,\mathbf{x}}[Q(t)]. \quad (7.2.37)$$

Получается, что гамильтониан, записанный через  $Q(t), \dot{Q}(t)$ , не изменяется:

$$\int d^3x \Delta P_n(\mathbf{x}, t)\dot{Q}^n(\mathbf{x}, t) - \Delta L(t) = 0. \quad (7.2.38)$$

Следовательно, он не изменяется и в старых канонических переменных  $Q^n, P_n$ . Однако гамильтониан *не является* тем же функционалом от *новых* канонических переменных  $Q^n, P_n + \Delta P_n$ , и в теории с лагранжианом  $\mathcal{L} + \Delta \mathcal{L}$  новыми канонически сопряженными (удовлетворяющими каноническим правилам коммутации) являются именно  $Q^n$  и  $P_n + \Delta P_n$ . Коммутаторы  $Q^n$  между собой и с  $P_n$  остаются теми же, но коммутаторы операторов  $P_n$  теперь имеют вид:

$$\begin{aligned} [P_n(\mathbf{x}, t), P_m(\mathbf{y}, t)] &= [P_n(\mathbf{x}, t) + \Delta P_n(\mathbf{x}, t), P_m(\mathbf{y}, t) + \Delta P_m(\mathbf{y}, t)] - \\ &\quad - [\Delta P_n(\mathbf{x}, t), P_m(\mathbf{y}, t) + \Delta P_m(\mathbf{y}, t)] - \\ &\quad - [P_n(\mathbf{x}, t) + \Delta P_n(\mathbf{x}, t), \Delta P_m(\mathbf{y}, t)] + \\ &\quad + [\Delta P_n(\mathbf{x}, t), \Delta P_m(\mathbf{y}, t)] = \\ &= -i \frac{\delta D_{n,\mathbf{x}}[Q(t)]}{\delta Q^m(\mathbf{y}, t)} + i \frac{\delta D_{m,\mathbf{y}}[Q(t)]}{\delta Q^n(\mathbf{x}, t)}. \end{aligned} \quad (7.2.39)$$

В общем случае это выражение не обращается в нуль, но если прибавленное к лагранжиану слагаемое представляет собой полную производную по времени

$$\Delta L = \frac{dG}{dt} = \int d^3x \frac{\delta G[Q(t)]}{\delta \dot{Q}^n(\mathbf{x}, t)} \dot{Q}^n(\mathbf{x}, t), \quad (7.2.40)$$

то величина  $D$  в (7.2.36) будет иметь специальный вид

$$D_{n,\mathbf{x}}[Q] = \frac{\delta G[Q(t)]}{\delta \dot{Q}^n(\mathbf{x}, t)}. \quad (7.2.41)$$

В этом случае коммутатор (7.2.39) равен нулю, так что  $Q^n, P_n$  подчиняются обычным правилам коммутации. Мы видели, что изменение лагранжиана вида (7.2.36) не меняет функциональную зависимость гамильтониана от  $Q, P$ , и, следовательно, как мы теперь доказали, не изменяются и коммутационные соотношения этих переменных, а потому добавка вида (7.2.36) не влияет на квантовую теорию. Различные

плотности лагранжианов, полученные интегрированием по частям, теперь можно считать эквивалентными в квантовой, как и в классической, теории поля.

### § 7.3. Глобальные симметрии

Теперь мы приступаем к рассмотрению главного преимущества лагранжева формализма, а именно, удобства формулировки квантовых теорий с различными симметриями. Это объясняется тем, что динамические уравнения в лагранжевом описании имеют вид вариационного принципа — принципа экстремальности действия. Рассмотрим некоторое инфинитезимальное преобразование полей

$$\Psi^l(x) \rightarrow \Psi^l(x) + i\epsilon \mathcal{F}^l(x), \quad (7.3.1)$$

которое не изменяет действие:

$$0 = \delta I = i\epsilon \int d^4x \frac{\delta I[\Psi]}{\delta \Psi^l(x)} \mathcal{F}^l(x). \quad (7.3.2)$$

Если  $\epsilon$  постоянно, то симметрия называется *глобальной*. В общем случае  $\mathcal{F}^l$  зависит от полей и их производных в точке  $x$ . Разумеется, уравнение (7.3.2) автоматически выполняется для любых бесконечно малых вариаций полей, если поля удовлетворяют уравнениям движения; под преобразованием симметрии мы понимаем такое преобразование, которое не меняет действия, даже если динамические уравнения *не выполнены*. Если теперь считать, что  $\epsilon$  есть произвольная функция координат,

$$\Psi^l(x) \rightarrow \Psi^l(x) + i\epsilon(x) \mathcal{F}^l(x), \quad (7.3.3)$$

то в общем случае вариация действия не равна нулю и может быть записана в виде

$$\delta I = - \int d^4x J^\mu(x) \frac{\partial \epsilon(x)}{\partial x^\mu}, \quad (7.3.4)$$

поскольку для *постоянного*  $\epsilon(x)$  она должна быть равна нулю. Пусть теперь поля в  $I[\Psi]$  удовлетворяют уравнениям движения, т.е. действие стационарно по отношению к произвольным вариациям полей, исчезающим на бесконечности, в том числе и для вариаций вида (7.3.3), т.е. (7.3.4) должно равняться нулю. Интегрируя по частям, получаем закон сохранения

$$0 = \frac{\partial J^\mu(x)}{\partial x^\mu}. \quad (7.3.5)$$

Отсюда немедленно следует, что

$$0 = \frac{dF}{dt}, \quad (7.3.6)$$

где

$$F \equiv \int d^3x J^0. \quad (7.3.7)$$

Для каждой симметрии имеется один сохраняющийся ток  $J^\mu$  и один интеграл движения (сохраняющаяся величина)  $F$ . Это и есть фундаментальное свойство канонического формализма, известное под названием теоремы Нетер: *симметрия означает закон сохранения*.

Многие преобразования симметрии оставляют инвариантным не только действие, но и лагранжиан. Это верно, например, для пространственно-временных переносов, вращений в пространстве, изоспиновых вращений и других внутренних преобразований симметрии, но не для лоренц-преобразований общего вида. Если лагранжиан инвариантен, мы можем написать явную формулу для сохраняющихся величин  $F$ . Рассмотрим вариацию поля (7.3.3), в которой  $\epsilon(x)$  зависит от  $t$ , но не от  $\mathbf{x}$ . В таком случае изменение действия равно

$$\delta I = i \int dt \int d^3x \left[ \frac{\delta L[\Psi(t), \dot{\Psi}(t)]}{\delta \Psi^l(\mathbf{x}, t)} \epsilon(t) \mathcal{F}^l(\mathbf{x}, t) + \frac{\delta L[\Psi(t), \dot{\Psi}(t)]}{\delta \dot{\Psi}^l(\mathbf{x}, t)} \frac{d}{dt} (\epsilon(t) \mathcal{F}^l(\mathbf{x}, t)) \right]. \quad (7.3.8)$$

Требование неизменности лагранжиана при таком преобразовании с постоянным  $\epsilon$  дает

$$0 = \int d^3x \left[ \frac{\delta L[\Psi(t), \dot{\Psi}(t)]}{\delta \Psi^l(\mathbf{x}, t)} \mathcal{F}^l(\mathbf{x}, t) + \frac{\delta L[\Psi(t), \dot{\Psi}(t)]}{\delta \dot{\Psi}^l(\mathbf{x}, t)} \frac{d}{dt} \mathcal{F}^l(\mathbf{x}, t) \right], \quad (7.3.9)$$

так что для полей общего вида (не подчиняющихся уравнениям движения) вариация действия равна

$$\delta I = i \int dt \int d^3x \frac{\delta L[\Psi(t), \dot{\Psi}(t)]}{\delta \dot{\Psi}^l(\mathbf{x}, t)} \dot{\epsilon}(t) \mathcal{F}^l(\mathbf{x}, t). \quad (7.3.10)$$

Сравнивая это с (7.3.4), находим

$$F = -i \int d^3x \frac{\delta L[\Psi(t), \dot{\Psi}(t)]}{\delta \dot{\Psi}^l(\mathbf{x}, t)} \mathcal{F}^l(\mathbf{x}, t). \quad (7.3.11)$$

Используя условие симметрии (7.3.9), читатель легко может проверить, что величина  $F$  действительно не зависит от времени, для любых полей, подчиняющихся уравнениям движения (7.2.2).

Существуют также симметрии, например изоспиновые вращения, которые оставляют неизменным не только лагранжиан, но и плотность лагранжиана. В таких случаях можно продвинуться еще дальше и получить явный вид сохраняющихся токов  $J^\mu(x)$ . Записав действие, как в формуле (7.2.6), в виде интеграла от лагранжевой

плотности, находим его вариацию при преобразовании (7.3.3) с бесконечно малой функцией  $\epsilon(x)$ :

$$\delta I[\Psi] = i \int d^4x \left[ \frac{\partial \mathcal{L}(\Psi(x), \partial_\mu \Psi(x))}{\partial \Psi^l(x)} \mathcal{F}^l(x) \epsilon(x) + \frac{\partial \mathcal{L}(\Psi(x), \partial_\mu \Psi(x))}{\partial (\partial_\mu \Psi^l(x))} \partial_\mu (\mathcal{F}^l(x) \epsilon(x)) \right]. \quad (7.3.12)$$

Инвариантность плотности лагранжиана при постоянном  $\epsilon$  означает, что

$$0 = \frac{\partial \mathcal{L}(\Psi(x), \partial_\mu \Psi(x))}{\partial \Psi^l(x)} \mathcal{F}^l(x) + \frac{\partial \mathcal{L}(\Psi(x), \partial_\mu \Psi(x))}{\partial (\partial_\mu \Psi^l(x))} \partial_\mu \mathcal{F}^l(x), \quad (7.3.13)$$

так что для произвольных полей вариация действия равна

$$\delta I[\Psi] = i \int d^4x \frac{\partial \mathcal{L}(\Psi(x), \partial_\mu \Psi(x))}{\partial (\partial_\mu \Psi^l(x))} \mathcal{F}^l(x) \partial_\mu \epsilon(x). \quad (7.3.14)$$

Сравнение с (7.3.4) дает

$$J^\mu = -i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial \Psi^l / \partial x^\mu)} \mathcal{F}^l. \quad (7.3.15)$$

С помощью условия симметрии (7.3.13) легко непосредственно убедиться в том, что  $\partial_\mu J^\mu = 0$ , когда поля удовлетворяют уравнениям Эйлера–Лагранжа (7.2.9). Отметим также, что интеграл от временной компоненты тока (7.3.15) совпадает с ранее полученной величиной (7.3.11).

До сих пор все, что было сказано, относилось как к классической, так и к квантовой теории поля. Квантовые свойства сохраняющихся величин  $F$  проще всего понять для симметрий лагранжиана (не обязательно плотности лагранжиана), которые преобразуют канонические поля  $Q^n(\mathbf{x}, t)$  (т.е. те из  $\Psi^l$ , чьи производные по времени входят в лагранжиан) в зависящие от  $\mathbf{x}$  функционалы от них самих в тот же момент времени. Для таких преобразований

$$\mathcal{F}^n(\mathbf{x}, t) = \mathcal{F}^n[Q(t); \mathbf{x}]. \quad (7.3.16)$$

Как мы увидим, бесконечно малые переносы и вращения, равно как и внутренние симметрии, имеют вид (7.3.1), (7.3.16), где  $\mathcal{F}^n$  есть линейный функционал от  $Q^m$ , но здесь нам не нужно предполагать, что симметрия линейна. Для всех таких симметрий оператор  $F$  не просто сохраняется, — он также является *генератором* этой симметрии.

Чтобы увидеть это, заметим сперва, что если  $\Psi^l$  есть каноническая переменная  $Q^n$ , то функциональная производная  $\delta L / \delta \Psi^l$  равна канонически сопряженной переменной  $P_n$ , а если  $\Psi^l$  есть вспомогательное

поле  $C^r$ , то эта производная равна нулю. Следовательно, можно переписать (7.3.11) в виде

$$F = -i \int d^3x P_n(\mathbf{x}, t) \mathcal{F}^n(\mathbf{x}, t) = -i \int d^3x P_n(\mathbf{x}, t) \mathcal{F}^n[Q(t), \mathbf{x}]. \quad (7.3.17)$$

Чтобы вычислить коммутатор (не антисимметрический) величины  $F$  с каноническим полем  $Q^m(\mathbf{x}, t)$  в произвольный момент  $t$ , используем формулу (7.3.6), с помощью которой выражаем  $F$  как функционал от  $Q$ ,  $P$  в момент  $t$ , а затем применим канонические одновременные коммутаторы (7.1.30)–(7.1.32)<sup>1)</sup>:

$$[F, Q^n(\mathbf{x}, t)]_- = -\mathcal{F}^n(\mathbf{x}, t). \quad (7.3.18)$$

Именно в таком смысле  $F$  генерирует преобразования вида (7.3.16). Формула (7.3.17) и канонические коммутаторы также дают

$$[F, P_m(\mathbf{x}, t)]_- = \int d^3y P_m(\mathbf{y}, t) \frac{\delta \mathcal{F}^m(Q(t); \mathbf{y})}{\delta Q^n(\mathbf{x}, t)}. \quad (7.3.19)$$

Если  $F^m$  линейно, то формула (7.3.19) указывает, что  $P_n$  преобразуется контрагredientно к  $Q^n$ .

В качестве первого примера рассмотрим симметрию относительно пространственно-временных переносов (трансляций):

$$\Psi^l \rightarrow \Psi^l(x + \epsilon) = \Psi^l(x) + \epsilon^\mu \partial_\mu \Psi^l(x). \quad (7.3.20)$$

Она имеет вид (7.3.1) с четырьмя независимыми параметрами  $\epsilon^\mu$  и четырьмя соответствующими функциями преобразования

$$\mathcal{F}_\mu^l = -i \partial_\mu \Psi^l. \quad (7.3.21)$$

Как следствие, мы получаем четыре независимых сохраняющихся тока, которые обычно объединяют в тензор энергии–импульса  $T^\mu_\nu$ ,

$$\partial_\mu T^\mu_\nu = 0, \quad (7.3.22)$$

из которого можно получить сохраняющиеся величины как пространственные интегралы от временных компонент токов (не путать с канонически сопряженными переменными  $P_n(\mathbf{x}, t)$ ):

$$P_\nu = \int d^3x T^0_\nu, \quad (7.3.23)$$

$$\frac{d}{dt} P_\nu = 0. \quad (7.3.24)$$

<sup>1)</sup> Здесь предполагается, что для бозонных или фермионных  $Q^n$  вариация  $\mathcal{F}^n$  также является бозонной или фермионной, т.е.  $F$  – бозонный оператор. Единственным исключением являются так называемые суперсимметрии, для которых  $F$  – фермионный оператор, а в (7.3.18) стоит антисимметрический, если  $Q^n$  – тоже фермионный оператор.

Лагранжиан инвариантен относительно пространственных переносов, так что, в согласии с полученными выше общими результатами, заключаем, что пространственные компоненты 4-вектора  $P_\nu$  имеют вид

$$\mathbf{P} \equiv - \int d^3x P_n(\mathbf{x}, t) \nabla Q^n(\mathbf{x}, t). \quad (7.3.25)$$

С помощью одновременных коммутаторов (7.1.30)–(7.1.32) находим коммутаторы этого оператора с каноническими полями и им сопряженными:

$$[\mathbf{P}, Q^n(\mathbf{x}, t)]_- = i \nabla Q^n(\mathbf{x}, t), \quad (7.3.26)$$

$$[\mathbf{P}, P_n(\mathbf{x}, t)]_- = i \nabla P_n(\mathbf{x}, t). \quad (7.3.27)$$

Для любой функции  $\mathcal{G}$  от  $Q$ ,  $P$ , не зависящей от  $\mathbf{x}$  явно, имеем

$$[\mathbf{P}, \mathcal{G}(x)] = i \nabla \mathcal{G}(x). \quad (7.3.28)$$

Эти результаты показывают, что оператор  $\mathbf{P}$  действительно является генератором пространственных трансляций.

Напротив, трансляции по времени не оставляют лагранжиан  $L(t)$  инвариантным. Впрочем, мы уже знаем генератор этого преобразования: это гамильтониан  $P^0 \equiv H$ , который, как известно, коммутирует по правилу

$$[H, \mathcal{G}(\mathbf{x}, t)] = -i \dot{\mathcal{G}}(\mathbf{x}, t) \quad (7.3.29)$$

с любой функцией  $\mathcal{G}$  от гейзенберговских операторов.

Далее, если лагранжиан является интегралом от лагранжевой плотности, можно получить явную формулу для тензора энергии–импульса  $T^\mu{}_\nu$ . Однако плотность лагранжиана  $\mathcal{L}(x)$  не инвариантна при пространственно–временных трансляциях, так что нельзя применить формулу (7.3.15). Поэтому заметим, что изменение действия при трансляции, зависящей от 4-координат,

$$\Psi^l \rightarrow \Psi^l(x + \epsilon(x)) = \Psi^l(x) + \epsilon^\mu(x) \partial_\mu \Psi^l(x) \quad (7.3.30)$$

равно

$$\delta I[\Psi] = \int d^4x \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Psi^l} \epsilon^\mu \partial_\mu \Psi^l + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\nu \Psi^l)} \partial_\nu [\epsilon^\mu \partial_\mu \Psi^l] \right). \quad (7.3.31)$$

Уравнения Эйлера–Лагранжа (7.2.9) показывают, что слагаемые, пропорциональные  $\epsilon$ , обединяются в  $\epsilon^\mu \partial_\mu \mathcal{L}$ , так что

$$\delta I[\Psi] = \int d^4x \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^\mu} \epsilon^\mu + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\nu \Psi^l)} \partial_\mu \Psi^l \partial_\nu \epsilon^\mu \right). \quad (7.3.32)$$

Интегрируя по частям, обнаруживаем, что это выражение принимает вид формулы (7.3.4)

$$\delta I = - \int d^4x T^\nu{}_\mu \partial_\nu \epsilon^\mu \quad (7.3.33)$$

с “токами”

$$T^\nu{}_\mu = \delta_\mu^\nu \mathcal{L} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu \Psi^l)} \partial_\mu \Psi^l. \quad (7.3.34)$$

В качестве проверки можно заметить, что пространственные компоненты формулы (7.3.23) совпадают с формулой (7.3.25) для  $\mathbf{P}$ , а для  $\mu = 0$  уравнение (7.3.23) дает обычную формулу для гамильтониана:

$$H \equiv -P_0 = \int d^3x \left[ \sum_n P_n \dot{Q}^n - \mathcal{L} \right]. \quad (7.3.35)$$

(Замечание: тензор  $T^{\mu\nu}$ , полученный подниманием второго индекса в (7.3.34), не обязан быть симметричным, и потому непригоден в качестве правой части уравнений общей теории относительности. Правильный тензор энергии–импульса, который берется в качестве источника гравитационного поля, — это симметричный тензор  $\Theta^{\mu\nu}$ , который вводится в следующем параграфе.)

Во многих теориях также имеются один или несколько принципов симметрии, которые утверждают, что действие инвариантно под действием линейных, не зависящих от координат преобразований канонических полей

$$Q^n(x) \rightarrow Q^n(x) + i\epsilon^a(t_a)^n{}_m Q^m(x) \quad (7.3.36)$$

совместно с набором преобразований вспомогательных полей  $C^r$ :

$$C^r(x) \rightarrow C^r(x) + i\epsilon^a(\tau_a)^r{}_s C^s(x). \quad (7.3.37)$$

Здесь  $t_a$  и  $\tau_a$  — наборы эрмитовых матриц, осуществляющих некоторое представление алгебры Ли группы симметрии, а по повторяющимся индексам  $a, b, \dots$  подразумевается суммирование. (Например, в электродинамике есть подобная симметрия, для которой одна матрица  $t^n{}_m$  диагональна, а на диагонали стоят заряды полей.) Из существования любой такой симметрии можно получить еще один набор сохраняющихся токов  $J_a^\mu$ :

$$\partial_\mu J_a^\mu = 0 \quad (7.3.38)$$

временные компоненты которых есть плотности не зависящих от времени операторов

$$T_a = \int d^3x J_a^0. \quad (7.3.39)$$

Если лагранжиан вместе с действием инвариантен относительно преобразования (7.3.36), уравнение (7.3.11) дает явную формулу для  $T_a$ :

$$T_a = -i \int d^3x P_n(\mathbf{x}, t) (t_a)^n{}_m Q^m(\mathbf{x}, t). \quad (7.3.40)$$

Одновременные коммутаторы дают нам

$$[T_a, Q^n(x)] = -(t_a)^n{}_m Q^m(x), \quad (7.3.41)$$

$$[T_a, P_n(x)] = +(t_a)^m{}_n P_m(x). \quad (7.3.42)$$

(Когда матрица  $t_a$  диагональна, эти формулы показывают, что операторы  $Q^n$  и  $P_n$  соответственно понижают и повышают  $T_a$  на величину, равную  $n$ -у диагональному элементу  $t_a$ .) С помощью этих результатов можно вычислить коммутатор  $T_a$  с другим генератором  $T_b$ :

$$[T_a, T_b]_- = i \int d^3x [-P_m(t_a)^m{}_n(t_b)^n{}_k Q^k + P_n(t_b)^n{}_k (t_a)^k{}_m Q^m]. \quad (7.3.43)$$

Таким образом, если матрицы  $t_a$  образуют алгебру Ли со структурными постоянными  $f_{ab}^c$ ,

$$[t_a, t_b]_- = i f_{ab}^c t_c, \quad (7.3.44)$$

то такую же алгебру образуют квантовые операторы  $T_a$ :

$$[T_a, T_b]_- = i f_{ab}^c T_c. \quad (7.3.45)$$

Это подтверждает, что величины (7.3.40) — правильно нормированные генераторы группы симметрии.

Если лагранжиан является интегралом от лагранжевой плотности, которая инвариантна относительно (7.3.36) и (7.3.37), можно продвинуться дальше, и с помощью (7.3.15) найти явную формулу для токов, связанных с этими глобальными симметриями:

$$J_a^\mu \equiv -i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial Q^n / \partial x^\mu)} (t_a)^n{}_m Q^m - i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial C^r / \partial x^\mu)} (\tau_a)^r{}_s C^s. \quad (7.3.46)$$

В качестве иллюстрации рассмотрим теорию с двумя вещественными скалярными полями одинаковой массы, с плотностью лагранжиана

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2} \partial_\mu \Phi_1 \partial^\mu \Phi_1 - \frac{1}{2} m^2 \Phi_1^2 - \frac{1}{2} \partial_\mu \Phi_2 \partial^\mu \Phi_2 - \frac{1}{2} m^2 \Phi_2^2 - \mathcal{H}(\Phi_1^2 + \Phi_2^2). \quad (7.3.47)$$

Эта плотность инвариантна относительно линейного преобразования вида (7.3.36):

$$\delta \Phi_1 = -\epsilon \Phi_2, \quad \delta \Phi_2 = +\epsilon \Phi_1,$$

поэтому имеется сохраняющийся ток (7.3.46):

$$J^\mu = \Phi_2 \partial^\mu \Phi_1 - \Phi_1 \partial^\mu \Phi_2.$$

Явная формула (7.3.46) для тока дает новые полезные коммутационные соотношения. В частности, поскольку в лагранжеву плотность не входят производные по времени от вспомогательных полей, мы имеем

$$J_a^0 = -i P_n(t_a)^n{}_m Q^m. \quad (7.3.48)$$

Теперь можно найти одновременные коммутаторы полей общего вида не только с генераторами симметрии  $T_a$ , но и с плотностями  $J_a^0$ :

$$[J_a^0(\mathbf{x}, t), Q^n(\mathbf{y}, t)] = -\delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y})(t_a)^n{}_m Q^m(\mathbf{x}, t), \quad (7.3.49)$$

$$[J_a^0(\mathbf{x}, t), P_m(\mathbf{y}, t)] = \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y})(t_a)^n{}_m P_n(\mathbf{x}, t). \quad (7.3.50)$$

Если вспомогательные поля построены как локальные функции от  $Q$ ,  $P$ , таким образом, что они преобразуются по представлению алгебры симметрии с генераторами  $\tau_a$ , то точно так же имеем

$$[J_a^0(\mathbf{x}, t), C^r(\mathbf{y}, t)] = -\delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y})(\tau_a)^r{}_s C^s(\mathbf{x}, t). \quad (7.3.51)$$

Обычно уравнения (7.3.49) и (7.3.51) объединяются в одно коммутационное соотношение

$$[J_a^0(\mathbf{x}, t), \Psi^l(\mathbf{y}, t)] = -\delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y})(t_a)^l{}_l' \Psi^l(\mathbf{x}, t). \quad (7.3.52)$$

Соотношения вида (7.3.49)–(7.3.51) будут применяться в гл. 10 для вывода тождеств Уорда для матричных элементов, в которые входит ток  $J^\mu$ .

## § 7.4. Лоренц-инвариантность

В этом параграфе мы покажем, что лоренц-инвариантность лагранжиана означает лоренц-инвариантность  $S$ -матрицы. Рассмотрим бесконечно малое преобразование Лоренца:

$$\Lambda^\mu{}_\nu = \delta^\mu{}_\nu + \omega^\mu{}_\nu, \quad (7.4.1)$$

$$\omega_{\mu\nu} = -\omega_{\nu\mu}. \quad (7.4.2)$$

Согласно результатам предыдущего параграфа, из инвариантности действия при таких преобразованиях следует существование сохраняющихся “токов”  $\mathcal{M}^{\rho\mu\nu}$ :

$$\partial_\rho \mathcal{M}^{\rho\mu\nu} = 0, \quad (7.4.3)$$

$$\mathcal{M}^{\rho\mu\nu} = -\mathcal{M}^{\rho\nu\mu}, \quad (7.4.4)$$

по одному току для каждой независимой компоненты  $\omega_{\mu\nu}$ . Интегралы от временных компонент этих токов дают набор постоянных тензоров:

$$J^{\mu\nu} \equiv \int d^3x \mathcal{M}^{0\mu\nu}, \quad (7.4.5)$$

$$\frac{d}{dt} J^{\mu\nu} = 0. \quad (7.4.6)$$

Величины  $J^{\mu\nu}$  оказываются генераторами однородной группы Лоренца.

Нам хотелось бы получить явную формулу для тензора  $\mathcal{M}^{\rho\mu\nu}$ , но преобразования Лоренца действуют на координаты и потому не могут сохранять плотность лагранжиана, т.е. нельзя использовать готовые формулы предыдущего параграфа. Однако трансляционная инвариантность позволяет сформулировать лоренц-инвариантность как симметрию лагранжевой плотности относительно набора преобразований полей и их производных. Поля испытывают матричное преобразование

$$\delta\Psi^l = \frac{i}{2} \omega^{\mu\nu} (\mathcal{J}_{\mu\nu})^l{}_m \Psi^m, \quad (7.4.7)$$

где  $\mathcal{J}_{\mu\nu}$  — набор матриц, подчиняющийся соотношениям алгебры однородной группы Лоренца

$$[\mathcal{J}_{\mu\nu}, \mathcal{J}_{\rho\sigma}] = i\mathcal{J}_{\rho\nu}\eta_{\mu\sigma} - i\mathcal{J}_{\sigma\nu}\eta_{\mu\rho} - i\mathcal{J}_{\mu\sigma}\eta_{\nu\rho} + i\mathcal{J}_{\mu\rho}\eta_{\nu\sigma}. \quad (7.4.8)$$

Например, для скалярного поля  $\phi$  имеем  $\delta\phi = 0$ , так что  $\mathcal{J}_{\mu\nu} = 0$ , а для неприводимого поля типа  $(A, B)$  имеем

$$\mathcal{J}_{ij} = \epsilon_{ijk}(\mathcal{A}_k + \mathcal{B}_k), \quad \mathcal{J}_{k0} = -i(\mathcal{A}_k - \mathcal{B}_k),$$

где  $\mathcal{A}$  и  $\mathcal{B}$  — спиновые матрицы для спинов  $A$  и  $B$  соответственно. Заметим особо, что для ковариантного векторного поля  $\delta V_\kappa = \omega_\kappa^\lambda V_\lambda$ , так что

$$(\mathcal{J}_{\rho\sigma})_\kappa^\lambda = -i\eta_{\rho\kappa}\delta_\sigma^\lambda + i\eta_{\sigma\kappa}\delta_\rho^\lambda.$$

Производная поля, преобразующегося как (7.4.7), преобразуется как поле с дополнительным векторным индексом

$$\delta(\partial_\kappa\Psi_l) = \frac{1}{2}i\omega^{\mu\nu}(\mathcal{J}_{\mu\nu})_l^m\partial_\kappa\Psi_m + \omega_\kappa^\lambda\partial_\lambda\Psi_l. \quad (7.4.9)$$

Плотность лагранжиана инвариантна при одновременном применении преобразований (7.4.7) и (7.4.9), т.е.

$$0 = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\Psi^l}\frac{i}{2}\omega^{\mu\nu}(\mathcal{J}_{\mu\nu})_l^m\Psi^m + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\kappa\Psi^l)}\frac{i}{2}\omega^{\mu\nu}(\mathcal{J}_{\mu\nu})_l^m\partial_\kappa\Psi^m + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\kappa\Psi^l)}\omega_\kappa^\lambda\partial_\lambda\Psi^l.$$

Если приравнять коэффициент перед  $\omega^{\mu\nu}$  нулю, то получается

$$0 = \frac{i}{2}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\Psi^l}(\mathcal{J}_{\mu\nu})_l^m\Psi^m + \frac{i}{2}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\kappa\Psi^l)}(\mathcal{J}_{\mu\nu})_l^m\partial_\kappa\Psi^m + \frac{1}{2}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\kappa\Psi^l)}(\eta_{\kappa\mu}\partial_\nu - \eta_{\kappa\nu}\partial_\mu)\Psi^l.$$

С помощью уравнений Эйлера—Лагранжа (7.2.9) и нашей формулы (7.3.34) для тензора энергии—импульса  $T_{\mu\nu}$ , перепишем это в виде

$$0 = \partial_\kappa\left[\frac{i}{2}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\kappa\Psi^l)}(\mathcal{J}_{\mu\nu})_l^m\Psi^m\right] - \frac{1}{2}(T_{\mu\nu} - T_{\nu\mu}). \quad (7.4.10)$$

В виду этой формулы напрашивается определение нового тензора энергии—импульса, известного как *тензор Белинфанте* [2]:

$$\Theta^{\mu\nu} = T^{\mu\nu} - \frac{i}{2}\partial_\kappa\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\kappa\Psi^l)}(\mathcal{J}_{\mu\nu})_l^m\Psi^m - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\Psi^l)}(\mathcal{J}^{\kappa\nu})_l^m\Psi^m - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu\Psi^l)}(\mathcal{J}^{\kappa\mu})_l^m\Psi^m\right]. \quad (7.4.11)$$

Величина в квадратных скобках, очевидно, антисимметрична по  $\mu, \kappa$ , поэтому для  $\Theta^{\mu\nu}$  выполняется тот же закон сохранения, что для  $T^{\mu\nu}$ :

$$\partial_\mu\Theta^{\mu\nu} = 0. \quad (7.4.12)$$

По той же самой причине, если положить  $\mu = 0$  в уравнении (7.4.11), индекс  $\kappa$  пробегает только пространственные компоненты, так что слагаемое с производной выпадает после интегрирования по всему пространству

$$\int \Theta^{0\nu} d^3x = \int T^{0\nu} d^3x = P^\nu, \quad (7.4.13)$$

где  $P^0 \equiv H$ . Таким образом,  $\Theta^{\mu\nu}$  можно считать тензором энергии–импульса, так же как и  $T^{\mu\nu}$ . Однако из уравнения (7.4.10) ясно, что тензор Белинфанте  $\Theta^{\mu\nu}$  не только сохраняется, но и *симметричен*:

$$\Theta^{\mu\nu} = \Theta^{\nu\mu}. \quad (7.4.14)$$

Именно  $\Theta^{\mu\nu}$  играет роль источника гравитационного поля в ОТО [3]. Вследствие симметрии  $\Theta^{\mu\nu}$  можно построить еще одну сохраняющуюся тензорную плотность:

$$\mathcal{M}^{\lambda\mu\nu} \equiv x^\mu \Theta^{\lambda\nu} - x^\nu \Theta^{\lambda\mu}. \quad (7.4.15)$$

Она сохраняется в том смысле, что

$$\partial_\lambda \mathcal{M}^{\lambda\mu\nu} = \Theta^{\mu\nu} - \Theta^{\nu\mu} = 0. \quad (7.4.16)$$

Таким образом, лоренц-инвариантность позволяет построить еще один постоянный тензор

$$J^{\mu\nu} = \int \mathcal{M}^{0\mu\nu} d^3x = \int d^3x (x^\mu \Theta^{0\nu} - x^\nu \Theta^{0\mu}). \quad (7.4.17)$$

Генератор вращений  $J_k = \epsilon_{ijk} J^{ij}/2$  не только постоянен, но и не имеет *явной* зависимости от времени, т.е. коммутирует с гамильтонианом

$$[H, \mathbf{J}] = 0. \quad (7.4.18)$$

Кроме того, применяя формулу (7.3.28) к функции  $\Theta^{0\nu}$ , находим

$$\begin{aligned} [P_j, J_i] &= \frac{1}{2} \epsilon_{ilk} [P_j, J^{lk}] = \frac{i}{2} \epsilon_{ilk} \int d^3x \left( x^l \frac{\partial}{\partial x^j} \Theta^{0k} - x^k \frac{\partial}{\partial x^j} \Theta^{0l} \right) = \\ &= -i \epsilon_{ijk} \int d^3x \Theta^{0k} \end{aligned}$$

и, следовательно,

$$[P_j, J_i] = -i \epsilon_{ijk} P_k. \quad (7.4.19)$$

С другой стороны, генератор “бустов”  $K_k \equiv J^{k0}$ , хотя и постоянен, явно содержит временную координату

$$K_k = \int d^3x (x^k \Theta^{00} - x^0 \Theta^{0k}),$$

или, более подробно,

$$\mathbf{K} = -t \mathbf{P} + \int d^3x \mathbf{x} \Theta^{00}(\mathbf{x}, t). \quad (7.4.20)$$

Поскольку это выражение не зависит от времени, имеем

$$0 = \dot{\mathbf{K}} = -\mathbf{P} + i[H, \mathbf{K}],$$

стало быть,

$$[H, \mathbf{K}] = -i\mathbf{P}. \quad (7.4.21)$$

С помощью формулы (7.3.28) также получаем

$$[P_j, K_k] = i \int d^3x x^k \frac{\partial}{\partial x^j} \Theta^{00} = -i\delta_{jk} \int d^3x \Theta^{00},$$

т.е.

$$[P_j, K_k] = -i\delta_{jk} H. \quad (7.4.22)$$

Для любой разумной лагранжевой плотности оператор (7.4.20) будет “гладким” в смысле § 3.3, т.е. члены взаимодействия в

$$e^{iH_0 t} \int d^3x \mathbf{x} \Theta^{00}(\mathbf{x}, 0) e^{-iH_0 t}$$

стремятся к нулю<sup>1)</sup> при  $t \rightarrow \pm\infty$ . (Заметим, что члены взаимодействия в  $e^{iH_0 t} \int d^3x \Theta^{00}(\mathbf{x}, 0) e^{-iH_0 t}$  должны стремиться к нулю при  $t \rightarrow \pm\infty$ , чтобы можно было ввести понятия входящих и выходящих состояний в  $S$ -матрице.) Учитывая это предположение гладкости и коммутационные соотношения (7.4.21), можно повторить доводы § 3.3 и заключить, что  $S$ -матрица лоренц-инвариантна.

\* \* \*

Аналогичные аргументы были использованы в § 3.3 для проверки того, что остальные коммутационные соотношения группы Лоренца, а именно коммутаторы  $J^{\mu\nu}$  между собой, принимают надлежащий вид. Это может быть также показано непосредственно в случае коммутаторов генераторов вращений, которые имеют в нашем случае вид

$$J^{ij} = \int d^3x \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\Psi}_l} \left( -x^i \partial_j \Psi^l + x^j \partial_i \Psi^l - i(\mathcal{J}^{ij})^l{}_m \Psi^m \right). \quad (7.4.23)$$

Поскольку плотность лагранжиана не зависит от производных по времени от вспомогательных полей, а генераторы вращений не смешивают канонические и вспомогательные поля, это выражение можно переписать в виде суммы только по каноническим полям:

$$J^{ij} = \int d^3x P_n (-x^i \partial_j Q^n + x^j \partial_i Q^n - i(\mathcal{J}^{ij})^n{}_{n'} Q^{n'}). \quad (7.4.24)$$

<sup>1)</sup> Когда мы говорим, что некоторый оператор в представлении взаимодействия стремится к нулю при  $t \rightarrow \pm\infty$ , мы имеем в виду, что в этом пределе равны нулю матричные элементы для перехода между состояниями, являющимися гладкими суперпозициями состояний с определенной энергией.

Отсюда с помощью канонических коммутационных соотношений получаем

$$[J^{ij}, Q^n(x)]_- = -i(-x_i \partial_j + x_j \partial_i)Q^n(x) - (\mathcal{J}^{ij})^n{}_{n'} Q^{n'}(x), \quad (7.4.25)$$

$$[J^{ij}, P_n(x)]_- = i(-x_i \partial_j + x_j \partial_i)P^n(x) + (\mathcal{J}^{ij})^{n'}{}_n P_{n'}(x). \quad (7.4.26)$$

С помощью этих соотношений можно получить известные коммутаторы генераторов  $J^{ij}$  между собой и с другими генераторами<sup>2)</sup>. Если вспомогательные поля отсутствуют, то таким же образом можно найти коммутаторы для генераторов бустов и завершить доказательство того, что  $P^\mu$  и  $J^{\mu\nu}$  соответствуют генераторам неоднородной группы Лоренца. Однако матрицы бустов  $\mathcal{J}^{i0}$  в общем случае смешивают канонические и вспомогательные поля (как, например, компоненты  $V^i$  и  $V^0$  векторного поля), так что прямой вывод коммутационных соотношений для  $J^{i0}$  должен проводиться в каждом конкретном случае. К счастью, это не требуется для доказательства лоренц-инвариантности  $S$ -матрицы, приведенного в § 3.3.

## § 7.5. Переход к представлению взаимодействия

В конце § 7.2 было показано, как с помощью лагранжиана получить вид взаимодействия и свободных полей в представлении взаимодействия для простейшей теории скалярного поля. Теперь мы перейдем к более сложным и показательным примерам.

### *Скалярное поле, взаимодействие с производными*

Рассмотрим сначала нейтральное скалярное поле, обладающее взаимодействием, содержащим производные. Возьмем лагранжиан вида

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2} \partial_\mu \Phi \partial^\mu \Phi - \frac{1}{2} m^2 \Phi^2 - J^\mu \partial_\mu \Phi - \mathcal{H}(\Phi), \quad (7.5.1)$$

где  $J^\mu$  — либо  $c$ -числовой внешний ток (не имеющий отношения к токам  $J^\mu$ , которые вводились выше), либо функционал от других полей (не  $\Phi$ ). Во втором случае в лагранжиан (7.5.1) нужно добавить слагаемые (по крайней мере, кинетические) для этих полей. Канонически сопряженная с  $\Phi$  переменная равна

$$\Pi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\Phi}} = \dot{\Phi} - J^0, \quad (7.5.2)$$

---

<sup>2)</sup> Кроме того, поскольку  $J^{ij}$  коммутируют с  $H$  и  $P_n \dot{Q}^n$ , они коммутируют с  $L$ . Коммутатор этих величин со вспомогательными полями должен отвечать вращательной инвариантности лагранжиана.

а гамильтониан

$$\begin{aligned} H = \int d^3x [\Pi\dot{\Phi} - \mathcal{L}] &= \\ &= \int d^3x \left[ \Pi(\Pi + J^0) + \frac{1}{2} (\nabla\Phi)^2 - \frac{1}{2} (\Pi + J^0)^2 + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} m^2 \Phi^2 + \mathbf{J} \cdot \nabla\Phi + J^0(\Pi + J^0) + \mathcal{H}(\Phi) \right]. \end{aligned}$$

Группируя члены, перепишем его в виде

$$H = H_0 + V, \quad (7.5.3)$$

$$H_0 = \int d^3x \left[ \frac{1}{2} \Pi^2 + \frac{1}{2} (\nabla\Phi)^2 + \frac{1}{2} m^2 \Phi^2 \right], \quad (7.5.4)$$

$$V = \int d^3x \left[ \Pi J^0 + \mathbf{J} \cdot \nabla\Phi + \frac{1}{2} (J^0)^2 + \mathcal{H}(\Phi) \right]. \quad (7.5.5)$$

Как было указано в § 7.2, для перехода к представлению взаимодействия можно просто заменить  $\Pi$ ,  $\Phi$  на  $\pi$ ,  $\phi$  (и аналогично для других полей, входящих в ток  $J^\mu$ , но мы не будем загромождать запись новыми обозначениями):

$$H_0 = \int d^3x \left[ \frac{1}{2} \pi^2(\mathbf{x}, t) + \frac{1}{2} (\nabla\phi(\mathbf{x}, t))^2 + \frac{1}{2} m^2 \phi^2(\mathbf{x}, t) \right], \quad (7.5.6)$$

$$\begin{aligned} V(t) = \int d^3x \left[ \pi(\mathbf{x}, t) J^0(\mathbf{x}, t) + \mathbf{J}(\mathbf{x}, t) \cdot \nabla\phi(\mathbf{x}, t) + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} [J^0(\mathbf{x}, t)]^2 + \mathcal{H}(\phi(\mathbf{x}, t)) \right]. \quad (7.5.7) \end{aligned}$$

Гамильтониан свободных частиц — точно такой же, как в (7.2.25), и мы приходим, как и в § 7.2, к соотношениям (7.2.26)–(7.2.35). В самом деле, каков бы ни был полный гамильтониан, мы должны принять (7.5.6) за часть гамильтониана и назвать это гамильтонианом свободных частиц, а все остальное считать взаимодействием, потому что только такой свободный гамильтониан приводит к правильному разложению (7.2.29) скалярного поля в терминах операторов рождения–уничтожения, удовлетворяющих правилам коммутации (7.2.34), (7.2.35). Последний шаг — замена  $\pi$  в гамильтониане взаимодействия на  $\dot{\phi}$  в представлении взаимодействия (а *не* на  $\phi - J^0$ , как в представлении Гейзенberга):

$$V(t) = \int d^3x \left[ J^\mu(\mathbf{x}, t) \partial_\mu \phi(\mathbf{x}, t) + \frac{1}{2} [J^0(\mathbf{x}, t)]^2 + \mathcal{H}(\phi(\mathbf{x}, t)) \right]. \quad (7.5.8)$$

Дополнительный неинвариантный член в (7.5.8) — это уже знакомый нам из § 6.2 контрчлен для сокращения неинвариантного слагаемого в пропагаторе для  $\partial\phi$ .

### Векторное поле, спин 1

Аналогичные результаты можно получить при каноническом квантовании векторного поля  $V_\mu$ , которое описывает частицу со спином 1. Для дальнейших применений мы запишем плотность лагранжиана в более общем виде

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2} \alpha \partial_\mu V_\nu \partial^\mu V^\nu - \frac{1}{2} \beta \partial_\mu V_\nu \partial^\nu V^\mu - \frac{1}{2} m^2 V_\mu V^\mu + J_\mu V^\mu, \quad (7.5.9)$$

где  $\alpha$ ,  $\beta$  и  $m^2$  — пока произвольные константы, а  $J_\mu$  — либо  $c$ -числовой внешний ток, либо оператор, зависящий от других полей (в этом случае в лагранжиан следует добавить свободные лагранжианы этих полей). Уравнения Эйлера–Лагранжа для  $V_\mu$ :

$$-\alpha \square V_\nu - \beta \partial_\nu (\partial_\mu V^\mu) + m^2 V_\nu = -J_\nu.$$

Возьмем дивергенцию от этого уравнения:

$$-(\alpha + \beta) \square \partial_\lambda V^\lambda + m^2 \partial_\lambda V^\lambda = -\partial_\lambda J^\lambda. \quad (7.5.10)$$

Это выражение совпадает с уравнением для обычного скалярного поля с массой  $m^2/(\alpha + \beta)$  и источником  $\partial_\lambda J^\lambda/(\alpha + \beta)$ . Поскольку мы хотим получить теорию, содержащую только частицу спина 1, следует избавиться от скалярного поля  $\partial_\lambda V^\lambda$ , которое может распространяться независимо. Поэтому мы полагаем  $\alpha = -\beta$ , и тогда  $\partial_\lambda J^\lambda$  выражается через внешний ток или другие поля в виде  $\partial_\lambda J^\lambda/m^2$ . Постоянную  $\alpha$  можно поглотить в нормировку  $V_\mu$ , т.е. можно положить  $\alpha = -\beta = 1$ , и плотность лагранжиана принимает вид

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{1}{2} m^2 V_\mu V^\mu + J_\mu V^\mu, \quad (7.5.11)$$

где

$$F_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu V_\nu - \partial_\nu V_\mu. \quad (7.5.12)$$

Производная от лагранжиана по  $\dot{V}_\mu$  равна

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{V}_\mu} = -F^{0\mu}. \quad (7.5.13)$$

Она не равна нулю для пространственных компонент  $\mu = i$ , следовательно,  $V^i$  — канонические поля, а сопряженные им величины

$$\Pi^i = F^{i0} = \dot{V}^i + \partial_i V^0. \quad (7.5.14)$$

С другой стороны,  $F^{00} = 0$ , т.е.  $\dot{V}^0$  не входит в лагранжиан, значит  $V^0$  — вспомогательное поле. Это не является серьезной проблемой: тот факт, что  $\partial \mathcal{L}/\partial \dot{V}^0$  равно нулю, означает, что уравнение движения для  $V^0$  не содержит вторых производных по времени, а потому его можно использовать как связь, благодаря которой исключается одна полевая

переменная. Более подробно, уравнение Эйлера–Лагранжа при  $\nu = 0$  есть

$$\partial_i F^{i0} = m^2 V^0 - J^0, \quad (7.5.15)$$

или, с помощью (7.5.14),

$$V^0 = \frac{1}{m^2} (\nabla \cdot \Pi + J^0). \quad (7.5.16)$$

Теперь вычислим гамильтониан  $H = \int d^3x (\mathbf{\Pi} \cdot \dot{\mathbf{V}} - \mathcal{L})$  нашей теории. С помощью (7.5.14) перепишем  $\dot{\mathbf{V}}$  через  $\mathbf{\Pi}$  и  $J^0$ :

$$\dot{\mathbf{V}} = -\nabla V^0 + \mathbf{\Pi} = \mathbf{\Pi} - \frac{1}{m^2} \nabla(\nabla \cdot \mathbf{\Pi} + J^0),$$

следовательно,

$$\begin{aligned} H = \int d^3x & \left[ \mathbf{\Pi}^2 + m^{-2}(\nabla \cdot \mathbf{\Pi})(\nabla \cdot \mathbf{\Pi} + J^0) - \right. \\ & - \frac{1}{2} \mathbf{\Pi}^2 + \frac{1}{2} (\nabla \times \mathbf{V})^2 + \frac{1}{2} m^2 \mathbf{V}^2 - \\ & \left. - \frac{1}{2} m^{-2}(\nabla \cdot \mathbf{\Pi} + J^0)^2 - \mathbf{J} \cdot \mathbf{V} + m^{-2} J^0(\nabla \cdot \mathbf{\Pi} + J^0) \right]. \end{aligned}$$

Как обычно, разделяем  $H$  на свободный гамильтониан  $H_0$  и взаимодействие  $V$ :

$$H = H_0 + V, \quad (7.5.17)$$

и переходим к представлению взаимодействия, заменяя гейзенберговские операторы  $\mathbf{V}$  и  $\mathbf{\Pi}$  на их аналоги в представлении взаимодействия  $\mathbf{v}$  и  $\boldsymbol{\pi}$  (а также, что неявно подразумевается, заменяем поля, входящие в  $J^\mu$ ):

$$H_0 = \int d^3x \left[ \frac{1}{2} \boldsymbol{\pi}^2 + \frac{1}{2m^2} (\nabla \cdot \boldsymbol{\pi})^2 + \frac{1}{2} (\nabla \times \mathbf{v})^2 + \frac{m^2}{2} \mathbf{v}^2 \right], \quad (7.5.18)$$

$$V = \int d^3x \left[ -\mathbf{J} \cdot \mathbf{v} + m^{-2} J^0 \nabla \cdot \boldsymbol{\pi} + \frac{1}{2m^2} (J^0)^2 \right]. \quad (7.5.19)$$

Связь между  $\mathbf{v}$  и  $\boldsymbol{\pi}$  такова:

$$\dot{\mathbf{v}} = \frac{\delta H_0(\mathbf{v}, \boldsymbol{\pi})}{\delta \boldsymbol{\pi}} = \boldsymbol{\pi} - m^{-2} \nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{\pi}) \quad (7.5.20)$$

а уравнения движения имеют вид

$$\dot{\boldsymbol{\pi}} = -\frac{\delta H_0(\mathbf{v}, \boldsymbol{\pi})}{\delta \mathbf{v}} = +\nabla^2 \mathbf{v} - \nabla(\nabla \cdot \mathbf{v}) - m^2 \mathbf{v}. \quad (7.5.21)$$

Поскольку  $V^0$  не является независимой полевой переменной, она не связана преобразованием подобия ни с каким объектом  $v^0$  в представлении взаимодействия. Вместо этого мы можем *ввести* величину

$$v^0 = m^{-2} \nabla \cdot \boldsymbol{\pi}. \quad (7.5.22)$$

С помощью (7.5.20) теперь можно записать  $\pi$  в виде

$$\pi = \dot{\mathbf{v}} + \nabla v^0. \quad (7.5.23)$$

Подставляя это выражение в формулы (7.5.22) и (7.5.21), получаем уравнения движения в виде

$$\begin{aligned} \nabla^2 v^0 + \nabla \cdot \dot{\mathbf{v}} - m^2 v^0 &= 0, \\ \nabla^2 \mathbf{v} - \nabla(\nabla \cdot \mathbf{v}) - \ddot{\mathbf{v}} - \nabla \dot{v}^0 - m^2 \mathbf{v} &= 0. \end{aligned}$$

Их можно объединить в одно ковариантное уравнение

$$\square v^\mu - \partial^\mu \partial_\nu v^\nu - m^2 v^\mu = 0. \quad (7.5.24)$$

Дивергенция от него дает

$$\partial_\mu v^\mu = 0 \quad (7.5.25)$$

и, следовательно,

$$(\square - m^2)v^\mu = 0. \quad (7.5.26)$$

Вещественное векторное поле, удовлетворяющее уравнениям (7.5.25) и (7.5.26), можно представить в виде фурье-разложения

$$\begin{aligned} v^\mu(x) = (2\pi)^{-3/2} \sum_{\sigma} \int d^3 p (2p^0)^{-1/2} \{ e^\mu(\mathbf{p}, \sigma) a(p, \sigma) e^{ip \cdot x} + \\ + e^{\mu*}(\mathbf{p}, \sigma) a^\dagger(\mathbf{p}, \sigma) e^{-ip \cdot x} \}, \end{aligned} \quad (7.5.27)$$

где  $p^0 = \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}$ ; три независимых 4-вектора  $e^\mu(\mathbf{p}, \sigma)$ ,  $\sigma = +1, 0, -1$ , удовлетворяют условию

$$p_\mu e^\mu(\mathbf{p}, \sigma) = 0 \quad (7.5.28)$$

и нормированы так, что

$$\sum_{\sigma} e^\mu(\mathbf{p}, \sigma) e^{\nu*}(p, \sigma) = \eta^{\mu\nu} + p^\mu p^\nu / m^2; \quad (7.5.29)$$

наконец, величины  $a(\mathbf{p}, \sigma)$  — операторные коэффициенты. Непосредственно с помощью уравнений (7.5.23), (7.5.27) и (7.5.29) проверяется, что  $\mathbf{v}$ ,  $\pi$  удовлетворяют правильным коммутационным соотношениям

$$\begin{aligned} [v^i(\mathbf{x}, t), \pi^j(\mathbf{y}, t)] &= i\delta_{ij}\delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \\ [v^i(\mathbf{x}, t), v^j(\mathbf{y}, t)] &= [\pi^i(\mathbf{x}, t), \pi^j(\mathbf{y}, t)] = 0, \end{aligned} \quad (7.5.30)$$

при условии, что  $a(\mathbf{p}, \sigma)$ ,  $a^\dagger(\mathbf{p}, \sigma)$  подчиняются правилам коммутации

$$[a(\mathbf{p}, \sigma), a^\dagger(\mathbf{p}', \sigma')] = \delta^3(\mathbf{p}' - \mathbf{p})\delta_{\sigma'\sigma}, \quad (7.5.31)$$

$$[a(\mathbf{p}, \sigma), a(\mathbf{p}', \sigma')] = 0. \quad (7.5.32)$$

Мы уже знаем, что векторное поле частицы спина 1 должно представляться в виде (7.5.27), так что данный вывод служит проверкой

того, что из формулы (7.5.18) получается правильный свободный гамильтониан массивных частиц спина 1. Несложно убедиться также, что формулу (7.5.18) можно записать (с точностью до постоянной) в стандартном виде энергии свободных частиц,

$$\sum_{\sigma} \int d^3 p p^0 a^{\dagger}(\mathbf{p}, \sigma) a(\mathbf{p}, \sigma).$$

Наконец, подставляя (7.5.22) в (7.5.19), получаем взаимодействие в представлении взаимодействия:

$$V(t) = \int d^3 x \left[ -J_{\mu} v^{\mu} + \frac{1}{2m^2} (J^0)^2 \right]. \quad (7.5.33)$$

Дополнительный неинвариантный член в (7.5.33) — известный из гл. 6 контрчлен, из-за которого сокращается неинвариантное слагаемое в пропагаторе векторного поля.

### Дираковское поле, спин 1/2

Для дираковского поля частицы со спином 1/2 лагранжиан, как известно, должен иметь вид

$$\mathcal{L} = -\bar{\Psi}(\gamma^{\mu} \partial_{\mu} + m)\Psi - \mathcal{H}(\bar{\Psi}, \Psi). \quad (7.5.34)$$

где  $\mathcal{H}$  — вещественная функция от  $\Psi$ ,  $\bar{\Psi}$ . Этот лагранжиан не веществен, однако действие вещественно, так как

$$\bar{\Psi}\gamma^{\mu} \partial_{\mu} \Psi - (\bar{\Psi}\gamma^{\mu} \partial_{\mu} \Psi)^{\dagger} = \bar{\Psi}\gamma^{\mu} \partial_{\mu} \Psi + (\partial_{\mu} \bar{\Psi})\gamma^{\mu} \Psi = \partial_{\mu}(\bar{\Psi}\gamma^{\mu} \Psi).$$

Следовательно, уравнения, получаемые из требования экстремальности действия по  $\bar{\Psi}$ , суть сопряженные уравнения, найденные путем варьирования по  $\Psi$ , как и должно быть для соблюдения числа независимых уравнений. Канонически сопряженная с  $\Psi$  переменная есть

$$\Pi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\Psi}} = -\bar{\Psi}\gamma^0, \quad (7.5.35)$$

поэтому нужно считать  $\bar{\Psi}$  не полем того же типа, что  $\Psi$ , а полем, пропорциональным канонически сопряженному к  $\Psi$ . Гамильтониан равен

$$H = \int d^3 x [\Pi \dot{\Psi} - \mathcal{L}] = \int d^3 x [\Pi \gamma^0 [\gamma \cdot \nabla + m] \Psi + \mathcal{H}].$$

Запишем его в виде

$$H = H_0 + V, \quad (7.5.36)$$

где

$$H_0 = \int d^3 x \Pi \gamma^0 [\gamma \cdot \nabla + m] \Psi, \quad (7.5.37)$$

$$V = \int d^3 x \mathcal{H}(\bar{\Psi}, \Psi). \quad (7.5.38)$$

Переходим теперь к представлению взаимодействия. Поскольку в формулу (7.5.35) не входит время, унитарное преобразование (7.1.28), (7.1.29) дает

$$\pi = -\bar{\psi} \gamma^0. \quad (7.5.39)$$

Аналогично,  $H_0$  и  $V(t)$  вычисляются заменой  $\Psi$  и  $\Pi$  на  $\psi$  и  $\pi$  в (7.5.37) и (7.5.38). Это дает уравнение движения

$$\dot{\psi} = \frac{\delta H_0}{\delta \pi} = \gamma^0 (\gamma \cdot \nabla + m) \psi \quad (7.5.40)$$

или, более компактно,

$$(\gamma^\mu \partial_\mu + m) \psi = 0. \quad (7.5.41)$$

(Другое уравнение движения,  $\dot{\pi} = -\delta H_0 / \delta \psi$ , является уравнением, сопряженным данному.) Любое поле, удовлетворяющее уравнению (7.5.41), можно представить в виде разложения Фурье

$$\psi(x) = (2\pi)^{-3/2} \int d^3 p \sum_{\sigma} \{ u(\mathbf{p}, \sigma) e^{ip \cdot x} a(\mathbf{p}, \sigma) + v(\mathbf{p}, \sigma) e^{-ip \cdot x} b^\dagger(\mathbf{p}, \sigma) \}, \quad (7.5.42)$$

где  $p^0 = \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}$ ;  $a(\mathbf{p}, \sigma)$  и  $b^\dagger(\mathbf{p}, \sigma)$  — операторные коэффициенты; наконец,  $u(\mathbf{p}, \pm 1/2)$  — два независимых решения уравнения

$$(i\gamma^\mu p_\mu + m) u(\mathbf{p}, \sigma) = 0 \quad (7.5.43)$$

и, аналогично,

$$(-i\gamma^\mu p_\mu + m) v(\mathbf{p}, \sigma) = 0, \quad (7.5.44)$$

нормированные<sup>1)</sup> таким образом, что

$$\sum_{\sigma} u(\mathbf{p}, \sigma) \bar{u}(\mathbf{p}, \sigma) = \frac{(-i\gamma^\mu p_\mu + m)}{2p^0}, \quad (7.5.45)$$

$$\sum_{\sigma} v(\mathbf{p}, \sigma) \bar{v}(\mathbf{p}, \sigma) = -\frac{(i\gamma^\mu p_\mu + m)}{2p^0}. \quad (7.5.46)$$

Чтобы получить желаемые антисимметрические антикоммутаторы

$$[\psi_\alpha(\mathbf{x}, t), \bar{\psi}_\beta(\mathbf{y}, t)]_+ = [\psi_\alpha(\mathbf{x}, t), \bar{\pi}_\gamma(\mathbf{y}, t)]_+ (\gamma^0)_{\gamma\beta} = i(\gamma^0)_{\alpha\beta} \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \quad (7.5.47)$$

$$[\psi_\alpha(\mathbf{x}, t), \psi_\beta(\mathbf{y}, t)]_+ = 0, \quad (7.5.48)$$

<sup>1)</sup> Матрица  $i\gamma^\mu p_\mu$  имеет собственные значения  $\pm m$ , так что  $\sum u\bar{u}$  и  $\sum v\bar{v}$  должны быть пропорциональны проекционным матрицам, соответственно  $(-i\gamma^\mu p_\mu + m)/2m$  и  $(i\gamma^\mu p_\mu + m)/2m$ . Коэффициент пропорциональности можно изменить (не меняя знака) путем изменения нормировок  $u$ ,  $v$ . Общий знак определяется из требования положительности:  $\text{Tr} \sum u\bar{u}\beta = \sum u^\dagger u$  и  $\text{Tr} \sum v\bar{v}\beta = \sum v^\dagger v$  должны быть положительны.

нужно принять правила антисимметрии

$$[a(\mathbf{p}, \sigma), a^\dagger(\mathbf{p}', \sigma')]_+ = [b(\mathbf{p}, \sigma), b^\dagger(\mathbf{p}', \sigma')]_+ = \delta^3(\mathbf{p}' - \mathbf{p})\delta_{\sigma' \sigma}, \quad (7.5.49)$$

$$[a(\mathbf{p}, \sigma), a(\mathbf{p}', \sigma')]_+ = [b(\mathbf{p}, \sigma), b(\mathbf{p}', \sigma')]_+ =$$

$$= [a(\mathbf{p}, \sigma), b(\mathbf{p}', \sigma')]_+ = [a(\mathbf{p}, \sigma), b^\dagger(\mathbf{p}', \sigma')]_+ = 0, \quad (7.5.50)$$

и сопряженные с ними. Это согласуется с результатами гл. 5, т.е. мы проверили, что (7.5.37) — правильный свободный гамильтониан для спина 1/2. В терминах операторов  $a, b$  гамильтониан запишется в виде

$$H_0 = \sum_{\sigma} \int d^3 p p^0 (a^\dagger(\mathbf{p}, \sigma) a(\mathbf{p}, \sigma) - b(\mathbf{p}, \sigma) b^\dagger(\mathbf{p}, \sigma)). \quad (7.5.51)$$

Его можно привести к виду более знакомого гамильтониана свободных частиц с точностью до бесконечной  $c$ -числовой константы<sup>2)</sup>

$$H_0 = \sum_{\sigma} \int d^3 \mathbf{p} p^0 [a^\dagger(\mathbf{p}, \sigma) a(\mathbf{p}, \sigma) + b^\dagger(\mathbf{p}, \sigma) b(\mathbf{p}, \sigma) - \delta^3(\mathbf{p} - \mathbf{p})]. \quad (7.5.52)$$

В формуле (7.5.52)  $c$ -числовой член играет роль лишь при рассмотрении задач с гравитационными полями; в остальных случаях его можно просто отбросить, поскольку он влияет лишь на выбор нулевого уровня энергии. С учетом этого,  $H_0$  есть положительный оператор, как и для бозонов.

## § 7.6. Связи и скобки Дирака

Главное препятствие на пути построения гамильтониана из лагранжиана — появление связей. Стандартный подход к этой проблеме был предложен Дираком [5], терминологии которого мы будем придерживаться. Для простых теорий, которые обсуждались в этой главе, анализ Дирака в действительности не нужен, поскольку там легко определить независимые канонические переменные. Для иллюстрации мы рассмотрим здесь теорию массивного вещественного векторного поля и вернемся к методу Дирака в следующей главе, где он будет действительно полезен.

*Первичные связи* — это связи, налагаемые на систему (как в следующей главе, где мы выберем калибровку электромагнитного поля) или возникающие в силу специфики лагранжиана. В качестве примера последней ситуации рассмотрим лагранжиан (7.5.11) массивного

<sup>2)</sup> Обратим внимание на отрицательный знак  $c$ -числового слагаемого. Гипотетическая симметрия, известная как *суперсимметрия* [4], связывает числа бозонных и фермионных полей, причем оказывается, что  $c$ -числовые константы в  $H_0$  сокращаются.

векторного поля  $V^\mu$ , взаимодействующего с током  $J_\mu$ :

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{1}{2} m^2 V[\mu] V^\nu + J_\mu V^\mu, \quad (7.6.1)$$

где

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu V_\nu - \partial_\nu V_\mu. \quad (7.6.2)$$

Допустим, мы считаем все компоненты  $V^\mu$  равноправными. Тогда мы должны ввести сопряженные им переменные:

$$\Pi^\mu \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 V_\mu)} = -F^{0\mu}. \quad (7.6.3)$$

Немедленно обнаруживаем первичную связь:

$$\Pi_0 = 0. \quad (7.6.4)$$

В более общей формулировке: первичная связь обнаруживается, когда уравнение  $\Pi_l = \delta L / \delta \partial_0 \Psi^l$  нельзя разрешить (по крайней мере локально) относительно всех  $\partial_0 \Psi^l$ . Это имеет место тогда и только тогда, когда матрица вторых производных  $\delta^2 L / \delta(\partial_0 \Psi^l) \delta(\partial_0 \Psi^m)$  вырождена (имеет нулевой детерминант). Такие лагранжианы называют *вырожденными*.

Далее, имеются *вторичные связи*, возникающие из требования совместности первичных связей и уравнений движения. Для массивного векторного поля это уравнение Эйлера–Лагранжа (7.5.16) для  $V^0$ :

$$\partial_i \Pi_i = m^2 V^0 - J^0. \quad (7.6.5)$$

На этом рассмотрение связей мы заканчиваем, но в других теориях могут встретиться дальнейшие ограничения, возникающие как требование совместности вторичных связей с уравнениями поля, и т.д. Различие между первичными, вторичными и т.д. связями не так важно; мы будем рассматривать их вместе.

Имеется другое, более важное различие между типами связей. Найденные нами связи для случая массивного векторного поля относят ко *второму роду*, для которого имеется универсальное предписание для правил коммутации. Чтобы разъяснить различие между связями первого и второго рода, а также рецепт для работы со связями второго рода, полезно сперва вспомнить определение скобок Пуассона в классической механике.

Рассмотрим произвольный лагранжиан  $L(\Psi, \dot{\Psi})$ , зависящий от набора переменных  $\Psi^a(t)$  и их производных по времени  $\dot{\Psi}^a(t)$  (лагранжианы теории поля представляют частный случай — индекс  $a$  обозначает там индекс компонент поля и координаты  $\mathbf{x}$ ). Определим канонически сопряженные переменные для всех  $\Psi^a$  по формуле

$$\Pi_a = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\Psi}^a}. \quad (7.6.6)$$

Величины  $\Pi$  и  $\Psi$  в общем случае не независимы, а связаны различными соотношениями — первичными и вторичными связями. Скобки

Пуассона определяются так:

$$[A, B]_P \equiv \frac{\partial A}{\partial \Psi^a} \frac{\partial B}{\partial \Pi_a} - \frac{\partial B}{\partial \Psi^a} \frac{\partial A}{\partial \Pi_a}, \quad (7.6.7)$$

где при вычислении частных производных связи не учитываются. В частности, всегда имеем  $[\Psi^a, \Pi_b]_P = \delta_b^a$  (здесь и далее все поля берутся в фиксированный момент времени и временные аргументы всюду опускаются). Эти скобки обладают теми же алгебраическими свойствами, что коммутаторы:

$$[A, B]_P = -[B, A]_P, \quad (7.6.8)$$

$$[A, BC]_P = [A, B]_P C + B[A, C]_P, \quad (7.6.9)$$

включая тождество Якоби

$$[A, [B, C]_P]_P + [B, [C, A]_P]_P + [C, [A, B]_P]_P = 0. \quad (7.6.10)$$

Если бы можно было принять обычные правила коммутации:

$$[\Psi^a, \Pi_b] = i\delta_b^a, \quad [\Psi^a, \Psi^b] = [\Pi_a, \Pi_b] = 0,$$

то тогда коммутатор любых двух функций от  $\Psi$ ,  $\Pi$  был бы просто  $[A, B] = i[A, B]_P$ . Но из-за связей коммутатор и скобки Пуассона усложняются.

Связи всегда можно записать в виде  $\chi_N = 0$ , где  $\chi_N$  — набор функций от  $\Psi$ ,  $\Pi$ . Поскольку мы объединяем вторичные и первичные связи, набор всех связей должен быть совместен с уравнениями движения  $\dot{A} = [A, H]_P$ , т.е. должны выполняться условия

$$[\chi_N, H]_P = 0, \quad (7.6.11)$$

когда выполнены условия  $\chi_N = 0$ .

Мы будем говорить, что связь относится к *первому роду*, если ее скобка Пуассона со всеми другими связями равна нулю, когда в результат вычисления (*после* вычисления) подставлены все связи, т.е.  $[\chi_N, \chi_{N'}]_P = 0 \forall N, N'$  при условии, что  $\chi_M = 0 \forall M$ . Мы обнаружим простой пример такого рода связи при квантовании электромагнитного поля в следующей главе, где связи первого рода возникнут из-за симметрии действия — калибровочной инвариантности. В действительности, связи первого рода  $\chi_N = 0$  всегда связаны с некоторой группой симметрии, под действием инфинитезимального преобразования которой произвольная величина  $A$  получает добавку

$$\delta_N A \equiv \sum_N \epsilon_N [\chi_N, A]_P. \quad (7.6.12)$$

(В теории поля это локальные преобразования, поскольку индекс  $N$  содержит 4-координаты). Из формулы (7.6.11) видно, что это преобразование не изменяет гамильтониан, и для связей первого рода оно также учитывает все остальные связи. Такие связи можно исключить

подходящим выбором калибровки или же рассматривать калибровочно-но инвариантными методами, что будет сделано в т. II.

После устранения всех связей первого рода путем выбора калибровки остаются такие условия  $\chi_N = 0$ , что набор попарных скобок Пуассона  $[\chi_N, \chi_M]_P$  является линейно независимым (никакая линейная комбинация этих скобок не равна нулю). Следовательно, матрица, составленная из скобок, невырождена:

$$\text{Det } C \neq 0, \quad (7.6.13)$$

где

$$C_{NM} \equiv [\chi_N, \chi_M]_P. \quad (7.6.14)$$

Связи такого типа называют связями *второго рода*. Отметим, что число таких связей всегда четно, поскольку антисимметричная матрица нечетной размерности непременно вырождена.

Как мы видели, в случае массивного векторного поля связи имеют вид

$$\chi_{1\mathbf{x}} = \chi_{2\mathbf{x}} = 0, \quad (7.6.15)$$

где

$$\chi_{1\mathbf{x}} = \Pi_0(\mathbf{x}), \quad \chi_{2\mathbf{x}} = \partial_i \Pi_i(\mathbf{x}) - m^2 V^0(\mathbf{x}) - J^0(\mathbf{x}). \quad (7.6.16)$$

Скобка Пуассона от этих связей равна

$$C_{1\mathbf{x}, 2\mathbf{y}} = -C_{2\mathbf{y}, 1\mathbf{x}} = [\chi_{1\mathbf{x}}, \chi_{2\mathbf{y}}]_P = m^2 \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \quad (7.6.17)$$

и, разумеется,

$$C_{1\mathbf{x}, 1\mathbf{y}} = C_{2\mathbf{x}, 2\mathbf{y}} = 0. \quad (7.6.18)$$

Эта матрица, очевидно, невырождена, следовательно, связи (7.6.15) — второго рода.

Дирак предположил, что если все связи — второго рода, то коммутационные соотношения можно представить в виде:

$$[A, B] = i[A, B]_D, \quad (7.6.19)$$

где  $[A, B]_D$  — обобщение скобки Пуассона, известное под названием скобки Дирака:

$$[A, B]_D \equiv [A, B]_P - [A, \chi_N]_P (C^{-1})^{NM} [\chi_M, B]_P \quad (7.6.20)$$

(здесь  $N$  и  $M$  — составные индексы, включающие координаты, принимающие значения 1,  $\mathbf{x}$  и 2,  $\mathbf{x}$  в случае векторного поля). Он заметил, что скобка Дирака обладает теми же алгебраическими свойствами, что и коммутатор

$$[A, B]_D = -[B, A]_D, \quad (7.6.21)$$

$$[A, BC]_D = [A, B]_D C + B[A, C]_D, \quad (7.6.22)$$

$$[A, [B, C]_D]_D + [B, [C, A]_D]_D + [C, [A, B]_D]_D = 0, \quad (7.6.23)$$

а также свойством

$$[\chi_N, B]_D = 0, \quad (7.6.24)$$

которое делает коммутационные соотношения (7.6.19) совместными со связями  $\chi_N = 0$ . Кроме того, скобка Дирака не изменяется, если заменить набор функций  $\chi_N$  на любой другой набор  $\chi'_N$ , задающий то же подмногообразие в фазовом пространстве. Впрочем, все эти замечательные свойства не доказывают формулу (7.6.19).

Свет на эту проблему проливает (если не разрешает ее) мощная теорема Маскавы и Накаджимы [6]. Они показали, что для любого набора канонических переменных  $\Psi^a, \Pi_a$  со связями второго рода всегда найдется такое каноническое преобразование<sup>1)</sup> в набор переменных двух типов —  $Q^n, \mathcal{Q}^r$  и им сопряженных  $P_n, \mathcal{P}_r$ , что связи примут вид  $\mathcal{Q}^r = \mathcal{P}_r = 0$ . Вычисляя скобки Пуассона в этих координатах, переобозначив функции связи  $\chi_{1r} = \mathcal{Q}^r, \chi_{2r} = \mathcal{P}_r$ , находим:

$$C_{1r,2s} = [\mathcal{Q}^r, \mathcal{P}_s]_P = \delta_s^r,$$

$$C_{1r,1s} = [\mathcal{Q}^r, \mathcal{Q}^s]_P = 0, \quad C_{2r,2s} = [\mathcal{P}_r, \mathcal{P}_s]_P = 0,$$

и для любых двух функций  $A, B$

$$[A, \chi_{1r}]_P = -\frac{\partial A}{\partial \mathcal{P}_r}, \quad [A, \chi_{2r}]_P = \frac{\partial A}{\partial \mathcal{Q}^r}.$$

Эта  $C$ -матрица имеет обратную,  $C^{-1} = -C$ , так что скобки Дирака (7.6.20) принимают вид:

$$\begin{aligned} [A, B]_D &= [A, B]_P + [A, \chi_{1r}]_P [\chi_{2r}, B]_P - [A, \chi_{2r}]_P [\chi_{1r}, B]_P = \\ &= [A, B]_P - \frac{\partial A}{\partial \mathcal{Q}^r} \frac{\partial B}{\partial \mathcal{P}_r} + \frac{\partial B}{\partial \mathcal{Q}^r} \frac{\partial A}{\partial \mathcal{P}_r} = \\ &= \frac{\partial A}{\partial Q^n} \frac{\partial B}{\partial P_n} - \frac{\partial B}{\partial Q^n} \frac{\partial A}{\partial P_n}. \end{aligned} \quad (7.6.25)$$

Другими словами, скобки Дирака равны скобкам Пуассона, вычисленным через независимые канонические переменные  $Q^n, P_n$ . Если предположить, что эти переменные удовлетворяют каноническим коммутационным соотношениям, то коммутатор операторов общего вида  $A, B$  дается формулой (7.6.19) в терминах скобок Дирака<sup>2)</sup>.

<sup>1)</sup> Напомним, что под каноническим преобразованием подразумевается такой переход от одного набора координат  $\Psi^a, \Pi_a$  в фазовом пространстве к другому набору координат  $\tilde{\Psi}^a, \tilde{\Pi}_a$ , что  $[\tilde{\Psi}^a, \tilde{\Pi}_b]_P = \delta_b^a$  и  $[\tilde{\Psi}^a, \tilde{\Psi}^b]_P = = [\tilde{\Pi}_a, \tilde{\Pi}_b]_P = 0$  (скобки Пуассона вычисляются в терминах старых переменных). Отсюда следует, что скобки Пуассона любых двух функций не зависят от того, в каких канонических переменных они вычислены ( $\Psi, \Pi$  или  $\tilde{\Psi}, \tilde{\Pi}$ ). Если канонические переменные удовлетворяют уравнениям Гамильтона, то новые канонические переменные удовлетворяют уравнениям с тем же гамильтонианом. Лагранжиан изменяется при каноническом преобразовании, но лишь на полную производную по времени, т.е. действие не изменяется.

Вернемся теперь к массивным векторным полям, чтобы прокантовать их с помощью скобки Дирака. В этом случае несложно выразить связанные переменные  $V^0$ ,  $\Pi_0$  через независимые<sup>3)</sup>  $V_i$ ,  $\Pi_i$ : имеем  $\Pi_0 = 0$ , а  $V^0$  дается формулой (7.6.5). Из (7.6.17) и (7.6.18) замечаем, что  $C_{NM}$  имеет обратную матрицу

$$(C^{-1})^{1\mathbf{x},2\mathbf{y}} = -(C^{-1})^{2\mathbf{y},1\mathbf{x}} = -m^{-2}\delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \quad (7.6.26)$$

$$(C^{-1})^{1\mathbf{x},1\mathbf{y}} = (C^{-1})^{2\mathbf{x},2\mathbf{y}} = 0. \quad (7.6.27)$$

Таким образом, предписание Дирака (7.6.19), (7.6.20) дает одновременные коммутаторы

$$\begin{aligned} [A, B] &= i[A, B]_P + \\ &+ im^{-2} \int d^3z ([A, \Pi_0(\mathbf{z})]_P [\partial_i \Pi_i(\mathbf{z}) - m^2 V^0(\mathbf{z}) - J^0(\mathbf{z}), B]_P - A \leftrightarrow B). \end{aligned} \quad (7.6.28)$$

По определению имеем

$$\begin{aligned} [V^\mu(\mathbf{x}), \Pi_\nu(\mathbf{y})]_P &= \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y})\delta_\nu^\mu, \\ [V^\mu(\mathbf{x}), V^\nu(\mathbf{y})]_P &= [\Pi_\mu(\mathbf{x}), \Pi_\nu(\mathbf{y})]_P = 0. \end{aligned} \quad (7.6.29)$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} [V^i(\mathbf{x}), V^j(\mathbf{y})] &= [V^0(\mathbf{x}), V^0(\mathbf{y})] = 0, \\ [V^i(\mathbf{x}), V^0(\mathbf{y})] &= -im^{-2}\partial_i\delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \\ [V^i(\mathbf{x}), \Pi_j(\mathbf{y})] &= i\delta_j^i\delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \\ [V^0(\mathbf{x}), \Pi_j(\mathbf{y})] &= [V^\mu(\mathbf{x}), \Pi_0(\mathbf{y})] = 0, \\ [\Pi^\mu(\mathbf{x}), \Pi^\nu(\mathbf{y})] &= 0. \end{aligned} \quad (7.6.30)$$

На самом деле мы бы получили те же коммутационные соотношения, если бы предположили, что независимые переменные отвечают обычным правилам коммутации  $[V^i(\mathbf{x}), \Pi_j(\mathbf{y})] = i\delta_j^i\delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y})$ ,

<sup>2)</sup> Все еще непонятно, почему мы должны принимать канонические коммутационные соотношения для независимых переменных  $Q^n$ ,  $P_n$ , построенных по теореме Маскавы–Накаджимы. В конечном счете, подтверждением этих коммутационных соотношений является их согласованность с коммутационными правилами для свободных полей, выведенными в гл. 5, но чтобы применить этот тест, нужно знать, чему равны  $Q^n$ ,  $P_n$ . В приложении к этой главе мы приведем два больших класса теорий, в которых можно определить набор независимых  $Q$ ,  $P$  таким образом, что дираковские коммутационные соотношения (7.6.19) следуют из обычных канонических правил для  $Q$ ,  $P$ . Мы также покажем, что этих случаях гамильтониан, записанный через независимые  $\Psi$ ,  $\Pi$ , можно выразить и через зависимые переменные.

<sup>3)</sup> Это частный случай теорий, обсуждаемых в пункте А приложения к данной главе.

$[V^i(\mathbf{x}), V^j(\mathbf{y})] = [\Pi_i(\mathbf{x}), \Pi_j(\mathbf{y})] = 0$  и использовали связи для вычисления коммутаторов, содержащих  $\Pi_0$ ,  $V^0$ .

### § 7.7. Переопределения полей и свободные параметры<sup>1)</sup>

Наблюдаемые величины, такие, как массы и  $S$ -матричные элементы, не зависят от некоторых параметров в действии, известных под названием *свободных* параметров. Это связано с тем, что изменение этих параметров можно компенсировать переопределением полей. Непрерывное переопределение полей, например инфинитезимальное локальное преобразование  $\Psi^l(x) \rightarrow \Psi^l(x) + \epsilon F^l(\Psi(x), \partial_\mu \Psi(x), \dots)$ , очевидно, не влияет на наблюдаемые величины<sup>2)</sup>, хотя, конечно, изменяет матричные элементы самих полей.

Как можно выяснить, можно ли компенсировать изменение параметров теории некоторым переопределением полей? Непрерывное локальное преобразование полей изменяет действие на величину

$$\delta I[\Psi] = \epsilon \sum_l \int d^4x \frac{\partial I[\Psi]}{\partial \Psi^l(x)} F^l(\Psi(x), \partial\Psi(x), \dots). \quad (7.7.1)$$

Следовательно, любое изменение  $\delta g_i$  констант связи  $g_i$ , которое изменяет действие на величину

$$\sum_i \frac{\partial I}{\partial g_i} \delta g_i = -\epsilon \sum_l \int d^4x \frac{\partial I[\Psi]}{\partial \Psi^l(x)} F^l(\Psi(x), \partial\Psi(x), \dots), \quad (7.7.2)$$

можно компенсировать переопределением полей

$$\Psi^l(x) \rightarrow \Psi^l(x) + \epsilon F^l(\Psi(x), \partial_\mu \Psi(x), \dots),$$

и, следовательно, оно не влияет на наблюдаемые величины. Другими словами, *константа связи является свободной, если изменение действия при варьировании этого параметра равно нулю при подстановке уравнений поля  $\delta I/\delta \Psi^l = 0$* .

К примеру, возьмем лагранжиан скалярного поля в виде

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2} Z(\partial^\mu \Phi \partial_\mu \Phi + m^2 \Phi^2) - \frac{1}{24} g Z^2 \Phi^4.$$

<sup>1)</sup> Материал этого параграфа выходит за рамки основного содержания книги и может быть опущен при первом чтении.

<sup>2)</sup> Например, теорема из § 10.2 показывает, что, после умножения полей на правильные константы перенормировки,  $S$ -матричные элементы можно получить из вакуумного среднего хронологического произведения *любых* операторов, обладающих ненулевым матричным элементом перехода из вакуума в одиночественные состояния для частиц, участвующих в реакции.

Константа  $Z$  является свободной, поскольку

$$\frac{\partial I}{\partial Z} = \frac{1}{2} \int d^4x \Phi \left( \square \Phi - m^2 \Phi - \frac{1}{6} g Z \Phi^3 \right),$$

а это выражение равно нулю на траекториях уравнений движения

$$\square \Phi - m^2 \Phi = \frac{1}{6} g Z \Phi^3.$$

С другой стороны, ни голая масса  $m$ , ни константа самодействия  $g$  не являются свободными, и никакая функция от  $m$  и  $g$  не свободна.

В данном примере для компенсации изменения  $Z$  достаточно умножить поле на константу, т.е. функция  $F$  пропорциональна полю  $\Phi$  (поэтому  $Z$  называют константой перенормировки). Это преобразование — наиболее общее преобразование, не изменяющее данное действие. Но для действий более общего вида, рассмотренных в § 12.3, § 12.4, с произвольным числом полей и производных, пришлось бы рассмотреть как линейные, так и нелинейные преобразования полей; свободные параметры образуют там бесконечное подмножество параметров теории.

## § 7.7. Приложение: вывод скобок Дирака из канонических коммутаторов

В данном приложении мы покажем на примере теории двух типов, что формула, выражающая коммутаторы через скобки Дирака, следует из обычных канонических коммутационных соотношений для редуцированного набора переменных.

**A.** Предположим, что (как в случае массивного векторного поля  $V^\mu$ ) квантовые переменные  $\Psi^a$ ,  $\Pi_a$  в лагранжиане  $L$  можно разбить на два класса<sup>1)</sup>: набор независимых канонических переменных  $Q^n$  (как  $V^i(\mathbf{x})$ ) с независимыми сопряженными переменными  $P_n = \partial L / \partial \dot{Q}^n$ , и второй набор  $\mathcal{Q}^r(\mathbf{x})$  (как  $V^0$ ), производные по времени от которых не входят в лагранжиан. Первичные связи — это условия  $\chi_{1r} = 0$ , где

$$\chi_{1r} = \mathcal{P}_r \tag{7.A.1}$$

суть сопряженные с  $\mathcal{Q}^r$  переменные. Вторичные связи происходят из уравнений движения  $0 = \partial L / \partial \dot{\mathcal{Q}}^r$  для  $\mathcal{Q}^r$ . Мы предполагаем, что эти связи можно “разрешить”, т.е. записать в виде  $\chi_{2r} = 0$ , где  $\chi_{2r}$

<sup>1)</sup> Мы снова используем сокращенные обозначения, в которых индексы вида  $a$ ,  $n$ ,  $r$  включают все дискретные и координатные ( $\mathbf{x}$ ) переменные. По повторяющимся индексам производится суммирование и интегрирование. Все квантовые переменные берутся в один момент времени, а общий временной аргумент всюду опускается. Величины  $\mathcal{Q}^r$  соответствуют  $C^r$  из § 7.2.

имеет вид

$$\chi_{2r} = \mathcal{Q}^r - f^r(Q, P) \quad (7.A.2)$$

(пример такого рода — формула (7.6.5), которая выражает  $V^0$  через независимые  $P$ ,  $Q$ ). Мы считаем, что независимые  $Q$ ,  $P$  удовлетворяют каноническим коммутационным соотношениям

$$[Q^n, P_m] = i\delta_m^n, \quad [Q^n, Q^m] = [P_n, P_m] = 0. \quad (7.A.3)$$

Связь  $\chi_{2r} = 0$  дает коммутаторы для  $\mathcal{Q}$ :

$$[\mathcal{Q}^r, Q^n] = -i \frac{\partial f^r}{\partial P_n}, \quad [\mathcal{Q}^r, P_n] = i \frac{\partial f^r}{\partial Q^n}, \quad (7.A.4)$$

$$[\mathcal{Q}^r, \mathcal{Q}^s] = i\Gamma^{rs}, \quad (7.A.5)$$

где  $\Gamma^{rs}$  есть скобка Пуассона

$$\Gamma^{rs} \equiv [f^r, f^s]_P, \quad (7.A.6)$$

и, разумеется, все коммутаторы с  $\mathcal{P}_r$  равны нулю:

$$[\mathcal{P}_r, Q^n] = [\mathcal{P}_r, P_n] = [\mathcal{P}_r, \mathcal{Q}^s] = [\mathcal{P}_r, \mathcal{P}_s] = 0. \quad (7.A.7)$$

Теперь сравним эти коммутаторы и скобки Дирака. Скобки Пуассона от связей равны

$$C_{1r,1s} \equiv [\chi_{1r}, \chi_{1s}]_P = 0, \quad (7.A.8)$$

$$C_{1r,2s} \equiv -C_{2s,1r} \equiv [\chi_{1r}, \chi_{2s}]_P = -\delta_r^s, \quad (7.A.9)$$

$$C_{2r,2s} \equiv [\chi_{2r}, \chi_{2s}]_P = [f^r(Q, P), f^s(Q, P)]_P \equiv \Gamma^{rs}. \quad (7.A.10)$$

В нашем примере массивного векторного поля величины  $\Gamma^{rs}$  равны нулю, но рассуждение остается в силе и для общего случая ненулевых  $\Gamma^{rs}$ . Легко видеть, что  $C$ -матрица имеет обратную матрицу с компонентами

$$(C^{-1})^{1r,1s} = \Gamma^{rs}, \quad (C^{-1})^{2r,2s} = 0, \quad (7.A.11)$$

$$(C^{-1})^{1r,2s} = -(C^{-1})^{2s,1r} = \delta_s^r.$$

Скобки Пуассона любой функции  $A$  с функциями связей равны

$$[A, \chi_{1r}]_P = \frac{\partial A}{\partial \mathcal{Q}^r}, \quad [A, \chi_{2r}]_P = -\frac{\partial A}{\partial \mathcal{P}^r} - [A, f^r(Q, P)]_P.$$

Здесь скобка Дирака есть

$$[A, B]_D = [A, B]_P - \frac{\partial A}{\partial \mathcal{Q}^r} \frac{\partial B}{\partial \mathcal{P}_r} + \frac{\partial B}{\partial \mathcal{Q}^r} \frac{\partial A}{\partial \mathcal{P}_r} + \\ + \frac{\partial A}{\partial \mathcal{Q}^r} \Gamma^{rs} \frac{\partial B}{\partial \mathcal{Q}^s} - \frac{\partial A}{\partial \mathcal{Q}^r} [B, f^r]_P + [A, f^r]_P \frac{\partial B}{\partial \mathcal{Q}^r}. \quad (7.A.12)$$

Теперь, если  $A, B$  — функции независимых канонических переменных  $Q^n$ ,  $P_n$ , то  $\partial A / \partial \mathcal{Q}^r = \partial B / \partial \mathcal{Q}^r = 0$ , так что скобка Дирака равна скобке Пуассона. В частности,

$$[Q^n, P_m]_D = \delta_m^n, \quad [Q^n, Q^m]_D = [P_n, P_m]_D = 0. \quad (7.A.13)$$

Если  $A = \mathcal{Q}^r$ , а  $B$  — функция от  $Q, P$ , в правой части (7.А.12) остается только пятое слагаемое. В частности,

$$[\mathcal{Q}^r, Q^n]_D = -\frac{\partial f^r}{\partial P_n}, \quad [\mathcal{Q}^r, P^n]_D = +\frac{\partial f^r}{\partial Q_n}. \quad (7.А.14)$$

Если обе функции  $A, B$  суть просто координаты  $\mathcal{Q}$ , остается только четвертое слагаемое

$$[\mathcal{Q}^r, \mathcal{Q}^s]_D = \Gamma^{rs}. \quad (7.А.15)$$

Наконец, если  $A = \mathcal{P}_r$ , а  $B$  — произвольное, остаются первое и третье слагаемые, и они сокращаются:

$$[\mathcal{P}_r, B]_D = [\mathcal{P}_r, B]_P + \frac{\partial B}{\partial \mathcal{Q}^r} = 0. \quad (7.А.16)$$

Сравнение уравнений (7.А.13)–(7.А.16) с уравнениями (7.А.3)–(7.А.7) показывает, что во всех случаях коммутаторы равны скобке Дирака, умноженной на  $i$ . Этого и следовало ожидать, поскольку, как отмечалось в § 7.6, все скобки Дирака с функциями связей равны нулю, так что скобки Дирака с  $\mathcal{Q}^r$  и (или)  $\mathcal{P}_s$  можно получить, выражая с помощью связей величины  $\mathcal{Q}^r$  и (или)  $\mathcal{P}_s$  через независимые  $Q, P$ .

**В.** Теперь рассмотрим случай, когда связи имеют вид уравнений  $\chi_{1r}(\Psi) = 0$  для  $\Psi^a$ , которые можно разрешить относительно меньшего набора независимых переменных  $Q^n$  и такого же числа условий  $\chi_{2r}(\Pi) = 0$  на  $\Pi_a$ , из которых можно выразить  $\Pi_a$  через меньшее число независимых  $P_n$ . В следующей главе будет приведен пример ситуации, когда связи на  $\Psi^a$  являются условиями, фиксирующими калибровку, вводимыми, чтобы избавиться от связей первого рода, а ограничения на  $\Pi_a$  — вторичные связи, происходящие из требованияния совместности связей первого рода с уравнениями движения. Считаем, что независимые переменные удовлетворяют каноническим соотношениям  $[Q^n, P_m] = i\delta_m^n$ ,  $[Q^n, Q^m] = [P_n, P_m] = 0$ . Зависимые и независимые импульсы связаны соотношениями

$$P_n = \frac{\partial Q}{\partial \dot{Q}^n} = \frac{\partial Q}{\partial \dot{\Psi}^b} \frac{\partial \Psi^b}{\partial Q^n} = \Pi_b \frac{\partial \Psi^b}{\partial Q^n}. \quad (7.А.17)$$

Отсюда следует, что

$$[\Psi^a, \Pi_b] \frac{\partial \Psi^b}{\partial Q^n} = [\Psi^a, P_n] = i \frac{\partial \Psi^a}{\partial Q^n}$$

или, что то же самое,

$$\{[\Psi^a, \Pi_b] - i\delta_b^a\} \frac{\partial \Psi^b}{\partial Q^n} = 0. \quad (7.А.18)$$

Теперь связь  $\chi_{1r}(\Psi) = 0$  выполнена для всех  $Q$ , если  $\Psi^a = \Psi^a(Q)$ , стало быть,

$$\frac{\partial \chi_{1r}}{\partial \Psi^b} \frac{\partial \Psi^b}{\partial Q^n} = 0. \quad (7.А.19)$$

Далее, векторы  $(V_r)_b \equiv \partial \chi_{1r} / \partial \Psi^b$  образуют ортогональное дополнение к набору векторов  $(U_n)^b \equiv \partial \Psi^b / \partial Q^n$ , поскольку, если бы существовал

некоторый другой вектор  $V_b$  такой, что  $V_b(U_n)^b = 0 \ \forall n$ , то имелись бы дополнительные ограничения на  $\Psi^a$ . Поэтому уравнение (7.A.18) означает, что

$$[\Psi^a, \Pi_b] = i\delta_b^a + ic_r^a \frac{\partial\chi_{1r}}{\partial\Psi^b} \quad (7.A.20)$$

с некоторыми неизвестными коэффициентами  $c_r^a$ . Чтобы определить их, используем другие связи —  $\chi_{2r}(\Pi) = 0$ . Получаем

$$0 = [\Psi^a, \chi_{2r}(\Pi)] = i[\Psi^a, \Pi_b] \frac{\partial\chi_{2r}(\Pi)}{\partial\Pi_b}.$$

С помощью (7.A.20) находим теперь

$$\frac{\partial\chi_{2r}(\Pi)}{\partial\Pi_a} = -c_s^a \frac{\partial\chi_{1s}(\Psi)}{\partial\Psi^b} \frac{\partial\chi_{2r}(\Pi)}{\partial\Pi_b}. \quad (7.A.21)$$

Легко заметить, что сомножитель коэффициентов  $c_s^a$  есть скобка Пуассона

$$\frac{\partial\chi_{1s}(\Psi)}{\partial\Psi^b} \frac{\partial\chi_{2r}(\Pi)}{\partial\Pi_b} = [\chi_{1s}, \chi_{2r}]_P \equiv C_{1s,2r}.$$

Кроме того, поскольку  $\chi_{1s}$  зависят только от  $\Psi$ , а  $\chi_{2r}$  зависят только от  $\Pi$ , это единственная ненулевая скобка Пуассона от связей, т.е.

$$C_{1r,1s} = C_{2r,2s} = 0.$$

Стало быть, формула (7.A.21) переписывается в виде

$$\frac{\partial\chi_N}{\partial\Pi_a} = -c_s^a C_{1s,N}, \quad (7.A.22)$$

где  $N$  пробегает по всему набору функций связей. Для связей второго рода это уравнение имеет единственное решение

$$c_s^a = -\frac{\partial\chi_N}{\partial\Pi_a} (C^{-1})^{N,1s} = -\frac{\partial\chi_{2r}}{\partial\Pi_a} (C^{-1})^{2r,1s}. \quad (7.A.23)$$

Подстановка его в (7.A.20) дает

$$[\Psi^a, \Pi_b] = i \left[ \delta_b^a - \frac{\partial\chi_{2r}}{\partial\Pi_a} (C^{-1})^{2r,1s} \frac{\partial\chi_{1s}}{\partial\Psi^b} \right]. \quad (7.A.24)$$

Скобки Пуассона  $\Psi^a, \Pi_b$  со связями равны

$$\begin{aligned} [\Psi^a, \chi_{1r}]_P &= 0, & [\Psi^a, \chi_{2r}]_P &= \frac{\partial\chi_{2r}}{\partial\Pi_a}, \\ [\chi_{1r}, \Pi^b]_P &= \frac{\partial\chi_{1r}}{\partial\Psi^b}, & [\chi_{2r}, \Pi_b]_P &= 0, \end{aligned} \quad (7.A.25)$$

т.е. величина в скобках в правой части (7.A.24) есть скобка Дирака

$$[\Psi^a, \Pi_b] = i[\Psi^a, \Pi_b]_D, \quad (7.A.26)$$

что и требовалось доказать. Кроме того, легко заметить, что, поскольку компоненты 11, 22 матрицы  $C^{-1}$  нулевые, остальные скобки Дирака

$$[\Psi^a, \Psi^b]_D = [\Pi_a, \Pi_b]_D = 0, \quad (7.A.27)$$

так что тривиально получаем

$$[\Psi^a, \Psi^b] = i[\Psi^a, \Psi^b]_D, \quad [\Pi_a, \Pi_b] = i[\Pi_a, \Pi_b]_D. \quad (7.A.28)$$

\* \* \*

Кроме правил коммутации, нам необходима явная формула для гамильтониана. В обычном каноническом формализме утверждается, что

$$H = P_n \dot{Q}^n - L, \quad (7.A.29)$$

где сумма берется по всем независимым каноническим переменным. В теориях обоих типов, рассмотренных в этом приложении, гамильтониан можно записать через зависимые переменные как

$$H = \Pi_a \dot{\Psi}^a - L. \quad (7.A.30)$$

Для теорий типа А это утверждение тривиально — сумма берется по таким индексам  $a = n$ , что  $\Psi^n = Q^n$  и  $\Pi_n = P_n$  суть независимые канонические переменные, а также по индексам  $a = r$ , для которых  $\Pi_r = \mathcal{P}_r = 0$ . Для теорий типа В из формулы (7.A.17) получаем

$$P_n \dot{Q}^n = \Pi_b \frac{\partial \Psi^b}{\partial Q^n} Q^n = \Pi_b \dot{\Psi}^b,$$

т.е. снова приходим к формуле (7.A.30).

## Задачи

**1.** Рассмотрите теорию с набором вещественных скалярных полей  $\Phi^n$  с лагранжианом  $\mathcal{L} = -\frac{1}{2} \sum_{mn} \partial_\mu \Phi^n \partial^\mu \Phi^m f_{nm}(\Phi)$ , где  $f_{nm}(\Phi)$  — произвольная вещественная несингулярная матричная функция от полей (так называемая *нелинейная  $\sigma$ -модель*). Произведите каноническое квантование этой теории. Получите взаимодействие  $V[\phi(t), \dot{\phi}(t)]$  в представлении взаимодействия.

**2.** Рассмотрите теорию вещественных скалярных полей  $\Phi^n$  и дирацковских полей  $\Psi^i$  с лагранжианом  $\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_1$ , где  $\mathcal{L}_0$  — стандартный лагранжиан свободных полей, а  $\mathcal{L}_1$  — взаимодействие между  $\Phi$  и  $\Psi$ , не содержащее производных от полей. Получите явное выражение для симметричного тензора энергии–импульса  $\Theta^{\mu\nu}$ .

**3.** В теории, сформулированной в задаче 2, предположите, что лагранжиан инвариантен относительно глобального инфинитезимального преобразования  $\delta \Phi^n = i\epsilon \sum_m t_m^n \Phi^m$ ,  $\delta \Phi^i = i\epsilon \sum_j \tau_j^i \Psi^j$ . Получите явное выражение для сохраняющегося тока, связанного с этой симметрией.

**4.** Рассмотрите теорию комплексного скалярного поля  $\Phi$  и вещественного векторного поля  $V^\mu$ , с лагранжианом

$$\mathcal{L} = -(D_\mu \Phi)^\dagger D_\mu \Phi - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{1}{2} m^2 V_\mu V^\mu - \mathcal{H}(\Phi^\dagger \Phi),$$

где  $D_\mu \equiv \partial_\mu - igV_\mu$ ,  $F_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu V_\nu - \partial_\nu V_\mu$ , а  $\mathcal{H}$  — произвольная функция. Проведите каноническое квантование теории. Запишите взаимодействие в представлении взаимодействия.

**5.** В теории из задачи 4 получите выражения для симметрического тензора энергии-импульса  $\Theta^{\mu\nu}$  и сохраняющегося тока, связанного с симметрией относительно преобразований  $\delta\Phi = i\epsilon\Phi$ ,  $\delta V^\mu = 0$ .

**6.** Докажите, что скобки Дирака удовлетворяют тождеству Якоби (7.6.23).

**7.** Покажите, что скобки Дирака не зависят от выбора функций связей  $\chi_N$ , описывающих одно и то же многообразие в фазовом пространстве.

## Литература

1. *Casimir H.B.G.* // Proc. K. Ned. Akad. Wet. **51**, 653 (1948); *Spaarnay M.J.* // Nature. **180**, 334 (1957).
2. *Belinfante F.* // Physica. **6**, 887 (1939); см. также *Rosenfeld L.* // Mémoires de l'Academie Roy. Belgique. **6**, 30 (1930).
3. См., например, *Weinberg S.* Gravitation and Cosmology. Wiley, N.Y., 1972. Гл. 12. [Рус. пер.: *Вайнберг С.* Гравитация и космология.—М.: Мир, 1975.]
4. См., например, *Wess J., Bagger J.* Supersymmetry and Supergravity. Princeton Univ. Press, Princeton, 1983, а также цитируемую там литературу.
5. *Dirac P.A.M.* Lectures on Quantum Mechanics. Yeshiva Univ., N.Y., 1964. [Рус. пер.: *Дирак П.А.М.* Лекции по квантовой механике.—М.: Мир, 1968 (см. также книгу: *Дирак П.А.М.* Принципы квантовой механики.—М.: Наука, 1979, где воспроизводится указанный перевод лекций Дирака).] См. также *Dirac P.A.M.* // Can. J. Math. **2**, 129 (1950); Proc. Roy. Soc. London, ser. A. **256**, 326 (1958); *Bergmann P.G.* // Helv. Phys. Acta Suppl. **IV**, 79 (1956).
6. *Maskawa T., Nakajima H.* // Prog. Theor. Phys. **56**, 1295 (1976). Я благодарен Дж. Фейнбергу за то, что он указал мне эту работу.

# Г л а в а 8

## ЭЛЕКТРОДИНАМИКА

Первоначальный подход к квантовой электродинамике сводился к постулированию и последующему квантованию классических уравнений Максвелла. Читатель, вероятно, не будет удивлен тем, что в этой книге мы пойдем по совершенно иному пути. Мы сначала покажем необходимость калибровочной инвариантности, рассмотрев необычные сложности, возникающие при квантовании безмассовых частиц со спином, а затем из принципа калибровочной инвариантности выведем основные свойства электродинамики. После этого будет продемонстрирован стандартный современный подход, в котором, исходя из калибровочной инвариантности, показывают необходимость существования векторного потенциала, описывающего безмассовую частицу со спином 1.

Пока рано судить, какая из двух возможностей соответствует природе вещей. Большинство теоретиков исходят из калибровочной инвариантности; впрочем, в современных теориях струн [1] возникает иная аргументация: сначала в струнном спектре обнаруживается безмассовая частица со спином 1, а затем оказывается калибровочная инвариантность эффективной теории поля, которая описывает эти частицы. В любом случае, как мы убедимся, каждый из подходов приводит к квантованным уравнениям Максвелла, которые по-прежнему дают нам классический пример успешной квантовой теории.

### § 8.1. Калибровочная инвариантность

Мы начнем с того, что напомним проблемы, вставшие перед нами при попытке построения ковариантных полей для безмассовой частицы со спиральностью  $\pm 1$ . В § 5.9 мы убедились, что для таких частиц легко построить антисимметричное тензорное свободное поле  $f_{\mu\nu}(x)$ . Это поле можно выразить через 4-потенциал  $a_\mu(x)$  (см. уравнение (5.9.23)) в известном виде

$$f_{\mu\nu}(x) = \partial_\mu a_\nu(x) - \partial_\nu a_\mu(x). \quad (8.1.1)$$

Однако уравнение (5.9.31) показывает, что  $a_\mu(x)$  преобразуется как 4-вектор только с точностью до калибровочного преобразования

$$U_0(\Lambda) a_\mu(x) U_0^{-1}(\Lambda) = \Lambda_\mu^\nu a_\nu(\Lambda x) + \partial_\mu \Omega(x, \Lambda). \quad (8.1.2)$$

В действительности невозможно построить истинный 4-вектор в виде линейных комбинаций операторов рождения–уничтожения частицы со спиральностью  $\pm 1$ . Это связано с сингулярностью при  $m = 0$  в пропагаторе массивного векторного поля

$$\Delta_{\mu\nu}(x, y) = (2\pi)^{-4} \int d^4 q e^{iq \cdot (x-y)} \frac{\eta_{\mu\nu} + q_\mu q_\nu / m^2}{q^2 + m^2 - i\epsilon},$$

которая не позволяет рассматривать безмассовые частицы со спиральностью  $\pm 1$  как предел при  $m \rightarrow 0$  теории массивных частиц спирали 1.

Можно избежать этих проблем, потребовав, чтобы во все взаимодействия входил только<sup>1)</sup> тензор

$$F_{\mu\nu}(x) \equiv \partial_\mu A_\nu(x) - \partial_\nu A_\mu(x)$$

и его производные, но это существенно ограничивает общность, и главное, не соответствует реальности. Вместо того чтобы запретить  $A_\mu(x)$  в действии, потребуем, чтобы действие для материи  $I_M$  и ее взаимодействие с полем были инвариантны при общем калибровочном преобразовании

$$A_\mu(x) \rightarrow A_\mu(x) + \partial_\mu \epsilon(x) \quad (8.1.3)$$

(по крайней мере на траекториях уравнений движения материи); в этом случае добавочный член в (8.1.2) не играет роли. Изменение действия материи при преобразовании (8.1.3) можно записать в виде

$$\delta I_M = \int d^4 x \frac{\delta I_M}{\delta A_\mu(x)} \partial_\mu \epsilon(x). \quad (8.1.4)$$

Значит, лоренц-инвариантность действия  $I_M$  приводит к требованию

$$\partial_\mu \frac{\delta I_M}{\delta A_\mu(x)} = 0. \quad (8.1.5)$$

Это условие выполняется тождественно, если в действие входят только тензор  $F_{\mu\nu}(x)$  и его производные (помимо полей вещества). В этом случае

$$\frac{\delta I_M}{\delta A_\mu(x)} = 2\partial_\nu \frac{\delta I_M}{\delta F_{\mu\nu}(x)}.$$

Но если в действие входит сам потенциал  $A_\mu(x)$ , уравнение (8.1.5) дает нетривиальное ограничение.

Далее нас интересует, в какой теории возникают сохраняющиеся токи, с которыми может взаимодействовать наше поле  $A^\mu(x)$ . Из § 7.3 мы знаем, что внутренние симметрии относительно инфинитезимальных преобразований означают наличие сохраняющихся токов. Точнее

<sup>1)</sup> Теперь мы используем обозначения  $A_\mu$  и  $F_{\mu\nu}$  для электромагнитного потенциала и тензора напряженности, поскольку это взаимодействующие поля.

говоря, если преобразование<sup>2)</sup>

$$\delta\Psi^l(x) = i\epsilon(x)q_l\Psi^l(x) \quad (8.1.6)$$

не изменяет действие при постоянном  $\epsilon$ , то изменение действия материи при переменном  $\epsilon(x)$  общего вида должно иметь вид

$$\delta I_M = - \int d^4x J^\mu(x) \partial_\mu \epsilon(x). \quad (8.1.7)$$

Если поля материи удовлетворяют уравнениям движения, действие имеет экстремум по отношению к *произвольной* вариации полей  $\Psi_l$ , т.е. (8.1.7) должно быть равно нулю, а значит,

$$\partial_\mu J^\mu = 0. \quad (8.1.8)$$

В частности, согласно результатам § 7.3, если  $I_M$  — интеграл от функции  $\mathcal{L}_M(\Psi^l, \partial_\mu \Psi^l)$ , то сохраняющийся ток имеет вид<sup>3)</sup>

$$J^\mu = -i \sum_l \frac{\partial \mathcal{L}_M}{\partial (\partial_\mu \Psi^l(x))} q_l \Psi^l$$

и он генерирует преобразования (8.1.6) в том смысле, что

$$[Q, \Psi^l(x)] = -q_l \Psi^l(x), \quad (8.1.9)$$

где  $Q$  — не зависящий от времени оператор заряда:

$$Q = \int d^3x J^0. \quad (8.1.10)$$

Теперь мы можем построить лоренц-инвариантную теорию, в которой векторное поле  $A_\mu$  взаимодействует с сохраняющимся током  $J^\mu$ , в том смысле, что производная  $\delta I_M / \delta A_\mu(x)$  пропорциональна  $J^\mu(x)$ . Константа пропорциональности может быть помещена в определение общего масштаба зарядов  $q_l$ , т.е. коэффициент можно сделать равным единице:

$$\frac{\delta I_M}{\delta A_\mu(x)} = J^\mu(x). \quad (8.1.11)$$

Закон сохранения электрического заряда позволяет нам фиксировать лишь величины зарядов по отношению к некоторому избранному заряду, за который обычно принимают заряд электрона и обозначают

<sup>2)</sup> Поскольку матрица преобразования теперь диагональна, мы отказываемся от правила суммирования по повторяющимся индексам полей — в формуле (8.1.6) нет суммирования по  $l$ .

<sup>3)</sup> Здесь под  $\Psi^l$  подразумеваются все поля, кроме  $A^\mu$ . Мы используем заглавные буквы, чтобы выделить гейзенберговы операторы, у которых зависимость от времени включает эффекты взаимодействий. Разумеется, нельзя путать  $\Psi^l$  с вектором состояния или волновой функцией.

его  $-e$ . Именно уравнение (8.1.11) придает конкретный смысл<sup>4)</sup> величине  $e$ .

Требование (8.1.11) можно переформулировать как принцип инвариантности [1a]: действие материи инвариантно при одновременном действии преобразований

$$\delta A_\mu(x) = \delta_\mu \epsilon(x), \quad (8.1.12)$$

$$\delta \Psi_l(x) = i\epsilon(x) q_l \Psi_l(x). \quad (8.1.13)$$

Симметрия такого типа с произвольной функцией  $\epsilon(x)$  называется *локальной симметрией* или калибровочной инвариантностью второго рода. Симметрия с постоянным  $\epsilon$  в преобразованиях (8.1.12)–(8.1.13) называется *глобальной симметрией* или калибровочной инвариантностью первого рода. Известно несколько точных локальных симметрий, но все известные глобальные симметрии оказываются следствиями других принципов (см. § 12.5).

Мы пока не сказали ни слова о действии для фотонов. В качестве догадки примем действие для массивного векторного поля при  $m = 0$ :

$$I_\gamma = -\frac{1}{4} \int d^4x F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}. \quad (8.1.14)$$

Выражение (8.1.14) совпадает с действием в классической электродинамике, и его обоснование заключается в том, что  $I_\gamma$  – единственное калибровочно-инвариантное действие, квадратичное по  $F_{\mu\nu}$  и не содержащее высших производных. Более того, оно приводит к согласованной квантовой теории, в чем мы убедимся в следующем параграфе. Если в действии есть члены с высшими производными или более высокими степенями по  $F_{\mu\nu}$ , их можно поместить в действие для материи. Из уравнений (8.1.11) и (8.1.14) получаем уравнения электромагнитного поля:

$$0 = \frac{\delta}{\delta A_\nu} [I_\gamma + I_M] = \partial_\mu F^{\mu\nu} + J^\nu. \quad (8.1.15)$$

В этой формуле мы сразу же узнаем уравнения Максвелла с источником  $J^\nu$ . Кроме них, имеются уравнения Максвелла (соответствующие первой паре в классической записи)

$$0 = \partial_\mu F_{\nu\epsilon} + \partial_\epsilon F_{\mu\nu} + \partial_\nu F_{\epsilon\mu}, \quad (8.1.16)$$

которые являются прямым следствием определения тензора  $F_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ .

В вышеизложенном рассуждении мы исходили из существования безмассовых частиц спина 1 и пришли к выводу об инвариантности действия для материи при локальных калибровочных преобразова-

---

<sup>4)</sup> Разумеется, формула (8.1.11) фиксирует определение  $e$  только после фиксации нормировки  $A_\mu(x)$ . Вопрос нормировки электромагнитного поля поднимается в § 10.4.

ниях (8.1.12), (8.1.13). Обычно рассуждают в обратном порядке — исходят из глобальной внутренней симметрии

$$\delta\Psi^l(x) = i\epsilon q^l \Psi^l(x) \quad (8.1.17)$$

и задаются вопросом, как можно сделать эту симметрию локальной:

$$\delta\Psi^l(x) = i\epsilon(x)q_l\Psi^l(x). \quad (8.1.18)$$

Если лагранжева плотность не содержит производных от полей, то из глобальной симметрии немедленно следует и локальная; однако все реалистичные лагранжианы содержат производные поляй, которые преобразуются не так, как сами поляя:

$$\delta\partial_\mu\Psi^l(x) = i\epsilon(x)q_l\partial_\mu\Psi^l(x) + iq_l\Psi^l(x)\partial_\mu\epsilon(x). \quad (8.1.19)$$

Чтобы сократить второй член, мы вводим векторное поле  $A_\mu(x)$  с законом преобразования

$$\delta A_\mu(x) = \partial_\mu\epsilon(x) \quad (8.1.20)$$

и требуем, чтобы плотность лагранжиана зависела от  $\partial_\mu\Psi^l$  и  $A_\mu(x)$  только в комбинации

$$D_\mu\Psi^l \equiv \partial_\mu\Psi^l - iq_lA_\mu\Psi^l, \quad (8.1.21)$$

которая преобразуется так же, как и  $\Psi^l$ :

$$\delta D_\mu\Psi^l(x) = i\epsilon(x)q_lD_\mu\Psi^l(x). \quad (8.1.22)$$

Лагранжиан материи  $\mathcal{L}_M(\Psi, D\Psi)$ , построенный только из  $\Psi^l$  и  $D_\mu\Psi^l$ , будет инвариантен относительно преобразований (8.1.18), (8.1.20) при произвольной функции  $\epsilon(x)$ , если он инвариантен при постоянном  $\epsilon$ . Для лагранжиана такого вида получаем

$$\frac{\delta I_M}{\delta A_\mu} = \sum_l \frac{\partial \mathcal{L}_M}{\partial D_\mu\Psi^l} (-iq_l\Psi^l) = -i \sum_l \frac{\partial \mathcal{L}_M}{\partial \partial_\mu\Psi^l} q_l\Psi^l,$$

что совпадает с формулой (8.1.11). (В  $\mathcal{L}_M$  можно также включить  $F_{\mu\nu}$  и его производные.) С этой точки зрения отсутствие массы у фотона, описываемого полем  $A_\mu$ , есть следствие калибровочной инвариантности, а не исходное предположение — в самом деле, член  $-\frac{1}{2}m^2A_\mu A^\mu$  в лагранжиане нарушает эту инвариантность.

## § 8.2. Связи и выбор калибровки

Некоторые аспекты электродинамики не позволяют проквантовать ее так же просто, как мы делали в теориях массивных частиц в предыдущей главе. Как обычно, определяем канонически сопряженные переменные для электромагнитного потенциала согласно

$$\Pi^\mu \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 A_\mu)}. \quad (8.2.1)$$

Квантование по обычным правилам дало бы

$$[A_\mu(\mathbf{x}, t), \Pi^\nu(\mathbf{y}, t)] = i\delta_\mu^\nu\delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}).$$

Но это невозможно, поскольку для  $A_\mu$  и  $\Pi^\nu$  есть несколько связей.

Первая связь возникает из того факта, что лагранжиан не зависит<sup>1)</sup> от производной величины  $A_0$  по времени, и потому

$$\Pi^0(x) = 0. \quad (8.2.2)$$

Это ограничение называется *первичной связью*, поскольку оно следует непосредственно из структуры лагранжиана. Здесь также присутствует и *вторичная связь*, которая берется из уравнения движения для величины, фиксированной первичной связью<sup>2)</sup>:

$$\partial_i\Pi^i = -\partial_i\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial F_{i0}} = -\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial A_0} = -J^0, \quad (8.2.3)$$

где слагаемое с производной по времени отсутствует, так как  $F_{00} = 0$ . Хотя лагранжиан материи в общем случае может зависеть от  $A^0$ , плотность заряда зависит только от канонических полей материи<sup>3)</sup>  $Q^n$  и им сопряженных  $P_n$ :

$$J^0 = -i\sum_l\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_0\Psi^l)}q_l\Psi^l = -i\sum_nP_nq_nQ^n. \quad (8.2.4)$$

Следовательно, формула (8.2.3) является функциональной связью канонических переменных. Оба уравнения (8.2.2) и (8.2.3) не согласуются с обычными коммутационными соотношениями

$$[A_\mu(\mathbf{x}, t), \Pi^\nu(\mathbf{y}, t)] = i\delta_\mu^\nu\delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y})$$

и

$$[Q^n(\mathbf{x}, t), \Pi^\nu(\mathbf{y}, t)] = [P_n(\mathbf{x}, t), \Pi^\nu(\mathbf{y}, t)] = 0.$$

Мы сталкивались с подобной сложностью в теории массивного векторного поля. Тогда мы открыли два эквивалентных подхода к этой

<sup>1)</sup> Для  $\mathcal{L}_\gamma = -F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}/4$  имеем

$$\partial\mathcal{L}_\gamma/\partial(\partial_0A_\mu) = -F^{0\mu},$$

что равно нулю при  $\mu = 0$  из-за антисимметричности тензора  $F^{\mu\nu}$ . Для лагранжианов материи  $\mathcal{L}_M$ , содержащих только  $\Psi^l$  и  $D_\mu\Psi^l$ , предписание (8.1.21) говорит, что  $\mathcal{L}_M$  не содержит производных от  $A^\nu$ . Даже если лагранжиан материи зависит от  $F_{\mu\nu}$ ,  $\partial\mathcal{L}_M/\partial(\partial_\nu A_\mu)$  будет тоже антисимметрично по  $\mu, \nu$ , и, следовательно, зануляется при  $\mu = \nu = 0$ .

<sup>2)</sup> Как обычно, латинские индексы  $i, j, \dots$  пробегают значения 1, 2, 3.

<sup>3)</sup> По причине исчерпания букв алфавита я вынужден ввести здесь обозначение, отличное от предыдущей главы. Символы  $Q^n$  и  $P_n$  теперь означают канонические поля материи и им сопряженные, в то время как для электромагнитного поля канонические поля и им сопряженные обозначаются  $A_i$  и  $\Pi_i$ .

проблеме: скобки Дирака и более прямой подход, в котором каноническими переменными считаются только  $A_i$ ,  $\Pi^i$ , а затем решается аналог уравнения (8.2.3), из которого выражается  $A^0$  через эти независимые переменные. Ясно, что в данном случае нам не помогут скобки Дирака: функции связей  $\chi$  здесь равны  $\Pi^0$  и  $\partial_i \Pi_i + J_0$  (вместо  $\partial_i \Pi_i - m^2 A^0 + J_0$ ), и они имеют нулевую скобку Дирака. По терминологии Дирака связи (8.2.2) и (8.2.3) — это связи *первого рода*. Не получится и выразить  $A^0$  как динамическую переменную через другие переменные. Уравнение (8.2.3) не дает значения  $A^0$  для всех моментов времени, а служит начальным условием. Если оно выполнено в некоторый момент, то оно выполняется в любой момент, поскольку (с учетом уравнений движения для  $A^i$ )

$$\partial_0 \left[ \partial_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial F_{i0}} - J^0 \right] = -\partial_i \partial_0 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial F_{0i}} - \partial_0 J^0 = +\partial_i \partial_j \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial F_{ji}} - \partial_i J^i - \partial_0 J^0,$$

и сохранение тока дает

$$\partial_0 \left[ \partial_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial F_{i0}} - J^0 \right] = 0. \quad (8.2.5)$$

Не следует удивляться тому, что для четырех компонент  $A^\mu$  у нас есть лишь три уравнения движения, поскольку в этой теории имеется локальная калибровочная симметрия, которая делает принципиально невозможным определение значений полей по их значениям (вместе с первыми производными) в некоторый момент времени. Для любого решения  $A_\mu(\mathbf{x}, t)$  можно написать другое решение

$$A_\mu(\mathbf{x}, t) + \partial_\mu \epsilon(\mathbf{x}, t)$$

с теми же значениями и производными в момент  $t = 0$  (выбрав  $\epsilon(x)$  так, чтобы его первая и вторая производная по времени были равны нулю при  $t = 0$ ), которое отличается от первого решения  $A_\mu(\mathbf{x}, t)$  при  $t > 0$ .

Из-за этой частичной неопределенности в потенциале  $A_\mu(\mathbf{x}, t)$  невозможно применять каноническое квантование непосредственно к  $A_\mu$  (или, в случае ненулевой массы, к  $\mathbf{A}$ ). Из разнообразных подходов к этой проблеме особенно полезны два следующих метода. Один из них — современный лоренц-инвариантный метод БРСТ-квантования, который будет обсуждаться в т. II. Второй, которым мы сейчас и воспользуемся, заключается в том, что, пользуясь калибровочной свободой, мы “выбираем калибровку”. А именно, проведем конечное калибровочное преобразование

$$A_\mu(x) \rightarrow A_\mu(x) + \delta_\mu \lambda(x), \quad \Psi_l(x) \rightarrow \exp(iq_l \lambda(x)) \Psi_l(x),$$

чтобы  $A_\mu(x)$  стал подчиняться некоторому условию, которое позволит применить методы канонического квантования. В различных приложениях бывают полезны разные калибровки; приведем здесь самые

известные<sup>4)</sup>:

калибровка Лоренца (или Ландау)	$\partial_\mu A^\mu = 0;$
кулоновская калибровка	$\nabla \cdot \mathbf{A} = 0;$
временная калибровка	$A^0 = 0;$
аксиальная калибровка	$A^3 = 0;$
унитарная калибровка	$\text{Im } \Phi = 0.$

Каноническое квантование проще всего производить в аксиальной или кулоновской калибровке, но, разумеется, последняя сохраняет вращательную инвариантность, в отличие от аксиальной калибровки, поэтому мы выберем здесь кулоновскую калибровку [2].

Чтобы убедиться, что такой выбор возможен, заметим, что если  $A^\mu$  не удовлетворяет условию кулоновской калибровки, то “калиброванное” поле  $A^\mu + \partial^\mu \lambda$  будет ему удовлетворять, если выбрать функцию  $\lambda$  такой, что

$$\nabla^2 \lambda = -\nabla \cdot \mathbf{A}.$$

С этого момента будем считать, что такое преобразование произведено, так что

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = 0. \quad (8.2.6)$$

Впредь мы будем рассматривать только лагранжианы материи  $\mathcal{L}_M$ , не зависящие от производных от  $A^\mu$ . Такими лагранжианами обладают, например, стандартные теории скалярного и дираковского поля. Тогда единственным слагаемым, содержащим  $F_{\mu\nu}$ , будет кинетический член  $-\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$ , и условие связи (8.2.3) принимает вид

$$-\partial_i F^{i0} = J^0. \quad (8.2.7)$$

Совместно с кулоновским калибровочным условием (8.2.6) это дает уравнение

$$-\nabla^2 A^0 = J^0, \quad (8.2.8)$$

решение которого можно записать в виде

$$A^0(\mathbf{x}, t) = \int d^3y \frac{J^0(\mathbf{y}, t)}{4\pi|\mathbf{x} - \mathbf{y}|}. \quad (8.2.9)$$

Остающиеся степени свободы — это  $A^i$ ,  $i = 1, 2, 3$ , которые связаны условием калибровки  $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ .

Как уже было замечено, плотность заряда зависит только от канонических полей материи  $Q^n$  и сопряженных переменных  $P_n$ , поэтому формула (8.2.9) дает явное решение для вспомогательного поля  $A^0$ .

<sup>4)</sup> Здесь  $\Phi$  — любое комплексное скалярное поле с  $q \neq 0$ ; эта калибровка используется, когда калибровочная симметрия спонтанно нарушена ненулевым вакуумным средним поля  $\Phi$ .

### § 8.3. Квантование в кулоновской калибровке

При каноническом квантовании в кулоновской калибровке обнаруживается еще одно препятствие. Даже после того как мы исключили с помощью (8.2.9) поля  $A^0$  (и  $\Pi_0$ ) из числа канонических переменных, проделать каноническое квантование полей  $A^i$ ,  $\Pi_i$  все еще невозможно, поскольку остаются еще два ограничения для этих переменных<sup>1)</sup>. Одно из них — условие кулоновской калибровки

$$\chi_{1\mathbf{x}} \equiv \partial_i A^i(\mathbf{x}) = 0. \quad (8.3.1)$$

Второе условие — вторичная связь (8.2.3), которая требует, чтобы

$$\chi_{2\mathbf{x}} \equiv \partial_i \Pi^i(\mathbf{x}) + J^0(\mathbf{x}) = 0. \quad (8.3.2)$$

Оба условия несовместны с обычными коммутационными соотношениями  $[A_i(\mathbf{x}), \Pi_j(\mathbf{y})] = i\delta_{ij}\delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y})$ , поскольку действие оператором  $\partial/\partial x^i$  или  $\partial/\partial y^j$  на их правую часть не дает нуль.

Связи такого типа называются связями *второго рода*, и для них известно универсальное предписание для коммутационных соотношений (см. § 7.6). Заметим, что функции связей обладают следующими скобками Пуассона:

$$\begin{aligned} C_{1\mathbf{x},2\mathbf{y}} &= -C_{2\mathbf{y},1\mathbf{x}} \equiv [\chi_{1\mathbf{x}}, \chi_{2\mathbf{y}}]_P = -\nabla^2 \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \\ C_{1\mathbf{x},1\mathbf{y}} &\equiv [\chi_{1\mathbf{x}}, \chi_{1\mathbf{y}}]_P = 0, \\ C_{2\mathbf{x},2\mathbf{y}} &\equiv [\chi_{2\mathbf{x}}, \chi_{2\mathbf{y}}]_P = 0, \end{aligned} \quad (8.3.3)$$

где скобка обозначает (для любых двух функционалов  $U$ ,  $V$ )

$$[U, V]_P \equiv \int d^3x \left[ \frac{\delta U}{\delta A^i(\mathbf{x})} \frac{\delta V}{\delta \Pi_i(\mathbf{x})} - \frac{\delta V}{\delta A^i(\mathbf{x})} \frac{\delta U}{\delta \Pi_i(\mathbf{x})} \right].$$

Матрица  $C_{NM}$  невырождена, что и говорит о том, что связи относятся ко второму роду. Далее, переменные  $A^i$  можно выразить через независимые канонические переменные, в качестве которых, например, можно взять  $Q_{1\mathbf{x}} = A^1(\mathbf{x})$ ,  $Q_{2\mathbf{x}} = A^2(\mathbf{x})$ , а  $A^3$  дается решением уравнения (8.3.1):

$$A^3(\mathbf{x}) = - \int^{x^3} ds [\partial_1 A^1(x^1, x^2, s) + \partial_2 A^2(x^1, x^2, s)].$$

С помощью формулы (8.3.2) канонически сопряженные переменные  $\Pi_i$  можно аналогичным образом выразить через канонические  $P_{1\mathbf{x}}$ ,  $P_{2\mathbf{x}}$ . В этом случае (см. приложение В к предыдущей главе),

<sup>1)</sup> В этом параграфе индексы  $i, j, \dots$  пробегают значения 1, 2, 3. Мы продолжаем рассматривать все операторы в один момент времени, опуская временной аргумент.

если независимые канонические переменные  $Q_{1x}, Q_{2x}, P_{1x}, P_{2x}$  удовлетворяют обычным коммутационным соотношениям, то коммутаторы зависимых переменных и им сопряженных даются (с точностью до множителя  $i$ ) соответствующими скобками Дирака (7.6.20). Этот рецепт весьма удобен тем, что избавляет от необходимости выписывать явные выражения зависимых переменных через независимые.

Для вычисления скобок Дирака сперва заметим, что матрица  $C$  имеет обратную матрицу с компонентами

$$(C^{-1})_{1x,2y} = -(C^{-1})_{2y,1x} = -\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{e^{ik \cdot (x-y)}}{k^2} = -\frac{1}{4\pi|x-y|}, \quad (8.3.4)$$

$$(C^{-1})_{1x,1y} = (C^{-1})_{2x,2y} = 0.$$

Далее, ненулевые скобки Пуассона  $A^i, \Pi_i$  с функциями связей равны

$$[A^i(x), \chi_{2y}]_P = -\frac{\partial}{\partial x^i} \delta^3(x-y),$$

$$[\Pi_i(x), \chi_{1y}]_P = +\frac{\partial}{\partial x^i} \delta^3(x-y).$$

Следовательно, согласно формулам (7.6.19)–(7.6.20), одновременные коммутаторы равны

$$[A^i(x), \Pi_j(y)] = i\delta_j^i \delta^3(x-y) + i \frac{\delta^2}{\delta x^j \delta x^i} \left( \frac{1}{4\pi|x-y|} \right), \quad (8.3.5)$$

$$[A^i(x), A^j(y)] = [\Pi_i(x), \Pi_j(y)] = 0.$$

Обратим внимание, что они совместны с условиями кулоновской калибровки (8.3.1)–(8.3.2), что и гарантируют общие свойства скобок Дирака.

Теперь стоит выяснить смысл вектора  $\mathbf{\Pi}$  в электродинамике. В теориях, рассмотренных в предыдущем параграфе, где  $\dot{\mathbf{A}}$  входит в лагранжиан только в кинетическом члене  $-\frac{1}{4} \int d^3x F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$ , варьирование лагранжиана по  $\dot{\mathbf{A}}$  без учета связи  $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$  дает

$$\Pi_j = \frac{\delta L}{\delta \dot{A}^j(x)} = \dot{A}^j(x) + \frac{\partial}{\partial x^j} A^0(x). \quad (8.3.6)$$

Но если компоненты  $\mathbf{A}$  связаны условием  $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ , вариационная производная по  $\dot{\mathbf{A}}$  плохо определена. Если вариация  $L$  при изменении  $\dot{\mathbf{A}}$  на  $\delta \dot{\mathbf{A}}$  равна  $\delta L = \int d^3x \mathcal{P} \cdot \delta \dot{\mathbf{A}}$ , то, поскольку  $\nabla \cdot \delta \dot{\mathbf{A}} = 0$ , можно также написать, что  $\delta L = \int d^3x [\mathcal{P} + \nabla \mathcal{F}] \cdot \delta \dot{\mathbf{A}}$  с любой скалярной функцией  $\mathcal{F}(x)$ . Значит, мы можем лишь утверждать, что  $\mathbf{\Pi}$  равно  $\dot{\mathbf{A}}(x) + \nabla A^0(x)$  плюс градиент некоторого скаляра. Эта неопределенность устраняется условием (8.3.2), которое требует, чтобы  $\nabla \cdot \mathbf{\Pi} = -I^0 = \nabla^2 A^0$ . Поскольку  $\nabla \cdot \dot{\mathbf{A}} = 0$ , то формула (8.3.6) в действительности дает правильное выражение для  $\Pi^i$ .

Хотя коммутационные соотношения (8.3.5) довольно просты, нужно учитывать, что  $\Pi$  не коммутирует с полями материи и канонически сопряженными им. Если  $F$  — произвольный функционал от полей материи, то его скобка Дирака с  $\mathbf{A}$  равна нулю, но скобка Дирака с  $\Pi$  равна

$$\begin{aligned}[F, \Pi(\mathbf{z})]_D &= - \int d^3x d^3y [F, \chi_{2\mathbf{x}}]_P \frac{1}{4\pi|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} [\chi_{1\mathbf{y}}, \Pi(\mathbf{z})]_P = \\ &= - \int d^3x d^3y [F, J^0(\mathbf{x})]_P \frac{1}{4\pi|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} \nabla \delta^3(\mathbf{y} - \mathbf{z}) = \\ &= - \int d^3y [F, A^0(\mathbf{y})]_P \nabla \delta^3(\mathbf{y} - \mathbf{z}) = \\ &= [F, \nabla A^0(\mathbf{z})]_P = [F, \nabla A^0(\mathbf{z})]_D.\end{aligned}$$

Чтобы облегчить переход к представлению взаимодействия, мы запишем гамильтониан не через  $\mathbf{A}$ ,  $\Pi$ , а через  $\mathbf{A}$  и соленоидальную часть  $\Pi_\perp$  сопряженного поля  $\Pi$ :

$$\Pi_\perp \equiv \Pi - \nabla A^0 = \dot{\mathbf{A}}, \quad (8.3.7)$$

которая обладает тем свойством, что  $[F, \Pi_\perp(\mathbf{z})] = 0$ . Учитывая, что  $\Pi_\perp(\mathbf{x})$  коммутирует с  $\Pi(\mathbf{y}) - \Pi_\perp(\mathbf{y}) = \nabla A^0(\mathbf{y})$  и что  $\partial_i A^0(\mathbf{x})$  коммутирует с  $\partial_j A^0(\mathbf{y})$ , легко показать, что  $\Pi_\perp(\mathbf{x})$  отвечает тем же коммутационным соотношениям (8.3.5), что и  $\Pi(\mathbf{x})$ , а также подчиняется простой связи

$$\nabla \cdot \Pi_\perp = 0. \quad (8.3.8)$$

Теперь построим гамильтониан. В соответствии с общими результатами приложения к гл. 7, мы можем применить обычные формулы связи лагранжиана и гамильтониана, пользуясь при этом зависимыми переменными  $\mathbf{A}$  и  $\Pi_\perp$ , вместо того чтобы сперва выразить гамильтониан через независимые канонические переменные. В случае электродинамики эта процедура дает

$$H = \int d^3x [\Pi_\perp i \dot{A}^i + P_n \dot{Q}^n - \mathcal{L}], \quad (8.3.9)$$

где, как уже упоминалось, под  $Q^n$  и  $P_n$  следует понимать канонические поля материи и им сопряженные. В формуле (8.3.9) вместо  $\Pi$  можно подставить  $\Pi_\perp$ , поскольку  $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ .

В качестве конкретного примера рассмотрим теорию с лагранжианом вида

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + J_\mu A^\mu + \mathcal{L}_{\text{материя}}, \quad (8.3.10)$$

где  $J_\mu$  — некоторый ток, не зависящий от  $A^\mu$ , а  $\mathcal{L}_{\text{материя}}$  — лагранжиан, соответствующий остальным полям, входящим в  $J^\mu$ . При этом электромагнитное взаимодействие в формуле (8.3.10) выделено в виде члена  $J_\mu A^\mu$ . Лагранжианом такого вида обладает электродинамика

спинорных полей (спин  $1/2$ ), однако в случае скалярных полей электромагнитное взаимодействие содержит один дополнительный член. Заменяя всюду  $\mathbf{A}$  на  $\mathbf{\Pi}_\perp$ , переписываем гамильтониан (8.3.9) в виде

$$H =$$

$$= \int d^3x \left[ \mathbf{\Pi}_\perp^2 + \frac{1}{2} (\nabla \times \mathbf{A})^2 - \frac{1}{2} (\mathbf{\Pi}_\perp + \nabla A^0)^2 - \mathbf{J} \cdot \mathbf{A} + J^0 A^0 \right] + H_M,$$

где  $H_M$  — гамильтониан полей материи, за вычетом их электромагнитных взаимодействий

$$H_M \equiv \int d^3x (P_n \dot{Q}^n - \mathcal{L}_{\text{материя}}).$$

Подставив сюда решение (8.2.9) для  $A^0$ , имеем

$$H = \int d^3x \left[ \frac{1}{2} \mathbf{\Pi}_\perp^2 + \frac{1}{2} (\nabla \times \mathbf{A})^2 - \mathbf{J} \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{2} \mathbf{J}^0 A^0 \right] + H_M. \quad (8.3.11)$$

Член  $\frac{1}{2} J^0 A^0$  может показаться странным, но это есть ничто иное как известная кулоновская энергия

$$V_{\text{кул}} = \frac{1}{2} \int d^3x J^0 A^0 = \frac{1}{2} \int d^3x \int d^3y \frac{J^0(\mathbf{x}) J^0(\mathbf{y})}{4\pi |\mathbf{x} - \mathbf{y}|}. \quad (8.3.12)$$

С помощью коммутаторов (8.3.5) читатель может убедиться, что скорость изменения произвольного оператора  $F$ , зависящего от  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{\Pi}$ , дается формулой  $i\dot{F} = [F, H]$ , как и должно быть.

## § 8.4. Электродинамика в представлении взаимодействия

Теперь мы разделим гамильтониан (8.3.11) на свободный член  $H_0$  и взаимодействие  $V$ :

$$H = H_0 + V, \quad (8.4.1)$$

$$H_0 = \int d^3x \left[ \frac{1}{2} \mathbf{\Pi}_\perp^2 + \frac{1}{2} (\nabla \times \mathbf{A})^2 \right] + H_{\text{материя},0}, \quad (8.4.2)$$

$$V = - \int d^3x \mathbf{J} \cdot \mathbf{A} + V_{\text{кул}} + V_{\text{материя}}, \quad (8.4.3)$$

где  $H_{\text{материя},0}$  и  $V_{\text{материя}}$  — член свободных частиц и член взаимодействия в  $H_{\text{материя}}$ , а  $V_{\text{кул}}$  — кулоновское взаимодействие (8.3.12). Полный гамильтониан (8.4.1) не зависит от времени, поэтому формулы (8.4.2) и (8.4.3) можно вычислять в любой удобный момент времени (лишь бы при этом в обеих формулах момент времени был выбран

одним и тем же), в частности, при  $t = 0$ . Как и в гл. 7, переход в представление взаимодействия производится унитарным преобразованием

$$V(t) = \exp(iH_0t)V[\mathbf{A}, \boldsymbol{\Pi}_\perp, Q, P]_{t=0} \exp(-iH_0t) = V[\mathbf{a}(t), \boldsymbol{\pi}(t), q(t), p(t)], \quad (8.4.4)$$

где  $P$  означает канонически сопряженные переменные к полям материи  $Q$ , а любой оператор  $o(\mathbf{x}, t)$  в представлении взаимодействия связан с его значением  $O(\mathbf{x}, 0)$  в представлении Гейзенберга при  $t = 0$  по формуле

$$o(\mathbf{x}, t) = \exp(iH_0t)O(\mathbf{x}, 0)\exp(-iH_0t), \quad (8.4.5)$$

и, следовательно,

$$i\dot{o}(\mathbf{x}, t) = [o(\mathbf{x}, t), H_0]. \quad (8.4.6)$$

(Мы опустили индекс  $\perp$  у  $\boldsymbol{\pi}(x)$ .) Поскольку преобразование (8.4.5) унитарно, одновременные коммутаторы имеют тот же вид, что и в представлении Гейзенберга:

$$[a^i(\mathbf{x}, t), \pi^j(\mathbf{y}, t)] = i\left[\delta_{ij}\delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}) + \frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^j} \frac{1}{4\pi|\mathbf{x} - \mathbf{y}|}\right], \quad (8.4.7)$$

$$[a^i(\mathbf{x}, t), a^j(\mathbf{y}, t)] = 0, \quad (8.4.8)$$

$$[\pi^i(\mathbf{x}, t), \pi^j(\mathbf{y}, t)] = 0, \quad (8.4.9)$$

и аналогично для полей материи и им сопряженных. По той же причине не изменяются и связи (8.2.6) и (8.3.8):

$$\nabla \cdot \mathbf{a} = 0, \quad (8.4.10)$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\pi} = 0. \quad (8.4.11)$$

Чтобы найти связь между  $\boldsymbol{\pi}$  и  $\dot{\mathbf{a}}$ , вычислим сперва  $\dot{\mathbf{a}}$  с помощью (8.4.6):

$$\begin{aligned} i\dot{a}_i(\mathbf{x}, t) &= [a_i(\mathbf{x}, t), H_0] = \\ &= i \int d^3y \left[ \delta_{ij}\delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}) + \frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^j} \frac{1}{4\pi|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} \right] \pi_j(\mathbf{y}, t). \end{aligned}$$

Заменяем во втором слагаемом  $\partial/\partial x^j$  на  $-\partial/\partial y^j$ , интегрируем по частям и с помощью формулы (8.4.11) находим

$$\dot{\mathbf{a}} = \boldsymbol{\pi}, \quad (8.4.12)$$

так же как и в представлении Гейзенберга. Уравнения движения поля аналогично определяются из формулы

$$\begin{aligned} i\dot{\pi}_i(\mathbf{x}, t) &= [\pi_i(\mathbf{x}, t), H_0] = \\ &= -i \int d^3y \left[ \delta_{ij}\delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}) + \frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^j} \frac{1}{4\pi|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} \right] \times (\nabla \times \nabla \times \mathbf{a}(\mathbf{y}, t))_j, \end{aligned}$$

из которой с помощью (8.4.10) и (8.4.12) можно получить обычное волновое уравнение

$$\square \mathbf{a} = 0. \quad (8.4.13)$$

Поскольку  $A^0$  в представлении Гейзенберга не является независимой полевой переменной, а представляет собой функционал (8.2.9) от полей материи и им сопряженных, который исчезает в пределе нулевых зарядов, мы не будем вводить соответствующий оператор  $a^0$  в представлении взаимодействия, а положим

$$a^0 = 0. \quad (8.4.14)$$

Общее решение уравнений (8.4.10), (8.4.13) и (8.4.14) можно представить в виде

$$\begin{aligned} a^\mu(x) &= \\ &= (2\pi)^{-3/2} \int \frac{d^3 p}{\sqrt{2p^0}} \sum_\sigma [e^{ip \cdot x} e^\mu(\mathbf{p}, \sigma) a(\mathbf{p}, \sigma) + e^{-ip \cdot x} e^{\mu*}(\mathbf{p}, \sigma) a^\dagger(\mathbf{p}, \sigma)], \end{aligned} \quad (8.4.15)$$

где  $p^0 \equiv |\mathbf{p}|$ ;  $e^\mu(\mathbf{p}, \sigma)$  — два произвольных независимых вектора поляризации, удовлетворяющие условиям

$$\mathbf{p} \cdot \mathbf{e}(\mathbf{p}, \sigma) = 0, \quad (8.4.16)$$

$$e^0(\mathbf{p}, \sigma) = 0, \quad (8.4.17)$$

а  $a(\mathbf{p}, \sigma)$  — пара операторных коэффициентов (индекс  $\sigma$  принимает два значения). Выбирая нормировку  $a(\mathbf{p}, \sigma)$ , можно придать условию полноты следующий вид:

$$\sum_\sigma e^i(\mathbf{p}, \sigma) e^j(\mathbf{p}, \sigma)^* = \delta_{ij} - p_i p_j / |\mathbf{p}|^2. \quad (8.4.18)$$

Например, в качестве  $\mathbf{e}(\mathbf{p}, \sigma)$  можно взять те же векторы поляризации, что и в § 5.9:

$$e^\mu(\mathbf{p}, \pm 1) = R(\hat{\mathbf{p}}) \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ \pm i/\sqrt{2} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (8.4.19)$$

где  $R(\hat{\mathbf{p}})$  — стандартная матрица поворота, в результате которого ось  $z$  оказывается направленной вдоль  $\mathbf{p}$ . С помощью формул (8.4.18) и (8.4.12) легко убедиться, что правила коммутации (8.4.7)–(8.4.9) выполняются, если (и только если) операторные коэффициенты в (8.4.15) удовлетворяют условиям

$$[a(\mathbf{p}, \sigma), a^\dagger(\mathbf{p}', \sigma')] = \delta^3(\mathbf{p} - \mathbf{p}') \delta_{\sigma\sigma'}, \quad (8.4.20)$$

$$[a(\mathbf{p}, \sigma), a(\mathbf{p}', \sigma')] = 0. \quad (8.4.21)$$

Как уже отмечалось в случае массивных частиц, этот результат следует считать не альтернативным выводом уравнений (8.4.20) и (8.4.21),

а скорее проверкой того, что формула (8.4.2) дает правильный свободный гамильтониан безмассовых частиц со спиральностью  $\pm 1$ . В том же духе можно вывести из уравнения (8.4.2) с помощью (8.4.12) и (8.4.15) гамильтониан свободных фотонов:

$$H_0 = \int d^3 p \sum_{\sigma} \frac{1}{2} p^0 [a(\mathbf{p}, \sigma), a^\dagger(\mathbf{p}, \sigma)]_+ = \\ = \int d^3 p \sum_{\sigma} p^0 \left( a^\dagger(\mathbf{p}, \sigma) a(\mathbf{p}, \sigma) + \frac{1}{2} \delta^3(\mathbf{p} - \mathbf{p}) \right), \quad (8.4.22)$$

который (не считая несущественного бесконечного  $c$ -числового члена) имеет как раз тот вид, который мы ожидали.

Наконец, запишем взаимодействие (8.4.4) в представлении взаимодействия:

$$V(t) = - \int d^3 x j_\mu(\mathbf{x}, t) a^\mu(\mathbf{x}, t) + V_{\text{кул}}(t) + V_{\text{материя}}(t), \quad (8.4.23)$$

где ток  $j_\mu$  выражается через ток  $J$  в гейзенберговском представлении как

$$j_\mu(\mathbf{x}, t) \equiv \exp(iH_0 t) J_\mu(\mathbf{x}, 0) \exp(-iH_0 t), \quad (8.4.24)$$

а  $V_{\text{кул}}(t)$  — кулоновская энергия

$$V_{\text{кул}}(t) = \exp(iH_0 t) V_{\text{кул}} \exp(-iH_0 t) = \frac{1}{2} \int d^3 x d^3 y \frac{j^0(\mathbf{x}, t) j^0(\mathbf{y}, t)}{4\pi|\mathbf{x} - \mathbf{y}|}. \quad (8.4.25)$$

Слагаемое  $V_{\text{материя}}(t)$  есть неэлектромагнитная часть взаимодействий материи в представлении взаимодействия:

$$V_{\text{материя}}(t) = \exp(iH_0 t) V_{\text{материя}} \exp(-iH_0 t). \quad (8.4.26)$$

Вместо  $\mathbf{j} \cdot \mathbf{a}$  в (8.4.23) мы написали  $j_\mu a^\mu$ , поскольку  $a^0 = 0$ .

## § 8.5. Пропагатор фотона

Согласно общим правилам Фейнмана, изложенным в гл. 6, внутренняя фотонная линия на диаграмме Фейнмана дает множитель в соответствующем слагаемом в  $S$ -матрице, равный пропагатору фотона:

$$-i\Delta_{\mu\nu}(x - y) \equiv (\Phi_{\text{ВАК}}, T\{a_\mu(x), a_\nu(y)\}\Phi_{\text{ВАК}}), \quad (8.5.1)$$

где  $T$ , как обычно, означает хронологическое произведение. Подставив сюда нашу формулу (8.4.15) для электромагнитного потенциала, получаем

$$-i\Delta_{\mu\nu}(x - y) = \\ = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3 2|\mathbf{p}|} P_{\mu\nu}(\mathbf{p}) [e^{ip \cdot (x-y)} \theta(x-y) + e^{ip \cdot (y-x)} \theta(y-x)], \quad (8.5.2)$$

где

$$P_{\mu\nu}(\mathbf{p}) \equiv \sum_{\sigma=\pm 1} e_\mu(\mathbf{p}, \sigma) e_\nu(\mathbf{p}, \sigma)^*, \quad (8.5.3)$$

а  $p^\mu$  в экспонентах берется при  $p^0 = |\mathbf{p}|$ . Из формул (8.4.18) и (8.4.17) мы знаем, что

$$\begin{aligned} P_{ij}(\mathbf{p}) &= \delta_{ij} - \frac{p^i p^j}{|\mathbf{p}|^2}, \\ P_{0i}(\mathbf{p}) &= P_{i0}(\mathbf{p}) = P_{00}(\mathbf{p}) = 0. \end{aligned} \quad (8.5.4)$$

Как мы видели в гл. 6,  $\theta$ -функции в (8.5.2) можно выразить в виде интегралов по независимой временной компоненте  $q^0$  4-импульса  $q^\mu$  вне массовой оболочки, так что уравнение (8.5.2) переписывается в виде

$$\Delta_{\mu\nu}(x - y) = (2\pi)^{-4} \int d^4 q \frac{P_{\mu\nu}(\mathbf{q})}{q^2 - i\epsilon} e^{iq \cdot (x-y)}. \quad (8.5.5)$$

Итак, при использовании правил Фейнмана в импульсном пространстве вклад внутренней фотонной линии с 4-импульсом  $q$ , которая идет между вершинами, где фотон рождается и уничтожается полями  $a^\mu$  и  $a^\nu$ , равен

$$\frac{-i}{(2\pi)^4} \frac{P_{\mu\nu}(\mathbf{q})}{q^2 - i\epsilon}. \quad (8.5.6)$$

Нам будет удобно переписать (8.5.4) в несколько неестественном виде

$$P_{\mu\nu}(\mathbf{q}) = \eta_{\mu\nu} + \frac{q^0 q_\mu n_\nu + q^0 q_\nu n_\mu - q_\mu q_\nu + q^2 n_\mu n_\nu}{|\mathbf{q}|^2}, \quad (8.5.7)$$

где  $n^\mu \equiv (0, 0, 0, 1)$  — фиксированный времениподобный вектор,  $q^2 \equiv \mathbf{q}^2 - (q^0)^2$ , но  $q^0$  совершенно произвольно. Мы будем выбирать  $q^0$  в уравнении (8.5.7) согласно закону сохранения 4-импульса: эта величина равна изменению  $p^0$  частицы материи, проходящей через вершину, в которой рождается фотон. В этом случае слагаемые, пропорциональные  $q_\mu$  и (или)  $q_\nu$  не дают вклада в амплитуду процесса, поскольку эти множители действуют как производные  $\partial_\mu, \partial_\nu$ , а фотонные поля  $a_\mu, a_\nu$  сворачиваются с токами  $j^\mu, j^\nu$ , которые подчиняются закону сохранения  $\partial_\mu j^\mu = 0$ <sup>1</sup>). Член, пропорциональный  $n_\mu n_\nu$ , содержит множитель  $q^2$ , который сокращается с  $q^2$  в знаменателе пропагатора, давая член, который можно получить из члена в действии вида

$$-i \frac{1}{2} \int d^4 x \int d^4 y [-ij^0(x)][-ij^0(y)] \frac{-i}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4 q}{|\mathbf{q}|^2} e^{iq \cdot (x-y)}.$$

<sup>1)</sup> Этот аргумент недостаточно убедителен; настоящее обоснование следует из тщательного анализа фейнмановских диаграмм [3], но самый простой способ решить эту проблему основан на методах континуального интегрирования, см. § 9.6.

Интеграл по  $q^0$  здесь дает  $\delta$ -функцию по времени, так что это эквивалентно поправке в гамильтониане взаимодействия  $V(t)$  вида

$$-\frac{1}{2} \int d^3x \int d^3y \frac{j^0(\mathbf{x}, t)j^0(\mathbf{y}, t)}{4\pi|\mathbf{x} - \mathbf{y}|}.$$

Это в точности сокращает кулоновскую энергию (8.4.25). Наш результат сводится к тому, что эффективный пропагатор фотона можно записать в ковариантном виде

$$\Delta_{\mu\nu}^{\text{eff}}(x - y) = (2\pi)^{-4} \int d^4q \frac{\eta_{\mu\nu}}{q^2 - i\epsilon} e^{iq \cdot (x - y)}, \quad (8.5.8)$$

причем кулоновское взаимодействие выпадает. Итак, мы увидели, что явное нарушение лоренц-инвариантности в мгновенном кулоновском взаимодействии сокращается другим нарушением лоренц-инвариантности, связанным с тем, что (см. § 5.9) поля  $a^\mu(x)$  не являются истинными 4-векторами, а потому обладают нековариантным пропагатором. С практической точки зрения важно то, что в импульсном представлении правил Фейнмана пропагатор фотона равен

$$\frac{-i}{(2\pi)^4} \frac{\eta_{\mu\nu}}{q^2 - i\epsilon} \quad (8.5.9)$$

без кулоновской энергии.

## § 8.6. Правила Фейнмана для спинорной электродинамики

Теперь мы можем сформулировать правила Фейнмана для вычисления  $S$ -матрицы в квантовой электродинамике. Для определенности мы возьмем электродинамику одного сорта частиц со спином  $1/2$ , зарядом  $q = -e$  и массой  $m$ . Эти частицы мы будем называть электронами, но все результаты относятся также к мюонам и другим подобным частицам. Простейший калибровочно- и лоренц-инвариантный лагранжиан такой теории равен<sup>1)</sup>

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \bar{\Psi}(\gamma^\mu [\partial_\mu + ieA_\mu] + m)\Psi. \quad (8.6.1)$$

Тогда 4-вектор электрического тока равен

$$J^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\mu} = -ie\bar{\Psi}\gamma^\mu\Psi. \quad (8.6.2)$$

Взаимодействие (8.4.23) в представлении взаимодействия в данном

---

<sup>1)</sup> В гл. 12 мы обсудим причины, по которым из плотности лагранжиана исключаются более сложные члены.

случае равно

$$V(t) = +ie \int d^3x (\bar{\psi}(\mathbf{x}, t)\gamma^\mu\psi(\mathbf{x}, t))a_\mu(\mathbf{x}, t) + V_{\text{кул}}(t) \quad (8.6.3)$$

(слагаемое  $V_{\text{материя}}$  здесь отсутствует). Как мы видели, кулоновский член  $V_{\text{кул}}(t)$  служит для сокращения нековариантного локального по времени члена в пропагаторе фотона.

В соответствии с общими результатами § 6.3, правила Фейнмана в импульсном представлении для связной части  $S$ -матрицы данной теории выглядят следующим образом.

i) Нарисовать все диаграммы Фейнмана, содержащие не более чем заданное число вершин. Диаграммы состоят из электронных линий со стрелкой и фотонных линий без стрелки; линии соединяются в вершинах, причем в каждую из них входит одна электронная и одна фотонная линия и выходит одна электронная линия. В диаграмму входит снизу или выходит наверх по одной линии для каждой частицы в начальном и конечном состоянии соответственно. Электроны представляются внешними линиями со стрелкой вверх, позитроны — со стрелкой вниз. Число внутренних линий определяется числом внешних линий и числом вершин. Внутренние линии помечаются 4-импульсом вне массовой поверхности, который распространяется в определенном направлении вдоль линии (за которое принимается направление стрелки электронной линии). Каждая внешняя линия помечается импульсом и спиновой переменной (т.е.  $z$ -проекцией спина электрона или спиральностью фотона) частицы в начальном или конечном состоянии.

ii) Приписать каждой компоненте диаграммы следующие множители:

### *Вершины*

Поставить в соответствие каждой вершине индекс  $\alpha$  4-компонентного дираковского спинора, соответствующий линии входящего электрона, индекс  $\beta$ , соответствующий линии выходящего электрона, и 4-индекс  $\mu$ , соответствующий линии фотона. Вершине соответствует множитель

$$(2\pi)^4 e(\gamma^\mu)_{\beta\alpha}\delta^4(k - k' + q), \quad (8.6.4)$$

где  $k$  и  $k'$  — 4-импульсы электрона, входящие в вершину и покидающие ее, а  $q$  — 4-импульс фотона, входящий в вершину (или минус импульс, выходящий из нее).

### *Внешние линии*

Пометить каждую внешнюю линию 3-импульсом  $\mathbf{p}$  и спиновой переменной ( $z$ -проекцией спина электрона или спиральностью  $\sigma$  фотона) частицы в начальном или конечном состоянии. Для электрона

в конечном состоянии, выходящего из вершины и помеченного индексом  $\beta$ , включить множитель<sup>2)</sup>

$$\frac{\bar{u}_\beta(\mathbf{p}, \sigma)}{(2\pi)^{3/2}}. \quad (8.6.5)$$

Для позитрона в конечном состоянии, входящего в вершину и помеченного индексом  $\alpha$ , включить множитель

$$\frac{v_\alpha(\mathbf{p}, \sigma)}{(2\pi)^{3/2}}. \quad (8.6.6)$$

Для электрона в начальном состоянии, входящего в вершину и помеченного индексом  $\alpha$ , включить множитель

$$\frac{u_\alpha(\mathbf{p}, \sigma)}{(2\pi)^{3/2}}. \quad (8.6.7)$$

Для позитрона в начальном состоянии, выходящего из вершины и помеченного индексом  $\beta$ , включить множитель

$$\frac{\bar{v}_\beta(\mathbf{p}, \sigma)}{(2\pi)^{3/2}}. \quad (8.6.8)$$

Здесь спиноры  $u$  и  $v$  — это дираковские 4-компонентные спиноры, рассмотренные в § 5.5. Для фотона в конечном состоянии, связанного с вершиной линией с 4-индексом  $\mu$ , включить множитель

$$\frac{e_\mu^*(\mathbf{p}, \sigma)}{(2\pi)^{3/2} \sqrt{2p^0}}. \quad (8.6.9)$$

Для фотона в начальном состоянии, связанного с вершиной линией с 4-индексом  $\mu$ , включить множитель

$$\frac{e_\mu(\mathbf{p}, \sigma)}{(2\pi)^{3/2} \sqrt{2p^0}}. \quad (8.6.10)$$

Здесь  $e_\mu$  — 4-вектор поляризации фотона, описанный в предыдущем параграфе.

### *Внутренние линии*

Для каждой внутренней электронной линии с 4-импульсом  $k$ , которая идет из вершины с дираковским индексом  $\beta$  в вершину с индексом  $\alpha$ , включить множитель

$$\frac{-i}{(2\pi)^4} \frac{[-i\hat{k} + m]_{\alpha\beta}}{k^2 + m^2 - i\epsilon}. \quad (8.6.11)$$

---

<sup>2)</sup> Матрица  $\beta$  была выделена из взаимодействия в (8.6.4), и потому вместо  $u^\dagger$  и  $v^\dagger$  здесь стоят  $\bar{u}$  и  $\bar{v}$ .

(Здесь мы использовали удобные обозначения для свертки 4-вектора с  $\gamma$ -матрицами:  $\hat{v} \equiv \gamma_\mu v^\mu$ .) Для каждой внутренней фотонной линии с 4-импульсом  $q$ , которая соединяет вершины с 4-индексами  $\mu$  и  $\nu$ , включить множитель

$$\frac{-i}{(2\pi)^4} \frac{\eta_{\mu\nu}}{q^2 - i\epsilon}. \quad (8.6.12)$$

iii) Проинтегрировать произведение всех вышенназванных множителей по всем 4-импульсам внутренних линий и просуммировать по дираковским и 4-индексам.

iv) Сложить результаты для всех диаграмм.

Как известно из § 6.1 (пункты (v), (vi)), возможны дополнительные комбинаторные множители и фермионные минусы.

Сложность вычисления диаграмм Фейнмана быстро нарастает с увеличением числа внутренних линий и вершин, поэтому важно заранее понять, какие числовые множители могут подавить вклад более сложных диаграмм. Мы оценим эти множители, включая не только заряд электрона  $e$ , связанный с вершинами, но и множители 2 и  $\pi$  от вершин, пропагаторов и интегралов по импульсам.

Рассмотрим связную диаграмму с  $V$  вершинами,  $I$  внутренними линиями,  $E$  внешними линиями и  $L$  петлями. Эти величины не независимы: в § 6.3 мы получили для них две связи

$$L = I - V + 1, \quad 2I + E = 3V.$$

От каждой вершины происходит множитель  $e(2\pi)^4$ , от каждой внутренней линии — множитель  $(2\pi)^{-4}$ , а от каждой петли — 4-кратный интеграл по импульсам. Сферический элемент объема в 4-мерном евклидовом пространстве есть  $\pi^2 \kappa^2 dk^2$ , так что петля дает множитель  $\pi^2$ . Итак, диаграмма содержит множитель

$$(2\pi)^{4V} e^V (2\pi)^{-4I} \pi^{2L} = (2\pi)^4 e^{E-2} \left( \frac{e^2}{16\pi^2} \right)^L.$$

Число  $E$  внешних линий для данного процесса предопределено, следовательно, параметром, который подавляет вклад дополнительных петель, является комбинация

$$\frac{e^2}{16\pi^2} = \frac{\alpha}{4\pi} = 5.81 \times 10^{-4}.$$

К счастью, эта величина достаточно мала, и потому обычно бывает достаточно точности, полученной с учетом диаграмм с наименьшим числом петель.

\* \* \*

В реальных экспериментах не каждая частица в начальном или конечном состоянии обладает определенной проекцией спина или спиральностью, поэтому необходимо сделать пояснения про спиновые состояния фотонов и электронов. Это особенно важно для фотонов,

которые на практике обычно характеризуются поперечной или эллиптической поляризацией, а не спиральностью. Как мы знаем из предыдущего параграфа, векторы поляризации для фотонов со спиральностью  $\pm 1$  равны

$$e(\mathbf{p}, \pm 1) = R(\hat{\mathbf{p}}) \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ \pm i/\sqrt{2} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

где  $R(\hat{\mathbf{p}})$  — стандартная матрица поворота оси  $z$ , в результате которого она принимает направление  $\mathbf{p}$ . Возможны и другие спиновые состояния фотонов; произвольное состояние можно представить в виде линейной суперпозиции состояний с определенной спиральностью  $\Psi_{\mathbf{p}, \pm}$ :

$$\alpha_+ \Psi_{\mathbf{p}, +1} + \alpha_- \Psi_{\mathbf{p}, -1}, \quad (8.6.13)$$

которое нормировано так же, как и  $\Psi_{\mathbf{p}, \pm}$ , если

$$|\alpha_+|^2 + |\alpha_-|^2 = 1. \quad (8.6.14)$$

При вычислении матричного элемента процесса, в котором рождается или поглощается фотон в таком состоянии, нужно просто заменить  $e_\mu(\mathbf{p}, \pm 1)$  в правилах Фейнмана на сумму

$$e_\mu(\mathbf{p}) = \alpha_+ e_\mu(\mathbf{p}, +1) + \alpha_- e_\mu(\mathbf{p}, -1). \quad (8.6.15)$$

Векторы поляризации для состояний с определенной спиральностью подчиняются условию ортонормальности

$$e_\mu^*(\mathbf{p}, \lambda') e^\mu(\mathbf{p}, \lambda) = \delta_{\lambda' \lambda}, \quad (8.6.16)$$

поэтому для поляризации общего вида

$$e_\mu^*(\mathbf{p}) e^\mu(\mathbf{p}) = 1. \quad (8.6.17)$$

Два предельных случая — *круговая (циркулярная) поляризация*, для которой  $\alpha_- = 0$  или  $\alpha_+ = 0$ , и *линейная поляризация*, для которой  $|\alpha_+| = |\alpha_-| = 1/\sqrt{2}$ . В случае линейной поляризации выбором общей фазы состояния (8.6.13) можно сделать  $\alpha_+$  и  $\alpha_-$  комплексно-сопряженными, т.е. записать их в виде

$$\alpha_\pm = \exp(\mp i\phi)/\sqrt{2}. \quad (8.6.18)$$

Тогда в правилах Фейнмана поляризационный вектор равен

$$e_\mu(\mathbf{p}) = R(\hat{\mathbf{p}}) \begin{bmatrix} \cos \phi \\ \sin \phi \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (8.6.19)$$

Отсюда видно, что  $\phi$  — азимутальный угол поляризации фотона в плоскости, перпендикулярной вектору  $\mathbf{p}$ . Отметим, что вектор поляризации в этом случае *веществен*, что возможно только для линейной поляризации. Промежуточные случаи между линейной и круговой поляризацией называются *эллиптической поляризацией*, при которой  $|\alpha_+|$  и  $|\alpha_-|$  не равны нулю и различны.

В более общем случае фотон может быть представлен в виде статистической смеси спиновых состояний. В самом общем случае начальный фотон может с разными вероятностями  $P_r$  обладать любым вектором поляризации  $e_\mu^{(r)}(\mathbf{p})$  из некоторого произвольного набора. Скорость реакции поглощения такого фотона имеет вид

$$\Gamma = \sum_r P_r |e_\mu^{(r)}(\mathbf{p}) M^\mu|^2 = M^{\mu*} M^\nu \rho_{\nu\mu}, \quad (8.6.20)$$

где  $\rho$  — *спиновая матрица плотности*:

$$\rho_{\nu\mu} \equiv \sum_r P_r e_\nu^{(r)}(\mathbf{p}) e_\mu^{(r)*}(\mathbf{p}). \quad (8.6.21)$$

Очевидно, что это эрмитова положительно определенная матрица со следом 1 (поскольку  $\sum_r P_r = 1$ ), причем  $\rho_{\nu 0} = \rho_{\mu 0} = 0$ ,  $\rho_{\nu\mu} p^\nu = \rho_{\nu\mu} p^\mu = 0$ . Поэтому ее можно представить в виде

$$\rho_{\nu\mu} = \sum_{s=1,2} \lambda_s e_\nu(\mathbf{p}; s) e_\mu^*(\mathbf{p}; s), \quad (8.6.22)$$

где  $e_\mu(\mathbf{p}; s)$  — два ортонормальных собственных вектора матрицы  $\rho$ , причем

$$e_0(\mathbf{p}; s) = e_\mu(\mathbf{p}; s) p^\mu = 0, \quad (8.6.23)$$

а  $\lambda_s$  — соответствующие им собственные числа, причем

$$\lambda_s \geq 0, \quad \sum_{s=1,2} \lambda_s = 1.$$

Теперь можно записать скорость поглощения фотона в виде

$$\Gamma = \sum_{s=1,2} \lambda_s |e_\nu(\mathbf{p}; s) M^\nu|^2. \quad (8.6.24)$$

Таким образом, смешанное состояние фотона равносильно смеси всего двух ортонормальных поляризаций  $e_\nu(\mathbf{p}; s)$  с вероятностями  $\lambda_s$ .

В частности, если поляризация начального фотона неизвестна, его следует считать неполяризованным, т.е.  $\lambda_1 = \lambda_2 = 1/2$ . Матрица плотности в этом случае дает усреднение по начальным поляризациям  $e_\nu(\mathbf{p}; s)$ :

$$\rho_{ij} = \frac{1}{2} \sum_{s=1,2} e_i(\mathbf{p}; s) e_j^*(\mathbf{p}; s) = \frac{1}{2} (\delta_{ij} - p_i p_j / \mathbf{p}^2). \quad (8.6.25)$$

К счастью, результат усреднения не зависит от выбора ортонормированного базиса  $e_i(\mathbf{p}; s)$ . Аналогично, если не измеряется поляризация исходящих фотонов, то нужно суммировать по двум (произвольным) ортонормированным поляризациям.

Эти замечания относятся и к фермионам; если, как обычно и бывает, мы не пытаемся создать электроны в состоянии, в котором некоторая проекция спина более вероятна, чем другие, скорость процесса вычисляется *усреднением* по двум ортонормальным спиновым состояниям, например состояниям с определенной проекцией спина на ось  $z$  (которые мы обозначаем  $\sigma = \pm 1/2$ ). Аналогично, если не измеряется поляризация конечных фермионов, нужно *суммировать* по двум ортонормальным состояниям. Подобные суммы удобно вычислять с помощью формул (5.5.37) и (5.5.38):

$$\sum_{\sigma} u_{\alpha}(\mathbf{p}, \sigma) \bar{u}_{\beta}(\mathbf{p}, \sigma) = \left( \frac{-i\hat{p} + m}{2p^0} \right)_{\alpha\beta}, \quad (8.6.26)$$

$$\sum_{\sigma} v_{\alpha}(\mathbf{p}, \sigma) \bar{v}_{\beta}(\mathbf{p}, \sigma) = \left( \frac{-i\hat{p} - m}{2p^0} \right)_{\alpha\beta}, \quad (8.6.27)$$

где  $p^0 = \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}$ . К примеру, если в начальном состоянии имеется электрон с импульсом  $\mathbf{p}$  и проекцией спина  $\sigma$ , позитрон с импульсом  $\mathbf{p}'$  и проекцией спина  $\sigma'$ , то матричный элемент процесса будет иметь вид

$$(\bar{v}_{\alpha}(\mathbf{p}', \sigma') \mathcal{M}_{\alpha\beta} u_{\beta}(\mathbf{p}, \sigma)).$$

Следовательно, если спины электрона и позитрона не наблюдаются, скорость реакции пропорциональна величине

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} \sum_{\sigma', \sigma} |(\bar{v}_{\alpha}(\mathbf{p}', \sigma') \mathcal{M}_{\alpha\beta} u_{\beta}(\mathbf{p}, \sigma))|^2 &= \\ &= \frac{1}{4} \text{Tr} \left\{ \beta \mathcal{M}^{\dagger} \beta \left( \frac{-i\hat{p}' - m}{2p'^0} \right) \mathcal{M} \left( \frac{-i\hat{p} + m}{2p^0} \right) \right\}. \end{aligned}$$

Методы вычисления таких следов описаны в приложении к этой главе.

## § 8.7. Комптоновское рассеяние

В качестве иллюстрации вышеописанных методов мы рассмотрим рассеяние фотона на электроне (или другой частице с зарядом  $-e$  и спином  $1/2$ ) в наимизшем порядке по  $e$ . Обозначим импульсы и векторы поляризации входящего и выходящего фотонов через  $k_{\mu}, e^{\mu}$  и  $k'_{\mu}, e'^{\mu}$ , причем  $k^0 = |\mathbf{k}|$  и  $k'^0 = |\mathbf{k}'|$ . Аналогично, импульсы и проекции спина входящего и выходящего электронов обозначим  $p_{\mu}, \sigma$  и  $p'_{\mu}, \sigma'$ , причем  $p^0 = \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}$  и  $p'^0 = \sqrt{\mathbf{p}'^2 + m^2}$ , где  $m$  — масса электрона. Диаграммы наимизшего порядка для этого процесса

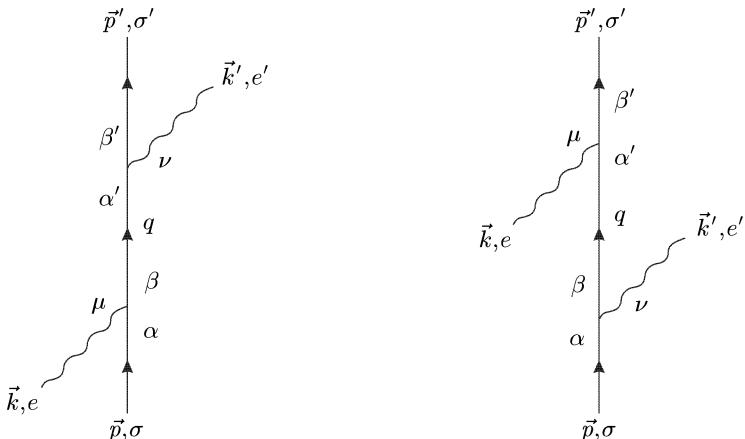


Рис. 8.1. Две диаграммы наименшего порядка для комптоновского рассеяния. Сплошные прямые линии — электроны, волнистые — фотоны

приведены на рис. 8.1. С помощью правил, сформулированных в предыдущем параграфе, выписываем матричный элемент  $S$ -матрицы:

$$\begin{aligned} S(\mathbf{p}, \sigma + \mathbf{k}, e \rightarrow \mathbf{p}', \sigma' + \mathbf{k}', e') = & \\ = & \frac{\bar{u}(\mathbf{p}', \sigma')_{\beta'}}{(2\pi)^{3/2}} \frac{e_\nu}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{2k^{0'}}} \frac{u(\mathbf{p}, \sigma)_\alpha}{(2\pi)^{3/2}} \frac{e_\mu}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{2k^0}} \times \\ & \times \int d^4q \left[ \frac{-i}{(2\pi)^4} \right] \left[ \frac{-i\hat{q} + m}{q^2 + m^2 - i\epsilon} \right]_{\alpha'\beta'} \times \\ & \times \{ [e(2\pi)^4 \gamma_{\beta'\alpha'}^\nu \delta^4(q - p' - k')] [e(2\pi)^4 \gamma_{\beta\alpha}^\mu \delta^4(q - p - k)] + \\ & + [e(2\pi)^4 \gamma_{\beta'\alpha'}^\mu \delta^4(q + k - p')] [e(2\pi)^4 \gamma_{\beta\alpha}^\nu \delta^4(q + k' - p)] \}. \quad (8.7.1) \end{aligned}$$

Выполняя тривиальное интегрирование по  $q$ , собирая множители  $i$  и  $2\pi$  и записывая результат в матричных обозначениях, получаем

$$\begin{aligned} S = & \frac{-ie^2 \delta^4(p' + k' - p - k)}{(2\pi)^2 \sqrt{2k^{0'} \cdot 2k^0}} \bar{u}(\mathbf{p}', \sigma') \times \\ & \times \left[ \widehat{\mathbf{e}}^{*\prime} \left( \frac{-i(\hat{p} + \hat{k}) + m}{(p + k)^2 + m^2} \right) \widehat{\mathbf{e}} + \widehat{\mathbf{e}} \left( \frac{-i(\hat{p} - \hat{k}') + m}{(p - k')^2 + m^2} \right) \widehat{\mathbf{e}}^{*'} \right] u(\mathbf{p}, \sigma). \quad (8.7.2) \end{aligned}$$

(Здесь  $\widehat{\mathbf{e}}^*$  означает  $\widehat{e}_\mu^* \gamma^\mu$ , а не  $(\widehat{\mathbf{e}})^*$ . Мы не пишем в знаменателях  $-i\epsilon$ , поскольку они не обращаются в нуль.) Поскольку  $p^2 = -m^2$  и  $k^2 = k'^2 = 0$ , знаменатели можно упростить:

$$(p + k)^2 + m^2 = 2p \cdot k, \quad (8.7.3)$$

$$(p - k')^2 + m^2 = -2p \cdot k. \quad (8.7.4)$$

Далее, фейнмановская амплитуда  $M$  в общем случае определена уравнением (3.3.2), которое (поскольку предполагается, что рассеяние происходит) в данном случае имеет вид

$$S = -2\pi i \delta^4(p' + k' - p - k)M, \quad (8.7.5)$$

так что

$$\begin{aligned} M = & \frac{e^2}{4(2\pi)^3 \sqrt{k^0 k^{0'}}} \bar{u}(\mathbf{p}', \sigma') \times \\ & \times \{\hat{e}^{*\prime}[-i(\hat{p} + \hat{k}) + m]\hat{e}/p \cdot k - \hat{e}[-i(\hat{p} - \hat{k}') + m]\hat{e}^{*\prime}/p \cdot k'\}u(\mathbf{p}, \sigma). \end{aligned} \quad (8.7.6)$$

Дифференциальное сечение записывается через  $M$  по формуле (3.4.15), т.е. в нашем случае

$$d\sigma = (2\pi)^4 u^{-1} |M|^2 \delta^4(p' + k' - p - k) d^3 p' d^3 k'. \quad (8.7.7)$$

Поскольку одна из частиц безмассова, уравнение (3.4.17) для начальной скорости дает

$$u = |p \cdot k|/p^0 k^0. \quad (8.7.8)$$

Для дальнейших вычислений нужно выбрать систему отсчета. Поскольку электроны в атомах движутся с нерелятивистскими скоростями, в качестве лабораторной системы для рассеяния  $\gamma$ -лучей (или рентгена) на электронах обычно (но не всегда) можно взять систему покоя начального электрона. Мы проведем вычисления в этой системе, в которой

$$\mathbf{p} = 0, \quad p^0 = m. \quad (8.7.9)$$

Скорость (8.7.8) равна

$$u = 1. \quad (8.7.10)$$

Для экономии записи обозначим энергии фотонов

$$\omega = k^0 = |\mathbf{k}| = -p \cdot k/m, \quad (8.7.11)$$

$$\omega' = k'^0 = |\mathbf{k}'| = -p \cdot k'/m. \quad (8.7.12)$$

Дельта-функция от 3-импульса в (8.7.7) позволяет избавиться от дифференциала  $d^3 p'$ , подставив  $\mathbf{p}' = \mathbf{k} - \mathbf{k}'$ . Остается  $\delta$ -функция от энергии:

$$\delta(p'^0 + k'^0 - p^0 - k^0) = \delta(\sqrt{(\mathbf{k} - \mathbf{k}')^2 + m^2} + \omega' - m - \omega). \quad (8.7.13)$$

Она фиксирует  $\omega'$  как корень уравнения

$$\sqrt{\omega^2 - 2\omega\omega' \cos\theta + \omega'^2 + m^2} = \omega + m - \omega',$$

где  $\theta$  — угол между  $\mathbf{k}$  и  $\mathbf{k}'$ . После возведения в квадрат обеих частей

равенства и сокращения  $\omega'^2$  получаем<sup>1)</sup>

$$\omega' = \omega \frac{m}{m + \omega(1 - \cos \theta)} \equiv \omega_c(\theta). \quad (8.7.14)$$

Дельта-функция от энергии (8.7.13) переписывается в виде

$$\begin{aligned} \delta(p'^0 + k'^0 - p^0 - k^0) &= \\ &= \frac{\delta(\omega' - \omega_c(\theta))}{|\partial[\sqrt{\omega^2 - 2\omega\omega' \cos \theta + \omega'^2 + m^2} + \omega']/\partial\omega'|} = \\ &= \frac{\delta(\omega' - \omega_c(\theta))}{|(\omega' - \omega \cos \theta)/p'^0 + 1|} = \frac{p'^0 \omega'}{m\omega} \delta(\omega' - \omega_c(\theta)). \end{aligned} \quad (8.7.15)$$

Напишем также дифференциал  $d^3k'$  в виде

$$d^3k' = \omega'^2 d\omega' d\Omega, \quad (8.7.16)$$

где  $d\Omega$  — телесный угол, в который рассеивается исходящий фотон. Последняя  $\delta$ -функция в (8.7.15) позволяет исключить дифференциал  $d\omega'$  в (8.7.16), и дифференциальное сечение записывается в виде

$$d\sigma = (2\pi)^4 |M|^2 \frac{p'^0 \omega'^3}{m\omega} d\Omega, \quad (8.7.17)$$

где  $p'^0 = m + \omega - \omega'$ , а  $\omega'$  дается уравнением (8.7.14).

Как правило, проекция спина падающего и вылетающего электрона не измеряется. Поэтому нужно просуммировать по  $\sigma'$  и усреднить по  $\sigma$ , т.е. просуммировать по  $\sigma, \sigma'$  и умножить на  $1/2$ :

$$d\bar{\sigma}(\mathbf{p} + \mathbf{k}, e \rightarrow \mathbf{p}' + \mathbf{k}', e') \equiv \frac{1}{2} \sum_{\sigma', \sigma} d\sigma(\mathbf{p}, \sigma + \mathbf{k}, e \rightarrow \mathbf{p}', \sigma' + \mathbf{k}', e'). \quad (8.7.18)$$

Эта сумма вычисляется с помощью стандартной формулы

$$\sum_{\sigma} u_{\alpha}(\mathbf{p}, \sigma) \bar{u}_{\beta}(\mathbf{p}, \sigma) = \frac{(-i\hat{p} + m)_{\alpha\beta}}{2p^0} \quad (8.7.19)$$

и аналогично для суммы по  $\sigma'$ . Можно показать, что для произволь-

<sup>1)</sup> Другими словами, длина волны света увеличивается по формуле

$$\frac{1}{\omega'} - \frac{1}{\omega} = \frac{1 - \cos \theta}{m}.$$

Проверка этой формулы для рассеяния рентгеновских лучей на электронах, произведенная Комптоном в 1922–1923 гг., сыграла ключевую роль в подтверждении гипотезы Эйнштейна (1905 г.) о корпускулярной природе света, квант которого вскоре после эксперимента Комптона стал известен как фотон.

ной  $4 \times 4$  матрицы  $A$

$$\begin{aligned} \sum_{\sigma, \sigma'} |\bar{u}(\mathbf{p}', \sigma') A u(\mathbf{p}, \sigma)|^2 &= \\ &= \sum_{\sigma, \sigma'} (\bar{u}(\mathbf{p}', \sigma') A u(\mathbf{p}, \sigma)) (\bar{u}(\mathbf{p}, \sigma) \beta A^\dagger \beta u(\mathbf{p}', \sigma')) = \\ &= \sum_{\sigma, \sigma'} A_{\beta\alpha} u_\alpha(\mathbf{p}, \sigma) \bar{u}_\gamma(\mathbf{p}, \sigma) (\beta A^\dagger \beta)_{\gamma\delta} u_\delta(\mathbf{p}', \sigma') \bar{u}_\beta(\mathbf{p}', \sigma') = \\ &= \text{Tr} \left\{ A \frac{(-i\hat{p} + m)}{2p^0} \beta \right\} \beta A^\dagger \beta \frac{(-i\hat{p}' + m)}{2p'^0} \}. \quad (8.7.20) \end{aligned}$$

Вспоминая, что  $\beta \gamma_\mu^\dagger \beta = -\gamma_\mu$ , приводим (8.7.6) к виду

$$\begin{aligned} \sum_{\sigma, \sigma'} |M|^2 &= \frac{e^4}{64(2\pi)^6 \omega \omega' p^0 p'^0} \times \\ &\times \text{Tr} \left[ \left\{ \hat{e}'^* \frac{[-i(\hat{p} + \hat{k}) + m]}{p \cdot k} \hat{e} - \hat{e} \frac{[-i(\hat{p} - \hat{k}') + m]}{p \cdot k'} \hat{e}'^* \right\} (-i\hat{p} + m) \times \right. \\ &\times \left. \left\{ \hat{e}^* \frac{[-i(\hat{p} + \hat{k}) + m]}{p \cdot k} \hat{e}' - \hat{e}' \frac{[-i(\hat{p} - \hat{k}') + m]}{p \cdot k'} \hat{e}'^* \right\} (-i\hat{p}' + m) \right]. \quad (8.7.21) \end{aligned}$$

(Напомним еще раз, что  $\hat{\mathbf{e}}^*$  означает  $\hat{e}_\mu^* \gamma^\mu$ , а не  $(\hat{\mathbf{e}})^*$ , и аналогично для  $\hat{\mathbf{e}}'$ .) Мы работаем в “калибровке”, в которой

$$\mathbf{e} \cdot p = e^* \cdot p = e' \cdot p = e'^* \cdot p = 0, \quad (8.7.22)$$

что похоже на кулоновскую калибровку в лабораторочной системе, в которой  $e^0 = e'^0 = 0$ ,  $\mathbf{p} = 0$ . Это означает, что

$$\begin{aligned} [-i\hat{p} + m] \hat{e} [-i\hat{p} + m] &= \hat{e} [i\hat{p} + m] [-i\hat{p} + m] = \\ &= \hat{e} (\hat{p}^2 + m^2) = \hat{e} (p_\mu p^\mu + m^2) = 0 \end{aligned}$$

и аналогично для  $\hat{\mathbf{e}}'^*$ ,  $\hat{\mathbf{e}}'$  и  $\hat{\mathbf{e}}^*$ . Тем самым формула (8.7.21) существенно упрощается:

$$\begin{aligned} \sum_{\sigma, \sigma'} |M|^2 &= \frac{-e^4}{64(2\pi)^6 \omega \omega' p^0 p'^0} \text{Tr} \left[ \left\{ \frac{\hat{e}'^* \hat{k} \hat{e}}{p \cdot k} + \frac{\hat{e} \hat{k}' \hat{e}'^*}{p \cdot k'} \right\} (-i\hat{p} + m) \times \right. \\ &\times \left. \left\{ \frac{\hat{e}^* \hat{k} \hat{e}'}{p \cdot k} + \frac{\hat{e}' \hat{k}' \hat{e}^*}{p \cdot k'} \right\} (-i\hat{p}' + m) \right]. \quad (8.7.23) \end{aligned}$$

След произведения нечетного числа  $\gamma$ -матриц равен нулю, поэтому

этот след распадается на слагаемые нулевого и второго порядка по  $m$ :

$$\sum_{\sigma, \sigma'} |M|^2 = \frac{e^4}{64(2\pi)^6 \omega \omega' p^0 p'^0} \left( \frac{T_1}{(p \cdot k)^2} + \frac{T_2}{(p \cdot k)(p \cdot k')} + \frac{T_3}{(p \cdot k')(p \cdot k')} + \right. \\ \left. + \frac{T_4}{(p \cdot k')^2} - \frac{m^2 t_1}{(p \cdot k)^2} - \frac{m^2 t_2}{(p \cdot k)(p \cdot k')} - \frac{m^2 t_3}{(p \cdot k)(p \cdot k')} - \frac{m^2 t_4}{(p \cdot k')^2} \right), \quad (8.7.24)$$

где

$$T_1 = \text{Tr}\{\hat{e}'^* \hat{k} \hat{e} \hat{p} \hat{e}^* \hat{k} \hat{e}' \hat{p}'\}, \quad (8.7.25)$$

$$T_2 = \text{Tr}\{\hat{e}'^* \hat{k} \hat{e} \hat{p} \hat{e}' \hat{k}' \hat{e}^* \hat{p}'\}, \quad (8.7.26)$$

$$T_3 = \text{Tr}\{\hat{e} \hat{k}' \hat{e}'^* \hat{p} \hat{e}^* \hat{k} \hat{e}' \hat{p}'\}, \quad (8.7.27)$$

$$T_4 = \text{Tr}\{\hat{e} \hat{k}' \hat{e}'^* \hat{p} \hat{e}' \hat{k}' \hat{e}^* \hat{p}'\}, \quad (8.7.28)$$

$$t_1 = \text{Tr}\{\hat{e}'^* \hat{k} \hat{e} \hat{e}^* \hat{k} \hat{e}'\}, \quad (8.7.29)$$

$$t_2 = \text{Tr}\{\hat{e}'^* \hat{k} \hat{e} \hat{e}' \hat{k}' \hat{e}^*\}, \quad (8.7.30)$$

$$t_3 = \text{Tr}\{\hat{e} \hat{k}' \hat{e}'^* \hat{e}^* \hat{k} \hat{e}'\}, \quad (8.7.31)$$

$$t_4 = \text{Tr}\{\hat{e} \hat{k}' \hat{e}'^* \hat{e}' \hat{k}' \hat{e}^*\}. \quad (8.7.32)$$

В приложении к этой главе показано, как сводить следы вида  $\text{Tr}\{\hat{a} \hat{b} \hat{c} \hat{d} \dots\}$  к сумме скалярных произведений 4-векторов  $a, b, c, d, \dots$ . В самом общем случае след произведения 6 или 8  $\gamma$ -матриц, такой как  $t_k$  или  $T_k$ , состоит соответственно из 15 или 105 слагаемых, но, к счастью, большинство скалярных произведений равно нулю; кроме формулы (8.7.22), зануляются еще  $k \cdot k = k' \cdot k' = 0$ . Кроме того,  $e \cdot e^* = e' \cdot e'^* = 1$ . Чтобы еще упростить вычисления, ограничимся случаем *линейной* поляризации, когда векторы  $e^\mu$  и  $e'^\mu$  вещественны. Опуская знаки комплексного сопряжения в (8.7.25)–(8.7.32), получаем

$$T_1 = \text{Tr}\{\hat{e}' \hat{k} \hat{e} \hat{p} \hat{e}^* \hat{k} \hat{e}' \hat{p}'\}.$$

Поскольку  $e^\mu p_\mu = 0$  и  $e^2 = 1$ , имеем

$$\hat{e} \hat{p} \hat{e} = -\hat{p} \hat{e} \hat{e} = -\hat{p},$$

следовательно,

$$T_1 = -\text{Tr}\{\hat{e}' \hat{k} \hat{p} \hat{k} \hat{e}' \hat{p}'\}.$$

Далее,  $k^2 = 0$ , так что

$$\hat{k} \hat{p} \hat{k} = -\hat{k} \hat{k} \hat{p} + 2\hat{k} p \cdot k = 2\hat{k} p \cdot k,$$

и потому

$$T_1 = -2p \cdot k \text{Tr}\{\hat{e}' \hat{k} \hat{e}' \hat{p}'\}.$$

С помощью формулы (8.4.6) находим теперь

$$T_1 = -8p \cdot k [2e' \cdot k e' \cdot p' - k \cdot p'].$$

Удобно сделать замены

$$\begin{aligned} e' \cdot p' &= e' \cdot [p + k - k'] = e' \cdot k, \\ k \cdot p &= -\frac{1}{2} (p' - k)^2 - \frac{1}{2} m^2 = -\frac{1}{2} (p - k')^2 - \frac{1}{2} m^2 = p \cdot k', \end{aligned}$$

так что

$$T_1 = -16p \cdot k(e' \cdot k)^2 + 8p \cdot kp \cdot k'. \quad (8.7.33)$$

Аналогичное, но более длинное вычисление дает

$$\begin{aligned} T_2 = T_3 &= -8(e \cdot k')^2(p \cdot k) + 16(e \cdot e')^2 p \cdot k' p \cdot k + 8(e \cdot e')^2 k \cdot k' m^2 - \\ &- 8(e \cdot e')m^2(k \cdot e')(k' \cdot e) + 8(e' \cdot k)^2 p \cdot k' - \\ &- 4(k \cdot p)^2 + 4(k \cdot k')(p \cdot p') - 4(k \cdot p')(p \cdot k'), \end{aligned} \quad (8.7.34)$$

$$T_4 = 16p \cdot k'(e \cdot k')^2 + 8(p \cdot k)(p \cdot k'), \quad (8.7.35)$$

$$t_1 = t_4 = 0, \quad (8.7.36)$$

$$t_2 = t_3 = -8e \cdot e' k \cdot e' k' \cdot e + 8(k \cdot k')(e \cdot e')^2 - 4(k \cdot k'). \quad (8.7.37)$$

Складывая все члены в (8.7.24), получаем

$$\sum_{\sigma, \sigma'} |M|^2 = \frac{-e^4}{64(2\pi)^6 \omega \omega' p^0 p'^0} \left[ \frac{8(k \cdot k')^2}{(k \cdot p)(k' \cdot p)} + 32(e \cdot e')^2 \right]. \quad (8.7.38)$$

Все эти формулы верны в любой системе отсчета. В *лабораторной* системе имеем дополнительно

$$\begin{aligned} k \cdot k' &= \omega \omega' (\cos \theta - 1) = m \omega \omega' \left( \frac{1}{\omega} - \frac{1}{\omega'} \right), \\ p \cdot k &= -m \omega, \quad p \cdot k' = -m \omega'. \end{aligned}$$

Объединяя формулы (8.7.38) и (8.7.17), получаем сечение в лабораторной системе:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \sum_{\sigma, \sigma'} d\sigma(\mathbf{p}, \sigma + \mathbf{k}, e \rightarrow \mathbf{p}', \sigma' + \mathbf{k}', e') &= \frac{e^4 \omega'^2 d\Omega}{64\pi^2 m^2 \omega^2} \times \\ &\times \left[ \frac{\omega}{\omega'} + \frac{\omega'}{\omega} - 2 + 4(e \cdot e')^2 \right]. \end{aligned} \quad (8.7.39)$$

Эта знаменитая формула была впервые получена Клейном и Нишиной [4] в 1929 г.

Как мы знаем из § 8.6, если падающий фотон (как обычно и бывает) не находится в состоянии с определенной поляризацией, нужно усреднить результат по двум ортонормальным векторам  $\mathbf{e}$ . Усреднение дает

$$\frac{1}{2} \sum_e e_i e_j = \frac{1}{2} (\delta_{ij} - k_i k_j / \mathbf{k}^2),$$

а дифференциальное сечение оказывается равным

$$\frac{1}{4} \sum_{e, \sigma, \sigma'} d\sigma(\mathbf{p}, \sigma + \mathbf{k}, e \rightarrow \mathbf{p}', \sigma' + \mathbf{k}', e') = \frac{e^4 \omega'^2 d\Omega}{64\pi^2 m^2 \omega^2} \left[ \frac{\omega}{\omega'} + \frac{\omega'}{\omega} - 2 \frac{(\mathbf{k} \cdot \mathbf{e}')^2}{\mathbf{k}^2} \right]. \quad (8.7.40)$$

Мы видим, что рассеянный фотон преимущественно поляризован перпендикулярно плоскости, проходящей через падающий и рассеянный фотон. Этот результат широко известен и отвечает, помимо всего прочего, за поляризацию света от затменно-двойных звезд<sup>2)</sup>.

Теперь вычислим сечение для эксперимента, в котором не измеряется поляризация рассеянного фотона; для этого, как обычно, суммируем по его поляризациям  $e'$ , применяя формулу

$$\sum_{e'} e'_i e'_j = \delta_{ij} - k'_i k'_j / (\mathbf{k}')^2.$$

Это дает

$$\frac{1}{4} \sum_{e, e', \sigma, \sigma'} d\sigma(\mathbf{p}, \sigma + \mathbf{k}, e \rightarrow \mathbf{p}', \sigma' + \mathbf{k}', e') = \frac{e^4 \omega'^2 d\Omega}{64\pi^2 m^2 \omega^2} \left[ \frac{\omega}{\omega'} + \frac{\omega'}{\omega} - 1 + \cos^2 \theta \right], \quad (8.7.41)$$

где  $\theta$  — угол между  $\mathbf{k}$  и  $\mathbf{k}'$ . В нерелятивистском пределе,  $\omega \ll m$ , формула (8.7.41) дает

$$\frac{1}{4} \sum_{e, e', \sigma, \sigma'} d\sigma = \frac{e^4 d\Omega}{32\pi^2 m^2} (1 + \cos^2 \theta). \quad (8.7.42)$$

Интеграл по углам равен

$$\int [1 + \cos^2 \theta] d\Omega = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi [1 + \cos^2 \theta] \sin \theta d\theta = \frac{16\pi}{3},$$

что дает полное сечение рассеяния при  $\omega \ll m$ :

$$\sigma_T = \frac{e^4}{6\pi m^2}. \quad (8.7.43)$$

Это часто записывают в виде  $\sigma_T = 8\pi r_0^2/3$ , где радиус

$$r_0 = e^2/4\pi m = 2,818 \cdot 10^{-13} \text{ см}$$

<sup>2)</sup> Свет от одной из звезд поляризуется при рассеянии на свободных электронах во внешней атмосфере другой, относительно холодной звезды, когда обе лежат на луче зрения. Этот эффект обычно не заметен, поскольку при измерениях складываются лучи, исходящие со всех частей диска звезды. Поляризация становится заметна, когда холодная звезда загораживает часть горячей звезды.

известен под названием *классического радиуса электрона*. Выражение (8.7.43) называется *томсоновским сечением*, в честь Дж.Дж. Томсона, первооткрывателя электрона. Формулы (8.7.42) и (8.7.43) изначально были получены в рамках классической механики и электродинамики, путем вычисления интенсивности света, излучаемого нерелятивистским точечным зарядом, колеблющимся в падающей плоской электромагнитной волне.

## § 8.8. Обобщение калибровочных полей на $p$ -формы<sup>1)</sup>

Антисимметричный тензор напряженности поля  $F_{\mu\nu}$  в электродинамике является частным случаем некоторого важного для физики и математики класса тензоров. Как известно,  *$p$ -формой* называется антисимметричный ковариантный тензор ранга  $p$ . Из  $p$ -формы  $t_{\mu_1\mu_2\dots\mu_p}$  можно построить  $(p+1)$ -форму  $dt$  (которая называется *внешней производной*)<sup>2)</sup> путем взятия производной и антисимметризации по всем индексам:

$$(dt)_{\mu_1\mu_2\dots\mu_{p+1}} \equiv \partial_{[\mu_1} t_{\mu_2\mu_3\dots\mu_{p+1}]} \equiv \\ \equiv \partial_{\mu_1} t_{\mu_2\mu_3\dots\mu_{p+1}} - \partial_{\mu_2} t_{\mu_1\mu_3\dots\mu_{p+1}} + \dots + (-1)^p \partial_{\mu_{p+1}} t_{\mu_1\mu_2\dots\mu_p}, \quad (8.8.1)$$

квадратные скобки здесь означают антисимметризацию по индексам, в них заключенным. Поскольку операторы дифференцирования коммутируют, повторное взятие внешней производной дает нуль:

$$d(dt) = 0. \quad (8.8.2)$$

Форма, внешняя производная которой равна нулю, называется *замкнутой*; форма, которая является внешней производной, называется *точной*. Формула (8.8.2) утверждает, что всякая точная  $p$ -форма замкнута; знаменитая теорема Пуанкаре [6] утверждает, что в односвязной области любая замкнутая форма точна<sup>3)</sup>. Например, одно-

<sup>1)</sup> Материал этого параграфа выходит за рамки основного содержания книги и может быть опущен при первом чтении.

<sup>2)</sup> Внешние производные и дифференциальные формы играют важную роль в общей теории относительности, отчасти потому, что внешняя производная тензора является тензором, несмотря на то что вычисляется с помощью обычных, а не ковариантных производных [5].

<sup>3)</sup> В многосвязных областях или пространствах замкнутая форма может быть неточной; локально ее всегда можно представить в виде внешней производной, но эти производные не всегда можно гладко сплить во всей области. Множество замкнутых  $p$ -форм по модулю точных  $p$ -форм составляет так называемую  $p$ -ю группу когомологий де Рама для данного пространства. Между группой когомологий пространства и его топологией имеется глубокая связь [6], которая будет обсуждаться в т. II.

родные уравнения Максвелла (8.1.16) говорят, что 2-форма  $F_{\mu\nu}$  тензора напряженности электромагнитного поля является замкнутой; по теореме Пуанкаре заключаем, что она также точна, т.е. записывается в виде внешней производной:  $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ . С помощью той же формулы (8.8.2) легко видеть, что  $F$  не меняется при изменении  $A_\mu$  на внешнюю производную  $\delta A_\mu = \partial_\mu \Omega$ , т.е. при калибровочном преобразовании.

Формализм  $p$ -форм и внешних производных наводит на мысль о возможности существования безмассовых частиц, описываемых калибровочными полями<sup>4)</sup> в виде  $p$ -формы  $A_{\mu_1 \dots \mu_p}$ ; такая теория обладает калибровочной инвариантностью при преобразованиях

$$\delta A = d\Omega, \quad (8.8.3)$$

или, более подробно,

$$\delta A_{\mu_1 \dots \mu_p} = \partial_{[\mu_1} \Omega_{\mu_2 \dots \mu_p]},$$

где  $\Omega_{\mu_1 \dots \mu_{p-1}}$  — произвольная  $(p-1)$ -форма. Из такого калибровочного поля напряженность строится как  $(p+1)$ -форма

$$F = dA, \quad (8.8.4)$$

или, более подробно,

$$F_{\mu_1 \dots \mu_{p+1}} = \partial_{[m \mu_1} A_{\mu_2 \dots \mu_{p+1}]}. \quad (8.8.5)$$

(Можно было бы начать с  $(p+1)$ -формы  $F$ , обладающей свойством  $dF = 0$ , и из этого уравнения заключить, что существует  $p$ -форма  $A$  такая, что  $F = dA$ .) По аналогии с электродинамикой можно взять лагранжиан в виде

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2(p+1)} F_{\mu_1 \dots \mu_{p+1}} F^{\mu_1 \dots \mu_{p+1}} + J^{\mu_1 \dots \mu_p} A_{\mu_1 \dots \mu_p}, \quad (8.8.6)$$

где  $J$  — антисимметричный тензор тока (либо  $c$ -число, либо функция от полей, отличных от  $A$ ), который должен удовлетворять закону сохранения

$$\partial_{\mu_1} J^{\mu_1 \dots \mu_p} = 0, \quad (8.8.7)$$

чтобы действие было калибровочно-инвариантно. Уравнения Эйлера–Лагранжа теперь имеют вид

$$\partial_\mu F^{\mu \mu_1 \dots \mu_p} = -J^{\mu_1 \dots \mu_p}. \quad (8.8.8)$$

---

<sup>4)</sup> Мы допускаем вольность, называя  $A_{\mu_1 \dots \mu_p}$   $p$ -формой, поскольку для того чтобы  $F = dA$  было тензором, достаточно, чтобы  $A$  было тензором с точностью до калибровочных преобразований. В действительности мы уже видели, что в четырехмерии невозможно построить 4-векторное поле из операторов рождения–уничтожения физических безмассовых частиц со спиральностью  $\pm 1$ , и потому приходится иметь дело с вектором  $A^\mu(x)$ , который, согласно (8.1.2), преобразуется как 4-вектор лишь с точностью до калибровочных преобразований.

Такие калибровочные поля играют важную роль в теориях с дополнительными размерностями пространства–времени. К примеру, в минимальной 26-мерной теории струн имеется нормальная мода колебаний струны, которая на низких энергиях выглядит как калибровочное поле 2-формы  $A_{\mu\nu}$ . Но в четырех измерениях формализм  $p$ -форм не добавляет новых возможностей.

Чтобы убедиться в этом, заметим сперва, что в  $D$ -мерном пространстве не существует антисимметричных тензоров с более чем  $D$  индексами, так что в общем случае нужно потребовать  $p+1 \leq D$ . Как и всякую  $(p+1)$ -форму с  $p+1 \leq D$ , напряженность поля  $F$  можно выразить через дуальную  $(D-p-1)$ -форму  $\mathcal{F}$ :

$$F^{\mu_1 \dots \mu_{p+1}} = \epsilon^{\mu_1 \dots \mu_D} \mathcal{F}_{\mu_{p+2} \dots \mu_D}. \quad (8.8.9)$$

Аналогично,  $p$ -форму тока  $J$  можно выразить через дуальную  $(D-p)$ -форму  $\mathcal{J}$ :

$$J^{\mu_1 \dots \mu_p} = \epsilon^{\mu_1 \dots \mu_D} \mathcal{J}_{\mu_{p+1} \dots \mu_D}. \quad (8.8.10)$$

Уравнения поля (8.8.8) и закон сохранения (8.8.7) теперь можно переписать в виде

$$d\mathcal{F} = \mathcal{J}, \quad d\mathcal{J} = 0. \quad (8.8.11)$$

Поскольку дуальный ток  $\mathcal{J}$  замкнут, его можно представить в виде внешней производной от  $(D-p-1)$ -формы  $\mathcal{G}$ :

$$\mathcal{J} = d\mathcal{G}. \quad (8.8.12)$$

Согласно формулам (8.8.11) и (8.8.12) разность между  $\mathcal{F}$  и  $\mathcal{G}$  замкнута, а потому, с помощью теоремы Пуанкаре, можно написать

$$\mathcal{F} = \mathcal{G} + d\phi, \quad (8.8.13)$$

где  $\phi$  — некоторая  $(D-p-2)$ -форма. Впрочем, это не имеет смысла для крайнего случая  $p=D-1$ , когда формы  $\mathcal{F}$  и  $\mathcal{G}$  являются 0-формами, и условие  $d\mathcal{F} = d\mathcal{G}$  просто утверждает, что эти формы отличаются на константу. В этом случае калибровочное поле вообще не имеет степеней свободы, так что нам следует ограничиться  $p \leq D-2$ .

При  $p \leq D-2$  однородные “уравнения Максвелла”  $dF=0$  дают

$$\partial_{\mu_1} \mathcal{F}^{\mu_1 \dots \mu_{D-p-1}} = 0, \quad (8.8.14)$$

что совместно с (8.8.13) дает уравнение для  $\phi$ :

$$\partial_{\mu_1} (d\phi)^{\mu_1 \dots \mu_{D-p-1}} = -\partial_{\mu_1} \varphi^{\mu_1 \dots \mu_{D-p-1}}. \quad (8.8.15)$$

Оно инвариантно при новых калибровочных преобразованиях  $\phi \rightarrow \phi + d\omega$ , за исключением случая  $D-p-2=0$ , в котором  $F$  инвариантно относительно замены  $\phi \rightarrow \phi + \text{const}$ . Мы видим, что в  $D$ -мерном пространстве–времени теория калибровочного  $p$ -поля  $A$  эквивалентна теории с  $(D-p-2)$ -полем  $\phi$ .

Теперь становится ясно, почему в четырехмерии формализм  $p$ -форм не дает ничего нового. Нам нужно рассмотреть случаи  $p \leq D - 2$ , т.е.  $p = 0, 1, 2$ . Калибровочное поле 0-формы является скалярным полем  $S$ , для которого (8.8.5) дает  $F_\mu = \partial_\mu S$ , а уравнения поля (8.8.8) имеют простой вид:

$$\square S = -J.$$

Калибровочными преобразованиями здесь является замена  $S \rightarrow S + + \text{const}$ . Это есть теория безмассового скалярного поля, взаимодействующего только со своей производной. Калибровочное поле 1-формы — это векторное поле  $A^\mu(x)$ , которое взаимодействует с сохраняющимся 4-вектором тока, как в электродинамике. Наконец, в соответствии с общим результатом, полученным выше, поле 2-формы в 4-мерном пространстве эквивалентно полю 0-формы, т.е. сводится к вышеназванной теории скалярного поля.

### § 8.9. Приложение: следы $\gamma$ -матриц

При вычислении элементов  $S$ -матрицы и скоростей реакций с частицами спина  $1/2$  часто возникают следы от произведений дираковских  $\gamma$ -матриц. Полезно привести формулы для вычисления подобных следов.

След произведения четного числа  $\gamma$ -матриц равен

$$\text{Tr}\{\gamma_{\mu_1} \gamma_{\mu_2} \dots \gamma_{\mu_{2N}}\} = 4 \sum_{\text{спаривания}} \delta_P \prod_{\text{пары}} \eta_{\text{спаренные индексы } \mu}. \quad (8.A.1)$$

Сумма здесь берется по всевозможным спариваниям (разбиениям на пары) индексов  $\mu_1, \dots, \mu_{2N}$ . Спаривание можно представить как перестановку целых чисел  $1, 2, \dots, 2N$  в некотором порядке  $P_1, P_2, \dots, P_{2N}$ , где считаются спаренными  $\mu_{P_1}$  с  $\mu_{P_2}$ ,  $\mu_{P_3}$  с  $\mu_{P_4}$  и т.д. Перестановка пар или перестановка внутри пары дает то же самое спаривание, значит, число различных спариваний равно

$$(2N)!/N! 2^N = (2N-1)(2N-3) \cdot \dots \cdot 1 \equiv (2N-1)!! \quad (8.A.2)$$

Можно избежать суммирования по одинаковым спариваниям, потребовав, чтобы

$$P_1 < P_2, \quad P_3 < P_4, \quad \dots, \quad P \cdot (2N-1) < P \cdot (2N) \quad (8.A.3)$$

и

$$P_1 < P_3 < P_5 < \dots \quad (8.A.4)$$

При этом условии множитель  $\delta_P$  равен  $+1$  или  $-1$  в соответствии с четностью перестановки индексов. Произведение в (8.A.1) берется

по всем  $N$  парам, причем  $n$ -я пара дает множитель  $\eta_{\mu_{P_{2n-1}} \mu_{P_{2n}}}$ . Например, для  $N = 1, 2, 3$  получаем<sup>1)</sup> (мы пишем различные греческие буквы без индексов вместо  $\mu_i$ ):

$$\mathrm{Tr}\{\gamma_\mu \gamma_\nu\} = 4\eta_{\mu\nu}, \quad (8.A.5)$$

$$\mathrm{Tr}\{\gamma_\mu \gamma_\nu \gamma_\rho \gamma_\sigma\} = 4[\eta_{\mu\nu} \eta_{\rho\sigma} - \eta_{\mu\rho} \eta_{\nu\sigma} + \eta_{\mu\sigma} \eta_{\nu\rho}], \quad (8.A.6)$$

$$\begin{aligned} \mathrm{Tr}\{\gamma_\mu \gamma_\nu \gamma_\rho \gamma_\sigma \gamma_\kappa \gamma_\eta\} = & 4[\eta_{\mu\nu} \eta_{\rho\sigma} \eta_{\kappa\eta} - \eta_{\mu\nu} \eta_{\rho\kappa} \eta_{\sigma\eta} + \eta_{\mu\nu} \eta_{\rho\eta} \eta_{\sigma\kappa} - \\ & - \eta_{\mu\rho} \eta_{\sigma\eta} \eta_{\kappa\eta} + \eta_{\mu\rho} \eta_{\nu\kappa} \eta_{\sigma\eta} - \eta_{\mu\rho} \eta_{\nu\eta} \eta_{\sigma\kappa} + \eta_{\mu\sigma} \eta_{\nu\rho} \eta_{\kappa\eta} - \eta_{\mu\sigma} \eta_{\nu\kappa} \eta_{\rho\eta} + \\ & + \eta_{\mu\sigma} \eta_{\nu\eta} \eta_{\rho\kappa} - \eta_{\mu\kappa} \eta_{\nu\rho} \eta_{\sigma\eta} + \eta_{\mu\kappa} \eta_{\nu\sigma} \eta_{\rho\eta} - \eta_{\mu\kappa} \eta_{\nu\eta} \eta_{\rho\sigma} + \eta_{\mu\eta} \eta_{\nu\rho} \eta_{\sigma\kappa} - \\ & - \eta_{\mu\eta} \eta_{\nu\sigma} \eta_{\rho\kappa} + \eta_{\mu\eta} \eta_{\nu\kappa} \eta_{\rho\sigma}]. \end{aligned} \quad (8.A.7)$$

Для нечетного числа матриц результат гораздо проще:

$$\mathrm{Tr}\{\gamma_{\mu_1} \gamma_{\mu_2} \dots \gamma_{\mu_{2N+1}}\} = 0. \quad (8.A.8)$$

Доказательство формулы (8.A.1) проводится по индукции. Сначала замечаем, что

$$\mathrm{Tr}\{\gamma_\mu \gamma_\nu\} = -\mathrm{Tr}\{\gamma_\nu \gamma_\mu\} + 2\mathrm{Tr}\{\eta_{\mu\nu} 1\} = -\mathrm{Tr}\{\gamma_\mu \gamma_\nu\} + 8\eta_{\mu\nu},$$

и поэтому  $\mathrm{Tr}\{\gamma_\mu \gamma_\nu\} = 4\eta_{\mu\nu}$ , в согласии с (8.A.1). Теперь предположим, что формула верна для  $N \leq M - 1$ . Тогда имеем

$$\begin{aligned} \mathrm{Tr}\{\gamma_{\mu_1} \gamma_{\mu_2} \dots \gamma_{\mu_{2M}}\} = & \\ = & 2\eta_{\mu_1 \mu_2} \mathrm{Tr}\{\gamma_{\mu_3} \dots \gamma_{\mu_{2M}}\} - \mathrm{Tr}\{\gamma_{\mu_2} \gamma_{\mu_1} \gamma_{\mu_3} \dots \gamma_{\mu_{2M}}\} = \\ = & 2\eta_{\mu_1 \mu_2} \mathrm{Tr}\{\gamma_{\mu_3} \dots \gamma_{\mu_{2M}}\} - 2\eta_{\mu_1 \mu_3} \mathrm{Tr}\{\gamma_{\mu_2} \gamma_{\mu_4} \dots \gamma_{\mu_{2M}}\} + \\ & + \mathrm{Tr}\{\gamma_{\mu_2} \gamma_{\mu_3} \gamma_{\mu_1} \gamma_{\mu_4} \dots \gamma_{\mu_{2M}}\} = \\ = & 2\eta_{\mu_1 \mu_2} \mathrm{Tr}\{\gamma_{\mu_3} \dots \gamma_{\mu_{2M}}\} - 2\eta_{\mu_1 \mu_3} \mathrm{Tr}\{\gamma_{\mu_2} \gamma_{\mu_4} \dots \gamma_{\mu_{2M}}\} + \\ & + 2\eta_{\mu_1 \mu_4} \mathrm{Tr}\{\gamma_{\mu_2} \gamma_{\mu_3} \gamma_{\mu_5} \dots \gamma_{\mu_{2M}}\} - \dots \\ & \dots + 2\eta_{\mu_1 \mu_{2M}} \mathrm{Tr}\{\gamma_{\mu_2} \dots \gamma_{\mu_{2M-1}}\} - \mathrm{Tr}\{\gamma_{\mu_2} \dots \gamma_{\mu_{2M}} \gamma_{\mu_1}\}. \end{aligned}$$

Все коммутаторы имеют нулевой след, так что последний вычитаемый член равен левой части равенства, и, следовательно,

$$\begin{aligned} \mathrm{Tr}\{\gamma_{\mu_1} \gamma_{\mu_2} \dots \gamma_{\mu_{2M}}\} = & \eta_{\mu_1 \mu_2} \mathrm{Tr}\{\gamma_{\mu_3} \dots \gamma_{\mu_{2M}}\} - \\ - & \eta_{\mu_1 \mu_3} \mathrm{Tr}\{\gamma_{\mu_2} \gamma_{\mu_4} \dots \gamma_{\mu_{2M}}\} + \eta_{\mu_1 \mu_4} \mathrm{Tr}\{\gamma_{\mu_2} \gamma_{\mu_3} \gamma_{\mu_5} \dots \gamma_{\mu_{2M}}\} - \dots \\ & \dots + \eta_{\mu_1 \mu_{2M}} \mathrm{Tr}\{\gamma_{\mu_2} \dots \gamma_{\mu_{2M-1}}\}. \end{aligned} \quad (8.A.9)$$

Итак, из предположения о правильности формулы (8.A.1) для  $2N - 2$   $\gamma$ -матриц следует ее правильность для  $2N$  дираковских матриц.

Простейший способ убедиться в том, что след нечетного произведения матриц Дирака равен нулю — заметить, что  $\gamma_\mu$  и  $-\gamma_\mu$  связаны преобразованием подобия:  $-\gamma_\mu = \gamma_5 \gamma_\mu (\gamma_5)^{-1}$ . След не меняется

<sup>1)</sup> Сейчас существуют компьютерные программы [7], вычисляющие следы от произведений большого числа  $\gamma$ -матриц.

при таком преобразовании, значит, след произведения нечетного числа  $\gamma$ -матриц равен ему же со знаком “−”, т.е. равен нулю.

При вычислениях также часто встречаются следы вида

$$\mathrm{Tr}\{\gamma_5\gamma_{\mu_1}\gamma_{\mu_2}\dots\gamma_{\mu_n}\}.$$

При нечетном  $n$  они тоже равны нулю, по той же причине, что и след без  $\gamma_5$ . Кроме того, такой след равен нулю при  $n = 0$  и  $n = 2$ :

$$\mathrm{Tr}\{\gamma_5\} = 0, \quad (8.A.10)$$

$$\mathrm{Tr}\{\gamma_5\gamma_\mu\gamma_\nu\} = 0. \quad (8.A.11)$$

Чтобы увидеть это, вспомним, что  $\gamma_5 \equiv i\gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3$ , и заметим, что невозможно спарить индексы в  $\mathrm{Tr}\{\gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3\}$  или в  $\mathrm{Tr}\{\gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3\gamma_\mu\gamma_\nu\}$  так, чтобы индексы в каждой паре были равны. При  $n = 4$ , т.е. в  $\mathrm{Tr}\{\gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma_\rho\gamma_\sigma\}$ , это возможно, лишь если  $\mu, \nu, \rho, \sigma$  являются некоторой перестановкой 0, 1, 2, 3. Кроме того, этот след антисимметричен относительно перестановки любых индексов  $\mu, \nu, \rho, \sigma$ , поскольку разные  $\gamma$ -матрицы антикоммутируют. Следовательно, такой след пропорционален тензору Леви–Чевита  $\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}$ . Коэффициент пропорциональности можно выяснить, положив индексы равными 0, 1, 2, 3, и учитывая, что  $\epsilon_{0123} = -1$ . В результате находим

$$\mathrm{Tr}\{\gamma_5\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma_\rho\gamma_\sigma\} = 4i\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}. \quad (8.A.12)$$

След от произведения  $\gamma_5$  с шестью, восемью и более  $\gamma$ -матрицами можно вычислить такими же методами, что и при проверке формулы (8.A.1).

## Задачи

**1.** Вычислите дифференциальное и полное сечение процесса

$$e^+ e^- \rightarrow \mu^+ \mu^-$$

в наизнешнем порядке по  $e$ . Считайте, что поляризация электронов и мюонов не наблюдается. Используйте простейший лагранжиан электродинамики с электронами и мюонами.

**2.** Проведите каноническое квантование теории с заряженным скалярным полем  $\Phi$ , взаимодействующим с электромагнитным полем, взяв в качестве плотности лагранжиана

$$\mathcal{L} = -(D_\mu\Phi)^\dagger(D^\mu\Phi) - m^2\Phi^\dagger\Phi - \lambda(\Phi^\dagger\Phi)^2 - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu},$$

где

$$D_\mu\Phi \equiv \partial_\mu\Phi - iqA_\mu\Phi, \quad F_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu.$$

Используйте кулоновскую калибровку. Выразите гамильтониан через поля  $\mathbf{A}, \Phi, \Phi^\dagger$  и канонически сопряженные им. Выразите взаимодей-

ствие  $V(t)$  в представлении взаимодействия через поля в этом представлении и их производные.

**3.** С помощью результатов задачи 2 вычислите в наинизшем порядке дифференциальное и полное сечение рассеяния фотона на массивной заряженной скалярной частице.

**4.** Напишите калибровочно-инвариантный лагранжиан заряженного массивного векторного поля, взаимодействующего с электромагнитным полем.

**5.** В наинизшем порядке по  $e$  вычислите дифференциальное сечение электрон-электронного рассеяния. Начальная и конечная поляризация электронов не измеряется.

## Литература

1. См., например, *Green M.B., Schwarz J.H., Witten E.* Superstring Theory. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1987. § 2.2.
- 1a. *Fock V.* // Zeitschrift für Physik. **39**, 226 (1927); *Weyl H.* // Zeitschrift für Physik. **56**, 330 (1929). Термин “калибровочная инвариантность” происходит от аналогии с масштабной инвариантностью, о которой Вейль писал в своей книге *Raum, Zeit, Materie*, 3-е изд. Springer-Verlag, Berlin, 1920. Также см. *London F.* // Zeitschrift für Physik. **42**, 375 (1927). Эта история была также рассказана Янгом (C.N. Yang) на конференции в City College (неопубликовано).
2. Швингер обосновывал использование кулоновской калибровки в электродинамике примерно так же, как и мы, — тем, что достаточно вводить только фотоны со спиральностью  $\pm 1$ . См. *Schwinger J.* // Phys. Rev. **78**, 1439 (1948); **127**, 324 (1962); Nuovo Cimento. **30**, 278 (1963).
3. *Feynman R.P.* // Phys. Rev. **101**, 769 (1949). § 8.
4. *Klein O., Nishina Y.* // Z. f. Phys. **52**, 853 (1929); *Nishina Y.*, там же, 869 (1929); см. также *Tamm I.* // Z. f. Phys. **62**, 545 (1930).
5. См., например, *Weinberg S.* Gravitation and Cosmology. Wiley, N.Y., 1972. § 4.11.
6. В качестве хорошего введения в геометрию и топологию  $p$ -форм рекомендуем *Flanders H.* Differential Forms. Academic Press, N.Y., 1963.
7. *West T.* // Comput. Phys. Commun. **77**, 286 (1993).

## МЕТОДЫ ИНТЕГРИРОВАНИЯ ПО ПУТЯМ

В главах 7 и 8 мы применили формализм канонического операторного квантования при выводе правил Фейнмана для целого ряда теорий. Во многих случаях, таких как, например, скалярное поле с источником как в § 7.5 или векторное поле с нулевой или ненулевой массой, каноническая процедура, являясь последовательной, выглядит тем не менее неестественно. Оказалось, что гамильтониан взаимодействия содержит ковариантное слагаемое, равное слагаемому в лагранжиане, соответствующему взаимодействию, взятому с противоположным знаком, плюс нековариантное слагаемое, которое позволяло сократить нековариантные слагаемые в пропагаторе. В случае электродинамики это нековариантное слагаемое (кулоновская энергия) оказывается не только локальным в пространстве, но и локальным во времени. И все же окончательные результаты довольно просты: правила Фейнмана те же, что мы получили бы с ковариантными пропагаторами, используя для вычисления вершинных вкладов слагаемое лагранжиана, соответствующее взаимодействию, взятое с противоположным знаком. Трудности при получении этих простых результатов, бывшие уже достаточно заметными в теориях, рассмотренных в гл. 7 и 8, становятся слишком значительными в более сложных теориях, как, например, неабелевы калибровочные теории, которые будут рассмотрены в т. II, а также общая теория относительности. Гораздо более предпочтительным являлся бы метод вычислений, который приводил бы напрямую от лагранжиана к правилам Фейнмана в их окончательной, лоренцинвариантной (ковариантной) форме.

К счастью, такой метод существует. Он предлагается в рамках подхода к квантовой механике с точки зрения функционального интегрирования (или интегрирования по путям). Этот подход был впервые представлен в контексте нерелятивистской квантовой механики в докторской диссертации Фейнмана в Принстоне [1] как способ напрямую работать с лагранжианом, а не с гамильтонианом. В этом аспекте работа Фейнмана была развитием идеи, высказанной в более ранней работе Дирака [2]. Подход с использованием интегрирования по путям стал частью (наряду с возникшей догадкой) будущего вывода Фейнманом правил диаграммной техники [3]. Однако несмотря на то что диаграммы Фейнмана стали широко используемым инструментом в 1950-х годах, многие физики (включая меня) стремились вывести их, используя операторные методы Швингера и Томонаги, которые, как показал Дайсон в 1949 г., должны приводить к диа-

граммным правилам, аналогичным полученным Фейнманом своими собственными методами.

Подход с помощью функционального интеграла привлек к себе внимание с новой силой в конце 1960-х годов, когда Фаддеев и Попов [4], а также де Витт [5] показали как его применить к неабелевым калибровочным теориям и к общей теории относительности. Для большинства теоретиков переломный момент наступил в 1971 г., когда 'т Хофт [6] применил методы функционального интегрирования при выводе правил Фейнмана для спонтанно нарушенных калибровочных теорий (обсуждающихся в т. II), включая, в частности, теорию слабых и электромагнитных взаимодействий, в калибровке, в которой поведение этих теорий в пределе высоких энергий становится прозрачным. Вскоре после этого было открыто, что метод функционального интегрирования позволяет нам принимать во внимание вклады в  $S$ -матрицу, которые имеют существенную сингулярность при нулевой константе связи и, таким образом, не могут быть получены ни в каком конечном порядке теории возмущений (что также обсуждается в т. II). Благодаря этому методы функционального интегрирования, описанные здесь, стали незаменимой частью инструментария каждого физика, использующего квантовую теорию поля.

В этом месте читатель может задаться вопросом, почему, если метод функционального интегрирования так удобен, мы потратили время в гл. 7 на введение канонического формализма. Действительно, Фейнман ведь, поначалу казалось, считал свой подход с использованием интегралов по путям альтернативой обычной канонической формализации квантовой механики. И все-таки есть две причины, чтобы начинать с канонического формализма. Первая — это вопрос принципа: несмотря на то что формализм функционального интегрирования обеспечивает нас явно лоренц-инвариантными диаграммными правилами, он не проясняет, почему  $S$ -матрица, вычисленная таким способом, унитарна. Насколько я знаю, единственный способ показать, что формализм функционального интегрирования дает унитарную  $S$ -матрицу, это использовать его для реконструкции канонического формализма, в котором унитарность  $S$ -матрицы очевидна. Здесь присутствует некоторый закон сохранения неприятностей; мы можем использовать канонический подход, в котором унитарность очевидна, а лоренц-инвариантность неясна, или подход с использованием интегралов по путям, который явно лоренц-инвариантен, но далек от явной унитарности. Так как подход с использованием континуального интегрирования выводится здесь из канонического формализма, мы знаем, что оба подхода дают одну и ту же  $S$ -матрицу, таким образом  $S$ -матрица должна быть и лоренц-инвариантной и унитарной.

Вторая причина того, что сначала вводится канонический формализм, более близка к практике: существуют важные теории, в которых простейший вариант метода функционального интегрирова-

ния Фейнмана, в котором пропагаторы и вершины взаимодействия берутся прямо из лагранжиана, приводят к неправильным результатам. Одним из примеров является нелинейная  $\sigma$ -модель с лагранжевой плотностью  $\mathcal{L} = -\frac{1}{2} g_{kl}(\phi) \partial_\mu \phi^k \partial^\mu \phi^l$ . В таких теориях, напрямую используя правила Фейнмана, выведенные прямо из лагранжевой плотности, мы получили бы  $S$ -матрицу, которая оказалась бы не только неправильной, но даже не унитарной, причем ответ зависит от того, как мы определяем скалярное поле [7]. В этой главе мы выведем формализм функционального интегрирования из канонического формализма, и попутно мы увидим, что простейший вариант метода интегрирования по путям Фейнмана необходимо расширить, включая в него дополнительный класс вершин.

### § 9.1. Основная формула интегрирования по путям

Мы начинаем с общей квантово-механической системы с эрмитовыми операторами “координаты”  $\mathcal{Q}_a$  и сопряженного ему “импульса”  $P_b$ , удовлетворяющими каноническим коммутационным соотношениям<sup>1)</sup>:

$$[\mathcal{Q}_a, P_b] = i\delta_{ab}, \quad (9.1.1)$$

$$[\mathcal{Q}_a, \mathcal{Q}_b] = [P_a, P_b] = 0. \quad (9.1.2)$$

(В этом и в следующих трех параграфах мы ограничимся бозонными операторами, которые удовлетворяют коммутационным, а не антикоммутационным соотношениям. Наши результаты будут обобщены на включение в рассмотрение фермионных операторов в § 9.5.) В теории поля индекс  $a$  включает вектор положения в пространстве  $\mathbf{x}$  и дискретный лоренцевский и групповой индекс  $m$ . Таким образом, мы можем условно записать

$$\mathcal{Q}_{\mathbf{x}, m} \equiv \mathcal{Q}_m(\mathbf{x}), \quad (9.1.3)$$

$$P_{\mathbf{x}, m} \equiv P_m(\mathbf{x}). \quad (9.1.4)$$

Символ Кронекера “дельта” в формуле (9.1.1) интерпретируется в теории поля как

$$\delta_{\mathbf{x}, m; \mathbf{y}, n} \equiv \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y})\delta_{mn}. \quad (9.1.5)$$

Однако пока будет удобнее использовать более компактные обозначения из выражений (9.1.1) и (9.1.2). Это операторы в “представле-

<sup>1)</sup> Мы подразумеваем здесь, что все связи первого рода уничтожаются при выборе калибровки, а все оставшиеся связи второго рода “разрешаются” при написании связных степеней свободы в терминах несвязных  $\mathcal{Q}_a$  и  $P_b$ , как в § 7.6. Прямое применение методов функционального интегрирования к системам со связями описывается Фаддеевым [8].

ний Шредингера”, взятые при фиксированном времени (скажем, при  $t = 0$ ). Зависящие от времени операторы в представлении Гейзенberга будут рассмотрены ниже.

Так как все  $\mathcal{Q}_a$  коммутируют, мы можем найти единовременное собственное состояние  $|q\rangle$  с собственными значениями  $q_a$ :

$$\mathcal{Q}_a |q\rangle = q_a |q\rangle. \quad (9.1.6)$$

(Здесь мы используем маленькие  $q$  и  $p$  для обозначения собственных значений, а не операторов в представлении взаимодействия, как в гл. 7, но, поскольку мы не будем использовать представление взаимодействия в этой главе, никакой путаницы не возникнет.) Собственные векторы могут быть выбраны ортонормированными,

$$\langle q'|q\rangle = \prod_a \delta(q'_a - q_a) \equiv \delta(q' - q), \quad (9.1.7)$$

так что соотношение полноты запишется в виде

$$1 = \int \prod_a dq_a |q\rangle \langle q|. \quad (9.1.8)$$

Аналогичным образом мы можем найти полный ортонормированный набор собственных состояний  $P_a$ :

$$P_a |p\rangle = p_a |p\rangle, \quad (9.1.9)$$

$$\langle p'|p\rangle = \prod_a \delta(p'_a - p_a) \equiv \delta(p' - p), \quad (9.1.10)$$

$$1 = \int \prod_a dp_a |p\rangle \langle p|. \quad (9.1.11)$$

Как обычно, из соотношения (9.1.1) следует, что для этих двух полных наборов собственных состояний можно определить скалярное произведение<sup>2)</sup>

$$\langle q|p\rangle = \prod_a \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(iq_a p_a). \quad (9.1.12)$$

В представлении Гейзенберга операторам  $\mathcal{Q}$  и  $P$  соответствуют операторы, зависящие от времени:

$$\mathcal{Q}_a(t) \equiv \exp(iHt)\mathcal{Q}_a \exp(-iHt), \quad (9.1.13)$$

$$P_a(t) \equiv \exp(iHt)P_a \exp(-iHt), \quad (9.1.14)$$

---

<sup>2)</sup> Доказательство следует той же схеме, что и в квантовой механике точечных частиц. Из соотношения (9.1.1) мы видим, что  $P_b$  действует как  $-i\partial/\partial q_b$  на волновые функции в  $q$ -базисе. Тогда правая часть выражения (9.1.12) рассматривается как волновая функция собственного состояния  $P$  в этом базисе. Множитель  $\prod 1/\sqrt{2\pi}$  фиксируется в результате требования выполнения нормировочного условия (9.1.10).

где  $H$  — полный гамильтониан. Операторы в представлении Гейзенберга имеют собственные состояния  $|q; t\rangle$  и  $|p; t\rangle$ ,

$$\mathcal{Q}_a(t)|q; t\rangle = q_a|q; t\rangle, \quad (9.1.15)$$

$$P_a(t)|p; t\rangle = p_a|p; t\rangle, \quad (9.1.16)$$

определяемые следующими выражениями

$$|q; t\rangle = \exp(iHt)|q\rangle, \quad (9.1.17)$$

$$|p; t\rangle = \exp(iHt)|p\rangle. \quad (9.1.18)$$

(Заметим, что  $|q; t\rangle$  есть собственное состояние  $\mathcal{Q}_a(t)$  с собственным значением  $q_a$ , а не результат того, что состояние  $|q\rangle$  меняется во времени. Именно поэтому его зависимость от времени задается множителем  $\exp(iHt)$ , а не  $\exp(-iHt)$ .) Эти состояния очевидным образом удовлетворяют условиям полноты и ортонормированности:

$$\langle q'; t|q; t\rangle = \delta(q' - q), \quad (9.1.19)$$

$$\langle p'; t|p; t\rangle = \delta(p' - p), \quad (9.1.20)$$

$$\int \prod_a dq_a |q; t\rangle \langle q; t| = 1, \quad (9.1.21)$$

$$\int \prod_a dp_a |p; t\rangle \langle p; t| = 1, \quad (9.1.22)$$

а также

$$\langle q; t|p; t\rangle = \prod_a \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(iq_a p_a). \quad (9.1.23)$$

Если в результате измерений в момент времени  $t$  мы обнаружим, что наша система находится в определенном состоянии  $|q; t\rangle$ , тогда амплитуда вероятности получения состояния  $|q'; t'\rangle$  при измерении в момент времени  $t'$  равна скалярному произведению  $\langle q'; t'|q; t\rangle$ . Наша основная динамическая задача — вычислить это скалярное произведение.

Это просто, если моменты времени  $t'$  и  $t$  бесконечно близки,  $t' = \tau + d\tau$  и  $t = \tau$ . Используя равенство (9.1.17), имеем

$$\langle q'; \tau + d\tau|q; \tau\rangle = \langle q'; \tau| \exp(-iHd\tau)|q; \tau\rangle. \quad (9.1.24)$$

Гамильтониан  $H$  задается как функция  $H(\mathcal{Q}, P)$ , но поскольку (9.1.13) и (9.1.14) являются преобразованиями подобия, а  $H$  коммутирует сам с собой, он может быть с таким же успехом записан как та же функция от  $\mathcal{Q}(t)$  и  $P(t)$ :

$$H \equiv H(\mathcal{Q}, P) = e^{iHt} H(\mathcal{Q}, P) e^{-iHt} = H(\mathcal{Q}(t), P(t)). \quad (9.1.25)$$

Эта функция может быть переписана в различных формах, с различными коэффициентами, с использованием коммутационных соотношений (9.1.1) и (9.1.2) для переноса  $\mathcal{Q}$  и  $P$  друг через друга. Будет

удобно придерживаться стандартной формы, в которой все  $\mathcal{Q}$  оказываются слева от всех  $P$ . Например, если задано слагаемое гамильтониана вида  $P_a \mathcal{Q}_b P_c$ , мы перепишем его как

$$P_a \mathcal{Q}_b P_c = \mathcal{Q}_b P_a P_c - i \delta_{ab} P_c.$$

При такой договоренности  $Q_a(t)$  в гамильтониане в (9.1.24) могут быть заменены<sup>3)</sup> своими собственными значениями  $q'_a$ . Для того чтобы работать с  $P(t)$ , мы используем выражение (9.1.23) для разложения  $|q; \tau\rangle$  по собственным состояниям  $P|p; \tau\rangle$  и находим

$$\begin{aligned} \langle q'; \tau + d\tau | q; \tau \rangle &= \\ &= \int \prod_a dp_a \langle q'; \tau | \exp(-iH(\mathcal{Q}(\tau), P(\tau)) d\tau) | p; \tau \rangle \langle p; \tau | q; \tau \rangle = \\ &= \int \prod_a \frac{dp_a}{2\pi} \exp \left[ -iH(q', p) d\tau + i \sum_a (q'_a - q_a) p_a \right], \end{aligned} \quad (9.1.26)$$

где интегрирование ведется по каждому  $p_a$  от  $-\infty$  до  $\infty$ .

Обратимся теперь к более общему случаю, когда интервал времени конечен. Для того чтобы вычислить  $\langle q'; t' | q; t \rangle$ , где  $t < t'$ , мы разбиваем интервал времени от  $t$  до  $t'$  на маленькие интервалы между моментами времени  $t, \tau_1, \tau_2, \dots, \tau_N, t'$ , где

$$\tau_{k+1} - \tau_k = d\tau = (t' - t)/(N + 1), \quad (9.1.27)$$

и суммируем по полному набору состояний  $|q; \tau_k\rangle$  в каждый момент времени  $\tau_k$ :

$$\begin{aligned} \langle q'; t' | q; t \rangle &= \\ &= \int dq_1 \dots dq_N \langle q'; t' | q_N; \tau_N \rangle \langle q_N; \tau_N | q_{N-1}; \tau_{N-1} \rangle \dots \langle q_1; \tau_1 | q; t \rangle. \end{aligned} \quad (9.1.28)$$

С учетом равенства (9.1.26), эта формула записывается следующим образом:

$$\begin{aligned} \langle q'; t' | q; t \rangle &= \int \left[ \prod_{k=1}^N \prod_a dq_{k,a} \right] \left[ \prod_{k=0}^N \prod_a \frac{dp_{k,a}}{2\pi} \right] \times \\ &\times \exp \left[ i \sum_{k=1}^{N+1} \left\{ \sum_a (q_{k,a} - q_{k-1,a}) p_{k-1,a} - H(q_k, p_{k-1}) d\tau \right\} \right], \end{aligned} \quad (9.1.29)$$

где

$$q_0 \equiv q, \quad q_{N+1} \equiv q'. \quad (9.1.30)$$

---

<sup>3)</sup> Это возможно только потому, что, поскольку  $d\tau$  бесконечно мало,  $\exp(-iH d\tau)$  линейно по  $H$ .

Наш результат, формула (9.1.29), может быть записана в гораздо более элегантной форме. Определим гладкие интерполяционные функции  $q(\tau)$  и  $p(\tau)$  такие, что

$$q_a(\tau_k) \equiv q_{k,a}, \quad p_a(\tau_k) \equiv p_{k,a}. \quad (9.1.31)$$

В пределе  $d\tau \rightarrow 0$  (т.е.  $N \rightarrow \infty$ ) выражение в показателе экспоненты в формуле (9.1.29) становится интегралом по  $\tau$ :

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^{N+1} \left\{ \sum_a (q_{k,a} - q_{k-1,a}) p_{k-1,a} - H(q_k, p_{k-1}) d\tau \right\} = \\ &= \sum_{k=1}^{N+1} \left\{ \sum_a (\dot{q}_a(\tau_k) p_a(\tau_k) - H(q(\tau_k), p(\tau_k))) \right\} d\tau + O(d\tau^2) \rightarrow \\ & \rightarrow \int_t^{t'} \left\{ \sum_a (\dot{q}_a(\tau) p_a(\tau) - H(q(\tau), p(\tau))) \right\} d\tau. \end{aligned} \quad (9.1.32)$$

Далее, мы можем определить интегралы от функций  $q(\tau)$ ,  $p(\tau)$  посредством

$$\int \prod_{\tau,a} dq_a(\tau) \prod_{\tau,b} \frac{dp_b(\tau)}{2\pi} \dots \equiv \lim_{d\tau \rightarrow 0} \int \prod_{k,a} dq_{k,a} \prod_{k,b} \frac{dp_{k,b}}{2\pi} \dots \quad (9.1.33)$$

Выражение в правой части формулы (9.1.29) становится интегралом с фиксированным началом и концом пути:

$$\begin{aligned} \langle q'; t' | q; t \rangle = & \int_{\substack{q_a(t)=q_a \\ q_a(t')=q'_a}} \prod_{\tau,a} dq_a(\tau) \prod_{\tau,b} \frac{dp_b(\tau)}{2\pi} \times \\ & \times \exp \left[ i \int_t^{t'} d\tau \left\{ \sum_a (\dot{q}_a(\tau) p_a(\tau) - H(q(\tau), p(\tau))) \right\} \right]. \end{aligned} \quad (9.1.34)$$

Это выражение называется *интегралом по путям*, поскольку мы проинтегрировали по всем путям, которые приводят  $q(\tau)$  из положения  $q$  при  $\tau = t$  в положение  $q'$  при  $\tau = t'$ , так же как и по всем  $p(\tau)$ . Огромное преимущество такого способа записи матричных элементов заключается в том, что, как показано в § 9.3, интегралы по путям можно легко вычислить, раскладывая их по степеням константы связи в  $H$ .

Формализм интегрирования по путям позволяет нам вычислить не только амплитуды вероятности перехода, такие как  $\langle q'; t' | q; t \rangle$ , но и матричные элементы между состояниями  $\langle q'; t' |$  и  $| q; t \rangle$  для произведений произвольных операторов  $\mathcal{O}(P(t), \mathcal{Q}(t))$ , упорядоченных по времени. Будет удобно определить эти операторы (в противополож-

ность тому, как было определено  $H$ ) так, чтобы все  $P$  стояли *слева*, а все  $\mathcal{Q}$  — *справа*. Далее вставляя любой такой оператор  $\mathcal{O}[P(t), \mathcal{Q}(t)]$  в выражение (9.1.26), имеем

$$\begin{aligned} \langle q'; \tau + d\tau | \mathcal{O}(P(\tau), \mathcal{Q}(\tau)) | q; \tau \rangle &= \\ &= \int \prod_a dp_a \langle q'; \tau | \exp(-iH(\mathcal{Q}(\tau), P(\tau)) d\tau) | p; \tau \rangle \times \\ &\quad \times \langle p; \tau | \mathcal{O}(P(\tau), \mathcal{Q}(\tau)) | q; \tau \rangle = \\ &= \int \prod_a \frac{dp_a}{2\pi} \exp \left[ -iH(q', p) d\tau + i \sum_a (q'_a - q_a) p_a \right] \mathcal{O}(p, q). \end{aligned} \quad (9.1.35)$$

Для того чтобы вычислить матричный элемент произведения

$$\mathcal{O}_A(P(t_A), \mathcal{Q}(t_A)) \mathcal{O}_B(P(t_B), \mathcal{Q}(t_B)) \dots$$

операторов, где  $t_A > t_B > \dots$ , мы можем вставлять ( $\mathcal{O}$ )-операторы между соответствующими состояниями в формуле (9.1.28), используя при этом выражение (9.1.35). Например, если момент времени  $t_A$  попадает между  $\tau_k$  и  $\tau_{k+1}$ , то вставим  $\mathcal{O}_A(P(t_A), \mathcal{Q}(t_A))$  между  $\langle q_{k+1}; \tau_{k+1} |$  и  $| q_k; \tau_k \rangle$ . Заметим, что в выражении (9.1.28) каждая последующая сумма по состояниям соответствует более позднему моменту времени, таким образом, это возможно лишь благодаря нашему предположению о том, что  $t_A > t_B > \dots$  Следуя тем же шагам, что и выше, находим теперь общую формулу интегрирования по путям:

$$\begin{aligned} \langle q', t' | \mathcal{O}_A(P(t_A), \mathcal{Q}(t_A)) \mathcal{O}_B(P(t_B), \mathcal{Q}(t_B)) \dots | q; t \rangle &= \\ &= \int \prod_{\substack{q_a(t)=q_a \\ q_a(t')=q'_a}} d q_a(\tau) \prod_{\tau, b} \frac{d p_b(\tau)}{2\pi} \mathcal{O}_A(p(t_A), q(t_A)) \mathcal{O}_B(p(t_B), q(t_B)) \dots \\ &\quad \dots \exp \left[ i \int_t^{t'} d\tau \left\{ \sum_a \dot{q}_a(\tau) p_a(\tau) - H(q(\tau), p(\tau)) \right\} \right]. \end{aligned} \quad (9.1.36)$$

Этот результат верен лишь в том случае, когда моменты времени упорядочены:

$$t' > T_A > t_B > \dots > t. \quad (9.1.37)$$

Однако ничто в правой части формулы (9.1.36) не указывает на порядок временных аргументов. Интеграл по путям, представленный в правой части формулы (9.1.36) с моментами времени  $t_A, t_B, \dots$  в произвольном порядке, будет равняться матричному элементу в левой части формулы (9.1.36), но только с операторами, упорядоченными (слева направо) по убывающему времени. Таким образом, для момен-

тов времени  $t_A, t_B, \dots$  в произвольном порядке, мы имеем

$$\begin{aligned} & \langle q', t' | T\{\mathcal{O}_A(P(t_A), \mathcal{Q}(t_A)), \mathcal{O}_B(P(t_B), \mathcal{Q}(t_B)), \dots\} | q; t \rangle = \\ &= \int \prod_{\substack{\tau, a \\ q_a(\tau) = q_a \\ q_a(t') = q'_a}} d\tau \prod_{\substack{\tau, b \\ p_b(\tau) = p_b}} \frac{dp_b(\tau)}{2\pi} \mathcal{O}_A(p(t_A), q(t_A)) \mathcal{O}_B(p(t_B), q(t_B)) \dots \\ & \dots \exp \left[ i \int_t^{t'} d\tau \left\{ \sum_a (\dot{q}_a(\tau) p_a(\tau) - H(q(\tau), p(\tau))) \right\} \right], \quad (9.1.38) \end{aligned}$$

где  $T$  обозначает обычное упорядоченное по времени произведение.

Следует, наверное, подчеркнуть, что  $c$ -числовые (т.е. классические) функции  $q_a(\tau), p_a(\tau)$  в формуле (9.1.38) — простые переменные интегрирования и, в частности, не обязательно должны удовлетворять уравнениям движения классической гамильтоновой динамики:

$$\dot{q}_a(\tau) - \frac{\partial H(q(\tau), p(\tau))}{\partial p_a(\tau)} = 0, \quad (9.1.39)$$

$$\dot{p}_a(\tau) + \frac{\partial H(q(\tau), p(\tau))}{\partial q_a(\tau)} = 0. \quad (9.1.40)$$

(По этой причине гамильтониан  $H(q(\tau), p(\tau))$  в формуле (9.1.38) не является постоянным по  $\tau$ .) Тем не менее в некотором ограниченном смысле интегралы по путям удовлетворяют этим уравнениям движения. Предположим, что одна из функций в формуле (9.1.38), скажем  $\mathcal{O}_A(p(t_A), q(t_A))$  оказывается левой частью одного из уравнений (9.1.39) или (9.1.40). Отмечаем, что (для  $t < t_A < t'$ )

$$\left( \dot{q}_a(t_A) - \frac{\partial H(q(t_A), p(t_A))}{\partial p_a(t_A)} \right) \exp(iI[q, p]) = -i \frac{\delta}{\delta p_a(t_A)} \exp(iI[q, p]),$$

$$\left( \dot{p}_a(t_A) + \frac{\partial H(q(t_A), p(t_A))}{\partial q_a(t_A)} \right) \exp(iI[q, p]) = -i \frac{\delta}{\delta q_a(t_A)} \exp(iI[q, p]),$$

где  $iI$  — показатель экспоненты из формулы (9.1.38):

$$I[q, p] \equiv \int_t^{t'} d\tau \left\{ \sum_a (\dot{q}_a(\tau) p_a(\tau) - H(q(\tau), p(\tau))) \right\}.$$

До тех пор пока  $t_A$  достаточно далеко от  $t$  и  $t'$ , интегрирования по  $q_a(\tau)$  и  $p_a(\tau)$  не ограничены, и, таким образом, поскольку исходные предположения о сходимости этих интегралов достаточно обоснованы, интеграл от таких вариационных производных должен обращаться в нуль. Следовательно, интеграл по путям (9.1.38) обращается в нуль, если  $\mathcal{O}_A(p, q)$  берется в качестве левой части одного из уравнений движения: (9.1.39) или (9.1.40).

Это простое правило применимо лишь в том случае, если переменные интегрирования  $q_a(t_A), p_a(t_A)$  не зависят от других перемен-

ных  $q_a(t_B)$ ,  $p_a(t_B)$  и т.д., появляющихся в любых других функциях  $\mathcal{O}_B$ ,  $\mathcal{O}_C$  и т.д. в формуле (9.1.38), и, следовательно, если мы запрещаем  $t_A$  приближаться к  $t_B$ ,  $t_C$  и т.д., также как и к  $t$  или  $t'$ . Когда  $t_A$  приближается, скажем, к  $t_B$ , интеграл по путям дает отличный от нуля член, пропорциональный  $\delta(t_A - t_B)$  или ее производным. Эти дельта-функции те же самые, что мы нашли бы в операторном формализме из производных по времени от ступенчатых функций, подразумеваемых в определении упорядоченного по времени произведения.

При вычислении интегралов по путям (9.1.34) и (9.1.38) нам необходимо знать лишь классический гамильтониан,  $c$ -числовую функцию  $H(q, p)$ . Если мы определяем теорию посредством интегралов по путям, естественным образом возникает вопрос, какой из многих возможных квантово-механических гамильтонианов  $H(\mathcal{Q}, P)$  (различающихся порядком  $\mathcal{Q}$  и  $P$ ) определяет квантовую теорию, соответствующую этим интегралам по путям. Наш вывод дает ответ на этот вопрос: в квантовом гамильтониане все  $\mathcal{Q}$  должны быть слева, а  $P$  — справа. Но было бы ошибкой придавать этому предписанию слишком большое значение. Существует огромное множество способов интерпретации меры

$$\prod dq_a(\tau) \prod dp_b(\tau),$$

входящей в интегралы по путям (9.1.34) и (9.1.38). Наше предписание ставить все  $\mathcal{Q}$  слева, а  $P$  — справа имеет место лишь в том случае, если мера интерпретируется согласно выражениям (9.1.31)–(9.1.33). Другие меры привели бы к иным предписаниям для упорядочивания операторов. Этот вопрос не является существенным на данном этапе, поскольку различные прескрипции для упорядочивания операторов в гамильтониане соответствуют различным выборам констант, играющих роль коэффициентов перед различными членами в гамильтониане, а мы формулируем теории в общем виде, оставляя эти константы произвольными параметрами.

Достаточно сложно использовать общий интеграл по путям в формуле (9.1.38) для численных расчетов или как источник строгих теорем. Для этих целей удобнее использовать метод интегрирования по путям для вычисления амплитуд в евклидовом пространстве, где  $t$  заменяется мнимой величиной  $-ix_4$ , а значение аргумента экспоненты в формуле (9.1.38) отрицательно и действительно. Таким образом, “скачущие” пути, дающие быстрые осцилляции подынтегрального выражения от одного пути к другому, будут экспоненциально подавляться. Хотя мы не будем вдаваться в это рассмотрение здесь, квантовая теория поля может быть изначально сформулирована в терминах фейнмановских амплитуд в евклидовом пространстве–времени [8a]. При определенных правдоподобных предположениях возможно реконструировать фейнмановские амплитуды в пространстве–времени Минковского по соответствующим им в евклидовом пространстве–времени [8b]. Но мы также можем придерживаться формулировки

интеграла по путям в пространстве Минковского, если мы собираемся использовать его лишь для вычисления фейнмановских амплитуд в теории возмущений.

## § 9.2. Переход к $S$ -матрице

Как уже упоминалось, мы легко можем преобразовать общие квантово-механические результаты § 9.1 так, чтобы они соответствовали квантовой теории поля, позволяя индексу  $a$  пробегать значения, отвечающие точкам  $\mathbf{x}$  пространства и спин-групповому индексу  $m$ , и заменяя  $\mathcal{Q}_a(t)$  и  $P_a(t)$  на  $\mathcal{Q}_m(\mathbf{x}, t)$  и  $P_m(\mathbf{x}, t)$  соответственно. Формула (9.1.38) записывается тогда следующим образом<sup>1)</sup>:

$$\begin{aligned} \langle q', t' | T\{\mathcal{O}_A(P(t_A), \mathcal{Q}(t_A)), \mathcal{O}_B(P(t_B), \mathcal{Q}(t_B)), \dots\} | q, t \rangle = \\ = \int \prod_{\tau, \mathbf{x}, m} dq_m(\mathbf{x}, \tau) \prod_{\tau, \mathbf{x}, m} \frac{dp_m(\mathbf{x}, \tau)}{2\pi} \times \\ \times \mathcal{O}_A[p(t_A), q(t_A)] \mathcal{O}_B[p(t_B), q(t_B)] \dots \\ \dots \exp \left[ i \int_t^{t'} d\tau \left\{ \int d^3x \sum_m \dot{q}_m(\mathbf{x}, \tau) p_m(\mathbf{x}, \tau) - H[q(\tau), p(\tau)] \right\} \right]. \end{aligned} \quad (9.2.1)$$

Однако формула (9.2.1) не совсем то, что мы хотим иметь в качестве инструмента теории поля. Экспериментаторы измеряют не амплитуды вероятностей переходов между собственными состояниями  $\langle q', t' |$  и  $| q, t \rangle$  для квантового поля  $\mathcal{Q}$ , а скорее, элементы  $S$ -матрицы, амплитуды вероятностей переходов между состояниями, которые при  $t \rightarrow -\infty$  или  $t \rightarrow +\infty$  содержат определенное число частиц различных типов. Эти состояния называются “in” и “out” состояниями,  $|\alpha, \text{in}\rangle$  и  $|\beta, \text{in}\rangle$ , где  $\alpha$  и  $\beta$  обозначают наборы частиц, обладающих различными импульсами,  $z$ -компонентой спина (или спиральностью) и цветовым индексом. Для того чтобы вычислить матричный элемент упорядоченного по времени произведения (возможно, пустого) между такими состояниями, нам необходимо умножить формулу (9.2.1) на “волновые функции”  $\langle \beta, \text{out} | q', t' \rangle$  и  $\langle q, t | \alpha, \text{in} \rangle$  в некоторые фиксированные моменты времени  $t$  и  $t'$ , в качестве которых здесь для удобства выбирается  $-\infty$  и  $+\infty$  соответственно. Далее необходимо проинтегрировать по “аргументам”  $q_m(\mathbf{x})$  и  $q'_m(\mathbf{x})$  этих волновых функций. Но вместо того чтобы ограничивать интеграл по путям по  $q_m(\mathbf{x}, \tau)$

<sup>1)</sup> Мы будем теперь писать  $H$  и  $\mathcal{O}$  с квадратными скобками, чтобы подчеркнуть тот факт, что  $H[q(t), p(t)]$  и  $\mathcal{O}[q(t), p(t)]$  являются функционалами от  $q_m(\mathbf{x}, t)$  и  $p_m(\mathbf{x}, t)$  при фиксированном времени  $t$ .

условиями

$$q_m(\mathbf{x}, +\infty) = q'_m(\mathbf{x}), \quad q_m(\mathbf{x}, -\infty) = q_m(\mathbf{x}), \quad (9.2.2)$$

а затем интегрировать по  $q'_m(\mathbf{x})$  и  $q_m(\mathbf{x})$ , мы можем проинтегрировать без этого ограничения по  $q_m(\mathbf{x}, \tau)$  (и по  $p_m(\mathbf{x}, \tau)$ ), а затем поставить в качестве аргументов волновых функций их значения, определяемые (9.2.2):

$$\begin{aligned} \langle \beta, \text{out} | T\{\mathcal{O}_A(P(t_A), \mathcal{Q}(t_A)), \mathcal{O}_B(P(t_B), \mathcal{Q}(t_B)), \dots\} | \alpha; \text{in} \rangle &= \\ &= \int \prod_{\tau, \mathbf{x}, m} dq_m(\mathbf{x}, \tau) \prod_{\tau, \mathbf{x}, m} \frac{dp_m(\mathbf{x}, \tau)}{2\pi} \mathcal{O}_A[p(t_A), q(t_A)] \mathcal{O}_B[p(t_B), q(t_B)] \dots \\ &\dots \exp \left[ i \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \left\{ \int d^3x \sum_m \dot{q}_m(\mathbf{x}, \tau) p_m(\mathbf{x}, \tau) - H[q(\tau), p(\tau)] \right\} \right] \times \\ &\times \langle \beta, \text{out} | q(+\infty); +\infty \rangle \langle q(-\infty); -\infty | \alpha, \text{in} \rangle. \end{aligned} \quad (9.2.3)$$

В данном случае этот результат сразу<sup>2)</sup> приводит к выражению (6.4.3), теореме, которую мы неоднократно использовали при установлении соответствия между суммами диаграмм Фейнмана вне массовой поверхности и матричными элементами операторов в представлении Гейзенберга между точными энергетическими состояниями.

Теперь необходимо рассмотреть процедуру вычисления волновых функций, представленных в качестве последней пары множителей в правой части выражения (9.2.3). Давайте сначала рассмотрим простейший и самый важный случай, а именно вакуум. (Мы убедились

<sup>2)</sup> Необходимо лишь отметить, что для гамильтониана

$$H[P(t), \mathcal{Q}(t)] + \sum_A \int d^3x \epsilon_A(\mathbf{x}, t) \mathcal{O}_A(\mathbf{x}, t)$$

$S$ -матрица дается выражением (9.2.3) в виде

$$\begin{aligned} \langle \beta, \text{out} | \alpha; \text{in} \rangle_e &= \int \prod_{\tau, \mathbf{x}, m} dq_m(\mathbf{x}, \tau) \prod_{\tau, \mathbf{x}, m} \frac{dp_m(\mathbf{x}, \tau)}{2\pi} \times \\ &\times \exp \left[ i \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \left\{ \int d^3x \dot{q}_m(\mathbf{x}, \tau) p_m(\mathbf{x}, \tau) - H[q(\tau), p(\tau)] - \right. \right. \\ &\left. \left. - \sum_A \int d^3x \epsilon_A(\mathbf{x}, \tau) O_A(\mathbf{x}, \tau) \right\} \right] \times \\ &\times \langle \beta, \text{out} | q(+\infty); +\infty \rangle \langle q(-\infty); -\infty | \alpha, \text{in} \rangle. \end{aligned}$$

Левая часть выражения (6.4.3) является производной от этого выражения по  $\epsilon_a$ ,  $\epsilon_b$  и т.д. при  $\epsilon = 0$ , что дает правую часть выражения (9.2.3), и, учитывая (9.2.3), получаем уже правую часть выражения (6.4.3).

в § 6.4 в том, что элементы  $S$ -матрицы могут быть легко получены из вакуумных средних от упорядоченных по времени произведений.) Как обычно, предполагаем, что для моментов времени  $t \rightarrow \pm\infty$  взаимодействие отсутствует, т.е. матричные элементы в эти моменты времени могут быть вычислены без учета взаимодействия. “In” и “out” вакуумные состояния могут, таким образом, быть определены условиями

$$\begin{aligned} a_{\text{in}}(\mathbf{p}, \sigma, n) |VAC, \text{in}\rangle &= 0, \\ a_{\text{out}}(\mathbf{p}, \sigma, n) |VAC, \text{out}\rangle &= 0, \end{aligned} \quad (9.2.4)$$

где  $a_{\text{in}}$  и  $a_{\text{out}}$  — операторы, появляющиеся в коэффициентах перед  $\exp(i\mathbf{p} \cdot \mathbf{x})$  в разложении по плоским волнам оператора  $\mathcal{Q}_m(\mathbf{x}, t)$  при  $t \rightarrow \infty$  и  $t \rightarrow +\infty$  соответственно. Например, для действительного скалярного поля нейтральных бесспиновых частиц мы в результате получаем

$$\Phi(\mathbf{x}, t) \xrightarrow{t \rightarrow \mp\infty} (2\pi)^{-3/2} \int d^3 p (2E)^{-1/2} [a_{\text{in}}(\mathbf{p}) e^{ip \cdot x} + \text{H.c.}], \quad (9.2.5)$$

$$\begin{aligned} \Pi(\mathbf{x}, t) \xrightarrow{t \rightarrow \mp\infty} \dot{\Phi}(\mathbf{x}, t) &\xrightarrow{t \rightarrow \mp\infty} -i(2\pi)^{-3/2} \times \\ &\times \int d^3 p (E/2)^{1/2} [a_{\text{in}}(\mathbf{p}) e^{ip \cdot x} - \text{H.c.}], \end{aligned} \quad (9.2.6)$$

где  $p^0 \equiv E \equiv \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}$ . Здесь мы используем общепринятые для скалярного поля обозначения  $\Phi$  и  $\Pi$  вместо  $\mathcal{Q}$  и  $P$  соответственно, а также мы опускаем ненужные здесь индексы  $m, \sigma, n$ . Производя обратное фурье-преобразование и взяв линейную комбинацию получающихся выражений, имеем

$$\begin{aligned} a_{\text{out}}(\mathbf{p}) &= \\ &= \lim_{t \rightarrow \mp\infty} \frac{e^{iEt}}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3 x e^{-i\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}} \left[ \sqrt{\frac{E}{2}} \Phi(\mathbf{x}, t) + i\sqrt{\frac{1}{2E}} \Pi(\mathbf{x}, t) \right]. \end{aligned} \quad (9.2.7)$$

Как упоминалось в § 9.1, “импульс”  $\Pi(\mathbf{x}, t)$  действует на волновые функции в  $\phi$ -базисе как вариационная производная  $-i\delta/\delta\phi(\mathbf{x}, t)$ . Таким образом, в этом базисе условия (9.2.4) выглядят следующим образом:

$$0 = \int d^3 x e^{-i\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}} \left[ \frac{\delta}{\delta\phi(\mathbf{x})} + E(\mathbf{p})\phi(\mathbf{x}) \right] \langle \phi(\mathbf{x}); \mp\infty | VAC, \text{out} \rangle. \quad (9.2.8)$$

Аналогичное обыкновенное дифференциальное уравнение имеет хорошо известное гауссово решение. Таким образом, попробуем здесь гауссов анзац:

$$\langle \phi(\mathbf{x}); \mp\infty | VAC, \text{out} \rangle = \mathcal{N} \exp \left( -\frac{1}{2} \int d^3 x d^3 y \mathcal{E}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \phi(\mathbf{x}) \phi(\mathbf{y}) \right) \quad (9.2.9)$$

с ядром  $\mathcal{E}$  и константой  $\mathcal{N}$ , которые надо определить. Подставляя (9.2.9) в выражение (9.2.8), видим, что функциональное дифферен-

циальное уравнение для вакуумного волнового функционала удовлетворяется, если для всех  $\phi$

$$0 = \int d^3x e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} \left[ \int d^3y \mathcal{E}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \phi(\mathbf{y}) - E(\mathbf{p}) \phi(\mathbf{x}) \right], \quad (9.2.10)$$

или, другими словами, если

$$\int d^3x e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} \mathcal{E}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = E(\mathbf{p}) e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{y}}. \quad (9.2.11)$$

Решение легко находится обращением преобразования Фурье:

$$\mathcal{E}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (2\pi)^{-3} \int d^3p e^{-i\mathbf{p}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{y})} E(\mathbf{p}). \quad (9.2.12)$$

(Напомним, что  $E(\mathbf{p}) \equiv \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}$ .) Это наиболее удобное для использования представление для ядра  $\mathcal{E}$ , но, можно отметить, что при  $\mathbf{x} \neq \mathbf{y}$   $\mathcal{E}$  может быть также записано в терминах функции Ганкеля отрицательного порядка:

$$\mathcal{E}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{m}{2\pi^2 r} \frac{d}{dr} \left( \frac{1}{r} K_{-1}(mr) \right), \quad (9.2.13)$$

где  $r \equiv |\mathbf{x} - \mathbf{y}|$ . Константа  $\mathcal{N}$  из (9.2.9) может быть формально получена из условия нормировки вакуумного состояния, но этот результат нам не потребуется.

Согласно анзацу (9.2.9) при вычислении вакуумных средних в теории скалярного поля произведение двух последних множителей в выражении (9.2.3) равно

$$\begin{aligned} \langle \text{VAC, out} | \phi(\infty); +\infty \rangle \langle \phi(-\infty); -\infty | \text{VAC, in} \rangle &= \\ &= |\mathcal{N}|^2 \exp \left( -\frac{1}{2} \int d^3x d^3y \mathcal{E}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \times \right. \\ &\quad \times [\phi(\mathbf{x}, +\infty)\phi(\mathbf{y}, +\infty) + \phi(\mathbf{x}, -\infty)\phi(\mathbf{y}, -\infty)] \Big) = \\ &= |\mathcal{N}|^2 \exp \left( -\frac{1}{2} \epsilon \int d^3x d^3y \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \mathcal{E}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \phi(\mathbf{x}, \tau) \phi(\mathbf{y}, \tau) e^{-\epsilon|\tau|} \right). \end{aligned} \quad (9.2.14)$$

где  $\epsilon$  — положительная инфинитезимальная величина. Для получения окончательного выражения мы использовали тот факт, что для любой разумной гладкой функции  $f(\tau)$

$$f(+\infty) + f(-\infty) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0+} \epsilon \int_{-\infty}^{\infty} d\tau f(\tau) e^{-\epsilon|\tau|}. \quad (9.2.15)$$

Подстановка (9.2.14) в (9.2.3) теперь дает

$$\begin{aligned} \langle \text{VAC}, \text{out} | T\{\mathcal{O}_A[\Pi(t_A), \Phi(t_A)], \mathcal{O}_B[\Pi(t_B), \Phi(t_B)], \dots\} | \text{VAC}, \text{in} \rangle = \\ = |\mathcal{N}|^2 \int \prod_{\tau, \mathbf{x}} d\phi(\mathbf{x}, \tau) \prod_{\tau, \mathbf{x}} \frac{d\pi(\mathbf{x}, \tau)}{2\pi} \mathcal{O}_A[\pi(t_A), \phi(t_A)] \mathcal{O}_B[\pi(t_B), \phi(t_B)] \dots \\ \dots \exp \left[ i \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \left\{ \int d^3x \dot{\phi}(\mathbf{x}, \tau) \pi(\mathbf{x}, \tau) - H[\phi(\tau), \pi(\tau)] + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{1}{2} i\epsilon \int d^3x d^3y \mathcal{E}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) e^{-\epsilon|\tau|} \phi(\mathbf{x}, \tau) \phi(\mathbf{y}, \tau) \right\} \right]. \quad (9.2.16) \end{aligned}$$

Мы увидим в § 9.4, что за счет последнего члена в аргументе экспоненты в выражении (9.2.16) в знаменатель пропагатора скалярного поля в импульсном пространстве добавляется  $-i\epsilon, [p^2 + m^2 - i\epsilon]^{-1}$ . Мы не будем вдаваться в детали того, что будет в соответствующем случае для полей со спином. Просто сформулируем результат для общего случая:

$$\begin{aligned} \langle \text{VAC}, \text{out} | T\{\mathcal{O}_A[\Pi(t_A), \Phi(t_A)], \mathcal{O}_B[\Pi(t_B), \Phi(t_B)], \dots\} | \text{VAC}, \text{in} \rangle = \\ = |\mathcal{N}|^2 \int \left[ \prod_{\tau, \mathbf{x}, m} dq_m(\mathbf{x}, \tau) \right] \left[ \prod_{\tau, \mathbf{x}, m} \frac{dp_m(\mathbf{x}, \tau)}{2\pi} \right] \times \\ \times \mathcal{O}_A[p(t_A), q(t_A)] \mathcal{O}_B[p(t_B), q(t_B)] \dots \\ \dots \exp \left[ i \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \left\{ \int d^3x \sum_m \dot{q}_m(\mathbf{x}, \tau) p_m(\mathbf{x}, \tau) - \right. \right. \\ \left. \left. - H[q(\tau), p(\tau)] + i\epsilon\text{-члены} \right\} \right], \quad (9.2.17) \end{aligned}$$

где  $i\epsilon$ -члены как раз обеспечивают добавление правильного слагаемого  $-i\epsilon$  в знаменатели всех пропагаторов.

Самое время отметить, что не зависящие от поля множители в (9.2.17), такие как константа  $|\mathcal{N}|^2$ , несущественны вследствие того, что эти множители дают вклад также и в матричный элемент  $\langle \text{VAC}, \text{out} | \text{VAC}, \text{in} \rangle$ . При вычислении *связной* части вакуумных средних упорядоченных по времени произведений (или  $S$ -матрицы), мы избавляемся от вклада несвязных поддиаграмм, соответствующих вакуумным флуктуациям, путем деления на  $\langle \text{VAC}, \text{out} | \text{VAC}, \text{in} \rangle$ , и любые постоянные множители в вакуумных средних сокращаются.

Мы могли бы продолжить и рассчитать матричные элементы между многочастичными состояниями, вставляя соответствующие “волновые функционалы” в выражение (9.2.3). Эти функционалы могут быть получены в результате применения операторов, сопряженных операторам уничтожения, таким как (9.2.7), к вакуумному состоянию;

так же как и для гармонического осциллятора эти волновые функционалы оказываются произведениями полиномов Эрмита по полю и вакуумного гауссиана. Нам не приходится проводить подробного рассмотрения всего этого здесь, поскольку в § 6.4 было показано, что все, что нам нужно, чтобы вычислить  $S$ -матрицу, — это вакуумные средние (9.2.17).

### § 9.3. Лагранжева версия формулы интегрирования по путям

Интеграл в экспоненте из выражения (9.1.38) или (9.2.17) выглядит как лагранжиан  $L$ , соответствующий гамильтониану  $H$ . Это кажущееся сходство, поскольку здесь “импульсы”  $p_a(t)$  или  $p_n(\mathbf{x}, t)$  — независимые переменные, пока еще не связанные с  $q_a(t)$  или с  $q_n(\mathbf{x}, t)$ , или с их производными. Однако существует большой и важный класс теорий, в которых интеграл по “импульсам” может быть вычислен при замене их значениями, диктуемыми каноническим формализмом. В этих теориях интеграл в экспоненте из интеграла по путям действительно является лагранжианом.

Такими теориями являются теории с гамильтонианом, квадратичным по “импульсам” — на языке теории поля:

$$H[\mathcal{Q}, P] = \frac{1}{2} \sum_{nm} \int d^3x d^3y A_{\mathbf{x}n, \mathbf{y}m}[\mathcal{Q}] P_n(\mathbf{x}) P_m(\mathbf{y}) + \\ + \sum_n \int d^3x B_{\mathbf{x}n}[\mathcal{Q}] P_n(\mathbf{x}) + C[\mathcal{Q}], \quad (9.3.1)$$

где  $A$  — действительная, симметричная, положительная и несингулярная матрица. Аргумент экспоненты в формуле (9.2.17) тогда квадратичен по  $p$ :

$$\int d\tau \left\{ \int d^3x \sum_n p_n(\mathbf{x}, \tau) \dot{q}_n(\mathbf{x}, \tau) - H[q(\tau), p(\tau)] \right\} = \\ = -\frac{1}{2} \sum_{nm} \int d^3x d^3y d\tau d\tau' \mathcal{A}_{\tau \mathbf{x}n, \tau' \mathbf{y}m}[q] p_n(\mathbf{x}, \tau) p_m(\mathbf{y}, \tau') - \\ - \sum_n \int d^3x \int d\tau \mathcal{B}_{\tau \mathbf{x}n}[q] p_n(\mathbf{x}, \tau) - \mathcal{C}[q], \quad (9.3.2)$$

где

$$\mathcal{A}_{\tau \mathbf{x}n, \tau' \mathbf{y}m}[q] \equiv A_{\mathbf{x}n, \mathbf{y}m}[q(\tau)] \delta(\tau - \tau'), \quad (9.3.3)$$

$$\mathcal{B}_{\tau \mathbf{x}n}[q] \equiv B_{\mathbf{x}n}[q(\tau)] - \dot{q}_n(\mathbf{x}, \tau), \quad (9.3.4)$$

$$\mathcal{C}[q] \equiv \int d\tau C[q(\tau)]. \quad (9.3.5)$$

Теперь в общем случае интеграл от экспоненты от квадратичного выражения, такого как (9.3.2), будет пропорционален экспоненте, вычисленной в стационарной точке ее аргумента. Для конечного числа действительных переменных  $\xi_s$  эта формула записывается так:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \left( \prod_s d\xi_s \right) \exp \left\{ -\frac{1}{2} i \sum_{sr} \mathcal{A}_{sr} \xi_s \xi_r - i \sum_s \mathcal{B}_s \xi_s - i \mathcal{C} \right\} = \\ = (\text{Det}[i\mathcal{A}/(2\pi)])^{-1/2} \exp \left\{ -i \frac{1}{2} \sum_{sr} \mathcal{A}_{sr} \bar{\xi}_s \bar{\xi}_r - i \sum_s \mathcal{B}_s \bar{\xi}_s - i \mathcal{C} \right\}, \end{aligned} \quad (9.3.6)$$

где  $\bar{\xi}$  — стационарная точка,

$$\bar{\xi}_s = - \sum_r (\mathcal{A}^{-1})_{sr} \mathcal{B}_r. \quad (9.3.7)$$

(Вывод этой формулы представлен в приложении к этой главе.) Следовательно, для  $\mathcal{O}_A$ ,  $\mathcal{O}_B$  и т.д. из формулы (9.2.17), не зависящих от  $p$ , для таких гамильтонианов мы можем вычислить интеграл по путям по  $p$  в формуле (9.2.17), заменяя эти переменные их значениями в стационарной точке квадратичного выражения в показателе экспоненты. Но вариационная производная этого квадратичного выражения есть

$$\begin{aligned} \frac{\delta}{\delta p_n(\mathbf{x}, \tau)} \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \left\{ \int d^3x \dot{q}_n(\mathbf{x}, \tau) p_n(\mathbf{x}, \tau) - H[q(\tau), p(\tau)] + i\epsilon\text{-члены} \right\} = \\ = \dot{q}_n(\mathbf{x}, \tau) - \frac{\delta}{\delta p_n(\mathbf{x}, \tau)} H[q(\tau), p(\tau)]. \end{aligned}$$

(Здесь  $i\epsilon$ -члены зависят только от  $q$ .) Таким образом, стационарным значением  $\bar{p}_n(\mathbf{x}, t)$ , при котором это выражение обращается в нуль, является именно то значение, которое определяется канонической формулой

$$\dot{q}_n(\mathbf{x}, \tau) = \left[ \frac{\delta H[q(\tau), p(\tau)]}{\delta p_n(\mathbf{x}, \tau)} \right]_{p=\bar{p}}. \quad (9.3.8)$$

При  $p_n(\mathbf{x}, t)$ , равном этому значению, аргумент экспоненты в формуле (9.2.17) превращается в обычный лагранжиан:

$$L[q(\tau), \dot{q}(\tau)] \equiv \int d^3x \left( \dot{q}_n(\mathbf{x}, \tau) \bar{p}_n(\mathbf{x}, \tau) - H[q(\tau), \bar{p}(\tau)] \right) \quad (9.3.9)$$

и мы можем переписать формулу (9.2.17) следующим образом:

$$\langle \text{VAC, out} | T\{\mathcal{O}_A[\Pi(t_A), \Phi(t_A)], \mathcal{O}_B[\Pi(t_B), \Phi(t_B)], \dots\} | \text{VAC, in} \rangle =$$

$$= |\mathcal{N}|^2 \int \prod_{\tau, \mathbf{x}, n} dq_n(\mathbf{x}, \tau) (\text{Det}[2\pi i \mathcal{A}[q]])^{-1/2} \mathcal{O}_A[q(t_A)] \mathcal{O}_B[q(t_B)] \dots$$

$$\dots \exp \left[ i \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \{ L[q(\tau), \dot{q}(\tau)] + i\epsilon\text{-члены} \} \right]. \quad (9.3.10)$$

(Мы включили множители  $1/(2\pi)$  в интегралах по  $p_n$  в детерминант из выражения (9.3.6).) Это и есть желаемая лагранжева формула интегрирования по путям.

При выводе формулы (9.3.10) мы требовали независимости операторов  $\mathcal{O}_A$ ,  $\mathcal{O}_B$  и т.д. от канонических “импульсов”. Это требование не такое строгое, как это может казаться. Например, в скалярной теории поля, в которой каноническим сопряженным  $\Phi$  является  $\Pi = \dot{\Phi}$ , можно вычислить матричный элемент упорядоченного по времени произведения операторов, одним из которых является  $\dot{\Phi}(t)$ . Для этого можно взять разность матричных элементов, в которых этот оператор заменяется на  $\Phi(t + d\tau)$  и  $\Phi(t)$ , а затем разделить на  $d\tau$  и перейти к пределу  $d\tau \rightarrow 0$ . Точно также, если  $t$  не равен ни одному из других временных аргументов оператора в выражении (9.3.10), мы можем просто дифференцировать выражение (9.3.10) по  $t$ .

Единственная остающаяся сложность в формуле (9.3.10) — это детерминант  $\mathcal{A}[q]$ . Если  $\mathcal{A}[q]$  не зависит от поля, тогда проблемы нет: мы уже упоминали, что общие постоянные множители не дают вклада в связные части вакуумных средних, в которых мы всегда делим на амплитуду взаимодействия вакуум–вакуум, пропорциональную тому же постоянному фактору. Именно такая ситуация имеет место в теории с набором скалярных полей  $\Phi_n$ , взаимодействующих между собой и с внешними токами  $J_n$ . Лагранжева плотность в этом случае равна

$$\mathcal{L} = - \sum_n \left[ \frac{1}{2} \partial_\lambda \Phi_n \partial^\lambda \Phi_n + J_n^\lambda \partial_\lambda \Phi_n \right] - V(\Phi).$$

Очевидное обобщение результатов § 7.5 от случая одного скалярного поля на случай нескольких взаимодействующих через производные скаляров показывает, что такой лагранжиан приводит к следующему гамильтониану:

$$H = \int d^3x \sum_n \left[ \frac{1}{2} \Pi_n^2 + \frac{1}{2} (\nabla \Phi_n)^2 + \mathbf{J}_n \cdot \nabla \Phi_n + J_n^0 \Pi_n + \frac{1}{2} (J_n^0)^2 \right] + \int d^3x V(\Phi).$$

( $\Phi_n$  считаются действительными скалярами, но случай комплексных скаляров может быть рассмотрен посредством разделения на действительную и мнимую части скаляра.) В общем случае имеется нетривиальный член, линейный по  $\Pi_n$ , но коэффициент перед квадратичным членом постоянный, это просто единичная “матрица”:

$$\mathcal{A}_{nn'n'} = \delta^4(x - x') \delta_{nn'}.$$

Множитель  $(\text{Det}[4i\pi\mathcal{A}[q]])^{-1/2}$  в формуле (9.3.10), теперь не зависящая от поля постоянная, и поэтому не вносит никаких эффектов.

Однако не всегда все так просто. В качестве второго примера рассмотрим так называемую нелинейную  $\sigma$ -модель с лагранжевой плотностью

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2} \sum_{mn} \partial_\lambda \Phi_n \partial^\lambda \Phi_m [\delta_{mn} + U_{mn}(\Phi)] - V(\Phi).$$

Прямыми вычислением для гамильтониана получаем

$$H = \int d^3x \left[ \frac{1}{2} \Pi_n (1 + U(\Phi))_{nm}^{-1} \Pi_m + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \nabla \Phi_n \cdot \nabla \Phi_m (1 + U(\Phi))_{nm} + V(\Phi) \right].$$

Здесь  $\mathcal{A}$  — зависящая от поля величина

$$\mathcal{A}_{nx,my} = [1 + U(\Phi(x))]_{nm}^{-1} \delta^4(x - y).$$

В случаях такого типа детерминант может быть представлен как вклад в эффективный лагранжиан с использованием соотношения  $\text{Det } \mathcal{A} = \exp \text{Tr} \ln \mathcal{A}$ . Заменяя континуум положений в пространстве дискретной решеткой точек, окруженных разделенными областями очень маленького объема  $\Omega$ , мы можем интерпретировать делта-функцию в выражении для  $\mathcal{A}_{nx,my}$  как  $\delta^4(x - y) = \Omega^{-1} \delta_{x,y}$ . Таким образом,

$$(\ln \mathcal{A})_{nx,my} = \delta_{x,y} [\ln(1 + U(\Phi(x))) - 1 \cdot \ln \Omega]_{nm},$$

где логарифм от матрицы определяется через его разложение в степенной ряд:

$$\ln(1 + U) = U - \frac{U^2}{2} + \frac{U^3}{3} - \dots$$

Для вычисления следа заметим, что  $\sum_x \dots = \Omega^{-1} \int d^4x \dots$ . Детерминантный множитель таким образом есть

$$\text{Det } \mathcal{A} \propto \exp \left[ -\Omega^{-1} \int d^4x \text{tr} \ln[1 + U(\Phi(x))] \right],$$

где “tr” должно пониматься как след в обычном матричном смысле. Коэффициент пропорциональности (который возникает из члена с  $-\ln \Omega$ ) не зависит от полей и, таким образом, выходит за пределы обсуждаемых вопросов. Мы можем рассматривать этот детерминант как поправку к эффективной лагранжевой плотности

$$\Delta \mathcal{L} = -\frac{1}{2} i \Omega^{-1} \text{tr} \ln[1 + U(\Phi(x))].$$

Множитель  $\Omega^{-1}$  может быть выражен через интеграл с ультрафиолетовой расходимостью:

$$\Omega^{-1} = \delta^4(x - x) = (2\pi)^{-4} \int d^4p \cdot 1.$$

Мы не будем демонстрировать здесь тот факт, что дополнительные члены в фейнмановских диаграммах для данной теории, получаемые из  $\Delta\mathcal{L}$ , могли бы быть также выведены в каноническом формализме, если принять во внимание одновременные коммутаторные члены в пропагаторе производных по времени скалярного поля [7]. Без учета этой поправки мы получим, что  $S$ -матрица зависит от того, как определено скалярное поле, и не согласуется с симметриями лагранжиана относительно преобразований скалярных полей.

Даже там, где множитель  $(\text{Det}\mathcal{A})^{-1/2}$  в формуле для интеграла по путям (9.3.10) не зависит от полей, лагранжиан в этой формуле не всегда такой же, как тот, с которого мы начали. В качестве примера рассмотрим теорию нескольких действительных векторных полей с лагранжевой плотностью

$$\mathcal{L} = - \sum_n \left[ \frac{1}{4} (\partial_\mu A_{n\lambda} - \partial_\lambda A_{n\mu})(\partial^\mu A_n{}^\lambda - \partial^\lambda A_n{}^\mu) + \frac{1}{2} m_n^2 A_{n\lambda} A_n{}^\lambda + J_n{}^\lambda A_{n\lambda} \right],$$

где  $J_n{}^\mu$  — либо внешние  $c$ -числовые (т.е. классические) величины, либо величины, зависящие от других полей (в этом случае в лагранжиан надо добавить члены, описывающие эти поля). В результате несложного обобщения результатов § 7.5, мы видим, что гамильтониан равен

$$H = \int d^3x \sum_n \left[ \frac{1}{2} \mathbf{\Pi}_n^2 + \frac{1}{2} (\nabla \times \mathbf{A}_n)^2 + \frac{1}{2} m_n^2 \mathbf{A}_n^2 + \frac{1}{2m_n^2} (\nabla \cdot \mathbf{\Pi}_n)^2 + \mathbf{J}_n \cdot \mathbf{A}_n - \frac{1}{m_n^2} J_n^0 \nabla \cdot \mathbf{\Pi}_n + \frac{1}{m_n^2} (J_n^0)^2 \right],$$

снова с поправкой на то, что необходимо добавить члены с полями, входящими в  $J_n{}^\mu$ . Здесь коэффициент при квадратичном члене несколько более сложный, чем в нашем первом примере:

$$\mathcal{A}_{nix,mjy} = \delta_{nm} \left[ \delta_{ij} \delta^4(x - y) - \frac{1}{2m_n^2} \nabla_i \nabla_j \delta^4(x - y) \right],$$

но он не зависит от полей и, таким образом, никак не влияет на ответ. С другой стороны, лагранжиан (9.3.9) не совпадает здесь с тем, с которого мы начали; он полностью выражается через поле  $\mathbf{A}$  и его пространственно-временные производные, а зависимость от временной компоненты  $A^0$  отсутствует. Поэтому лоренц-инвариантность выражения (9.3.10) далека от того, чтобы быть очевидной.

Для исправления этого недостатка, мы можем заново ввести вспомогательное поле. Предположим, мы добавили к гамильтониану слагаемое

$$\Delta H = -\frac{1}{2} \sum_n m_n^2 \int d^3x [A_n^0 - m_n^{-2} \nabla \cdot \mathbf{\Pi}_n + m_n^{-2} J_n^0]^2$$

и интегрируем по  $A_n^0$ , а также по  $\mathbf{A}_n$  и  $\mathbf{\Pi}_n$ . Это может привести лишь к дополнительному общему множителю, поскольку  $\Delta H$  квадратичен по  $A^0$  (с коэффициентом, не зависящим от полей, перед слагаемым второго порядка по  $A^0$ ) и его стационарное значение обращается в нуль. Однако, предположим, что теперь мы интегрируем по  $\mathbf{\Pi}_n$  до того, как мы проинтегрируем по  $\mathbf{A}_n$ . Гамильтониан в интеграле по путям (9.2.17) здесь заменяется на

$$H + \Delta H = \int d^3x \sum_n \left[ \frac{1}{2} \mathbf{\Pi}_n^2 + \frac{1}{2} (\nabla \times \mathbf{A}_n)^2 + \frac{1}{2} m_n^2 \mathbf{A}_n^2 - \right. \\ \left. - \frac{1}{2} m_n^2 (A_n^0)^2 + \mathbf{J}_n \cdot \mathbf{A}_n - J_n^0 A_n^0 + A_n^0 \nabla \cdot \mathbf{\Pi}_n \right].$$

Он по-прежнему квадратичен по  $\mathbf{\Pi}_n$  с не зависящим от полей коэффициентом перед квадратичным слагаемым. Поэтому интеграл по  $\mathbf{\Pi}_n$  может быть вычислен путем замены  $\mathbf{\Pi}_n$  его значением в стационарной точке функционала  $\sum_n \int d^3x \mathbf{\Pi} \cdot \dot{\mathbf{A}}_n - H - \Delta H$ :

$$\mathbf{\Pi}_n = \dot{\mathbf{A}}_n + \nabla A_n^0.$$

При таком уничтожении  $\mathbf{\Pi}_n$  получаем, что  $\sum_n \int d^3x \mathbf{\Pi} \cdot \dot{\mathbf{A}}_n - H - \Delta H$  — лоренц-инвариантный лагранжиан, с которого мы начинали.

Для того чтобы учитывать возможную необходимость включения вспомогательных полей, таких как  $A_n^0$ , с этого момента после исключения канонически сопряженных величин мы будем записывать формулу для интеграла по путям в терминах полей  $\psi_l$ , которые включают и канонические поля  $q_n$ , и вспомогательные поля  $c_r$ :

$$\langle \text{VAC, out} | T\{\mathcal{O}_A[\Psi(t_A)], \mathcal{O}_B[\Psi(t_B)], \dots\} | \text{VAC, in} \rangle \propto \\ \propto \int \prod_{\tau, \mathbf{x}, n} d\psi_n(\mathbf{x}, \tau) \mathcal{O}_A[\psi(t_A)] \mathcal{O}_B[\psi(t_B)] \dots \\ \dots \exp \left[ i \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \{L[\psi(\tau), \dot{\psi}(\tau)] + i\epsilon\text{-члены}\} \right], \quad (9.3.11)$$

где подразумевается, что  $L$  включает все члены, возникающие из возможного зависящего от полей множителя  $(\text{Det } \mathcal{A})^{-1/2}$ .

#### § 9.4. Вывод правил Фейнмана с помощью метода интегрирования по путям

Теперь мы знаем все необходимое для вывода правил Фейнмана для широкого класса теорий. Мы сконцентрируем наше внимание на вакуумных средних упорядоченных по времени произведений поле-

вых операторов (и им сопряженных):

$$M_{l_A l_B \dots} (x_A x_B \dots) = \frac{\langle \text{VAC, out} | T\{\Psi_{l_A}(x_A)\Psi_{l_B}(x_B)\dots\} | \text{VAC, in} \rangle}{\langle \text{VAC, out} | \text{VAC, in} \rangle}. \quad (9.4.1)$$

Отсюда могут быть получены элементы  $S$ -матрицы (как показано в §6.4) посредством замены конечных пропагаторов, соответствующих каждому полу, функциями, которые являются коэффициентами при операторах рождения–уничтожения в соответствующих свободных полях, и путем суммирования по индексам этих функций.

Для простых теорий, гамильтонианы которых квадратичны по  $\Pi$ , выражение (9.3.11) дает

$$M_{l_A l_B \dots} (x_A x_B \dots) = \frac{\int \left[ \prod_{x,l} d\psi_l(x) \right] \psi_{l_A}(x_A) \psi_{l_B}(x_B) \dots e^{iI[\psi]}}{\int \prod_{x,l} d\psi_l(x) e^{iI[\psi]}}, \quad (9.4.2)$$

где  $I[\psi]$  — действие

$$I[\psi] = \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \{ L[\psi(\tau), \dot{\psi}(\tau)] + i\epsilon\text{-члены} \}, \quad (9.4.3)$$

где  $L$  включает теперь всевозможные слагаемые, возникающие из зависящего от полей детерминанта в формуле (9.3.10).

Допустим теперь, что лагранжианом является интеграл от лагранжевой плотности, содержащей квадратичное слагаемое  $\mathcal{L}_0$ , которое имелось бы при отсутствии взаимодействия, плюс лагранжева плотность, соответствующая взаимодействию  $\mathcal{L}_1$ :

$$L[\psi(\tau), \dot{\psi}(\tau)] = \int d^3x [\mathcal{L}_0(\psi(\vec{x}, \tau), \partial_\mu \psi(\vec{x}, \tau)) + \mathcal{L}_1(\psi(\vec{x}, \tau), \partial_\mu \psi(\vec{x}, \tau))]. \quad (9.4.4)$$

Таким образом, действие (9.4.3) есть

$$I[\psi] = I_0[\psi] + I_1[\psi], \quad (9.4.5)$$

$$I_0[\psi] = \int d^4x \mathcal{L}_0(\psi(x), \partial_\mu \psi(x)) + i\epsilon\text{-члены}, \quad (9.4.6)$$

$$I_1[\psi] = \int d^4x \mathcal{L}_1(\psi(x), \partial_\mu \psi(x)). \quad (9.4.7)$$

Поскольку  $\mathcal{L}_0$  и “ $i\epsilon$ -члены” квадратичны по полям, мы можем всегда записать  $I_0$  в обобщенной квадратичной форме:

$$I_0[\psi] = -\frac{1}{2} \int d^4x d^4x' \sum_{l,l'} \mathcal{D}_{lx,l'x'} \psi_l(x) \psi_{l'}(x'). \quad (9.4.8)$$

Например, для действительного скалярного поля массы  $m$  невозму-

щенный лагранжиан равен

$$\mathcal{L}_0 = -\frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{1}{2} m^2 \phi^2, \quad (9.4.9)$$

а члены в  $I_0$ , содержащие  $i\epsilon$ , задаются выражением (9.2.16)

$$\frac{1}{2} i\epsilon \int dt \int d^3x d^3x' \mathcal{E}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \phi(\mathbf{x}, t) \phi(\mathbf{x}', t). \quad (9.4.10)$$

Итак, здесь

$$\mathcal{D}_{x,x'} = \frac{\partial}{\partial x^\mu} \frac{\partial}{\partial x'_\mu} \delta^4(x - x') + m^2 \delta^4(x - x') - i\epsilon \mathcal{E}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \delta(t - t'). \quad (9.4.11)$$

(Мы опускаем множитель  $e^{-\epsilon|\tau|}$  в “ $i\epsilon$ -членах”, поскольку он определяет поправку высшего порядка по  $\epsilon$ .) Для того чтобы работать со взаимодействием, мы разложим экспоненту по степеням  $I_1$ ,

$$\exp(iI[\psi]) = \exp(iI_0[\psi]) \sum_{N=0}^{\infty} \frac{i^N}{N!} (iI_1[\psi])^N, \quad (9.4.12)$$

а затем разложим  $I_1$  по степеням полей. Общие интегралы, которые мы встретим в числителе и знаменателе выражения (9.4.2) имеют вид

$$\mathcal{J}_{l_1 l_2 \dots}(x_1 x_2 \dots) \equiv \int \left( \prod_{l,x} d\psi_l(x) \right) e^{iI_0[\psi]} \psi_{l_1}(x_1) \psi_{l_2}(x_2) \dots, \quad (9.4.13)$$

где полевые множители  $\psi_{l_1}(x_1), \psi_{l_2}(x_2)$  и т.д. возникают из  $I_1[\psi]$  и/или из полевых множителей  $\psi_{l_A}(x_A)$  и т.д., изначально представленных в числителе выражения (9.4.2). При  $I_0[\psi]$  в форме (9.4.8) интеграл (9.4.13) имеет ту же форму, что и интеграл, вычисленный в приложении к этой главе, причем дискретный индекс  $s$  заменяется парой значков  $l, x$ . Таким образом, мы можем использовать формулы (9.A.12) и (9.A.15), что дает в данном случае

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_{l_1 l_2 \dots}(x_1 x_2 \dots) &= \\ &= \left[ \text{Det} \left( \frac{i\mathcal{D}}{2\pi} \right) \right]^{-1/2} \sum_{\substack{\text{всевозможные} \\ \text{спаривания} \\ \text{полей}}} \prod_{\text{пары}} [-i\mathcal{D}^{-1}]_{\text{спаренные поля}}. \end{aligned} \quad (9.4.14)$$

Это как раз равносильно правилам Фейнмана для вычисления числителя выражения (9.4.2) в координатном представлении в их ковариантной форме: мы разлагаем в ряд по взаимодействию  $I_1$ , а потом суммируем по всевозможным способам спаривания полей в  $I_1$  друг с другом и с полями  $\psi_{l_A}(x_A)$  и т.д., где вклад каждого спаривания задается пространственно-временным интегралом от произведения коэффициентов, стоящих перед полями в  $I_1[\psi]$  и произведения “пропагаторов”  $-i\Delta$ , где

$$\Delta_{l_1 l_2}(x_1, x_2) = (\mathcal{D}^{-1})_{l_1 x_1, l_2 x_2}. \quad (9.4.15)$$

(Множитель  $[\text{Det}(i\mathcal{D}/(2\pi))]^{-1/2}$  в выражении (9.4.14) представляет собой вклад графов с неограниченным числом однопетлевых диаграмм, не прикрепленных к другим линиям. Но в любом случае этот множитель сокращается в отношении (9.4.2).)

Остается вычислить пропагаторы (9.4.15). Представим равенство (9.4.15) как интегральное уравнение

$$\sum_{l_2} \int d^4 x_2 \mathcal{D}_{l_1 x_1, l_2 x_2} \Delta_{l_2 l_3}(x_2, x_3) = \delta^4(x_1 - x_3) \delta_{l_1 l_3}. \quad (9.4.16)$$

В отсутствие внешних полей, трансляционная инвариантность приведет к требованию того, чтобы  $\mathcal{D}$  было функцией только от разности  $x_1 - x_2$ . При этом эту функцию можно представить в виде интеграла Фурье:

$$\mathcal{D}_{l_1 x_1, l_2 x_2} \equiv (2\pi)^{-4} \int d^4 p e^{ip \cdot (x_1 - x_2)} \mathcal{D}_{l_1 l_2}(p). \quad (9.4.17)$$

Тогда решение уравнения (9.4.16) есть

$$\Delta_{l_1 l_2}(x_1, x_2) = (2\pi)^{-4} \int d^4 p e^{ip \cdot (x_1 - x_2)} \mathcal{D}_{l_1 l_2}^{-1}(p), \quad (9.4.18)$$

где  $\mathcal{D}^{-1}$  — обычна обратная матрица к  $\mathcal{D}$ . Как мы увидим в дальнейшем, “ $i\epsilon$ -члены” обеспечивают наличие хорошо определенной обратной матрицы для всех действительных значений  $p$ . Таким образом, мы свели задачу о вычислении пропагатора к задаче о нахождении обратной матрицы к некоторой конечной матрице.

Сперва рассмотрим массивное скалярное поле, для которого ядро  $\mathcal{D}$  принимает вид (9.4.11). Можно переписать это выражение в виде интеграла Фурье:

$$\mathcal{D}_{x,y} = (2\pi)^{-4} \int d^4 p e^{ip \cdot (x-y)} (p^2 + m^2 - i\epsilon E(\mathbf{p})),$$

таким образом, пропагатор имеет вид

$$\Delta(x, y) = (2\pi)^{-4} \int d^4 p e^{ip \cdot (x-y)} (p^2 + m^2 - i\epsilon E(\mathbf{p}))^{-1}.$$

Мы узнаем в этой записи выражение для скалярного пропагатора, полученного ранее операторными методами. (Разница между  $\epsilon$  и  $iE(\mathbf{p})$  несущественна, поскольку  $i$  и  $\epsilon$ , и  $iE(\mathbf{p})$  являются положительными инфинитезимальными величинами.)

В качестве второго примера рассмотрим действительное массивное векторное поле. Не возмущенный лагранжиан есть

$$\mathcal{L}_0 = -\frac{1}{4} (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) - \frac{1}{2} m^2 A_\mu A^\mu.$$

Снова можем записать  $I_0[\psi]$  в виде (9.4.8), с ядром

$$\begin{aligned}\mathcal{D}_{\rho x, \sigma y} &= \left[ \eta_{\rho\sigma} \frac{\partial^2}{\partial x^\mu \partial y_\mu} - \frac{\partial^2}{\partial x^\sigma \partial y_\rho} + m^2 \eta_{\rho\sigma} \right] \delta^4(x-y) + i\epsilon\text{-члены} = \\ &= (2\pi)^{-4} \int d^4 p e^{ip \cdot (x-y)} [\eta_{\rho\sigma} p^2 - p_\rho p_\sigma + m^2 \eta_{\rho\sigma} + i\epsilon\text{-члены}].\end{aligned}$$

Мы не будем демонстрировать этого здесь, но “ $i\epsilon$ -члены” принимают простую форму

$$-i\epsilon E(\mathbf{p}) \eta_{\rho\sigma}.$$

Пропагатор векторного поля тогда определяется обращением матрицы  $4 \times 4$  в подынтегральном выражении, что дает

$$\Delta_{\rho\sigma}(x, y) = (2\pi)^{-4} \int \frac{d^4 p e^{ip \cdot (x-y)}}{p^2 + m^2 - i\epsilon E(\mathbf{p})} \left[ \eta_{\rho\sigma} + \frac{p_\rho p_\sigma}{m^2} \right].$$

(Слагаемые в числителе, пропорциональные  $\epsilon$ , опущены. Они важны в знаменателе, для определения того, как обращаться с интегралом вблизи массовой оболочки  $p^2 = -m^2$ .) Это тот же пропагатор, который получается при использовании операторных методов, с одним исключением. Нековариантные члены, пропорциональные  $\delta(x^0 - y^0)$ , теперь отсутствуют. Эти нековариантные члены раньше были нужны для того, чтобы сократить нековариантные члены в гамильтониане взаимодействия, но вершинные вклады в правила Фейнмана теперь выводятся напрямую из ковариантного лагранжиана, и никаких сокращений производить не нужно.

Теории с взаимодействием производных так же просто рассматриваются. Множитель, возникающий из спаривания производных поля  $\partial_\mu \psi_l(x)$  с любым другим полем  $\psi_m(y)$  (может быть, являющимся в свою очередь производной от поля), есть

$$\begin{aligned}\langle \partial_\mu \psi_l(x) \psi_m(y) \rangle &= \frac{\int \left[ \prod_{x,l} d\psi_l(x) \right] \partial_\mu \psi_l(x) \psi_m(y) e^{iI[\psi]}}{\int \left[ \prod_{x,l} d\psi_l(x) \right] e^{iI[\psi]}} = \\ &= \frac{\partial}{\partial x^\mu} \langle \psi_l(x) \psi_m(y) \rangle.\end{aligned}\quad (9.4.19)$$

Такие пропагаторы не содержат нековариантных частей. Например, для действительного скалярного поля спаривание  $\partial_\mu \phi$  с  $\partial_\nu \phi$  дает пропагатор в импульсном представлении

$$\frac{k_\mu k_\nu}{k^2 + m^2 - i\epsilon}.$$

Также, как мы убедились в предыдущем параграфе, вершины в теории скалярного поля со взаимодействием производных с другими полями могут быть взяты прямо из лагранжиана и являются ковариантными (каждая в отдельности).

## § 9.5. Интегралы по путям в случае фермионов

Перейдем теперь к обобщению формализма интегрирования по путям на теории, содержащие фермионы наряду с бозонами. Мы могли бы просто продолжать наше рассмотрение в рамках чисто формального подхода по аналогии с бозонным случаем, проверяя, что он дает “правильные” правила Фейнмана. Вместо этого мы выведем формализм интегрирования по путям для фермионов напрямую из принципов квантовой механики, как это было проделано для бозонов [9].

Как и прежде, мы начинаем с общей квантово-механической системы с “координатами”  $\mathcal{Q}_a$  и каноническими сопряженными “импульсами”  $P_a$ . Только теперь они удовлетворяют антисимметрическим, а не коммутационным соотношениям:

$$\{\mathcal{Q}_a, P_b\} = i\delta_{ab}, \quad (9.5.1)$$

$$\{\mathcal{Q}_a, \mathcal{Q}_b\} = \{P_a, P_b\} = 0. \quad (9.5.2)$$

(Это операторы в представлении Шредингера или, другими словами, операторы в представлении Гейзенберга в момент времени  $t = 0$ .) Позднее мы заменим дискретный индекс  $a$  положением в пространстве  $\mathbf{x}$  и полевым индексом  $m$ .

Для начала мы хотим построить полный базис состояний, на которые действуют  $\mathcal{Q}$  и  $P$ . Заметим, что для любого заданного  $a$  имеем

$$\mathcal{Q}_a^2 = P_a^2 = 0. \quad (9.5.3)$$

Из этого следует, что всегда найдется “кет” состояние  $|0\rangle$ , которое аннигилируется всеми  $\mathcal{Q}_a$ :

$$\mathcal{Q}_a |0\rangle = 0, \quad (9.5.4)$$

и “бра” состояние  $\langle 0|$ , которое аннигилируется (справа) всеми  $P_a$ :

$$\langle 0| P_a = 0. \quad (9.5.5)$$

Например, мы можем взять

$$|0\rangle \propto \left( \prod_a \mathcal{Q}_a \right) |f\rangle, \quad \langle 0| \propto \langle g| \left( \prod_a P_a \right),$$

где  $|f\rangle$  и  $\langle g|$  — любые кет- и бра- векторы, для которых эти выражения не обращаются в нуль. (Они не могут обращаться в нуль для всех  $|f\rangle$  и  $\langle g|$ , если сами операторы  $\prod_a \mathcal{Q}_a$  и  $\prod_a P_a$  обращаются в нуль, что

мы предполагаем.) Эти равенства удовлетворяют равенствам (3.5.4) и (3.5.5) в силу (3.5.3). Они не являются достаточно общими, поскольку могут существовать другие бозонные степени свободы, которые различали бы неодинаковые  $|0\rangle$  и  $\langle 0|$ , но для простоты мы здесь ограничимся лишь случаем, где все степени свободы описываются фермионными операторами  $\mathcal{Q}_a$  и  $P_a$ . Кроме того, мы предполагаем, что

состояния, удовлетворяющие равенствам (9.5.4) и (9.5.5), единственны с точностью до постоянных множителей, которые мы выбираем так, что

$$\langle 0|0\rangle = 1. \quad (9.5.6)$$

(Заметим, что это условие нормировки не могло бы быть наложено, если бы мы определили  $\langle 0|$  как “левое” собственное состояние  $\mathcal{Q}_a$  с собственным значением нуль, поскольку в этом случае  $\langle 0|\{\mathcal{Q}_a, P_b\}|0\rangle$  обращалось бы в нуль, что вместе с равенствами (9.5.1) привело бы к тому, что  $\langle 0|0\rangle = 0$ .)

Как мы видели в § 7.5, в теории Дирака оператор  $\mathcal{Q}_a$  неэрмитов. Вместо этого у него есть сопряженный оператор  $-iP_a$ . В этом случае  $\langle 0|$  может рассматриваться как сопряженный к  $|0\rangle$ . Однако существуют фермионные операторы (такие, как поля “духов”, которые будут введены в рассмотрение в т. II), для которых оператор  $P_a$  никак не связан с сопряженным к  $\mathcal{Q}_a$ . В последующем изложении нам не потребуется делать никаких предположений касательно сопряженных операторов к операторам  $\mathcal{Q}_a$  или  $P_a$ , или о какой-либо связи между состояниями  $|0\rangle$  и  $\langle 0|$ .

Полный базис состояний этой системы состоит из вектора  $|0\rangle$  и состояний (антисимметричных по индексам  $a, b, \dots$ )

$$|a, b, \dots\rangle \equiv P_a P_b \dots |0\rangle \quad (9.5.7)$$

с любым числом различных операторов  $P$ , действующих на  $|0\rangle$ . Таким образом, результат действия на эти состояния любой функцией от операторов  $P$  и  $\mathcal{Q}$  может быть записан в виде линейной комбинации одного и того же набора состояний. В частности, в случае, когда индекс  $a$  не равен ни одному из индексов, встречающихся в  $|b, c, \dots\rangle$ , имеем

$$\mathcal{Q}_a |b, c, \dots\rangle = 0, \quad (9.5.8)$$

$$P_a |b, c, \dots\rangle = |a, b, c, \dots\rangle. \quad (9.5.9)$$

С другой стороны, если индекс  $a$  равен одному из индексов в последовательности  $b, c, \dots$ , мы всегда можем переписать состояние (возможно изменяя его знак) так, что  $a$  будет первым из этих индексов. В этом случае имеем

$$\mathcal{Q}_a |a, b, c, \dots\rangle = i |b, c, \dots\rangle, \quad (9.5.10)$$

$$P_a |a, b, c, \dots\rangle = 0. \quad (9.5.11)$$

Похожим образом мы можем определить полный дуальный базис, включающий состояния  $\langle 0|$  и состояния (так же антисимметричные по индексам)

$$\langle a, b, \dots | \equiv \langle 0| \dots (-i\mathcal{Q}_b)(-i\mathcal{Q}_a). \quad (9.5.12)$$

Используя равенства (9.5.4)–(9.5.6) и антикоммутационное соотношение (9.5.1), мы убеждаемся в том, что скалярные произведения этих

состояний принимают значения

$$\begin{aligned} \langle c, d, \dots | a, b, \dots \rangle &= \langle 0 | \dots (-i\mathcal{Q}_d)(-i\mathcal{Q}_c)P_a P_b \dots | 0 \rangle = \\ &= \begin{cases} 0, & \text{если } \{c, d, \dots\} \neq \{a, b, \dots\}, \\ 1, & \text{если } c = a, d = b \text{ и т.д.,} \end{cases} \quad (9.5.13) \end{aligned}$$

где  $\{\dots\}$  обозначает неупорядоченный набор индексов в скобках.

При выводе правил Фейнмана мы бы хотели иметь возможность переписать суммы по промежуточным состояниям, таким как (9.5.7), в виде интегралов по собственным состояниям  $\mathcal{Q}_a$  или  $P_a$ . Однако эти операторы не могут иметь собственные значения (отличные от нуля) в обычном смысле. Допустим, что мы хотим найти состояние  $|q\rangle$ , которое удовлетворяет (для всех  $a$ ) следующему равенству:

$$\mathcal{Q}_a|q\rangle = q_a|q\rangle. \quad (9.5.14)$$

Из равенства (9.5.2) видим, что

$$q_a q_b + q_b q_a = 0, \quad (9.5.15)$$

что невозможно для обычных чисел. Однако ничто не мешает нам ввести алгебру “переменных” (известных как *грассмановы переменные*)  $q_a$ , которые действуют как  $c$ -числа на физическом гильбертовом пространстве и удовлетворяют, кроме того, антисимметрическим соотношениям (9.5.15). Мы потребуем далее

$$\{q_a, q'_b\} = \{q_a, \mathcal{Q}_b\} = \{q_a, P_b\} = 0, \quad (9.5.16)$$

где  $q$  и  $q'$  обозначают любые два “значения” этих переменных. Теперь мы можем построить собственные состояния  $|q\rangle$ , удовлетворяющие равенству (9.5.14):

$$|q\rangle = \exp\left(-i \sum_a P_a q_a\right) |0\rangle, \quad (9.5.17)$$

где экспонента от оператора определяется как обычно через разложение в ряд. (Для того чтобы проверить равенство (9.5.14), воспользуемся тем фактом, что все  $P_a q_a$  коммутируют друг с другом и их квадрат равен нулю. Так что

$$\begin{aligned} [\mathcal{Q}_a - q_a] |q\rangle &= [\mathcal{Q}_a - q_a] \exp\left(-i \sum_{b \neq a} P_b q_b\right) |0\rangle = \\ &= [\mathcal{Q}_a - q_a] [1 - i \sum_{b \neq a} P_b q_b] \exp\left(-i \sum_{b \neq a} P_b q_b\right) |0\rangle = \\ &= [-i \{\mathcal{Q}_a, P_a\} q_a - q_a] \exp\left(-i \sum_{b \neq a} P_b q_b\right) |0\rangle = 0, \end{aligned}$$

что и требуется равенством (9.5.14).) Мы можем также определить левые собственные состояния  $\langle q|$  (не сопряженные к  $|q\rangle$ ) как

$$\langle q| \equiv \langle 0| \left( \prod_a \mathcal{Q}_a \right) \exp \left( -i \sum_a P_a q_a \right) = \langle 0| \left( \prod_a \mathcal{Q}_a \right) \exp \left( +i \sum_a P_a q_a \right), \quad (9.5.18)$$

где  $\prod_a$  — произведение в том же порядке, который мы принимаем за стандартный. Используя тот же аргумент, что и при обосновании равенства (9.5.14), видим, что

$$\langle q| \mathcal{Q}_a = \langle q| q_a. \quad (9.5.19)$$

Для этих собственных состояний определено скалярное произведение

$$\begin{aligned} \langle q'|q \rangle &= \langle 0| \left( \prod_a \mathcal{Q}_a \right) \exp \left( i \sum_b P_b (q'_b - q_b) \right) |0\rangle = \\ &= \langle 0| \left( \prod_a \mathcal{Q}_a \right) \left( \prod_b (1 + iP_b (q'_b - q_b)) \right) |0\rangle. \end{aligned}$$

Сдвигая все  $\mathcal{Q}_a$  вправо (начиная с самого правого), получаем множители  $i^2(q'_a - q_a)$ , которые мы выносим вправо за скалярное произведение. Итак,

$$\langle q'|q \rangle = \prod_a (q_a - q'_a). \quad (9.5.20)$$

Мы увидим, что равенство (9.5.20) играет роль дельта-функции в интегралах по  $q$ .

Таким же образом мы можем построить правые и левые собственные состояния для  $P_a$ :

$$P_a |p\rangle = p_a |p\rangle, \quad (9.5.21)$$

$$\langle p| P_a = \langle p| p_a, \quad (9.5.22)$$

где  $p_a$ , так же как и  $q_a$  раньше, — антисимметрические с-числа (для удобства они выбираются антисимметриющими с  $q_a$  и с другими фермионными операторами, кроме того, они антисиммутируют друг с другом), и

$$|p\rangle = \exp \left( -i \sum_a \mathcal{Q}_a p_a \right) \left( \prod_b P_b \right) |0\rangle, \quad (9.5.23)$$

$$\langle p| = \langle 0| \exp \left( -i \sum_a p_a \mathcal{Q}_a \right) \quad (9.5.24)$$

со скалярным произведением (теперь мы переносим все  $P$  налево)

$$\langle p'|p \rangle = \prod_a (p_a - p'_a). \quad (9.5.25)$$

Скалярные произведения собственных состояний этих двух типов друг с другом имеют вид

$$\begin{aligned}\langle q|p\rangle &= \langle q|\exp\left(-i\sum_a \mathcal{Q}_a p_a\right)\left(\prod_a P_a\right)|0\rangle = \\ &= \left(\prod_a \exp(-iq_a p_a)\right)\langle q|\left(\prod_a P_a\right)|0\rangle = \\ &= \left(\prod_a \exp(-iq_a p_a)\right)\langle 0|\left(\prod_a \mathcal{Q}_a\right)\left(\prod_a P_a\right)|0\rangle\end{aligned}$$

и, таким образом,

$$\langle q|p\rangle = \chi_N \exp\left(-i\sum_a q_a p_a\right) = \chi_N \exp\left(i\sum_a p_a q_a\right), \quad (9.5.26)$$

где  $\chi_N$  — фаза, зависящая только от количества  $N$  операторов  $\mathcal{Q}_a$ :

$$\chi_N \equiv \langle 0|\left(\prod_a \mathcal{Q}_a\right)\left(\prod_a P_a\right)|0\rangle = i^N (-1)^{N(N-1)/2}.$$

Несколько проще мы находим

$$\langle p|q\rangle = \prod_a \exp(-ip_a q_a). \quad (9.5.27)$$

Легко видеть, что состояния  $|q\rangle$  являются в некотором смысле полным набором (то же самое можно сказать о  $|p\rangle$ ). Из определения (9.5.17) мы видим, что состояние  $|a, b, \dots\rangle$  в общем базисе является (с точностью до фазы) просто коэффициентом перед произведением  $q_a q_b \dots$  в разложении состояния  $|q\rangle$  на сумму произведений  $q$ . Таким образом, мы можем записать любое состояние  $|f\rangle$  в виде

$$|f\rangle = f_0|q\rangle_0 + \sum_a f_a|q\rangle_a + \sum_{a \neq b} f_{ab}|q\rangle_{ab} + \dots,$$

где  $f$  — численные коэффициенты, а индексы  $a, b, \dots$  у  $|q\rangle$  нумеруют коэффициенты перед  $q_a q_b \dots$  в  $|q\rangle$ .

При суммировании по состояниям удобно ввести специальное интегрирование по фермионным переменным, известное как *интегрирование Березина* [10], которое позволяет получать коэффициенты таких произведений антисимметрических  $c$ -чисел. Для любого набора таких переменных  $\xi_n$  (будь то  $p$  или  $q$ , или и те и другие) наиболее общая функция  $f(\xi)$  ( $c$ -числовая или векторная функция состояний  $|q\rangle$ )

может быть представлена в виде

$$f(\xi) = \left( \prod_n \xi_n \right) c + \text{слагаемые с меньшим числом произведений } \xi, \quad (9.5.28)$$

а интеграл по  $\xi$  определяется так

$$\int \left( \widetilde{\prod}_n d\xi_n \right) f(\xi) \equiv c, \quad (9.5.29)$$

где тильда в равенстве (9.5.29) указывает на то, что мы используем для удобства соглашение, при котором дифференциалы записываются в порядке, обратном тому, в котором записывалось произведение переменных интегрирования в равенстве (9.5.28). Поскольку это произведение антисимметрично относительно перестановки любых двух переменных  $\xi$ , интеграл также антисимметричен относительно перестановок любых двух дифференциалов  $d\xi$ . Таким образом, эти дифференциалы в результате антикоммутируют:

$$d\xi_n d\xi_m + d\xi_m d\xi_n = 0. \quad (9.5.30)$$

Коэффициент  $c$  может также зависеть от других непроинтегрированных  $c$ -числовых переменных, которые антикоммутируют с переменными  $\xi$ , по которым мы интегрируем. В этом случае необходимо стандартизировать определение коэффициента  $c$ , сдвинув все переменные  $\xi$  влево от  $c$ , прежде чем интегрировать по ним, как мы сделали в формуле (9.5.28).

Например, наиболее общий вид функции пары антикоммутирующих  $c$ -чисел  $\xi_1$  и  $\xi_2$  такой:

$$f(\xi_1, \xi_2) = \xi_1 \xi_2 c_{12} + \xi_1 c_1 + \xi_2 c_2 + d,$$

поскольку квадраты и более высокие степени от  $\xi_1$  и  $\xi_2$  обращаются в нуль. Интегралы от этой функции имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} \int d\xi_1 f(\xi_1, \xi_2) &= \xi_2 c_{12} + c_1, & \int d\xi_2 f(\xi_1, \xi_2) &= -\xi_1 c_{12} + c_2, \\ \int d\xi_2 d\xi_1 f(\xi_1, \xi_2) &= c_{12}. \end{aligned}$$

Заметим, что многократный интеграл равен повторному интегралу:

$$\int d\xi_2 d\xi_1 f(\xi_1, \xi_2) = \int d\xi_2 \left[ \int d\xi_1 f(\xi_1, \xi_2) \right].$$

Этот результат можно легко обобщить на случай любого числа фермионных переменных. (Именно для того чтобы получить этот результат без дополнительных знаковых множителей, мы брали произведение дифференциалов в равенстве (9.5.29) в порядке, обратном по отношению к произведению переменных в (9.5.28).) Действительно,

мы могли бы сначала определить интеграл по одной антисимметрирующей  $c$ -числовой переменной  $\xi_1$ , а затем определили бы многократные интегралы обычным итерационным способом. Наиболее общая функция антисимметрирующих  $c$ -числовых переменных линейна по каждой из них:

$$f(\xi_1, \xi_2, \dots) = b(\xi_2 \dots) + \xi_1 c(\xi_2 \dots)$$

(поскольку  $\xi_1^2 = 0$ ), а интеграл от нее по  $\xi_1$  определяется как

$$\int d\xi_1 f(\xi_1, \xi_2, \dots) = c(\xi_2, \dots).$$

Повторение этой процедуры приводит к тому же многократному интегралу, что и тот, который определяется формулами (9.5.28) и (9.5.29).

Это определение обладает и некоторыми другими свойствами многократных интегралов (в пределах от  $-\infty$  до  $+\infty$ ) по обычным действительным переменным. Однако имеются значительные отличия.

Очевидно, что интегрирование Березина линейно в следующем смысле:

$$\int \left( \prod_n d\xi_n \right) [f(\xi) + g(\xi)] = \int \left( \prod_n d\xi_n \right) f(\xi) + \int \left( \prod_n d\xi_n \right) g(\xi), \quad (9.5.31)$$

а также

$$\int \left( \prod_n d\xi_n \right) [f(\xi) a(\xi')] = \left[ \int \left( \prod_n d\xi_n \right) f(\xi) \right] a(\xi'), \quad (9.5.32)$$

где  $a(\xi')$  любая функция (включая константу) любых антисимметрирующих  $c$ -числовых переменных  $\xi'_m$ , по которым мы не интегрируем. Однако линейность по отношению к умножению слева не очевидна. Если мы интегрируем по  $\nu$  переменным, то, поскольку мы предполагаем, что  $\xi'_m$  антисимметрируют со всеми  $\xi_n$ , мы имеем

$$a((-)^{\nu} \xi') \left( \prod_n \xi_n \right) = \left( \prod_n \xi_n \right) a(\xi'),$$

и, таким образом,

$$\int \left( \prod_n d\xi_n \right) [a((-)^{\nu} \xi') f(\xi)] = a(\xi') \int \left( \prod_n d\xi_n \right) f(\xi). \quad (9.5.33)$$

Поэтому удобно (но не строго необходимо) выбрать дифференциалы  $d\xi_n$  антисимметрирующими со всеми антисимметрирующими переменными (включая  $\xi_n$ ):

$$(d\xi_n) \xi'_m + \xi'_m (d\xi_n) = 0. \quad (9.5.34)$$

В этом случае выражение (9.5.33) принимает более простую форму

$$\int a(\xi') \left( \prod_n d\xi_n \right) f(\xi) = a(\xi') \int \left( \prod_n d\xi_n \right) f(\xi). \quad (9.5.35)$$

Другой общий с обычным интегрированием факт состоит в том, что для произвольной антисимметрической  $c$ -числовой переменной  $\xi'$ , не зависящей от  $\xi$ ,

$$\int \left( \prod_n d\xi_n \right) f(\xi + \xi') = \int \left( \prod_n d\xi_n \right) f(\xi), \quad (9.5.36)$$

поскольку сдвиг  $\xi$  на константу влияет лишь на члены в  $f$  с меньшим числом переменных  $\xi$ , чем полное.

С другой стороны, рассмотрим следующую замену переменных:

$$\xi_n \rightarrow \xi'_n = \sum_m \mathcal{J}_{nm} \xi_m, \quad (9.5.37)$$

где  $\mathcal{J}$  — произвольная несингулярная числовая матрица. Произведение новых переменных есть

$$\prod_n \xi'_n = \sum_{m_1 m_2 \dots} \left( \prod_n \mathcal{J}_{nm_n} \xi_{m_n} \right).$$

Но  $\prod_n \xi_{m_n}$  здесь — это то же самое, что и произведение (в исходном порядке)  $\prod_n \xi_n$  с точностью до знака  $\epsilon[m]$ . Значение  $\epsilon[m]$  может быть равно  $+1$  или  $-1$  и определяется тем, четная или нечетная перестановка  $n \rightarrow m_n$ :

$$\prod_n \xi'_n = \left[ \sum_{m_1 m_2 \dots} \left( \prod_n \mathcal{J}_{nm_n} \right) \epsilon[m] \right] \prod_n \xi_n = (\text{Det } \mathcal{J}) \prod_n \xi_n.$$

Это верно для любого порядка для  $\xi_n$ , если мы берем  $\xi'_n$  в том же порядке. Отсюда следует, что коэффициент перед  $\prod_n \xi'_n$  в любой функции  $f(\xi)$  есть просто обратный детерминант  $(\text{Det } \mathcal{J})^{-1}$ , умноженный на коэффициент перед  $\prod_n \xi_n$ . Это утверждение можно записать следующим образом:

$$\int \left( \prod_n \widetilde{d}\xi'_n \right) f = (\text{Det } \mathcal{J})^{-1} \int \left( \prod_n \widetilde{d}\xi_n \right) f. \quad (9.5.38)$$

Это обычное правило замены переменных интегрирования с поправкой на то, что  $(\text{Det } \mathcal{J})$  входит в это выражение в степени  $-1$  вместо  $+1$ . Далее мы будем использовать выражение (9.5.38) и свойства линейности (9.5.31), (9.5.32) и (9.5.35) для вычисления интегралов, ко-

торые встречаются при выводе правил Фейнмана для теорий с фермионами.

Теперь мы можем использовать это определение интегрирования для того, чтобы записать условие полноты в виде некоторой формулы для интеграла по собственным значениям. Как уже упоминалось, любое состояние  $|f\rangle$  может быть разложено в ряд по состояниям  $|0\rangle$ ,  $|a\rangle$ ,  $|a, b\rangle$  и т.д. Причем эти состояния являются (с точностью до фазы) коэффициентами произведений 1,  $q_a$ ,  $q_a q_b$  и т.д. в  $\mathcal{Q}$ -собственном состоянии  $|q\rangle$ . Согласно принятому здесь определению интегрирования, мы можем получить коэффициент, стоящий при любом из произведений  $q_b q_c q_d \dots$  в состоянии  $|q\rangle$ , интегрируя произведение  $|q\rangle$  со всеми  $q_a$ , где  $a$  не равно  $b, c, d, \dots$  Таким образом, выбирая функцию  $f(q)$  в виде подходящей суммы таких произведений  $q$ , мы можем записать любое состояние  $|f\rangle$  в виде интеграла:

$$|f\rangle = \int \left( \prod_a dq_a \right) |q\rangle f(q) = \int |q\rangle \left( \prod_a dq_a \right) f(q). \quad (9.5.39)$$

(Мы можем сдвинуть  $|q\rangle$  влево относительно дифференциалов, не изменяя знак, поскольку экспонента в выражении (9.5.17), определяющую  $|q\rangle$ , может включать только четное число фермионных величин.) Для того чтобы найти функцию  $f(q)$  для заданного вектора состояния  $|f\rangle$ , возьмем скалярное произведение выражения (9.5.39) с некоторым бра-вектором  $\langle q' |$  (где  $q'$  — любое фиксированное собственное значение  $\mathcal{Q}$ ). Согласно равенствам (9.5.35) и (9.5.20) это скалярное произведение равно

$$\langle q' | f \rangle = \int \left( \prod_a (q_a - q'_a) \right) \left( \prod_b dq_b \right) f(q).$$

Перенося каждый множитель  $(q_a - q'_a)$  направо через все дифференциалы  $dq_b$ , получаем знаковый множитель  $(-1)^{N^2} = (-1)^N$ , где  $N$  — полное число переменных  $q_a$ . Итак,

$$\langle q' | f \rangle = (-)^N \int \left( \prod_b dq_b \right) \left( \prod_a (q_a - q'_a) \right) f(q).$$

Мы можем переписать  $f(q)$  как  $f(q' + (q - q'))$  и разложить по степеням  $q - q'$ . Все старшие члены разложения (кроме самого низкого) обращаются в нуль при умножении на произведение  $\prod_a (q_a - q'_a)$ , так что

$$\left( \prod_a (q_a - q'_a) \right) f(q) = \left( \prod_a (q_a - q'_a) \right) f(q'), \quad (9.5.40)$$

что частично подтверждает сделанное нами ранее замечание о том, что выражение (9.5.20) играет роль дельта-функции для интегралов

по  $q$ . Используя равенство (9.5.32), имеем теперь

$$\langle q' | f \rangle = (-)^N \left[ \int \left( \prod_b dq_b \right) \left( \prod_a (q_a - q'_a) \right) f(q') \right].$$

Слагаемое в подынтегральном выражении, пропорциональное  $\prod q_a$ , имеет коэффициент  $f(q')$ , таким образом, согласно нашему определению интегрирования,  $\langle q' | f \rangle = (-1)^N f(q')$ . Подставляя это равенство обратно в выражение (9.5.39), получаем наше соотношение полноты:

$$|f\rangle = (-)^N \int |q\rangle \left( \prod_b dq_b \right) \langle q | f \rangle,$$

или, как операторное равенство,

$$1 = \int |q\rangle \left( \prod_a -dq_a \right) \langle q|. \quad (9.5.41)$$

Точно таким же способом мы можем показать, что

$$1 = \int |p\rangle \left( \prod_a dp_a \right) \langle p|. \quad (9.5.42)$$

Теперь мы подошли к вычислению элементов матрицы перехода. Как и раньше, мы определяем операторы, зависящие от времени:

$$\mathcal{Q}_a(t) \equiv \exp(iHt)\mathcal{Q}_a \exp(-iHt), \quad (9.5.43)$$

$$P_a(t) \equiv \exp(iHt)P_a \exp(-iHt), \quad (9.5.44)$$

и их правые и левые собственные состояния

$$|q; t\rangle \equiv \exp(iHt)|q\rangle, \quad |p; t\rangle \equiv \exp(-iHt)|p\rangle, \quad (9.5.45)$$

$$\langle q; t| \equiv \langle q| \exp(-iHt), \quad \langle p; t| \equiv \langle p| \exp(-iHt). \quad (9.5.46)$$

Скалярное произведение  $q$ -состояний, определенных в бесконечно близкие моменты времени, есть в таком случае

$$\langle q'; \tau + d\tau | q; \tau \rangle = \langle q' | \exp(-iHd\tau) | q \rangle.$$

Теперь вставим выражение (9.5.42) слева от оператора  $\exp(-iHd\tau)$ . Здесь удобно определить оператор Гамильтона  $H(P, \mathcal{Q})$  таким образом, чтобы все  $P$  в нем стояли слева от всех  $\mathcal{Q}$ . Так что (для инфинитезимального  $d\tau$ )

$$\langle p | \exp(-iH(P, \mathcal{Q})d\tau) | q \rangle = \langle p | q \rangle \exp(-iH(p, q)d\tau).$$

(Мы могли бы перенести  $c$ -числовое  $H(p, q)$  в любую сторону матричного элемента без изменения знака, поскольку каждое слагаемое в гамильтониане предполагается содержащим четное число фермионных

операторов.) Это дает

$$\begin{aligned}\langle q'; \tau + d\tau | q; \tau \rangle &= \int \langle q' | p \rangle \left( \prod_a^{\sim} dp_a \right) \langle p | \exp(-iH d\tau) | q \rangle = \\ &= \int \langle q' | p \rangle \left( \prod_a^{\sim} dp_a \right) \langle p | q \rangle \exp(-iH(p, q) d\tau).\end{aligned}$$

Используя выражения (9.5.26) и (9.5.27) и замечая, что произведения  $p_a q_a$  и  $p_a q'_a$  коммутируют со всеми антисимметрическими комплексными числами, находим

$$\langle q'; \tau + d\tau | q; \tau \rangle = \int \left( \prod_a^{\sim} idp_a \right) \exp \left[ i \sum_a p_a (q'_a - q_a) - iH(p, q) d\tau \right]. \quad (9.5.47)$$

Окончание вывода в точности аналогично изложенному в § 9.1. Для вычисления матричного элемента

$$\langle q'; t' | \mathcal{O}_A(P(t_A), \mathcal{Q}(t_A)) \mathcal{O}_B(P(t_B), \mathcal{Q}(t_B)) \dots | q; t \rangle$$

произведения операторов (где  $t' > t_A > t_B > \dots > t$ ) разделим временной интервал от  $t$  до  $t'$  на большое число очень близких временных шагов; на каждом временном шаге вставим соотношение полноты (9.5.41); используем выражение (9.5.47) для окончательного определения матричных элементов (со вставленными там, где необходимо, операторами  $\mathcal{O}_A, \mathcal{O}_B$ ); сдвигнем все дифференциалы влево (это не приводит к изменению знака, поскольку на каждом шаге мы имеем равное число  $dp$  и  $dq$ ); и затем вводим функции  $q_a(t)$  и  $p_a(t)$ , которые интерполируют значения  $q_a$  и  $p_a$  на каждом шаге. Таким образом, находим

$$\begin{aligned}\langle q'; t' | T\{\mathcal{O}_A(P(t_A), \mathcal{Q}(t_A)), \mathcal{O}_B(P(t_B), \mathcal{Q}(t_B)), \dots\} | q; t \rangle &= \\ &= (-i)^N \chi_N \int_{q_a(t)=q_a, q_a(t')=q'_a} \left( \prod_{a\tau}^{\sim} dq_a(\tau) dp_a(\tau) \right) \times \\ &\quad \times \mathcal{O}_A(p(t_A), q(t_A)) \mathcal{O}_B(p(t_B), q(t_B)) \dots \\ &\quad \dots \times \exp \left[ i \int_t^{t'} d\tau \left\{ \sum_a p_a(\tau) \dot{q}_a(\tau) - H(p(\tau), q(\tau)) \right\} \right]. \quad (9.5.48)\end{aligned}$$

Символ  $T$  означает здесь обычное произведение, если моменты времени находятся в условленном порядке,  $T_A > t_B > \dots$ . Однако правая часть этого выражения полностью симметрична по отношению к  $\mathcal{O}_A, \mathcal{O}_B, \dots$  (не считая знака минус там, где антисимметрические комплексные переменные меняются местами). Таким образом, эта

формула остается верна и в случае неупорядоченных моментов времени (между  $t$  и  $t'$ ). Тогда  $T$  интерпретируется как упорядоченное по времени произведение с общим знаком минус в том случае, если упорядочение моментов времени приводит к нечетному числу перестановок фермионных операторов.

Вплоть до настоящего момента мы сохраняли общий фазовый множитель  $(-i)^N \chi_N$ . Но в действительности эти фазы дают вклады только в амплитуду перехода вакуум–вакуум и, следовательно, не важны для нас.

Переход к квантовой теории поля производится аналогично тому, что было сделано в § 9.2 для бозонных полей. Вакуумное среднее упорядоченного по времени произведения операторов дается формулой, аналогичной формуле (9.2.17):

$$\begin{aligned} \langle \text{VAC, out} | T\{\mathcal{O}_A[P(t_A), \mathcal{Q}(t_A)], \mathcal{O}_B[P(t_B), \mathcal{Q}(t_B)], \dots\} | \text{VAC, in} \rangle &\propto \\ &\propto \int \left[ \prod_{\tau, \mathbf{x}, m} dq_m(\mathbf{x}, \tau) \right] \left[ \prod_{\tau, \mathbf{x}, m} dp_m(\mathbf{x}, \tau) \right] \times \\ &\quad \times \mathcal{O}_A[p(t_A), q(t_A)] \mathcal{O}_B[p(t_B), q(t_B)] \dots \times \\ &\quad \times \exp \left[ i \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \left\{ \int d^3x \sum_m p_m(\mathbf{x}, \tau) \dot{q}_m(\mathbf{x}, \tau) - \right. \right. \\ &\quad \quad \quad \left. \left. - H(q(\tau), p(\tau)) + i\epsilon\text{-члены} \right\} \right], \quad (9.5.49) \end{aligned}$$

где коэффициент пропорциональности одинаков для всех операторов  $\mathcal{O}_A$ ,  $\mathcal{O}_B$  и т.д., а “ $i\epsilon$ -члены”, как и раньше, возникают из волновой функции вакуума. Как и прежде, мы заменили каждый дискретный индекс  $a$  положением в пространстве  $\mathbf{x}$  и полевым индексом  $m$ . Мы также опускаем тильду над произведением дифференциалов, поскольку она влияет только лишь на постоянную фазу в интеграле по путям.

Основным отличием фермионного случая от бозонного является то, что здесь мы не хотим проинтегрировать по  $p$  раньше, чем по  $q$ . Действительно, в стандартной модели электрослабых взаимодействий (и в других теориях, таких как, например, старая фермиевская теория бета-распада) канонически сопряженные переменные  $p_m$  являются вспомогательными полями, не связанными с  $\dot{q}_m$ , и лагранжиан лишен по  $\dot{q}_m$ . Таким образом, величина

$$\int d^3x \sum_m p_m \dot{q}_m - H$$

в формуле (9.5.49) является лагранжианом  $L$  этой теории в том виде, в котором она написана. Каждое слагаемое гамильтониана, соответствующее фермионному полю, обладающему ненулевым квантовым числом (как электронное поле в квантовой электродинамике), в общем

случае содержит равное число  $p$  (пропорциональных  $q^\dagger$ ) и  $q$ . В частности, слагаемое гамильтониана  $H_0$ , соответствующее движению свободных частиц, билинейно по  $p$  и  $q$ . Так что

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\tau \left\{ \int d^3x \sum_m p_m(\mathbf{x}, \tau) \dot{q}_m(\mathbf{x}, \tau) - H_0(q(\tau), p(\tau)) + i\epsilon\text{-члены} \right\} = \\ = - \sum_{mn} \int d^4x d^4y \mathcal{D}_{mx, ny} p_m(x) q_n(y), \quad (9.5.50)$$

где  $\mathcal{D}$  – некоторая числовая “матрица”. Гамильтониан взаимодействия

$$V \equiv H - H_0$$

представляет собой сумму произведений равного числа фермионных переменных  $q$  и  $p$  (с коэффициентами, которые могут зависеть от бозонных полей). Таким образом, при разложении выражения (9.5.49) по степеням  $V$  мы получаем сумму фермионных интегралов вида

$$\mathcal{J}_{n_1 m_1 n_2 m_2 \dots n_N m_N}(x_1, y_1, x_2, y_2, \dots, x_N, y_N) \equiv \\ \equiv \int \left[ \prod_{\tau, \mathbf{x}, m} dq_m(\mathbf{x}, \tau) \right] \left[ \prod_{\tau, \mathbf{x}, m} dp_m(\mathbf{x}, \tau) \right] \times \\ \times q_{m_1}(x_1) p_{n_1}(y_1) q_{m_2}(x_2) p_{n_2}(y_2) \dots q_{m_N}(x_N) p_{n_N}(y_N) \times \\ \times \exp \left( -i \sum_{mn} \int d^4x d^4y \mathcal{D}_{mx, ny} p_m(x) q_n(y) \right), \quad (9.5.51)$$

каждый из которых соответствует определенному набору вершин в диаграмме Фейнмана с коэффициентами, в которые каждая заданная вершина дает вклад  $i$  умножить на коэффициент, стоящий перед произведением полей в соответствующем слагаемом во взаимодействии.

Для того чтобы вычислить такой тип интегралов, рассмотрим производящую функцию всех таких интегралов:

$$\mathcal{J}(f, g) \equiv \int \left[ \prod_{\tau, \mathbf{x}, m} dq_m(\mathbf{x}, \tau) dp_m(\mathbf{x}, \tau) \right] \times \\ \times \exp \left( -i \sum_{mn} \int d^4x d^4y \mathcal{D}_{mx, ny} p_m(x) q_n(y) - \right. \\ \left. - i \sum_m \int d^4x p_m(x) f_m(x) - i \sum_n \int d^4y g_n(y) q_n(y) \right), \quad (9.5.52)$$

где  $f_m(x)$  и  $g_n(y)$  – произвольные антисимметрические комплекснозначные функции. Мы переходим к новым переменным интегрирова-

ния:

$$p'_m(x) = p_m(x) + \sum_n \int d^4y g_n(y) (\mathcal{D}^{-1})_{ny,mx},$$

$$q'_n(y) = q_n(y) + \sum_m \int d^4x (\mathcal{D}^{-1})_{ny,mx} f_m(x).$$

Используя условие трансляционной инвариантности (9.5.36), находим

$$\begin{aligned} \mathcal{J}(f, g) &= \exp \left( i \sum_{mn} \int d^4x d^4y (\mathcal{D}^{-1})_{ny,mx} g_n(y) f_m(x) \right) \times \\ &\quad \times \int \left[ \prod_{\tau, \mathbf{x}, m} dq'_m(\mathbf{x}, \tau) dp'_m(\mathbf{x}, \tau) \right] \times \\ &\quad \times \exp \left( -i \sum_{mn} \int d^4x d^4y \mathcal{D}_{mx, ny} p'_m(x) q'_n(y) \right). \end{aligned} \quad (9.5.53)$$

Интеграл является постоянной (т.е. не зависит от функций  $f$  и  $g$ ). Можно показать, используя равенство (9.5.38), что он пропорционален  $\text{Det } \mathcal{D}$ . Большую важность для нас представляет первый множитель. Разлагая его по степеням  $gf$  и сравнивая с прямым разложением выражения (9.5.52), мы видим, что

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_{n_1 m_1 n_2 m_2 \dots n_N m_N}(x_1 y_1, x_2 y_2, \dots, x_N y_N) &\propto \\ &\propto \sum_{\substack{\text{спаривание} \\ \text{спаривания}}} \delta_{\text{спаривание}} \prod_{\text{пары}} (-i \mathcal{D}^{-1})_{\text{парные } mx, ny} \end{aligned} \quad (9.5.54)$$

с коэффициентом пропорциональности, который не зависит от  $x, y, t$  или  $n$ , а также не зависит от количества этих переменных. Суммирование производится по всевозможным спариваниям  $p$  и  $q$ . Спаривания, отличающиеся только порядком в паре, считаются тождественными. Другими словами, мы суммируем по  $N!$  перестановкам либо  $p$ , либо  $q$ . Знаковый множитель  $\delta_{\text{спаривание}}$  равен  $+1$ , если перестановка четная;  $-1$  — если нечетная.

Этот знаковый множитель и суммирование по спариваниям — точно такие же, как и те, что мы встречали при выводе правил Фейнмана. Причем суммирование по всевозможным спариваниям соответствует суммированию по способам связи линий, ассоциированных с вершинами в диаграммах Фейнмана, а множители  $(\mathcal{D}^{-1})_{mx, ny}$  играют роль пропагатора для спаривания  $q_m(x)$  с  $p_n(y)$ . В формализме Дирака для спина  $1/2$  действие для свободной частицы есть

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \left\{ \int d^3x \sum_m p_m(\mathbf{x}, \tau) \dot{q}_m(\mathbf{x}, \tau) - H_0[q(\tau), p(\tau)] \right\} &= \\ &= - \int d^4x \bar{\psi}(x) [\gamma^\mu \partial_\mu + m] \psi(x), \end{aligned} \quad (9.5.55)$$

где использованы стандартные обозначения для канонических переменных:

$$q_m(x) = \psi_m(x), \quad p_m(x) = -[\bar{\psi}_m(x)\gamma^0]_m = i\psi_m^\dagger(x), \quad (9.5.56)$$

где  $m$  — дираковский индекс, принимающий 4 значения. Сравнивая это с выражением (9.5.50), находим

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{mx,ny} &= \left[ \gamma^0 \left( \gamma^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} + m - i\epsilon \right) \right]_{mn} \delta^4(x-y) = \\ &= \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} (\gamma^0 [i\gamma^\mu k_\mu + m - i\epsilon])_{mn} e^{ik \cdot (x-y)}. \end{aligned} \quad (9.5.57)$$

(Мы не будем рассматривать этого в деталях, но  $i\epsilon$ -член возникает здесь таким же образом, как и в случае скалярного поля в § 9.2.) Тогда пропагатор будет равен

$$(\mathcal{D}^{-1})_{mx,ny} = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} ([i\gamma^\mu k_\mu + m - i\epsilon]^{-1} [-\gamma^0])_{mn} e^{ik \cdot (x-y)}, \quad (9.5.58)$$

т.е. он будет такой же, как тот, который мы получили в рамках операторного формализма. Дополнительный множитель  $-\gamma^0$  возникает, потому что этот пропагатор является вакуумным средним от  $T\{\psi_m(x), -[\bar{\psi}(y)\gamma^0]_n\}$ , а не от  $T\{\psi_m(x), \bar{\psi}_n(y)\}$ .

В качестве примера проблемы, которую проще исследовать при помощи интегрирования по путям, чем операторными методами, рассмотрим задачу о вычислении полевой зависимости амплитуды перехода вакуум—вакуум для поля Дирака, взаимодействующего только с внешним полем. В качестве лагранжиана возьмем выражение

$$\mathcal{L} = -\bar{\psi} [\gamma^\mu \partial_\mu + m + \Gamma] \psi, \quad (9.5.59)$$

где  $\Gamma(x)$  — зависящая от  $x$  матрица, представляющая взаимодействие фермиона с внешним полем. Согласно формуле (9.5.49) амплитуда перехода вакуум—вакуум при наличии внешнего поля есть

$$\begin{aligned} \langle \text{VAC, out} | \text{VAC, in} \rangle_\Gamma &\propto \int \left[ \prod_{\tau, \mathbf{x}, m} dq_m(\mathbf{x}, \tau) \right] \left[ \prod_{\tau, \mathbf{x}, m} dp_m(\mathbf{x}, \tau) \right] \times \\ &\times \exp \left\{ -i \int d^4 x p^T \gamma^0 [\gamma^\mu \partial_\mu + m + \Gamma - i\epsilon] q \right\} \end{aligned} \quad (9.5.60)$$

с коэффициентом пропорциональности, не зависящим от  $\Gamma(x)$ . Запишем это выражение в виде

$$\begin{aligned} \langle \text{VAC, out} | \text{VAC, in} \rangle_\Gamma &\propto \int \left[ \prod_{\tau, \mathbf{x}, m} dq_m(\mathbf{x}, \tau) \right] \left[ \prod_{\tau, \mathbf{x}, m} dp_m(\mathbf{x}, \tau) \right] \times \\ &\times \exp \left\{ -i \int d^4 x d^4 y p_m(x) q_n(y) \mathcal{K}[\Gamma]_{mx, ny} \right\}, \end{aligned} \quad (9.5.61)$$

где

$$\mathcal{K}[\Gamma]_{mx,ny} = \left( \gamma^0 \left[ \gamma^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} + m + \Gamma(x) - i\epsilon \right] \right)_{mn} \delta^4(x-y). \quad (9.5.62)$$

Для вычисления этого выражения, сделаем замену переменных интегрирования  $q_n(x)$ :

$$q'_m(x) \equiv \sum_n \int d^4y \mathcal{K}[\Gamma]_{mx,ny} q_n(y). \quad (9.5.63)$$

Остающийся интеграл не зависит от  $\Gamma$ . Таким образом, вся зависимость амплитуды перехода вакуум–вакуум содержится в детерминанте, возникающем, согласно равенству (9.5.38), в результате замены переменных:

$$\langle VAC, out | VAC, in \rangle_\Gamma \propto \text{Det } \mathcal{K}[\Gamma]. \quad (9.5.64)$$

Для восстановления результатов теории возмущений, запишем

$$\mathcal{K}[\Gamma] \equiv \mathcal{D} + \mathcal{G}[\Gamma], \quad (9.5.65)$$

$$\mathcal{G}[\Gamma]_{mx,ny} = (\gamma^0 \Gamma(x))_{mn} \delta^4(x-y) \quad (9.5.66)$$

и разложим по степеням  $\mathcal{G}[\Gamma]$ . Формула (9.5.64) дает тогда

$$\begin{aligned} \langle VAC, out | VAC, in \rangle_\Gamma &\propto \text{Det}(\mathcal{D}[1 + \mathcal{D}^{-1}\mathcal{G}[\Gamma]]) = \\ &= [\text{Det } \mathcal{D}] \exp \left( \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \text{Tr}(\mathcal{D}^{-1}\mathcal{G}[\Gamma])^n \right). \end{aligned} \quad (9.5.67)$$

Это именно то, что мы ожидали бы из правил Фейнмана: вклады от внутренних линий и вершин в этой теории равны  $-i\mathcal{D}^{-1}$  и  $-i\mathcal{G}[\Gamma]$ ; след произведения  $n$  множителей

$$-\mathcal{D}^{-1}\mathcal{G}[\Gamma],$$

таким образом, соответствует петле с  $n$  вершинами, соединенными  $n$  внутренними линиями;  $1/n$  — обычный комбинаторный множитель, связанный с такими петлями (см. § 6.1); знаковый множитель имеет вид  $(-1)^{n+1}$ , а не  $(-1)^n$ , поскольку дополнительный знак минус всегда связан с фермионными петлями; и сумма по  $n$  входит в аргумент экспоненты, поскольку амплитуда перехода вакуум–вакуум получает вклады от диаграмм с любым числом несвязанных петель. Независящий от  $\Gamma$  множитель  $\text{Det } \mathcal{D}$  не так просто вывести из правил Фейнмана; он представляет собой вклад любого числа фермионных петель без вершин.

Более того, формула (9.5.64) позволяет нам вывести непертурбативные результаты посредством использования топологических теорем для получения информации о собственных значениях ядер, таких как  $\mathcal{K}[\Gamma]$ . Рассмотрение этого будет продолжено далее в т. II.

## § 9.6. Формулировка квантовой электродинамики в терминах интегрирования по путям

Подход к квантовой теории поля с использованием интегралов по путям проявляет себя в полной мере при применении его к калибрончым теориям безмассовых частиц со спином единица, таким как, например, квантовая электродинамика. Вывод правил Фейнмана для квантовой электродинамики в предыдущей главе включал в себя значительные неопределенности при обосновании того, что слагаемые в фотонном пропагаторе  $\Delta^{\mu\nu}(q)$ , пропорциональные  $q^\mu$  или  $q^\nu$ , могут быть опущены и что времениподобные слагаемые как раз сократят кулоновское слагаемое в гамильтониане так, что эффективный фотонный пропагатор может быть выбран в виде  $\eta^{\mu\nu}/q^2$ . Попытка дать строгое обоснование этого результата, используя методы гл. 8, включила бы сложный анализ диаграмм Фейнмана. Но, как мы сейчас увидим, подход с использованием интегралов по путям дает желаемую форму фотонного пропагатора даже без подробного рассмотрения деталей диаграмм Фейнмана.

В гл. 8 мы нашли, что в кулоновской калибровке гамильтониан взаимодействия фотонов с заряженными частицами принимает вид

$$H[\mathbf{A}, \mathbf{\Pi}_\perp, \dots] = H_M + \int d^3x \left[ \frac{1}{2} \mathbf{\Pi}_\perp^2 + \frac{1}{2} (\nabla \times \mathbf{A})^2 - \mathbf{A} \cdot \mathbf{J} \right] + V_{\text{кул}}. \quad (9.6.1)$$

Здесь  $\mathbf{A}$  — векторный потенциал, удовлетворяющий условию кулоновской калибровки:

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = 0, \quad (9.6.2)$$

в то время как  $\mathbf{\Pi}_\perp$  — соленоидальная часть канонически сопряженной к векторному потенциальному величине, удовлетворяющей тому же условию

$$\nabla \cdot \mathbf{\Pi}_\perp = 0, \quad (9.6.3)$$

$H_M$  — гамильтониан материи, а  $V_{\text{кул}}$  — кулоновская энергия,

$$V_{\text{кул}} = \frac{1}{2} \int d^3x d^3y J^0(\mathbf{x}, t) J^0(\mathbf{y}, t) / (4\pi|\mathbf{x} - \mathbf{y}|). \quad (9.6.4)$$

Как и для любой другой гамильтоновой системы, мы можем вычислить вакуумные средние упорядоченных по времени произведений как интегралы по путям<sup>1)</sup>:

$$\langle T\{\mathcal{O}_A \mathcal{O}_B \dots\} \rangle_{\text{VAC}} = \int \left[ \prod_{x,i} da_i(x) \prod_{x,i} d\pi_i(x) \prod_{x,l} d\psi_l(x) \right] \mathcal{O}_A \mathcal{O}_B \dots$$

<sup>1)</sup> Заметим, что  $\pi(x)$  — интерполяционное с-числовое поле для квантового оператора  $\mathbf{\Pi}_\perp$ , коммутационные соотношения которого друг с другом и с  $\mathbf{A}$  такие же, как и для  $\mathbf{\Pi}$ , но которые, в отличие от  $\mathbf{\Pi}$ , коммутируют со всеми каноническими переменными материи.

$$\dots \exp \left\{ i \int d^4x \left[ \boldsymbol{\pi} \cdot \dot{\mathbf{a}} - \frac{1}{2} \boldsymbol{\pi}^2 - \frac{1}{2} (\nabla \times \mathbf{a})^2 + \mathbf{a} \cdot \mathbf{J} + \mathcal{L}_M \right] \times \right. \\ \left. \times -i \int dt V_{\text{кул}} \right\} \times \left[ \prod_x \delta(\nabla \cdot \mathbf{a}(x)) \right] \left[ \prod_x \delta(\nabla \cdot \boldsymbol{\pi}(x)) \right], \quad (9.6.5)$$

где  $\psi_l(x)$  — общие поля материи. При написании выражения (9.6.5) в терминах лагранжевой плотности для материи мы предполагаем, что  $H_M$  локален и либо линеен по полям материи  $\boldsymbol{\pi}$  (как в спинорной электродинамике), либо квадратичен с не зависящими от полей коэффициентами (как в скалярной электродинамике). Мы вставили дельта-функции<sup>2)</sup> в выражение (9.6.5) для обеспечения выполнения условий (9.6.2) и (9.6.3).

Очевидно, что аргумент экспоненты в формуле (9.6.5) квадратичен по независимым компонентам  $\boldsymbol{\pi}$  (скажем,  $\pi_1$  и  $\pi_2$ ), причем коэффициенты в слагаемом второго порядка по  $\boldsymbol{\pi}$  не зависят от поля. Таким образом, согласно выражению (9.A.9), интеграл по  $\boldsymbol{\pi}$  может быть вычислен (с точностью до постоянного множителя), посредством приравнивания  $\boldsymbol{\pi}$  стационарной точке аргумента экспоненты,  $\boldsymbol{\pi} = \dot{\mathbf{a}}$ :

$$\langle T\{\mathcal{O}_A \mathcal{O}_B \dots\} \rangle_{\text{VAC}} = \int \left[ \prod_{x,i} da_i(x) \prod_{x,l} d\psi_l(x) \right] \mathcal{O}_A \mathcal{O}_B \dots \\ \dots \exp \left\{ i \int d^4x \left[ \frac{1}{2} (\dot{\mathbf{a}})^2 - \frac{1}{2} (\nabla \times \mathbf{a})^2 + \mathbf{a} \cdot \mathbf{j} + \mathcal{L}_M \right] - \right. \\ \left. - i \int dt V_{\text{кул}} + i\epsilon\text{-члены} \right\} \left[ \prod_x \delta(\nabla \cdot \mathbf{a}(x)) \right]. \quad (9.6.6)$$

Для того чтобы выявить необходимую ковариантность полученного результата, мы используем некоторый прием. Введем новую переменную интегрирования  $a^0(x)$  и заменим кулоновское слагаемое  $- \int dt V_{\text{кул}}$  в действии следующим выражением:

$$\int d^4x \left[ -a^0(x) j^0(x) + \frac{1}{2} (\nabla a^0(x))^2 \right]. \quad (9.6.7)$$

Поскольку (9.6.7) квадратично по  $a^0$ , интеграл по  $a^0$  может быть вы-

<sup>2)</sup> Это не совсем строго. Если мы выбираем в качестве канонических переменных, скажем,  $a_1, a_2$  и  $\pi_1, \pi_2$ , а  $a_3$  и  $\pi_3$  рассматриваем как функционалы этих переменных, заданные условиями (9.6.2) и (9.6.3), тогда мы должны вставить дельта-функции

$$\prod_x \delta(a_3(x) + \partial_3^{-1}(\partial_1 a_1(x) + \partial_2 a_2(x))) \delta(\pi_3(x) + \partial_3^{-1}(\partial_1 \pi_1(x) + \partial_2 \pi_2(x))).$$

Однако это отличается от произведения дельта-функций в формуле (9.6.5) лишь множителем  $\text{Det } \partial_3^2$ , который, хотя и бесконечен, но не зависит от полей и, следовательно, сокращается в отношениях вида (9.4.1).

числен (с точностью до постоянного множителя) посредством замены  $a^0(x)$  на стационарную точку выражения (9.6.7), т.е. на решение следующего уравнения:

$$-j^0(x) - \nabla^2 a^0(x) = 0,$$

или, другими словами, на

$$a^0(\mathbf{x}, t) = \int d^3y \frac{j^0(\mathbf{y}, t)}{4\pi|\mathbf{x} - \mathbf{y}|}. \quad (9.6.8)$$

Подставляя это в выражение (9.6.7), получим как раз кулоновское действие  $-\int dt V_{\text{кул}}$ . Следовательно, мы можем переписать аргумент экспоненты в формуле (9.6.6) как

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(\dot{\mathbf{a}})^2 - \frac{1}{2}(\nabla \times \mathbf{a})^2 + \mathbf{a} \cdot \mathbf{j} + \mathcal{L}_M - a^0 j^0 + \frac{1}{2}(\nabla a^0)^2 = \\ = -\frac{1}{4}f_{\mu\nu}f^{\mu\nu} + a_\mu j^\mu + \mathcal{L}_M + \text{полные производные}, \end{aligned}$$

где  $f_{\mu\nu} = \partial_\mu a_\nu - \partial_\nu a_\mu$ , и интегрировать по  $a^0$ , как и по  $\mathbf{a}$ , и полям материи. Таким образом, интеграл по путям (9.6.6) теперь выглядит так

$$\begin{aligned} \langle T\{\mathcal{O}_A \mathcal{O}_B \dots\} \rangle_{\text{VAC}} \propto \int \left[ \prod_{x,\mu} da_\mu(x) \right] \left[ \prod_{x,l} d\psi_l(x) \right] \mathcal{O}_A \mathcal{O}_B \dots \\ \dots \exp(iI[a, \psi]) \prod_x \delta(\nabla \cdot \mathbf{a}(x)), \quad (9.6.9) \end{aligned}$$

где  $I$  — исходное действие:

$$I[a, \psi] = \int d^4x \left[ -\frac{1}{4}f_{\mu\nu}f^{\mu\nu} + a_\mu j^\mu + \mathcal{L}_M \right] + i\epsilon\text{-члены}. \quad (9.6.10)$$

Теперь все явно лоренц- и калибровочно инвариантно, кроме последнего произведения дельта-функций, которые обеспечивают выполнение условия кулоновской калибровки.<sup>3)</sup> Для того чтобы продвинуться дальше, мы используем простой вариант приема [4, 5], который будет использован в т. II для исследования более сложного случая неабелевых калибровочных теорий. Для простоты здесь мы рассмотрим случай, когда операторы  $\mathcal{O}_A[A, \Psi]$ ,  $\mathcal{O}_B[A, \Psi]$ , ... так же, как действие  $I[a, \psi]$  и мера  $[\prod da][\prod d\psi]$ , калибровочно инвариантны.

<sup>3)</sup> Заметим, что теперь  $a^0$  не равно значению (9.6.8), а является независимой переменной интегрирования. Мы не будем сперва интегрировать по  $a^0(x)$ , что привело бы опять к формуле (9.6.6). Вместо этого мы будем рассматривать  $a^0(x)$  вместе с  $\mathbf{a}(x)$ .

Во-первых, заменим полевые переменные интегрирования  $a_\mu(x)$  и  $\psi(x)$  везде в формуле (9.6.9) новыми переменными

$$a_{\mu\Lambda}(x) \equiv a_\mu(x) + \partial_\mu\Lambda(x), \quad (9.6.11)$$

$$\psi_{l\Lambda}(x) \equiv \exp(iq_l\Lambda(x))\psi_l(x) \quad (9.6.12)$$

с произвольным конечным  $\Lambda(x)$ . Этот шаг представляет собой математическую тривиальность такую, как замена интеграла  $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$  на  $\int_{-\infty}^{\infty} f(y)dy$ , и не требует использования постулированной калибровочной инвариантности теории. Далее используем калибровочную инвариантность для замены  $a_{\mu\Lambda}(x)$  и  $\psi_{l\Lambda}(x)$  в действии, мере и в  $\mathcal{O}$ -функциях исходными полями  $a_\mu(x)$  и  $\psi_l(x)$  соответственно. Формула (9.6.9) преобразуется тогда к виду

$$\begin{aligned} & \langle T\{\mathcal{O}_A[A, \Psi], \mathcal{O}_B[A, \Psi], \dots\}\rangle_{\text{VAC}} \propto \\ & \propto \int \left[ \prod_{x,\mu} da_\mu(x) \right] \left[ \prod_{x,l} d\psi_l(x) \right] \mathcal{O}_A[a, \psi] \mathcal{O}_B[a, \psi] \dots \\ & \dots \times \exp(iI[a, \psi]) \prod_x \delta(\nabla \cdot \mathbf{a}(x) + \nabla^2 \Lambda(x)). \end{aligned} \quad (9.6.13)$$

Теперь, поскольку функция  $\Lambda(x)$  была выбрана произвольным образом, правая часть отношения (9.6.13) не может зависеть от этой функции, несмотря на внешний его вид. Мы используем этот факт для того, чтобы записать интеграл по путям в более удобной форме. Домножим выражение (9.6.13) на функционал

$$B[\Lambda, a] = \exp\left(-\frac{1}{2} i\alpha \int d^4x (\partial_0 a^0 - \nabla^2 \Lambda)^2\right) \quad (9.6.14)$$

(где  $\alpha$  — произвольная постоянная) и проинтегрируем по  $\Lambda(x)$ . Сдвигая переменную интегрирования  $\Lambda(x)$  и обращая внимание на явную зависимость выражения (9.6.13) от  $\Lambda$ , видим, что весь эффект сводится к умножению выражения (9.6.13) на независящую от поля постоянную

$$\int \left[ \prod_x d\Lambda(x) \right] \exp\left(-\frac{1}{2} i\alpha \int d^4x (\nabla^2 \Lambda)^2\right). \quad (9.6.15)$$

Этот множитель сокращает связную часть вакуумного среднего и, таким образом, не имеет физического смысла. Но (9.6.13) не зависит от  $\Lambda$  только после того, как мы проинтегрировали по  $a^\mu(x)$  и  $\psi(x)$ . Мы с таким же успехом можем проинтегрировать по  $\Lambda(x)$ , до того как интегрировать по  $a^\mu(x)$  и  $\psi(x)$ . В этом случае множитель

$\prod_x \delta(\nabla \cdot \mathbf{a}(x) + \nabla^2 \Lambda)$  в формуле (9.6.13) заменяется на

$$\int \left[ \prod_x d\Lambda(x) \right] \exp \left( -\frac{1}{2} i\alpha \int d^4x (\partial_0 a^0 - \nabla^2 \Lambda)^2 \right) \times \\ \times \prod_x \delta(\nabla \cdot \mathbf{a}(x) + \nabla^2 \Lambda(x)) \propto \exp \left( -\frac{1}{2} i\alpha \int d^4x (\partial_\mu a^\mu)^2 \right), \quad (9.6.16)$$

где “ $\propto$ ” снова означает пропорциональность с независящим от поля коэффициентом. После опускания постоянных множителей формула (9.6.9) преобразуется к виду

$$\langle T\{\mathcal{O}_A \mathcal{O}_B \dots\} \rangle_{\text{VAC}} \propto \\ \propto \int \left[ \prod_{x,\mu} da_\mu(x) \right] \left[ \prod_{x,l} d\psi_l(x) \right] \mathcal{O}_A \mathcal{O}_B \dots \exp(iI_{\text{eff}}[a, \psi]), \quad (9.6.17)$$

где

$$I_{\text{eff}}[a, \psi] = I[a, \psi] - \frac{1}{2} \alpha \int (\partial_\mu a^\mu)^2 d^4x. \quad (9.6.18)$$

Мы получили явно лоренц-инвариантное выражение.

Мы рассматриваем новое слагаемое в (9.6.18) как вклад в невозмущенную часть действия, фотонная часть которого теперь имеет вид

$$I_0[a] = \int d^4x \left[ -\frac{1}{4} (\partial_\mu a_\nu - \partial_\nu a_\mu)(\partial^\mu a^\nu - \partial^\nu a^\mu) - \right. \\ \left. - \frac{1}{2} \alpha (\partial_\mu a^\mu)^2 + i\epsilon\text{-члены} \right] = -\frac{1}{2} \int d^4x d^4y a^\mu(x) a^\nu(y) \mathcal{D}_{\mu x, \nu y}, \quad (9.6.19)$$

где

$$\mathcal{D}_{\mu x, \nu y} = \left[ \eta_{\mu\nu} \frac{\partial^2}{\partial x^\rho \partial y_\rho} - (1-\alpha) \frac{\partial^2}{\partial x^\mu \partial y^\nu} \right] \delta^4(x-y) + i\epsilon\text{-члены} = \\ = (2\pi)^{-4} \int d^4q [\eta_{\mu\nu} q^2 - (1-\alpha) q_\mu q_\nu - i\epsilon \eta_{\mu\nu}] e^{iq \cdot (x-y)}. \quad (9.6.20)$$

Откуда обращением матрицы  $4 \times 4$  в подынтегральном выражении из (9.6.20) сразу находится фотонный пропагатор

$$\Delta_{\mu x, \nu y} = (2\pi)^{-4} \int d^4q \left[ \frac{\eta^{\mu\nu}}{q^2 - i\epsilon} + \frac{1-\alpha}{\alpha} \frac{q^\mu q^\nu}{(q^2 - ie)^2} \right] e^{iq \cdot (x-y)}. \quad (9.6.21)$$

Мы можем свободно выбирать  $\alpha$  так, как нам удобно. Два общепринятых выбора — это  $\alpha = 1$ , что дает пропагатор в *калибровке Фейнмана*:

$$\Delta_{\mu x, \nu y}^{\text{Feynman}} = (2\pi)^{-4} \int d^4q \left[ \frac{\eta^{\mu\nu}}{q^2 - ie} \right] e^{iq \cdot (x-y)}, \quad (9.6.22)$$

или  $\alpha = \infty$ , в этом случае множитель (9.6.14) действует как дельта-функция и мы получаем пропагатор в *калибровке Ландау* (также ча-

сто называемой *калибровкой Лоренца*):

$$\Delta_{\mu x, \nu y}^{\text{Landau}} = (2\pi)^{-4} \int d^4 q \left[ \frac{\eta^{\mu\nu}}{q^2 - i\epsilon} - \frac{q^\mu q^\nu}{(q^2 - i\epsilon)^2} \right] e^{iq \cdot (x-y)}. \quad (9.6.23)$$

Практические вычисления делаются гораздо более удобными при работе с такими явно лоренц-инвариантными взаимодействиями и propagatorами.

## § 9.7. Различные статистики<sup>1)</sup>

Мы можем вернуться теперь к вопросу, поставленному в гл. 4: какие возможны изменения в векторах состояния при перестановке идентичных частиц?

Для этой цели мы рассмотрим начальные и конечные состояния в процессе рассеяния. Предположим, что набор тождественных частиц в одном из таких состояний приводится к некоторой конфигурации с импульсами  $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2$  и т.д. из стандартной конфигурации с импульсами  $\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2$  и т.д. под воздействием медленно меняющихся внешних полей, при этом частицы, участвующие в процессе, остаются достаточно далеко друг от друга, что обеспечивает правомерность использования нерелятивистской квантовой механики. (Спиновые индексы мы здесь не записываем явно; следует помнить, что они должны сопровождать знаки импульсов.) Для того чтобы вычислить амплитуду этого процесса, мы можем использовать метод интегрирования по путям<sup>2)</sup>, считая  $q$  и  $p$  координатами и импульсами частиц как в § 9.1, а не полями и их канонически сопряженными. Они всегда удовлетворяют каноническим коммутационным (а не антакоммутационным) соотношениям, независимо от того, являются ли частицы бозонами или фермионами, или чем бы то ни было еще. Таким образом, на данном этапе мы не ограничиваем себя выбором какой-либо конкретной статистики. Формула для интеграла по путям (9.1.34) дает выражение для амплитуды  $\langle \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \dots | \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \dots \rangle_D$  в виде интеграла по путям, на которых частица переводится непрерывным образом от

<sup>1)</sup> Материал этого параграфа выходит за рамки основного содержания книги и может быть опущен при первом чтении.

<sup>2)</sup> Здесь я следую рассуждениям Ледло (Laidlaw) и К. де Витта [11], с той лишь разницей, что они применяют метод интегрирования по путям ко всему процессу рассеяния, а не только для выделения начальных и конечных состояний. В релятивистской теории возможность рождения и уничтожения частиц приводит к тому, что метод интегрирования по путям необходимо применять к полям, а не к орбитам частиц. Для нас этой проблемы не существует, поскольку мы ограничиваем наши вычисления достаточно ранними или поздними моментами времени, когда частицы, участвующие в рассеянии, находятся достаточно далеко друг от друга.

импульса  $\mathbf{k}_1$  к импульсу  $\mathbf{p}_1$ , другая идентичная первой частица переводится от импульса  $\mathbf{k}_2$  к импульсу  $\mathbf{p}_2$  и т.д. Значок  $D$  указывает на то, что это амплитуда, вычисленная для различных частиц. В частности, эта амплитуда симметрична относительно перестановок  $\mathbf{p}$  и одновременных перестановок  $\mathbf{k}$ , но не обладает никакой симметрией относительно несогласованных перестановок  $\mathbf{p}$  и  $\mathbf{k}$ . Но если частицы действительно тождественны, то существуют другие топологически различные пути, которые тем не менее приводят к той же конечной конфигурации. Для пространства размерности  $d \geq 3$  единственны такие пути<sup>3)</sup> — это те, которые переводят  $\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \dots$  в некоторую нетривиальную перестановку  $\mathcal{P} \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \dots$  Следовательно, настоящая амплитуда должна быть записана как

$$\langle \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \dots | \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \dots \rangle = \sum_{\mathcal{P}} C_{\mathcal{P}} \langle \mathbf{p}_{\mathcal{P}_1}, \mathbf{p}_{\mathcal{P}_2}, \dots | \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \dots \rangle_D, \quad (9.7.1)$$

где сумма проводится по всем  $N!$  перестановкам  $N$  тождественных частиц в данном состоянии, а  $C_{\mathcal{P}}$  — набор комплексных констант. Эти амплитуды должны удовлетворять правилу композиции, имеющему место в случае тождественных частиц:

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \dots | \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \dots \rangle = \frac{1}{N!} \int d^3 q_1 d^3 q_2 \dots & \langle \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \dots | \mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \dots \rangle \times \\ & \times \langle \mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \dots | \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \dots \rangle. \end{aligned} \quad (9.7.2)$$

С использованием равенства (9.7.1) это правило превращается в требование

$$\begin{aligned} \sum_{\mathcal{P}} C_{\mathcal{P}} \langle \mathbf{p}_{\mathcal{P}_1}, \mathbf{p}_{\mathcal{P}_2}, \dots | \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \dots \rangle_D = \frac{1}{N!} \sum_{\mathcal{P}', \mathcal{P}''} C_{\mathcal{P}'} C_{\mathcal{P}''} \int d^3 q_1 d^3 q_2 \dots \\ \dots \langle \mathbf{p}_{\mathcal{P}'_1}, \mathbf{p}_{\mathcal{P}'_2}, \dots | \mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \dots \rangle_D \langle \mathbf{q}_{\mathcal{P}''_1}, \mathbf{q}_{\mathcal{P}''_2}, \dots | \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \dots \rangle_D. \end{aligned}$$

Применяя перестановку  $\mathcal{P}''$  к начальному и конечному состояниям в первой амплитуде справа имеем

$$\begin{aligned} \sum_{\mathcal{P}} C_{\mathcal{P}} \langle \mathbf{p}_{\mathcal{P}_1}, \mathbf{p}_{\mathcal{P}_2}, \dots | \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \dots \rangle_D = \frac{1}{N!} \sum_{\mathcal{P}', \mathcal{P}''} C_{\mathcal{P}'} C_{\mathcal{P}''} \int d^3 q_1 d^3 q_2 \dots \\ \dots \langle \mathbf{p}_{\mathcal{P}' \mathcal{P}'_1}, \mathbf{p}_{\mathcal{P}'' \mathcal{P}'_2}, \dots | \mathbf{q}_{\mathcal{P}''_1}, \mathbf{q}_{\mathcal{P}''_2}, \dots \rangle_D \langle \mathbf{q}_{\mathcal{P}''_1}, \mathbf{q}_{\mathcal{P}''_2}, \dots | \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \dots \rangle_D. \end{aligned}$$

<sup>3)</sup> Формально это выражается в том, что первая группа гомотопий конфигурационного пространства в  $d \geq 3$  — это группа перестановок [12]. Под “конфигурационным пространством” для  $N$  различных частиц подразумевается пространство  $N d$ -векторов, исключая  $d$ -векторы, совпадающие друг с другом (или находящиеся на произвольно малом расстоянии). При этом конфигурации, отличающиеся только перестановкой векторов, отождествляются.

Но амплитуды  $\langle \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \dots | \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \dots \rangle_D$  удовлетворяют правилу композиции для различных частиц:

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \dots | \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \dots \rangle_D = & \int d^3 q_1 d^3 q_2 \dots \langle \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \dots | \mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \dots \rangle_D \times \\ & \times \langle \mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \dots | \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \dots \rangle_D. \end{aligned} \quad (9.7.3)$$

Таким образом, правило композиции для физических амплитуд может быть записано как

$$\begin{aligned} \sum_{\mathcal{P}} C_{\mathcal{P}} \langle \mathbf{p}_{\mathcal{P}_1}, \mathbf{p}_{\mathcal{P}_2}, \dots | \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \dots \rangle_D = & \frac{1}{N!} \sum_{\mathcal{P}', \mathcal{P}''} C_{\mathcal{P}'} C_{\mathcal{P}''} \times \\ & \times \langle \mathbf{p}_{\mathcal{P}'' \mathcal{P}'_1}, \mathbf{p}_{\mathcal{P}'' \mathcal{P}'_2}, \dots | \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \dots \rangle_D, \end{aligned}$$

что выполняется в том и только в том случае, если

$$C_{\mathcal{P}' \mathcal{P}''} = C_{\mathcal{P}'} C_{\mathcal{P}''}. \quad (9.7.4)$$

Таким образом, коэффициенты  $C_{\mathcal{P}}$  являются одномерным представлением группы перестановок. Но у группы перестановок только два таких представления: одно — тождественное, где  $C_{\mathcal{P}} = +1$  для всех перестановок, а другое — переменное представление, где  $C_{\mathcal{P}} = +1$  или  $C_{\mathcal{P}} = -1$  согласно тому, четная перестановка  $\mathcal{P}$  или нечетная. Эти две возможности соответствуют статистикам Бозе и Ферми соответственно<sup>4)</sup>.

Красота этой аргументации в том, что она ясно показывает, в чем заключается выделенность случая двух пространственных измерений. В этом случае гораздо больше разнообразие топологически различных путей.<sup>5)</sup> Например, путь, в котором одна частица обходит вокруг другой частицы определенное число раз не может быть деформирован в путь, в котором она этого не делает. Вследствие этого в пространстве двух измерений могут существовать *анионы* [15], частицы с более общими перестановочными свойствами, чем просто Ферми или Бозе статистики [8a].

<sup>4)</sup> В литературе было много дискуссий на тему возможности существования других статистик, кроме статистик Бозе и Ферми, часто их называли параграфстистиками. Было показано [13], что теории с параграфстистикой в пространстве размерности  $d \geq 3$  эквивалентны теориям, в которых частицы являются обычными бозонами или фермионами, но несущими дополнительное квантовое число, в результате чего волновые функции могут обладать нетривиальными свойствами относительно перестановок импульсов и спинов.

<sup>5)</sup> Объяснение этого факта заключается в том утверждении, что первая гомотопическая группа конфигурационного пространства в двух измерениях не является группой перестановок, а есть более широкая группа, известная как *группа кос* [14].

## Приложение. Кратные гауссовые интегралы

Мы хотим вычислить кратный интеграл по конечному числу действительных переменных  $\xi_r$  от экспоненты общей квадратичной функции, зависящей от  $\xi$ :

$$\mathcal{J} \equiv \int_{-\infty}^{\infty} \prod_r d\xi_r \exp\{-\mathcal{Q}(\xi)\}, \quad (9.A.1)$$

$$\mathcal{Q}(\xi) = \frac{1}{2} \sum_{rs} K_{rs} \xi_r \xi_s + \sum_r L_r \xi_r + M, \quad (9.A.2)$$

где  $K_{rs}$ ,  $L_r$  и  $M$  — произвольные постоянные, кроме того, матрица  $K$  должна быть симметричной и несингулярной. Для начала рассмотрим случай, когда  $K_{rs}$ ,  $L_r$  и  $M$  действительны, а  $K_{rs}$ , кроме того, еще и положительно. Результат для общего случая может быть получен аналитическим продолжением.

Любая действительная симметричная матрица может быть диагонализована ортогональной матрицей. Таким образом, существует матрица  $\mathcal{J}$ , транспонированная которой есть матрица  $\mathcal{J}^T = \mathcal{J}^{-1}$ , такая что

$$(\mathcal{J}^T K \mathcal{J})_{rs} = \delta_{rs} \kappa_r. \quad (9.A.3)$$

Поскольку  $K$  предполагается положительной и несингулярной, ее собственные значения  $\kappa_r$  — положительны. Мы можем использовать матрицу  $\mathcal{J}$  для замены переменных:

$$\xi_r = \sum_s \mathcal{J}_{rs} \xi'_s. \quad (9.A.4)$$

Якобиан  $|Det \mathcal{J}|$  этого преобразования равен единице, так что кратный интеграл (9.A.1) представляется теперь в виде произведения однократных интегралов:

$$\begin{aligned} \mathcal{J} &= e^{-M} \prod_r \int_{-\infty}^{\infty} d\xi'_r \exp\left\{-\frac{\kappa_r}{2} \xi'^2 - (\mathcal{J}^T L)_r \xi'_r\right\} = \\ &= e^{-M} \prod_r \sqrt{\frac{2\pi}{\kappa_r}} \exp\left\{\frac{1}{2\kappa_r} (\mathcal{J}^T L)_r^2\right\}. \end{aligned} \quad (9.A.5)$$

Но детерминант и обратная матрица для матрицы (9.A.3) равны

$$Det K = \prod_r \kappa_r, \quad K_{rs}^{-1} = \sum_l \mathcal{J}_{rl} \mathcal{J}_{sl} \kappa_l^{-1}.$$

Таким образом, равенство (9.A.5) может быть записано в виде

$$\mathcal{J} = \left(Det\left(\frac{K}{2\pi}\right)\right)^{-1/2} \exp\left\{\frac{1}{2} \sum_{rs} L_r L_s K_{rs}^{-1} - M\right\}. \quad (9.A.6)$$

Равенство (9.А.1) определяет функцию  $K_{rs}, L_r$  и  $M$ , аналитическую по  $K_{rs}$  в конечной области вокруг поверхности, на которой  $K_{rs}$  действительно и положительно, и где сходится интеграл. Кроме того, для таких  $K_{rs}$  эта функция является аналитической по всем  $L_r$  и  $M$ . Поскольку (9.А.6) равно (9.А.1) для действительных  $K_{rs}, L_r$  и  $M$  и положительного  $K_{rs}$ , равенство (9.А.6) определяет аналитическое продолжение выражения (9.А.1) на всю комплексную плоскость с разрезом, который необходим из-за квадратного корня. Знак этого квадратного корня фиксируется аналитическим продолжением. В теории поля  $K_{rs}$  как раз мнимое, есть лишь небольшая действительная часть, возникающая благодаря “ $i\epsilon$ -членам”.

Удобно выразить равенство (9.А.6) через стационарную точку функции (9.А.2)

$$\bar{\xi}_r = - \sum_s K_{rs}^{-1} L_s, \quad (9.А.7)$$

$$\partial \mathcal{Q}(\xi) / \partial \xi_r = 0 \quad \text{при} \quad \xi = \bar{\xi}, \quad (9.А.8)$$

следующим образом:

$$\mathcal{J} = \left( \text{Det} \left( \frac{K}{2\pi} \right) \right)^{-1/2} \exp \left\{ -\mathcal{Q}(\bar{\xi}) \right\}. \quad (9.А.9)$$

Этот результат нужно запомнить: *гауссовые интегралы могут быть вычислены с точностью до детерминантного множителя посредством замены переменной интегрирования ее значением в точке, в которой аргумент экспоненты имеет свое стационарное значение.*

Далее мы хотим использовать этот результат для вычисления интегралов

$$I_{r_1 \dots r_{2N}} \equiv \int \left( \prod_r d\xi_r \right) \xi_{r_1} \xi_{r_2} \dots \xi_{r_{2N}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \sum_{rs} K_{rs} \xi_r \xi_s \right\}. \quad (9.А.10)$$

(Интегралы такого типа с нечетным числом  $\xi$ -множителей в подынтегральном выражении очевидным образом обращаются в нуль.) Из разложения в ряд по степеням для  $\exp \left( -\sum_r L_r \xi_r \right)$  в формуле (9.А.1) мы имеем следующее правило суммирования:

$$\begin{aligned} & \sum_{N=0}^{\infty} \sum_{r_1 r_2 \dots r_{2N}} \frac{1}{(2N)!} I_{r_1 r_2 \dots r_{2N}} L_{r_1} L_{r_2} \dots L_{r_{2N}} = \\ & = \int \left( \prod_r d\xi_r \right) \exp \left\{ -\sum_r L_r \xi_r - \frac{1}{2} \sum_{rs} K_{rs} \xi_r \xi_s \right\} = \\ & = \left[ \text{Det} \left( \frac{K}{2\pi} \right) \right]^{-1/2} \exp \left\{ \frac{1}{2} \sum_{rs} L_r L_s K_{rs}^{-1} \right\} = \\ & = \left[ \text{Det} \left( \frac{K}{2\pi} \right) \right]^{-1/2} \sum_{N=0}^{\infty} \frac{1}{N! 2^N} \left( \sum_{rs} L_r L_s K_{rs}^{-1} \right)^N. \quad (9.А.11) \end{aligned}$$

Сравнивая коэффициенты при  $L_{r_1}L_{r_2}\dots L_{r_{2N}}$  с обеих сторон, видим, что  $I_{r_1 r_2 \dots r_{2N}}$  должно быть пропорционально сумме произведений элементов  $K^{-1}$ , симметрия которых приводит к следующей форме:

$$I_{r_1 r_2 \dots r_{2N}} = c_N \sum_{\substack{\text{спаривания пары} \\ r_1 \dots r_{2N}}} \prod_{\text{спаренные индексы.}} (K^{-1}) \quad (9.A.12)$$

Здесь суммирование проводится по всевозможным спариваниям индексов  $r_1 \dots r_{2N}$ . Причем два спаривания считаются одинаковыми, если они отличаются только порядком пар или порядком следования индексов в паре. Для того чтобы вычислить постоянный множитель  $c_N$ , заметим, что число  $\nu_N$  слагаемых в сумме по спариваниям в формуле (9.A.12) равно числу  $(2N)!$  перестановок индексов, деленному на число  $N!$  всевозможных перестановок пар индексов и на число  $2^N$  перестановок внутри пар индексов:

$$\nu_N = \frac{(2N)!}{N! 2^N}. \quad (9.A.13)$$

Таким образом, равенство (9.A.12) переписывается в виде:

$$\sum_{r_1 r_2 \dots r_{2N}} L_{r_1} L_{r_2} \dots L_{r_{2N}} I_{r_1 r_2 \dots r_{2N}} = \nu_N c_N \left( \sum_{rs} L_r L_s K_{rs}^{-1} \right)^N. \quad (9.A.14)$$

Сравнение этого выражения с равенством (9.A.11) показывает, что множители  $(2N)!$  и  $N! 2^N$  сокращаются числом  $\nu_N$ . Тем самым остается

$$c_N = \left[ \text{Det} \left( \frac{K}{2\pi} \right) \right]^{-1/2}. \quad (9.A.15)$$

Например,

$$I_{r_1 r_2} = I_0(K^{-1})_{r_1 r_2}, \quad (9.A.16)$$

$$I_{r_1 r_2 r_3 r_4} = I_0[(K^{-1})_{r_1 r_2}(K^{-1})_{r_3 r_4} + (K^{-1})_{r_1 r_3}(K^{-1})_{r_2 r_4} + (K^{-1})_{r_1 r_4}(K^{-1})_{r_2 r_3}], \quad (9.A.17)$$

и т.д. Здесь  $I_0$  — интеграл без индексов:

$$I_0 \equiv \int \left( \prod_r d\xi_r \right) \exp \left\{ -\frac{1}{2} \sum_{rs} K_{rs} \xi_r \xi_s \right\} = \left[ \text{Det} \left( \frac{K}{2\pi} \right) \right]^{-1/2}. \quad (9.A.18)$$

## Задачи

1. Рассмотрим нерелятивистскую частицу массы  $m$ , движущуюся вдоль оси  $x$  в потенциале  $V(x) = m\omega^2 x^2/2$ . Используя методы интегрирования по путям, найдите вероятность того, что частица, которая в момент времени  $t_1$  находилась в точке  $x_1$ , окажется в интервале между  $x$  и  $x + dx$  в момент времени  $t$ .

**2.** Найдите волновую функцию в полевом пространстве для состояния, включающего единственную бессpinовую частицу с массой  $m \neq 0$ . Используйте полученный результат для вывода правил Фейнмана для испускания или поглощения такой частицы.

**3.** Найдите волновую функцию в полевом пространстве для вакуума в теории нейтрального векторного поля массы  $m \neq 0$ . Используйте полученный результат для вывода вида  $i\epsilon$ -членов в пропагаторе этого поля.

**4.** Лагранжева плотность свободного поля Рариты–Швингера  $\psi^\mu$  со спином 3/2 есть

$$\mathcal{L} = -\bar{\psi}^\mu (\gamma^\nu \partial_\nu + m) \psi_\mu - \frac{1}{3} \bar{\psi}^\mu (\gamma_\mu \partial_\nu + \gamma_\nu \partial_\mu) \psi_\mu + \\ + \frac{1}{3} \bar{\psi}^\mu \gamma_\mu (\gamma^\sigma \partial_\sigma - m) \gamma^\nu \psi_\nu.$$

Используя метод интегрирования по путям, вычислите пропагатор для этого поля.

## Литература

1. Feynman R.P. The Principle of Least Action in Quantum Mechanics. Princeton University, 1942; University Microfilms Publications No. 2948, Ann Arbor. См. также. Фейнман Р., Хибс А. Квантовая механика и интегралы по траекториям.— М.: Мир, 1968. Общее изложение см. в книге Глилмм Дж., Джасаффе А. Математические методы квантовой физики — подход с использованием функциональных интегралов.— М.: Мир, 1984.
2. Dirac P.A.M. // Phys. Zeits. Sowjetunion. **3**, 62 (1933). [Рус. пер.: Дирак П.А.М. К созданию квантовой теории поля: Основные статьи 1925–1958 гг.— М.: Наука, 1990.]
3. Feynman R.P. // Rev. Mod. Phys. **20**, 367 (1948); Phys. Rev., **74**, 939, 1430 (1948); **76**, 749, 769 (1949); **80**, 440 (1950).
4. Faddeev L.D. and Popov V.N. // Phys. Lett. **B25**, 29 (1967). См. также Feynman R.P. // Acta Phys. Pol. **24**, 697 (1963); Mandelstam S. // Phys. Rev. **175**, 1580, 1604 (1968).
5. DeWitt B. // Phys. Rev. Lett. **12**, 742 (1964).
6. 't Hooft G. // Nucl. Phys. **B35**, 167 (1971).
7. Gerstein I.S., Jackiw R., Lee B.W., and Weinberg S. // Phys. Rev. **D3**, 2486 (1971).
8. Фаддеев Л.Д. Интеграл Фейнмана для сингулярных лагранжианов // Теор. матем. физика. 1969. Т. 1. С. 3.
- 8a. Schwinger J. // Proc. Nat. Acad. Sci. **44**, 956 (1958).

- 8b. *Osterwalder K. and Schrader R.* // Phys. Rev. Lett. **29**, 1423 (1972); Commun. Math. Phys. **31**, 83 (1973); Commun. Math. Phys. **42**, 281 (1975). Аксиомы Остервальдера–Шрадера требуют наличия гладкости, евклидовой ковариантности, “положительности” при отражениях, перестановочной симметрии и кластерной разложимости.
9. Эта часть изложения возникла в основном благодаря обсуждениям с Ж. Польчинским.
10. *Березин Ф.А.* Метод вторичного квантования.—М.: Наука, 1986.
11. *Laidlaw M.G.G. and De Witt C.M.* // Phys. Rev. D. **3**, 1375 (1970).
12. *Leinaas J.M. and Myrheim J.* // Nuovo Cimento. **37 B**, 1 (1977).
13. *Ohnuki Y. and Kamefuchi S.* // Phys. Rev. **170**, 1279 (1968); Ann. Phys. **51**, 337 (1969); *Drühl K., Haag R., and Roberts J.E.* // Commun. Math. Phys. **18**, 204 (1970).
14. Понятие группы кос ввел Э. Артин (E. Artin). См. *The Collected Papers of E. Artin*, ed. by S. Lang and J.E. Tate. Addison-Wesley, Reading, MA, 1965.
15. *Wilczek F.* // Phys. Rev. Lett. **49**, 957 (1982); *Fredenhagen K., Gaberdiel M.R., and Rüger S.M.* // Cambridge preprint DAMTP-94-90 (1994). См. также *Leinaas J.M. and Myrheim J.* Ref. 12.
- 16\*. *Славнов А.А., Фаддеев Л.Д.* Введение в квантовую теорию калибровочных полей.—М.: Наука, 1988.

---

\* Добавлено при переводе.

## Г л а в а 10

# НЕПЕРТУРБАТИВНЫЕ МЕТОДЫ

В этой главе мы начнем изучение высших вкладов в физические процессы, которые на языке теории возмущений соответствуют много-петлевым диаграммам. Пользуясь коммутационными соотношениями полей и результатами § 6.4, мы получим соотношения, справедливые в любом порядке теории возмущений, а иногда и выходящие за ее пределы. Напомним основную теорему § 6.4 : матричный элемент

$$(\Psi_{\beta}^-, T\{-iO_a(x), -iO_b(x)\dots\}\Psi_{\alpha}^+)$$

равен сумме всех диаграмм с входящими линиями, соответствующими состоянию  $\alpha$ , выходящими — состоянию  $\beta$ , и дополнительными вершинами, отвечающими операторам  $O_a(x)$ ,  $O_b(x)$  и т.д. В частности, если  $O_a(x)$ ,  $O_b(x)$  и т.д. — элементарные поля, то фурье-образ рассматриваемого матричного элемента равен сумме диаграмм с входящими и выходящими линиями на массовой оболочке и дополнительными линиями вне массовой оболочки (включая пропагаторы), отвечающими операторам  $O_a(x)$ ,  $O_b(x)$  и т.д. Исследовав некоторые непертурбативные эффекты, мы перейдем к вычислению радиационных поправок по теории возмущений.

### § 10.1. Симметрии

Принципы симметрии являются очень полезным инструментом при изучении как  $S$ -матрицы, где все внешние импульсы лежат на массовой оболочке, так и частей диаграмм Фейнмана, с некоторыми или всеми внешними линиями вне массовой оболочки.

Например, рассмотрим пространственно-временную трансляционную инвариантность. Следствием этой симметрии является существование эрмитова оператора  $P_{\mu}$ , обладающего тем свойством, что для любой локальной функции  $O(x)$  полевых операторов и их сопряженных справедливы коммутационные соотношения

$$[P_{\mu}, O(x)] = i \frac{\partial}{\partial x^{\mu}} O(x) \quad (10.1.1)$$

(см. уравнения (7.3.28) и (7.3.29)). Состояния  $\alpha$  и  $\beta$  обычно выбирают так, чтобы они были собственными для оператора 4-импульса:

$$P^{\mu} \Psi_{\alpha}^+ = p_{\alpha}^{\mu} \Psi_{\alpha}^+, \quad P^{\mu} \Psi_{\beta}^- = p_{\beta}^{\mu} \Psi_{\beta}^-. \quad (10.1.2)$$

Отсюда следует, что для любого множества локальных функций  $O_a(x)$ ,  $O_b(x)$  и т.д. полевых операторов и/или производных полевых операторов

$$\begin{aligned} (p_{\beta\mu} - p_{\alpha\mu})(\Psi_\beta^-, T\{O_a(x_1), O_b(x_2) \dots\} \Psi_\alpha^+) = \\ = (\Psi_\beta^-, [P_\mu, T\{O_a(x_1), O_b(x_2) \dots\}] \Psi_\alpha^+) = \\ = i \left( \frac{\partial}{\partial x_1^\mu} + \frac{\partial}{\partial x_2^\mu} + \dots \right) (\Psi_\beta^-, T\{O_a(x_1), O_b(x_2), \dots\} \Psi_\alpha^+). \end{aligned} \quad (10.1.3)$$

Следовательно, рассматриваемый матричный элемент можно записать в виде

$$(\Psi_\beta^- T, \{O_a(x_1), O_b(x_2), \dots\} \Psi_\alpha^+) = \exp(i(p_\alpha - p_\beta) \cdot x) F_{ab\dots}(x_1 - x_2, \dots), \quad (10.1.4)$$

где  $x$  – произвольно выбранная средняя пространственно-временная координата

$$x^\mu = c_1 x_1^\mu + c_2 x_2^\mu + \dots, \quad c_1 + c_2 + \dots = 1, \quad (10.1.5)$$

а  $F$  зависит только от разностей между различными  $x$ . (В частности, вакуумное среднее значение может зависеть только от разностей координат.) Рассмотрим преобразование Фурье уравнения (10.1.4). Принтегрировав отдельно по  $x^\mu$  и разностям координат, найдем

$$\begin{aligned} \int d^4 x_1 d^4 x_2 \dots (\Psi_\beta^- T, \{O_a(x_1), O_b(x_2), \dots\} \Psi_\alpha^+) \times \\ \times \exp(-ik_1 \cdot x_1 - ik_2 \cdot x_2 - \dots) \propto \delta^4(p_\alpha - p_\beta - k_1 - k_2 - \dots). \end{aligned} \quad (10.1.6)$$

Как мы видели в § 6.4, матричный элемент хронологически упорядоченного произведения соответствует сумме всех диаграмм со входящими линиями, отвечающими частицам в состоянии  $\alpha$ , выходящими – в состоянии  $\beta$ , и внешними линиями, которые заканчиваются в вершинах  $x_1$ ,  $x_2$  и т.д. Аналогично, фурье-преобразование (10.1.6) получается применением правил Фейнмана в импульсном пространстве к тем же диаграммам, с внешними линиями вне массовой оболочки, несущими 4-импульсы  $k_1$ ,  $k_2$  и т.д. Таким образом, уравнение (10.1.6) означает лишь, что 4-импульс сохраняется. Этот результат очевиден, если исходить из теории возмущений, так как 4-импульс сохраняется в каждой вершине.

Немного сложнее оказывается, что сумма всех диаграмм с данным набором входящих и внешних линий преобразуется под действием группы Лоренца так же, как и ее члены самого низкого порядка. Для этого надо лишь воспользоваться лоренцевскими законами преобразования “in” и “out” состояний и полей в представлении Гейзенберга.

Похожие рассуждения можно применить к любой симметрии, следствием которой является сохранение внутреннего квантового числа, например, электрического заряда. Как было показано в § 7.3, опе-

ратор  $O_a(x)$ , уничтожающий заряд  $q_a$  (или рождающий  $-q_a$ ), должен удовлетворять коммутационному соотношению

$$[Q, O_a(x)] = -q_a O_a(x)$$

как в гейзенберговском представлении, так и в представлении взаимодействия. Обозначим заряды свободно-частичных состояний  $\alpha$  и  $\beta$  через  $q_\alpha$  и  $q_\beta$  соответственно; такими же зарядами будут обладать соответствующие “in” и “out” состояния. Тогда

$$\begin{aligned} (q_\beta - q_\alpha)(\Psi_\beta^-, [Q, T\{O_a(x), O_b(y), \dots\}]\Psi_\alpha^+) &= \\ &= (\Psi_\beta^- T, [Q, \{O_a(x), O_b(y), \dots\}]\Psi_\alpha^+) = \\ &= -(q_a + q_b + \dots)(\Psi_\beta^-, T[Q, \{O_a(x), O_b(y), \dots\}]\Psi_\alpha^+). \end{aligned}$$

Таким образом, необходимым условием того, что амплитуда

$$(\Psi_\beta^-, T\{O_a(x), O_b(y), \dots\}\Psi_\alpha^+)$$

отлична от нуля, является сохранение заряда:

$$q_\beta = q_\alpha - q_a - q_b - \dots \quad (10.1.7)$$

Менее тривиальный пример — симметрия относительно зарядового сопряжения. Как мы видели в гл. 5, существует оператор  $C$ , который меняет местами электронные и позитронные операторы:

$$\begin{aligned} Ca(\mathbf{p}, \sigma, e^-)C^{-1} &= \xi^* a(\mathbf{p}, \sigma, e^+), \\ Ca(\mathbf{p}, \sigma, e^+)C^{-1} &= \xi^* a(\mathbf{p}, \sigma, e^-), \end{aligned}$$

где  $\xi$  — фазовый множитель. Тогда свободное электронное поле при зарядовом сопряжении преобразуется следующим образом

$$C\psi(x)C^{-1} = -\xi^* \beta C\psi(x)^*,$$

здесь  $\beta$  — матрица  $4 \times 4$ , которая в принятом нами представлении матриц Дирака имеет вид

$$\beta C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Применение этого оператора к электрическому току в спинорной электродинамике дает

$$C(\bar{\psi} \gamma^\mu \psi)C^{-1} = -\bar{\psi} C \gamma^{\mu T} C \psi = -\bar{\psi} \gamma^\mu \psi.$$

Следовательно, для того чтобы  $C$  был оператором симметрии в спинорной электродинамике, он должен антикоммутировать со свободным фотонным полем:

$$C(a^\mu)C^{-1} = -a^\mu.$$

В таких теориях, как электродинамика, в которых  $C$  коммутирует как с оператором взаимодействия, так и с  $H_0$ , он также коммутирует с преобразованием  $\Omega(t)$  перехода от гейзенберговского представления к представлению взаимодействия и, таким образом, антикоммутирует со взаимодействующими полями:

$$C(\bar{\Psi} \gamma^\mu \Psi) C^{-1} = -\bar{\Psi} \gamma^\mu \Psi, \quad (10.1.8)$$

и электромагнитным полем в представлении Гейзенберга:

$$C(A^\mu) C^{-1} = -A^\mu. \quad (10.1.9)$$

Отсюда следует, что вакуумное среднее хронологически упорядоченного произведения любого нечетного числа электромагнитных токов и/или полей равно 0. Поэтому сумма всех диаграмм Фейнмана с нечетным числом внешних фотонных линий (вне зависимости от того, находятся ли они на или вне массовой оболочки) зануляется.

Этот результат известен как *теорема Фарри* [1]. Его можно доказать пертурбативно, заметив, что числа  $I$  и  $E$  внутренних и внешних фотонных линий диаграммы, имеющей  $l$  электронных петель, к каждой из которых прикреплены  $n_l$  фотонных линий, связаны между собой уравнением, аналогичным (6.3.11):

$$2I + E = \sum_l n_l.$$

То есть, если  $E$  является нечетным, то по крайней мере к одной из петель должно крепиться нечетное число фотонных линий. Тогда две диаграммы, в которых электронные стрелки в этой петле противоположно направлены, взаимно уничтожаются. Таким образом, теорема Фарри представляет собой более содержательное следствие принципа симметрии, чем трансляционная инвариантность или симметрия относительно лоренцевских преобразований; она справедлива не для отдельно взятых диаграмм, а лишь для сумм определенных диаграмм. Отметим важное следствие теоремы Фарри: вклад любого нечетного порядка в рассеяние фотона внешним электромагнитным полем равен нулю. Рис. 10.1 иллюстрирует этот факт.

## § 10.2. Полюсная структура

В данном параграфе мы изучим полюсную структуру фейнмановских амплитуд как функций импульса, который несет внешние линии. Результаты, которые мы получим, имеют ряд важных приложений. Например, часто  $S$ -матрицу физического процесса можно хорошо аппроксимировать, рассмотрев вклад лишь одного полюса. Понимание полюсной структуры также поможет нам при вычислении радиационных поправок к пропагаторам частиц.

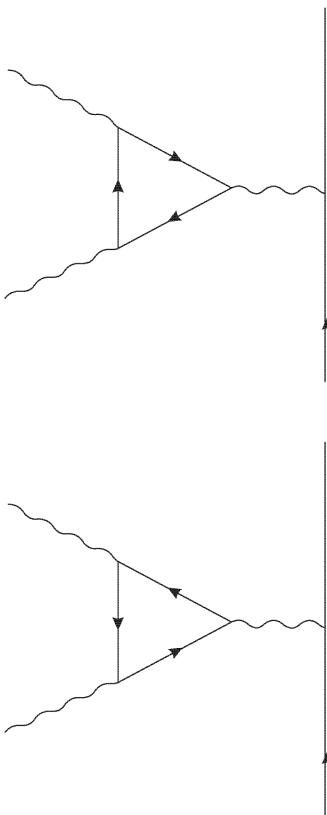


Рис. 10.1. Диаграммы самого низкого порядка для рассеяния фотона внешним электромагнитным полем. Здесь прямые линии обозначают виртуальные электроны; волнистые — виртуальные и реальные фотоны; двойная линия обозначает тяжелую частицу (например, атомное ядро), которая служит источником внешнего поля. Вклады этих двух диаграмм взаимно уничтожаются, в соответствии с симметрией относительно зарядового сопряжения

Рассмотрим следующую амплитуду в импульсном представлении:

$$\int d^4x_1 \dots d^4x_n e^{-iq_n \cdot x_n} \langle T\{A_1(x_1) \dots A_n(x_n)\}\rangle_0 \equiv G(q_1 \dots q_n). \quad (10.2.1)$$

Здесь  $A$  — гейзенберговские операторы, произвольным образом преобразующиеся при лоренцевских бустах (спиноры, векторы и т.д.), а через  $\langle \dots \rangle_0$  обозначено усреднение по истинному вакууму:

$$\Psi_0^+ = \Psi_0^- = \Psi_0.$$

Как следует из § 6.4, если  $A_1, \dots, A_n$  — поля, фигурирующие в лангранжиане, то амплитуда (10.2.1) равна сумме вкладов всех фейн-

мановских диаграмм с внешними линиями, которые соответствуют полям  $A_1, \dots, A_n$  и несут 4-импульсы  $q_i$ , лежащие вне массовой оболочки. Однако мы не будем ограничиваться этим случаем; в нашем рассмотрении  $A_i$  могут быть любыми локальными функциями полей и их производных. Нас интересуют полюсы  $G$  при определенных значениях инвариантного квадрата суммарного 4-импульса, который переносят несколько различных комбинаций внешних линий. Для определенности рассмотрим  $G$  как функцию  $q^2$ , где

$$q \equiv q_1 + \dots + q_r = -q_{r+1} - \dots - q_n \quad (10.2.2)$$

с  $1 \leq r \leq n-1$ . Покажем, что  $G$  имеет полюс при  $q^2 = -m^2$ , где  $m$  — масса любого одночастичного состояния, которое имеет ненулевой матричный элемент между состояниями  $A_1^\dagger A_2^\dagger \dots A_r^\dagger \Psi_0$  и  $A_{r+1} A_r \dots A_n \Psi_0$ . Вычет в этом полюсе равен

$$\begin{aligned} G \rightarrow & \frac{-2i\sqrt{\mathbf{q}^2 + m^2}}{q^2 + m^2 - i\epsilon} (2\pi)^7 \delta^4(q_1 + \dots + q_n) \times \\ & \times \sum_{\sigma} M_{0|\mathbf{q},\sigma}(q_2 \dots q_r) M_{\mathbf{q},\sigma|0}(q_{r+2} \dots q_n), \end{aligned} \quad (10.2.3)$$

где  $M$  определены следующим образом<sup>1)</sup>:

$$\begin{aligned} \int d^4x_1 \dots d^4x_r e^{-iq_1 \cdot x_1} \dots e^{-iq_r \cdot x_r} (\Psi_0, T\{A_1(x_1) \dots A_r(x_r)\} \Psi_{\mathbf{p},\sigma}) = \\ = (2\pi)^4 \delta^4(q_1 + \dots + q_r - p) M_{0|\mathbf{p},\sigma}(q_2 \dots q_r), \end{aligned} \quad (10.2.4)$$

$$\begin{aligned} \int d^4x_{r+1} \dots d^4x_n e^{-iq_{r+1} \cdot x_{r+1}} \dots e^{-iq_n \cdot x_n} \times \\ \times (\Psi_{\mathbf{p},\sigma}, T\{A_{r+1}(x_{r+1}) \dots A_n(x_n)\} \Psi_0) = \\ = (2\pi)^4 \delta^4(q_{r+1} + \dots + q_n + p) M_{\mathbf{p},\sigma|0}(q_{r+2} \dots q_n) \end{aligned} \quad (10.2.5)$$

Отметим, что  $p_0 = \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}$ ; суммирование ведется по всем спиновым (и другим внутренним) степеням свободы частицы массой  $m$ .

Прежде чем переходить к формальному доказательству, обсудим, что означает выражение (10.2.3) на языке фейнмановских диаграмм. Для этого полезно переписать его в более сложной на первый взгляд форме:

$$\begin{aligned} G(q_1 \dots q_n) \rightarrow & \sum_{\sigma} \int d^4k \times \\ & \times [(2\pi)^4 \delta^4(q_1 + \dots + q_r - k) (2\pi)^{3/2} (2\sqrt{\mathbf{k}^2 + m^2})^{1/2} M_{0|\mathbf{k},\sigma}(q_2 \dots q_r)] \times \end{aligned}$$

<sup>1)</sup> Вспомним, что при отсутствии зависящих от времени внешних полей входящие и выходящие одночастичные состояния эквивалентны, т.е.  $\Psi_{\mathbf{p},\sigma}^+ = \Psi_{\mathbf{p},\sigma}^- = \Psi_{\mathbf{p},\sigma}$ .

$$\times \left[ \frac{-i}{(2\pi)^4} \frac{1}{k^2 + m^2 - i\epsilon} \right] [(2\pi)^4 \delta^4(k + q_{r+1} + \dots + q_n) (2\pi)^{3/2} \times \\ \times (2\sqrt{k^2 + m^2})^{1/2} M_{\mathbf{k},\sigma|0}(q_{r+2} \dots q_n)]. \quad (10.2.6)$$

Это выражение в точности отвечает фейнмановской диаграмме с одной внутренней линией, соответствующей частице с массой  $m$  и соединяющей первые  $r$  и последние  $n - r$  внешних линий<sup>2</sup>).

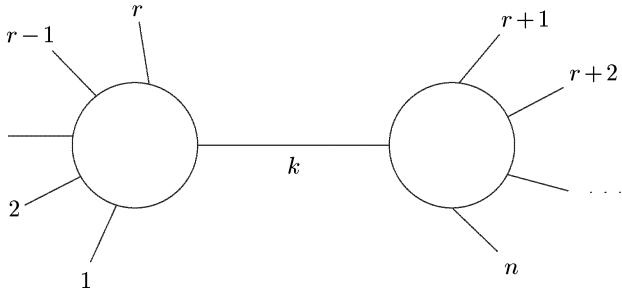


Рис. 10.2. Фейнмановская диаграмма с полюсной структурой (10.2.6). Здесь внутренняя линия с импульсом  $k$  соответствует элементарной частице, поле которой присутствует в лагранжиане

Однако совсем необязательно, чтобы частица массы  $m$  соответствовала полю, которое содержится в лагранжиане теории. Уравнения (10.2.3) и (10.2.6) применимы и в том случае, когда рассматриваемая частица представляет собой связанное состояние так называемых элементарных частиц, поля которых фигурируют в лагранжиане. Тогда полюс возникает не от одной диаграммы, изображенной на рис. 10.2, а от суммы бесконечного числа диаграмм, пример одной из которых показан на рис. 10.3. Заметим, что это первый результат данной главы, который невозможно получить порядком в теории возмущений.

Перейдем к доказательству. Рассмотрим амплитуду (10.2.1). Существует  $\frac{n!}{r!(n-r)!}$  способов упорядочения времен  $x_1^0, \dots, x_n^0$  таких, что любое из первых  $r$   $x_i^0$  больше, чем любое из оставшихся  $n-r$

<sup>2)</sup> См. рис. 10.2. Множители

$$(2\pi)^{3/2} [2\sqrt{k^2 + m^2}]^{1/2}$$

сокращаются с кинематическими факторами внешних линий, которые соответствуют частице массой  $m$  в  $M_{0|\mathbf{k},\sigma}$  и  $M_{\mathbf{k},\sigma|0}$ . Сумма по всем  $\sigma$  произведений коэффициентных функций этих двух матричных элементов равна числителю пропагатора, отвечающего внутренней линии на рис. 10.2. Например, для случая, когда промежуточная частица — электрон, это следует из известных соотношений полноты для дираковских спиноров.

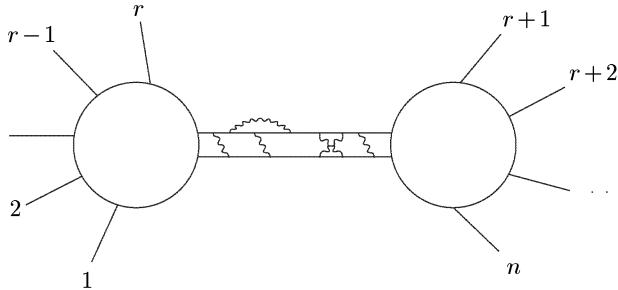


Рис. 10.3. Сумма диаграмм, подобных изображенной на рисунке, задает полюсную структуру (10.2.6). Здесь полюс появляется из-за существования композитной частицы — связанного состояния двух элементарных частиц. Элементарные частицы представлены прямыми линиями и взаимодействуют, обмениваясь частицами, которые обозначены волнистыми линиями

времен. Выделив вклад, соответствующий интегрированию по такой области, запишем выражение (10.2.1) в виде

$$\begin{aligned}
 G(q_1 \dots q_n) = & \int d^4 x_1 \dots d^4 x_n e^{-iq_1 \cdot x_1} \dots e^{-iq_n \cdot x_n} \times \\
 & \times \theta(\min[x_1^0 \dots x_r^0] - \max[x_{r+1}^0 \dots x_n^0]) \times \\
 & \times (\Psi_0, T\{A_1(x_1) \dots A_r(x_r)\} T\{A_{r+1}(x_{r+1}) \dots A_n(x_n)\} \Psi_0) + \text{OT}, \tag{10.2.7}
 \end{aligned}$$

где ОТ обозначает другие члены, возникающие при хронологическом упорядочении. Запишем матричный элемент (10.2.7), вставив полный набор промежуточных состояний между двумя хронологически упорядоченными произведениями. Среди промежуточных состояний содержатся и одночастичные состояния  $\Psi_{p,\sigma}$  частицы масой  $m$ .

Далее, отделяя вклад одночастичных состояний, получим

$$\begin{aligned}
 G(q_1 \dots q_n) = & \int d^4 x_1 \dots d^4 x_n e^{-iq_1 \cdot x_1} \dots e^{-iq_n \cdot x_n} \times \\
 & \times \theta(\min[x_1^0 \dots x_r^0] - \max[x_{r+1}^0 \dots x_n^0]) \times \\
 & \times \sum_{\sigma} \int d^3 p (\Psi_0, T\{A_1(x_1) \dots A_r(x_r)\} \Psi_{p,\sigma}) \times \\
 & \times (\Psi_{p,\sigma}, T\{A_{r+1}(x_{r+1}) \dots A_n(x_n)\} \Psi_0) + \text{OT}, \tag{10.2.8}
 \end{aligned}$$

где теперь ОТ обозначает остальные члены, появляющиеся как от других хронологических упорядочений, так и от многочастичных промежуточных состояний. Сделаем замену переменных интегрирования

следующим образом

$$\begin{aligned} x_i &= x_1 + y_i, \quad i = 2, 3, \dots, r, \\ x_i &= x_{r+1} + y_i, \quad i = r+2, \dots, n. \end{aligned}$$

Воспользовавшись результатом предыдущего параграфа, запишем

$$\begin{aligned} (\Psi_0, T\{A_1(x_1) \dots A_r(x_r)\} \Psi_{\mathbf{p}, \sigma}) &= \\ &= e^{ip \cdot x_1} (\Psi_0, T\{A_1(0) A_2(y_2) \dots A_r(y_r)\} \Psi_{\mathbf{p}, \sigma}), \quad (10.2.9) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\Psi_{\mathbf{p}, \sigma}, T\{A_{r+1}(x_{r+1}) \dots A_n(x_n)\} \Psi_0) &= \\ &= e^{-ip \cdot x_1} (\Psi_{\mathbf{p}, \sigma}, T\{A_{r+1}(0) \dots A_n(y_n)\} \Psi_0). \quad (10.2.10) \end{aligned}$$

Тогда аргумент  $\theta$ -функции примет вид

$$\begin{aligned} \min[x_1^0 \dots x_r^0] - \max[x_{r+1}^0 \dots x_n^0] &= \\ &= x_1^0 - x_{r+1}^0 + \min[0y_2^0 \dots y_r^0] - \max[0y_{r+1}^0 \dots y_n^0]. \end{aligned}$$

Далее, подставим в выражение (10.2.8) фурье-представление (6.2.15) ступенчатой функции. Напомним его вид

$$\theta(\tau) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega e^{-i\omega\tau}}{\omega + i\epsilon}.$$

Интегрирования по  $x_1$  и  $x_{r+1}$  дадут дельта-функции:

$$\begin{aligned} G(q_1 \dots q_n) &= \int d^4 y_2 \dots d^4 y_r d^4 y_{r+2} \dots d^4 y_n \times \\ &\quad \times e^{-iq_2 \cdot y_2} \dots e^{-iq_r \cdot y_r} e^{-iq_{r+2} \cdot y_{r+2}} \dots e^{-iq_n \cdot y_n} \times \\ &\quad \times -\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{\omega + i\epsilon} \exp(-i\omega[\min[0y_2^0 \dots y_r^0] - \max[0y_{r+1}^0 \dots y_n^0]]) \times \\ &\quad \times \sum_{\sigma} \int d^3 p (\Psi_0, T\{A_1(0) \dots A_r(y_r)\} \Psi_{\mathbf{p}, \sigma}) \times \\ &\quad \times (\Psi_{\mathbf{p}, \sigma}, T\{A_{r+1}(0) \dots A_n(y_n)\} \Psi_0) \times \\ &\quad \times (2\pi)^4 \delta^3(\mathbf{p} - \mathbf{q}_1 - \dots - \mathbf{q}_r) \delta(\sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2} + \omega - q_1^0 - \dots - q_r^0) \times \\ &\quad \times (2\pi)^4 \delta^3(\mathbf{q}_{r+1} + \dots + \mathbf{q}_n + \mathbf{p}) \delta(q_{r+1}^0 + \dots + q_n^0 + \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2} + \omega) + \\ &\quad + \text{ОТ.} \quad (10.2.11) \end{aligned}$$

Нас интересует лишь полюс, возникающий при обнулении знаменателя  $\omega + i\epsilon$ , т.е. можно с чистой совестью положить множитель  $\exp(-i\omega[\min - \max])$  равным единице. Тогда, выполняя тривиальные

интегрирования по  $\mathbf{p}$  и  $\omega$ , получим полюс:

$$\begin{aligned} G(q_1 \dots q_n) &\rightarrow i(2\pi)^7 \delta^4(q_1 + \dots + q_n) [q^0 - \sqrt{\mathbf{q}^2 + m^2} + i\epsilon]^{-1} \times \\ &\quad \times \sum_{\sigma} M_{0|\mathbf{q},\sigma}(q_2 \dots q_n) M_{\mathbf{q},\sigma|0}(q_{r+2} \dots q_n) + \dots, \end{aligned} \quad (10.2.12)$$

где

$$\begin{aligned} q &\equiv q_1 + \dots + q_r = -q_{r+1} - \dots - q_n, \\ M_{0|\mathbf{q},\sigma}(q_2 \dots q_n) &\equiv \int d^4 y_2 \dots d^4 y_r e^{-iq_2 \cdot y_2} \dots e^{-iq_r \cdot y_r} \times \\ &\quad \times (\Psi_0, T\{A_1(0)A_1(y_2) \dots A_r(y_r)\}\Psi_{\mathbf{q},\sigma}), \end{aligned} \quad (10.2.13)$$

$$\begin{aligned} M_{\mathbf{q},\sigma|0}(q_{r+2} \dots q_n) &\equiv \int d^4 y_{r+2} \dots d^4 y_n e^{-iq_{r+2} \cdot y_{r+2}} \dots e^{-iq_n \cdot y_n} \times \\ &\quad \times (\Psi_{\mathbf{q},\sigma}, T\{A_{r+1}(0)A_{r+2}(y_{r+2}) \dots A_n(y_n)\}\Psi_0), \end{aligned} \quad (10.2.14)$$

а последнее троеточие в (10.2.12) обозначает члены, не имеющие полюса в точке  $q^2 = -m^2$ . (Обсудим кратко их влияние на аналитическую структуру амплитуды (10.2.12). Члены, соответствующие одночастичным состояниям с массой, отличной от  $m$ , имеют полюсы по  $q^2$  в точках, не совпадающих с  $-m^2$ ; соответствующие многочастичным состояниям дают точки ветвления рассматриваемой амплитуды как функции  $q^2$ ; и наконец, члены, происходящие от остальных хронологических упорядочений, будут давать полюсы и разрезы в других переменных.) Используя уравнения (10.2.9) и (10.2.10), легко показать, что  $M$ , определенные выражениями (10.2.13) и (10.2.14), совпадают с матричными элементами, введенными ранее по формулам (10.2.4) и (10.2.5). При  $q^0 \rightarrow \sqrt{\mathbf{q}^2 + m^2}$

$$\frac{1}{q^0 - \sqrt{\mathbf{q}^2 + m^2} + i\epsilon} = \frac{-q^0 - \sqrt{\mathbf{q}^2 + m^2} + i\epsilon}{-(q^0)^2 + (\sqrt{\mathbf{q}^2 + m^2} - i\epsilon)^2} \rightarrow \frac{-2\sqrt{\mathbf{q}^2 + m^2}}{q^2 + m^2 - i\epsilon}.$$

(Мы вновь заменили  $\epsilon$  на  $2\epsilon\sqrt{\mathbf{q}^2 + m^2}$ ; это законно, так как  $\epsilon$  — произвольная бесконечно малая положительная величина.) Таким образом, уравнение (10.2.12) в точности совпадает с желаемым результатом (10.2.3). Доказательство завершено.

Этот результат имеет классическое приложение в теории ядерных сил. Пусть  $\Phi_a(x)$  — какая-то действительная комбинация полей (например, билинейная форма кварк–антикварк  $\bar{q}\gamma_5\tau_a q$ ), матричный элемент которой между вакуумом и однопионным состоянием с изospином  $a$  отличен от нуля. Выберем нормировку так, чтобы

$$\langle VAC | \Phi_a(0) | \pi_b, \mathbf{p} \rangle = (2\pi)^{-3/2} (2p^0)^{-1/2} \delta_{ab}. \quad (10.2.15)$$

Тогда матричный элемент  $\Phi_a$  между одноклонными состояниями с 4-импульсами  $p, p'$  имеет полюс при  $(p - p')^2 \rightarrow -m_\pi^2$ . Его вид

однозначно определяется изоспиновой и лоренцевской инвариантностью<sup>3)</sup>:

$$\langle N', \sigma', \mathbf{p}' | \Phi_a(0) | N, \sigma, \mathbf{p} \rangle \rightarrow i(2\pi)^{-3} G_\pi \times \frac{(\bar{u}' \gamma_5 \tau_a u)}{(p - p')^2 + m_\pi^2}, \quad (10.2.16)$$

где  $u$  и  $u'$  — спинорные функции, соответствующие начальному и конечному нуклонам и включающие также изоспиновые индексы, а  $\tau_a$ ,  $a = 1, 2, 3$ , — матрицы Паули в изоспиновом пространстве. Постоянную  $G_\pi$  называют константой пион-нуклонного взаимодействия. Полюс (10.2.16) на самом деле нефизический (поскольку в физической области  $(p - p')^2 \geq 0$ ), но он может быть получен аналитическим продолжением этого матричного элемента из физической области в нефизическую. Для этого нужно рассмотреть матричный элемент с импульсами вне массовой оболочки:

$$\int d^4x d^4x' e^{-ip \cdot x} e^{-ip' \cdot x'} \langle T\{\Phi_a(0) \bar{N}(x) N'(x')\} \rangle_{\text{VAC}},$$

где  $N$  и  $N'$  — подходящие компоненты операторов поля или произведений операторов, обладающие отличным от нуля матричным элементом между однонуклонными состояниями и вакуумом. Рассмотрим рассеяние двух нуклонов. Обозначим их начальные импульсы через  $p_1$  и  $p_2$ , а конечные через  $p'_1$  и  $p'_2$ . Из доказанной теоремы следует, что  $S$ -матрица такого процесса имеет полюс при  $(p_1 - p'_1)^2 = (p_2 - p'_2)^2 \rightarrow -m_\pi^2$ :

$$S_{N'_1 N'_2, N_1 N_2} \rightarrow -i(2\pi)^4 \delta^4(p'_1 + p'_2 - p_1 - p_2) \frac{G_\pi^2}{(p_1 - p'_1)^2 + m_\pi^2} \times \\ \times (2\pi)^{-3} (\bar{u}'_1 \gamma_5 \tau_a u_1) \times (2\pi)^{-3} (\bar{u}'_2 \gamma_5 \tau_a u_2). \quad (10.2.17)$$

(Все численные коэффициенты в этой формуле могут быть легко получены на языке фейнмановских диаграмм; а теорема (10.2.3) гарантирует нам, что все будет так же, как если бы лагранжиан включал элементарное пионное поле.) Пионный полюс вновь лежит в нефизической области, так как при рассеянии нуклонов с импульсами на массовой оболочке  $(p_1 - p'_1)^2 \geq 0$ ; но его можно получить аналитиче-

<sup>3)</sup> Как следует из лоренцевской и изоспиновой инвариантности, рассматриваемый матричный элемент должен быть пропорционален  $(u' \Gamma \tau_a u)$ , где  $\Gamma$  — матрица  $4 \times 4$ , такая что  $(\psi' \Gamma \psi)$  представляет собой псевдоскаляр. Как и любая матрица  $4 \times 4$ ,  $\Gamma$  может быть разложена по базису 1,  $\gamma_\mu$ ,  $[\gamma_\mu, \gamma_\nu]$ ,  $\gamma_5 \gamma_\mu$  и  $\gamma_5$ . Коэффициенты должны быть соответственно псевдоскаляром, псевдовектором, псевдотензором, вектором и скаляром. Из двух импульсов  $p$  и  $p'$  можно составить лишь один псевдотензор, пропорциональный  $\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} p_\rho p'_\sigma$ , и скаляр  $(p - p')^2$ . Используя уравнение Дирака в импульсном пространстве для  $u$  и  $u'$ , легко видеть, что тензорная и псевдовекторная матрицы в разложении  $\Gamma$  дают вклад, пропорциональный  $\gamma_5$ .

ским продолжением элемента  $S$ -матрицы, например, рассмотрев матричный элемент с импульсами вне массовой оболочки:

$$\int d^4x_1 d^4x_2 d^4x'_1 d^4x'_2 e^{-ip_1 \cdot x_1} e^{-ip_2 \cdot x_2} e^{+ip'_1 \cdot x'_1} e^{+ip'_2 \cdot x'_2} \times \\ \times \langle T\{\bar{N}_1(x_1), \bar{N}_2(x_2), N'_1(x'_1), N'_2(x'_2)\}\rangle_{\text{VAC}}.$$

Несмотря на то что полюс нефизический, масса пиона достаточно мала и, следовательно, полюс находится очень близко к физической области. При определенных условиях его вклад в  $S$ -матрицу доминирует. Это, например, имеет место при резонанском рассеянии в квантовой механике.

Существование полюса при  $(p_1 - p'_1)^2 = (p_2 - p'_2)^2 \rightarrow -m_\pi^2$  означает, что мы имеем дело с силами, радиус действия которых порядка  $1/m_\pi$ . Например, в первоначальной теории ядерных сил, разработанной Юкавой [2], обмен мезонами создает потенциал вида  $\exp(-m_\pi r)/4\pi r$ . Тогда при нерелятивистском рассеянии  $S$ -матрица в первом борновском приближении пропорциональна выражению

$$\int d^3x_1 d^3x_2 d^3x'_1 d^3x'_2 e^{-i\mathbf{x}_1 \cdot \mathbf{p}_1} e^{-i\mathbf{x}_2 \cdot \mathbf{p}_2} e^{+i\mathbf{x}'_1 \cdot \mathbf{p}'_1} e^{+i\mathbf{x}'_2 \cdot \mathbf{p}'_2} \times \\ \times \frac{\exp(-m_\pi |\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|)}{4\pi |\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|} \delta^3(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}'_1) \delta^3(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}'_2) = \\ = -(2\pi)^3 \delta^3(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}'_1 - \mathbf{p}'_2) \frac{1}{(\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}'_1)^2 + m_\pi^2}.$$

Множитель  $\frac{1}{(\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}'_1)^2 + m_\pi^2}$  представляет собой нерелятивистский предел пропагатора  $\frac{1}{(p_1 - p'_1)^2 + m_\pi^2}$  в выражении (10.2.17). (В самом деле, при нерелятивистском рассеянии, в силу того что  $|\mathbf{p}_1| \ll \mathbf{m}_N$  и  $|\mathbf{p}'_1| \ll m_N$ , передача энергии  $p_1^0 - p'_1{}^0$  равна  $\frac{[\mathbf{p}_1^2 - \mathbf{p}'_1{}^2]}{2m_N}$ , что пренебрежимо мало по сравнению с  $|\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}'_1|$ .) После появления теории Юкавы было высказано предположение, состоящее в том, что такой тип зависимости от импульса обусловлен появлением мезонного поля в теории. Лишь в 1950-е годы окончательно стало понятно, что наличие полюса при  $(p_1 - p'_1)^2 \rightarrow -m_\pi^2$  вытекает из существования пиона как частицы; элементарная это частица или нет, не имеет никакого значения.

### § 10.3. Перенормировка поля и массы

Теперь мы применим специальный случай результата предыдущего параграфа к изучению радиационных поправок к внешним и внутренним линиям произвольного процесса.

Нас будет интересовать специальный случай, когда 4-импульс какой-то из внешних линий приближается к массовой оболочке. (В обозначениях предыдущего параграфа это соответствует  $r = 1$ ). Рассмотрим корреляционную функцию

$$\begin{aligned} G_l(q_1 q_2 \dots) &= \\ &= \int d^4 x_1 d^4 x_2 \dots e^{-iq_1 \cdot x_1} e^{-iq_2 \cdot x_2} \dots (\Psi_0, T\{\mathcal{O}_l(x_1), A_2(x_2), \dots\} \Psi_0), \end{aligned} \quad (10.3.1)$$

где  $\mathcal{O}_l(x)$  — оператор в представлении Гейзенберга, обладающий такими же трансформационными свойствами при преобразованиях Лоренца, как и некоторое свободное поле  $\psi_l$ , преобразующееся по неприводимому представлению однородной группы Лоренца (или, в случае теории с сохранением четности, группы Лоренца, включающей пространственную инверсию), а  $A_2, A_3$  и т.д. — произвольные операторы в представлении Гейзенберга. Предположим, что одночастичное состояние  $\Psi_{\mathbf{q}_1, \sigma}$  имеет ненулевой матричный элемент между состояниями  $\mathcal{O}_l^\dagger \Psi_0$  и  $A_2 A_3 \dots \Psi_0$ . Тогда, в соответствии с результатами предыдущего параграфа,  $G_l$  имеет полюс при  $q_1^2 = -m^2$ , причем

$$\begin{aligned} G_l(q_1 q_2 \dots) &\rightarrow \frac{-2i\sqrt{\mathbf{q}_1^2 + m^2}}{q_1^2 + m^2 - i\epsilon} (2\pi)^3 \sum_{\sigma} (\Psi_0, \mathcal{O}_l(0) \Psi_{\mathbf{q}_1, \sigma}) \times \\ &\times \int d^4 x_2 \dots e^{-iq_2 \cdot x_2} \dots (\Psi_{\mathbf{q}_1, \sigma} T\{A_2(x_2) \dots\} \Psi_0). \end{aligned} \quad (10.3.2)$$

В силу лоренц-инвариантности имеем

$$(\Psi_0, \mathcal{O}_l(0) \Psi_{\mathbf{q}_1, \sigma}) = (2\pi)^{-3/2} N u_l(\mathbf{q}_1, \sigma), \quad (10.3.3)$$

где  $u_l(\mathbf{q}, \sigma)$  — нормировочный коэффициент<sup>1)</sup> при свободном поле  $\psi_l$ , обладающем теми же свойствами при лоренцевских преобразованиях, что и  $\mathcal{O}_l$ , и  $N$  постоянная. (Мы сделали предположение о том, что  $\mathcal{O}_l$  преобразуется по неприводимому представлению именно для того, чтобы в уравнении (10.3.3) появлялась лишь одна неизвестная константа  $N$ ). Определим “усеченный” матричный элемент  $M_l$  следующим образом

$$\begin{aligned} \int d^4 x_2 \dots e^{-iq_2 \cdot x_2} \dots (\Psi_{\mathbf{q}_1, \sigma} T\{A_2(x_2) \dots\} \Psi_0) &\equiv \\ &\equiv N^{-1} (2\pi)^{-3/2} \sum_l u_l^*(\mathbf{q}_1, \sigma) M_l(q_2 \dots). \end{aligned} \quad (10.3.4)$$

---

<sup>1)</sup> Например, для стандартным образом нормированного скалярного поля  $u_l(\mathbf{q}, \sigma) = [2\sqrt{\mathbf{q}_1^2 + m^2}]^{-1/2}$ .

Тогда при  $q_1^2 \rightarrow -m^2$  уравнение (10.3.2) примет вид

$$G_l \rightarrow \frac{-2i\sqrt{\mathbf{q}_1^2 + m^2}}{q_1^2 + m^2 - i\epsilon} \sum_{\sigma, l'} u_l(\mathbf{q}_1, \sigma) u_{l'}^*(\mathbf{q}_1, \sigma) M_{l'}. \quad (10.3.5)$$

В соответствии с уравнениями (6.2.2) и (6.2.18), величина, на которую умножается  $M_{l'}$  в (10.3.5), представляет собой пропагатор  $-i\Delta_{ll'}(q_1)$  свободного поля  $\psi_l$ , которое преобразуется по тому же представлению группы Лоренца, что и  $\mathcal{O}_l$  (по крайней мере это утверждение верно в пределе  $q_1^2 \rightarrow -m^2$ ). Поэтому можно заключить, что  $M_l$  — это сумма всех диаграмм с внешними линиями, соответствующими операторам  $\mathcal{O}_l, A_2, \dots$  и несущими импульсы  $q_1, q_2 \dots$ , с выкинутым пропагатором линии, отвечающей  $\mathcal{O}_l$ . Следовательно, уравнение (10.3.4) почти совпадает со сформулированным ранее способом вычисления матричного элемента при излучении частицы: надо выкинуть пропагатор частицы и оставшуюся часть диаграммы свернуть с множителем  $(2\pi)^{-3/2} u_l^*$ . Единственным отличием является множитель  $N$ .

Мы доказали это утверждение, полученное Леманном, Симанчиком и Циммерманом [3] и известное как *редукционная формула*, несколько необычным способом, применимым для полей с произвольным спином. Очень важно также, что данное утверждение справедливо для любого оператора;  $\mathcal{O}_l$  не обязан входить в лагранжиан в качестве элементарного поля, и частицы, которые он создает, могут быть связанными состояниями элементарных. Однако доказанный результат глубоко нетривиален и в случае, когда  $\mathcal{O}_l$  — элементарное поле: если мы хотим пользоваться привычными правилами Фейнмана для вычисления  $S$ -матричного элемента, надо сперва переопределить поле, нормировав его таким образом, чтобы (не запутайтесь в буквах  $\Psi$ ):

$$(\Psi_0, \Psi_l(0)\Psi_{\mathbf{q}, \sigma}) = (2\pi)^{-3/2} u_l(\mathbf{q}, \sigma). \quad (10.3.6)$$

Нормированное таким образом поле называют *перенормированным полем*. Константа перенормировки  $N$  естественным образом появляется также в другой важной ситуации. Предположим, что в уравнении (10.3.1) присутствует лишь один оператор  $A$ ; выберем в качестве этого оператора сопряженный к какому-либо оператору из мультиплета  $\mathcal{O}_l$ . Тогда уравнение (10.3.2) примет вид

$$\begin{aligned} & \int d^4 x_1 \int d^4 x_2 e^{-iq_1 \cdot x_1} e^{-iq_2 \cdot x_2} (\Psi_0, T\{\mathcal{O}_l(x_1)\mathcal{O}_{l'}^\dagger(x_2)\Psi_0\}) \xrightarrow{q_1^2 \rightarrow -m^2} \\ & \xrightarrow{q_1^2 \rightarrow -m^2} \frac{-2i\sqrt{\mathbf{q}_1^2 + m^2}(2\pi)^3}{q_1^2 + m^2 - i\epsilon} \sum_{\sigma} (\Psi_0, \mathcal{O}_l(0)\Psi_{\mathbf{q}_1, \sigma}) \times \\ & \times \int d^4 x_2 e^{-iq_2 \cdot x_2} e^{-iq_1 \cdot x_1} (\Psi_{\mathbf{q}_1, \sigma}\mathcal{O}_{l'}^\dagger(0)\Psi_0) = \\ & = \frac{-2i|N|^2\sqrt{\mathbf{q}_1^2 + m^2}}{q_1^2 + m^2 - i\epsilon} \sum_{\sigma} u_l(\mathbf{q}_1, \sigma) u_{l'}^*(\mathbf{q}_1, \sigma) (2\pi)^4 \delta^4(q_1 + q_2). \end{aligned} \quad (10.3.6)$$

Это обычное поведение пропагатора (суммы всех диаграмм с двумя внешними линиями) вблизи полюса, за исключением множителя  $|N|^2$ . В соответствии с уравнением (10.3.6), этого множителя нет в пропагаторе перенормированного поля  $\Psi_l$ . Таким образом, *поведение пропагатора перенормированного поля вблизи полюса такое же, как и у пропагатора свободного поля; перенормированная масса определяется из положения полюса этого пропагатора.*

Для того чтобы увидеть, как это работает на практике, рассмотрим теорию скалярного поля  $\Phi_B$  со взаимодействием; индекс  $B$  поставлен, чтобы мы не забывали, что имеем дело с “затравочным” (т.е. неперенормированным) полем. Плотность лагранжиана, как обычно, возьмем в виде

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2} \partial_\mu \Phi_B \partial^\mu \Phi_B - \frac{1}{2} m_B^2 \Phi_B^2 - V_B(\Phi_B). \quad (10.3.7)$$

Выполнение условия (10.3.6) для поля  $\Phi_B$  или совпадение физической массы с затравочной  $m_B$  возможно только при наличии каких-то особых симметрий. Лагранжиан (10.3.7) такими симметриями не обладает, поэтому поле и масса перенормируются:

$$\Phi \equiv Z^{-1/2} \Phi_B, \quad (10.3.8)$$

$$m^2 \equiv m_B^2 + \delta m^2, \quad (10.3.9)$$

где  $Z$  выбрано таким образом, чтобы  $\Phi$  удовлетворяло уравнению (10.3.6), а  $\delta m^2$  — так, чтобы у пропагатора был полюс в точке  $q^2 = -m^2$ . (Использование символа  $Z$  общепринято для этого случая; для каждого члена в лагранжиане вводится свое  $Z$ ). Можно переписать плотность лагранжиана (10.3.7) как

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_1, \quad (10.3.10)$$

$$\mathcal{L}_0 = -\frac{1}{2} \partial_\mu \Phi \partial^\mu \Phi - \frac{1}{2} m^2 \Phi^2, \quad (10.3.11)$$

$$\mathcal{L}_1 = -\frac{1}{2} (Z-1) [\partial_\mu \Phi \partial^\mu \Phi + m^2 \Phi^2] + \frac{1}{2} Z \delta m^2 \Phi^2 - V(\Phi), \quad (10.3.12)$$

где

$$V(\Phi) \equiv V_B(\sqrt{Z} \Phi).$$

При вычислении поправок к пропагатору перенормированного скалярного поля, обычно обозначаемому через  $\Delta'(q)$ , удобно рассматривать отдельно так называемые *одночастично неприводимые* диаграммы: связная диаграмма называется одночастично неприводимой, если она не может быть разделена на две части путем удаления одной внутренней линии. Пример одночастично неприводимой диаграммы приведен на рис. 10.4. Обозначим сумму таких диаграмм, опуская внешние пропагаторы  $-i(2\pi)^{-4}(q^2 + m^2 - i\epsilon)^{-1}$ , через  $i(2\pi)^4 \Pi^*(q^2)$ .

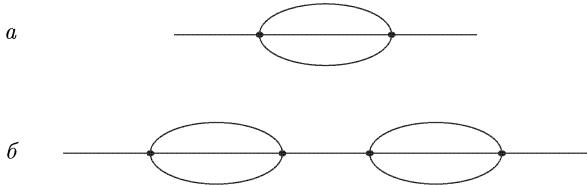


Рис. 10.4. Диаграмма на рис. *a* является одночастично-неприводимой, на рис. *b* — не является. Такие диаграммы появляются в теории с четверной вершиной, например, в теории скалярного поля  $\phi$  со взаимодействием, пропорциональным  $\phi^4$

Полный пропагатор дается суммой диаграмм-“цепочек” из одной, двух, трех и т.д. таких одночастично-неприводимых поддиаграмм, соединенных друг с другом посредством затравочных пропагаторов:

$$\begin{aligned} \frac{-i}{(2\pi)^4} \Delta'(q) = & \frac{-i}{(2\pi)^4} \frac{1}{q^2 + m^2 - i\epsilon} + \\ & + \left[ \frac{-i}{(2\pi)^4} \frac{1}{q^2 + m^2 - i\epsilon} \right] [i(2\pi)^4 \Pi^*(q^2)] \left[ \frac{-i}{(2\pi)^4} \frac{1}{q^2 + m^2 - i\epsilon} \right] + \\ & + \left[ \frac{-i}{(2\pi)^4} \frac{1}{q^2 + m^2 - i\epsilon} \right] [i(2\pi)^4 \Pi^*(q^2)] \left[ \frac{-i}{(2\pi)^4} \frac{1}{q^2 + m^2 - i\epsilon} \right] \times \\ & \times [i(2\pi)^4 \Pi^*(q^2)] \left[ \frac{-i}{(2\pi)^4} \frac{1}{q^2 + m^2 - i\epsilon} \right] + \dots \quad (10.3.13) \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} \Delta'(q) = & [q^2 + m^2 - i\epsilon]^{-1} + [q^2 + m^2 - i\epsilon]^{-1} \Pi^*(q^2) [q^2 + m^2 - i\epsilon]^{-1} + \\ & + [q^2 + m^2 - i\epsilon]^{-1} \Pi^*(q^2) [q^2 + m^2 - i\epsilon]^{-1} \Pi^*(q^2) [q^2 + m^2 - i\epsilon]^{-1} + \dots \quad (10.3.14) \end{aligned}$$

Суммируя геометрическую прогрессию, получим

$$\Delta'(q) = [q^2 + m^2 - \Pi^*(q^2) - i\epsilon]^{-1}. \quad (10.3.15)$$

$\Pi^*$  складывается из двух частей: древесные диаграммы с одной единственной вершиной, соответствующей членам  $\partial_\mu \Phi \partial^\mu \Phi$ ,  $\Phi^2$  в выражении (10.3.12), а также петлевые диаграммы аналогичные показанной на рис. 10.4, *a*:

$$\Pi^*(q^2) = -(Z-1)[q^2 + m^2] + Z\delta m^2 + \Pi_{\text{LOOP}}^*(q^2). \quad (10.3.16)$$

Точный пропагатор имеет полюс при  $q^2 = -m^2$ , где  $m$  — физическая масса частицы, поэтому

$$\Pi^*(-m^2) = 0. \quad (10.3.17)$$

Вычет пропагатора в полюсе  $q^2 = -m^2$  должен быть равен единице, как это имеет место для затравочного пропагатора, т.е.

$$\left[ \frac{d}{dq^2} \Pi^*(q^2) \right]_{q^2=-m^2} = 0. \quad (10.3.18)$$

Из уравнений (10.3.17) и (10.3.18) можно вычислить  $Z$  и  $\delta m^2$ :

$$Z\delta m^2 = -\Pi_{\text{LOOP}}^*(-m^2), \quad (10.3.19)$$

$$Z = 1 + \left[ \frac{d}{dq^2} \Pi_{\text{LOOP}}^*(q^2) \right]_{q^2=-m^2} = 0. \quad (10.3.20)$$

Легко видеть, что как  $Z\delta m^2$ , так и  $Z - 1$  пропорциональны константе связи, поэтому трактовка первых двух членов в (10.3.12) в качестве возмущения законна.

В конкретных вычислениях проще всего вычтать из петлевого члена  $\Pi_{\text{LOOP}}^*$  линейный по  $q^2$  полином, выбранный так, чтобы полученная разность удовлетворяла уравнениям (10.3.17) и (10.3.18). Как мы увидим, такая процедура вычитания мгновенно устраняет все расходимости, возникающие из интегралов по импульсному пространству в  $\Pi_{\text{LOOP}}^*$ . Однако отметим, что *перенормировка масс и полей не имеет прямого отношения к наличию расходимостей в теории и она была бы необходима даже для теории, в которой все интегралы по импульсному пространству сходятся*.

Важным следствием условий (10.3.17), (10.3.18) является то, что теперь нет необходимости учитывать радиационные поправки к внешним линиям, которые находятся на массовой оболочке, т.е.

$$\begin{aligned} & [\Pi^*(q^2)[q^2 + m^2 - i\epsilon]^{-1} + \\ & + \Pi^*(q^2)[q^2 + m^2 - i\epsilon]^{-1}\Pi^*(q^2)[q^2 + m^2 - i\epsilon]^{-1} + \dots]_{q^2 \rightarrow -m^2} = 0. \end{aligned} \quad (10.3.21)$$

Сходные рассуждения можно применить к полям с произвольным спином. Например, для “затравочного” дираковского поля лагранжиан равен

$$\mathcal{L} = -\bar{\Psi}_B[\hat{\partial} + m_B]\Psi_B - V_B(\bar{\Psi}_B\Psi_B). \quad (10.3.22)$$

Введем перенормированные массу и поле следующим образом

$$\Psi \equiv Z_2^{-1/2}\Psi_B, \quad (10.3.23)$$

$$m = m_B + \delta m. \quad (10.3.24)$$

(В литературе константу перенормировки фермионного поля принято обозначать именно через  $Z_2$ .) Тогда плотность лагранжиана может быть переписана в виде

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_1, \quad (10.3.25)$$

$$\mathcal{L}_0 = -\bar{\Psi}[\hat{\partial} + m]\Psi, \quad (10.3.26)$$

$$\mathcal{L}_1 = -(Z_2 - 1)[\bar{\Psi}[\hat{\partial} + m]\Psi] + Z_2\delta m\bar{\Psi}\Psi - V_B(Z_2\bar{\Psi}\Psi). \quad (10.3.27)$$

Обозначим через  $i(2\pi)^4\Sigma^*(\widehat{k})$  сумму всех связных диаграмм с одной входящей фермионной линией, несущей импульс  $k$  и одной выходя-

щей, которые нельзя разрезать ни по какой внутренней фермионной линии; будем также опускать множители  $-i(2\pi)^{-4}$  и  $[i\hat{k} + m - i\epsilon]$ , соответствующие пропагаторам внешних линий. (Здесь мы также использовали лоренц-инвариантность, из которой следует, что  $\Sigma^*$  зависит лишь от скалярной матрицы  $\hat{k} = k_\mu \gamma^\mu$ ). Тогда полный фермионный пропагатор равен

$$\begin{aligned} S'(k) &= [i\hat{k} + m - i\epsilon]^{-1} + [i\hat{k} + m - i\epsilon]^{-1} \Sigma^*(\hat{k}) [i\hat{k} + m - i\epsilon]^{-1} + \\ &+ [i\hat{k} + m - i\epsilon]^{-1} \Sigma^*(\hat{k}) [i\hat{k} + m - i\epsilon]^{-1} \Sigma^*(\hat{k}) [i\hat{k} + m - i\epsilon]^{-1} + \dots = \\ &= [i\hat{k} + m - \Sigma^*(\hat{k}) - i\epsilon]^{-1}. \end{aligned} \quad (10.3.28)$$

При вычислении  $\Sigma^*(\hat{k})$  мы должны учитывать как древесные диаграммы, происходящие из членов  $\mathcal{L}_1$  (см. (10.3.27)), пропорциональных  $\bar{\Psi} \hat{\partial} \Psi$ ,  $\bar{\Psi} \Psi$ , так и петлевые поправки:

$$\Sigma^*(\hat{k}) = -(Z_2 - 1)[i\hat{k} + m] + Z_2 \delta m + \sum_{\text{LOOP}}^*(\hat{k}). \quad (10.3.29)$$

Тогда условие того, что полный пропагатор имеет полюс при  $k^2 = -m^2$  с тем же вычетом, что и пропагатор до учета поправок, имеет вид

$$\Sigma^*(im) = 0, \quad (10.3.30)$$

$$\frac{\partial \Sigma^*(\hat{k})}{\partial \hat{k}} \Big|_{\hat{k}=im} = 0, \quad (10.3.31)$$

поэтому

$$Z_2 \delta m = - \sum_{\text{LOOP}}^*(im), \quad (10.3.32)$$

$$Z_2 = 1 - i \frac{\partial \Sigma^*(\hat{k})}{\partial \hat{k}} \Big|_{\hat{k}=im}. \quad (10.3.33)$$

Точно так же, как и для скалярного поля, из обнуления  $[i\hat{k} + m]^{-1} \Sigma^*(\hat{k})$  в пределе  $\hat{k} \rightarrow im$  следует, что не надо учитывать радиационные поправки к внешним фермионным линиям. Выводу аналогичных свойств фотонного пропагатора мы посвятим § 10.5.

## § 10.4. Перенормировка заряда и тождества Уорда

В этом параграфе мы обсудим, как физические электрические заряды связаны с формальными параметрами, которые фигурируют в лагранжиане. Напомним, что из инвариантности лагранжиана по отношению к глобальным калибровочным преобразованиям  $\Psi_l \rightarrow \exp(iq_l \alpha) \Psi_l$  (здесь  $\alpha$  — произвольная постоянная) следует суще-

ствование нетеровского тока

$$J^\mu = -i \sum_l \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \Psi_l)} q_l \Psi_l, \quad (10.4.1)$$

удовлетворяющего условию сохранения

$$\partial_\mu J^\mu = 0. \quad (10.4.2)$$

Отсюда следует, что интеграл по трехмерному пространству от временной компоненты  $J_\mu$  не зависит от времени:

$$i \frac{d}{dt} Q = [Q, H] = 0. \quad (10.4.3)$$

Здесь

$$Q \equiv \int d^3x J^0. \quad (10.4.4)$$

(Заметим, что существуют теории, в которых интеграл (10.4.4) может расходиться. Например, такая ситуация имеет место при наличии дальнодействующих сил, обусловленных безмассовыми скалярами. Мы вернемся к этому вопросу во втором томе при рассмотрении нарушения симметрии.) Очевидно, что  $Q$  — трансляционно-инвариантная величина:

$$[P, Q] = 0, \quad (10.4.5)$$

а из того, что  $J_\mu$  — 4-вектор, следует инвариантность  $Q$  относительно однородных преобразований Лоренца:

$$[J^{\mu\nu}, Q] = 0. \quad (10.4.6)$$

Поэтому, действуя оператором  $Q$  на истинный вакуум  $\Psi_0$ , мы получим другое лоренц-инвариантное состояние, обладающее нулевой энергией и импульсом, и (в силу невырожденности вакуума) это состояние должно быть пропорционально  $\Psi_0$ . Константа пропорциональности равна 0, так как из лоренц-инвариантности можно заключить, что  $(\Psi_0, J_\mu \Psi_0) = 0$ . Значит,

$$Q\Psi_0 = 0. \quad (10.4.7)$$

Аналогично, действие  $Q$  на любое одночастичное состояние  $\Psi_{\mathbf{p}, \sigma, n}$  должно давать другое одночастичное состояние с теми же энергией, импульсом и свойствами при преобразованиях Лоренца. При предположении о невырожденности одночастичных состояний это новое состояние пропорционально исходному:

$$Q\Psi_{\mathbf{p}, \sigma, n} = q_{(n)} \Psi_{\mathbf{p}, \sigma, n}. \quad (10.4.8)$$

Лоренц-инвариантность  $Q$  гарантирует, что собственное значение  $q_{(n)}$  не зависит от  $\mathbf{p}$  и  $\sigma$ , а определяется лишь типом частицы. Это собственное значение называется электрическим зарядом одночастичного

состояния. Установим связь этой величины с параметром  $q_l$ , фигурирующим в лагранжиане. Для этого вспомним канонические коммутационные соотношения

$$[J^0(\mathbf{x}, t), \Psi_l(\mathbf{y}, t)] = -q_l \Psi_l(\mathbf{y}, t) \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}). \quad (10.4.9)$$

Проинтегрировав это тождество по всему трехмерному пространству, получим

$$[Q, \Psi_l(y)] = -q_l \Psi_l(y). \quad (10.4.10)$$

Для любой локальной функции  $F(y)$  полей, производных полей и их сопряженных имеет место аналогичное равенство:

$$[Q, F(y)] = -q_F F(y), \quad (10.4.11)$$

где  $q_F$  — сумма зарядов всех полей и производных полей, которые входят в  $F(y)$ , минус сумма зарядов сопряженных полей и их производных. Взяв матричный элемент уравнения (10.4.11) между одночастичным состоянием и вакуумом, получим

$$(\Psi_0, F(y) \Psi_{\mathbf{p}, \sigma, n})(q_F - q_{(n)}) = 0. \quad (10.4.12)$$

Тогда

$$q_{(n)} = q_F \quad (10.4.13)$$

при условии

$$(\Psi_0, F(y) \Psi_{\mathbf{p}, \sigma, n}) \neq 0. \quad (10.4.14)$$

Напомним, что выполнение условия (10.4.14) эквивалентно наличию у функции Грина оператора  $F$  полюса, соответствующего одночастичному состоянию  $\Psi_{\mathbf{p}, \sigma, n}$ . Для одночастичного состояния, отвечающего одному из полей, фигурирующих в лагранжиане, можно взять  $F = \Psi_l$ , и тогда  $q_F = q_l$ ; однако наши результаты справедливы также для произвольных “неэлементарных” одночастичных состояний.

Отсюда почти что следует (однако это не совсем верно!), что, несмотря на диаграммы высших порядков, физический электрический заряд равен в точности параметру  $q_l$ , который фигурирует в лагранжиане (или сумме таких параметров, как это имеет место для  $q_F$ ). Здесь надо сделать одно существенное замечание: требование инвариантности лагранжиана при калибровочных преобразованиях  $\Psi_l \rightarrow \exp(iq_l \alpha) \Psi_l$  не фиксирует общий масштаб зарядов системы, а задает лишь отношение между ними. Физические электрические заряды должны определять отклик полей материи на физическое, и значит, *перенормированное* электрическое поле  $A_\mu$ . То есть, масштаб  $q_l$  фиксируется, если потребовать, чтобы перенормированное электромагнитное поле присутствовало в лагранжиане материи  $L_M$  в линейных комбинациях  $[\partial_\mu - iq_l A_\mu] \Psi_l$ . Тогда ток равен

$$J^\mu = \frac{\delta \mathcal{L}_M}{\delta A_\mu}. \quad (10.4.15)$$

Заметим, что  $A^\mu$  и  $q_l$  в формуле (10.4.15) отличаются от электромагнитного поля  $A_B^\mu$  и зарядов  $q_B l$ , которые присутствуют в исходном,

затравочном лагранжиане

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & -\frac{1}{4} (\partial_\mu A_{B\nu} - \partial_\nu A_{B\mu})(\partial^\mu A_B^\nu - \partial^\nu A_B^\mu) + \\ & + \mathcal{L}_M(\Psi_l, [\partial_\mu - iq_{Bl} A_{B\mu}] \Psi_l). \end{aligned} \quad (10.4.16)$$

Перенормированное электромагнитное поле (определенное так, чтобы вычет в полюсе  $p^2 = 0$  полного пропагатора был равен единице) принято записывать в виде

$$A^\mu = Z_3^{-1/2} A_B^\mu, \quad (10.4.17)$$

поэтому, для того чтобы заряд  $q_l$  характеризовал отклик заряженной частицы на перенормированное электромагнитное поле, мы должны определить перенормированный заряд следующим образом:

$$q_l = \sqrt{Z_3} q_{Bl}. \quad (10.4.18)$$

Таким образом, физический электрический заряд  $q$  любой частицы пропорционален параметру  $q_B$ , фигурирующему в лагранжиане, причем константа пропорциональности  $\sqrt{Z_3}$  одинакова для всех заряженных частиц. Это утверждение объясняет, почему протон, окруженный облаком виртуальных мезонов и других сильно взаимодействующих частиц, которые, казалось бы, должны экранировать его электрическое поле, может иметь такой же заряд, как и позитрон, взаимодействия которого с другими частицами гораздо слабее. Для этого достаточно лишь предположить, что по каким-то причинам затравочный заряд электрона и сумма затравочных зарядов частиц, из которых состоит протон (напомним, что кварковая структура протона —  $uud$ ) равны по модулю и противоположны по знаку; все эффекты высших порядков *полностью* содержатся в общем для всех заряженных частиц множителе  $\sqrt{Z_3}$ .

Для того чтобы перенормировка заряда возникала лишь из радиационных поправок к фотонному пропагатору, должно происходить сокращение всевозможных поправок к пропагаторам и электромагнитным вершинам заряженных частиц. На первый взгляд совершенно непонятно, почему такие сокращения имеют место. Мы сможем немного лучше понять их природу, обсудив соотношения между пропагаторами заряженных частиц и вершинами, известные под названием *тождество Уорда*.

Рассмотрим корреляционную функцию электрического тока  $J_\mu$ , дираковского поля  $\Psi_n(y)$  с зарядом  $q$  и ковариантно сопряженного ему поля  $\bar{\Psi}_m(z)$ . Определим электромагнитную вершину  $\Gamma^\mu$  заряженной частицы следующим образом

$$\begin{aligned} \int d^4x d^4y d^4z e^{-ip\cdot x} e^{-ik\cdot y} e^{-ip\cdot z} e^{+il\cdot z} (\Psi_0, T\{J^\mu(x)\Psi_n(y)\bar{\Psi}_m(z)\}\Psi_0) \equiv \\ \equiv -i(2\pi)^4 q S'_{nn'}(k) \Gamma^\mu_{n'm'}(k, l) S'_{m'm}(l) \delta^4(p+k-l), \end{aligned} \quad (10.4.19)$$

где

$$\begin{aligned} -i(2\pi)^4 S'_{nm}(k)\delta^4(k-l) &\equiv \\ &\equiv \int d^4y d^4z (\Psi_0, T\{\Psi_n(y)\bar{\Psi}_m(z)\}\Psi_0)e^{-ik\cdot y}e^{il\cdot z}. \quad (10.4.20) \end{aligned}$$

В соответствии с теоремой § 6.4, выражение (10.4.20) равно сумме всех фейнмановских диаграмм с одной входящей и одной выходящей фермионными линиями, то есть полному дираковскому пропагатору. Аналогично, выражение (10.4.19) представляет собой сумму всех диаграмм с тремя внешними линиями: одной фотонной и двумя фермионными. Поэтому  $\Gamma^\mu$  соответствует “вершинным” диаграммам с одной входящей и одной выходящей фермионными линиями и с одной фотонной линией, из которых выкинуты полные дираковские пропагаторы, отвечающие внешним линиям, а также затравочный фотонный пропагатор внешней линии. Чтобы избежать недоразумений с нормировкой  $S'$  и  $\Gamma^\mu$ , заметим, что при отсутствии взаимодействия эти функции равны соответственно

$$S'(k) \rightarrow [i\gamma_\lambda k^\lambda + m - i\epsilon]^{-1}, \quad \Gamma^\mu(k, l) \rightarrow \gamma^\mu.$$

Однопетлевые поправки к этим выражениям можно получить из диаграмм, изображенных на рис. 10.5.

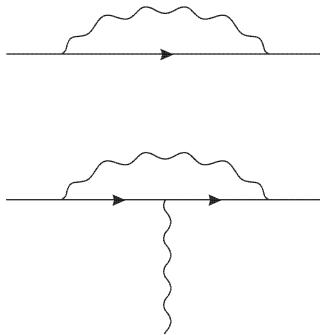


Рис. 10.5. Диаграммы, соответствующие первым поправкам к электронно-му пропагатору и вершинной функции в КЭД. Здесь прямые линии обозначают электроны, а волнистые — фотоны

Соотношение между  $\Gamma^\mu$  и  $S'$  можно получить, воспользовавшись тождеством

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x^\mu} T\{J^\mu(x)\Psi_n(y)\bar{\Psi}_m(z)\} &= T\{\partial_\mu x J^\mu(x)\Psi_n(y)\bar{\Psi}_m(z)\} + \\ &+ \delta(x^0 - y^0)T\{[J^0(x), \Psi_n(y)]\bar{\Psi}_m(z)\} + \\ &+ \delta(x^0 - z^0)T\{\Psi_n(y)[J^0(x), \bar{\Psi}_m(z)]\}, \quad (10.4.21) \end{aligned}$$

где дельта-функции возникают при дифференцировании ступенчатых функций времени. Из закона сохранения (10.4.2) следует, что первый

член равен нулю, а второй и третий могут быть вычислены с помощью коммутационных соотношений (10.4.9), которые в данном случае имеют вид

$$[J^0(\mathbf{x}, t), \Psi_n(\mathbf{y}, t)] = -q\Psi_n(\mathbf{y}, t)\delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \quad (10.4.22)$$

$$[J^0(\mathbf{x}, t), \bar{\Psi}_n(\mathbf{y}, t)] = -q\bar{\Psi}_n(\mathbf{y}, t)\delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}). \quad (10.4.23)$$

Подставив коммутаторы (10.4.22) и (10.4.23) в тождество (10.4.21), получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x^\mu} T\{J^\mu(x)\Psi_n(y)\bar{\Psi}_m(z)\} &= -q\delta^4(x - y)T\{\Psi_n(y)\bar{\Psi}_m(z)\} + \\ &\quad + q\delta^4(x - z)T\{\Psi_n(y)\bar{\Psi}_m(z)\}. \end{aligned} \quad (10.4.24)$$

Отсюда и из определения вершинной функции (10.4.19) следует равенство

$$(l - k)_\mu S'(k)\Gamma^\mu(k, l)S'(l) = iS'(l) - iS'(k),$$

или, другими словами,

$$(l - k)_\mu \Gamma^\mu(k, l) = iS'^{-1}(k) - iS'^{-1}(l). \quad (10.4.25)$$

Это соотношение называется *обобщенным тождеством Уорда*. Впервые оно было получено в работе Такахаси [4]. В оригинальной работе Уорда [5] было доказано более слабое утверждение, которое следует из равенства (10.4.25) в пределе  $l \rightarrow k$ :

$$\Gamma^\mu(k, k) = -i \frac{\partial}{\partial k_\mu} S'^{-1}(k). \quad (10.4.26)$$

Фермионный пропагатор, как следует из уравнения (10.3.28), связан с собственно-энергетической частью  $\Sigma^*(\hat{k})$  следующим образом

$$iS'^{-1}(k) = i\hat{k} + m - \Sigma^*(\hat{k}),$$

поэтому уравнение (10.4.26) может быть переписано в виде

$$\Gamma^\mu(k, k) = \gamma^\mu + i \frac{\partial}{\partial k_\mu} \Sigma^*(\hat{k}). \quad (10.4.27)$$

Для *перенормированного* дираковского поля уравнения (10.3.31) и (10.4.27) показывают, что на массовой оболочке

$$\bar{u}'_k \Gamma^\mu(k, k) u_k = \bar{u}'_k \gamma^\mu u_k, \quad (10.4.28)$$

где спиноры  $u$  и  $u'$  удовлетворяют уравнению Дирака:

$$[i\gamma_\mu k^\mu + m]u_k = [i\gamma_\mu k^\mu + m]u'_k = 0.$$

Таким образом, при взаимодействии фермиона, находящегося на массовой оболочке, с электромагнитным полем без передачи импульса (а именно такая ситуация имеет место, когда мы измеряем электрический заряд) перенормировка фермионного поля компенсирует радиационные поправки к вершинной функции  $\Gamma_\mu$ .

## § 10.5. Калибровочная инвариантность

В этом параграфе мы докажем полезное тождество для амплитуд излучения фотонов, а затем воспользуемся им для вывода свойств перенормированного фотонного пропагатора. Как и в предыдущем параграфе, нам понадобятся лишь коммутационные соотношения токов.

Рассмотрим величину

$$\begin{aligned} M_{\beta\alpha}^{\mu\mu'}\dots(q, q', \dots) &= \int d^4x \int d^4x' \dots e^{-iq\cdot x} e^{-iq'\cdot x'} \times \times \\ &\quad \times \dots (\Psi_\beta^-, T\{J^\mu(x), J^{\mu'}(x')\} \dots) \Psi_\alpha^+). \end{aligned} \quad (10.5.1)$$

В спинорной электродинамике, где электромагнитное взаимодействие линейно по  $A_\mu$ , амплитуда (10.5.1) представляет собой матричный элемент излучения (и/или поглощения) фотонов с импульсами  $q$ ,  $q'$  и т.д. (и/или  $-q$ ,  $-q'$  и т.д.) при произвольном процессе  $\alpha \rightarrow \beta$ . Мы не требуем, чтобы импульсы фотонов лежали на массовой оболочке; отметим также, что в (10.5.1) опущены коэффициенты, соответствующие внешним фотонным линиям. Докажем, что свертка выражения (10.5.1) с 4-импульсом любого из внешних фотонов равна нулю:

$$q_\mu M_{\beta\alpha}^{\mu\mu'}\dots(q, q', \dots) = q'_\mu M_{\beta\alpha}^{\mu\mu'}\dots(q, q', \dots) = \dots = 0. \quad (10.5.2)$$

Так как  $M$  симметрично по отношению к фотонным линиям, достаточно показать справедливость первого из равенств (10.5.2). Для этого заметим, что

$$\begin{aligned} q_\mu M_{\beta\alpha}^{\mu\mu'}\dots(q, q', \dots) &= -i \int d^4x \int d^4x' \times \times \\ &\quad \times \dots e^{-iq\cdot x} e^{-iq'\cdot x'} \dots \left( \Psi_\beta^-, \frac{\partial}{\partial x^\mu} T\{J^\mu(x), J^{\mu'}(x')\} \dots \right) \Psi_\alpha^+. \end{aligned} \quad (10.5.3)$$

Электрический ток  $J_\mu$  сохраняется, но из этого пока не следует, что выражение (10.5.3) отлично от нуля, так как надо учитывать тэта-функции от времени, возникающие при хронологическом упорядочении. Например, для двух токов:

$$T\{J^\mu(x) J^\nu(y)\} = \theta(x^0 - y^0) J^\mu(x) J^\nu(y) + \theta(y^0 - x^0) J^\nu(y) J^\mu(x),$$

поэтому, учитывая сохранение  $J^\mu(x)$ , получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x^\mu} T\{J^\mu(x) J^\nu(y)\} &= \delta(x^0 - y^0) J^0(x) J^\nu(y) - \delta(y^0 - x^0) J^\nu(y) J^0(x) = \\ &= \delta(x^0 - y^0) [J^0(x), J^\nu(y)]. \end{aligned} \quad (10.5.4)$$

Если токов больше чем два, то хронологически упорядоченное произведение содержит одновременные коммутаторы  $J^0(x)$  со всеми другими токами. Чтобы найти такой коммутатор, вспомним, что для любого произведения  $F$  полевых операторов, производных полей и их

сопряженных справедливо соотношение

$$[J^0(\vec{x}, t), F(\vec{y}, t)] = -q_F F(\vec{x}, t) \delta^3(\vec{x} - \vec{y}),$$

где  $q_F$  — сумма зарядов всех полей и производных полей, входящих в  $F$ , минус сумма зарядов всех сопряженных полей и их производных. Для электрического тока  $q_J = 0$ , т.е. сам по себе  $J^\nu(y)$  представляет собой электрически нейтральный оператор. Следовательно,

$$[J^0(\vec{x}, t), J^\nu(\vec{y}, t)] = 0. \quad (10.5.5)$$

Поэтому уравнение (10.5.3) принимает вид

$$q_\mu M_{\beta\alpha}^{\mu\mu'\dots}(q, q', \dots) = 0, \quad (10.5.6)$$

что и требовалось доказать.

Здесь, однако, мы должны сделать существенное замечание. В ток  $J^\nu(y)$  входит произведение полей в одной и той же пространственно-временной точке. Поэтому для того чтобы корректно его определить, необходимо воспользоваться процедурой регуляризации. Регуляризацию можно производить по-разному, и при некоторых способах оказывается, что коммутатор *регуляризованных* токов (10.5.5) отличен от нуля. Отметим, что если теория содержит комплексное скалярное поле  $\Phi$ , то выражение (10.5.5) также не равно нулю и содержит слагаемые, пропорциональные  $\Phi^\dagger \Phi$  и возникающие при любой процедуре регуляризации. Все вклады в рассматриваемый коммутатор называются *швингеровскими членами*. Однако можно показать, что во всех случаях швингеровские члены не влияют на амплитуды физических процессов.

На этом мы завершим обсуждение швингеровских членов, так как далее мы будем пользоваться так называемой размерной регуляризацией, при которой они отсутствуют. В рамках такой процедуры “наивные” коммутационные соотношения (10.5.5) остаются верными.

Результат (10.5.2) легко обобщить на случай, когда помимо фотонов имеются другие незаряженные частицы, лежащие вне массовой оболочки, а все *заряженные* частицы находятся на массовой оболочке, т.е. содержатся в состояниях  $\Psi_\beta^-$  и  $\Psi_\alpha^+$ . Последнее требование необходимо, так как в противном случае в левой части (10.5.2) появились бы дополнительные вклады от одновременных коммутаторов, как это имело место при выводе тождеств Уорда.

Одним из следствий равенства (10.5.2) является инвариантность  $S$ -матричных элементов при замене фотонного пропагатора  $\Delta_{\mu\nu}(q)$  на

$$\Delta_{\mu\nu}(q) \rightarrow \Delta_{\mu\nu}(q) + \alpha_\mu q_\nu + q_\mu \beta_\nu, \quad (10.5.7)$$

равно как и при замене поляризации фотона на

$$e_\rho(\mathbf{k}, \lambda) \rightarrow e_\rho(\mathbf{k}, \lambda) + c k_\rho, \quad (10.5.8)$$

где  $k^0 = |\mathbf{k}|$ , а  $\alpha_\mu$ ,  $\beta_\nu$  и  $c$  — произвольны, они могут зависеть от  $q$  и быть различными для различных пропагаторов или поляризаций). Эту симметрию называют иногда калибровочной инвариантностью  $S$ -матрицы.

Сформулированный результат непосредственно следует из уравнения (10.5.2) и вида зависимости  $S$ -матричного элемента от поляризаций и пропагаторов фотонов:

$$\begin{aligned} S_{\beta\alpha} \propto & \int d^4 q_1 d^4 q_2 \dots \Delta_{\mu_1\nu_1}(q_1) \Delta_{\mu_2\nu_2}(q_2) \times \\ & \times \dots e_{\rho_1}^*(\mathbf{k}'_1, \lambda'_1) e_{\rho_2}^*(\mathbf{k}'_2, \lambda'_2) \dots e_{\sigma_1}(\mathbf{k}_1 \lambda_1) e_{\sigma_2}(\mathbf{k}_2 \lambda_2) \dots \\ & \dots \times M_{ba}^{\mu_1\mu_2\dots\nu_1\nu_2\dots\rho_1\rho_2\dots\sigma_1\sigma_2\dots}(-q_1, -q_2, \dots, q_1, q_2, \dots \\ & \dots, -k'_1, -k'_2, \dots, k_1, k_2 \dots) \quad (10.5.9) \end{aligned}$$

где  $M^{\rho\sigma\dots}$  — матричный элемент (10.5.1), вычисленный при отсутствии электромагнитного взаимодействия<sup>1)</sup>. (Напомним, что в § 9.6 мы доказали специальный вариант этой теоремы, а именно, тот факт, что вакуумные средние хронологически упорядоченных произведений калибровочно-инвариантных операторов не зависят от постоянной  $\alpha$  в пропагаторе (9.6.21); для этого был использован формализм континуального интеграла). Этот результат не столь очевиден, как может показаться на первый взгляд, так как он верен не для отдельных диаграмм, а лишь для суммы диаграмм с вставленными во всех возможных местах токовыми вершинами.

Перейдем к обсуждению вычисления фотонного пропагатора. Полный фотонный пропагатор, обозначаемый обычно  $\Delta'_{\mu\nu}(q)$ , имеет вид

$$\Delta'_{\mu\nu}(q) = \Delta_{\mu\nu}(q) + \Delta_{\mu\nu}(q) M^{\rho\sigma} \Delta_{\sigma\nu}(q), \quad (10.5.10)$$

где  $M^{\rho\sigma}$  представляет собой вакуумное среднее двух токов, а  $\Delta_{\mu\nu}$  — затравочный фотонный пропагатор. В общем случае  $\Delta_{\mu\nu}$  равен

$$\Delta_{\mu\nu}(q) \equiv \frac{\eta_{\mu\nu} - \xi(q^2) q_\mu q_\nu / q^2}{q^2 - i\epsilon}. \quad (10.5.11)$$

Из (10.5.2) следует, что  $q^\mu M_{\mu\nu}(q) = 0$ , поэтому

$$q^\mu \Delta'_{\mu\nu}(q) = q^\mu \Delta_{\mu\nu}(q) = \frac{q_\nu(1 - \xi(q^2))}{q^2 - i\epsilon}. \quad (10.5.12)$$

С другой стороны, мы можем выразить полный фотонный пропагатор через сумму  $\Pi^*(q)$  всех однофотонно-неприводимых диаграмм с двумя внешними фотонными линиями (заметим, что  $M$  не обязательно

<sup>1)</sup> Состояния  $a$  и  $b$  — это состояния  $\alpha$  и  $\beta$  соответственно, но с выкинутыми фотонами. Отметим, что в качестве аргументов  $M$  мы взяли входящие 4-импульсы, поэтому их знаки различны.

однофотонно-неприводимо):

$$\begin{aligned}\Delta'(q) &= \Delta(q) + \Delta(q)\Pi^*(q)\Delta(q) + \Delta(q)\Pi^*(q)\Delta(q)\Pi^*(q)\Delta(q) + \dots = \\ &= [\Delta(q)^{-1} - \Pi^*(q)]^{-1}\end{aligned}\quad (10.5.13)$$

или, другими словами,

$$\Delta'_{\mu\nu}(q) = \Delta_{\mu\nu}(q) + \Delta_{\mu\nu}(q)\Pi^{*\rho\sigma}(q)\Delta'_{\sigma\nu}(q). \quad (10.5.14)$$

Легко видеть, что из (10.5.12) следует соотношение

$$q_\rho\Pi^{*\rho\sigma}(q) = 0. \quad (10.5.15)$$

Воспользовавшись лоренц-инвариантностью и равенством (10.5.15), получим, что  $\Pi^{\rho\sigma*}(q)$  имеет вид

$$\Pi^{*\rho\sigma}(q) = (q^2\eta^{\rho\sigma} - q^\rho q^\sigma)\pi(q^2). \quad (10.5.16)$$

Следовательно, полный пропагатор (10.5.13) равен

$$\Delta'_{\mu\nu}(q) \equiv \frac{\eta_{\mu\nu} - \tilde{\xi}(q^2)q_\mu q_\nu/q^2}{[q^2 - i\epsilon][1 - \pi(q^2)]}, \quad (10.5.17)$$

где

$$\tilde{\xi}(q^2) = \xi(q^2)[1 - \pi(q^2)] + \pi(q^2). \quad (10.5.18)$$

Далее, так как  $\Pi^{*\rho\sigma}(q)$  представляет собой сумму лишь однофотононе-приводимых диаграмм, мы ожидаем, что эта величина не имеет полюса при  $q^2 = 0$ . Отсюда, как легко видеть, вытекает отсутствие полюса при  $q^2 = 0$  у функции  $\pi(q^2)$  (см. (10.5.16)), и, таким образом, полный пропагатор (10.5.17) по-прежнему имеет полюс при  $q^2 = 0$ . Это означает, что *после учета радиационных поправок фотон остается безмассовым*.

Для перенормированного электромагнитного поля радиационные поправки также не должны менять калибровочно-инвариантную часть вычета в фотонном полюсе, поэтому

$$\pi(0) = 0. \quad (10.5.19)$$

Условие (10.5.19) можно использовать для определения константы перенормировки электромагнитного поля  $Z_3$ . Напомним, что выраженный через перенормированное электромагнитное поле (10.4.17) лагранжиан имеет вид

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}Z_3(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) + \mathcal{L}_M(\Psi_l, [\partial_\mu - iq_l A_\mu]\Psi_l).$$

Тогда функция  $\pi(q^2)$  в однофотонно-неприводимой амплитуде равна

$$\pi(q^2) = 1 - Z_3 + \pi_{\text{LOOP}}(q^2), \quad (10.5.20)$$

где  $\pi_{\text{LOOP}}$  есть вклад однопетлевых диаграмм. Следовательно,

$$Z_3 = 1 + \pi_{\text{LOOP}}(0). \quad (10.5.21)$$

На практике просто вычисляют петлевой вклад и затем вычитают константу, компенсирующую  $\pi(0)$ .

Отметим, что для  $q^2 \neq 0$  радиационные поправки изменяют зависящую от калибровки часть фотонного пропагатора. Единственным исключением является калибровка Ландау, в которой  $\xi = 1$  для всех  $q^2$ .

## § 10.6. Электромагнитные формфакторы и магнитный момент

Предположим, что мы хотим вычислить амплитуду рассеяния заряженной частицы внешним электромагнитным полем (или электромагнитным полем другой частицы) в ведущем порядке по этому полю. Для этого мы должны вычислить сумму вкладов всех фейнмановских диаграмм с одной входящей и одной выходящей линией, каждая из которых находится на массовой оболочке, и одной фотонной линией; при этом фотонная линия может находиться как на, так и вне массовой оболочки. В соответствии с теоремой § 6.4, эта сумма равна матричному элементу электромагнитного тока  $J^\mu(x)$  между одночастичными состояниями. В данном параграфе мы определим общий вид такого матричного элемента для частиц различных спинов, не обращаясь непосредственно к теории возмущений. Затем будут приведены некоторые полезные следствия этого результата.

В силу трансляционной инвариантности матричный элемент электромагнитного тока между одночастичными состояниями имеет вид

$$(\Psi_{\mathbf{p}',\sigma'}, J^\mu(x) \Psi_{\mathbf{p},\sigma}) = \exp(i(\mathbf{p} - \mathbf{p}') \cdot \mathbf{x})(\Psi_{\mathbf{p}',\sigma'} J^\mu(0) \Psi_{\mathbf{p},\sigma}). \quad (10.6.1)$$

Тогда закон сохранения  $\partial_\mu J^\mu = 0$  записывается следующим образом:

$$(p' - p)_\mu (\Psi_{\mathbf{p}',\sigma'}, J^\mu(0) \Psi_{\mathbf{p},\sigma}) = 0. \quad (10.6.2)$$

В (10.6.1) положим  $\mu = 0$  и проинтегрируем по трехмерному пространству:

$$(\Psi_{\mathbf{p}',\sigma'}, Q \Psi_{\mathbf{p},\sigma}) = (2\pi)^3 \delta^3(\mathbf{p} - \mathbf{p}') (\Psi_{\mathbf{p}',\sigma'} J^0(0) \Psi_{\mathbf{p},\sigma}).$$

Воспользовавшись (10.4.8), получим

$$(\Psi_{\mathbf{p}',\sigma'}, J^0(0) \Psi_{\mathbf{p},\sigma}) = (2\pi)^{-3} q \delta_{\sigma'\sigma}, \quad (10.6.3)$$

где  $q$  — заряд частицы.

Лоренцевская инвариантность также накладывает сильные ограничения на рассматриваемый матричный элемент, причем эти ограничения зависят от спина поля  $\Psi$ . Мы ограничимся здесь двумя важнейшими случаями: спин 0 и спин  $1/2$ . Заметим, что техника, развиваемая ниже, оказывается полезной также при изучении других токов, например в теории электрослабых взаимодействий.

*Спин 0*

В случае, когда спин поля  $\Psi$  равен нулю, матричный элемент (10.6.2) имеет вид

$$(\Psi_{\mathbf{p}'}, J^\mu(0)\Psi_{\mathbf{p}}) = q(2\pi)^{-3}(2p'^0)^{-1/2}(2p^0)^{-1/2}\mathcal{J}^\mu(p', p), \quad (10.6.4)$$

где  $p^0$  и  $p'^0$  — энергии частиц ( $p^0 = \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}$ ), а  $\mathcal{J}^\mu(p', p)$  — векторная функция двух 4-векторов  $p'^\mu$  и  $p^\mu$  (обратите внимание, что в выражении (10.6.4) мы выделили множитель  $q$  из  $\mathcal{J}$ ). Очевидно, что наиболее общим видом функции  $\mathcal{J}$  является линейная комбинация векторов  $p'^\mu$  и  $p^\mu$ , или, что то же самое, линейная комбинация  $p'^\mu + p^\mu$  и  $p'^\mu - p^\mu$  со скалярными коэффициентами. Из  $p'^\mu$  и  $p^\mu$ , очевидно, можно составить лишь один скаляр  $p \cdot p'$ , так как оба эти 4-вектора лежат на массовой оболочке и  $p^2 = p'^2 = -m^2$ . Таким образом, любая скалярная функция импульсов  $p$  и  $p'$  зависит только от  $p \cdot p'$ , или, что то же самое, от величины

$$k^2 \equiv (p - p')^2 = -2m^2 - 2p \cdot p'. \quad (10.6.5)$$

Следовательно, функция  $\mathcal{J}^\mu(p', p)$  имеет вид

$$\mathcal{J}^\mu(p', p) = (p' + p)^\mu F(k^2) + i(p' - p)^\mu H(k^2). \quad (10.6.6)$$

Ток  $J^\mu$  эрмитов, т.е.  $\mathcal{J}^\mu(p', p)^* = \mathcal{J}^\mu(p, p')$ , поэтому  $F(k^2)$  и  $H(k^2)$  действительны.

Пользуясь очевидным равенством  $(p - p')(p' + p) = 0$  и законом сохранения (10.6.2), получим:

$$H(k^2) = 0. \quad (10.6.7)$$

Также, полагая в выражении (10.6.4)  $\mathbf{p} = \mathbf{p}'$  и  $\mu = 0$ , и сравнивая с равенством (10.6.3), находим следующее условие для  $F(k^2)$

$$F(0) = 1. \quad (10.6.8)$$

В литературе функцию  $F(k^2)$  называют *электромагнитным формфактором* частицы.

*Спин 1/2*

Пусть теперь спин поля  $\Psi$  равен  $1/2$ . Тогда из лоренц-инвариантности следует, что матричный элемент тока между одночастичными состояниями имеет общий вид

$$(\Psi_{\mathbf{p}', \sigma'}, J^\mu(0)\Psi_{\mathbf{p}, \sigma}) = iq(2\pi)^{-3}\bar{u}(\mathbf{p}', \sigma')\Gamma^\mu(p', p)u(\mathbf{p}, \sigma), \quad (10.6.9)$$

где  $\Gamma^\mu$  — 4-векторная матричная функция размера  $4 \times 4$ , зависящая от  $p^\nu$ ,  $p'^\nu$  и  $\gamma^\nu$ , а  $u$  — спиноры. Мы также выделили множитель  $iq$  для того, чтобы нормировка  $\Gamma^\mu$  совпадала с принятой в предыдущем параграфе.

Как и любая матрица  $4 \times 4$ ,  $\Gamma^\mu$  может быть разложена по базису, состоящему из матриц 1,  $\gamma_\rho$ ,  $[\gamma_\rho, \gamma_\sigma]$ ,  $\gamma_5\gamma_\rho$ ,  $\gamma_5$ . Следовательно, 4-векторную функцию  $\Gamma^\mu$  можно записать как линейную комбинацию следующих матриц:

$$\begin{aligned} 1 &: p^\mu, p'^\mu \\ \gamma_\rho &: \gamma^\mu, p^\mu \hat{p}, p^\mu \hat{p}', p'^\mu \hat{p}', p'^\mu \hat{p} \\ [\gamma_\rho, \gamma_\sigma] &: [\gamma^\mu, \hat{p}], [\gamma^\mu, \hat{p}'], [\hat{p}, \hat{p}']p^\mu, [\hat{p}, \hat{p}']p'^\mu \\ \gamma_5\gamma_\rho &: \gamma_5\gamma_\rho \epsilon^{\rho\mu\nu\sigma} p_\nu p'_\sigma \\ \gamma_5 &: \text{нет,} \end{aligned}$$

причем коэффициенты этой линейной комбинации зависят только от скалярной переменной (10.6.5). Далее, спиноры  $u$  и  $\bar{u}$  удовлетворяют уравнению Дирака:

$$\bar{u}(\mathbf{p}', \sigma')(i\hat{p}' + m) = 0, \quad (i\hat{p} + m)u(\mathbf{p}, \sigma) = 0,$$

что позволяет оставить в разложении  $\Gamma^\mu$  лишь три слагаемых, соответствующих  $p^\mu$ ,  $p'^\mu$  и  $\gamma^\mu$ <sup>1)</sup>. Таким образом, при  $p$  и  $p'$ , лежащих на массовой оболочке,  $\Gamma^\mu$  может быть записана как линейная комбинация матриц  $\gamma^\mu$ ,  $p^\mu$  и  $p'^\mu$ :

$$\begin{aligned} \bar{u}(\mathbf{p}', \sigma')\Gamma^\mu(p', p)u(\mathbf{p}, \sigma) &= \\ &= \bar{u}(\mathbf{p}', \sigma') \left[ \gamma^\mu F(k^2) - \frac{i}{2m} (p + p')^\mu G(k^2) + \frac{(p - p')^\mu}{2m} H(k^2) \right] u(\mathbf{p}, \sigma). \end{aligned} \quad (10.6.10)$$

<sup>1)</sup> Действительно, очевидно, что члены  $p^\mu \hat{p}$ ,  $p'^\mu \hat{p}$ ,  $p^\mu \hat{p}'$ ,  $p'^\mu \hat{p}'$  можно заменить соответственно на  $ip^\mu$ ,  $ip'^\mu$ ,  $imp^\mu$ ,  $imp'^\mu$ . Пользуясь коммутационными соотношениями матриц Дирака, запишем  $[\gamma^\mu, \hat{p}]$  в следующем виде

$$[\gamma^\mu, \hat{p}] = 2\gamma^\mu \hat{p} - \{\gamma^\mu, \hat{p}\} = 2\gamma^\mu \hat{p} - 2p^\mu.$$

Следовательно, матрица  $[\gamma^\mu, \hat{p}]$  может быть заменена на  $2im\gamma^\mu - 2p^\mu$ . Такое же самое рассуждение годится и для  $[\gamma^\mu, \hat{p}']$ . Далее,

$$[\hat{p}, \hat{p}'] = -2\hat{p}'\hat{p} + \{\hat{p}, \hat{p}'\} = -2\hat{p}'\hat{p} + 2p \cdot p',$$

а это выражение эквивалентно, так как мы рассматриваем  $\Gamma^\mu$  в спинорных обкладках, величине  $2m^2 + 2pp' = -k^2$ . Таким образом, члены  $[\hat{p}, \hat{p}']p^\mu$  и  $[\hat{p}, \hat{p}']p'^\mu$  также не дают ничего нового. Наконец, для последнего члена воспользуемся соотношением

$$\gamma_5\gamma_\rho \epsilon^{\rho\mu\nu\sigma} = \frac{1}{6} i(\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\sigma + \gamma^\sigma\gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\sigma\gamma^\mu - \gamma^\nu\gamma^\mu\gamma^\sigma - \gamma^\mu\gamma^\sigma\gamma^\nu - \gamma^\sigma\gamma^\nu\gamma^\mu).$$

Легко видеть, что свертка этого выражения с  $p_\nu$  и  $p'_\sigma$  с последующим переносом всех  $\hat{p}$  направо и всех  $\hat{p}'$  налево вновь дает линейную комбинацию  $p^\mu$ ,  $p'^\mu$  и  $\gamma^\mu$ .

Из эрмитовости  $J^\mu(0)$  следует соотношение

$$\beta\Gamma^{\mu\dagger}(p', p)\beta = -\Gamma^\mu(p, p'), \quad (10.6.11)$$

поэтому  $F(k^2)$ ,  $G(k^2)$  и  $H(k^2)$  — действительные функции переменной  $k^2$ .

Первые два члена в разложении (10.6.10) автоматически удовлетворяют закону сохранения (10.6.2), так как

$$(p' - p)_\mu \gamma^\mu = -i[(i\hat{p}' + m) - (i\hat{p} + m)]$$

и

$$(p' - p) \cdot (p' + p) = p'^2 - p^2.$$

С другой стороны,  $(p' - p)^2 \neq 0$ , поэтому из закона сохранения (10.6.2) следует равенство

$$H(k^2) = 0. \quad (10.6.12)$$

В пределе  $\mathbf{p}' \rightarrow \mathbf{p}$  выражения (10.6.9) и (10.6.10) принимают вид

$$(\Psi_{\mathbf{p}, \sigma'} J^\mu(0) \Psi_{\mathbf{p}, \sigma}) = i(2\pi)^{-3} \bar{u}(\mathbf{p}, \sigma') \left[ \gamma^\mu F(0) - \frac{i}{m} p^\mu G(0) \right] u(\mathbf{p}, \sigma).$$

Пользуясь тождеством  $\{\gamma_\mu, i\hat{p} + m\} = 2m\gamma^\mu + 2ip^\mu$ , получим:

$$\bar{u}(\mathbf{p}, \sigma') \gamma^\mu u(\mathbf{p}, \sigma) = -\frac{ip^\mu}{m} \bar{u}(\mathbf{p}, \sigma') u(\mathbf{p}, \sigma).$$

Вспомним также, что справедливо соотношение

$$\bar{u}(\mathbf{p}, \sigma') u(\mathbf{p}, \sigma) = \delta_{\sigma\sigma'} m/p^0,$$

поэтому

$$(\Psi_{\mathbf{p}, \sigma'}, J^\mu(0) \Psi_{\mathbf{p}, \sigma}) = q(2\pi)^{-3} (p^\mu/p^0) \delta_{\sigma\sigma'} [F(0) + G(0)]. \quad (10.6.13)$$

Сравнив равенства (10.6.13) и (10.6.3), получим условие нормировки:

$$F(0) + G(0) = 1. \quad (10.6.14)$$

Заметим, что вершинную функцию  $\Gamma^\mu$  обычно записывают как линейную комбинацию матриц  $\gamma^\mu$  и  $[\gamma^\mu, \gamma^\nu](p' - p)_\nu$ :

$$\begin{aligned} \bar{u}(\mathbf{p}', \sigma') \Gamma^\mu(p', p) u(\mathbf{p}, \sigma) &= \\ &= \bar{u}(\mathbf{p}', \sigma') \left[ \gamma^\mu F_1(k^2) + \frac{1}{2} i[\gamma^\mu, \gamma^\nu](p' - p)_\nu F_2(k^2) \right] u(\mathbf{p}, \sigma). \end{aligned} \quad (10.6.15)$$

Выразим функции  $F$  и  $G$ , определенные в (10.6.10), через  $F_1$  и  $F_2$ :

$$\begin{aligned} \bar{u}(\mathbf{p}', \sigma') \frac{1}{2} i[\gamma^\mu, \gamma^\nu](p' - p)_\nu u(\mathbf{p}, \sigma) &= \\ &= \bar{u}(\mathbf{p}', \sigma') \left[ -i\hat{p}' \gamma^\mu + \frac{1}{2} i\{\gamma^\mu, \hat{p}'\} - i\gamma^\mu \hat{p} + \frac{1}{2} i\{\gamma^\mu, \hat{p}'\} \right] u(\mathbf{p}, \sigma) = \\ &= \bar{u}(\mathbf{p}', \sigma') [i(p'^\mu + p^\mu) + 2m\gamma^\mu] u(\mathbf{p}, \sigma). \end{aligned} \quad (10.6.16)$$

Сравнив (10.6.15) с (10.6.16), получим

$$F(k^2) = F_1(k^2) + 2mF_2(k^2), \quad (10.6.17)$$

$$G(k^2) = -2mF_2(k^2). \quad (10.6.18)$$

Условие нормировки (10.6.14) теперь имеет вид

$$F_1(0) = 1.$$

Перейдем теперь к важному приложению доказанного результата. А именно, получим соотношение между магнитным моментом частицы и формфакторами. Для этого рассмотрим пространственную часть вершинной функции при малых импульсах  $|\mathbf{p}|, |\mathbf{p}'| \ll m$ . Удобно переписать разложение (10.6.10), воспользовавшись тождеством (10.6.16):

$$\bar{u}(\mathbf{p}', \sigma')\Gamma^\mu(p', p)u(\mathbf{p}, \sigma) = \frac{-i}{2m}\bar{u}(\mathbf{p}', \sigma')\left[(p + p')^\mu\{F(k^2) + G(k^2)\} - \frac{1}{2}[\gamma^\mu, \gamma^\nu](p' - p)_\nu F(k^2)\right]u(\mathbf{p}, \sigma). \quad (10.6.19)$$

Из выражений (5.4.9) и (5.4.20) следует, что матричный элемент коммутатора двух гамма-матриц между состояниями с нулевыми импульсами равен

$$\bar{u}(0, \sigma')[\gamma^i, \gamma^j]u(0, \sigma) = 4i\epsilon_{ijk}(J_k^{(1/2)})_{\sigma', \sigma}, \quad \bar{u}(0, \sigma')[\gamma^i, \gamma^0]u(0, \sigma) = 0,$$

где  $\mathbf{J}^{(1/2)} = \frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma}$  — матрицы спинового момента 1/2. Поэтому в первом порядке по малым импульсам имеем

$$\begin{aligned} \bar{u}(\mathbf{p}', \sigma')\Gamma(p', p)u(\mathbf{p}, \sigma) &\rightarrow \frac{-i}{2m}(\mathbf{p} + \mathbf{p}')\delta_{\sigma', \sigma} + \\ &+ \frac{1}{m}[(\mathbf{p} - \mathbf{p}') \times \mathbf{J}^{(1/2)}]_{\sigma', \sigma}F(0). \end{aligned} \quad (10.6.20)$$

Следовательно<sup>2)</sup>, матричный элемент гамильтонiana взаимодействия  $H' = -\int d^3x \mathbf{J}(\mathbf{x})A(\mathbf{x})$  (напомним, что мы предполагаем, что поле  $A(\mathbf{x})$  слабое и не зависит от времени) имеет вид

$$\begin{aligned} (\Psi_{\mathbf{p}', \sigma'}, H'\Psi_{\mathbf{p}, \sigma}) &= \\ &= \frac{-iqF(0)}{m(2\pi)^3} \int d^3x e^{i(\mathbf{p}-\mathbf{p}') \cdot \mathbf{x}} A(\mathbf{x}) \cdot [(\mathbf{p} - \mathbf{p}') \times \mathbf{J}^{(1/2)}]_{\sigma', \sigma} = \\ &= -\frac{qF(0)}{m(2\pi)^3} \int d^3x e^{i(\mathbf{p}-\mathbf{p}') \cdot \mathbf{x}} (\mathbf{J}^{(1/2)})_{\sigma', \sigma} \cdot \mathbf{B}(\mathbf{x}), \end{aligned} \quad (10.6.21)$$

<sup>2)</sup> Первый член в уравнении (10.6.20) соответствует кинетической энергии частицы в электромагнитном поле и не влияет на магнитный момент, поэтому мы его не учтываем.

где  $\mathbf{B} = \nabla \times A$  — магнитное поле. Поэтому в пределе постоянного магнитного поля матричный элемент гамильтониана взаимодействия равен

$$(\Psi_{\mathbf{p}',\sigma'}, H' \Psi_{\mathbf{p},\sigma}) = -\frac{qF(0)}{m} (\mathbf{J}^{(1/2)})_{\sigma',\sigma} \cdot \mathbf{B} \delta^3(\mathbf{p} - \mathbf{p}'). \quad (10.6.22)$$

Как известно, магнитный момент  $\mu$  произвольной частицы спина  $j$  удовлетворяет соотношению

$$(\Psi_{\mathbf{p}',\sigma'}, H' \Psi_{\mathbf{p},\sigma}) = -\frac{\mu}{j} (\mathbf{J}^j)_{\sigma',\sigma} \cdot \mathbf{B} \delta^3(\mathbf{p} - \mathbf{p}'). \quad (10.6.23)$$

Сравнив (10.6.23) с выражением (10.6.22), найдем магнитный момент частицы, имеющей спин  $1/2$ , заряд  $q$  и массу  $m$ :

$$\mu = \frac{qF(0)}{2m}. \quad (10.6.24)$$

Эта формула содержит в качестве специального случая знаменитый результат Дирака [7]: магнитный момент частицы, обладающей спином  $1/2$ , без учета радиационных поправок равен  $\mu = q/2m$ .

В заключение приведем без доказательства формулу Розенблюта для дифференциального сечения электрон-протонного рассеяния, позволяющую находить протонные формфакторы  $F(k^2)$  и  $G(k^2)$  при  $k^2 > 0$  из экспериментальных данных:

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{e^4}{4(4\pi)^2 E_0^2} \frac{\cos^2(\theta/2)}{\sin^4(\theta/2)} \left[ 1 + \frac{2E_0}{m} \sin^2(\theta/2) \right]^{-1} \times \\ \times \left\{ (F(k^2) + G(k^2))^2 + \frac{k^2}{4m^2} (2F^2(k^2) \operatorname{tg}^2(\theta/2) + G^2(k^2)) \right\}, \end{aligned}$$

где  $E_0$  — энергия налетающего электрона (предполагается, что  $E_0 \gg \gg m_e$ ),  $\theta$  — угол рассеяния и

$$k^2 = \frac{4E_0^2 \sin^2(\theta/2)}{1 + (2E_0/m) \sin^2(\theta/2)}.$$

## § 10.7. Представление Челлена–Лемана<sup>1)</sup>

Как мы видели в § 10.2, фурье-образ матричного элемента хронологически упорядоченного произведения операторов имеет полюсы, обусловленные одночастичными промежуточными состояниями. Из-за многочастичных промежуточных состояний возникают более сложные сингулярности, описание которых для матричного элемента общего вида является чрезвычайно трудным. Однако в некоторых специальных случаях все-таки удается полностью установить аналитическую структуру амплитуды. В частности, для вакуумного среднего двух операторов существует интегральное представление Челлена–Лемана, из которого легко следует вид сингулярностей.

<sup>1)</sup> Материал этого параграфа выходит за рамки основного содержания книги и может быть опущен при первом чтении.

Это представление особенно полезно при изучении вакуумного среднего произведения двух элементарных полей, т.е. пропагатора. Например, оно позволяет получить интересные ограничения на асимптотическое поведение пропагатора и величины констант перенормировки.

Рассмотрим комплексное скалярное поле  $\Phi(x)$  в представлении Гейзенберга; частица, соответствующая этому полю, может быть как элементарной, так и составной. Вакуумное среднее произведения  $\langle \Phi(x)\Phi^\dagger(y) \rangle$  может быть записано в виде

$$\langle \Phi(x)\Phi^\dagger(y) \rangle_0 = \sum_n \langle 0|\Phi(x)|n\rangle \langle n|\Phi^\dagger(y)|0\rangle, \quad (10.7.1)$$

где суммирование производится по полному набору состояний. Выберем состояния  $n$  так, чтобы они были собственными векторами оператора 4-импульса  $P^\mu$ . Тогда из трансляционной инвариантности следуют соотношения

$$\begin{aligned} \langle 0|\Phi(x)|n\rangle &= \exp(ip_n \cdot x) \langle 0|\Phi(0)|n\rangle, \\ \langle n|\Phi^\dagger(y)|0\rangle &= \exp(-ip_n \cdot y) \langle n|\Phi^\dagger(0)|0\rangle, \end{aligned} \quad (10.7.2)$$

поэтому

$$\langle \Phi(x)\Phi^\dagger(y) \rangle_0 = \sum_n \exp(ip_n \cdot (x - y)) |\langle 0|\Phi(0)|n\rangle|^2. \quad (10.7.3)$$

Удобно переписать выражение (10.7.3) в терминах так называемой *спектральной функции*. Заметим, что сумма

$$\sum_n \delta^4(p - p_n) |\langle 0|\Phi(0)|n\rangle|^2$$

— скалярная функция 4-вектора  $p_\mu$  и поэтому может зависеть лишь от  $p^2$  и от ступенчатой функции  $\theta(p^0)$ . На самом деле для любого промежуточного состояния в (10.7.3)  $p^2 \leq 0$  и  $p^0 > 0$ , следовательно, эта сумма имеет вид

$$\sum_n \delta^4(p - p_n) |\langle 0|\Phi(0)|n\rangle|^2 = (2\pi)^{-3} \theta(p^0) \rho(-p^2), \quad (10.7.4)$$

где  $\rho(-p^2) = 0$  для  $p^2 > 0$  (отметим, что мы выделили множитель  $(2\pi)^{-3}$  из  $\rho$ ). Очевидно, что спектральная функция  $\rho(-p^2)$  действительна и положительна. Пользуясь определением (10.7.4), перепишем выражение (10.7.3) в виде

$$\begin{aligned} \langle \Phi(x)\Phi^\dagger(y) \rangle_0 &= (2\pi)^{-3} \int d^4p \exp(ip \cdot (x - y)) \theta(p^0) \rho(-p^2) = \\ &= (2\pi)^{-3} \int d^4p \int_0^\infty d\mu^2 \exp(ip \cdot (x - y)) \theta(p^0) \rho(\mu^2) \delta(p^2 + \mu^2). \end{aligned} \quad (10.7.5)$$

Сменим порядок интегрирования по  $p^\mu$  и  $\mu^2$ :

$$\langle \Phi(x)\Phi^\dagger(y) \rangle_0 = \int_0^\infty d\mu^2 \rho(\mu^2) \Delta_+(x-y; \mu^2), \quad (10.7.6)$$

где  $\Delta_+$  — уже знакомая нам функция

$$\Delta_+(x-y; \mu^2) \equiv (2\pi)^{-3} \int d^4 p \exp(ip \cdot (x-y)) \theta(p^0) \delta(p^2 + \mu^2). \quad (10.7.7)$$

Аналогично можно доказать формулу

$$\langle \Phi^\dagger(y)\Phi(x) \rangle_0 = \int_0^\infty d\mu^2 \bar{\rho}(\mu^2) \Delta_+(y-x; \mu^2), \quad (10.7.8)$$

где вторая спектральная функция  $\bar{\rho}(\mu^2)$  определяется следующим образом

$$\sum_n \delta^4(p - p_n) |\langle n | \Phi(0) | 0 \rangle|^2 = (2\pi)^{-3} \theta(p^0) \bar{\rho}(-p^2). \quad (10.7.9)$$

Теперь воспользуемся требованием причинности, которое состоит в том, что при пространственно-подобных интервалах  $x - y$  коммутатор  $[\Phi(x), \Phi^\dagger(y)]$  равен нулю. Вакуумное среднее этого коммутатора имеет вид

$$\langle [\Phi(x), \Phi^\dagger(y)] \rangle_0 = \int_0^\infty d\mu^2 (\rho(\mu^2) \Delta_+(x-y; \mu^2) - \bar{\rho}(\mu^2) \Delta_+(y-x; \mu^2)). \quad (10.7.10)$$

Как было показано в § 5.2, для пространственно-подобных разностей  $x - y$  функция  $\Delta_+(x-y)$  является четной. Следовательно, для того чтобы выражение (10.7.10) обращалось в нуль при  $(x-y)^2 \geq 0$ , необходимо выполнение соотношения

$$\rho(\mu^2) = \bar{\rho}(\mu^2). \quad (10.7.11)$$

Равенство (10.7.11) замечательно тем, что оно представляет собой частный случай СРТ-теоремы, доказанный без обращения к теории возмущений. Фактически, мы показали, что для каждого одночастичного состояния, имеющего квантовые числа оператора  $\Phi$ , существует состояние той же массы с квантовыми числами  $\Phi^\dagger$ .

Используя (10.7.11), получим, что вакуумное среднее хронологически упорядоченного произведения двух операторов  $\Phi(x)$  и  $\Phi^\dagger(y)$  равно

$$\langle T\{\Phi(x)\Phi^\dagger(y)\} \rangle_0 = -i \int_0^\infty d\mu^2 \rho(\mu^2) \Delta_F(x-y; \mu^2), \quad (10.7.12)$$

где  $\Delta_F(x - y; \mu^2)$  — фейнмановский пропагатор бесспиновой частицы массы  $\mu$ :

$$-i\Delta_F(x - y; \mu^2) \equiv \theta(x^0 - y^0)\Delta_+(x - y; \mu^2) - \theta(y^0 - x^0)\Delta_+(y - x; \mu^2). \quad (10.7.13)$$

Пользуясь обозначениями § 10.3 для полного пропагатора, введем функцию

$$-i\Delta'(p) \equiv \int d^4x \exp(-ip \cdot (x - y)) \langle T\{\Phi(x)\Phi^\dagger(y)\}\rangle_0. \quad (10.7.14)$$

Напомним, что фейнмановский пропагатор свободной частицы в импульсном представлении имеет вид

$$\int d^4x \exp(-ip \cdot (x - y))\Delta_F(x - y; \mu^2) = \frac{1}{p^2 + \mu^2 - i\epsilon}. \quad (10.7.15)$$

Из уравнений (10.7.12), (10.7.14) и (10.7.15) легко получить спектральное представление [9] для полного пропагатора

$$\Delta'(p) = \int_0^\infty \rho(\mu^2) \frac{d\mu^2}{p^2 + \mu^2 - i\epsilon}. \quad (10.7.16)$$

Немедленным следствием результата (10.7.16) и положительности спектральной плотности  $\rho(\mu^2)$  является тот факт, что  $\Delta'(p)$  не может убывать при  $|p^2| \rightarrow \infty$  быстрее<sup>2)</sup>, чем затравочный пропагатор  $1/(p^2 + m^2 - i\epsilon)$ . Именно по этой причине невозможно введение в невозмущенный лагранжиан членов с высшими производными, из-за которых пропагатор убывал бы быстрее, чем  $1/p^2$  при  $p^2 \rightarrow \infty$ : допустив наличие таких членов, мы бы немедленно получили противоречие с постулатами положительности нормы гильбертова пространства квантовой механики.

С помощью представления Челлена–Лемана и канонических коммутационных соотношений можно вывести полезное неравенство для

---

<sup>2)</sup> В действительности, заранее нельзя сказать, убывает ли  $\Delta'(p)$  при  $p^2 \rightarrow \infty$ , хотя может показаться, что этот факт следует из спектрального представления. Проблема возникает при смене порядка интегрирования по  $p^\mu$  и  $\mu^2$ . Методами следующего параграфа можно показать, что  $\Delta'(p)$  — аналитическая функция  $-p^2$  с разрезом вдоль полуоси  $-p^2 = \mu^2$  и скачком на этом разрезе, равным  $i\rho(\mu^2)$ . Отсюда следует, что

$$\Delta'(p) = P(p^2) + (-p^2 + \mu_0^2)^n \int_0^\infty \frac{\rho(\mu^2)}{(\mu^2 + \mu_0^2)^n} \frac{d\mu^2}{p^2 + \mu^2 - i\epsilon},$$

где  $n$  — положительное целое,  $\mu_0^2$  — произвольная положительная константа и  $P(p^2)$  — зависящий от  $\mu_0^2$  полином  $(n - 1)$ -го порядка по  $p^2$  (для  $n = 0$  он отсутствует).

константы перенормировки поля. Для стандартным образом нормированного полевого оператора  $\Phi(x)$  справедливо равенство

$$\left[ \frac{\partial \Phi(\mathbf{x}, t)}{\partial t}, \Phi^\dagger(\mathbf{y}, t) \right] \equiv -i\delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}). \quad (10.7.17)$$

Заметим, что

$$\frac{\partial}{\partial x^0} \Delta_+(x - y) \Big|_{x^0=y^0} = -i\delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}).$$

Тогда из спектрального представления (10.7.10) и коммутационных соотношений (10.7.17) следует соотношение

$$\int_0^\infty \rho(\mu^2) d\mu^2 = 1. \quad (10.7.18)$$

Это означает, что пропагатор неперенормированного поля в импульсном пространстве (10.7.16) имеет при  $p^2 \rightarrow \infty$  такое же асимптотическое поведение, как и в случае свободного поля:

$$\Delta'(p) \rightarrow \frac{1}{p^2}.$$

Отметим, что этот результат имеет смысл только при использовании какой-либо регуляризационной схемы, которая позволяет обращаться с ультрафиолетовыми расходимостями, возникающими при применении теории возмущений.

Предположим, что одночастичное состояние  $|\mathbf{k}\rangle$  массы  $m$  имеет ненулевое перекрытие с состоянием  $\langle 0|\Phi(0)$ . Вид матричного элемента  $\langle 0|\Phi(0)|\mathbf{k}\rangle$  определяется лоренц-инвариантностью:

$$\langle 0|\Phi(0)|\mathbf{k}\rangle = (2\pi)^{-3/2} (2\sqrt{\mathbf{k}^2 + m^2})^{-1/2} N, \quad (10.7.19)$$

где  $N$  — постоянная. В соответствии с общими результатами § 10.3 пропагатор  $\Delta'(p)$  неперенормированного поля имеет полюс при  $p^2 \rightarrow -m^2$  с вычетом  $Z = |N|^2 > 0$ , т.е.

$$\rho(\mu^2) = Z\delta(\mu^2 - m^2) + \sigma(\mu^2), \quad (10.7.20)$$

где  $\sigma(\mu^2) \geq 0$  представляет собой вклад многочастичных состояний. Отсюда, воспользовавшись также (10.7.18), получим

$$1 = Z + \int_0^\infty \sigma(\mu^2) d\mu^2, \quad (10.7.21)$$

поэтому

$$Z \leq 1, \quad (10.7.22)$$

причем равенство имеет место только для свободной частицы, так как в этом случае все матричные элементы  $\langle 0|\Phi(0)$  с многочастичными состояниями равны нулю.

Так как постоянная перенормировки  $Z$  положительна, то равенство (10.7.21) можно трактовать также как ограничение на константу связи поля  $\Phi$  с многочастичными состояниями:

$$\int_0^\infty \sigma(\mu^2) d\mu^2 \leq 1. \quad (10.7.23)$$

Равенство в (10.7.23) достигается при  $Z = 0$ . При выполнении условия  $Z = 0$  частицу надо интерпретировать как составную, а не элементарную [10]. В данном контексте составной частицей мы называем частицу, поле которой не присутствует в лагранжиане. Рассмотрим такую частицу, причем для определенности пусть она нейтральна и имеет спин нуль. Предположим, что оператор  $F(\Psi)$ , сконструированный из других полей, является оператором уничтожения этой композитной частицы. В лагранжиан можно легко ввести поле  $\Phi$  для рассматриваемой частицы, добавив член<sup>3)</sup>

$$\Delta\mathcal{L} = (\Phi - F(\Psi))^2.$$

В самом деле, из-за квадратичного функционального интегрирования по  $\Phi$  производящий функционал лишь умножится на несущественную бесконечную постоянную. Но давайте вместо тривиального интегрирования по  $\Phi$  представим  $\Delta\mathcal{L}$  в виде  $\Delta\mathcal{L}_0 + \Delta\mathcal{L}_1$ , где

$$\Delta\mathcal{L}_0 \equiv -\frac{1}{2} \partial_\mu \Phi \partial^\mu \Phi - \frac{1}{2} m^2 \Phi^2$$

— обычный лагранжиан свободного поля. Часть лагранжиана  $\Delta\mathcal{L}_1$  рассмотрим в качестве возмущения. Член  $\frac{1}{2} \partial_\mu \Phi \partial^\mu \Phi$  во взаимодействии не есть что-то новое: аналогичный член, умноженный на  $1 - Z$ , присутствовал в (10.3.12); единственная особенность в данном случае заключается в том, что  $Z = 0$ . Но физический смысл меняется кардинально: теперь условие перенормировки  $\Pi^{**}(0) = 0$  фиксирует константу связи композитной частицы, а не постоянную  $Z$ . К сожалению, описанную выше процедуру нельзя применить в квантовой теории поля, так как мы видели, что равенство  $Z = 0$  означает, что частица взаимодействует со своими составляющими максимально сильно, а значит, теория возмущений неприменима. Однако условие  $Z = 0$  оказывается очень полезным в нерелятивистской квантовой механике; например, оно позволяет получить константы взаимодействия дейтрана с протоном и нейtronом [12].

Спектральное представление (10.7.16) легко можно обобщить на случай полей произвольного спина. Действительно, в следующей гла-

<sup>3)</sup> В физике конденсированного состояния такая операция известна под названием преобразования Хаббарда–Стратоновича. Мы воспользуемся этим приемом во втором томе для того, чтобы корректно определить волновую функцию пары сверхпроводящих электронов.

ве мы покажем, что в первом порядке по  $e^2$   $Z$ -фактор электромагнитного поля (обычно обозначаемый  $Z_3$ ) равен

$$Z_3 = 1 - \frac{e^2}{12\pi^2} \ln\left(\frac{\Lambda^2}{m_e^2}\right)$$

(где  $\Lambda \gg m_e$  — параметр ультрафиолетового обрезания), что находитсѧ в соответствии с ограничением (10.7.22)

## § 10.8. Дисперсионные соотношения<sup>1)</sup>

Ранние попытки применить пертурбативную квантовую теорию поля к слабым и сильным ядерным взаимодействиям не увенчались успехом, поэтому теоретики начали разрабатывать методы, которые позволяли бы выйти за пределы теории возмущений. В частности, в конце 50-х годов для получения непертурбативных результатов, справедливых в любой теории, было предложено использовать свойства аналитичности и унитарности амплитуд рассеяния. С помощью этих свойств удалось доказать так называемые *дисперсионные соотношения*. Простейшее дисперсионное соотношение [13], известное с начала века, представляет собой формулу, выражющую действительную часть показателя преломления через интеграл от его мнимой части. Оно было выведено из свойства аналитичности показателя преломления как функции частоты, которое следует из того, что электромагнитный сигнал в среде не может двигаться быстрее света. Выразив показатель преломления через амплитуду рассеяния фотона вперед, дисперсионное соотношение можно переписать как формулу, связывающую действительную часть амплитуды рассеяния фотона вперед с интегралом от ее мнимой части, а значит (по оптической теореме), и с полным сечением рассеяния. Это соотношение особенно интересно тем, что оно в каком-то смысле представляет собой альтернативу обычной теории возмущений: зная амплитуду рассеяния до порядка  $e^2$ , можно вычислить сечение и мнимую часть амплитуды до порядка  $e^4$ , а затем воспользоваться дисперсионным соотношением и получить действительную часть амплитуды рассеяния вперед с той же точностью; при этом не придется вычислять ни одной петлевой диаграммы!

Основы современного подхода к дисперсионным соотношениям были заложены в 1954 г. Гелл-Маном, Голдбергером и Тирингом [14]. Вместо того чтобы рассматривать распространение света в среде, они вывели аналитичность амплитуды рассеяния непосредственно из условия микроскопической причинности, состоящего в том, что ком-

---

<sup>1)</sup> Материал этого параграфа выходит за рамки основного содержания книги и может быть опущен при первом чтении.

мутаторы полей равны нулю, если точки, в которых берутся полевые операторы, разделены пространственно-подобным интервалом. С помощью этого метода Голдбергер [15] вскоре получил весьма полезное уравнение для пион-нуклонной амплитуды рассеяния вперед.

Для того чтобы понять, как может быть использован принцип микроскопической причинности, рассмотрим рассеяние вперед безмассового бозона произвольного спина на мишени  $\alpha$  с массой  $m_\alpha > 0$  и импульсом  $\mathbf{p}_\alpha = 0$ <sup>2)</sup>.  $S$ -матричный элемент такого процесса можно получить, воспользовавшись теоремой Лемана–Симанчика–Циммермана (10.3.4):

$$\begin{aligned} S = & \frac{1}{(2\pi)^3 \sqrt{4\omega\omega'} |N|^2} \times \\ & \times \lim_{k^2 \rightarrow 0} \lim_{k'^2 \rightarrow 0} \int d^4x \int d^4y e^{-ik'\cdot y} e^{ik\cdot x} (i\Box_y) (i\Box_x) \langle \alpha | T\{A^\dagger(y), A(x)\} | \alpha \rangle. \end{aligned} \quad (10.8.1)$$

Здесь  $k$  и  $k'$  — начальный и конечный импульсы бозона, а  $\omega = k^0$ ,  $\omega' = k'^0$ ;  $A(x)$  — произвольный оператор в гейзенберговском представлении, удовлетворяющий условию

$$\langle \text{VAC} | A(x) | k \rangle = (2\pi)^{-3/2} (2\omega)^{-1/2} N e^{ikx} \neq 0.$$

Здесь  $|k\rangle$  — однобозонное состояние. Для фотонного рассеяния в качестве  $A(x)$  следует взять одну из поперечных компонент электромагнитного поля, в то время как для пионного рассеяния — псевдоскалярную функцию адронных полей. Заметим, что дифференциальные операторы  $-i\Box_x$  и  $-i\Box_y$  в выражении (10.8.1) требуются для сокращения пропагаторов внешних бозонных линий. Действуя операторами  $-i\Box_x$  и  $-i\Box_y$  на  $A(x)$  и  $A^\dagger(y)$  соответственно, получим

$$\begin{aligned} S = & \frac{-1}{(2\pi)^3 \sqrt{4\omega\omega'} |N|^2} \times \\ & \times \lim_{k^2 \rightarrow 0} \lim_{k'^2 \rightarrow 0} \int d^4x \int d^4y e^{-ik'\cdot y} e^{ik\cdot x} \langle \alpha | T\{J^\dagger(y), J(x)\} | \alpha \rangle + \text{ETC}, \end{aligned} \quad (10.8.2)$$

где  $J(x) = \Box_x A(x)$ , а слагаемое ЕТС обозначает фурье-образ членов с одновременными коммутаторами, которые возникают при дифференцировании ступенчатых функций в хронологически упорядоченном произведении. Одновременные коммутаторы таких операторов, как  $A^\dagger(y)$  и  $A(x)$  (или их производных) отличны от нуля лишь при  $\mathbf{x} = \mathbf{y}$ , поэтому член ЕТС в формуле (10.8.2) представляет собой

---

<sup>2)</sup> Отметим, что рассуждения, приводимые ниже, применимы не только к фотонам, но и к пионам в пределе больших энергий.

фурье-образ функции  $\delta^4(x - y)$ , на которую подействовали некоторым дифференциальным оператором; следовательно, ЕТС есть полином от 4-импульса бозона. Нас, однако, интересуют лишь аналитические свойства  $S$ -матричного элемента, а добавление полинома их не меняет, поэтому далее вклад ЕТС можно не учитывать.

Воспользовавшись трансляционной инвариантностью,  $S$ -матричный элемент можно записать в виде

$$S = -2\pi i \delta^4(k' - k) M(\omega),$$

где

$$M(\omega) = \frac{-i}{2\omega|N|^2} F(\omega), \quad (10.8.3)$$

$$F(\omega) \equiv \int d^4x e^{i\omega l \cdot x} \langle \alpha | T\{J^\dagger(0), J(x)\} | \alpha \rangle + \text{ETC}, \quad (10.8.4)$$

здесь мы ввели обозначение  $k^\mu = \omega l^\mu$ , где  $l$  — фиксированный 4-вектор, такой, что  $l^\mu l_\mu = 0$  и  $l^0 = 1$ .

Хронологически упорядоченное произведение может быть выражено через коммутаторы двумя способами:

$$\begin{aligned} T\{J^\dagger(0), J(x)\} &= \theta(-x^0)[J^\dagger(0), J(x)] + J(x)J^\dagger(0) = \\ &= -\theta(x^0)[J^\dagger(0), J(x)] + J^\dagger(0)J(x). \end{aligned} \quad (10.8.5)$$

Поэтому амплитуда  $F$  имеет вид

$$F(\omega) = F_A(\omega) + F_+(\omega) = F_R(\omega) + F_-(\omega), \quad (10.8.6)$$

где

$$F_A(\omega) \equiv \int d^4x \theta(-x^0) \langle \alpha | [J^\dagger(0), J(x)] | \alpha \rangle e^{i\omega l \cdot x} + \text{ETC}, \quad (10.8.7)$$

$$F_R(\omega) \equiv - \int d^4x \theta(x^0) \langle \alpha | [J^\dagger(0), J(x)] | \alpha \rangle e^{i\omega l \cdot x} + \text{ETC}, \quad (10.8.8)$$

$$F_+(\omega) \equiv \int d^4x \langle \alpha | J(x) J^\dagger(0) | \alpha \rangle e^{i\omega l \cdot x}, \quad (10.8.9)$$

$$F_-(\omega) \equiv \int d^4x \langle \alpha | J^\dagger(0) J(x) | \alpha \rangle e^{i\omega l \cdot x}. \quad (10.8.10)$$

Из принципа микроскопической причинности следует, что подынтегральные выражения в (10.8.7) и (10.8.8) отличны от нуля, только если  $x^\mu$  лежит внутри светового конуса, причем ступенчатые функции налагают еще одно ограничение: в (10.8.7)  $x^\mu$  лежит в световом конусе прошлого, т.е.  $(x \cdot l) > 0$ , а в (10.8.8) — в конусе будущего, т.е.  $(x \cdot l) < 0$ . Отсюда заключаем, что  $F_A(\omega)$  — аналитическая функция частоты при  $\text{Im } \omega > 0$ , а  $F_R(\omega)$  — аналитическая при  $\text{Im } \omega < 0$ , так как экспоненциальные множители делают интегралы равномерно сходящимся. (Напомним, что ЕТС — полином, т.е. функция, аналитическая во всех точках, кроме бесконечности). Тогда мы можем определить

функцию

$$\mathcal{F}(\omega) \equiv \begin{cases} F_A(\omega), & \operatorname{Im} \omega > 0, \\ F_R(\omega), & \operatorname{Im} \omega < 0, \end{cases} \quad (10.8.11)$$

аналитическую на всей комплексной плоскости, кроме разреза вдоль действительной оси.

Приступим к выводу дисперсионных соотношений. В соответствии с (10.8.6) скачок  $\mathcal{F}(\omega)$  при любом действительном  $E$  равен

$$\mathcal{F}(E + i\epsilon) - \mathcal{F}(E - i\epsilon) = F_A(E) - F_R(E) = F_-(E) - F_+(E). \quad (10.8.12)$$

Если  $\mathcal{F}(\omega)/\omega^n$  стремится к нулю при  $|\omega| \rightarrow \infty$  то, поделив ее на любой полином  $P(\omega)$  порядка  $n$ , получим функцию, которая стремится к нулю при  $|\omega| \rightarrow \infty$  и является аналитической всюду, кроме разреза на действительной оси и полюсов в нулях  $\omega_\nu$  полинома  $P(\omega)$ . Заметим, что в случае, когда  $\mathcal{F}(\omega) \rightarrow 0$  при  $|\omega| \rightarrow \infty$ , мы можем взять  $P(\omega) = 1$ . Воспользовавшись теоремой о вычетах, запишем

$$\frac{\mathcal{F}(\omega)}{P(\omega)} + \sum_{\nu} \frac{\mathcal{F}(\omega_\nu)}{(\omega_\nu - \omega)P'(\omega_\nu)} = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{\mathcal{F}(z) dz}{(z - \omega)P(z)}, \quad (10.8.13)$$

где  $\omega$  — произвольная точка, не лежащая на действительной оси, а  $C$  — контур, состоящий из двух замкнутых кривых: 1) прямая  $(-\infty + i\epsilon; +\infty + i\epsilon)$ , лежащая чуть выше действительной оси и полуокружность в верхней полуплоскости 2) прямая  $(-\infty - i\epsilon; +\infty - i\epsilon)$ , лежащая чуть ниже действительной оси и полуокружность в нижней полуплоскости. Вкладом от интегрирования по большим полуокружностям в уравнении (10.8.13) можно пренебречь, так как  $\mathcal{F}(z)/P(z) \rightarrow 0$  при  $|z| \rightarrow \infty$ . Используя (10.8.12), перепишем (10.8.13) в виде

$$\mathcal{F}(\omega) = Q(\omega) + \frac{P(\omega)}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{F_-(E) - F_+(E)}{(E - \omega)P(E)} dE, \quad (10.8.14)$$

где  $Q(\omega)$  — следующий полином  $(n - 1)$ -го порядка:

$$Q(\omega) \equiv -P(\omega) \sum_{\nu} \frac{\mathcal{F}(\omega_\nu)}{(\omega_\nu - \omega)P'(\omega_\nu)}.$$

Дисперсионное соотношение (10.8.14), в котором полиномы  $P(\omega)$  и  $Q(\omega)$  имеют порядки  $n$  и  $n - 1$  соответственно, называется соотношением с  $n$  вычитаниями. Если можно выбрать  $P = 1$ , то говорят, что мы имеем дисперсионное соотношение без вычитаний.

Если  $\omega$  приближается к действительной оси сверху, то из (10.8.14) имеем

$$F_A(\omega) = Q(\omega) + \frac{P(\omega)}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{F_-(E) - F_+(E)}{(E - \omega - i\epsilon)P(E)} dE, \quad (10.8.15)$$

С помощью выражений (10.8.6) и (3.1.25) получим

$$F(\omega) = Q(\omega) + \frac{1}{2} F_-(\omega) + \frac{1}{2} F_+(\omega) + \frac{P(\omega)}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{F_-(E) - F_+(E)}{(E - \omega)P(E)} dE, \quad (10.8.16)$$

где  $1/(E - \omega)$  надо трактовать в смысле главного значения. Этот результат замечателен тем, что позволяет связать  $F_{\pm}(E)$  с измеряемыми сечениями рассеяния. В самом деле, вставим между операторами  $J$  в определениях (10.8.9) и (10.8.10) полный набор многочастичных промежуточных состояний. Пользуясь трансляционной инвариантностью, получим

$$F_+(E) = (2\pi)^4 \sum_{\beta} |\langle \beta | J^\dagger(0) | \alpha \rangle|^2 \delta^4(-p_{\alpha} + El + p_{\beta}), \quad (10.8.17)$$

$$F_-(E) = (2\pi)^4 \sum_{\beta} |\langle \beta | J(0) | \alpha \rangle|^2 \delta^4(p_{\alpha} + El - p_{\beta}). \quad (10.8.18)$$

Теперь можно выразить величины  $F_{\pm}(E)$  непосредственно через матричные элементы физических процессов поглощения бозона  $B + \alpha \rightarrow \beta$  и антибозона  $B^c + \alpha \rightarrow \beta$ , определяемые следующим образом

$$-2\pi i M_{B^c + \alpha \rightarrow \beta} = \frac{(2\pi)^4}{(2\pi)^{3/2} \sqrt{2E_{B^c}} N} \langle \beta | J^\dagger(0) | \alpha \rangle, \quad (10.8.19)$$

$$-2\pi i M_{B + \alpha \rightarrow \beta} = \frac{(2\pi)^4}{(2\pi)^{3/2} \sqrt{2E_B} N} \langle \beta | J(0) | \alpha \rangle. \quad (10.8.20)$$

Сравнив с уравнением (3.4.15), получим<sup>3)</sup>:

$$F_+(E) = \theta(-E) \frac{2|E||N|^2}{(2\pi)^3} \sigma_{\alpha+B^c}(|E|), \quad (10.8.21)$$

$$F_-(E) = \theta(E) \frac{2E|N|^2}{(2\pi)^3} \sigma_{\alpha+B}(E). \quad (10.8.22)$$

Тогда амплитуда рассеяния при действительном  $\omega > 0$  равна

$$M(\omega) = \frac{-iQ(\omega)}{2\omega|N|^2} - \frac{i}{2(2\pi)^3} \sigma_{\alpha+B}(\omega) - \\ - \frac{P(\omega)}{\omega(2\pi)^4} \int_0^{\infty} \left[ \frac{\sigma_{\alpha+B}(E)}{(E - \omega)P(E)} + \frac{\sigma_{\alpha+B^c}(E)}{(E + \omega)P(-E)} \right] E dE. \quad (10.8.23)$$

<sup>3)</sup> В некоторых случаях правила отбора не запрещают процессы  $\alpha \rightarrow \alpha + B$  и  $\alpha \rightarrow \alpha + B^c$  и функции  $F_+(E)$ ,  $F_-(E)$  содержат также члены, соответствующие вкладу одночастичного промежуточного состояния  $\alpha$ . Отметим, что при рассеянии поперечно-поляризованных фотонов и псевдоскалярных пионов в пределе  $m_{\pi} \rightarrow 0$  процессы  $\alpha \rightarrow \alpha + B$  и  $\alpha \rightarrow \alpha + B^c$  невозможны.

Дисперсионные соотношения принято записывать для амплитуды  $f(\omega)$  рассеяния вперед в лабораторной СО. Амплитуда  $f(\omega)$  определена таким образом, что дифференциальное сечение рассеяния вперед есть  $|f(\omega)|^2$ . С помощью соотношения

$$f(\omega) = -4\pi^2 \omega M(\omega) = 2\pi^2 iF(\omega)/|N|^2$$

величина  $f(\omega)$  может быть выражена через  $M(\omega)$ , поэтому уравнение (10.8.23) принимает вид

$$\begin{aligned} f(\omega) &= R(\omega) + \frac{i\omega}{4\pi} \sigma_{\alpha+B}(\omega) + \\ &\quad + \frac{P(\omega)}{4\pi^2} \int_0^\infty \left[ \frac{\sigma_{\alpha+B}(E)}{(E-\omega)P(E)} + \frac{\sigma_{\alpha+B^c}(E)}{(E+\omega)P(-E)} \right] E dE, \end{aligned}$$

где  $R(\omega) = 2i\pi^2 Q(\omega)/|N|^2$ . Из оптической теоремы (3.6.4) следует, что второй член в левой части этого выражения равен  $i \operatorname{Im} f(\omega)$ , поэтому

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} f(\omega) &= R(\omega) + \\ &\quad + \frac{P(\omega)}{4\pi^2} \int_0^\infty \left[ \frac{\sigma_{\alpha+B}(E)}{(E-\omega)P(E)} + \frac{\sigma_{\alpha+B^c}(E)}{(E+\omega)P(-E)} \right] E dE. \quad (10.8.24) \end{aligned}$$

Из уравнения (10.8.24), в частности, видно, что если полином  $P(\omega)$  выбран действительным, то  $R(\omega)$  также будет чисто действительным.

Амплитуда рассеяния вперед обладает важной симметрией. Заменив в (10.8.7) и (10.8.8) переменную интегрирования  $x$  на  $-x$  и пользуясь трансляционной инвариантностью

$$\langle \alpha | [J^\dagger(0), J(-x)] | \alpha \rangle = \langle \alpha | [J^\dagger(x), J(0)] | \alpha \rangle,$$

получим, что при  $\operatorname{Im} \omega \leq 0$  функция  $F_A(-\omega)$  совпадает с  $F_R(\omega)$  с точностью до замены  $J$  на  $J^\dagger$ . То есть,

$$F_A(-\omega) = F_R^c(\omega) \quad \text{при } \operatorname{Im} \omega \leq 0,$$

где индекс  $c$  показывает, что амплитуда относится к процессу рассеяния античастицы  $B^c$  на минпени  $\alpha$ . (Мы оставляем читателю проверку того, что члены, возникающие из одновременных коммутаторов в (10.8.7) и (10.8.8), не влияют на это соотношение). Аналогично находим

$$F_R(-\omega) = F_A^c(\omega) \quad \text{при } \operatorname{Im} \omega \geq 0,$$

а для действительных  $\omega$  имеем:

$$F_\pm(-\omega) = F_\mp(\omega).$$

Подставив эти соотношения в (10.8.6), получим уравнение, выражающее свойство кроссинг-симметрии:

$$f(-\omega) = f^c(\omega), \quad (10.8.25)$$

справедливое для действительных  $\omega$ .

Мы можем выбрать в качестве  $P(\omega)$  любой полином достаточно высокого порядка; тогда  $R(\omega)$  зависит от самого  $P(\omega)$  и от значений  $\mathcal{F}(\omega)$  в нулях  $P(\omega)$ . В случае, когда  $P(\omega)$  является действительным полиномом  $n$ -го порядка, уравнение (10.8.16) содержит в качестве свободных параметров лишь  $n$  коэффициентов полинома  $R(\omega)$  (который, очевидно, тоже действителен). Таким образом, для данного  $P(\omega)$  число независимых действительных параметров в (10.8.16) равно  $n$ . Поэтому удобнее всего выбрать  $n$  наименьшим из возможных.

Нельзя взять  $n = 0$ , так как  $P(\omega)$  должен удовлетворять условию  $f(\omega)/P(\omega) \rightarrow 0$  при  $\omega \rightarrow \infty$ . Как мы видели в § 3.7, амплитуда рассеяния вперед растет при  $\omega \rightarrow \infty$  не быстрее, чем  $\omega \ln^2 \omega$ , поэтому в качестве  $P(E)$  надо выбрать полином второго порядка. Возьмем  $P(E) = E^2$ . Тогда дисперсионное соотношение (10.8.24) примет вид

$$\operatorname{Re} f(\omega) = a + b\omega + \frac{\omega^2}{4\pi^2} \int_0^\infty \left[ \frac{\sigma_{\alpha+B}(E)}{E - \omega} + \frac{\sigma_{\alpha+B^c}(E)}{E + \omega} \right] \frac{dE}{E}, \quad (10.8.26)$$

где  $a$  и  $b$  — неизвестные действительные константы. Из кроссинг-симметрии (10.8.25) следует, что аналогичные константы в дисперсионном соотношении для амплитуды рассеяния античастицы равны

$$a^c = a, \quad b^c = -b. \quad (10.8.27)$$

Если бы сечения  $\sigma_{\alpha+B}(E)$  и  $\sigma_{\alpha+B^c}(E)$  вели себя при  $E \rightarrow \infty$  как две различные константы, умноженные на  $(\ln E)^r$ , то из (10.8.26) мы бы получили

$$\operatorname{Re} f(\omega) \sim [\sigma_{\alpha+B}(\omega) - \sigma_{\alpha+B^c}(\omega)]\omega \ln \omega \sim \omega (\ln \omega)^{r+1}, \quad (10.8.28)$$

т.е. действительная часть амплитуды рассеяния росла бы при  $\omega \rightarrow \infty$  быстрее, чем ее мнимая часть. Но это невозможно: как показано в § 3.7, действительная часть амплитуды рассеяния должна быть гораздо меньше ее мнимой части при  $\omega \rightarrow \infty$ ; это подтверждается всеми экспериментами. Отсюда мы заключаем, что если  $\sigma_{\alpha+B}(E)$  и  $\sigma_{\alpha+B^c}(E)$  *действительно* ведут себя при  $E \rightarrow \infty$  как две постоянные, умноженные на  $(\ln E)^r$ , то эти постоянные одинаковы. Так как нас интересует предел больших энергий, то этот результат применим не только к рассеянию безмассовых частиц, и можно утверждать, что отношение сечений рассеяния *любой* частицы и ее античастицы на одной и той же мишени равно единице в пределе больших энергий. Этот результат представляет собой обобщение теоремы Померанчука [16]. Померанчук рассмотрел лишь случай  $r = 0$ . Как анализ, проведенный нами в § 3.7, так и экспериментальные данные показывают, что на самом деле  $r = 2$ .

Померанчук получил оценки на асимптотическое поведение амплитуд рассеяния исходя из аргументов, аналогичных приведенным в § 3.7. В настоящее время для получения таких результатов обычно применяют более мощную методику, называемую теорией полюсов

Редже [17] или реджистикой. Эта теория очень обширна, и мы не будем вдаваться в детали; скажем лишь, что для адронных процессов асимптотическое поведение  $f(\omega)$  при  $\omega \rightarrow \infty$  определяется суммой членов, пропорциональных  $\omega^{\alpha_n(0)}$ , где  $\alpha_n(t)$  — множество “траекторий Редже”, каждая из которых соответствует обмену бесконечным числом адронов в процессе рассеяния. Для главной траектории<sup>4)</sup> в адрон-адронном рассеянии,  $\alpha(0)$  близко к единице. Такая траектория называется помероном. Из существования померона следует, что сечение рассеяния примерно постоянно при больших энергиях. В соответствии с теоремой Померанчука померон одинаково взаимодействует с любым адроном и его античастицей.

Показатель  $\alpha_n(0)$  для низших траекторий Редже можно оценить исходя из спектра адронных состояний. Необходимое, хотя и недостаточное [18] условие возникновения мезонного резонанса массы  $m$  и спина  $j$  заключается в том, что для одной из траекторий Редже  $\alpha(m^2) = j$ . Следующая за помероном траектория для пион-нуклонного рассеяния соответствует мезонным резонансам с  $j = 1$  при  $m = 770$  МэВ, с  $j = 2$  при  $m = 1690$  МэВ и с  $j = 5$  при  $m = 2350$  МэВ. Экстраполируя значения  $\alpha(t)$  в точку  $t = 0$ , получим, что для этой траектории  $\alpha(0) \approx 0.5$ . Такая траектория взаимодействует с  $\pi^+$  и  $\pi^-$  по-разному, поэтому мы ожидаем, что для пион-нуклонного рассеяния  $f(\omega) - f^c(\omega)$  ведет себя как  $\sqrt{\omega}$ .

В случае фотонного рассеяния частицы  $B$  и  $B^c$  тождественны, поэтому из выражения (10.8.27) следует, что  $b = 0$ . Тогда уравнение (10.8.26) примет вид

$$f(\omega) = a + \frac{\omega^2}{2\pi^2} \int_0^\infty \frac{\sigma(E)}{E^2 - \omega^2} dE. \quad (10.8.29)$$

Это, по существу, известное соотношение Крамерса–Кронига. Как мы увидим в § 13.5, для мишени с зарядом  $e$  и массой  $m$  постоянная  $a$  равна  $\text{Re } f(0) = -e^2/m$ .

## Задачи

**1.** Рассмотрим нейтральное векторное поле  $v_\mu(x)$ . Какие условия нужно наложить на сумму одночастично-неприводимых диаграмм  $\Pi_{\mu\nu}^*(k)$  с двумя внешними линиями для того, чтобы перенормированному полю соответствовала частица с перенормированной массой  $m$ ? Каким образом следует разделить лагранжиан на свободную и взаимодействующую части?

**2.** Получите обобщенное тождество Уорда, которому удовлетворяет вершинная функция взаимодействия заряженного скалярного и электромагнитного полей.

---

<sup>4)</sup> На самом деле, комплекса многих траекторий.

**3.** Какова наиболее общая форма матричного элемента

$$\langle \mathbf{p}_2\sigma_2 | J^\mu(x) | \mathbf{p}_1\sigma_1 \rangle$$

электромагнитного тока  $J^\mu(x)$  между двумя одночастичными состояниями, обладающими *различными* массами  $m_1$  и  $m_2$ , одинаковыми спинами  $1/2$  и одинаковой четностью? Как изменится ответ, если четности различны? Предполагайте, что четность сохраняется.

**4.** Получите спектральное представление Челлена–Лемана для вакуумного среднего  $\langle T\{J^\mu(x)J^\nu(y)\}^\dagger \rangle_0$ , где  $J^\mu(x)$  — сохраняющийся комплексный ток.

**5.** Выведите спектральное представление Челлена–Лемана для вакуумного среднего  $\langle T\{\psi_n(x)\bar{\psi}_m(y)\} \rangle$ , где  $\psi(x)$  — дираковское поле.

**6.** Покажите, что амплитуда рассеяния фотона вперед не может удовлетворять дисперсионным соотношениям без вычитаний, не используя предположения об асимптотическом поведении сечений при больших энергиях.

**7.** Получите спектральное представление для комплексного скалярного поля, пользуясь методами теории рассеяния.

**8.** С помощью результатов § 8.7 и дисперсионной теории найдите амплитуду фотон–электронного рассеяния вперед в системе отсчета, в которой электрон поконится, с точностью  $e^4$ .

## Литература

1. *Furry W.H.* // Phys. Rev. **51**, 125 (1937).
2. *Yukawa H.* // Proc. Phys.-Math. Soc. Japan. **17**, 48 (1935).
3. *Lehmann H., Symanzik K., and Zimmerman W.* // Nuovo Cimento. **1**, 205 (1955).
4. *Takahashi Y.* // Nuovo Cimento, Ser. 10. **6**, 370, (1957).
5. *Ward J.C.* // Phys. Rev. **78**, 182 (1950).
6. *Schwinger J.* // Phys. Rev. Lett. **3**, 296 (1959).
7. *Dirac P.A.M.* // Proc. Roy. Soc. (London). **A117**, 610 (1928).
8. *Rosenbluth M.N.* // Phys. Rev. **79**, 615 (1950).
9. *Källen G.* // Helv. Phys. Acta. **25**, 417 (1952); Quantum Electrodynamics. Springer-Verlag, Berlin, 1972; *Lehmann H.* // Nuovo Cimento. **11**, 342 (1954).
10. *Howard J.C., Jouvet B.* // Nuovo Cimento. **18**, 466 (1960); *Vaughan M.J., Aaron R., Amado R.D.* // Phys. Rev. **1254**, 1258 (1961); *Weinberg S.* // B Proceedings of the 1962 High-Energy Conference at CERN. CERN, Geneva, 1962. P. 683.

11. *Stratonovich R.L.* // Sov. Phys. Dokl. **2**, 416 (1957); *Hubbard J.* // Phys. Rev. Lett. **3**, 77 (1959).
12. *Weinberg S.* // Phys. Rev. **137**, B672 (1965).
13. *Kramers H.A.* // Atti Congr. Intern. Fisici, Como. Nikolo Zanichelli, Bologna, 1927; перепечатано в *Kramers H.A. Collected Scientific Papers*. North-Holland, Amsterdam, 1956; *de Kronig R.* // Ned. Tyd. Nat. Kunde. **9**, 402 (1942); *Physica*. **12**, 543 (1946); *Toll J.S. The Dispersion Relation for Light and its Application to Problems Involving Electron Pairs*. Princeton University Ph. D. Thesis 1952. Исторический обзор можно найти в *Jackson J.D.* в сборнике *Dispersion Relations*, ed. by G.R. Screamton. Oliver and Boyd, Edinburgh, 1961; *Goldberger M.L.* в сборнике *Dispersion Relations and Elementary Particles*, ed. by C. De Witt and R. Omnes. Hermann, Paris, 1960.
14. *Gell-Mann M., Goldberger M.L., Thirring W.* // Phys. Rev. **95**, 1612 (1954). То, что этот результат имеет непертурбативную природу, было показано в *Goldberger M.L.* // Phys. Rev. **97**, 508 (1955).
15. *Goldberger M.L.* // Phys. Rev. **99**, 979 (1955).
16. *Pomeranchuk I.Ia.* // ЖЭТФ. **34**, 725 (1958). Обобщение дано в *Weinberg S.* // Phys. Rev. **124**, 2049 (1961).
17. См., например, *Collins P.D.B. An Introduction to Regge Theory and High Energy Physics*. Cambridge University Press, Cambridge, 1977. Оригинальная работа по этому вопросу *Regge T.* // Nuovo Cimento. **14**, 951 (1959); **18**, 947 (1960).
18. Зависимость спина от квадрата массы известна как график Чью–Фраути; см. *Chew G.F., Frautschi S.C.* // Phys. Rev. Lett. **8**, 41 (1962).  
Аналитические свойства квантовых амплитуд изложены, например, в следующих книгах на русском языке. (*Примеч. ред.*)
- 19\*. *де Альфаро B., Реджес Т.* Потенциальное рассеяние.—М.: Мир, 1966.
- 20\*. *Чью Дж.* Аналитическая теория  $S$ -матрицы.—М.: Мир, 1968.
- 21\*. *Боголюбов Н.Н., Медведев Б.В., Полианов М.К.* Вопросы теории дисперсионных соотношений.—М.: ГИФМЛ, 1958.

---

\* Добавлено при переводе.

# ОДНОПЕТЛЕВЫЕ РАДИАЦИОННЫЕ ПОПРАВКИ В КВАНТОВОЙ ЭЛЕКТРОДИНАМИКЕ

В этой главе мы вычислим некоторые классические однопетлевые поправки в теории заряженных лептонов (массивных частиц со спином  $1/2$ , взаимодействующих с электромагнитным полем). Известны три вида, или “аромата”, лептонов: электрон, мюон и более тяжелый, недавно открытый таон. Для определенности мы будем проводить все вычисления для случая электрона, но большая их часть применима также и к мюону с таоном. Сделав некоторые обобщения в § 11.1, мы вычислим амплитуду поляризации вакуума в § 11.2, аномальный магнитный момент электрона в § 11.3 и собственную энергию электрона в § 11.4. По ходу дела мы будем использовать некоторые математические методы, которые окажутся полезными в таких вычислениях. Например, метод параметров Фейнмана, поворот Вика, размерную регуляризацию т’ Хофта и Вельтмана, а также другой более старый метод регуляризации, принадлежащий Паули и Вилларсу. Хотя нам будут встречаться расходимости, мы увидим, что искомые результаты конечны, если их выразить через перенормированные заряд и массу. В гл. 12 мы обобщим результаты, полученные здесь, на случай общих моделей и произвольный порядок теории возмущений.

## § 11.1. Контрчлены

Плотность лагранжиана, описывающего электроны и фотоны, имеет вид<sup>1)</sup>

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_B^{\mu\nu} - \bar{\psi}_B [\gamma_\mu [\delta^\mu + ie_B A_B^\mu] + m_B] \psi_B, \quad (11.1.1)$$

где

$$F_B^{\mu\nu} \equiv \partial^\mu A_B^\nu - \partial^\nu A_B^\mu,$$

$A_B^\mu$  и  $\psi_B$  — затравочные (т.е. неперенормированные) фотонное и электронное поля.  $-e_B$  и  $m_B$  обозначают затравочные (“толье”) заряд и массу электрона. Как мы делали в предыдущей главе, мы введем пе-

<sup>1)</sup> В этой главе мы не будем отличать друг от друга представление Гейзенберга и представление взаимодействия. Поэтому можно вернуться к удобным обозначениям, при которых заглавная буква  $A$  обозначает поле, соответствующее фотону, а строчная буква  $\psi$  — поле, соответствующее заряженной частице.

ренормированные поля, заряд и массу:

$$\psi \equiv Z_2^{-1/2} \psi_B, \quad (11.1.2)$$

$$A^\mu \equiv Z_3^{-1/2} A_B^\mu, \quad (11.1.3)$$

$$e \equiv Z_3^{+1/2} e_B, \quad (11.1.4)$$

$$m \equiv m_B + \delta_m, \quad (11.1.5)$$

причем константы  $Z_2$ ,  $Z_3$  и  $\delta m$  подберем таким образом, чтобы пропагаторы перенормированных полей имели полюсы в тех же точках и те же вычеты, что и пропагаторы свободных полей в отсутствие взаимодействий. Лагранжиан может тогда быть переписан через перенормированные величины:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2, \quad (11.1.6)$$

где

$$\mathcal{L}_0 = -\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} - \bar{\psi} [\gamma_\mu \delta^\mu + m] \psi, \quad (11.1.7)$$

$$\mathcal{L}_1 = -ie A_\mu \bar{\psi} \gamma^\mu \psi, \quad (11.1.8)$$

а  $\mathcal{L}_2$  равен сумме “контрчленов”

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_2 = & -\frac{1}{4} (Z_3 - 1) F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} - (Z_2 - 1) \bar{\psi} [\gamma_\mu \delta^\mu + m] \psi + \\ & + Z_2 \delta m \bar{\psi} \psi - ie (Z_2 - 1) A_\mu \bar{\psi} \gamma^\mu \psi. \end{aligned} \quad (11.1.9)$$

В дальнейшем мы покажем, что все слагаемые в  $\mathcal{L}_2$  представляют собой величины второго и более высоких порядков по  $e$ . Кроме того, этих слагаемых оказывается достаточно, чтобы уничтожить ультрафиолетовые расходимости, возникающие в диаграммах с петлями.

## § 11.2. Поляризация вакуума

Приступим теперь к нахождению петлевых радиационных поправок. В качестве первого примера мы вычислим так называемую амплитуду поляризации вакуума. Диаграмма, соответствующая ей, содержит поправки к пропагатору, т.е. к внутренней линии фотона. Поляризация вакуума приводит к сдвигу уровней энергии атома водорода (величину которого можно измерить на эксперименте), а также к важному сдвигу энергии мюона, обращающегося вокруг тяжелого ядра. Кроме того, как мы увидим в т. II, вычисление амплитуды поляризации вакуума является ключевым элементом для нахождения того, как ведут себя электродинамика и другие калибровочные теории при высоких энергиях.

Как и в § 10.5, через  $i(2\pi)^4 \Pi^{*\mu\nu}(q)$  обозначим сумму всех связных диаграмм с двумя внешними фотонными линиями, при этом

сами внешние фотонные линии, соответствующие фотонным пропагаторам, исключаются. При этом поляризационные индексы мы обозначаем греческими буквами  $\mu$ ,  $\nu$ , а переносимый четырехимпульс — буквой  $q$ . Звездочка показывает, что мы исключаем из рассмотрения диаграммы, которые можно разбить на два несвязанных между собой графа, разрезав какую-нибудь внутреннюю фотонную линию. Полный фотонный пропагатор  $\Delta'^{\mu\nu}$  дается формулой (10.5.13)

$$\Delta' = \Delta[1 - \Pi^* \Delta]^{-1}, \quad (11.2.1)$$

где  $\Delta^{\mu\nu}$  — фотонный пропагатор без учета радиационных поправок. Наша задача состоит в том, чтобы вычислить в ведущем порядке вклад в  $\Pi^{*\mu\nu}(q)$ .

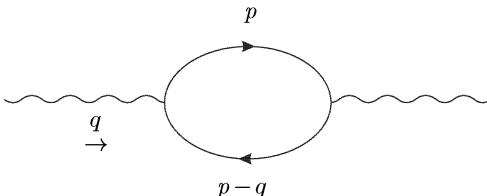


Рис. 11.1. Однопетлевая диаграмма, описывающая амплитуду поляризации вакуума в квантовой электродинамике. Волнистые линии соответствуют фотонам, сплошные линии со стрелками соответствуют электронам

Поправку наименьшего порядка можно изобразить однопетлевой диаграммой (см. рис. 11.1):

$$i(2\pi)^4 \Pi_{1 \text{ loop}}^{*\rho\sigma}(q) = - \int d^4 p \text{Tr} \left\{ \left[ \frac{-i}{(2\pi)^4} \frac{-i\hat{p} + m}{p^2 + m^2 - i\epsilon} \right] \times \right. \\ \left. \times [(2\pi)^4 e\gamma^\rho] \left[ \frac{-i}{(2\pi)^4} \frac{-i(\hat{p} - \hat{q}) + m}{(p - q)^2 + m^2 - i\epsilon} \right] [(2\pi)^4 e\gamma^\sigma] \right\} \quad (11.2.2)$$

Первый минус здесь возник из-за наличия фермионной петли. Упрощая полученное выражение, приходим к формуле

$$\Pi_{1 \text{ loop}}^{*\rho\sigma}(q) = \frac{-ie^2}{(2\pi)^4} \int d^4 p \frac{\text{Tr}\{[-i\hat{p} + m]\gamma^\rho[-i(\hat{p} - \hat{q}) + m]\gamma^\sigma\}}{(p^2 + m^2 - i\epsilon)((p - q)^2 + m^2 - i\epsilon)}. \quad (11.2.3)$$

Первым шагом на пути взятия этого интеграла является трюк, придуманный Фейнманом. Воспользуемся элементарной формулой:

$$\frac{1}{AB} = \int_0^1 \frac{dx}{[(1-x)A + xB]^2}, \quad (11.2.4)$$

чтобы переписать произведение скалярных пропагаторов в (11.2.3)

следующим образом:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{(p^2 + m^2 - i\epsilon)((p-q)^2 + m^2 - i\epsilon)} = \\ &= \int_0^1 [(p^2 + m^2 - i\epsilon)(1-x) + ((p-q)^2 + m^2 - i\epsilon)x]^{-2} dx = \\ &= \int_0^1 [p^2 + m^2 - i\epsilon - 2p \cdot qx + q^2 x]^{-2} dx = \\ &= \int_0^1 [(p - qx)^2 + m^2 - i\epsilon + q^2 x(1-x)]^{-2} dx. \end{aligned}$$

(В приложении к этой главе показано, как работать с такими интегралами.) Произведем теперь сдвиг переменной интегрирования в пространстве импульсов<sup>1)</sup>

$$p \rightarrow p + qx,$$

(11.2.3) сводится к

$$\begin{aligned} \Pi_1^{*\rho\sigma}_{\text{Loop}}(q) &= \frac{-ie^2}{(2\pi)^4} \int_0^1 dx \int d^4 p [p^2 + m^2 - i\epsilon + q^2 x(1-x)]^{-2} \times \\ &\quad \times \text{Tr}\{[-i(\hat{p} + \hat{q}x) + m]\gamma^\rho[-i(\hat{p} - \hat{q}(1-x)) + m]\gamma^\sigma\}. \end{aligned} \quad (11.2.5)$$

Используя результаты приложения к гл. 8, след можно легко вычислить:

$$\begin{aligned} \text{Tr}\{[-i(\hat{p} + \hat{q}x) + m]\gamma^\rho[-i(\hat{p} - \hat{q}(1-x)) + m]\gamma^\sigma\} &= \\ &= 4[-(p + qx)^\rho(p - q(1-x))^\sigma + (p + qx) \cdot (p - q(1-x))\eta^{\rho\sigma} - \\ &\quad - (p + qx)^\sigma(p - q(1-x))^\rho + m^2\eta^{\rho\sigma}]. \end{aligned} \quad (11.2.6)$$

Следующий шаг называется *поворотом Вика* [2]. Заметьте, что если  $-q^2 < 4m^2$ , то величина  $m^2 + q^2 x(1-x)$  положительна для всех  $0 < x < 1$ . Полюсы подынтегрального выражения в (11.2.5) расположены в точках  $p^0 = \pm\sqrt{p^2 + m^2 + q^2 x(1-x) - i\epsilon}$ , т.е. один полюс расположен чуть выше отрицательной вещественной полуоси, а второй — чуть ниже положительной вещественной полуоси (см. рис. 11.2). Контуры интегрирования по  $p^0$  можно повернуть против часовой стрелки, не пересекая при этом полюсов. В результате вместо интегрирования

<sup>1)</sup> Строго говоря, этот шаг справедлив только для сходящихся интегралов. В принципе, для обоснования возможности замены переменных, мы должны использовать несколько специальных приемов, делающих все интегралы сходящимися. К числу таких приемов относится размерная регуляризация, описанная ниже.

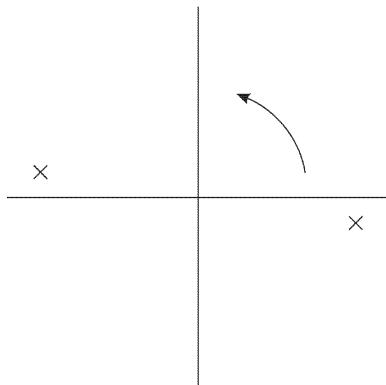


Рис. 11.2. Поворот Вика контура интегрирования по  $p^0$ . Крестиками отмечены полюсы в комплексной плоскости  $p^0$ . Стрелка показывает направление вращения контура интегрирования (от вещественной оси к мнимой)

по вещественной оси от  $-\infty$  до  $+\infty$ , мы интегрируем по мнимой оси от  $-i\infty$  до  $+i\infty$ . Вводя обозначение  $p^0 = ip^4$ , мы находим, что интегрирование можно производить по  $p^4$ ,  $-\infty < p^4 < +\infty$ . (Если в знаменателе пропагатора вместо  $i\epsilon$  стояло бы  $-i\epsilon$ , то тогда нам следовало бы положить  $p^0 = -ip^4$ , где опять область интегрирования по  $p^4$  совпадает бы с вещественной осью. Результатом являлось бы изменение знака  $\Pi_{1 \text{ loop}}^{*\rho\sigma}(q)$ .) Выражение (11.2.5) сводится тогда к

$$\begin{aligned} \Pi_{1 \text{ loop}}^{*\rho\sigma}(q) = & \frac{4e^2}{(2\pi)^4} \int_0^1 dx \int (d^4 p_E [p^2 + m^2 + q^2 x(1-x)]^{-2}) \times \\ & \times [-(p+qx)^\rho (p-q(1-x))^\sigma + (p+qx) \cdot (p-q(1-x)) \eta^{\rho\sigma} - \\ & - (p+qx)^\sigma (p-q(1-x))^\rho + m^2 \eta^{\rho\sigma}], \quad (11.2.7) \end{aligned}$$

где

$$(d^4 p)_E = dp^1 dp^2 dp^3 dp^4.$$

Все скалярные произведения вычисляются с использованием евклидовой метрики

$$a \cdot b = a^1 b^1 + a^2 b^2 + a^3 b^3 + a^4 b^4.$$

Здесь  $q^4 \equiv -iq^0$ , а  $\eta^{\rho\sigma}$  совпадает либо с символом Кронекера (индексы пробегают значения 1, 2, 3, 4), либо с обычным тензором Минковского (индексы пробегают значения 1, 2, 3, 0).

Интеграл (11.2.7) сильно расходится. В конечном счете, все бесконечности взаимно уничтожаются, но чтобы увидеть это, необходимо воспользоваться некой регуляризационной процедурой, делающей интегралы конечными. Нельзя просто обрезать интегралы, выбирая

в качестве верхнего предела интегрирования по  $p^\mu$  некоторый максимальный импульс  $\Lambda$  ( $p^2 < \Lambda^2$ ), поскольку такое обрезание равносильно умножению электронного пропагатора на ступенчатую функцию  $\theta(\Lambda^2 - p^2)$ . Из тождества Уорда (10.4.25) следует, что калибровочную инвариантность теории можно сохранить только, если одновременно изменить и электронный пропагатор, и электрон-фотонную вершину. Фактически, для учета радиационных поправок необходимо ввести не только ультрафиолетовое обрезание  $\Lambda$ , но и отличную от нуля массу фотона. Последняя величина полностью разрушает калибровочную инвариантность.

Опыт показывает, что самый удобный способ регуляризовать расходящийся интеграл, не нарушая при этом калибровочную инвариантность — это метод размерной регуляризации, разработанный Т. Хофтром и Вельтманом [3] в 1972 г. Он основан на представлении интеграла в виде функции от размерности пространственно-временной области интегрирования  $d$  ( $d$  при этом, вообще говоря, может быть комплексным). Чтобы вычислить интеграл типа (11.2.7), первым делом нужно проинтегрировать по угловым переменным, что сводится к вычеркиванию всех слагаемых, нечетных по  $p$ , и следующей подстановке в слагаемых, четных по  $p$ <sup>2</sup>):

$$p^\mu p^\nu \rightarrow p^2 \eta^{\mu\nu} / d, \quad (11.2.8)$$

$$p^\mu p^\nu p^\rho p^\sigma \rightarrow (p^2)^2 [\eta^{\mu\nu} \eta^{\rho\sigma} + \eta^{\mu\rho} \eta^{\nu\sigma} + \eta^{\mu\sigma} \eta^{\nu\rho}] / d(d+2), \quad (11.2.9)$$

Теперь, когда интеграл зависит только от  $p^2$ , следует заменить элемент объема области интегрирования  $d^4 p_E$  на  $\Omega_d k^{d-1} dk$ , где  $k \equiv \sqrt{p^2}$ , а  $\Omega_d$  — площадь поверхности  $d$ -мерной единичной сферы:

$$\Omega_d = 2\pi^{d/2} / \Gamma(d/2). \quad (11.2.10)$$

Интеграл (11.2.7) сходится, если  $d$  принимает комплексные значения. Мы можем аналитически продолжить интеграл из области комплексных  $d$  в точку  $d = 4$ . Расходимость в этом случае имеет вид полюса  $(d-4)^{-1}$ .

В случае интеграла (11.2.7) размерная регуляризация дает:

$$\begin{aligned} \Pi_{1 \text{ loop}}^{*\rho\sigma}(q) &= \frac{4e^2 \Omega_d}{(2\pi)^4} \int_0^1 dx \int_0^\infty \kappa^{d-1} dk [\kappa^2 + m^2 + q^2 x(1-x)]^{-2} \times \\ &\times \left[ \frac{-2\kappa^2}{d} \eta^{\rho\sigma} + 2q^\rho q^\sigma x(1-x) + (\kappa^2 - q^2 x(1-x)) \eta^{\rho\sigma} + m^2 \eta^{\rho\sigma} \right]. \end{aligned}$$

---

<sup>2)</sup> Эти выражения легче всего вывести, замечая, что их вид следует из лоренц-инвариантности и симметрии относительно перестановок индексов  $\mu, \nu, \rho$  и т.д. Множители перед метрическими тензорами можно найти, если потребовать равенство обеих частей после свертки по индексам  $\eta$ .

Интегралы по  $k$  можно вычислить для любого комплексного  $d$  (за исключением четных целых чисел). Воспользуемся хорошо известными формулами (приведенными в приложении к этой главе):

$$\int_0^\infty \kappa^{d-1} [\kappa^2 + \nu^2]^{-2} d\kappa = \frac{1}{2} (\nu^2)^{d/2-2} \Gamma(d/2) \Gamma(2-d/2), \quad (11.2.11)$$

$$\int_0^\infty \kappa^{d+1} [\kappa^2 + \nu^2]^{-2} d\kappa = \frac{1}{2} (\nu^2)^{d/2-1} \Gamma(1+d/2) \Gamma(1-d/2), \quad (11.2.12)$$

Получаем выражение

$$\begin{aligned} \Pi_{1 \text{ loop}}^{*\rho\sigma}(q) &= \frac{2e^2 \Omega_d}{(2\pi)^4} \times \\ &\times \int_0^1 dx [(1-2/d)\eta^{\rho\sigma}(m^2 + q^2 x(1-x))^{d/2-1} \Gamma(1+d/2) \Gamma(1-d/2) + \\ &+ (2q^\rho q^\sigma x(1-x) - q^2 \eta^{\rho\sigma} x(1-x) + m^2 \eta^{\rho\sigma})(m^2 + q^2 x(1-x))^{d/2-2} \times \\ &\times \Gamma(d/2) \Gamma(2-d/2)]. \end{aligned}$$

Два члена в подынтегральном выражении можно свести к одному, воспользовавшись формулой

$$(1-2/d)\Gamma(1+d/2)\Gamma(1-d/2) = -\Gamma(d/2)\Gamma(2-d/2).$$

В результате

$$\begin{aligned} \Pi_{1 \text{ loop}}^{*\rho\sigma}(q) &= \frac{4e^2 \Omega_d}{(2\pi)^4} \Gamma(d/2) \Gamma(2-d/2) (q^\rho q^\sigma - q^2 \eta^{\rho\sigma}) \times \\ &\times \int_0^1 dx x(1-x)(m^2 + q^2 x(1-x))^{d/2-2}. \quad (11.2.13) \end{aligned}$$

Отметим очень важное свойство полученного выражения: величина (11.2.13), дающая вклад в  $\Pi^{*\rho\sigma}$ , удовлетворяет соотношению

$$q_\rho \Pi_{1 \text{ loop}}^{*\rho\sigma}(q) = 0, \quad (11.2.14)$$

выведенному в § 10.5, исходя из закона сохранения электрического тока и его нейтральности. Мы, в общем-то, и применили метод размерной регуляризации для того, чтобы получить этот результат. Именно из этого факта, что закон сохранения тока не зависит от размерности пространства–времени, вытекает (11.2.14).

Гамма-функция  $\Gamma(2-d/2)$  в (11.2.13) сингулярна при  $d \rightarrow 4$ . К счастью, как мы видели в § 11.1, есть еще один член, который нужно привлечь к  $\Pi^{*\rho\sigma}(q)$ . Он возникает из-за наличия в лагранжиане слагае-

мого  $-\frac{1}{4}(Z_3 - 1)F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$ . Этот член имеет вид, похожий на (11.2.13):

$$\Pi_{\mathcal{L}_2}^{*\rho\sigma}(q) = -(Z_3 - 1)(q^2\eta^{\rho\sigma} - q^\rho q^\sigma), \quad (11.2.15)$$

Поэтому, с точностью до членов порядка  $e^2$ , полное выражение для  $\Pi^*$  имеет следующий вид:

$$\Pi^{*\rho\sigma}(q) = (q^2\eta^{\rho\sigma} - q^\rho q^\sigma)\pi(q^2), \quad (11.2.16)$$

где

$$\begin{aligned} \pi(q^2) = & -\frac{4e^2\Omega_d}{(2\pi)^4}\Gamma(d/2)\Gamma(2-d/2) \times \\ & \times \int_0^1 dx x(1-x)(m^2 + q^2x(1-x))^{d/2-2} - (Z_3 - 1). \end{aligned} \quad (11.2.17)$$

Как мы видели в § 10.5, для перенормированного электромагнитного поля должно выполняться равенство  $\pi(0) = 0$  (вычет полюса полностью фотонного пропагатора при  $q^2 = 0$  должен совпадать с вычетом затравочного пропагатора в той же самой точке, если при этом не учитывать члены, зависящие от калибровки). Поэтому, с точностью до слагаемых порядка  $e^2$ ,

$$Z_3 = 1 - \frac{4e^2\Omega_d}{(2\pi)^4}\Gamma(d/2)\Gamma(2-d/2)(m^2)^{d/2-2} \int_0^1 x(1-x)dx, \quad (11.2.18)$$

так что, в этом порядке,

$$\begin{aligned} \pi(q^2) = & -\frac{4e^2\Omega_d}{(2\pi)^4}\Gamma(d/2)\Gamma(2-d/2) \int_0^1 dx x(1-x) \times \\ & \times [(m^2 + q^2x(1-x))^{d/2-2} - (m^2)^{d/2-2}]. \end{aligned} \quad (11.2.19)$$

Теперь мы можем убрать регуляризацию, устремив  $d$  к его физическому значению  $d = 4$ . Как уже говорилось выше, в этом пределе гамма-функция сингулярна:

$$\Gamma(2-d/2) \rightarrow \frac{1}{(2-d/2)} - \gamma,$$

где  $\gamma = 0,5772157$  — постоянная Эйлера. Сингулярную часть  $Z_3 - 1$  можно получить, заменив  $\Gamma(2-d/2)$  на  $1/(2-d/2)$ , а  $d$  везде, где она не входит в аргумент гамма-функции, на 4:

$$(Z_3 - 1)_\infty = -\frac{4e^2 \cdot 2\pi^2}{6(2\pi)^4} \frac{1}{2-d/2} = \frac{e^2}{6(\pi)^2} \frac{1}{d-4}. \quad (11.2.20)$$

В т. II мы увидим, что этот результат можно использовать для вывода в ведущем порядке уравнения ренормгруппы для электрического заряда.

Полюсы при  $d = 4$  в  $\pi(q^2)$  взаимно уничтожаются очевидным образом, поскольку для  $d = 4$  оба выражения  $(m^2 + q^2x(1-x))^{d/2-2}$  и  $(m^2)^{d/2-2}$  стремятся к единице. По той же причине, член  $-\gamma$  в асимптотике  $\Gamma(2 - d/2)$  уничтожается, хотя его вклад в  $Z_3 - 1$  является конечным. Есть еще дополнительные конечные вклады в  $\Gamma(2 - d/2)$ , возникающие после умножения полюса  $\Gamma(2 - d/2)$  на сумму линейных членов разложения  $\Omega_d \Gamma(d/2)$  в окрестности точки  $d = 4$ , однако в полном выражении для  $\pi(q^2)$  они также взаимно уничтожаются. На самом деле, делая размерную регуляризацию, мы могли бы вместо  $(2\pi)^{-4}$  поставить  $(2\pi)^{-d}$ , а вместо множителя  $\text{Tr } 1 = 4$  — размерность  $2^{d/2}$  гамма-матриц в пространстве-времени с произвольной четной размерностью  $d$ . Отсюда также мог бы возникнуть конечный вклад в  $Z_3 - 1$ . Тем не менее, полное выражение для  $\pi(q^2)$  по-прежнему не изменится. Более того, величину  $e^2$  нельзя считать независящим от  $d$ , поскольку, как видно из (11.2.13), ее размерность  $[\text{mass}]^{4-d}$  от  $d$  зависит. Если же мы положим

$$e^2 \propto \mu^{4-d},$$

где  $\mu$  — некоторая величина с размерностью массы, то в выражении для  $Z_3 - 1$  появятся дополнительные слагаемые, отвечающие произведению полюса  $\Gamma(2 - d/2)$  на член  $(4 - d) \ln \mu$  в разложении  $\mu^{4-d}$  по степеням  $4 - d$ . Однако как и раньше, эти члены уничтожаются при учете однопетлевых поправок.

Единственные слагаемые, дающие вклад в  $\pi(q^2)$  в пределе  $d \rightarrow 4$ , возникают после умножения полюса  $\Gamma(2 - d/2)$  на линейные члены в разложениях выражений  $(m^2 + q^2x(1-x))^{d/2-2}$  и  $(m^2)^{d/2-2}$  по степеням  $d - 4$ :

$$(m^2 + q^2x(1-x))^{d/2-2} - (m^2)^{d/2-2} \rightarrow (d/2 - 2) \ln \left( 1 + \frac{q^2x(1-x)}{m^2} \right). \quad (11.2.21)$$

В результате мы получаем:

$$\pi(q^2) = \frac{e^2}{2\pi^2} \int_0^1 x(1-x) \ln \left( 1 + \frac{q^2x(1-x)}{m^2} \right) dx. \quad (11.2.22)$$

Физическую важность явления поляризации вакуума можно увидеть, если рассмотреть влияние ее на сечение рассеяния двух заряженных частиц со спином  $1/2$ . На рис. 11.3 представлены фейнмановские диаграммы, суммарный вклад которых в  $S$ -матричный элемент имеет вид

$$S_a(1, 2 \rightarrow 1', 2') = (2\pi)^{-12/2} \delta^4(p_{1'} + p_{2'} - p_1 - p_2) [e_1 (2\pi)^4 \bar{u}_{1'} \gamma^\mu u_1] \times \\ \times \left[ -i(2\pi)^4 \frac{1}{q^2} \right] [e_2 (2\pi)^4 \bar{u}_{2'} \gamma_\mu u_2],$$

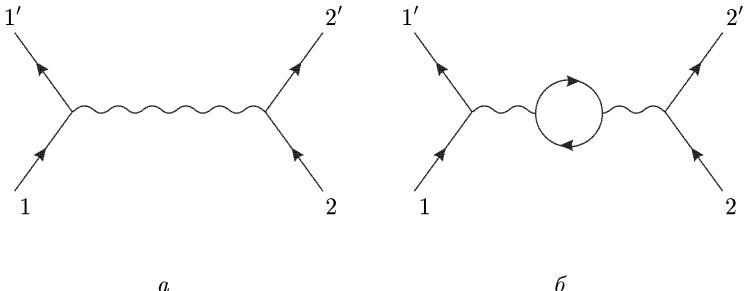


Рис. 11.3. Две диаграммы, описывающие рассеяние заряженных частиц. Здесь сплошные линии со стрелками соответствуют заряженным частицам. Волнистые линии соответствуют фотонам. Диаграмма *б* представляет собой поляризационную поправку наимизшего порядка к древесной диаграмме *а*

$$S_b(1, 2 \rightarrow 1', 2') = (2\pi)^{-12/2} \delta^4(p_{1'} + p_{2'} - p_1 - p_2) [e_1 (2\pi)^4 \bar{u}_{1'} \gamma^\mu u_1] \times \\ \times \left[ -i(2\pi)^{-4} \frac{1}{q^2} \right] [i(2\pi)^4 (q^2 \eta_{\mu\nu} - q_\mu q_\nu) \pi(q^2)] [e_2 (2\pi)^4 \bar{u}_{2'} \gamma_\mu u_2],$$

где  $e_1$  и  $e_2$  — заряды двух рассеивающихся частиц.  $\pi(q^2)$  можно вычислить, если подставить в (11.2.22) вместо  $e$  величину заряда частицы, образующей петлю на рис. 11.3. Через  $q^\mu$  мы обозначим передаваемый импульс,  $q \equiv p_1 - p_{1'} = p_{2'} - p_2$ . Используя свойство

$$q_\mu \bar{u}_{1'} \gamma^\mu u_1 = 0,$$

вычисляем сумму двух диаграмм. Зная ее, находим  $S$ -матричный элемент:

$$S_{a+b}(1, 2 \rightarrow 1', 2') = \frac{-ie_1 e_2}{4\pi^2 b q^2} [1 + \pi(bq^2)] \delta^4(p_{1'} + p_{2'} - p_1 - p_2) \times \\ \times [\bar{u}_{1'} \gamma^\mu u_1] [\bar{u}_{2'} \gamma_\mu u_2]. \quad (11.2.23)$$

В нерелятивистском пределе мы имеем приближенные равенства  $\bar{u}_{1'} \gamma^0 u_1 \approx -i\delta_{\sigma'_1 \sigma_1}$ , в то время как  $\bar{u}_{1'} \gamma^i u_1 \approx 0$ . Аналогичные равенства справедливы и для частицы 2. В этом пределе  $q^0$  пренебрежимо мало по сравнению с  $|\mathbf{q}|$ . (11.2.23) сводится к

$$S_{a+b}(1, 2 \rightarrow 1', 2') = \frac{-ie_1 e_2}{4\pi^2 \mathbf{q}^2} [1 + \pi(\mathbf{q}^2)] \delta^4(p_{1'} + p_{2'} - p_1 - p_2) \delta_{\sigma'_1 \sigma_1} \delta_{\sigma'_2 \sigma_2}. \quad (11.2.24)$$

Это выражение следует сравнить с вычисленной в борновском приближении  $S$ -матрицей рассеяния на локальном, не зависящем от спина центральном потенциале  $V(r)$ :

$$S_{\text{Born}}(1, 2 \rightarrow 1', 2') = -2\pi i \delta(E_{1'} + E_{2'} - E_1 - E_2) T_{\text{Born}}(1, 2 \rightarrow 1', 2'), \quad (11.2.25)$$

$$T_{\text{Born}}(1, 2 \rightarrow 1', 2') = \delta_{\sigma'_1 \sigma_1} \delta_{\sigma'_2 \sigma_2} \int d^3 x_1 \int d^3 x_2 V(|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|) \times \\ \times (2\pi)^{-12/2} e^{-i\mathbf{p}_{1'} \cdot \mathbf{x}_1} e^{-i\mathbf{p}_{2'} \cdot \mathbf{x}_2} e^{i\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{x}_1} e^{i\mathbf{p}_2 \cdot \mathbf{x}_2}. \quad (11.2.26)$$

Положив  $\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_2 + \mathbf{r}$ , получим

$$S_{\text{Born}} = \frac{-i}{4\pi^2} \delta^4(p_{1'} + p_{2'} - p_1 - p_2) \delta_{\sigma'_1 \sigma_1} \delta_{\sigma'_2 \sigma_2} \times \\ \times \int d^3 r V(r) e^{-i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}}. \quad (11.2.27)$$

Сравнивая последнее выражение с (11.2.23), получим, что в нерелятивистском пределе  $S$ -матричный элемент, соответствующий диаграммам на рис. 11.3, и  $S$ -матричный элемент рассеяния на потенциале  $V(r)$  совпадают. Последний при этом должен удовлетворять условию

$$\int d^3 r V(r) e^{-i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}} = e_1 e_2 \frac{1 + \pi(\mathbf{q}^2)}{\mathbf{q}^2}.$$

Делая обратное преобразование Фурье,

$$V(r) = \frac{e_1 e_2}{(2\pi)^3} \int d^3 q e^{i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}} \left[ \frac{1 + \pi(\mathbf{q}^2)}{\mathbf{q}^2} \right]. \quad (11.2.28)$$

В первом порядке по радиационным поправкам (11.2.28) совпадает с потенциалом электростатического взаимодействия двух протяженных распределений зарядов  $e_1 \eta(\mathbf{x})$  и  $e_2 \eta(\mathbf{y})$ , разделенных расстоянием  $r$ :

$$V(|r|) = e_1 e_2 \int d^3 x \int d^3 y \frac{\eta(\mathbf{x}) \eta(\mathbf{y})}{4\pi |\mathbf{x} - \mathbf{y} + \mathbf{r}|}, \quad (11.2.29)$$

где

$$\eta(\mathbf{r}) = \delta^3(\mathbf{r}) + \frac{1}{2(2\pi)^3} \int d^3 q \pi(\mathbf{q}^2) e^{i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}}. \quad (11.2.30)$$

Заметьте, что

$$\int d^3 r \eta(\mathbf{r}) = 1 + \frac{1}{2} \pi(0) = 1. \quad (11.2.31)$$

Это означает, что полные заряды частиц 1 и 2, определяемые медленно убывающей частью кулоновского потенциала, совпадают с константами  $e_1$  и  $e_2$ , определяющими величину взаимодействия с перенормированным электромагнитным полем.

В случае  $|\mathbf{r}| \neq 0$  интеграл (11.2.30) можно легко вычислить контурным интегрированием:

$$\eta(\mathbf{r}) = -\frac{e^2}{8\pi^3 r^3} \int_0^1 x(1-x) dx \left[ 1 + \frac{mr}{\sqrt{x(1-x)}} \right] \exp\left(\frac{-mr}{\sqrt{x(1-x)}}\right).$$

Правая часть последнего равенства отрицательна повсюду. Однако мы видели, что интеграл от  $\eta(\mathbf{r})$  по всем  $\mathbf{r}$  равен +1. Поэтому выра-

жение для  $\eta(\mathbf{r})$  должно содержать слагаемое  $(1 + L)\delta^3(\mathbf{r})$ , сингулярное при  $\mathbf{r} = 0$ .  $L$  выбирается таким образом, чтобы удовлетворялось уравнение (11.2.31):

$$L = \frac{e^2}{8\pi^3} \int \frac{d^3 r}{r^3} \int_0^1 x(x-1) dx \left[ 1 + \frac{mr}{\sqrt{x(1-x)}} \right] \exp\left(\frac{-mr}{\sqrt{x(1-x)}}\right). \quad (11.2.32)$$

Тогда полное выражение для функции распределения заряда имеет вид:

$$\begin{aligned} \eta(\mathbf{r}) = & (1 + L)\delta^3(\mathbf{r}) - \frac{e^2}{8\pi^3 r^3} \int_0^1 x(x-1) dx \times \\ & \times \left[ 1 + \frac{mr}{\sqrt{x(1-x)}} \right] \exp\left(\frac{-mr}{\sqrt{x(1-x)}}\right). \end{aligned} \quad (11.2.33)$$

Физическая интерпретация этого результата состоит в том, что голый точечный заряд притягивает частицы с зарядом противоположного знака, образующие вакуум, и отталкивает соответствующие античастицы. В результате голый заряд оказывается частично экранированным, делая эффективный (перенормированный) заряд меньше в  $1/(1+L)$  раз. Чтобы проверить это утверждение, заметим следующее. Если мы обрежем расходящийся интеграл (11.2.32), ограничив область интегрирования условием  $r \geq a$ , то обнаружим, что при  $a \rightarrow 0$  интеграл ведет себя как

$$L_\infty = \frac{e^2}{12\pi^2} \ln a^{-1}. \quad (11.2.34)$$

Следовательно, если в качестве ультрафиолетового порога обрезания  $\Lambda$  в пространстве импульсов мы выберем  $a^{-1}$ , то расходящаяся часть  $L$  будет связана с расходящейся частью  $Z_3 - 1$  формулой

$$(Z_3 - 1)_\infty = -2L_\infty. \quad (11.2.35)$$

Это верно постольку, поскольку с точностью до членов порядка  $e^2$ , перенормированный заряд (10.4.18) дается выражением

$$e_l = Z_3^{1/2} e_{Bl} \approx \left(1 + \frac{1}{2}(Z_3 - 1)\right) e_{Bl} \approx (1 + L)^{-1} e_{Bl}. \quad (11.2.36)$$

Уравнение (11.2.35) доказывается ниже.

Влияние поляризации вакуума на уровни энергии мюонного атома можно измерить. Как мы увидим в гл. 14, учет фейнмановской диаграммы (b) на рис. 11.3 приводит к сдвигу энергии атомного состояния с волновой функцией  $\psi(\mathbf{r})$  на величину

$$\Delta E = \int d^3 r \Delta V(\mathbf{r}) |\psi(\mathbf{r})|^2, \quad (11.2.37)$$

где  $\Delta V(\mathbf{r})$  — возмущение потенциала (11.2.28):

$$\Delta V(r) = \frac{e_1 e_2}{(2\pi)^3} \int d^3 q e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}} \left[ \frac{\pi(\mathbf{q}^2)}{\mathbf{q}^2} \right]. \quad (11.2.38)$$

Величина (11.2.38) убывает экспоненциально при  $r \gg m^{-1}$ . С другой стороны, характерный размер волновой функции электронов в обычных атомах намного больше ( $a \gg m^{-1}$ ). Например, для водородоподобных орбит электронов, вращающихся вокруг ядра с зарядом  $Ze$ ,  $a = 137/Zm$  (где  $m = m_e$ ). Сдвиг энергии зависит только от поведения волновой функции при  $r \ll a$ . Если орбитальный угловой момент равен  $l$ , то волновая функция при  $r \ll a$  ведет себя как  $r^l$ . Из (11.2.37) следует, что  $\Delta E$  пропорционально  $(ma)^{-2(l+1)}$ . Поэтому влияние поляризации вакуума намного больше для  $l = 0$ , чем для более высоких значений орбитального углового момента. Для  $l = 0$  волновая функция приблизительно равна постоянной  $\psi(0)$  для  $r$ , меньших или по порядку величины равных  $m^{-1}$ . В результате (11.2.37) сводится к

$$\Delta E = |\psi(0)|^2 \int d^3 r \Delta V(\mathbf{r}). \quad (11.2.39)$$

Используя (11.2.38) и (11.2.22), находим интеграл от возмущения (для  $e_1 e_2 = -Ze^2$ ):

$$\int d^3 r \Delta V(r) = -Ze^2 \pi'(0) = -\frac{4Z\alpha^2}{15m^2}. \quad (11.2.40)$$

Кроме того, значение в начале координат волновой функции атома водорода, соответствующей состоянию с  $l = 0$  и главным квантовым числом  $n$ , дается формулой

$$\psi(0) = \frac{2}{\sqrt{4\pi}} \left( \frac{Zam}{n} \right)^{3/2}. \quad (11.2.41)$$

Поэтому сдвиг энергии (11.2.39) равен

$$\Delta E = -\frac{4Z^4\alpha^5 m}{15\pi n^3}. \quad (11.2.42)$$

Например, для состояния  $2s$  атома водорода сдвиг энергии равен  $-1,122 \times 10^{-7}$  эВ, что соответствует сдвигу частоты  $\Delta E/2\pi\hbar$ , равному  $-27,13$  МГц. Это явление называется *эффектом Юлинга* [4]. Как мы видели в части 1, даже такое небольшое изменение энергии измеримо на эксперименте, поскольку в отсутствие различных радиационных поправок теория Дирака предсказывает вырождение  $2s$ - и  $2p$ -состояний атома водорода. Мы увидим в гл. 14, что большая часть “лэмбовского сдвига” между уровнями  $2s$  и  $2p$  (+1058 МГц) набирается из-за прочих радиационных поправок. Однако согласие теории с экспериментом достаточно четко доказывает наличие сдвига  $-37,13$  МГц, обусловленного поляризацией вакуума.

Хотя поляризация вакуума для обычного атома обуславливает лишь незначительную часть радиационных поправок, ее роль в случае мюонного атома становится главной. (В мюонных атомах мюон обращается вокруг тяжелого ядра.) Это происходит потому, что вклад большинства радиационных поправок, в силу соображений размерности, пропорционален  $m_\mu$ , в то время как интеграл энергии поляризации вакуума  $\int d^3r \Delta V$ , ведущий свое происхождение от *электронной* петли, по-прежнему пропорционален  $m_e^{-2}$  (как в (11.2.40)). В результате сдвиг энергии пропорционален  $m_\mu^3 m_e^{-2} = (210)^2 m_\mu$ . Правда, в этом случае радиус мюонного атома ненамного больше комптоновской длины волны электрона. По этой причине, приближенный результат (11.2.39) дает только порядок величины сдвига уровней, обусловленного поляризацией вакуума.

\* \* \*

В целях дальнейшего изложения, заметим, что если бы мы обрезали интеграл (11.2.7) при  $k = \Lambda$ , то вместо (11.2.20) возник бы интеграл вида

$$(Z_3 - 1)_\infty = -\frac{e^2}{6\pi^2} \int_{\mu}^{\Lambda} \kappa^{d-5} d\kappa = \frac{e^2}{6\pi^2} \frac{\mu^{d-4} - \Lambda^{d-4}}{d-4},$$

где  $\mu$  — эффективный порог инфракрасного обрезания, по порядку величины равный массе заряженной частицы, образующей петлю на рис. 11.1. (Самый простой способ найти постоянный множитель — потребовать, чтобы предел этого выражения для  $d < 3$  и  $\Lambda \rightarrow \infty$  совпадал с (11.2.20).) Обрезав интеграл сверху, мы можем перейти к пределу  $d \rightarrow 4$  и получить

$$(Z_3 - 1)_\infty = -\frac{e^2}{6\pi^2} \ln(\Lambda/\mu). \quad (11.2.43)$$

### § 11.3. Аномальный магнитный момент и радиус заряда

В качестве следующего примера, мы вычислим в первом неисчезающем порядке поправки к магнитным моментам и радиусам зарядов электрона и мюона. На рис. 11.4 приведены однопетлевые диаграммы, а также ренормализационные поправки для фотон-лептонной вершины. Диаграммы, содержащие вставки во внешние входящие или выходящие лептонные линии, равны нулю, поскольку в этом случае масса лептона удовлетворяет условию на массовой оболочке (см. § 10.3). Третья диаграмма на рис. 11.4 описывает эффекты, связанные с поляризацией вакуума. Их мы обсуждали в предыдущем параграфе.

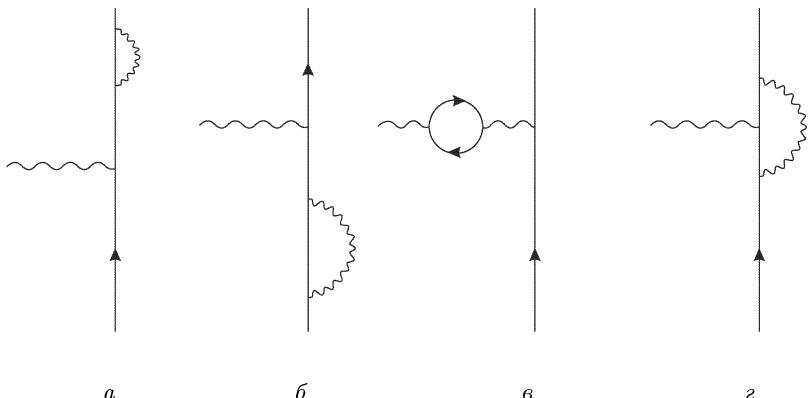


Рис. 11.4. Однопетлевые диаграммы, отвечающие фотон-лептонной вершине  $\Gamma^\mu$ . Волновые линии соответствуют фотонам, остальные линии — электронам и мюонам. Диаграммы *а* и *б* уничтожаются членами, перенормирующими лептонное поле. Диаграмма *в* отвечает поляризации вакуума, подробно рассмотренной нами в § 11.2. Диаграмма *г* вычисляется в § 11.3

В результате остается единственная однопетлевая диаграмма (крайняя правая на рис. 11.4). Ее нам и нужно вычислить:

$$\begin{aligned} \Gamma_{1\text{ loop}}^\mu(p', p) = & \int d^4k [e\gamma^\rho(2\pi)^4] \left[ \frac{-i}{(2\pi)^4} \frac{-i(\hat{p}' - \hat{k}) + m}{(p' - k)^2 + m^2 - i\epsilon} \right] [\gamma^\mu] \times \\ & \times \left[ \frac{-i}{(2\pi)^4} \frac{-i(\hat{p} - \hat{k}) + m}{(p - k)^2 + m^2 - i\epsilon} \right] [e\gamma_\rho(2\pi)^4] \left[ \frac{-i}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k^2 - i\epsilon)} \right], \end{aligned} \quad (11.3.1)$$

Здесь  $p'$  и  $p$  — четырехимпульсы конечного и начального лептонов, соответственно. (Вклад вершины, связывающей внешнюю фотонную линию и внутреннюю лептонную линию, равен  $\gamma^\mu$ , поскольку множитель  $e(2\pi)^4$  рассматривается как общий для всех диаграмм, образующих  $\Gamma^\mu$ .)

Интеграл, как нетрудно заметить, расходится в ультрафиолетовой области и ведет себя как  $\int d^4k/(k^2)^2$ . Поскольку фотон являетсянейтральной частицей, то в отличие от разобранной в предыдущем параграфе поляризации вакуума, здесь нет необходимости использовать причудливые процедуры регуляризации (типа размерной), дабы не разрушить калибровочную инвариантность теории. По этой причине, интеграл можно сделать конечным, подходящим образом модифицируя пропагатор фотона (например, используя множитель  $M^2/(k^2 + M^2)$ , где  $M$  имеет размерность массы,  $M$  достаточно велико). Калибровочная инвариантность при этом нарушиться не должна. В любом случае, как мы увидим в дальнейшем, аномальный магнитный момент и радиус заряда можно найти, не имея дела с ультрафиолетовыми расходимостями вовсе. Далее мы будем работать с ин-

тегралами для вершинной функции, которые расходятся. Нетрудно заметить, что в случае необходимости любые расходящиеся интегралы можно выразить через величину  $M$ .

Чтобы преобразовать интеграл (11.3.2), воспользуемся трюком Фейнмана, описанным в приложении к этой главе:

$$\frac{1}{ABC} = 2 \int_0^1 dx \int_0^x dy [Ay + B(x - y) + C(1 - x)]^{-3}. \quad (11.3.2)$$

Непосредственно применяя эту формулу к (11.3.2), получим:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{(p' - k)^2 + m^2 - i\epsilon} \frac{1}{(p - k)^2 + m^2 - i\epsilon} \frac{1}{k^2 - i\epsilon} = \\ & = 2 \int_0^1 dx \int_0^x dy [((p' - k)^2 + m^2 - i\epsilon)y + ((p - k)^2 + m^2 - i\epsilon)(x - y) + \\ & \quad + (k^2 - i\epsilon)(1 - x)]^{-3} = \\ & = 2 \int_0^1 dx \int_0^x dy [(k - p'y - p(x - y))^2 + m^2 x^2 + q^2 y(x - y) - i\epsilon]^{-3}, \end{aligned} \quad (11.3.3)$$

где  $q \equiv p - p'$  — импульс, передаваемый фотону. Делая сдвиг переменной интегрирования

$$k \rightarrow k + p'y + p(x - y)$$

приведем интеграл (11.3.1) к виду

$$\begin{aligned} \Gamma_{1 \text{ loop}}^\mu(p', p) &= \frac{2ie^2}{(2\pi)^4} \int_0^1 dx \int_0^x dy \int \frac{d^4 k}{[k^2 + m^2 x^2 + q^2 y(x - y) - i\epsilon]^3} \times \\ &\times \gamma^\rho [-i(\hat{p}'(1 - y) - \hat{k} - \hat{p}(x - y)) + m] \gamma^\mu \times \\ &\times [-i(\hat{p}(1 - x + y) - \hat{k} - \hat{p}'y) + m] \gamma_\rho. \end{aligned} \quad (11.3.4)$$

Следующим нашим шагом будет поворот Вика. Как мы видели в предыдущем параграфе, бесконечно малая величина  $-i\epsilon$  в знаменателе приводит к тому, что при вращении контура интегрирования по  $k^0$  в направлении мнимой оси мы должны двигаться против часовой стрелки. В итоге интеграл по  $k^0$  от  $-\infty$  до  $+\infty$  заменится на интеграл по мнимым значениям переменной интегрирования в пределах от  $-i\infty$  до  $+i\infty$  или, что то же самое, на интеграл по вещественным значениям  $k^4 \equiv -ik^0$  в пределах от  $-\infty$  до  $+\infty$ . Далее, мы воспользуемся вращательной симметрией знаменателя в (11.3.4) и опустим члены в числителе, имеющие нечетный порядок по  $k$ , в то

время как  $k^\lambda k^\sigma$  заменим на  $\eta^{\sigma\lambda} k^2/4$ . Элемент объема интегрирования  $d^4k = i dk^1 dk^2 dk^3 dk^4$  сводится к  $2i\pi k^3 dk$  ( $\kappa$  — евклидова длина четырехвектора  $k$ ). В результате (11.3.4) приобретает следующий вид:

$$\begin{aligned} \Gamma_{\text{1 loop}}^\mu(p', p) = & \frac{-4\pi^2 e^2}{(2\pi)^4} \int_0^1 dx \int_0^x dy \int_0^\infty \kappa^3 dk \left\{ -\kappa^2 \gamma^\rho \gamma^\sigma \gamma^\mu \gamma_\sigma \gamma_\rho / 4 + \right. \\ & + \gamma^\rho [-i(\hat{p}'(1-y) - \hat{p}(x-y)) + m] \gamma^\mu \times \\ & \times [-i(\hat{p}(1-x+y) - \hat{p}'y) + m] \gamma_\rho \} \times \\ & \left. \times [\kappa^2 + m^2 x^2 + q^2 y(x-y)]^{-3}. \right. \quad (11.3.5) \end{aligned}$$

Интерес для нас представляет только матричный элемент вершинной функции  $\bar{u}'\Gamma^\mu u$ , где  $u$ ,  $u'$  — дираковские спиноры, удовлетворяющие соотношениям

$$\bar{u}'[i\hat{p}' + m] = 0, \quad [i\hat{p} + m]u = 0.$$

Мы можем упростить (11.3.5), воспользовавшись антимутационными соотношениями для матриц Дирака, чтобы избавиться от множителей  $p'$  в левой скобке и множителей  $p$  в правой скобке. Соотношения для спиноров позволяют заменить везде  $p$  и  $p'$  на  $im$ . После простых, но довольно скучных вычислений, приводим (11.3.5) к следующему виду:

$$\begin{aligned} \bar{u}'\Gamma_{\text{one loop}}^\mu(p', p)u = & \frac{-4\pi^2 e^2}{(2\pi)^4} \int_0^1 dx \int_0^x dy \int_0^\infty \kappa^3 dk \times \\ & \times \bar{u}' \{ \gamma^\mu [-\kappa^2 + 2m^2(x^2 - 4x + 2) + 2q^2(y(x-y) + 1-x)] + \\ & + 4im p'^\mu (y - x + xy) + 4im p^\mu (x^2 - xy - y) \} u \times \\ & \times [\kappa^2 + m^2 x^2 + q^2 y(x-y)]^{-3}. \quad (11.3.6) \end{aligned}$$

Воспользуемся теперь симметрией последнего множителя относительно отражений  $y \rightarrow x - y$ . Функции  $y - x + xy$  и  $x^2 - xy - y$ , которые являются коэффициентами при  $p'^\mu$  и  $p^\mu$ , переходят друг в друга. Поэтому и ту, и другую можно заменить их полусуммой:

$$\frac{1}{2} (y - x + xy) + \frac{1}{2} (x^2 - xy - y) = -\frac{1}{2} x(1-x).$$

В результате получим:

$$\begin{aligned} \bar{u}'\Gamma_{\text{one loop}}^\mu(p', p)u = & \frac{-4\pi^2 e^2}{(2\pi)^4} \int_0^1 dx \int_0^x dy \int_0^\infty \kappa^3 dk \times \\ & \times \bar{u}' \{ \gamma^\mu [-\kappa^2 + 2m^2(x^2 - 4x + 2) + 2q^2(y(x-y) + 1-x)] - \\ & - 2im(p'^\mu + p^\mu)x(1-x) \} u \times \\ & \times [k^2 + m^2 x^2 + q^2 y(x-y)]^{-3}. \quad (11.3.7) \end{aligned}$$

Заметьте, что  $p^\mu$  и  $p'^\mu$  входят в (11.3.7) только в виде комбинации  $p^\mu + p'^\mu$ , как это и должно быть в силу сохранения тока.

Существуют другие диаграммы, которые нужно принять во внимание. Конечно же, в  $\Gamma^\mu$  есть слагаемое нулевого порядка  $\gamma^\mu$ . Кроме того, член, пропорциональный  $Z_2 - 1$ , также дает вклад в  $\Gamma^\mu$ :

$$\Gamma_{Z_2}^\mu = (Z_2 - 1)\gamma^\mu. \quad (11.3.8)$$

Нужно вспомнить и про член, описывающий поправки к внешнему фотонному пропагатору:

$$\Gamma_{\text{vac pol}}^\mu(p', p) = \frac{1}{(p' - p)^2 - i\epsilon} \Pi^{\mu\nu}(p' - p)\gamma_\nu. \quad (11.3.9)$$

Вид всех перечисленных членов находится в согласии с общим результатом (10.6.10) (где  $H(q^2) = 0$ ):

$$\bar{u}'\Gamma^\mu(p', p)u = \bar{u}'\left[\gamma^\mu F(q^2) - \frac{i}{2m}(p + p')^\mu G(q^2)\right]u. \quad (11.3.10)$$

С точностью до членов, квадратичных по  $e$ , формфакторы даются формулами

$$F(q^2) = Z_2 + \pi(q^2) + \frac{4\pi^2 e^2}{(2\pi)^4} \int_0^1 dx \int_0^x dy \int_0^\infty \kappa^3 d\kappa \times \\ \times \frac{[\kappa^2 - 2m^2(x^2 - 4x + 2) - 2q^2(y(x - y) + 1 - x)]}{[\kappa^2 + m^2x^2 + q^2y(x - y)]^3}, \quad (11.3.11)$$

$$G(q^2) = \frac{-4\pi^2 e^2}{(2\pi)^4} \int_0^1 dx \int_0^x dy \int_0^\infty \frac{4m^2x(1 - x)\kappa^3 d\kappa}{[\kappa^2 + m^2x^2 + q^2y(x - y)]^3}, \quad (11.3.12)$$

где  $\pi(q^2)$  — функция поляризации вакуума (11.2.22).

Интеграл для формфактора  $G(q^2)$  конечен:

$$G(q^2) = \frac{-e^2 m^2}{4\pi^2} \int_0^1 dx \int_0^x dy \frac{x(1 - x)}{m^2 x^2 + q^2 y(x - y)}. \quad (11.3.13)$$

Отсюда нетрудно вычислить аномальный магнитный момент. Как было отмечено в § 10.6, единственным членом, дающим вклад в магнитный момент, является член с  $\gamma^\mu$ . Поэтому учет радиационных поправок состоит в операции умножения дираковского значения магнитного момента  $e/2m$  на  $F(0)$ . Но в силу определения  $e$  как реального значения лептонного заряда,

$$F(0) + G(0) = 1, \quad (11.3.14)$$

так что магнитный момент можно представить в виде

$$\mu = \frac{e}{2m}(1 - G(0)). \quad (11.3.15)$$

Из (11.3.13) следует, что

$$-G(0) = \frac{e^2}{8\pi^2} = 0,001161. \quad (11.3.16)$$

Это и есть известная поправка к значению  $\alpha/2\pi$ , впервые найденная Швингером [5].

Конечно, она является всего лишь первым членом в радиационных поправках к магнитному моменту. Уже в следующем порядке, четвертом по  $e$ , имеется так много слагаемых, что вычисления становятся довольно сложными. Однако в силу большой величины относения масс мюона и электрона, в выражении для магнитного момента мюона есть один член четвертого порядка, который несколько больше остальных. Он возникает из-за *электронной петли* на диаграмме

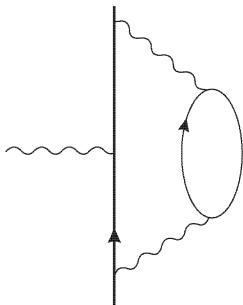


Рис. 11.5. Двухпетлевая диаграмма, дающая вклад в магнитный момент мюона. Жирная сплошная линия соответствует мюону, тонкие волнистые линии — фотонам, остальные линии — электронам. В четвертом порядке диаграмма дает относительно большой вклад (пропорциональный  $\ln(m_\mu/m_e)$ ) в гиromагнитное отношение мюона

второго порядка, дающей поправку к пропагатору виртуального фотона  $1/k^2$  (см. рис. 11.5). Из-за наличия электронной петли последний заменяется в (11.3.1) на

$$(1 + \pi_e(k^2))/k^2,$$

где  $\pi_e(k^2)$  дается формулой (11.2.22). При этом вместо  $m$  в (11.2.22) нужно подставить массу *электрона*:

$$\pi_e(k^2) = \frac{e^2}{2\pi^2} \int_0^1 x(1-x) \ln\left(1 + \frac{k^2 x(1-x)}{m_e^2}\right) dx.$$

Из (11.3.12) видно, что при вычислении магнитного момента мюона эффективный порог, на котором происходит обрезание импульсов  $k$  виртуальных фотонов, нужно положить равным  $m_\mu$ . Отношение  $m_\mu/m_e$  столь велико, что для  $k^2$  порядка  $m_\mu^2$  мы можем приближенно

написать

$$\pi_e(k^2) \approx \frac{e^2}{2\pi^2} \int_0^1 dx x(1-x) \ln(m_\mu^2/m_e^2) = \frac{e^2}{12\pi^2} \ln(m_\mu^2/m_e^2). \quad (11.3.17)$$

Коэффициенты при опущенных членах суть величины порядка единицы (а не  $\ln(m_\mu^2/m_e^2)$ ). Поскольку они являются константами, изменение  $-G(0)$  из-за поправок к пропагатору фотона, обусловленных наличием электронной петли, находится простым умножением нашего предыдущего результата (11.3.16) на (11.3.17):

$$\mu_\mu = \frac{e}{2m_\mu} \left( 1 + \frac{e^2}{8\pi^2} + \frac{e^4}{96\pi^4} \left[ \ln \frac{m_\mu^2}{m_e^2} + O(1) \right] \right). \quad (11.3.18)$$

(Как мы увидим в т. II, приведенное доказательство есть упрощенный вариант метода ренормгруппы.) Результат (11.3.18) можно сравнить с полным выражением, полученным в четвертом порядке:<sup>6</sup>

$$\begin{aligned} \mu_\mu = & \frac{e}{2m_\mu} \left( 1 + \frac{e^2}{8\pi^2} + \frac{e^4}{96\pi^4} \left[ \ln \frac{m_\mu^2}{m_e^2} - \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{25}{6} + \frac{197}{24} + \frac{\pi^2}{2} + \frac{9\zeta(3)}{2} - 3\pi^2 \ln 2 + O\left(\frac{m_e}{m_\mu}\right) \right] \right). \end{aligned} \quad (11.3.19)$$

Оказывается, что если члены, обозначенные нами как “ $O(1)$ ”, умножить на  $e^4/96\pi^4$  и сложить, то сумма окажется равной  $-6,137$ , что, на самом деле, ненамного меньше, чем  $\ln(m_\mu^2/m_e^2) = 10,663$ . Мы видим, что приближение (11.3.18) дает члены четвертого порядка всего лишь с точностью до двойки. Правильное выражение четвертого порядка (11.3.19) приводит к ответу  $\mu_\mu = 1,00116546e/2m_\mu$  (сравните с результатом, полученным во втором порядке,  $\mu_\mu = 1,001161e/2m_\mu$ , и современными экспериментальными данными [7],  $\mu_\mu = 1,001165923(8)e/2m_\mu$ ).

Рассмотрим теперь другой формфактор. Интеграл (11.3.11) для  $F(q^2)$  содержит ультрафиолетовую расходимость. Однако для выполнения условия (11.3.14), необходимо, чтобы  $Z_2$  принимало значение

$$\begin{aligned} Z^2 = 1 + & \frac{e^2}{8\pi^2} - \frac{4\pi^2 e^2}{(2\pi)^4} \int_0^1 dx \int_0^1 dy \int_0^\infty \kappa^3 d\kappa \times \\ & \times \frac{\kappa^2 - 2m^2(x^2 - 4x + 2)}{[\kappa^2 + m^2 x^2]^3}. \end{aligned} \quad (11.3.20)$$

(Напомним, что  $\pi(0) = 0$ .) Это выражение содержит ультрафиолетовую расходимость, причем сингулярная часть дается формулой

$$(Z_2 - 1)_\infty = -\frac{e^2}{8\pi^2} \int_0^\infty \frac{d\kappa}{\kappa}. \quad (11.3.21)$$

Подставляя (11.3.20) в (11.3.11), получим:

$$F(q^2) = 1 + \frac{e^2}{8\pi^2} + \pi(q^2) + \frac{4\pi^2 e^2}{(2\pi)^4} \int_0^1 dx \int_0^x dy \int_0^\infty \kappa^3 d\kappa \times \\ \times \left\{ \frac{[k^2 - 2m^2(x^2 - 4x + 2) - 2q^2(y(x-y) + 1-x)]}{[k^2 + m^2x^2 + q^2y(x-y)]^3} - \right. \\ \left. - \frac{[k^2 - 2m^2(x^2 - 4x + 2)]}{[k^2 + m^2x^2]^3} \right\}. \quad (11.3.22)$$

Интеграл по  $k$  теперь сходится:

$$F(q^2) = 1 + \frac{e^2}{8\pi^2} + \pi(q^2) + \frac{2\pi^2 e^2}{(2\pi)^4} \int_0^1 dx \int_0^x dy \times \\ \times \left\{ \frac{-m^2[x^2 - 4x + 2] - q^2[y(x-y) + 1-x]}{m^2x^2 + q^2y(x-y)} + \frac{x^2 - 4x + 2}{x^2} - \right. \\ \left. - \ln \left[ \frac{m^2x^2 + q^2y(x-y)}{m^2x^2} \right] \right\}. \quad (11.3.23)$$

Однако мы видим, что интеграл по  $x$  и  $y$  расходится логарифмически при  $x = 0$  и  $y = 0$ , поскольку знаменатели квадратичны по  $x$  и/или  $y$ , а числитель содержит произведение двух дифференциалов  $dx dy$ . Такая расходимость обусловлена равенством нулю знаменателя в (11.3.11),  $[k^2 + m^2x^2 + q^2y(x-y)^3]$ , при  $x = 0$ ,  $y = 0$ ,  $k = 0$ . Поскольку источником этой сингулярности является область малых, а не больших  $k$ , она называется *инфракрасной расходимостью* (в отличие от ультрафиолетовых расходимостей).

Мы будем подробно рассматривать инфракрасные расходимости в гл. 13. Там будет показано, что от сингулярности поперечного сечения процессов типа рассеяния электрона на электроне (источником которой является инфракрасная расходимость электронного формфактора  $F(q^2)$ ) можно избавиться, если наряду с упругим рассеянием принять во внимание излучение низкоэнергетических фотонов. Кроме того, как мы увидим в гл. 14, при вычислении радиационных поправок к атомным уровням энергии, инфракрасная расходимость в  $F(q^2)$ , на самом деле, отсутствует, поскольку связанный электрон уже не находится строго на массовой оболочке для свободного электрона. Сейчас же продолжим наше вычисление, просто вводя фиктивную массу фотона  $\mu$ , чтобы избавиться от инфракрасной расходимости в  $F(q^2)$ . В гл. 14 мы увидим, как можно использовать полученный результат.

Если масса фотона равна  $\mu$ , то знаменатель  $k^2 - i\epsilon$  в (11.3.1) следует заменить на  $k^2 + \mu^2 - i\epsilon$ . К выражению, стоящему в скобках в знаменателях уравнений (11.3.3)–(11.3.7), (11.3.11), (11.3.20), (11.3.22), нужно прибавить слагаемое  $\mu^2(1-x)$ . Тогда (11.3.23) при-

водится к

$$F(q^2) = 1 + \frac{e^2}{8\pi^2} + \pi(q^2) + \frac{2\pi^2 e^2}{(2\pi)^4} \int_0^1 dx \int_0^x dy \times \\ \times \left\{ \frac{-m^2[x^2 - 4x + 2] - q^2[y(x-y) + 1-x]}{m^2 x^2 + q^2 y(x-y) + \mu^2(1-x)} + \frac{m^2[x^2 - 4x + 2]}{m^2 x^2 + \mu^2(1-x)} - \right. \\ \left. - \ln \left[ \frac{m^2 x^2 + q^2 y(x-y) + \mu^2(1-x)}{m^2 x^2 + \mu^2(1-x)} \right] \right\}. \quad (11.3.24)$$

Интеграл теперь сходится. Его можно выразить через функции Спенса, однако результат будет не очень показательным. Для дальнейшего использования в гл. 14 нам достаточно вычислить поведение  $F(q^2)$  для малых  $q^2$ . Мы уже знаем из тождества Уорда, что

$$F(0) = 1 - G(0) = 1 + \frac{e^2}{8\pi^2}.$$

Поэтому рассмотрим производную  $F'(q^2)$  в точке  $q^2 = 0$ . Согласно (11.3.24),

$$F'(0) = \pi' + \frac{2\pi^2 e^2}{(2\pi)^4} \int_0^1 dx \int_0^x dy \times \\ \times \left\{ -\frac{2y(x-y) + 1-x}{m^2 x^2 + \mu^2(1-x)} + \frac{m^2[x^2 - 4x + 2]y(x-y)}{[m^2 x^2 + \mu^2(1-x)]^2} \right\}. \quad (11.3.25)$$

Вклад от поляризации вакуума дается формулой (11.2.22):

$$\pi'(0) = \frac{e^2}{60\pi^2 m^2}. \quad (11.3.26)$$

Опуская в (11.3.25) все члены, пропорциональные степеням  $\mu/m$ , находим, что<sup>1)</sup>

$$F'(0) = \frac{e^2}{24\pi^2 m^2} \left[ \ln \left( \frac{\mu^2}{m^2} \right) + \frac{2}{5} + \frac{1}{4} \right] \quad (11.3.27)$$

причем член  $2/5$  обусловлен поляризацией вакуума. С другой стороны, из (11.3.13) ясно, что  $G(q^2)$  имеет конечную производную в точке  $q^2 = 0$ :

$$G'(0) = \frac{e^2}{48\pi^2 m^2}. \quad (11.3.28)$$

Удобнее всего полученные результаты записать через формфактор заряда  $F_1(q^2)$ , определяемый с помощью альтернативного представ-

<sup>1)</sup> Интеграл по  $y$  вычисляется тривиально. Интеграл же по  $x$  легче всего вычислить в пределе  $\mu \ll m$ , разбивая область интегрирования на две части: одна часть от 0 до  $s$ , где  $\mu/m \ll s \ll 1$ , вторая — от  $s$  до 1.

ления (10.6.15) вершинной функции:

$$\bar{u}(\mathbf{p}', \sigma') \Gamma^\mu(p', p) u(\mathbf{p}, \sigma) = \\ = \bar{u}(\mathbf{p}', \sigma') \left[ \gamma^\mu F_1(q^2) + \frac{1}{2} i[\gamma^\mu, \gamma^\nu](p' - p)_\nu F_2(q^2) \right] u(\mathbf{p}, \sigma). \quad (11.3.29)$$

Согласно (10.6.17) и (10.6.18),

$$F_1(q^2) = F(q^2) + G(q^2). \quad (11.3.30)$$

Для  $|q^2| \ll m^2$ , этот формфактор приближенно равен

$$F_1(q^2) \approx 1 + \frac{e^2}{24\pi^2} \left( \frac{q^2}{m^2} \right) \left[ \ln \left( \frac{\mu^2}{m^2} \right) + \frac{2}{5} + \frac{3}{4} \right]. \quad (11.3.31)$$

Его можно переписать через *зарядовый радиус*  $a$ . Последний определяет поведение зарядового формфактора при  $q^2 \rightarrow 0$ :

$$F_1(q^2) \rightarrow 1 - q^2 a^2 / 6. \quad (11.3.32)$$

(Выбор этого определения мотивируется тем фактом, что среднее от  $\exp(i\mathbf{q} \cdot \mathbf{x})$ , взятое по сфере радиуса  $a$ , ведет себя как  $1 - \mathbf{q}^2 a^2 / 6$  при  $\mathbf{q}^2 a^2 \ll 1$ .) Мы видим, что радиус заряда электрона дается выражением

$$a^2 = -\frac{e^2}{4\pi^2 m^2} \left[ \ln \left( \frac{\mu^2}{m^2} \right) + \frac{2}{5} + \frac{3}{4} \right]. \quad (11.3.33)$$

Мы увидим в гл. 14, что в случае электронов в атомах роль массы фотона играет эффективный инфракрасный порог обрезания, который много меньше  $m$ . В силу этого, логарифм имеет большое по величине отрицательное значение. В результате  $a^2$  оказывается положительным.

## § 11.4. Собственная энергия электрона

Напоследок вычислим собственную энергию электрона. Сама по себе она не имеет какого-либо экспериментального значения, но некоторые результаты этого параграфа будут использованы нами в гл. 14 и т. II.

Как и в § 10.3, введем обозначение  $i(2\pi)^4 [\Sigma^*(p)]_{\beta,\alpha}$  для суммы диаграмм с двумя внешними электронными линиями (одной входящей и одной выходящей), переносящими импульс  $p$  и дираковские индексы  $\alpha, \beta$ , соответственно. Звездочка указывает на тот факт, что мы не рассматриваем несвязные диаграммы. Несвязными называются такие графы, которые можно разбить на две несоединяющиеся между собой части, разрезав некоторую внутреннюю электронную линию. Пропагаторы, соответствующие внешним линиям, опускаются. В итоге пол-

ный электронный пропагатор может быть записан в виде суммы

$$[-i(2\pi)^{-4}S'(p)] = [-i(2\pi)^{-4}S(p)] + \\ + [-i(2\pi)^{-4}S(p)][i(2\pi)^4\Sigma^*(p)][-i(2\pi)^{-4}S(p)] + \dots, \quad (11.4.1)$$

где

$$S(p) \equiv \frac{-i\hat{p} + m_e}{p^2 + m_e^2 - i\epsilon}. \quad (11.4.2)$$

Сумма вычисляется тривиальным образом и равна

$$S'(p) = [i\hat{p} + m_e - \Sigma^*(p) - i\epsilon]^{-1}. \quad (11.4.3)$$

Поправка к  $\Sigma^*$  наимизшего порядка дается однопетлевой диаграммой, изображенной на рисунке 11.6:

$$i(2\pi)^4\Sigma_{1\text{ loop}}^*(p) = \int d^4k \left[ \frac{-i}{(2\pi)^4} \frac{\eta_{\rho\sigma}}{k^2 - i\epsilon} \right] \times \\ \times [(2\pi)^4 e\gamma^\rho] \left[ \frac{-i}{(2\pi)^4} \frac{-i\hat{p} + ik + m_e}{(p-k)^2 + m_e^2 - i\epsilon} \right] [(2\pi)^4 e\gamma^\sigma]$$

или, упрощая (11.4.3),

$$\Sigma_{1\text{ loop}}^*(p) = \frac{ie^2}{(2\pi)^4} \int d^4k \left[ \frac{1}{k^2 - i\epsilon} \right] \left[ \frac{\gamma^\rho(-i\hat{p} + ik + m_e)\gamma_\rho}{(p-k)^2 + m_e^2 - i\epsilon} \right]. \quad (11.4.4)$$

(Мы используем калибровку Фейнмана. Амплитуды, соответствующие заряженным частицам вне массовой оболочки, не являются калибровочно инвариантными.) В целях дальнейшего удобства (при вычислении лэмбовского сдвига) удобно воспользоваться методом регуляризации Паули–Вилларса [8]. Заменим фотонный пропагатор  $(k^2 - i\epsilon)^{-1}$  разностью

$$\frac{1}{k^2 - i\epsilon} - \frac{1}{k^2 + \mu^2 - i\epsilon},$$

В результате выражение для собственной энергии электрона приобретает следующий вид:

$$\Sigma_{1\text{ loop}}^*(p) = \frac{ie^2}{(2\pi)^4} \int d^4k \left[ \frac{1}{k^2 - i\epsilon} - \frac{1}{k^2 + \mu^2 - i\epsilon} \right] \times \\ \times \left[ \frac{\gamma^\rho(-i\hat{p} + ik + m_e)\gamma_\rho}{(p-k)^2 + m_e^2 - i\epsilon} \right]. \quad (11.4.5)$$

Несколько позже мы избавимся от регуляризующей добавки, положив  $\mu \rightarrow \infty$ . В гл. 14 нас также будет интересовать случай  $\mu \ll m_e$ .

Преобразуем произведение знаменателей, снова воспользовавшись трюком Фейнмана. Вспоминая также попутно, что  $\gamma^\rho\gamma^k\gamma_\rho = -2\gamma^k$

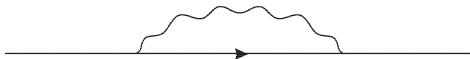


Рис. 11.6. Однопетлевая диаграмма, определяющая собственную энергию электрона. Как обычно, сплошная прямая линия соответствует электрону, волнистая линия — фотону

и  $\gamma^\rho \gamma_\rho = 4$ , находим

$$\begin{aligned} \Sigma_{\text{loop}}^*(p) &= \frac{ie^2}{(2\pi)^4} \int d^4 k [2i(\hat{p} - \hat{k}) + 4m_e] \times \\ &\times \int_0^1 dx \left[ \frac{1}{((k - px)^2 + p^2 x(1-x) + m_e^2 x - i\epsilon)^2} - \right. \\ &\left. - \frac{1}{((k - px)^2 + p^2 x(1-x) + m_e^2 x + \mu^2(1-x) - i\epsilon)^2} \right]. \quad (11.4.6) \end{aligned}$$

Сдвигая переменную интегрирования  $k \rightarrow k + px$  и осуществляя поворот Вика контура интегрирования, получим

$$\begin{aligned} \Sigma_{\text{loop}}^*(p) &= \frac{-2\pi^2 e^2}{(2\pi)^4} \int dx [2i(1-x)\hat{p} + 4m_e] \int_0^\infty d\kappa \kappa^3 \times \\ &\times \left[ \frac{1}{(\kappa^2 + p^2 x(1-x) + m_e^2 x)^2} - \frac{1}{(\kappa^2 + p^2 x(1-x) + m_e^2 x + \mu^2(1-x))^2} \right]. \quad (11.4.7) \end{aligned}$$

Интеграл по  $k$  вычисляется тривиально:

$$\begin{aligned} \Sigma_{\text{loop}}^*(p) &= \frac{-\pi^2 e^2}{(2\pi)^4} \int dx [2i(1-x)\hat{p} + 4m_e] \times \\ &\times \ln \left( \frac{p^2 x(1-x) + m_e^2 x + \mu^2(1-x)}{p^2 x(1-x) + m_e^2 x} \right). \quad (11.4.8) \end{aligned}$$

Следует также учесть контрчлен  $-(Z_2 - 1)(ip + m_e) + Z_2 \delta m_e$ , дающий вклад в  $\Sigma^*(p)$ , причем  $Z_2$  и  $m_e$  здесь задаются условием, чтобы полный пропагатор  $S'(p)$ , рассматриваемый как функция  $ip$ , имел полюс с вычетом, равным единице, в точке  $ip = -m_e$ . (Как мы увидим в следующей главе, в силу этого условия,  $\Sigma^*$  конечно при  $\mu \rightarrow \infty$  во всех порядках по  $e$ .) В наименее сложном порядке отсюда имеем

$$\begin{aligned} \delta m_e &= -\Sigma_{\text{loop}}^* \Big|_{ip = -m_e} = \\ &= \frac{2m_e \pi^2 e^2}{2\pi^4} \int dx [1+x] \ln \left( \frac{m_e^2 x^2 + \mu^2(1-x)}{m_e^2 x^2} \right), \quad (11.4.9) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 Z_2 - 1 &= -i \frac{\partial \Sigma_{1 \text{ loop}}^*}{\partial \hat{p}} \Big|_{i\hat{p} = -m_e} = \\
 &= -\frac{2\pi^2 e^2}{(2\pi)^4} \int_0^1 dx \left\{ (1-x) \ln \left( \frac{m_e^2 x^2 + \mu^2 (1-x)}{m_e^2 x^2} \right) - \right. \\
 &\quad \left. - \frac{2\mu^2 (1-x)^2 (1+x)}{x(m_e^2 x^2 + \mu^2 (1-x))} \right\}. \quad (11.4.10)
 \end{aligned}$$

(В этом порядке  $\delta m_e$  и  $Z_2 \delta m_e$  не различаются.) Опуская члены, стремящиеся к нулю при  $\mu^2 \rightarrow \infty$ , приведем уравнения (11.4.8)–(11.4.10) к виду

$$\Sigma_{1 \text{ loop}}^*(p) = \frac{-2\pi^2 e^2}{(2\pi)^4} \int dx [2i(1-x)\hat{p} + 4m_e] \ln \left( \frac{\mu^2 (1-x)}{p^2 x (1-x) + m_e^2 x} \right), \quad (11.4.11)$$

$$\delta m_e = \frac{2m_e \pi^2 e^2}{(2\pi)^4} \int dx [1+x] \ln \left( \frac{\mu^2 (1-x)}{m_e^2} \right), \quad (11.4.12)$$

$$Z_2 - 1 = \frac{-2\pi^2 e^2}{(2\pi)^4} \int_0^1 dx \left\{ (1-x) \ln \left( \frac{\mu^2 (1-x)}{m_e^2 x^2} \right) - \frac{2(1-x^2)}{x} \right\}. \quad (11.4.13)$$

Исследование этих выражений показывает, что члены, содержащие  $\ln \mu^2$  в полном выражении для собственной энергии, взаимно уничтожаются:

$$\begin{aligned}
 \Sigma_{\text{order } e^2}^*(p) &= \Sigma_{1 \text{ loop}}^*(p) - (Z_2 - 1)(i\hat{p} + m_e) + Z_2 \delta m_e = \\
 &= \frac{-2\pi^2 e^2}{(2\pi)^4} \int_0^1 dx \left\{ [i(1-x)\hat{p} + 2m_e] \ln \left( \frac{m_e^2 (1-x)}{p^2 x (1-x) + m_e^2 x} \right) - \right. \\
 &\quad \left. - m_e [1+x] \ln \left( \frac{1-x}{x^2} \right) - (i\hat{p} + m_e) \left[ (1-x) \ln \left( \frac{1-x}{x^2} \right) - 2 \frac{2(1-x^2)}{x} \right] \right\}. \quad (11.4.14)
 \end{aligned}$$

Имеется, однако, еще одна расходимость. Ее источником становится последний член, рассматриваемый в окрестности точки  $x = 0$ . Эта расходимость соответствует сингулярному поведению интеграла по импульсам в (11.4.5) при  $k^2 = 0$ , имеющему место, если  $p^2 = -m_e^2$  (точка, в которой вычисляется  $Z_2 - 1$ ). Такие инфракрасные сингулярности будут подробно обсуждаться в гл. 13. Сейчас же отметим, что ультрафиолетовая расходимость исчезла.

\* \* \*

Результат для  $\delta m_e$  (11.4.9) представляет интерес сам по себе. Заметьте, что  $\delta m_e/m_e > 0$ , что, в общем-то, и ожидалось для собственной электромагнитной энергии заряда, взаимодействующего со своим

полем. Однако в отличие от классических оценок электромагнитной собственной энергии, сделанных Пуанкаре, Абрахамом и другими физиками [9], формула (11.4.9) в пределе  $\mu \rightarrow \infty$  расходится всего лишь логарифмически:

$$\delta m_e \rightarrow \frac{6m_e \pi^2 e^2}{(2\pi)^4} \ln\left(\frac{\mu}{m_e}\right). \quad (11.4.15)$$

В § 14.3 при вычислении лэмбовского сдвига нас будет интересовать обратный предел,  $\mu \ll m_e$ . В этом случае из (11.4.9) следует, что

$$\delta m_e \rightarrow \frac{e^2 \mu}{8\pi} \left[ 1 - \frac{3\mu}{2\pi m_e} + \dots \right]. \quad (11.4.16)$$

## Приложение. Вычисление интегралов

Чтобы преобразовать произведение знаменателей  $N$  пропагаторов к нужному виду, мы представим  $D_1^{-1} D_2^{-1} \dots D_N^{-1}$  в виде интеграла. При этом подынтегральная функция будет зависеть не от каждого  $D_i$ ,  $i = 1, \dots, N$ , по отдельности, а от их линейной комбинации. Воспользуемся формулой

$$\frac{1}{D_1 D_2 \dots D_N} = (N-1)! \int_0^1 dx_1 \int_0^{x_1} dx_2 \dots \int_0^{x_{N-2}} dx_{N-1} \times \\ \times [D_1 x_{N-1}] + D_2(x_{N-2} - x_{N-1}) + \dots + D_N(1 - x_1)]^{-N}. \quad (11.A.1)$$

В этой главе мы применяем (11.A.1) в двух частных случаях, когда  $N = 2$  и  $N = 3$ .

Преобразовав произведение знаменателей, сделаем сдвиг четырехкомпонентной переменной интегрирования. Затем осуществим поворот Вика и воспользуемся четырехмерной вращательной инвариантностью. В итоге мы получим сумму интегралов вида

$$\int d^4 k \frac{(k^2)^n}{(k^2 + \nu^2)^m},$$

где  $(k^2 + \nu^2)^m$  суть подынтегральное выражение в формуле (11.A.1), а члены вида  $(k^2)^n$  отвечают числителям пропагаторов и вершинам. Интеграл расходится, если  $2n + 4 \geq 2m$ . Однако рассматривая комплексные значения размерности  $d$  пространства интегрирования, можно сделать интеграл конечным. Воспользуемся хорошо известной формулой

$$\int_0^\infty d\kappa \frac{\kappa^{l-1}}{(\kappa^2 + \nu^2)^m} = \nu^{l-2m} \frac{\Gamma(l/2)\Gamma(m-l/2)}{2\Gamma(m)}, \quad (11.A.2)$$

где  $l = d + 2n$ . В § 11.2 мы использовали (11.A.2) два раза, положив в одном случае  $n = 0$ ,  $m = 2$ , а в другом  $n = 1$ ,  $m = 2$ .

Ультрафиолетовые расходимости возникают в (11.A.2) в виде полюсов гамма-функции

$$\Gamma(m - l/2) = \Gamma(m - n - d/2),$$

когда  $d \rightarrow 4$  (целое число  $n$  считается при этом фиксированным). Если  $2 + n = m$ , гамма-функция ведет себя следующим образом:

$$\Gamma\left(\frac{4-d}{2}\right) \rightarrow \frac{2}{d-4} + \gamma, \quad (11.A.3)$$

где  $\gamma = 0,5772157\dots$  — постоянная Эйлера. Вид полюса при  $2 + n > m$  можно получить из (11.A.3), используя рекуррентное соотношение для гамма-функций.

## Задачи

**1.** Вычислить вклад в функцию поляризации вакуума  $\pi(q^2)$  и в  $Z_3$  однопетлевых диаграмм, содержащих заряженную безспиновую частицу с массой  $m_s$ . Какому сдвигу энергии состояния  $2s$  атома водорода он соответствует, если  $m_s \gg Z am_e$ ?

**2.** Предположим, что взаимодействию нейтрального скалярного поля  $\phi$  (масса  $m_\phi$ ) с электронным полем в лагранжиане соответствует слагаемое  $g\phi\bar{\psi}\psi$ . Как оно влияет на магнитный момент электрона и на  $Z_2$ ? Ограничиться однопетлевыми диаграммами.

**3.** Рассмотрим нейтральное скалярное поле  $\phi$  с массой  $m_\phi$ , с действием которого описывается членом  $g\phi^3/6$ . Вычислить элемент  $S$ -матрицы, описывающей скаляр-скалярное рассеяние. Ограничиться однопетлевыми диаграммами.

**4.** Вычислить изменение массы электрона  $\delta m_e$ , к которому приводит наличие в системе нейтрального скалярного поля из задачи 2. Ограничиться однопетлевыми диаграммами.

## Литература

1. Feynman R.P. // Phys. Rev. **76**, 769 (1949).
2. Wick G.G. // Phys. Rev. **96**, 1124 (1954).
3. 't Hooft G., Veltman M. // Nucl. Phys. **B44**, 189 (1972).
4. Uehling E.A. // Phys. Rev. **48**, 55 (1935). Однопетлевая функция  $\pi(q^2)$  для  $q^2 \neq 0$  впервые была найдена в работе Schwinger J. // Phys. Rev. **75**, 651 (1949).
5. Schwinger J. // Phys. Rev. **73**, 416 (1948).

6. Эта формула (в том числе и члены, пренебрежимо малые при  $m_e \ll m_\mu$ ) была получена в работах *Suura H., Wichmann E.* // Phys. Rev. **105**, 1930 (1957); *Petermann A.* // Phys. Rev. **105**, 1931(1957); *Elenz H.H.* // Phys. Lett. **20**, 682 (1966); **21**, 720 (1966); *Erickson G.W., Liu H.H.T.* // UCD-CNL-81 report (1968).
7. *Bailey J.* и пр. (CERN–Mainz–Daresbury Collaboration) // Nucl. Phys. **B150**, 1 (1979). Эксперименты состояли в наблюдении прецессии спина мюона в накопительном кольце.
8. *Pauli W., Villars F.* // Rev. Mod. Phys. **21**, 434 (1949). Также см. *Rayski J.* // Phys. Rev. **75**, 1961 (1949).
9. Смотрите, например, *Miller A.I.* Theory of Relativity — Emergence (1905) and Early Interpretation (1905-1911). Addison-Wesley, Reading, MA, 1981. Chapter 1.

## Г л а в а 12

# ОБЩАЯ ТЕОРИЯ ПЕРЕНОРМИРОВОК

В предыдущей главе мы видели, что в квантовой электродинамике при вычислении однопетлевых диаграмм возникают расходящиеся интегралы по импульсному пространству. Но все эти расходимости сокращаются, когда мы выражаем параметры теории через “перенормированные” величины, такие как измеряемые в экспериментах заряды и массы. В 1949 г. Дайсон [1] предложил набросок доказательства того, что в квантовой электродинамике подобное сокращение имеет место во всех порядках теории возмущений. Сразу же стало ясно, что аргументы Дайсона сохраняют силу для большого числа теорий с конечным набором взаимодействий относительно простого вида — так называемых *перенормируемых* теорий, а квантовая электродинамика является лишь одним из примеров. Мы рассмотрим этот подход в § 12.1 и § 12.2.

Долгое время считалось, что любая осмысленная физическая теория должна быть перенормируемой теорией поля. Условие перенормируемости сыграло ключевую роль при построении современной “стандартной модели” слабых, электромагнитных и сильных взаимодействий. Однако ниже мы увидим, что сокращение ультрафиолетовых расходимостей на самом деле не требует перенормируемости — если мы включаем в теорию всю бесконечную серию разрешенных из соображений симметрии взаимодействий, так называемые неперенормируемые теории становятся не менее перенормируемыми, чем перенормируемые.

Сегодня широко распространено мнение, что реалистичные теории, используемые для описания физических явлений при достижимых энергиях, представляют собой “эффективные теории поля”. Как мы увидим в § 12.3, эти теории представляют собой низкоэнергетические приближения более фундаментальных теорий, которые вообще могут не быть теориями поля. Любая эффективная теория поля с необходимостью содержит бесконечное число неперенормируемых взаимодействий.

Тем не менее ожидается, что при достаточно малых энергиях все неперенормируемые взаимодействия в таких теориях сильно подавлены (мы обсудим это в § 12.3 и § 12.4). Таким образом, перенормируемые теории типа квантовой электродинамики и стандартной модели сохраняют свой особый статус, хотя причины этого и отличаются от тех, которыми исходно объясняли условие перенормируемости.

### § 12.1. Степени расходимости

Рассмотрим теорию очень общего вида, содержащую различные взаимодействия. Будем нумеровать взаимодействия индексом  $i$ ; каждое из них характеризуется числом  $n_{if}$  участвующих в нем полей типа  $f$  и числом операторов дифференцирования  $d_i$ , действующих на эти поля.

Начнем с вычисления в этой теории “условной степени расходимости”<sup>1)</sup>  $D$  произвольной связной одночастично неприводимой фейнмановской диаграммы. Эта величина по определению равна разности между суммарной степенью импульса в числителе и суммарной степенью импульса в знаменателе, сложенной с учетоменным числом независимых 4-импульсов, по которым ведется интегрирование. Условная степень расходимости совпадает с истинной степенью расходимости при интегрировании по области импульсного пространства, где импульсы всех внутренних линий одновременно стремятся к бесконечности. А именно, при  $D > 0$  вклад в амплитуду от области, где все внутренние импульсы обращаются в бесконечность пропорционально параметру  $\kappa \rightarrow \infty$ , расходится как

$$\int \kappa^{D-1} dk. \quad (12.1.1)$$

В том же смысле интеграл с условной степенью  $D = 0$  расходится логарифмически, а интеграл с  $D < 0$  сходится (по крайней мере, в указанной области). Позже мы вернемся к вопросу о существовании области интегрирования, где интеграл расходится сильнее, чем в указанной.

Чтобы найти  $D$ , нам нужно знать о диаграмме следующее:

$I_f \equiv$  число внутренних линий, соответствующих полям типа  $f$ ,

$E_f \equiv$  число внешних линий, соответствующих полям типа  $f$ ,

$N_f \equiv$  число вершин, соответствующих взаимодействиям типа  $i$ .

Будем считать, что асимптотическое поведение пропагатора  $\Delta_f(k)$  по-ля типа  $f$  дается выражением

$$\Delta_f(k) \sim k^{-2+2s_f}. \quad (12.1.2)$$

Из результатов гл. 6 следует, что для скалярных полей  $s_f = 0$ , для дираковского поля  $s_f = \frac{1}{2}$ , а для массивного векторного поля  $s_f = 1$ . Вообще, можно показать, что для массивных полей, лоренц-преобразование которых относится к типу  $(A, B)$ , имеет место равенство  $s_f = A + B$ . Допуская некоторую вольность речи, мы можем

---

<sup>1)</sup> Соответствующий английский термин: superficial degree of divergence. (Примеч. ред.)

называть  $s_f$  “спином”. Однако после отбрасывания несущественных вследствие калибровочной инвариантности слагаемых получаем, что эффективный фотонный пропагатор равен  $\eta_{\mu\nu}/k^2$ , т. е. для фотона  $s_f = 0$ . Этот результат справедлив и для массивной векторной частицы, взаимодействующей с сохраняющимся током (при условии, что ток не зависит от векторного поля). Можно убедиться, что в аналогичном смысле для пропагатора гравитонного поля  $g_{\mu\nu}$  также  $s_f = 0$ .

В соответствии с (12.1.2), суммарный вклад пропагаторов в степень расходимости  $D$  равен

$$\sum_f I_f(2s_f - 2). \quad (12.1.3)$$

Далее, входящие в плотность взаимодействия типа  $i$  производные увеличивают степень подынтегрального выражения по импульсам на  $d_i$ , так что полный вклад дифференцирований в  $D$  составляет

$$\sum_i N_i d_i. \quad (12.1.4)$$

Наконец, нам нужно знать число независимых импульсов, по которым ведется интегрирование. Каждой внутренней линии можно сопоставить 4-импульс, но не все эти импульсы будут независимыми — каждая связанная с вершиной дельта-функция накладывает на них линейное соотношение. Одно из соотношений сводится к условию сохранения полного импульса, наложенному на импульсы внешних линий; следовательно, вклад в  $D$  от объема области интегрирования в импульсном пространстве можно представить как

$$4 \left[ \sum_f I_f - \left( \sum_i N_i - 1 \right) \right], \quad (12.1.5)$$

что, конечно же, есть просто учетверенное число независимых петель на диаграмме. Складывая (12.1.3), (12.1.4) и (12.1.5), находим

$$D = \sum_f I_f(2s_f + 2) + \sum_i N_i(d_i - 4) + 4. \quad (12.1.6)$$

Записанная в таком виде, формула (12.1.6) не очень удобна: по ее структуре можно предположить, что значение  $D$  зависит от внутренних деталей фейнмановской диаграммы. К счастью, ее можно упростить, используя топологические равенства

$$2I_f + E_f = \sum_i N_i n_{if}. \quad (12.1.7)$$

(Каждая внутренняя линия соединена с двумя вершинами, а каждая внешняя — с одной.) Исключая  $I_f$  при помощи (12.1.7), приводим

формулу (12.1.6) к виду

$$D = 4 - \sum_f E_f(s_f + 1) - \sum_i N_i \Delta_i, \quad (12.1.8)$$

где  $\Delta_i$  — параметр, характеризующий взаимодействия типа  $i$ :

$$\Delta_i \equiv 4 - d_i - \sum_f n_{if}(s_f + 1). \quad (12.1.9)$$

Этот результат можно было получить на основе простого размерного анализа, не обращаясь к структуре фейнмановских диаграмм. Пропагатор поля представляет собой четырехмерное фурье-преобразование среднего по вакууму от хронологически упорядоченного произведения двух свободных полей, так что при обычной нормировке поле  $f$ , размерность<sup>2)</sup> которого в степенях импульса равна  $\mathcal{D}_f$ , будет обладать пропагатором размерности  $-4 + 2\mathcal{D}_f$ . Поэтому если при импульсах  $k$ , по величине значительно превосходящих массу, пропагатор асимптотически ведет себя как  $k^{-2+2s_f}$ , то для размерности поля должно выполняться равенство  $-4 + 2\mathcal{D}_f = -2 + 2s_f$ , т.е.  $\mathcal{D}_f = 1 + s_f$ . Взаимодействие типа  $i$ , включающее  $n_{if}$  таких полей и  $d_i$  дифференцирований, будет тогда обладать размерностью  $d_i + \sum_f n_{if}(1 + s_f)$ . Но действие безразмерно, так что каждое слагаемое в плотности лагранжиана должно обладать размерностью  $+4$ , чтобы сократить размерность  $-4$  элемента объема  $d^4x$ . Следовательно, размерность константы взаимодействия должна быть равна  $4 - d_i - \sum_f n_{if}(1 + s_f)$ , что есть в точности значение параметра  $\Delta_i$ .

В импульсном представлении связной фейнмановской диаграмме с  $E_f$  внешними линиями полей типа  $f$  соответствует амплитуда, получаемая фурье-преобразованием по  $4 \sum_f E_f$  координатам среднего по вакууму от хронологически упорядоченного произведения полей суммарной размерности  $\sum_f E_f(1 + s_f)$ , так что ее размерность равна  $\sum_f E_f(-3 + s_f)$ . В этой величине можно выделить (равный  $-4$ ) вклад сохраняющей 4-импульс дельта-функции и равный  $\sum_f E_f(-2 + 2s_f)$  вклад пропагаторов, соответствующих внешним линиям; получаем,

<sup>2)</sup> В этой главе слово “размерность” всегда означает размерность, выраженную в степенях массы или импульса (в системе единиц, где  $\hbar = c = 1$ ). Мы работаем со стандартно нормированными полями, для которых в лагранжиане свободного поля при члене со старшей производной (который определяет асимптотическое поведение пропагатора) стоит безразмерный коэффициент.

что суммарная размерность собственно интеграла по импульсам и всех констант взаимодействия есть

$$\sum_f E_f(-3 + s_f) - (-4) - \sum_f E_f(-2 + 2s_f) = 4 - \sum_f E_f(s_f + 1).$$

После вычитания вклада констант взаимодействия  $\sum_i N_i \Delta_i$  находим, что размерность интеграла по импульсам равна

$$4 - \sum_f E_f(s_f + 1) - \sum_i N_i \Delta_i.$$

Поскольку нас интересует область, где все импульсы одновременно стремятся к бесконечности, степень расходимости интеграла совпадает с его размерностью — мы еще раз вывели формулу (12.1.8).

Таблица 12.1

Слагаемые в плотности лагранжиана квантовой электродинамики. Через  $d_i$ ,  $n_{i\gamma}$  и  $n_{ie}$  обозначены количества входящих в выражение для плотности взаимодействия дифференцирований, фотонных полей и электронных полей соответственно;  $\Delta_i$  — размерность константы взаимодействия (напомним, что  $s_\gamma = 0$  и  $s_e = 1/2$ )

Взаимодействие	$d_i$	$n_{i\gamma}$	$n_{ie}$	$\Delta_i$
$-ie\tilde{\psi}\hat{A}\psi$	0	1	2	$4 - 1 - 3 = 0$
$-\frac{1}{4}(Z_3 - 1)F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$	2	2	0	$4 - 2 - 2 = 0$
$-(Z_2 - 1)\tilde{\psi}\partial\psi$	1	0	2	$4 - 1 - 3 = 0$
$[-(Z_2 - 1)m + Z_2\delta m]\tilde{\psi}\psi$	0	0	2	$4 - 3 = 1$

Если для всех взаимодействий  $\Delta_i \geq 0$ , то из (12.1.8) следует верхняя оценка для  $D$ , зависящая только от числа внешних линий каждого типа, т.е. только от физического процесса, амплитуда которого вычисляется:

$$D \leq 4 - \sum_f E_f(s_f + 1). \quad (12.1.10)$$

Например, в рассмотренном в предыдущей главе простом варианте квантовой электродинамики лагранжиан содержал члены, приведенные в табл. 12.1. Для всех взаимодействий выполнено неравенство  $\Delta_i \geq 0$ , так что согласно (12.1.10) условная степень расходимости фейнмановской диаграммы с  $E_\gamma$  внешними фотонными линиями и  $E_e$  внешними линиями дираковских фермионов ограничена сверху величиной

$$D \leq 4 - \frac{3}{2}E_e - E_\gamma. \quad (12.1.11)$$

Лишь конечное число наборов внешних линий приводит к условно расходящимся интегралам — мы перечислим их в § 12.2. Вскоре мы

покажем, что в теориях, в которых для всех взаимодействий выполнено неравенство  $\Delta_i \geq 0$ , число возникающих расходимостей ограничено и все они могут быть устранины посредством переопределения конечного числа физических постоянных и изменения нормировок полей. По этой причине такие теории называются *перенормируемыми*. В § 12.3 мы приведем список всех перенормируемых теорий и обсудим значение перенормируемости как критерия отбора для физических теорий.

Понятие перенормируемости используется и в приложении к отдельному взаимодействию. Перенормируемым называют взаимодействие, для которого  $\Delta_i \geq 0$ , т.е. соответствующая константа связи обладает положительной или нулевой размерностью. Иногда делают различия между случаями  $\Delta_i = 0$  (просто перенормируемостью) и  $\Delta_i > 0$  (*суперперенормируемостью*). Поскольку включение дополнительных полей или дифференцирований всегда приводит к уменьшению величины  $\Delta_i$ , для любого заданного набора типов полей может существовать лишь конечное число перенормируемых взаимодействий. Выше мы видели, что все взаимодействия в простейшем варианте квантовой электродинамики перенормируемы, а слагаемые  $\bar{\psi}\psi$  — даже суперперенормируемы.

С другой стороны, если для некоторого взаимодействия имеет место неравенство  $\Delta_i < 0$ , степень расходимости (12.1.8) растет с увеличением числа вершин соответствующего типа. Сколь бы ни были велики значения  $E_f$ , при увеличении числа вершин типа  $i$  с  $\Delta_i < 0$  величина (12.1.8) рано или поздно станет положительной (или нулем), а интеграл — расходящимся. Такие взаимодействия обладают константами связи отрицательной размерности и называются *неперенормируемыми*<sup>3)</sup>; для теории, содержащей хотя бы одно такое взаимодействие, также используется термин “неперенормируемая”. Но это не означает, что теория лишена смысла — мы увидим, что и в неперенормируемом случае все расходимости могут быть устранины при помощи переопределения параметров, но для этого требуется наличие бесконечного числа взаимодействий.

Следует помнить, что выше мы нашли для фейнмановской диаграммы степень расходимости, связанную только с областью в импульсном пространстве, где все внутренние 4-импульсы одновременно стремятся к бесконечности. Расходимости могут возникнуть и при интегрировании по области, где обращаются в бесконечность только импульсы, сопоставленные линиям некоторой поддиаграммы. Например, в квантовой электродинамике согласно (12.1.1) для комптоновского

<sup>3)</sup> В статистической физике неперенормируемые взаимодействия называются *несущественными*, так как они становятся менее важными в пределе низких энергий. Перенормируемые и суперперенормируемые взаимодействия называются *маргинальными* и *существенными* соответственно.

рассеяния имеем  $D \leq -1$  (поскольку  $E_e = 2$  и  $E_\gamma = 2$ ); и действительно, диаграммам, подобным изображенной на рис. 12.1, соответствуют сходящиеся интегралы. Но диаграммы, подобные приведенным на рис. 12.1, б и 12.1, в, логарифмически расходятся, так как они

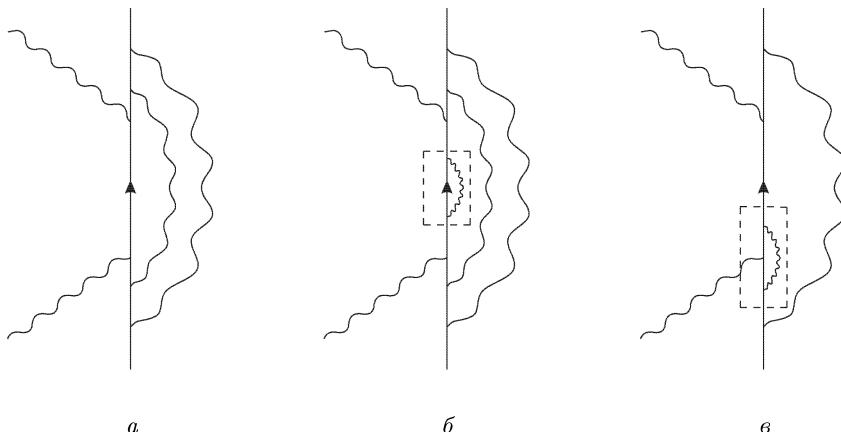


Рис. 12.1. Некоторые двухпетлевые диаграммы для комптоновского рассеяния. Прямые линии соответствуют электронам, волнистые — фотонам. Для диаграммы *а* интеграл по импульсному пространству сходится, а для диаграмм *б* и *в* — расходится ввиду наличия у них расходящихся поддиаграмм (выделенных пунктирными линиями)

содержат поддиаграммы (заключенные в пунктирные прямоугольники) с  $D \geq 0$ . Можно сказать, что расходимость этих диаграмм связана с аномально плохим асимптотическим поведением подынтегрального выражения в области, где восемь компонент двух независимых 4-импульсов стремятся к бесконечности по некоторому четырехмерному подпространству — а именно, по подпространству, где обращается в бесконечность только импульс, циркулирующий в петле на внутренней линии электрона (или только импульс, циркулирующий в содержащей электрон-фотонную вершину петле).

Было показано [2], что условие фактической сходимости интеграла для амплитуды, соответствующего некоторой фейнмановской диаграмме, состоит в отрицательности величины  $D$  не только для интегрирования по всем независимым импульсам, но и для всех частичных интегралов, получаемых наложением одного или нескольких линейных условий на импульсы в петлях. (Приведенные на рис. 12.1, б и 12.1, в диаграммы не удовлетворяют этому критерию, так как для них  $D \geq 0$  при интегрировании только по импульсам в выделенных пунктирными линиями петлях.) Мы не будем приводить здесь довольно длинное доказательство этого утверждения, поскольку оно подробно изложено в имеющейся литературе [3], а используемые при доказа-

тельстве методы имеют мало общего с практическими вычислениями. В следующем параграфе мы покажем, как можно удовлетворить приведенному выше условию.

## § 12.2. Уничтожение расходимостей

Рассмотрим фейнмановскую диаграмму (или поддиаграмму) с неотрицательной условной степенью расходимости  $D \geq 0$ . В области, где все внутренние импульсы одновременно стремятся к бесконечности, интеграл будет расходиться как  $\int_0^\infty k^{D-1} dk$ . После  $(D+1)$ -кратного дифференцирования по какому-либо внешнему импульсу полная степень импульса под знаком интеграла уменьшится на  $D+1$  и интеграл по рассматриваемой области станет сходящимся<sup>1)</sup>. Не исключено, что еще остались расходимости, связанные с поддиаграммами (аналогично изображенным на рис. 12.1, б и 12.1, в случаям); пока что мы проигнорируем эту возможность, но вернемся к ней позднее в этом параграфе. Поскольку после  $(D+1)$ -кратного дифференцирования интеграл становится сходящимся, вклад диаграммы (или поддиаграммы) можно представить в виде суммы полинома степени  $D$  по внешним импульсам с расходящимися коэффициентами и конечной добавки.

Чтобы проиллюстрировать описанную операцию на технически несложном примере, рассмотрим логарифмически расходящийся одномерный интеграл

$$\mathcal{I}(q) \equiv \int_0^\infty \frac{dk}{k+q}$$

с  $D = 1 - 1 = 0$ . Однократное дифференцирование дает

$$\mathcal{I}'(q) \equiv - \int_0^\infty \frac{dk}{(k+q)^2} = -\frac{1}{q},$$

так что

$$\mathcal{I}(q) = -\ln q + c.$$

Постоянная  $c$  дается расходящимся интегралом; но остальная часть результата не содержит бесконечностей. Совершенно аналогично

---

<sup>1)</sup> Например, пусть некоторой внутренней линии скалярного поля приписан импульс  $k+p$ , где  $p$  — линейная комбинация внешних 4-импульсов, а  $k$  — 4-импульс, по которому ведется интегрирование. Соответствующий пропагатор  $[(k+p)^2 + m^2]^{-1}$  имеет асимптотику  $k^{-2}$  при  $k \rightarrow \infty$ . Его производная по  $p^\mu$  равна  $-2(k_\mu + p_\mu)[(k+p)^2 + m^2]^{-2}$ ; при  $k \rightarrow \infty$  это выражение ведет себя уже как  $k^{-3}$ .

можно вычислить интеграл с  $D = 1$ :

$$\int_0^\infty \frac{k \, dk}{k + q} = a + bq + q \ln q,$$

где  $a$  и  $b$  — бесконечные постоянные.

Но полиномиальное по внешним импульсам слагаемое можно получить, добавив соответствующий член в лагранжиан: если диаграмма с  $E_f$  внешними линиями типа  $f$  имеет степень расходимости  $D \geq 0$ , то связанный с ультрафиолетовыми расходимостями полином будет иметь тот же вид, что и вклад в амплитуду от различных взаимодействий, содержащих  $n_{if} = E_f$  полей типа  $f$  и  $d_i \leq D$  дифференцирований. Если в лагранжиане уже присутствуют слагаемые такого вида, ультрафиолетовые расходимости просто дают поправки к их константам связи. Следовательно, возникающие бесконечности можно уничтожить, введя подходящие бесконечные добавки к константам взаимодействий в лагранжиане. Фактически мы можем измерить лишь сумму голой константы взаимодействия и соответствующего коэффициента одного из “расходящихся” полиномов; так что если мы потребуем равенства этой суммы полученной при измерении величине (предположительно конечной), то голая константа взаимодействия с необходимостью будет содержать бесконечность, уничтожающую расходимость в интеграле по внутренним импульсам диаграммы. (Исключение составляет случай, когда мы имеем дело с расходящейся диаграммой всего с двумя внешними линиями, т.е. с радиационной поправкой к пропагатору частицы. Тогда мы должны требовать не равенства некоторой эффективной константы взаимодействия измеряемой величине, а совпадения положения полюса пропагатора и вычета в нем с соответствующими величинами для пропагатора свободной частицы.) Таким образом, все бесконечности уничтожаются за счет переопределения констант взаимодействий, масс и нормировок полей.

Чтобы такая схема перенормировок могла быть реализована, в лагранжиан должны входить *все* взаимодействия, соответствующие ультрафиолетово расходящимся слагаемым в фейнмановских амплитудах. Разумеется, соображения симметрии (такие как лоренцинвариантность и калибровочная инвариантность) накладывают ограничения на вид входящих в лагранжиан слагаемых; но при этом возникают аналогичные ограничения и на вид расходимостей. (Требуются некоторые усилия, чтобы показать эквивалентность условий, накладываемых неабелевыми калибровочными симметриями на вид взаимодействий и расходимостей. Мы сделаем это во втором томе.) В общем случае никаких других ограничений на структуру ультрафиолетовых расходимостей нет, так что *лагранжиан должен содержать все слагаемые, не запрещенные из соображений симметрии*. (В суперсимметричных теориях из этого правила есть исключения [4].)

Но существует важный класс теорий с конечным числом типов взаимодействий, для которых эта схема перенормировки все же применима. Это так называемые перенормируемые теории, содержащие лишь взаимодействия с  $\Delta_i \geq 0$ . Из (12.1.8) в этом случае следует

$$D \leq 4 - \sum_f E_f(s_f + 1),$$

так что расходящиеся полиномы возникают лишь при вычислении ограниченного числа фейнмановских диаграмм или поддиаграмм — тех, где число внешних линий достаточно мало, чтобы выполнялось неравенство  $D \geq 0$ . Вклад любого из таких полиномов в амплитуду имеет тот же вид, что и вклад вершины, связанной со взаимодействием, включающим  $E_f$  полей типа  $f$  и  $0, 1, \dots, D$  дифференцирований. Но из (12.1.9) следует, что *таким способом можно получить в точности взаимодействия, удовлетворяющие условию перенормируемости  $\Delta_i \geq 0$ , т.е.*

$$0 \leq d_i \leq 4 - \sum_f n_{if}(s_f + 1).$$

Для уничтожения всех бесконечностей в перенормируемой теории обычно необходимо наличие в лагранжиане *всех* слагаемых, не запрещенных из соображений симметрии<sup>2)</sup>. Например, если скалярное (или псевдоскалярное) поле  $\phi$  и фермионное поле  $\psi$  взаимодействуют посредством слагаемого  $\bar{\psi}\psi\phi$  (или  $\bar{\psi}\gamma_5\psi\phi$ ) в плотности лагранжиана, то мы не можем исключить взаимодействие  $\phi^4$ ; в противном случае у нас не будет контрглена, сокращающего логарифмическую расходимость фермионной петли с четырьмя скалярными (или псевдоскалярными) внешними линиями.

Рассмотрим подробнее уничтожение расходимостей в простейшем варианте квантовой электродинамики. При помощи (12.1.11) мы можем перечислить все диаграммы или поддиаграммы, способные привести к расходящимся интегралам.

$$E_e = 2, E_\gamma = 1.$$

Эти значения соответствуют электрон-фотонной вершине  $\Gamma_\mu^{(l)}(p', p)$ . Индекс  $l$  указывает, что подразумевается только вклад от диаграмм

<sup>2)</sup> Кроме того, в лагранжиан могут входить слагаемые и массовые члены, нарушающие глобальные симметрии — при условии, что они суперперенормируемые, т.е. для них  $\Delta_i > 0$ . Это связано с тем, что наличие суперперенормируемого взаимодействия уменьшает степень расходимости, и нарушение симметрии не оказывает влияния на уничтожение расходимостей за счет строго перенормируемых членов с  $\Delta_i = 0$ . Заметим, что симметрией обладают *голые* строго перенормируемые взаимодействия; перенормированные взаимодействия, определенные через матричные элементы на массовой оболочке, обычно нарушают симметрию.

с петлями.) В этом случае  $D = 0$ , так что расходящаяся часть не зависит от импульса. Из лоренц-инвариантности тогда следует, что бесконечная константа должна быть пропорциональна  $\gamma_\mu$ :

$$\Gamma_\mu^{(l)} = L\gamma_\mu + \Gamma_\mu^{(f)}, \quad (12.2.1)$$

где константа  $L$  содержит логарифмическую расходимость, а  $\Gamma_\mu^{(f)}$  конечна. Эта формула не определяет  $L$  однозначно, поскольку всегда возможно перенести конечную величину  $\delta L\gamma_\mu$  из  $\Gamma_\mu^{(f)}$  в  $L\gamma_\mu$ . Чтобы исключить оставшийся произвол, вспомним, что согласно результатам § 10.4 матричные элементы  $\Gamma_\mu(p, p)$  (а потому и  $\Gamma_\mu^{(f)}(p, p)$ ) между дирашовскими спинорами с лежащими на массовой оболочке импульсами пропорциональны соответствующим матричным элементам  $\gamma^\mu$ . Поэтому значение  $L$  можно однозначно зафиксировать условием

$$\bar{u}(\mathbf{p}, \sigma')\Gamma_\mu^{(f)}(p, p)u(\mathbf{p}, \sigma) = 0 \quad (12.2.2)$$

при  $p^2 + m_e^2 = 0$ .

$$E_e = 2, E_\gamma = 0.$$

Эти значения отвечают диаграммам для собственной энергии электрона  $\Sigma^*(p)$ . Здесь  $D = 1$ , так что расходящаяся часть линейна по импульсу на внешних электронных линиях  $p^\mu$ . Из лоренц-инвариантности и сохранения четности следует, что вклад диаграмм с петлями зависит от  $\hat{p}$ :

$$\Sigma^{(l)}(p) = A - (i\hat{p} + m)B + \Sigma^{(f)}(\hat{p}), \quad (12.2.3)$$

где  $A$  и  $B$  — бесконечные константы, а  $\Sigma^{(f)}$  не содержит расходимостей. Снова написанная формула не дает однозначного определения констант  $A$  и  $B$ , поскольку имеется возможность добавить к  $\Sigma^{(f)}$  линейное по  $\hat{p}$  выражение. Мы зафиксируем значения  $A$  и  $B$ , наложив условие

$$\Sigma^{(f)} = \frac{\Sigma^{(f)}}{\partial \hat{p}} = 0 \quad \text{при} \quad i\hat{p} = -m. \quad (12.2.4)$$

На самом деле  $B$  не является новой бесконечной константой. Если мы используем не нарушающую сохранения тока схему регуляризации, то величины  $\Gamma_\mu$  и  $\Sigma$  удовлетворяют тождеству Уорда (10.4.27)

$$\Gamma^\mu(p, p) = \gamma^\mu + i \frac{\partial}{\partial p_\mu} \Sigma(p),$$

и потому

$$L\gamma_\mu + \Gamma_\mu^{(f)}(p, p) = B\gamma^\mu + i \frac{\partial \Sigma^{(f)}(p)}{\partial p^\mu}. \quad (12.2.5)$$

Взяв матричный элемент последнего равенства между спинорами  $\bar{u}(\mathbf{p}, \sigma')$  и  $u(\mathbf{p}, \sigma)$ , при помощи (12.2.2) и (12.2.4) находим

$$L = B. \quad (12.2.6)$$

$$E_\gamma = 2, E_e = 0.$$

Этим значениям соответствуют диаграммы для собственной энергии фотона  $\Pi_{\mu\nu}^*(q)$ . Имеем  $D = 2$ , так что расходящаяся часть должна быть полиномом второй степени по  $q$ . Из лоренц-инвариантности следует, что собственная энергия  $\Pi_{\mu\nu}^*$  должна быть линейной комбинацией  $\eta_{\mu\nu}$  и  $q_\mu q_\nu$  с коэффициентами, зависящими только от  $q^2$ ; вклад диаграмм с петлями можно поэтому представить в виде

$$\Pi_{\mu\nu}^{(l)}(q) = C_1 \eta_{\mu\nu} + C_2 \eta_{\mu\nu} q^2 + C_3 q_\mu q_\nu + \text{конечные члены},$$

где  $C_1$ ,  $C_2$  и  $C_3$  — бесконечные константы. Если мы используем не нарушающую сохранения тока схему перенормировок, должно выполняться равенство

$$q^\mu \Pi_{\mu\nu}^{(l)}(q) = 0.$$

Аналогичное соотношение будет иметь место и для расходящихся слагаемых, так что величина  $C_1 q_\nu + (C_2 + C_3) q^2 q_\nu$  должна быть конечной при всех  $q$ . Отсюда следует, что  $C_1$  и  $C_2 + C_3$  — конечные величины, и мы можем включить содержащие их слагаемые в конечную часть  $\Pi_{\mu\nu}^{(l)}(q)$ . Таким образом,

$$\Pi_{\mu\nu}^{(l)}(q) = (\eta_{\mu\nu} q^2 - q_\mu q_\nu)(C + \pi(q^2)), \quad (12.2.7)$$

где величина  $\pi(q^2)$  конечна, а единственная оставшаяся расходимость в  $\Pi_{\mu\nu}^{(l)}(q)$  заключена в постоянной  $C$ . Чтобы однозначно зафиксировать ее значение, мы можем включить в  $C$  величину  $\pi(0)$  и наложить условие

$$\pi(0) = 0. \quad (12.2.8)$$

$$E_\gamma = 4, E_e = 0.$$

Этим значениям соответствуют диаграммы для амплитуды  $M_{\mu\nu\rho\sigma}$  рассеяния фотона на фотоне. Для них  $D = 0$ , и из условий лоренц-инвариантности и бозе-статистики получаем, что амплитуда имеет вид (древесный вклад в этом случае отсутствует)

$$M_{\mu\nu\rho\sigma} = K(\eta_{\mu\nu}\eta_{\rho\sigma} + \eta_{\mu\rho}\eta_{\nu\sigma} + \eta_{\mu\sigma}\eta_{\nu\rho}) + \text{конечные члены},$$

где константа  $K$  потенциально бесконечна. Однако из сохранения тока следует, что

$$q^\mu M_{\mu\nu\rho\sigma} = 0,$$

так что величина  $K(q_\nu\eta_{\rho\sigma} + q_\rho\eta_{\nu\sigma} + q_\sigma\eta_{\nu\rho})$  конечна. Чтобы это было справедливо при  $q \neq 0$ , постоянная  $K$  сама должна быть конечной. Это рассуждение иллюстрирует роль симметрий в схемах перенормировок. Если бы константа  $K$  оказалась бесконечной, мы не смогли бы уничтожить возникшую расходимость за счет перенормировки константы взаимодействия  $(A_\mu A^\mu)^2$ , поскольку такое взаимодействие нарушает калибровочную инвариантность; но  $K$  конечна из-за условия

сохранения тока, следующего из той же калибровочной инвариантности.

$$E_\gamma = 1, E_e = 0 \text{ и } E_e = 1, E_\gamma = 0, 1, 2.$$

Для таких диаграмм имеем соответственно  $D = 3$  и  $D = \frac{5}{2}, \frac{3}{2}, \frac{1}{2}$ . Но из лоренц-инвариантности следует обращение всех этих амплитуд в нуль.

$$E_\gamma = 3, E_e = 0.$$

В этом случае  $D = 1$ , но соответствующие амплитуды равны нулю вследствие инвариантности относительно зарядового сопряжения.

Возможно, читатель уже заметил, что независимые бесконечные постоянные  $A$ ,  $B$  и  $C$  находятся во взаимно-однозначном соответствии с параметрами  $Z_2$ ,  $Z_3$  и  $\delta m$  в контрчленной части (11.1.9) лагранжиана квантовой электродинамики. Вклад контрчленов в величину  $\Sigma^*(p)$  равен  $Z_2\delta m - (Z_2 - 1)(i\hat{p} + m)$ . Условие неизменности положения одностороннего полюса и вычета в нем по сравнению со случаем пропагатора свободного поля означает, что постоянные  $Z_2$  и  $\delta m$  должны быть выбраны так, чтобы вычисленная с учетом всех вкладов величина  $\Sigma^*(p)$  удовлетворяла соотношениям (12.2.4), т.е.

$$Z_2\delta m = -A, \quad (12.2.9)$$

$$Z_2 - 1 = -B. \quad (12.2.10)$$

При этом собственная энергия совпадает с конечной функцией  $\Sigma^{(f)}(p)$ :

$$\Sigma(p) = \Sigma^{(f)}(p). \quad (12.2.11)$$

Аналогично, контрчленная часть  $\mathcal{L}_2$  дает непосредственный вклад  $(Z_2 - 1)\gamma_\mu$  в вершину  $\Gamma_\mu$ . Используя (12.2.6), получаем для вершины выражение

$$\Gamma_\mu = \gamma_\mu + (Z_2 - 1)\gamma_\mu + \Gamma_\mu^{(l)} = \gamma_\mu + \Gamma_\mu^{(f)}. \quad (12.2.12)$$

Оно не только конечно, но и удовлетворяет условию

$$\bar{u}(\mathbf{p}, \sigma')\Gamma_\mu(p, p)u(\mathbf{p}, \sigma) = \bar{u}(\mathbf{p}, \sigma')\gamma_\mu u(\mathbf{p}, \sigma'), \quad (12.2.13)$$

что можно увидеть также из равенств (10.6.13) и (10.6.14). Наконец,  $\mathcal{L}_2$  дает вклад  $-(Z_3 - 1)(q^2\eta_{\mu\nu} - q_\mu q_\nu)$  в величину  $\Pi_{\mu\nu}^*(q)$ . Чтобы вычет в полюсе пропагатора фотона был таким же, как и у пропагатора свободного поля, коэффициент при  $q^2\eta_{\mu\nu} - q_\mu q_\nu$  в выражении для  $\Pi_{\mu\nu}(q)$  должен обращаться в нуль, так что

$$Z_3 = 1 + C \quad (12.2.14)$$

и фотонный пропагатор конечен:

$$\Pi_{\mu\nu}(q) = (\eta_{\mu\nu}q^2 - q_\mu q_\nu)\pi(q^2). \quad (12.2.15)$$

На данный момент мы убедились лишь в том, что расходимости, связанные с областью импульсного пространства, где все импульсы велики (а их отношения при этом находятся в общем положении), принимают вид полиномов от внешних импульсов и уничтожаются подходящими контрчленами. Соответствующие этой ситуации диаграммы называются *условно сходящимися*. Но пока что мы не можем утверждать, что все расходимости уничтожаются в результате перенормировки. Следует еще рассмотреть диаграммы высших порядков, где ультрафиолетовые расходимости возникают при стремлении некоторого меньшего подмножества импульсов интегрирования к бесконечности. Например, в квантовой электродинамике условные расходимости при интегрировании по поднабору импульсов возникают из-за поддиаграмм, представляющих собой вклады в собственную энергию фотона  $\Pi^*$ , собственную энергию электрона  $\Sigma^*$  или электрон–фотонную вершину  $\Gamma^\mu$ . Трудности в обращении с такими расходимостями связаны с тем, от последних нельзя избавиться посредством дифференцирования по внешним импульсам: в выражениях для амплитуд операторы дифференцирования действуют только на внутренние линии диаграмм, не принадлежащие расходящимся поддиаграммам, и потому не поникают степень расходимости этих поддиаграмм. Как было отмечено в предыдущем параграфе, диаграмма или сумма диаграмм является фактически сходящейся, только если интегралы по всем импульсам и по любым поднаборам импульсов являются условно сходящимися (в смысле подсчета степеней импульса). Но всегда, когда появляется некоторая расходящаяся поддиаграмма, для нее существует подходящий бесконечный контрчлен. В случае электродинамики это слагаемые из (11.9): контрчлен

$$-(Z_3 - 1)(q^2 \eta_{\mu\nu} - q_\mu q^\nu)$$

для каждой поддиаграммы, соответствующей  $\Pi_{\mu\nu}^*(q)$ ; контрчлен

$$Z_2 \delta m - (Z_2 - 1)(i\hat{p} + m)$$

для каждой поддиаграммы, соответствующей  $\Sigma^*(p)$ ; контрчлен

$$(Z_2 - 1)\gamma^\mu$$

для каждой поддиаграммы, соответствующей  $\Gamma^\mu$ . Как и ранее (для случая расходящихся диаграмм), эти контрчлены уничтожают связанные с поддиаграммами расходимости [1].

К сожалению, в приведенном простом рассуждении имеется изъян: проигнорирован случай перекрывающихся расходимостей. А именно, две расходящиеся поддиаграммы могут иметь общую внутреннюю линию, так что мы не имеем права рассматривать их как два независимых расходящихся интеграла. В квантовой электродинамике такое происходит только когда две вершины электрон–электрон–фотон пе-

рекрываются на диаграмме для собственной энергии фотона или электрона<sup>3)</sup>, как показано на рис. 12.2 и 12.3.

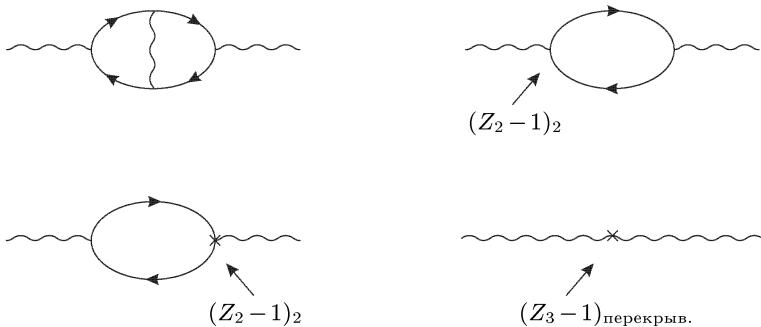


Рис. 12.2. Некоторые диаграммы четвертого порядка для собственной энергии фотона в квантовой электродинамике, содержащие перекрывающиеся расходимости. Линии со стрелками соответствуют электронам; волнистые линии соответствуют фотонам. Кресты обозначают вклады контрчленов

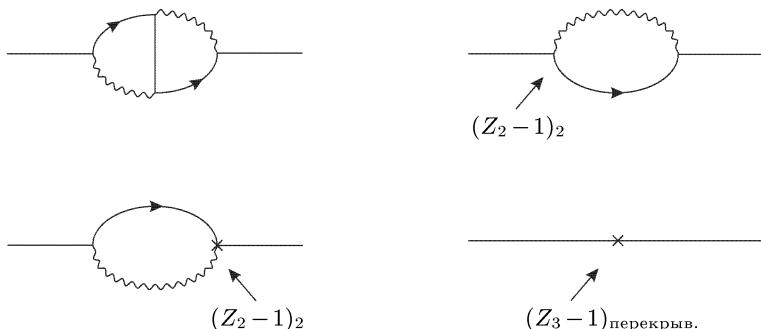


Рис. 12.3. Некоторые диаграммы четвертого порядка для собственной энергии электрона в квантовой электродинамике, содержащие перекрывающиеся расходимости. Волнистые линии соответствуют фотонам; остальные линии — электронам. Кресты обозначают вклады контрчленов

<sup>3)</sup> Предположение о наличии общей линии у двух собственно-энергетических диаграмм или у собственно-энергетической диаграммы и вершинной части приводит к тому, что количество внешних линий оказывается недостаточным для соединения поддиаграммы с оставшейся частью диаграммы. Исторически для решения проблемы перекрывающихся расходимостей в собственной энергии электрона использовалось тождество Уорда (10.4.26) — собственная энергия электрона выражалась через вершинную функцию, для которой перекрывающиеся расходимости не возникают. Мы не будем здесь использовать этот подход, поскольку в нем нет необходимости (и в любом случае он не переносится на случай собственной энергии фотона и других нейтральных частиц).

Полное рассмотрение перенормировок, учитывающее возможность перекрывания расходимостей, должно содержать алгоритм устранения условных ультрафиолетовых расходимостей (включая расходимости, связанные с различными частями области интегрирования) и доказательство того, что этот алгоритм по крайней мере формально реализуется перенормировкой масс, полей и констант взаимодействий. Согласно теореме, приведенной в ссылке 2, в этом случае все функции Грина перенормированных полей, выраженные через перенормированные массы и константы взаимодействий, будут конечными. Первое доказательство того, что перенормировка масс, полей и констант взаимодействий делает интегрирование по импульсам и все частичные интегрирования условно сходящимися, было дано Саламом [5]. Конкретный алгоритм устранения ультрафиолетовых расходимостей был предложен Боголюбовым и Парасюком [6] и скорректирован Хеппом [7]; ими же была показана его эквивалентность перенормировке масс, полей и констант взаимодействий. Наконец, Циммерманн [8] доказал, что этот алгоритм действительно устраниет все условные расходимости при полном и частичном интегрированиях и использовал теорему из ссылки 2, чтобы показать сходимость перенормированных фейнмановских интегралов по импульльному пространству.

Вкратце, алгоритм “БПХЦ” для устранения условных расходимостей предписывает рассмотреть все способы (называемые “лесами”) заключения диаграммы и ее поддиаграмм в систему прямоугольников, среди которых могут быть вложенные, но перекрытий другого типа нет. (Ниже мы приведем пример.) Каждому лесу сопоставим вычитаемое выражение, заменяя интеграл для заключенной в прямоугольник поддиаграммы условной степени расходимости  $D$  (двигаясь от внутренних прямоугольников к внешним) на первые  $D + 1$  члена его тейлоровского разложения по степеням импульсов, входящих в этот прямоугольник или выходящих из него<sup>4</sup>). “Перенормированная” амплитуда равна исходной за вычетом всех сопоставленных лесов выражений (учитывается также и лес, состоящий из единственного окружающего диаграмму прямоугольника).

Достаточно легко видеть, что получаемая таким образом “перенормированная” амплитуда совпадает с получаемой при помощи замены всех масс, полей и констант взаимодействий в исходном лагранжиане на их перенормированные значения. Различие между этой схемой перенормировок и использованной нами в гл. 11 состоит в том, что теперь перенормированные массы, поля и константы взаимодействий определяются в терминах амплитуд в нестандартной точке перенор-

---

<sup>4)</sup> В представленном здесь виде алгоритм применим и к перенормируемым, и к неперенормируемым теориям. В неперенормируемом случае вычисление производится только когда прямоугольник содержит какую-либо из диаграмм, соответствующих перенормируемым слагаемым в лагранжиане.

мировки, где все 4-импульсы обращаются в нуль. (В этом отношении рассмотренные в начале параграфа одномерные расходящиеся интегралы дают элементарный пример метода разделения расходящихся слагаемых в схеме БПХЦ.) Но такая точка перенормировки ничем не выделена: после того, как фейнмановская амплитуда сделана конечной за счет выражения ее через нестандартные перенормированные параметры теории, ее можно выразить через обычные перенормированные массы, поля и константы взаимодействий без введения каких-либо новых бесконечностей.

На практике нет необходимости пользоваться схемой БПХЦ. Замена масс, полей и констант взаимодействий на перенормированные (определенные в любой удобной точке перенормировки) автоматически приводит к возникновению контрчленов, уничтожающих все расходимости. Вместо того чтобы доказывать, что алгоритм БПХЦ действительно делает все интегралы сходящимися, мы рассмотрим один пример успешного применения процедуры перенормировок при наличии перекрывающихся расходимостей.

Рассмотрим вклад четвертого порядка в собственную энергию электрона  $\Pi_{\mu\nu}^*(q)$ , соответствующий приведенным на рис. 12.2 диаграммам. (Лесами в этом случае будет весь интеграл по  $p$  и  $p'$ , интеграл только по  $p$  и интеграл только по  $p'$ .) Учитывая контрчлены для вершин и перенормировку фотонного поля, получаем для искомой величины выражение

$$\begin{aligned} [\Pi_{\mu\nu}^*(q)]_{\text{перекрыв.}} = & -\frac{e^4}{(2\pi)^8} \int d^4 p \int d^4 p' \frac{1}{(p-p')^2 - i\epsilon} \times \\ & \times \text{Tr}\{S(p')\gamma_\nu S(p'+q)\gamma^\rho S(p+q)\gamma_\mu S(p)\gamma_\rho\} - \\ & - 2(Z_2 - 1)_2 \frac{ie^2}{(2\pi)^4} \int d^4 p \text{Tr}\{\gamma_\nu S(p+q)\gamma_\mu S(p)\} - \\ & - (Z_3 - 1)_{\text{перекрыв.}} (q^2 \eta_{\mu\nu} - q_\mu q_\nu), \quad (12.2.16) \end{aligned}$$

где

$$S(p) \equiv [-i\hat{p} + m]/[p^2 + m^2 - ie],$$

через  $(Z_2 - 1)_2$  обозначено слагаемое второго порядка по  $e$  в  $Z_2 - 1$ , а  $(Z_3 - 1)_{\text{перекрыв.}}$  — содержащая логарифмическую расходимость бесконечная константа четвертого порядка по  $e$ , уничтожающая члены второго порядка по  $q^\lambda$  в  $[\Pi_{\mu\nu}^*(q)]_{\text{перекрыв.}}$ . Множитель 2 во втором слагаемом связан с наличием двух вершин на диаграмме второго порядка для собственной энергии электрона, каждая из которых дает контрчлен  $Z_2 - 1$ . Отметим, что первое слагаемое можно рассматривать либо как поправку к вершине (даваемую интегралом по  $p'$ ) в собственной энергии фотона, содержащей интегрирование по  $p$ , либо как поправку к вершине (даваемую интегралом по  $p$ ) в собственной энергии фотона, содержащей интегрирование по  $p'$  — но не как две независи-

мых поправки к вершинам, поскольку имеется лишь один фотонный пропагатор.

Чтобы понять, как обращаться с расходимостями в (12.2.16), заметим, что

$$[(Z_2 - 1)_2 + R_2]\gamma_\mu = \frac{ie^2}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4 p'}{p'^2 - i\epsilon} \gamma_\rho S(p') \gamma_\mu S(p') \gamma^\rho \}, \quad (12.2.17)$$

где остаток  $R_2$  конечен. (Из условия лоренц-инвариантности следует, что интеграл справа пропорционален  $\gamma_\mu$ . Разность между значением этого интеграла и  $(Z_2 - 1)_2 \gamma_\mu$  представляет собой вычисленную с точностью до второго порядка по  $e$  перенормированную вершину электрон–электрон–фотон при нулевых импульсах электрона и фотона и потому конечна.) С учетом этого можно переписать (12.2.16) в виде

$$\begin{aligned} [\Pi_{\mu\nu}^*(q)]_{\text{перекрыв.}} &= -\frac{e^4}{(2\pi)^8} \int d^4 p \int d^4 p' \times \\ &\times \left[ \frac{1}{(p-p')^2 - i\epsilon} \text{Tr}\{S(p')\gamma_\nu S(p'+q)\gamma^\rho S(p+q)\gamma_\mu S(p)\gamma_\rho\} - \right. \\ &- \frac{1}{p'^2 - i\epsilon} \text{Tr}\{S(p')\gamma_\nu S(p')\gamma^\rho S(p+q)\gamma_\mu S(p)\gamma_\rho\} - \\ &- \left. \frac{1}{p^2 - i\epsilon} \text{Tr}\{S(p')\gamma_\nu S(p'+q)\gamma^\rho S(p)\gamma_\mu S(p)\gamma_\rho\} \right] - \\ &- 2R_2 \frac{ie^2}{(2\pi)^4} \int d^4 p \text{Tr}\{\gamma_\nu S(p+q)\gamma_\mu S(p)\} - \\ &- (Z_3 - 1)_{\text{перекрыв.}}(q^2\eta_{\mu\nu} - q_\mu q_\nu). \quad (12.2.18) \end{aligned}$$

Рассмотрим сначала только интеграл по  $p'$ . Каждое из первых двух слагаемых логарифмически расходится, но их разность конечна. Третье слагаемое также расходится логарифмически (за счет калибровочно-инвариантного регулятора), но в отличие от случая первых двух слагаемых его расходящаяся часть принимает вид полинома второй степени по  $q$  (а остаток конечен). Эта остающаяся расходимость устраняется за счет слагаемого  $-(Z_3 - 1)(q^2\eta_{\mu\nu} - q_\mu q_\nu)$ , которое уничтожает все члены второго порядка в разложении  $\Pi_{\mu\nu}^*(q)$ . Таким образом, интегрирование по  $p'$  дает конечный результат. Из симметричности выражения (12.2.16) следует, что интегрирование по  $p$  также дает конечный результат. Частичное интегрирование общего вида (по  $p$  и  $p'$  при фиксированном значении  $ap + bp'$ , где  $a$  и  $b$  — произвольные ненулевые постоянные) явно будет сходящимся, а полный интеграл по  $p$  и  $p'$  делает конечным контрчлен  $-(Z_3 - 1)_{\text{overlap}}(q^2\eta_{\mu\nu} - q_\mu q_\nu)$ . Поэтому выражение (12.2.18) (и результат любого частичного интегрирования в нем) удовлетворяет условию сходимости, связанному с подсчетом степеней импульса, так что согласно сформулированной

в предыдущем параграфе теореме [2] все выражение является фактически сходящимся.

\* \* \*

В квантовой электродинамике наряду с перенормированными массами и полями можно естественным образом определить и перенормированную константу взаимодействия. Но в общем случае дело обстоит не так. Рассмотрим, например, теорию с одним скалярным полем  $\phi(x)$  и плотностью лагранжиана

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}\partial_\lambda\phi\partial^\lambda\phi - \frac{1}{2}m^2\phi^2 - \frac{1}{24}g\phi^4. \quad (12.2.19)$$

В однопетлевом приближении из правил Фейнмана получаем  $S$ -матричный элемент для рассеяния скалярного поля на скалярном поле:

$$S(q_1q_2 \rightarrow q'_1q'_2) = \frac{-i(2\pi)^4\delta^4(q'_1 + q'_2 - q_1 - q_2)}{(2\pi)^6(16E'_1E'_2E_1E_2)^{1/2}} F(q_1q_2 \rightarrow q'_1q'_2), \quad (12.2.20)$$

где

$$\begin{aligned} -i(2\pi)^4 F(q_1q_2 \rightarrow q'_1q'_2) &= -i(2\pi)^4 g + \frac{1}{2}[-i(2\pi)^4 g]^2 \left[ \frac{-i}{(2\pi)^4} \right]^2 \times \\ &\times \int d^4k \left[ \frac{1}{[(q_1 + k)^2 + m^2 - i\epsilon][(q_2 - k)^2 + m^2 - i\epsilon]} + \right. \\ &\left. + (q_2 \rightarrow -q'_1) + (q_2 \rightarrow -q'_2) \right], \end{aligned} \quad (12.2.21)$$

а  $q_1$ ,  $q_2$  и  $q'_1$ ,  $q'_2$  — входящие и выходящие 4-импульсы соответственно. Объединяя знаменатели и совершая обычный поворот контура интегрирования по  $k^0$ , получаем

$$\begin{aligned} F &= g - \frac{g}{16\pi^2} \int_0^\infty k^3 dk \int_0^1 dx \{ [k^2 + m^2 - sx(1-x)]^{-2} + \\ &+ [k^2 + m^2 - tx(1-x)]^{-2} + [k^2 + m^2 - ux(1-x)]^{-2} \}, \end{aligned} \quad (12.2.22)$$

где  $x$  — фейнмановский параметр, а  $s$ ,  $t$  и  $u$  — переменные Мандельстама

$$s = -(q_1 + q_2)^2, \quad t = -(q_1 - q'_1)^2, \quad u = -(q_1 - q'_2)^2, \quad (12.2.23)$$

связанные соотношением  $s + t + u = 4m^2$ . Если произвести ультрафиолетовое обрезание при  $k = \Lambda$ , то в случае  $\Lambda \gg m$  получим

$$\begin{aligned} F &= g - \frac{g}{32\pi^2} \int_0^1 dx \left\{ \ln \left( \frac{\Lambda^2}{m^2 - sx(1-x)} \right) + \right. \\ &\left. + \ln \left( \frac{\Lambda^2}{m^2 - tx(1-x)} \right) + \ln \left( \frac{\Lambda^2}{m^2 - ux(1-x)} \right) - 3 \right\}. \end{aligned} \quad (12.2.24)$$

Мы можем определить перенормированную константу взаимодействия  $g_R$  как значение  $F$  в точке с произвольно выбранными значениями  $s$ ,  $t$  и  $u$  (при условии, что мы не выходим из области, где  $F$  действи-

тельна). Предположим, например, что с целью сохранить симметрию относительно скаляров мы выбираем не лежащую на массовых оболочках точку перенормировки<sup>5)</sup>  $q_1^2 = q_2^2 = q_1'^2 = q_2'^2 = \mu^2$ ,  $s = t = u = -4\mu^2/3$ . Определяя перенормированную константу взаимодействия  $g_R$  как значение амплитуды  $F$  в этой точке, получаем

$$g = g_R + \frac{3g^2}{32\pi^2} \left[ \ln\left(\frac{\Lambda^2}{\mu^2}\right) - 1 - \int_0^1 dx \ln\left(\frac{4x(1-x)}{3} + \frac{m^2}{\mu^2}\right) \right] + \dots \quad (12.2.25)$$

Зависимость от параметра обрезания в (12.2.24) тогда уничтожается до порядка  $g_R^2$ , и для выраженной через  $g_R$  амплитуды имеем не содержащую бесконечностей формулу

$$\begin{aligned} F = g_R - \frac{g_R^2}{32\pi^2} \int_0^1 dx & \left\{ \ln\left(\frac{m^2 + 4x(1-x)\mu^2/3}{m^2 - sx(1-x)} + \right. \right. \\ & \left. \left. + \ln\left(\frac{m^2 + 4x(1-x)\mu^2/3}{m^2 - tx(1-x)} + \ln\left(\frac{m^2 + 4x(1-x)\mu^2/3}{m^2 - ux(1-x)} \right) \right\} + \dots \quad (12.2.26) \right. \end{aligned}$$

Здесь  $\mu^2$  можно положить равным любому действительному числу, большему  $-3m^2$  (в этом диапазоне  $g_R$  будет действительной). Явная зависимость от  $\mu$  в (12.2.26), конечно же, устраняется за счет зависимости от  $\mu$  перенормированной константы взаимодействия. Наличие такой свободы в выборе параметров перенормировки (которая, разумеется, имеет место также в квантовой электродинамике и других реалистичных теориях) будет иметь для нас очень большое значение при рассмотрении метода ренормгруппы во втором томе.

### § 12.3. Нужна ли перенормируемость?

В предыдущем параграфе мы указали специальный класс теорий с конечным числом слагаемых в лагранжиане, к которым тем не менее применима обычная процедура перенормировки. Это теории, в которых все взаимодействия удовлетворяют условию перенормируемости

$$\Delta_i \equiv 4 - d_i - \sum_f n_{if}(s_f + 1) \geq 0,$$

где  $d_i$  и  $n_{if}$  — соответственно число дифференцирований и полей типа  $f$  во взаимодействии типа  $i$ , а  $s_f$  — спин поля  $f$  (с некоторыми оговорками). Для успешной перенормировки в таких теориях обычно необходимо, чтобы в лагранжиане фактически присутствовали все

<sup>5)</sup> Если вновь проследить за выводом (12.2.25), то можно убедиться, что мы нигде не использовали условия  $q_1^2 = q_2^2 = q_1'^2 = q_2'^2 = -m^2$ . Таким образом, выражение (12.2.14) справедливо при любых значениях масс частиц на внешних линиях.

Т а б л и ц а 12.2

Допустимые перенормируемые слагаемые в плотности лагранжиана, включающие скаляры  $\phi$ , дираковские поля  $\psi$  и фотонные поля  $A^\mu$ . Посредством  $n_{if}$  и  $d_i$  обозначены соответственно число полей типа  $f$  и число дифференцирований, входящих во взаимодействие типа  $i$ ; размерность соответствующей константы взаимодействия равна  $\Delta_i$

$n_{if}$		$d_i$	$\Delta_i$	$\mathcal{H}_i$
Скаляры	Фотоны	Спин 1/2		
1	0	0	0	$\phi$
2	0	0	0	$\phi^2$
2	0	0	2	$\partial_\mu \phi \partial^\mu \phi$
3	0	0	0	$\phi^3$
4	0	0	0	$\phi^4$
2	1	0	1	$\phi \partial_\mu \phi A^\mu$
2	2	0	0	$\phi^2 A_\mu A^\mu$
1	0	2	0	$\phi \bar{\psi} \psi$
0	2	0	2	$F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$
0	0	2	0	$\bar{\psi} \psi$
0	0	2	1	$\bar{\psi} \gamma^\mu \partial_\mu \psi$
0	1	2	0	$\bar{\psi} \gamma^\mu A_\mu \psi$

перенормируемые взаимодействия, не запрещенные из соображений симметрии.

Важно, что таких взаимодействий имеется лишь ограниченное число. Величина  $\Delta_i$  становится отрицательной, если мы включаем слишком много полей или дифференцирований, а также если мы используем поля слишком высокого спина. Если не принимать во внимание искусственные сокращения, не существует перенормируемых взаимодействий с участием полей спина  $s_f \geq 1$ . Действительно, единственный возможный член в лагранжиане с  $\Delta_i \geq 0$ , включающий такое поле наряду с двумя или более другими полями, должен содержать поле спина  $s_f = 1$  и два скаляра (без дифференцирований), что несовместимо с условием лоренц-инвариантности. Во втором томе мы увидим, что безмассовые калибровочные поля спина  $s_f = 1$  в поддающейся калибровке обладают эффективным спином  $s_f = 0$ , подобно фотонному полю. Также во втором томе мы увидим, что даже для массивных калибровочных полей может (в зависимости от происхождения массы) эффективно выполняться равенство  $s_f = 0$ . За исключением этих специальных случаев, в табл. 12.2 приведены все возможные перенормируемые слагаемые в плотности лагранжиана,

включающие скалярные частицы ( $s = 0$ ), фотоны ( $s = 0$ ) и фермионы спина  $1/2$  ( $s = 1/2$ ), разрешенные из соображений лоренцевой и калибровочной инвариантностей.

Мы видим, что условие перенормируемости накладывает сильные ограничения на вид возможной физической теории. Подобные ограничения играют важную роль в прояснении структуры теории. Например, лоренц-инвариантность и калибровочная инвариантность сами по себе не запрещают наличие в лагранжиане квантовой электродинамики члена Паули, пропорционального  $\bar{\psi}[\gamma_\mu, \gamma_\nu]\psi F^{\mu\nu}$ ; в случае его присутствия магнитный момент электрона становится подстраиваемым параметром. Мы исключаем такое слагаемое ввиду его неперенормируемости. Успешность предсказаний квантовой электродинамики (например, вычисление магнитного момента электрона, описанное в § 11.3) может рассматриваться как свидетельство справедливости принципа перенормируемости. Аналогичная ситуация имеет место и для стандартной модели слабых, электромагнитных и сильных взаимодействий, которая будет обсуждаться во втором томе — в эту теорию можно ввести множество дополнительных взаимодействий (например, четырехфермионное взаимодействие кварков и лептонов), разрушающих предсказания стандартной модели, исключение которых связано только с их неперенормируемостью.

Должны ли мы считать, что в лагранжиан могут входить лишь перенормируемые взаимодействия? Как мы видели в предыдущем параграфе, если включить в лагранжиан *всю* бесконечную серию взаимодействий, разрешенных из симметрийных соображений, в нашем распоряжении будет подходящий контрчлен для сокращения любой ультрафиолетовой расходимости. В этом смысле, как отмечалось ранее, неперенормируемые теории являются столь же перенормируемыми, что и перенормируемые — лишь бы в лагранжиане присутствовали все возможные члены.

В последнее время становится все более очевидным, что перенормируемость не является фундаментальным физическим условием и что на самом деле любая реалистичная квантовая теория поля должна содержать и перенормируемые, и неперенормируемые взаимодействия. Эта точка зрения в какой-то мере обусловлена постоянными неудачами в построении перенормируемой теории гравитации. В общем классе метрических теорий гравитации, построенных на основе принципа эквивалентности Эйнштейна, вообще нет перенормируемых взаимодействий — как правило, ковариантные взаимодействия строятся из тензора кривизны и его ковариантных производных, и потому (даже в “калибровке”, где пропагатор гравитона имеет асимптотику  $k^{-2}$ ) содержат слишком много дифференцирований метрики, чтобы быть перенормируемыми. В частности, неперенормируемость общей теории относительности можно легко увидеть уже из того, что ее константа взаимодействия  $8\pi G_N = (2,43 \times 10^{18} \text{ ГэВ})^{-2}$  имеет отри-

цательную размерность. Даже в отсутствие каких-либо других причин, сокращение связанных с виртуальными гравитонами расходимостей потребовало бы наличия в лагранжиане всех взаимодействий, разрешенных из соображений симметрии — не только взаимодействий, включающих гравитоны, но и взаимодействий всех остальных частиц.

Но если перенормируемость не представляет собой фундаментального физического принципа, как можно объяснить успех перенормируемых теорий типа квантовой электродинамики и стандартной модели? Ответ нетрудно найти уже при помощи простого размерного анализа. Мы видели, что взаимодействию типа  $i$  соответствует константа взаимодействия размерности

$$[g_i] \sim [\text{mass}]^{\Delta_i}, \quad (12.3.1)$$

где величина  $\Delta_i$  дается выражением (12.1.9). Неперенормируемые взаимодействия — это в частности те, для которых константа взаимодействия имеет *отрицательную* массовую размерность. Исходя из (12.3.1), разумно предположить, что не только размерность константы взаимодействия определяется величиной  $\Delta_i$ , но и ее значение по порядку величины есть

$$g_i \approx M^{\Delta_i}, \quad (12.3.2)$$

где  $M$  — некоторая универсальная масса. (Оказывается, что именно так обстоит дело в случае эффективных теорий поля, более подробно обсуждаемых ниже и во втором томе.) При расчете физического процесса с характерным импульсом  $k \ll M$  вклад неперенормируемого взаимодействия типа  $i$  с  $\Delta_i < 0$  содержит множитель  $g_i \approx M^{\Delta_i}$ , который из соображений размерности должен сопровождаться множителем  $k^{-\Delta_i}$ ; таким образом, соответствующий вклад оказывается подавленным<sup>1)</sup> при  $k \ll M$  множителем  $(k/M)^{-\Delta_i} \ll 1$ . (Во втором томе это рассуждение будет проведено более аккуратно при помощи

<sup>1)</sup> Здесь существенно предположение о том, что ультрафиолетовые расходимости устраниены посредством перенормировки, так что наш размерный анализ не разрушается присутствием параметра ультрафиолетового обрезания  $\Lambda$ . С другой стороны, из размерного анализа следует, что при  $\Lambda \rightarrow \infty$  каждая константа неперенормируемого взаимодействия  $g_i$  с  $\Delta_i < 0$  сопровождается растущим множителем  $\Lambda^{-\Delta_i}$ . Подобные аргументы очень рано привели Гейзенберга [9] к классификации взаимодействий по размерностям соответствующих констант взаимодействия и предположению [10] о том, что на масштабах энергий порядка  $g_i^{1/\Delta_i}$  (например, при энергиях порядка  $G_F^{-1/2} \approx 300$  ГэВ, где  $G_F$  — константа четырехфермionного взаимодействия в теории бета-распада Ферми) следует ожидать новых физических эффектов. После построения теории перенормировок Саката и др. [11] отметили, что неперенормируемые теории — это теории, константы взаимодействий в которых имеют отрицательную размерность.

метода ренормгруппы.) Успех перенормируемых теорий электросла-бых и сильных взаимодействий означает лишь то, что  $M$  значительно превосходит энергии, при которых производились проверки предсказаний теории.

Например, главные неперенормируемые добавки к лагранжиану обычной электродинамики электронов или мюонов должны быть взаимодействиями размерности 5, подавленными лишь одним множителем  $1/M$ . Условиями калибровочной, лоренцевой и  $\text{CP}$ -инвариантности допускается лишь одно такое взаимодействие — член Паули порядка  $(ie/2M)\bar{\psi}[\gamma_\mu, \gamma_\nu]\psi F^{\mu\nu}$ . Согласно уравнениям (10.6.24), (10.6.17) и (10.6.19) он даст вклад в магнитный момент электрона или мюона, по порядку величины равный  $4e/M$ . Теоретическое значение магнитного момента электрона согласуется с экспериментально измеренным с точностью до  $10^{-10}e/2m_e$ , так что масса  $M$  должна быть больше, чем  $8 \times 10^{10}m_e = 4 \times 10^7$  ГэВ.

Последнее неравенство может быть ослаблено, если предположить, что другие симметрии ограничивают вид неперенормируемых взаимодействий. Например, обычный лагранжиан квантовой электродинамики инвариантен относительно кирального преобразования  $\psi \rightarrow \gamma_5\psi$  с точностью до замены знака при фермионном массовом члене  $-t\psi\psi$ . Если предположить, что полный лагранжиан инвариантен относительно формального преобразования симметрии  $\psi \rightarrow \gamma_5\psi$ ,  $t \rightarrow -t$ , то член Паули в лагранжиане приобретет лишний коэффициент  $t/M$ , а его вклад в магнитный момент будет всего лишь порядка  $4et/M^2$ . Из-за лишнего множителя  $t$  более сильные ограничения на массу  $M$  будут следовать из измерений магнитного момента мюона. Теоретическое значение согласуется с экспериментально измеренным с точностью до  $10^{-8}e/2m_\mu$ , так что масса  $M$  должна превосходить  $\sqrt{8 \times 10^8}m_\mu = 3 \times 10^3$  ГэВ. В любом случае, если  $M$  имеет порядок  $10^{18}$  ГэВ, мы заведомо можем не принимать во внимание неперенормируемые взаимодействия в лагранжиане квантовой электродинамики.

Приведенные рассуждения помогают нам дать ответы на некоторые вопросы, связанные со слагаемыми в плотности лагранжиана, содержащими высшие производные. Например, в общей теории действительного скалярного поля  $\phi$  следует ожидать наличия в плотности лагранжиана слагаемых вида  $\phi\Box^n\phi$ . Такой член будет давать пропорциональный  $(q^2)^n$  вклад в собственную энергию  $\Pi^*(q^2)$  скалярного поля. Если бы мы учли подобные вклады во всех порядках теории возмущений, но при этом проигнорировали бы все остальные эффекты от неперенормируемых взаимодействий, то пропагатор  $\Delta'(q^2) = 1/(q^2 + m^2 - \Pi^*(q^2))$  не имел бы простого полюса по  $q^2$  при отрицательном значении  $q^2$  (чего следовало бы ожидать на основании приведенных в § 10.7 общих соображений), а вместо этого имел бы  $n$  полюсов (некоторые из которых могли бы совпадать) при во-

обще говоря комплексных значениях  $q^2$ . Но если перед неперенормируемым слагаемым  $\phi \square^n \phi$  стоит коэффициент порядка  $M^{-2(n-1)}$ , где  $M \gg m$ , то лишние полюсы возникают при значениях  $q^2$  порядка  $M^2$ , а в этом случае мы не имеем права игнорировать вклад бесконечно-го числа других неперенормируемых взаимодействий, которые также должны входить в лагранжиан. Поэтому наличие членов с высшими производными в общем неперенормируемом лагранжиане не вступает в противоречие с общими принципами квантовой теории поля, которыми мы пользовались в § 10.7. Но то же рассуждение показывает, что мы не можем использовать члены с высшими производными для полного устранения ультрафиолетовых расходимостей, как неоднократно предлагалось. Слагаемое  $M^{-2(n-1)} \phi \square^n \phi$  в плотности лагранжиана обеспечивает обрезание при импульсах порядка  $q^2 \approx M^2$ , но при таких значениях импульса мы уже не можем не учитывать вклады всех остальных (обязательно присутствующих) неперенормируемых взаимодействий.

Даже сильно подавленные неперенормируемые взаимодействия могут быть наблюдаемыми, если связанные с ними эффекты оказываются запрещенными в отсутствие таких взаимодействий. Например, в § 12.5 мы увидим, что в теории электромагнитных взаимодействий, совместимой с требованиями калибровочной инвариантности, лоренц-инвариантности и перенормируемости, автоматически возникают инвариантности относительно зарядового сопряжения и пространственной инверсии. Но несложно предложить неперенормируемые слагаемые, нарушающие эти симметрии — например, связанный с электрическим дипольным моментом электрона член  $\bar{\psi} \gamma_5 [\gamma_\mu, \gamma_\nu] \psi F^{\mu\nu}$  или взаимодействие Ферми  $\bar{\psi} \gamma_5 \gamma_\mu \psi \bar{\psi} \gamma^\mu \psi$ . Сегодня широко распространено мнение, что законы сохранения барионного и лептонного зарядов очень слабо нарушаются сильно подавленными неперенормируемыми взаимодействиями. Другой пример наблюдаемого неперенормируемого взаимодействия дает гравитация. Как было отмечено выше, гравитоны вообще не участвуют в перенормируемых взаимодействиях. Но, конечно же, мы в состоянии наблюдать эффекты гравитационного взаимодействия (благодаря специальному свойству когерентного сложения гравитационных полей всех частиц, составляющих макроскопическое тело).

Хотя неперенормируемые теории содержат бесконечное число свободных параметров, они все же обладают значительной предсказательной силой [12]: они позволяют вычислять неаналитические части фейнмановских амплитуд (такие как содержащие  $\ln q$  и  $q \ln q$  слагаемые в одномерных примерах, приведенных в начале предыдущего параграфа). Подобные вычисления воспроизводят результаты, следующие из аксиомы  $S$ -матричной теории, согласно которой  $S$ -матрица обладает лишь сингулярностями, необходимыми из соображений универсальности.

Как это ни удивительно, неперенормируемые теории поля оказываются наиболее полезными именно в ситуациях, когда соображения симметрии запрещают существование неперенормируемых взаимодействий. В таких случаях можно построить полезную теорию возмущений, в которой разложение ведется по степеням  $k/M$ . Такая теория была детально разработана в приложении к низкоэнергетическим пионам [12, 13] (мы обсудим этот вариант во втором томе) и в приложении к низкоэнергетическим гравитонам [14]. В качестве более простого примера рассмотрим теорию действительного скалярного поля, удовлетворяющую принципу инвариантности относительно полевой трансляции

$$\phi(x) \rightarrow \phi(x) + \epsilon$$

с произвольной постоянной  $\epsilon$ . В такой теории запрещены все неперенормируемые взаимодействия и генерация массы скалярного поля, но имеется бесконечная серия допустимых неперенормируемых взаимодействий, содержащих производные:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - \frac{g}{4}(\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi)^2 - \dots,$$

где  $g \approx M^{-4}$ , а многоточие соответствует членам, содержащим больше полей или производных. (Для простоты мы также предположили, что теория инвариантна относительно отражения  $\phi \rightarrow -\phi$ .) Согласно изложенному выше размерному анализу, диаграммная амплитуда процесса, характерные энергии и импульсы в котором имеют порядок  $k \ll M$ , содержит малый множитель  $(k/M)^\nu$ , где

$$\nu = -\sum_i V_i \Delta_i = \sum_i V_i(d_i + n_i - 4)$$

(через  $n_i$  и  $d_i$  обозначены число скалярных полей и дифференцирований, содержащихся во взаимодействии типа  $i$ , а через  $V_i$  — число соответствующих этому взаимодействию вершин на диаграмме). При  $k \ll M$  основные вклады даются диаграммами с наименьшим значением  $\nu$ . Выражение для  $\nu$  можно привести к более удобному виду, воспользовавшись известными топологическими соотношениями для связных графов

$$\sum_i V_i = I - L + 1, \quad \sum_i V_i n_i = 2I + E,$$

где  $I$ ,  $E$  и  $L$  — количества соответственно внутренних линий, внешних линий и петель в нашем графе. С учетом этих равенств имеем

$$\nu = 2E - 4 + 4L + \sum_i V_i(d_i - n_i).$$

Из условия “трансляционной симметрии” следует, что каждое вхождение поля должно сопровождаться хотя бы одним дифференцированием, поэтому величина  $d_i - n_i$  неотрицательна для всех взаимодействий. Поскольку величины  $L$  и  $V_i$  также неотрицательны, для

заданного процесса (т.е. для заданного числа  $E$  внешних линий) главный вклад будут давать *древесные* (не содержащие петель,  $L = 0$ ) диаграммы, все вершины которых соответствуют взаимодействиям с минимальным числом  $d_i = n_i$  дифференцирований. Таким образом, в ведущем порядке можно считать, что плотность лагранжиана зависит только от *первых* производных поля. Поправки высших порядков могут происходить от диаграмм с петлями или диаграмм, взаимодействия на которых содержат лишние дифференцирования. Но при вычислении с точностью до некоторого фиксированного порядка  $\nu$  по  $k/M$  нам нужно рассмотреть лишь конечное число диаграмм (т.е. для которых  $L \leq (4 - 2E + \nu)/4$ ) и лишь конечное число взаимодействий.

Рассмотрим, например, рассеяние скалярного поля на скалярном поле. В ведущем порядке амплитуда дается диаграммой с одной вершиной, отвечающей взаимодействию  $-g(\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi)^2$ . Согласно нашей формуле для  $\nu$ , главные поправки к этой амплитуде подавлены при низких энергиях множителем  $(k/M)^2$  и происходят от другой древесной диаграммы с одной вершиной, отвечающей взаимодействию с двумя дополнительными дифференцированиями<sup>2)</sup>  $\partial_\mu\partial_\nu\phi\partial^\mu\partial^\nu\phi\partial_\lambda\phi\partial^\lambda\phi$ . Поправки следующего порядка, подавленные при низких энергиях еще двумя множителями  $k/M$ , происходят от диаграмм двух типов. Первый из них — диаграммы, получаемые из изображенной

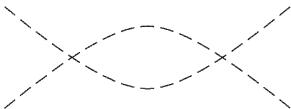


Рис. 12.4. Однопетлевая диаграмма для рассеяния скалярного поля на скалярном поле. Вершинам отвечают взаимодействия  $-g(\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi)^2$

на рис. 12.4 однопетлевой диаграммы, все вершины которой отвечают только взаимодействию  $-g(\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi)^2$ , при помощи перестановки внешних линий. Второй тип — древесные диаграммы, единственные вершины которых отвечают взаимодействиям, включающим четыре поля  $\phi$  и восемь дифференцирований (константы таких взаимодействий должны содержать бесконечности, уничтожающие расходимости<sup>3)</sup> от петлевых диаграмм). Петлевые диаграммы дают также ко-

<sup>2)</sup> В соответствии с замечанием, сделанным в § 7.7, мы не рассматриваем взаимодействия, содержащие  $\Box\phi$ , так как при помощи полевых уравнений для  $\phi$  подобные взаимодействия можно выразить через другие.

<sup>3)</sup> Если мы пользуемся размерной регуляризацией, то все возникающие в однопетлевых диаграммах ультрафиолетовые расходимости имеют такой вид. При использовании других способов регуляризации возникают также квадратичные расходимости и расходимости четвертой степени; они уничтожаются контрчленами для взаимодействия четырех скалярных полей, содержащего четыре или шесть дифференцирований.

нечные вклады в амплитуду рассеяния, пропорциональные величинам вида

$$s^4 \ln s + t^4 \ln t + u^4 \ln u, \quad s^2 t^2 \ln u + t^2 u^2 \ln s + u^2 s^2 \ln t$$

и т.д. Можно вычислить и соответствующие коэффициенты; они пропорциональны  $g^2$ . Эти конечные слагаемые дают поправку низшего порядка к амплитуде рассеяния, необходимую для унитарности  $S$ -матрицы (но ее вычисление легче всего провести именно при помощи пертурбативной квантовой теории поля).

Хотя в рамках неперенормируемых теорий можно получать полезные разложения по степеням энергии, такие теории неизбежно теряют всю свою предсказательную силу на энергетических масштабах порядка упомянутой выше универсальной массы  $M$ . Если формально рассматривать построенные разложения в этой области, то при  $E \gg M$  нарушается унитарность  $S$ -матрицы. По-видимому, имеются два возможных варианта поведения неперенормируемой теории при таких энергиях. Один из них состоит в том, что растущая сила неперенормируемого взаимодействия каким-либо образом достигает насыщения, что позволяет избежать конфликтов с условием унитарности [15]. Во втором варианте на масштабах энергий порядка  $M$  вступает в игру новая физика. В этом случае неперенормируемые теории, описывающие природу в пределе  $E \ll M$ , представляют собой просто *эффективные теории поля*, не претендующие на фундаментальность.

Возможно, самый первый пример эффективной теории поля был построен в 1930 г. Эйлером и др. [16] при изучении низкоэнергетичных фотон-фотонных взаимодействий. (См. § 1.3.) Фактически авторы

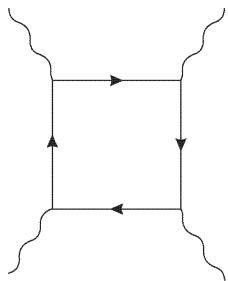


Рис. 12.5. Диаграмма для рассеяния фотона на фотоне, поведение которой при низких энергиях может быть получено из эффективного лагранжиана Эйлера и др. [16]. Прямые линии соответствуют электронам, волнистые — фотонам

вычислили вклад диаграмм, подобных изображенной на рис. 12.5, в фейнмановскую амплитуду рассеяния фотона на фотоне; они получили, что при энергиях, много меньших  $m_e$ , рассеяние света на свете

может быть описано эффективным лагранжианом

$$\mathcal{L}_{\text{eff}} = \frac{2\alpha^2}{45m_e^4} [(\mathbf{E}^2 - \mathbf{B}^2)^2 + 7(\mathbf{E} \cdot \mathbf{B})^2] + \text{высшие порядки по } \frac{eE}{m_e^2} \text{ и } \frac{eB}{m_e^2}.$$

Эйлер и др. использовали этот лагранжиан только в древесном приближении для вычисления ведущих членов матричных элементов для взаимодействия фотонов. Лишь намного позже подобные (неперенормируемые) лагранжианы были использованы вне рамок древесного приближения [12, 17].

На современном жаргоне принято говорить, что при выводе этого эффективного лагранжиана электрон был “отынтегрирован”, поскольку в однопетлевом приближении

$$\exp\left(i \int \mathcal{L}_{\text{eff}}(\mathbf{E}, \mathbf{B}) d^4x\right) = \int \left[ \prod_x d\psi_e(x) \right] \exp\left(i \int \mathcal{L}_{\text{QED}}(\psi_e, \mathbf{A}) d^4x\right).$$

Более общая процедура состоит в выписывании самого общего неперенормируемого эффективного лагранжиана, использования его для вычисления различных амплитуд в терминах разложений по степеням энергий и импульсов с последующим выбором констант в эффективном лагранжиане из условия согласованности результатов для этих амплитуд с полученными в рамках исходной теории.

Мы еще встретимся с эффективными теориями поля — в частности, при изучении нарушенных симметрий во втором томе. Мы увидим, что эффективные теории поля оказываются полезными даже в тех случаях, когда они не могут быть выведены из исходной теории (либо потому, что исходная теория неизвестна, либо потому, что взаимодействия слишком сильны и нет возможности применить теорию возмущений). Действительно, даже если бы мы ничего не знали о свойствах заряженных частиц, мы все равно описывали бы рассеяние фотонов при достаточно низких энергиях при помощи эффективного лагранжиана, содержащего слагаемые  $(\mathbf{E}^2 - \mathbf{B}^2)^2$  и  $(\mathbf{E} \cdot \mathbf{B})^2$  — уже потому, что это единственные разрешенные из соображений калибровочной инвариантности и лоренц-инвариантности члены четвертой степени по  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{B}$ , не содержащие действующих на эти поля дифференцирований. (Слагаемые с производными были бы подавлены в пределе низких энергий фотонов  $E$  дополнительными множителями  $E/M$ , где  $M$  — некоторая типичная масса заряженной частицы, по степеням свободы которой ведется интегрирование.) Можно пойти и дальше: мы увидим, что эффективные теории поля полезны даже тогда, когда описываемые ими легкие частицы вообще не присутствуют в явном виде в исходной теории, а состоят из тяжелых частиц, по которым ведется интегрирование. Исходная теория может даже вообще не быть теорией поля — задача описания гравитации привела многих теоретиков к убеждению, что фактически исходная теория является теорией струн. Но каким бы ни было происхождение эффективной теории поля, она с необходимостью будет неперенормируемой теорией.

### § 12.4. Плавающий порог обрезания<sup>1)</sup>

Прежде чем закончить эту главу, стоит указать на связь между обычной теорией перенормировок и подходом, предложенным Вильсоном [18]. В методе Вильсона используется “плавающее” обрезание по компонентам импульса на масштабе порядка  $\Lambda$  (резкое или гладкое). Но вместо перехода к пределу  $\Lambda \rightarrow \infty$  постулируется такая зависимость голых (входящих в лагранжиан) констант взаимодействия от  $\Lambda$ , что все наблюдаемые величины оказываются не зависящими от  $\Lambda$ .

Удобно работать с безразмерными параметрами. Если голая константа взаимодействия или массовый параметр  $g_i(\Lambda)$  имеет размерность  $[\text{масса}]^{\Delta_i}$ , определим соответствующий безразмерный параметр  $\mathcal{G}_i$  как

$$\mathcal{G}_i \equiv \Lambda^{-\Delta_i} g_i(\Lambda). \quad (12.4.1)$$

Из обычного размерного анализа следует, что величина  $\mathcal{G}_i$  при некотором значении параметра обрезания  $\Lambda'$  может быть представлена как функция величин  $\mathcal{G}_j$ , взятых при другом значении параметра обрезания  $\Lambda$ , и безразмерного отношения  $\Lambda'/\Lambda$ :

$$\mathcal{G}_i(\Lambda') = F_i(\mathcal{G}(\Lambda), \Lambda'/\Lambda). \quad (12.4.2)$$

В  $F$  не могут входить никакие размерные параметры, отличные от  $\Lambda$  и  $\Lambda'$ , поскольку здесь не возникает никаких ультрафиолетовых или инфракрасных расходимостей — различие между значениями констант в точках  $\Lambda$  и  $\Lambda'$  возникает из-за диаграмм, импульсы на внутренних линиях которых лежат между  $\Lambda$  и  $\Lambda'$ . Дифференцируя (12.4.2) по  $\Lambda'$  и затем полагая  $\Lambda'$  равным  $\Lambda$ , получаем дифференциальное уравнение для  $\mathcal{G}_i$ :

$$\Lambda \frac{d}{d\Lambda} \mathcal{G}_i(\Lambda) = \beta_i(\mathcal{G}(\Lambda)), \quad (12.4.3)$$

где  $\beta_i(\mathcal{G}) \equiv [\partial/\partial z F_i(\mathcal{G}, z)]_{z=1}$ . Для малых значений констант взаимодействия функции  $\beta_i(\mathcal{G})$  можно вычислить по теории возмущений. Это вильсоновский вариант “уравнения ренормгруппы”, которое мы будем обсуждать с несколько иных позиций во втором томе.

Для любого конечного значения параметра обрезания лагранжиан задает эффективную теорию поля, в которой вместо (или помимо) интегрирования по степеням свободы “тяжелых” частиц (таких как электрон в работе Эйлера и др.), “отынтегрированы” также все частицы с импульсами больше  $\Lambda$ . Даже если исходить из теории, где при некотором значении параметра обрезания  $\Lambda_0$  лишь конечное число констант взаимодействия  $\mathcal{G}_i^0$  отличны от нуля, при другом значении

<sup>1)</sup> Материал этого параграфа выходит за рамки основного содержания книги и может быть опущен при первом чтении.

параметра обрезания согласно (12.4.3) константы всех разрешенных из соображений симметрии взаимодействий окажутся ненулевыми<sup>2)</sup>.

Далее мы будем различать перенормируемые и неперенормируемые взаимодействия. Будем обозначать их константы через  $\mathcal{G}_a$  и  $\mathcal{G}_n$  соответственно, где  $a$  пробегает конечное число  $N$  взаимодействий (в том числе массовых членов), для которых  $\Delta_a \geq 0$ , а  $n$  пробегает бесконечное число взаимодействий, массовые размерности констант которых отрицательны ( $\Delta_n < 0$ ). Мы хотим показать, что если константы  $\mathcal{G}_a(\Lambda_0)$  и  $\mathcal{G}_n(\Lambda_0)$  при некотором начальном значении параметра обрезания  $\Lambda_0$  лежат на  $N$ -мерной поверхности  $\mathcal{S}_0$  общего вида, то (при некоторых предположениях) в точках с  $\Lambda \ll \Lambda_0$  их значения будут приближаться к фиксированной поверхности  $\mathcal{S}$ , не зависящей ни от  $\Lambda_0$ , ни от начальной поверхности<sup>3)</sup>. Предельная поверхность устойчива в том смысле, что все начинающиеся на ней траектории решений уравнений (12.4.3) в дальнейшем не покидают этой поверхности. Такая устойчивая поверхность задает конечнопараметрическое семейство теорий, физическое содержание которых не зависит от параметра обрезания — что, как отмечалось в предыдущем параграфе, представляет собой основное свойство перенормируемых теорий. Более того, рассматриваемая конструкция показывает, что любая теория, определенная с параметром обрезания  $\Lambda_0$ , будет при  $\Lambda \ll \Lambda_0$  выглядеть как перенормируемая<sup>4)</sup>. Перейдем теперь к доказательству сформулированных результатов. Введем малые возмущения  $\delta\mathcal{G}_i(\Lambda)$  величин  $\mathcal{G}_i(\Lambda)$ , удовлетворяющих уравнению (12.4.3). Для них можно записать дифференциальные уравнения

$$\Lambda \frac{d}{d\Lambda} \delta\mathcal{G}_i(\Lambda) = \sum_j M_{ij}(\mathcal{G}(\Lambda)) \delta\mathcal{G}_j(\Lambda), \quad (12.4.4)$$

где

$$M_{ij}(\mathcal{G}(\Lambda)) \equiv \frac{\partial}{\partial \mathcal{G}_j} \beta_i(\mathcal{G}). \quad (12.4.5)$$

В этом уравнении перенормируемые и неперенормируемые взаимодей-

<sup>2)</sup> Все известные исключения из этого правила связаны с суперсимметрией.

<sup>3)</sup> Эта теорема принадлежит Полчинскому [19]. Ниже приводится сокращенный и менее строгий вариант доказательства. (В доказательстве Полчинского начальная поверхность выбиралась так, чтобы на ней константы всех неперенормируемых взаимодействий обращались в нуль. Как мы увидим ниже, константы взаимодействий стремятся к одной и той же поверхности при произвольном выборе начальной поверхности).

<sup>4)</sup> Конечно же, существуют теории, в которых набор полей или имеющиеся симметрии запрещают все перенормируемые взаимодействия. Например, таковы теории, содержащие только фермионные поля или только гравитационное поле. При  $\Lambda \ll \Lambda_0$  они выглядят как теории свободных полей.

ствия смешиваются, что не позволяет увидеть различия в их поведении. Чтобы разделить их, определим линейные комбинации

$$\xi_n \equiv \delta\mathcal{C}_n - \sum_{ab} \frac{\partial\mathcal{G}_n}{\partial\mathcal{G}_a^0} \left( \frac{\partial\mathcal{G}}{\partial\mathcal{G}^0} \right)_{ab}^{-1} \delta\mathcal{G}_b, \quad (12.4.6)$$

где  $\mathcal{G}_0^a$  — значения констант перенормируемых взаимодействий в точке  $\Lambda_0$ , которые мы будем использовать в качестве координат на начальной поверхности, а  $\mathcal{G}_n$  — значения констант неперенормируемых взаимодействий в точке  $\Lambda$ , принадлежащие траекториям системы дифференциальных уравнений (12.4.3), которые при значении параметра  $\Lambda_0$  проходят через точку начальной поверхности с координатами  $\mathcal{G}_0^a$ . Чтобы вычислить производные величин  $\xi_n$  по  $\Lambda$ , заметим, что производные  $\partial\mathcal{G}_i/\partial\mathcal{G}_0^a$  удовлетворяют тому же дифференциальному уравнению (12.4.4), что и  $\delta\mathcal{G}_i$ . Несложно показать, что

$$\Lambda \frac{d}{d\Lambda} \xi_n = \sum_m N_{nm} \xi_m, \quad (12.4.7)$$

где

$$N_{nm} \equiv M_{nm} - \sum_{ab} \frac{\partial\mathcal{G}_n}{\partial\mathcal{G}_a^0} \left( \frac{\partial\mathcal{G}}{\partial\mathcal{G}^0} \right)_{ab}^{-1} M_{bm}. \quad (12.4.8)$$

Теперь нам нужно оценить величины  $N_{nm}$ . В свободной теории нет необходимости в обрезании, так что для очень малых значений констант взаимодействий все голые параметры  $g_i(\Lambda)$  становятся независящими от  $\Lambda$ . Поэтому для малых значений констант взаимодействий зависимость безразмерных параметров  $\mathcal{G}_i$  от  $\Lambda$  определяется множителем  $\Lambda^{-\delta_i}$ , и матрица  $M_{ij}$  равна

$$M_{ij} \approx -\Delta_i \delta_{ij}. \quad (12.4.9)$$

Отсюда следует, что матричный элемент  $N_{nm}$  примерно равен

$$-\Delta_n \delta_{nm}.$$

Определяющей характеристикой неперенормируемых взаимодействий является неравенство  $\Delta_n < 0$ , и согласно (12.4.7) величины  $\xi_n$  убывают при  $\Lambda \ll \Lambda_0$  как положительные степени  $\Lambda/\Lambda_0$  (по крайней мере, для значений констант взаимодействий, лежащих в некотором конечном интервале, где матрица  $N_{nm}$  положительно определена). В этом пределе для возмущений будут выполняться соотношения

$$\delta\mathcal{G}_n = \sum_{ab} \frac{\partial\mathcal{G}_n}{\partial\mathcal{G}_a^0} \left( \frac{\partial\mathcal{G}}{\partial\mathcal{G}^0} \right)_{ab}^{-1} \delta\mathcal{G}_b. \quad (12.4.10)$$

В частности, если мы слабо изменим начальную поверхность  $\mathcal{S}_0$ , начальную точку на этой поверхности и начальное значение параметра обрезания  $\Lambda_0$  так, что возникающее изменение констант перенормируемых взаимодействий обратится в нуль при некотором значении

параметра обрезания  $\Lambda$ , то при том же значении  $\Lambda$  обратятся в нуль и возмущения  $\delta \mathcal{G}_n$  всех остальных констант взаимодействия. Поэтому значения констант неперенормируемых взаимодействий  $\mathcal{G}_n(\Lambda)$  при  $\Lambda \ll \Lambda_0$  могут зависеть только от значений констант перенормируемых взаимодействий  $\mathcal{G}_a(\Lambda)$ , но не по отдельности от начальной поверхности, начальной точки на ней и начального значения параметра обрезания  $\Lambda_0$ . Следовательно, при  $\Lambda \ll \Lambda_0$  значения всех констант взаимодействия стремятся к  $N$ -мерной поверхности  $\mathcal{S}$ , координатами на которой являются величины  $\mathcal{G}_a(\Lambda)$  и которая не зависит ни от начальной поверхности, ни от  $\Lambda_0$ . Отметим, что вообще говоря константы неперенормируемых взаимодействий не малы на поверхности  $\mathcal{S}$ ; важно, что они оказываются функциями констант перенормируемых взаимодействий. Изменение параметра  $\Lambda$  в области  $\Lambda \ll \Lambda_0$  приведет к изменению констант взаимодействий, но при этом мы останемся вблизи поверхности  $\mathcal{S}$  (по крайней мере, пока константы взаимодействий не станут так велики, что матрица  $N_{nm}$  перестанет быть положительно определенной). Поэтому поверхность  $\mathcal{S}$  устойчива, как и требовалось.

Мы видели, что все физические величины могут быть выражены через  $\Lambda$  и  $\mathcal{G}_n(\Lambda)$  и являются независимыми от параметра обрезания  $\Lambda$ . В частности, это справедливо для  $N$  обычных перенормированных констант взаимодействия и масс (например,  $e$  и  $m_e$  в квантовой электродинамике). Но можно обратить эту зависимость и выразить  $\mathcal{G}_n(\Lambda)$  через обычные физические параметры и  $\Lambda$ . Это подтверждает корректность обычной схемы перенормировки — все физические величины выражаются независящим от обрезания способом через обычные перенормированные константы взаимодействий и массы.

Подход Вильсона обладает некоторыми практическими преимуществами. Не нужно беспокоиться о частичных интегрированиях и перекрывающихся расходимостях — обрезание по импульсу производится и для внутренних линий. Кроме того, некоторые из теорем о неперенормируемости в суперсимметричных теориях, утверждающие, что определенные константы взаимодействия не получают радиационных поправок, справедливы только для не зависящих от обрезания голых констант взаимодействия [20].

С другой стороны, у подхода Вильсона есть и свои недостатки. Приходится расстаться со многими удобными упрощениями, специфичными для перенормируемых теорий типа квантовой электродинамики: как только мы проводим интегрирование по частицам с импульсом выше  $\Lambda$ , в получаемой эффективной теории поля появляются все разрешенные из соображений калибровочной инвариантности и лоренц-инвариантности взаимодействия с зависящими от  $\Lambda$  константами. (Правда, в физических процессах с характерной энергией  $E \ll \Lambda$  все еще будут доминировать перенормируемые взаимодействия.) Кроме того, обрезание по импульсу обычно приводит к на-

рушению *явной* калибровочной инвариантности и либо явной лоренц-инвариантности, либо унитарности. Ни одна из этих проблем не представляет опасности в физике конденсированного состояния, исходной области применения вильсоновского подхода. Действительно, никто не ожидает, что реалистичная теория конденсированного состояния будет строго перенормируемой, а при наложении обрезания могут не нарушаться никакие фундаментальные физические принципы. На самом деле в кристаллах *существует* обрезание по импульсу, определяемое обратной постоянной решетки.

Подводя итог, можно сказать, что различие между обычным и вильсоновским подходами лежит скорее в области технического удобства, а не в вопросе принципиальной физической интерпретации. В самом деле, обычная процедура перенормировки уже содержит некоторый переменный параметр обрезания — если мы выражаем ответ через константы взаимодействия, определенные в терминах физических амплитуд для процессов с характерным импульсом  $\mu$  (как, например, в случае обсуждавшейся в предыдущем параграфе скалярной теории поля), то приводящие к сходимости интегралов взаимные уничтожения вступают в игру начиная с виртуальных импульсов порядка  $\mu$ . Обратно, зависящие от  $\Lambda$  константы взаимодействия в вильсоновском подходе должны быть в конце концов выражены через наблюдаемые заряды и массы; результаты, разумеется, совпадают с получаемыми при помощи обычной процедуры перенормировки.

### § 12.5. Дополнительные симметрии<sup>1)</sup>

В § 12.3 мы видели, что существуют серьезные причины считать перенормируемые теории поля адекватными приближенными описаниями реального мира при достаточно низких энергиях. Часто условие перенормируемости оказывается настолько сильным, что эффективный лагранжиан автоматически приобретает одну или несколько симметрий, отсутствовавших в исходной теории и нарушенных подавленными неперенормируемыми взаимодействиями. Фактически большинство экспериментально обнаруженных симметрий в физике элементарных частиц являются “случайными симметриями” такого вида.

Классический пример дают инверсии и сохранение лептонных чисел в электродинамике заряженных лептонов. Самая общая калибровочно и лоренц-инвариантная плотность лагранжиана для теории фотонов и полей  $\psi_i$  спина  $1/2$  и заряда  $-e$ , содержащая только пере-

---

<sup>1)</sup> Материал этого параграфа выходит за рамки основного содержания книги и может быть опущен при первом чтении.

нормируемые взаимодействия, имеет вид

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & -\frac{1}{4} Z_3 F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \\ & - \sum_{ij} Z_{Lij} \bar{\psi}_{Li} [\hat{\partial} + ie\hat{A}] \psi_{Lj} - \sum_{ij} Z_{Rij} \bar{\psi}_{Ri} [\hat{\partial} + ie\hat{A}] \psi_{Rj} - \\ & - \sum_{ij} M_{ij} \bar{\psi}_{Li} \psi_{Rj} - \sum_{ij} M_{ij}^\dagger \bar{\psi}_{Ri} \psi_{Lj}. \end{aligned} \quad (12.5.1)$$

Здесь индексы суммирования  $i, j$  обозначают возможные типы лептонов ( $e, \mu$  и  $\tau$ ),  $\psi_{iL}$  и  $\psi_{iR}$  — соответственно левая и правая компоненты поля  $\psi_i$ , определяемые формулами

$$\psi_{Li} = \frac{1}{2} (1 + \gamma_5) \psi_i, \quad \psi_{Ri} = \frac{1}{2} (1 - \gamma_5) \psi_i, \quad (12.5.2)$$

а  $Z_L$ ,  $Z_R$  и  $M$  — постоянные матрицы. Мы не делаем никаких предположений о сохранении лептонных чисел, так что матрицы  $Z_{Lij}$ ,  $Z_{Rij}$  и  $M_{ij}$  не обязаны быть диагональными. Мы также ничего не предполагаем об инвариантности относительно  $C$ ,  $P$  и  $T$ , так что не подразумевается никакой связи между  $Z_L$  и  $Z_R$  (и между  $M$  и  $M^\dagger$ ). Единственные ограничения связаны с действительностью плотности лагранжиана (из которой следует эрмитовость  $Z_{Lij}$  и  $Z_{Rij}$ ) и с наличием канонических антисимметрических соотношений (из которой следует положительная определенность матриц  $Z_{Lij}$  и  $Z_{Rij}$ ).

Предположим теперь, что мы заменяем лептонные поля  $\psi_L$  и  $\psi_R$  на новые поля  $\psi'_L$  и  $\psi'_R$ , определенные согласно

$$\psi_L = S_L \psi'_L, \quad \psi_R = S_R \psi'_R, \quad (12.5.3)$$

где  $S_L$  и  $S_R$  — произвольно выбранные несингULARНЫЕ матрицы. Плотность лагранжиана, выраженная через новые поля, имеет тот же вид (12.5.1), но с заменой матриц  $Z_L$ ,  $Z_R$  и  $M$  на

$$Z'_L = S_L^\dagger Z_L S_L, \quad Z'_R = S_R^\dagger Z_R S_R, \quad M' = S_L^\dagger M S_R. \quad (12.5.4)$$

Можно выбрать  $S_L$  и  $S_R$  так, чтобы было  $Z'_L = Z'_R = 1$ . (Положим  $S_{L,R} = U_{L,R} D_{L,R}$ , где  $U_{L,R}$  — унитарные матрицы, диагонализующие положительно определенные эрмитовы матрицы  $Z_{L,R}$ , а  $D_{L,R}$  — диагональные матрицы, элементы которых обратны к квадратным корням из собственных значений матриц  $Z_{L,R}$ .)

Проделаем теперь еще одно преобразование к лептонным полям  $\psi''_i$ , определяемым формулами

$$\psi'_L = S'_L \psi''_L, \quad \psi'_R = S'_R \psi''_R. \quad (12.5.5)$$

Плотность лагранжиана, выраженная через эти поля, снова имеет исходный вид с заменой матриц на

$$Z''_L = {S'_L}^\dagger S'_L, \quad Z''_R = {S'_R}^\dagger S'_R, \quad M'' = {S'_L}^\dagger M' S'_R. \quad (12.5.6)$$

На этот раз выберем  $S'_{L,R}$  унитарными (так что опять  $Z''_L = Z''_R = 1$ ) и потребуем действительности и диагональности матрицы  $M''$ . (Согласно теореме о полярном разложении квадратную матрицу  $M'$  можно представить в виде  $M' = VH$ , где  $V$  — унитарная матрица, а  $H$  — эрмитова. Положим  $S'_L = S'^{\dagger}_R V^{\dagger}$ , а в качестве  $S'_R$  возьмем унитарную матрицу, диагонализующую  $H$ .) Опуская штрихи, перепишем плотность лагранжиана в виде

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = -\frac{1}{4} Z_3 F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \sum_i \bar{\psi}_{Li} [\hat{\partial} + ie\hat{A}] \psi_{Li} - \sum_i \bar{\psi}_{Ri} [\hat{\partial} + ie\hat{A}] \psi_{Ri} - \\ - \sum_i m_i \bar{\psi}_{Li} \psi_{Ri} - \sum_i m_i \bar{\psi}_{Ri} \psi_{Li}, \end{aligned} \quad (12.5.7)$$

где  $m_i$  — действительные числа (собственные значения матрицы  $H$ ). Последнее выражение можно привести к более привычному виду:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} Z_3 F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \sum_i \bar{\psi}_i [\hat{\partial} + ie\hat{A}] \psi_i - \sum_i m_i \bar{\psi}_i \psi_i. \quad (12.5.8)$$

Из такой записи лагранжиана сразу следует, что любой перенормируемый лагранжиан для электродинамики лептонов автоматически приводит к теории с сохранением  $P$ ,  $C$ ,  $T$  и лептонных чисел (разностей между числом лептонов и числом антилептонов) всех трех типов — электронного, мюонного и таонного<sup>2)</sup>. В частности, несмотря на вид лагранжиана (12.5.1), в такой теории запрещены процессы вида  $\mu \rightarrow e + \gamma$ . Читатель может задаться вопросом о справедливости отождествления лептонных полей с полями  $\psi_i$  (изначально обозначенными как  $\psi''_i$ ) из (12.5.8), для которых очевидным образом сохраняются лептонные числа, а не с полями  $\psi_i$  из (12.5.1), для которых возможны процессы вида  $\mu \rightarrow e + \gamma$ . Подобные сомнения могут быть отброшены: как подчеркивалось в § 10.3, никакое поле не может претендовать на роль единственного поля электрона или мюона. Фактически, хотя из лагранжиана (12.5.1) и следует наличие ненулевого матричного элемента для радиационного перехода лептона типа 1 в лептон типа 2 *вне* лептонной массовой оболочки, в случае лежащих на массовой оболочке импульсов лептонов элемент  $S$ -матрицы для всех таких процессов равен нулю уже при вычислениях с использованием (12.5.1).

В приведенном рассуждении существенным образом использовалось равенство входящих в (12.5.1) электрических зарядов левых и правых компонент лептонных полей — иначе говоря, тот факт, что

<sup>2)</sup> Впервые это было показано Фейнбергом, Кабиром и Вайнбергом [21]. Ранее Фейнберг [22] заметил, что в теории с только одним типом нейтрино слабые взаимодействия должны приводить к наблюдаемому сечению процесса  $\mu \rightarrow e + \gamma$ ; эта проблема была решена только после открытия другого типа нейтрино.

левая и правая компоненты лептонного поля одинаково преобразуются под действием электромагнитных калибровочных преобразований. Как мы увидим во втором томе, по аналогичным причинам в современной перенормируемой теории сильных взаимодействий, известной как квантовая хромодинамика, автоматически сохраняются  $C$  и (если не принимать во внимание некоторые непертурбативные эффекты)  $P$ ,  $T$  и разности между числом夸克ов и антикварков каждого из ароматов. Во втором томе мы также увидим, что в простейшем варианте перенормируемой стандартной модели слабых и электромагнитных взаимодействий автоматически сохраняются лептонные числа (но не  $C$  и  $P$ ) — по причинам, сходным с приведенными выше для случая электродинамики. Остается открытым вопрос о существовании связанных с большими массовыми масштабами неперенормируемых взаимодействий, нарушающих какие-либо из этих законов сохранения.

## Задачи

1. Перечислите все возможные перенормируемые (или суперперенормируемые) лоренц-инвариантные слагаемые в лагранжиане теории одного скалярного поля для случаев размерности пространства–времени, равной 2, 3 и 6.
2. Покажите, как в квантовой электродинамике уничтожается пекрывающаяся расходимость собственной энергии электрона.
3. Рассмотрим теорию, содержащую скалярное поле  $\phi$  и спинорное поле  $\psi$ , взаимодействие которых определяется слагаемым  $d\phi\psi\bar{\psi}$  в плотности гамильтониана. Запишите однопетлевой вклад в собственную энергию скалярного поля  $\Pi^*(q)$  в виде суммы сходящегося интеграла и полинома от  $q^\mu$  с расходящимися коэффициентами.
4. Предположим, что квантовая электродинамика электронов и фотонов является на самом деле эффективной теорией поля, полученной в результате интегрирования по степеням свободы неизвестной частицы с массой  $M \gg m_e$ . Будем предполагать калибровочную и лоренц-инвариантность, но не инвариантность относительно  $C$ ,  $P$  или  $T$ . Какие имеются в лагранжиане неперенормируемые слагаемые в главном порядке по  $1/M$ ? В следующем порядке?

## Литература

1. *Dyson F.J. // Phys. Rev.* **75**, 486, 1736 (1949). История вопроса описана в *Renormalization*, ed. by L.M. Brown. Springer-Verlag, N.Y., 1993. Обстоятельное изложение современной теории перенормировок имеется в *Collins J. Renormalization*. Cambridge University Press, Cambridge, 1984.

2. Weinberg S. // Phys. Rev. **118**, 838 (1959). Это доказательство описалось лишь на общие асимптотические свойства сопоставляемых элементам фейнмановских диаграмм подынтегральных в евклидовом импульсном пространстве, получаемом при помощи викова поворота всех контуров интегрирования. Оно было упрощено за счет использования более тонких свойств подынтегрального выражения (Hahn Y. and Zimmerman W. // Commun. Math. Phys. **10**, 330 (1968)) и затем обобщено на случай импульсного пространства, являющегося пространством Минковского (Zimmermann W. // Commun. Math. Phys. **11**, 1 (1968)).
3. Bjorken J.D., Drell S.D. Relativistic Quantum Fields. McGraw-Hill, N.Y., 1965. [Рус. пер.: Бъёркен Дж.Д., Дрелл С.Д. Релятивистская квантовая теория.— М.: Наука, 1978. Т. 2. Разделы 19.10 и 19.11.]
4. См., например, Wess J., Bagger J. Supersymmetry and Supergravity. Princeton University Press, Princeton, 1983, а также ссылки на оригинальные статьи, приведенные там.
5. Salam A. // Phys. Rev. **82**, 217 (1951); Phys. Rev. **84**, 426 (1951); Matthews P.T., Salam A. // Phys. Rev. **94**, 185 (1954).
6. Bogoliubov N.N., Parasiuk O. // Acta Math. **97**, 227 (1957).
7. Hepp K. // Comm. Math. Phys. **2**, 301 (1966). Хепп отмечает, что “трудно найти двух теоретиков, одинаково понимающих основные шаги в доказательстве Боголюбова и Парасюка”. Но и работа самого Хеппа не представляет собой легкого чтения.
8. Zimmerman W. // Comm. Math. Phys. **15**, 208 (1969). См. также Zimmerman W. // В сборнике *Lectures on Elementary Particles and Quantum Field Theory — Brandeis University Summer Institute in Theoretical Physics*. M.I.T. Press, Cambridge, 1970.
9. Heisenberg W. // Z. Physik. **110**, 251 (1938).
10. Heisenberg W., ссылка 6, а также Heisenberg W. // Z. Physik. **113**, 61 (1939).
11. Sakata S., Umezawa H., Kamefuchi S. // Prog. Theor. Phys. **7**, 327 (1952).
12. Weinberg S. // Physica. **96A**, 327 (1979).
13. Gasser J., Leutwyler H. // Ann. Phys. (N.Y.). **158**, 142 (1984); Nucl. Phys. **B250**, 465 (1985).
14. Donoghue J.F. // Phys. Rev. **D 50**, 3874 (1994).
15. Такой сценарий может реализоваться, например, за счет явления “асимптотической безопасности”, см. Weinberg S. // В сборнике *General Relativity — An Einstein Centenary Survey*, ed. by S.W. Hawking, W. Israel. Cambridge University Press, Cambridge, 1979. Раздел 16.3.

16. Euler H., Kockel B. // Naturwiss. **23**, 246 (1935); Heisenberg W., Euler H. // Z. Physik. **98**, 714 (1936).
17. Эффективный лагранжиан Эйлера и др. был использован для однопетлевых вычислений в работе Halter J. // Phys. Lett. **B 316**, 155 (1993).
18. Wilson K.G. // Phys. Rev. **B4**, 3174, 3184 (1971); Rev. Mod. Phys. **47**, 773 (1975).
19. Polchinski J. // Nucl. Phys. **B231**, 269 (1984); лекция в *Recent Directions in Particle Theory — Proceedings of the 1992 TASI Conference*, ed. by J. Harvey, J. Polchinski. World Scientific, Singapore, 1993. C. 235.
20. Novikov V., Shifman M.A., Vainshtein A.I., Zakharov V.I. // Nucl. Phys. **B229**, 381 (1983); Shifman M.A., Vainshtein V.A. // Nucl. Phys. **B277**, 456 (1986). См. также ссылки, приведенные в этих работах. Кроме того, см. Shifman M.A., Vainshtein A.I. // Nucl. Phys. **B359**, 571 (1991).
21. Feinberg G., Kabir P., Weinberg S. // Phys. Rev. Lett. **3**, 527 (1959).
22. Feinberg G. // Phys. Rev. **110**, 1482 (1958).

## Г л а в а 13

# ИНФРАКРАСНЫЕ РАСХОДИМОСТИ

При изучении радиационных поправок особую роль играют поправки от “мягких” фотонов — фотонов, энергия и импульс которых много меньше характерных масс и энергий рассматриваемого процесса. Такие поправки часто оказываются настолько большими, что их следует суммировать во всех порядках теории возмущений; но вид их достаточно прост, и суммирование не представляет особых трудностей. Вклады фотонов с бесконечно большими длинами волн имеют вид расходящихся интегралов, но все такие “инфракрасные расходимости” уничтожаются [1].

В большей части этой главы мы будем иметь дело с фотонами, взаимодействующими с заряженными частицами произвольного спина (включая такие частицы, как атомные ядра, которые участвуют и в электромагнитных, и в сильных взаимодействиях). Но несложно переформулировать полученные результаты в терминах инфракрасных эффектов с участием других безмассовых частиц, например глюонов в квантовой хромодинамике. В § 13.4 мы будем рассматривать весьма общие теории с безмассовыми частицами и продемонстрируем устранение инфракрасных расходимостей в общем случае.

После этих обобщений мы снова вернемся к фотонам и рассмотрим две задачи, имеющие практическое значение — рассеяние мягких фотонов заряженными частицами произвольного спина, участвующими в неэлектромагнитных взаимодействиях, и интерпретацию тяжелых заряженных частиц (например, атомных ядер) как источников внешнего электромагнитного поля.

### § 13.1. Амплитуды излучения мягких фотонов

В этом параграфе мы выведем общую формулу для амплитуды излучения произвольного числа фотонов очень малой энергии в процессе  $\alpha \rightarrow \beta$  с участием произвольного числа заряженных частиц высокой энергии любого типа.

Начнем с амплитуды излучения одного мягкого фотона. Добавим линию, соответствующую мягкому вылетающему фотону с импульсом  $q$  и индексом поляризации  $\mu$ , к выходящей внешней линии заряженной частицы на некоторой связной фейнмановской диаграмме для процесса  $\alpha \rightarrow \beta$ , как показано на рис. 13.1, *a*. Тогда нам следует добавить в *S*-матричный элемент для процесса  $\alpha \rightarrow \beta$  новую верши-

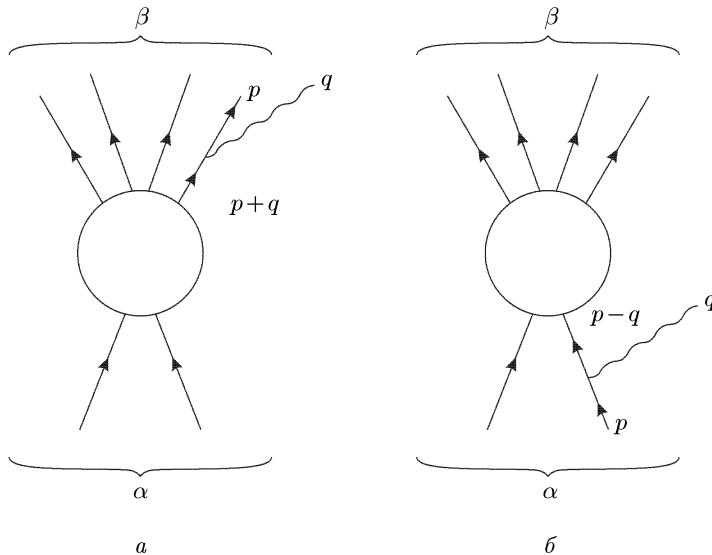


Рис. 13.1. Дающие основной вклад диаграммы для излучения мягких фотонов в произвольном процессе  $\alpha \rightarrow \beta$ . Прямые линии соответствуют частицам в состояниях  $\alpha$  и  $\beta$  (включая, возможно, высокоэнергетичные фотоны). Волнистые линии соответствуют мягким фотонам

ну взаимодействия заряженной частицы с фотоном и дополнительный пропагатор заряженной частицы с импульсом  $p + q$ , который она имела до испускания фотона. Для заряженных частиц спина 0, массы  $m$  и заряда  $+e$  эти множители дают

$$[i(2\pi)^4 e(2p^\mu + q^\mu)] \left[ \frac{-i}{(2\pi)^4} \frac{1}{(p+q)^2 + m^2 - i\epsilon} \right],$$

что в пределе  $q \rightarrow 0$  равно

$$\frac{ep^\mu}{p \cdot q - i\epsilon}. \quad (13.1.1)$$

Здесь мы переопределили бесконечно малую величину  $\epsilon$ , поскольку важен лишь ее знак. Фактически этот результат верен для заряженной частицы любого спина. Например, для частицы спина  $1/2$  и заряда  $+e$  следует заменить спинор  $\bar{u}(\mathbf{p}, \sigma)$  вылетающей заряженной частицы на

$$\bar{u}(\mathbf{p}, \sigma) [-(2\pi)^4 e \gamma^\mu] \left[ \frac{-i}{(2\pi)^2} \frac{-i(\hat{p} + \hat{q}) + m}{(p+q)^2 + m^2 - i\epsilon} \right].$$

В пределе  $q \rightarrow 0$  числитель пропагатора представляет собой сумму диад

$$-i\hat{p} + m = 2p^0 \sum_{\sigma'} u(\mathbf{p}, \sigma') \bar{u}(\mathbf{p}, \sigma'),$$

так что мы имеем сумму матричных элементов  $\gamma^\mu$  для спиноров с одинаковым импульсом

$$\bar{u}(\mathbf{p}, \sigma') \gamma^\mu u(\mathbf{p}, \sigma') = -i\delta_{\sigma, \sigma'} p^\mu / p^0,$$

и эффект снова сводится к умножению матричного элемента для процесса  $\alpha \rightarrow \beta$  на множитель (13.1.1). Вообще, для любого спина в пределе  $q \rightarrow 0$  4-импульс на линии новой внутренней заряженной частицы стремится к массовой оболочке. Числитель пропагатора при этом стремится к сумме диад из векторов спиновых коэффициентов, и возникшая при добавлении вершины матрица сводится к множителю  $p^\mu$  и скалярной матрице в пространстве спиральностей, т.е. снова появляется множитель (13.1.1). В гл. 10 мы выяснили, что поправки высших порядков не влияют ни на вычеты пропагаторов в полюсах, лежащих на массовой оболочке, ни на матричные элементы тока между состояниями одной и той же частицы с одинаковыми импульсами. Следовательно, выражение (13.1.1) дает правильный во всех порядках теории возмущений множитель, связанный с добавлением мягкого фотона на внешнюю линию вылетающей заряженной частицы.

Те же аргументы применимы и к излучению фотона со входящей внешней линии заряженной частицы в процессе  $\alpha \rightarrow \beta$ . Но поскольку после излучения фотона с 4-импульсом  $q$  частица имеет импульс  $p - q$ , вместо (13.1.1) получим

$$\frac{ep^\mu}{-p \cdot q - i\epsilon}. \quad (13.1.2)$$

Конечно, в процессе  $\alpha \rightarrow \beta$  фотон может быть испущен и с некоторой внутренней линии, но при этом мы не получим множителя с асимптотикой  $(p \cdot q)^{-1}$  при  $q \rightarrow 0$ . Амплитуда  $M_{\beta\alpha}^\mu(q)$  (элемент  $S$ -матрицы без сохраняющей энергию-импульс дельта-функции) испускания в процессе  $\alpha \rightarrow \beta$  одного мягкого фотона с 4-импульсом  $q$  и поляризационным индексом  $\mu$  в пределе  $q \rightarrow 0$  может, следовательно, быть получена посредством умножения матричного элемента  $M_{\beta\alpha}$  для перехода  $\alpha \rightarrow \beta$  на сумму членов вида (13.1.1) или (13.1.2) — по одному слагаемому для каждой внешней линии заряженной частицы:

$$M_{\beta\alpha}^\mu(q) \rightarrow M_{\beta\alpha} \sum_n \frac{\eta_n e_n p_n^\mu}{p_n \cdot q - i\eta_n \epsilon}. \quad (13.1.3)$$

Здесь  $p_n$  и  $+e_n$  — 4-импульс и заряд  $n$ -й частицы в начальном или конечном состоянии,  $\eta_n = +1$  для частиц в конечном состоянии  $\beta$  и  $\eta_n = -1$  для частиц в начальном состоянии  $\alpha$ .

Прежде чем переходить к рассмотрению процессов с испусканием более чем одного мягкого фотона, стоит отметить важное свойство [2] формулы (13.1.3). Чтобы вычислить амплитуду излучения фотона с определенной спиральностью, нужно свернуть (13.1.3) с вектором поляризации фотона  $e_\mu(\mathbf{q}, \pm)$ . Но, как мы видели в § 5.9,  $e_\mu(\mathbf{q}, \pm)$  не является 4-вектором — под действием преобразования Ло-

ренца  $\Lambda_\nu^\mu$  он переходит в сумму  $\Lambda_\nu^\mu e_\nu(\mathbf{q}, \pm)$  и слагаемого, пропорционального  $q^\mu$ . Чтобы последнее слагаемое не нарушало лоренц-инвариантность, необходимо, чтобы свертка  $M_{\beta\alpha}^\mu(q)$  с  $q_\mu$  обращалась в нуль. Но при  $q \rightarrow 0$  из (13.1.3) получаем

$$q_\mu M_{\beta\alpha}^\mu(q) \rightarrow M_{\beta\alpha} \sum_n \eta_n e_n. \quad (13.1.4)$$

Коэффициент при  $M_{\beta\alpha}$  в правой части представляет собой просто разность полных зарядов в конечном и начальном состоянии, так что условие его обращения в нуль есть просто условие сохранения заряда. Поэтому без каких-либо дополнительных предположений о калибровочной инвариантности получаем, что для частиц нулевой массы и спина единица лоренц-инвариантность требует сохранения константы низкоэнергетических взаимодействий (такой, как электрический заряд) частиц данного вида.

Похожим образом амплитуда испускания мягкого гравитона 4-импульса  $q$  с тензорными индексами  $\mu, \nu$  в процессе  $\alpha \rightarrow \beta$  дается формулой [3], аналогичной (13.1.3):

$$M_{\beta\alpha}^{\mu\nu}(q) \rightarrow M_{\beta\alpha} \sum \frac{\eta_n f_n p_n^\mu p_n^\nu}{p_n \cdot q - i\eta_n \epsilon}, \quad (13.1.5)$$

где  $f_n$  — константа взаимодействия мягкого гравитона с частицами типа  $n$ . Из лоренц-инвариантности следует обращение в нуль свертки этого выражения с  $q_\mu$ . Но

$$q_\mu M_{\beta\alpha}^{\mu\nu}(q) \rightarrow M_{\beta\alpha} \sum_n \eta_n f_n p_n^\nu, \quad (13.1.6)$$

так что сумма  $\sum f_n p_n^\nu$  сохраняется. Единственная линейная комбинация 4-импульсов, которая может сохраняться без запрещения всех нетривиальных процессов рассеяния — полный 4-импульс. Поэтому из обращения (13.1.6) в нуль следует равенство всех  $f_n$  между собой (общее значение  $f_n$  может быть отождествлено с  $\sqrt{8\pi G_N}$ , где  $G_N$  — гравитационная постоянная Ньютона). Таким образом, лоренц-инвариантность требует, чтобы низкоэнергетические безмассовые частицы спина два одинаковым образом взаимодействовали со всеми видами энергии и импульса. Это существенное продвижение на пути к доказательству того, что принцип относительности Эйнштейна есть следствие условия лоренц-инвариантности, примененного к безмассовым частицам спина два.

Далее, амплитуда испускания мягкой безмассовой частицы 4-импульса  $q$  и спина  $j \geq 3$  в процессе  $\alpha \rightarrow \beta$  имеет вид

$$M_{\beta\alpha}^{\mu\nu\rho\dots}(q) \rightarrow M_{\beta\alpha} \sum_n \frac{\eta_n g_n p_n^\mu p_n^\nu p_n^\rho \dots}{p_n \cdot q - i\eta_n \epsilon}.$$

Из лоренц-инвариантности здесь следует сохранение суммы

$$\sum g_n p_n^\nu p_n^\rho \dots$$

Но никакая подобная величина не может сохраняться без запрещения всех нетривиальных процессов рассеяния, так что все  $g_n$  должны обращаться в нуль. Безмассовые частицы спина  $j \geq 3$  могут существовать, но они не могут участвовать во взаимодействиях, не исчезающих в пределе малых энергий. В частности, они не могут быть переносчиками сил, изменяющихся по закону обратных квадратов.

Обратимся теперь к излучению двух мягких фотонов. Вклад в матричный элемент от диаграммы, в которой два фотона излучаются с разных внешних линий в процессе  $\alpha \rightarrow \beta$ , получается умножением матричного элемента для процесса  $\alpha \rightarrow \beta$  на произведение величин вида (13.1.1) или (13.1.2). Несколько неожиданно, быть может, что

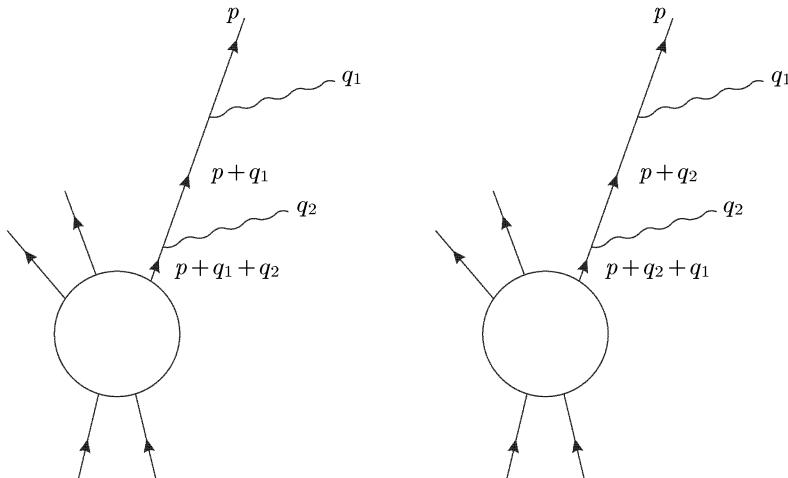


Рис. 13.2. Диаграммы для излучения двух мягких фотонов с одной выходящей линии заряженной частицы. Прямые линии соответствуют жестким частицам, волнистые — мягким фотонам

то же самое верно и в случае, когда оба фотона излучаются с *одной и той же* внешней линии. Если фотон 1 излучается после фотона 2 с внешней линии частицы заряда  $+e$  и 4-импульса  $p$ , получаем множитель

$$\left[ \frac{\eta e p^{\mu_1}}{p \cdot q_1 - i\eta\epsilon} \right] \left[ \frac{\eta e p^{\mu_2}}{p \cdot (q_2 + q_1) - i\eta\epsilon} \right].$$

Если фотон 2 излучается после фотона 1, множитель имеет вид

$$\left[ \frac{\eta e p^{\mu_2}}{p \cdot q_2 - i\eta\epsilon} \right] \left[ \frac{\eta e p^{\mu_1}}{p \cdot (q_1 + q_2) - i\eta\epsilon} \right].$$

(См. рис. 13.2. Снова  $\eta = +1$  для выходящих внешних линий и

$\eta = -1$  — для входящих.) Сумма этих двух множителей равна

$$\left[ \frac{\eta e p^{\mu_1}}{p \cdot q_1 - i\eta\epsilon} \right] \left[ \frac{\eta e p^{\mu_2}}{p \cdot q_2 - i\eta\epsilon} \right],$$

что есть просто произведение множителей, соответствующих излучению одного фотона.

Вообще, для случая излучения произвольного числа фотонов с одной внешней линии получаем сумму вида<sup>1)</sup>

$$[p \cdot q_1 - i\eta\epsilon]^{-1} [p \cdot (q_1 + q_2) - i\eta\epsilon]^{-1} [p \cdot (q_1 + q_2 + q_3) - i\eta\epsilon]^{-1}. \quad (13.1.7)$$

Отсюда следует, что в пределе  $q \rightarrow 0$  амплитуда  $M_{\beta\alpha}^{\mu_1 \dots \mu_N}(q_1 \dots q_N)$  излучения  $N$  очень мягких фотонов с поляризационными индексами  $\mu_1, \dots, \mu_N$  и 4-импульсами  $q_1, \dots, q_N$  в процессе  $\alpha \rightarrow \beta$  может быть получена умножением матричного элемента  $M_{\beta\alpha}$  для перехода  $\alpha \rightarrow \beta$  на произведение множителей вида (13.1.3), по одному множителю на каждый фотон:

$$M_{\beta\alpha}^{\mu_1 \dots \mu_N}(q_1 \dots q_N) \rightarrow M_{\beta\alpha} \prod_{r=1}^N \left( \sum_n \frac{\eta_n e_n p_n^{\mu_r}}{p_n \cdot q_r - i\eta_n \epsilon} \right). \quad (13.1.8)$$

## § 13.2. Виртуальные мягкие фотоны

Теперь мы используем полученные в предыдущем параграфе результаты для вычисления (во всех порядках теории возмущений) радиационных поправок, возникающих в результате обмена виртуальными мягкими фотонами. Рассмотрим процесс  $\alpha \rightarrow \beta$  с участием заряженных частиц, способных обмениваться такими фотонами (рис. 13.3). “Мягкими” мы называем фотоны с импульсом меньше  $\Lambda$ ,

<sup>1)</sup> Это тождество может быть доказано по индукции. Мы уже убедились, что оно справедливо для двух фотонов. Предположим, что оно справедливо для  $N - 1$  фотонов. Для  $N$  фотонов мы можем тогда записать сумму по перестановкам как сумму по вариантам выбора первого фотона и воспользоваться предположением индукции:

$$\begin{aligned} & [p \cdot q_1 - i\eta\epsilon]^{-1} [p \cdot (q_1 + q_2) - i\eta\epsilon]^{-1} \dots [p \cdot (q_1 + q_2 + \dots + q_N) - i\eta\epsilon]^{-1} + \\ & \quad + \text{все перестановки в формулах} = \\ & = \sum_{r=1}^N \left[ p \cdot \left( \sum_{s=1}^N q_s \right) \right]^{-1} \prod_{s \neq r} [p \cdot q_s - i\eta\epsilon]^{-1} = \\ & = \sum_{r=1}^N \left[ p \cdot \left( \sum_{s=1}^N q_s \right) \right]^{-1} [p \cdot q_r - i\eta\epsilon] \prod_{s \neq r} [p \cdot q_s - i\eta\epsilon]^{-1} = \prod_{s=1}^N [p \cdot q_s - i\eta\epsilon]^{-1}, \end{aligned}$$

что и требовалось.

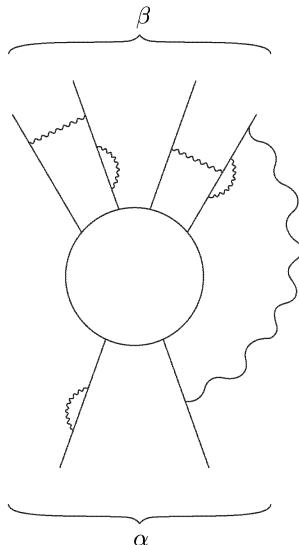


Рис. 13.3. Типичная диаграмма для вычисления обусловленных обменом виртуальными мягкими фотонами радиационных поправок к  $S$ -матричному элементу для перехода между состояниями  $\alpha$  и  $\beta$ . Прямые линии соответствуют частицам в состояниях  $\alpha$  и  $\beta$  (включая, возможно, жесткие фотоны), волнистые — мягким фотонам

где  $\Lambda$  выбрано достаточно малым, чтобы оправдать сделанные в предыдущем параграфе приближения. Мы увидим, что мягкие фотоны порождают инфракрасные расходимости, для обрезания которых нам придется ввести и нижнюю границу  $\lambda$  для импульса фотона. Важно понимать различие между этими двумя границами. Верхний параметр обрезания  $\Lambda$  просто определяет, что мы понимаем под “мягкостью” фотона; зависимость интересующих нас радиационных поправок от  $\Lambda$  устраняется зависимостью от  $\Lambda$  оставшейся части амплитуды, при вычислении которой учитываются только фотоны с импульсом, большим  $\Lambda$ . От параметра  $\lambda$  же придется рано или поздно избавиться посредством перехода к пределу  $\lambda \rightarrow 0$ . Как мы увидим, возникающие в этом пределе инфракрасные расходимости взаимно уничтожаются с расходимостями, обусловленными излучением реальных мягких фотонов.

Каждому виртуальному фотону соответствует пропагатор

$$\frac{-i}{(2\pi)^4} \frac{\eta_{\mu\mu'}}{q^2 - i\epsilon}. \quad (13.2.1)$$

Нужно умножить амплитуду (13.1.8) на произведение таких пропагаторов, произвести свертку по индексам поляризации фотонов и проинтегрировать по их 4-импульсам. Кроме того, для  $N$  виртуальных

фотонов следует еще разделить результат на  $2^N N!$ , поскольку при суммировании по возможным местам вставки фотонных линий мы получили лишний множитель  $N!$  от перестановок линий между собой и лишний множитель  $2^N$  от перестановок концов каждой линии. Вклад радиационных поправок с участием  $N$  мягких фотонов может быть поэтому получен умножением матричного элемента  $M_{\beta\alpha}$  для процесса  $\alpha \rightarrow \beta$  без учета таких поправок на величину

$$\frac{1}{N! 2^N} \left[ \frac{1}{(2\pi)^4} \sum_{nm} e_n e_m \eta_n \eta_m J_{nm} \right]^N, \quad (13.2.2)$$

где

$$J_{nm} \equiv -i(p_n \cdot p_m) \int_{\lambda \leqslant |\mathbf{q}| \leqslant \Lambda} \frac{d^4 q}{[q^2 - i\epsilon][p_n \cdot q - i\eta_n \epsilon][-p_m \cdot q - i\eta_m \epsilon]}. \quad (13.2.3)$$

Отметим, что мы изменили знак  $p_m \cdot q$  в знаменателе (13.2.3) — если виртуальный фотон уносит импульс  $q$  с линии  $m$ , то он уносит импульс  $-q$  с линии  $n$ .

Суммируя по  $N$ , приходим к следующему результату: для любого процесса матричный элемент с учетом радиационных поправок, обусловленных обменом произвольным числом виртуальных фотонов с импульсами  $|\mathbf{q}| \geqslant \lambda$ , дается выражением

$$M_{\beta\alpha}^\Lambda = M_{\beta\alpha}^\Lambda \exp \left[ \frac{1}{2(2\pi)^4} \sum_{nm} e_n e_m \eta_n \eta_m J_{nm} \right], \quad (13.2.4)$$

где  $M_{\beta\alpha}^\Lambda$  есть амплитуда, учитывающая обмен виртуальными фотонами только с импульсами, большими  $\Lambda$ .

Интеграл по  $q^0$  в (13.2.3) можно вычислить при помощи вычетов. Интегрируемая функция аналитична по  $q^0$  всюду, за исключением четырех полюсов:

$$\begin{aligned} q^0 &= |\mathbf{q}| - i\epsilon, & q^0 &= -|\mathbf{q}| + i\epsilon, \\ q^0 &= \mathbf{v}_n \cdot \mathbf{q} - i\eta_n \epsilon, & q^0 &= \mathbf{v}_m \cdot \mathbf{q} + i\eta_m \epsilon, \end{aligned}$$

где  $\mathbf{v}_n \equiv \mathbf{p}_n / p_n^0$  (аналогично для  $\mathbf{v}_m$ ). Если  $m$  — входящая частица, а  $n$  — выходящая, то  $\eta_n = +1$  и  $\eta_m = -1$ , так что при замыкании контура в верхней полуплоскости  $q^0$  нам не нужно вычислять вклад полюсов:  $q^0 = \mathbf{v}_n \cdot \mathbf{q} - i\eta_n \epsilon$  и  $q^0 = \mathbf{v}_m \cdot \mathbf{q} + i\eta_m \epsilon$ . Аналогично, если  $n$  — входящая частица, а  $m$  — выходящая, можно избавиться от необходимости вычислять вычеты в этих полюсах, замыкая контур в нижней полуплоскости. В этих случаях имеется вклад только от одного из полюсов  $q^0 = \pm(|\mathbf{q}| - i\epsilon)$ , так что получаем чисто действительный ин-

теграл

$$J_{nm} = -\pi(p_n \cdot p_m) \int_{\lambda \leq |q| \leq \Lambda} \frac{d^3 q}{|q|^3 (E_n - \hat{q} \cdot p_n)(E_m - \hat{q} \cdot p_m)} \\ (\text{для } \eta_n = -\eta_m = \pm 1). \quad (13.2.5)$$

С другой стороны, если частицы  $m$  и  $n$  обе входящие или обе выходящие, то полюсы  $\mathbf{v}_n \cdot q - i\eta_n \epsilon$  и  $\mathbf{v}_m \cdot q + i\eta_m \epsilon$  лежат по разные стороны от действительной оси  $q^0$ , и нет возможности избавиться от них одновременно, вне зависимости от способа замыкания контура:

$$J_{nm} = -\pi(p_n \cdot p_m) \int_{\lambda \leq |q| \leq \Lambda} \frac{d^3 q}{|q|^3 (E_n - \hat{q} \cdot p_n)(E_m - \hat{q} \cdot p_m)} - \frac{4i\pi^3}{\beta_{nm}} \ln\left(\frac{\Lambda}{\lambda}\right) \\ (\text{для } \eta_n = -\eta_m = \pm 1). \quad (13.2.6)$$

Здесь  $\beta_{nm}$  — относительная скорость частиц  $m$  и  $n$  в системе отсчета, связанной с любой из них:

$$\beta_{nm} \equiv \sqrt{1 - \frac{m_n^2 m_m^2}{(p_n \cdot p_m)^2}}. \quad (13.2.7)$$

Мнимое слагаемое в (13.2.6) приводит к инфракрасно расходящемуся фазовому множителю [4] в выражении (13.2.4), который исчезает при взятии модуля матричного элемента для вычисления сечения процесса  $\alpha \rightarrow \beta$ . Этот бесконечный фазовый множитель является релятивистским аналогом известного свойства нерелятивистского кулоновского рассеяния — зависимости выходящей волны в шредингеровской волновой функции от радиальной координаты  $r$  вида  $\exp(ipr - iv \ln r)/r$  вместо  $\exp(ipr)/r$  (здесь  $v$  равно отношению произведения зарядов к их относительной скорости [5]). На величину сечения реакции влияет действительная часть  $J_{nm}$ , которая при всех  $\eta_n$  и  $\eta_m$  равна

$$\operatorname{Re} J_{nm} = -\pi(p_n \cdot p_m) \int_{\lambda \leq |q| \leq \Lambda} \frac{d^3 q}{|q|^3 (E_n - \hat{q} \cdot p_n)(E_m - \hat{q} \cdot p_m)}. \quad (13.2.8)$$

После элементарного вычисления получаем

$$\operatorname{Re} J_{nm} = \frac{2\pi^2}{\beta_{nm}} \ln\left(\frac{1 + \beta_{nm}}{1 - \beta_{nm}}\right) \ln\left(\frac{\Lambda}{\lambda}\right). \quad (13.2.9)$$

Использование этого выражения при вычислении квадрата модуля (13.2.4) позволяет выразить эффект от обмена виртуальными мягкими фотонами в виде

$$\Gamma_{\beta\alpha}^\lambda = \left(\frac{\lambda}{\Lambda}\right)^{A(\alpha \rightarrow \beta)} \Gamma_{\beta\alpha}^\Lambda, \quad (13.2.10)$$

где  $\Gamma_{\beta\alpha}^\lambda$  и  $\Gamma_{\beta\alpha}^\Lambda$  равны сечениям процесса  $\alpha \rightarrow \beta$  с учетом радиационных поправок, обусловленных виртуальными мягкими фотонами с импульсами, большими  $\lambda$  и  $\Lambda$  соответственно, а  $A$  дается выражением

$$A(\alpha \rightarrow \beta) = -\frac{1}{8\pi^2} \sum_{nm} \frac{e_n e_m \eta_n \eta_m}{\beta_{nm}} \ln\left(\frac{1 + \beta_{nm}}{1 - \beta_{nm}}\right). \quad (13.2.11)$$

Отметим, что представить зависимость в таком виде удалось только потому, что поправочный множитель  $(\lambda/\Lambda)^A$  оказался отношением значений одной и той же функции в точках  $\lambda$  и  $\Lambda$ , поскольку сечения в (13.2.10) могут зависеть только от  $\lambda$  и  $\Lambda$  соответственно.

Величина  $A$  всегда положительна. Например, при рассеянии одной заряженной частицы на нейтральной частице или на внешнем потенциале в сумме (13.2.11) присутствуют слагаемые, в которых  $n$  и  $m$  соответствуют заряженной частице в начальном и конечном состояниях (тогда  $\eta_n \eta_m = +1$  и  $\beta_{nm} = 0$ ), и слагаемые, в которых  $n$  представляет заряженную частицу в начальном или конечном состоянии, а  $m$  — другую частицу (тогда  $\eta_n \eta_m = -1$  и  $\beta_{nm} = \beta$ , где  $1 > \beta > 0$ ). Имеем

$$A = -\frac{e^2}{8\pi^2} \left[ 4 - \frac{2}{\beta} \ln\left(\frac{1 + \beta}{1 - \beta}\right) \right],$$

что больше нуля при всех  $1 > \beta > 0$ . Поскольку  $A$  положительно, инфракрасные расходимости, обусловленные мягкими виртуальными фотонами, приводят (после суммирования по всем порядкам теории возмущений) к *обращению в нуль* в пределе  $\lambda \rightarrow 0$  вероятности любого процесса с участием заряженных частиц.

\* \* \*

Прежде чем перейти к изучению того, как обусловленные излучением реальных фотонов эффекты сокращают найденные выше инфракрасные расходимости, отметим одну техническую тонкость в проделанных нами вычислениях (которую, насколько мне известно, неизменно игнорировали в литературе). При вычислении радиационных поправок мы учитывали диаграммы, в которых виртуальный фотон испускается и поглощается на одной и той же внешней линии заряженной частицы, наравне с диаграммами, в которых фотон испускается и поглощается на разных внешних линиях. Но, как мы выяснили в гл. 10, при вычислении  $S$ -матрицы не следует учитывать радиационные поправки, возникающие в результате вставки собственно-энергетических поддиаграмм во внешние линии. Можно предположить, что следует отбросить в (13.2.11) слагаемые с  $n = m$ , но тогда сокращение инфракрасных расходимостей в следующем параграфе будет неполным.

Для решения возникшей проблемы заметим, что мягкие виртуальные фотоны приводят к возникновению инфракрасных расходимостей не только напрямую, но и посредством влияния на константу перенор-

мировки напряженности поля  $Z_n$  (в теориях типа квантовой электродинамики с единственным заряженным полем спина 1/2 константу  $Z_n$  обычно обозначают  $Z_2$ ). Радиационные поправки к внешним линиям уничтожаются контрчленами, пропорциональными  $Z_n - 1$ . Рассмотрим этот вопрос более подробно. Перенормированное поле заряженной частицы типа  $n$  отличается от неперенормированного на множитель  $Z_n^{-1/2}$ , так что при вычислении  $S$ -матрицы с использованием перенормированных полей (что соответствует отбрасыванию радиационных поправок к внешним линиям) мы получаем лишний множитель  $\prod_n Z_n^{-1/2}$ , где произведение берется по всем заряженным частицам в начальном и конечном состояниях. Конечно, есть еще такие же множители для нейтральных частиц, но они не содержат инфракрасных расходимостей. Перепишем полученное выражение в виде

$$\prod_f Z_f^{-E_f/2},$$

где  $Z_f$  есть константа перенормировки напряженности поля для полей типа  $f$ ,  $E_f$  равно числу внешних линий типа  $f$ , а произведение теперь берется по *всем* типам заряженных полей. Но константы перенормировки напряженности поля появляются также и во внутренних частях диаграмм — при записи взаимодействия типа  $i$  с участием  $N_{if}$  заряженных полей типа  $f$  через перенормированные поля возникает инфракрасно расходящийся множитель

$$\prod_f (Z_f)^{N_{if}/2}.$$

(Например, контрчлен  $-ie(Z_2 - 1)A_\mu \bar{\psi} \gamma_\mu \psi$  в уравнении (11.1.9) вместе с обычным электромагнитным взаимодействием  $-ieA_\mu \bar{\psi} \gamma_\mu \psi$  дает величину  $-ieZ_2 A_\mu \bar{\psi} \gamma_\mu \psi$ . Именно инфракрасная расходимость множителя  $Z_2$  определяла инфракрасную расходимость второго слагаемого в скобках в (11.3.23) и последнего слагаемого в (11.4.14).) Имеется также инфракрасная расходимость в пропагаторе перенормированного поля: при выражении пропагатора перенормированного поля через пропагатор неперенормированного поля возникает множитель  $Z_f^{-1}$ . Собрав все вклады, получим, что полное число множителей  $Z_f$  для каждого заряженного поля  $f$ , возникших в результате учета контрчленов к взаимодействиям и к радиационным поправкам на внешних и внутренних линиях, есть

$$\frac{1}{2} \sum_i V_i N_{if} - I_f - \frac{1}{2} E_f,$$

где  $I_f$  и  $E_f$  равны числам внутренних и внешних линий типа  $f$ , а  $V_i$  равно числу вершин со взаимодействием типа  $i$ . В § 6.3 мы отметили,

что эта величина равна нулю для всех  $f$ . Поэтому контрчлены, уничтожающие радиационные поправки к внешним линиям, сами уничтожаются за счет множителей  $Z_f$ , даваемых внутренними линиями и вершинами. Поэтому уравнение (13.2.11) справедливо в своем исходном виде, включающем слагаемые с  $m = n$ .

### § 13.3. Реальные мягкие фотоны: уничтожение расходимостей

Встретившуюся нам в предыдущем параграфе проблему инфракрасных расходимостей можно решить, заметив, что невозможно измерить в эксперименте сечение  $\Gamma_{\beta\alpha}$  процесса  $\alpha \rightarrow \beta$  с участием фиксированного числа фотонов и заряженных частиц, поскольку фотоны очень низких энергий всегда смогут избежать детектирования. На практике можно измерить сечение  $\Gamma_{\beta\alpha}(E, E_T)$  процесса, в котором никакой незарегистрированный фотон не обладает энергией больше некоторой малой энергии  $E$ , а все незарегистрированные фотоны уносят суммарную энергию не больше  $E_T$ . (Разумеется,  $E \leq E_T$ . Если в эксперименте не предусмотрены детекторы мягких фотонов, можно воспользоваться результатами измерений энергий “жестких” частиц в состояниях  $\alpha$  и  $\beta$  для определения полной энергии, унесенной мягкими фотонами, и просто положить  $E = E_T$ .) Перейдем теперь к вычислению этого сечения.

Элемент  $S$ -матрицы для излучения  $N$  реальных мягких фотонов в процессе  $\alpha \rightarrow \beta$  может быть получен свертыванием каждого из  $N$  индексов поляризации фотона  $\mu_1, \mu_2, \dots$  в формуле для амплитуды (13.1.8) с соответствующей коэффициентной функцией

$$\frac{\epsilon_\mu^*(\mathbf{q}, h)}{(2\pi)^{2/3} \sqrt{2|\mathbf{q}|}},$$

где  $\mathbf{q}$  есть импульс фотона,  $h = \pm 1$  — его спиральность, а  $\epsilon^\mu$  — “вектор” поляризации<sup>1)</sup>.

Таким образом, матричный элемент для излучения  $N$  фотонов ( $S$ -матрица без дельта-функции) равен

$$M_{\beta\alpha}^\lambda(\mathbf{q}_1, h_1, \mathbf{q}_2, h_2, \dots) = M_{\beta\alpha}^\lambda \times \\ \times \prod_{r=1}^N (2\pi)^{-3/2} (2|\mathbf{q}_r|)^{-1/2} \sum_n \frac{\eta_n e_n [p_n \cdot \epsilon^*(\mathbf{q}_r, h_r)]}{p_n \cdot q_r}. \quad (13.3.1)$$

---

<sup>1)</sup> Мы обозначили вектор поляризации фотона через  $\epsilon^\mu$  вместо  $e^\mu$ , чтобы избежать возможной путаницы с нашим обозначением  $e_n$  для электрического заряда.

Индекс  $\lambda$  напоминает нам, что амплитуды следует вычислять с учетом инфракрасного обрезания  $\lambda$  по импульсу виртуальных фотонов. Впоследствии мы перейдем к пределу  $\lambda \rightarrow 0$ . Присутствие мягких виртуальных фотонов не влияет на вид выражения (13.1.1) из-за мультиплексивного характера поправки, отмеченного в § 13.1. Дифференциальное сечение для излучения  $N$  мягких фотонов в объем  $\prod_r d^3 q_r$  импульсного пространства получается посредством возвведения этого матричного элемента в квадрат, суммированием по спиральностям и умножением результата на  $\prod_r d^3 q_r$ . Согласно (8.5.7) в случае  $q^2 = 0$  суммы по спиральностям принимают вид

$$\sum_{h=\pm 1} \epsilon_\mu(\mathbf{q}, h) \epsilon_\mu^*(\mathbf{q}, h) = \eta_{\mu\nu} + q_\mu c_\nu + q_\nu c_\mu, \quad (13.3.2)$$

где  $c \equiv -\mathbf{q}/2|\mathbf{q}|^2$  и  $c^0 \equiv 1/2|q|$ . Условие сохранения заряда

$$\sum_n \eta_n e_n = 0$$

позволяет опустить в (13.3.2) слагаемые, содержащие  $q_\mu$  или  $q_\nu$ , после чего для дифференциального сечения получаем<sup>2)</sup>

$$d\Gamma_{\beta\alpha}^\lambda(\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_N) = \Gamma_{\beta\alpha}^\lambda \prod_{r=1}^N \frac{d^3 q_r}{(2\pi)^3(2|\mathbf{q}_r|)} \sum_{nm} \frac{\eta_n \eta_m e_n e_m (p_n \cdot p_m)}{(p_n \cdot q_r)(p_m \cdot q_r)}. \quad (13.3.3)$$

Чтобы вычислить дифференциальное сечение излучения  $N$  мягких фотонов с фиксированными энергиями  $\omega_r \equiv |\mathbf{q}_r|$ , нужно проинтегрировать (13.3.3) по направлениям импульса фотона  $\mathbf{q}_r$ . Возникающие интегралы совпадают со встретившимися ранее в (13.2.8):

$$-\pi(p_n \cdot p_m) \int_{\lambda \ll |\mathbf{q}| \ll \Lambda} \frac{d^3 q}{|\mathbf{q}|^3(E_n - \hat{\mathbf{q}} \cdot \mathbf{p}_n)(E_m - \hat{\mathbf{q}} \cdot \mathbf{p}_m)} = \frac{2\pi^2}{\beta_{nm}} \ln\left(\frac{1 + \beta_{nm}}{1 - \beta_{nm}}\right). \quad (13.3.4)$$

После интегрирования получаем дифференциальное сечение излучения фотонов с энергиями  $\omega_1, \dots, \omega_N$ :

$$d\Gamma_{\beta\alpha}^\lambda(\omega_1, \dots, \omega_N) = \Gamma_{\beta\alpha}^\lambda A(\alpha \rightarrow \beta)^N \frac{d\omega_1}{\omega_1} \dots \frac{d\omega_N}{\omega_N}, \quad (13.3.5)$$

<sup>2)</sup> Результат для  $|\mathbf{q}| d\Gamma_{\beta\alpha}(\mathbf{q})/\Gamma_{\beta\alpha}$  в случае  $N = 1$  совпадает с распределением энергии, излучаемой в классическом случае разрывно меняющим направление током с 4-вектором плотности тока

$$J^\mu(x) = \sum_n^{(t)} \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{v}_n t) p_n^\mu e_n / E_n$$

(суммирование ведется только по частицам в начальном состоянии при  $t < 0$  и в конечном состоянии при  $t > 0$ ).

где  $A(\alpha \rightarrow \beta)$  — та же константа, что и в предыдущем параграфе,

$$A(\alpha \rightarrow \beta) = -\frac{1}{8\pi^2} \sum_{nm} \frac{e_n e_m \eta_n \eta_m}{\beta_{nm}} \ln \left( \frac{1 + \beta_{nm}}{1 - \beta_{nm}} \right).$$

Из формулы (13.3.5) видно, что интеграл по энергиям излучаемых фотонов инфракрасно расходится. Но условие унитарности требует, чтобы при использовании инфракрасного обрезания  $\lambda$  по импульсу виртуальных фотонов (индекс  $\lambda$ ) мы использовали то же самое инфракрасное обрезание  $\lambda$  по импульсу реальных фотонов. Вычислим теперь сечение  $\Gamma_{\beta\alpha}^\lambda(E, E_T)$  процесса  $\alpha \rightarrow \beta$  при условии, что никакой незарегистрированный фотон не уносит энергию больше  $E$ , а суммарная энергия, приходящаяся на незарегистрированные фотоны, не превосходит  $E_T$  ( $E$  и  $E_T$  выбираются достаточно малыми для того, чтобы оправдать сделанные при выводе (13.3.1) предположения). Нужно проинтегрировать (13.3.5) по энергиям фотонов в области  $E \geq \omega_r \geq \lambda$  и  $\sum_r \omega_r \leq E_T$ , после чего разделить результат на  $N!$  (поскольку при интегрировании были учтены конфигурации, различающиеся лишь перестановкой мягких фотонов) и, наконец, просуммировать по  $N$ . Получаем

$$\Gamma_{\beta\alpha}^\lambda(E, E_T) = \Gamma_{\beta\alpha}^\lambda \sum_{N=0}^{\infty} \frac{A(\alpha \rightarrow \beta)^N}{N!} \int_{E \geq \omega_r \geq \lambda, \sum_r \omega_r \leq E_T} \prod_{r=1}^n \frac{d\omega_r}{\omega_r}. \quad (13.3.6)$$

Если бы не условие  $\sum_r \omega_r \leq E_T$ , интеграл сводился бы к произведению  $N$  интегралов по различным  $\omega_r$ . Учтем ограничение на сумму энергий фотонов, умножив подынтегральное выражение на ступенчатую функцию

$$\theta(E_T - \sum_r \omega_r) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} du \frac{\sin E_T u}{u} \exp \left( iu \sum_r \omega_r \right). \quad (13.3.7)$$

Уравнение (13.3.6) тогда принимает вид

$$\Gamma_{\beta\alpha}^\lambda(E, E_T) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} du \frac{\sin E_T u}{u} \exp \left( A(\alpha \rightarrow \beta) \int_{\lambda}^E \frac{d\omega}{\omega} e^{i\omega u} \right) \Gamma_{\beta\alpha}^\lambda. \quad (13.3.8)$$

Интеграл в показателе можно вычислить в пределе  $\lambda \ll E$ , представив его в виде суммы интеграла от  $(e^{i\omega u} - 1)/\omega$ , в котором можно положить  $\lambda = 0$ , и интеграла от  $1/\omega$ , который берется непосредственно. Переобозначив переменные интегрирования  $u$  и  $\omega$ , для  $\lambda \ll E$  получим

$$\Gamma_{\beta\alpha}^\lambda(E, E_T) \rightarrow \mathcal{F}(E/E_T; A(\alpha \rightarrow \beta)) \left( \frac{E}{\lambda} \right)^{A(\alpha \rightarrow \beta)} \Gamma_{\beta\alpha}^\lambda, \quad (13.3.9)$$

где

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(x; A) &\equiv \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} du \frac{\sin u}{u} \exp\left(A \int_0^x \frac{d\omega}{\omega} (e^{i\omega u} - 1)\right) = \\ &= 1 - \frac{A^2 \theta(x - 1/2)}{2} \int_{1-x}^x \frac{d\omega}{\omega} \ln\left(\frac{x}{1-\omega}\right) + \dots \quad (13.3.10)\end{aligned}$$

Если  $E$  и  $E_T$  одного порядка, а  $A \ll 1$ , то множитель  $\mathcal{F}(E/E_T, A)$  в (13.3.9) слабо отличается от единицы; например,

$$\mathcal{F}(1; A) \approx 1 - \frac{1}{12} \pi^2 A^2 + \dots$$

Поскольку  $A(\alpha \rightarrow \beta) > 0$ , множитель  $(E/\lambda)^{A(\alpha \rightarrow \beta)}$  в (13.3.9) стремится к бесконечности при  $\lambda \rightarrow 0$ . Однако из формулы (13.2.10) следует, что сечение  $\Gamma_{\beta\alpha}^\lambda$  обращается в нуль в этом пределе:

$$\Gamma_{\beta\alpha}^\lambda = \left(\frac{E}{\lambda}\right)^{A(\alpha \rightarrow \beta)} \Gamma_{\beta\alpha}^\Lambda.$$

Подставляя это выражение в (13.3.9), получаем, что параметр инфракрасного обрезания  $\lambda$  сокращается в пределе  $\lambda \ll E$ :

$$\Gamma_{\beta\alpha}^\lambda(E, E_T) \rightarrow \mathcal{F}(E/E_T; A(\alpha \rightarrow \beta)) \left(\frac{E}{\Lambda}\right)^{A(\alpha \rightarrow \beta)} \Gamma_{\beta\alpha}^\Lambda. \quad (13.3.11)$$

Напомним, что энергия  $\Lambda$  представляет собой просто условную границу, отделяющую “мягкие” фотоны (которые явно учтены в (13.3.1)) от “жестких”, эффекты от которых входят в  $\Gamma_{\beta\alpha}^\Lambda$ . Правая часть формулы (13.3.11) не зависит от  $\Lambda$ , поскольку  $\Gamma_{\beta\alpha}^\Lambda \propto \Lambda^A$ . Все же в теориях с малой константой взаимодействия (таких, как квантовая электродинамика) разумно выбирать  $\Lambda$  достаточно малым по сравнению с характерной энергией процесса  $W$ , чтобы все сделанные выше предположения были справедливы для фотонов с энергиями меньше  $\Lambda$ , но при этом достаточно большим для того, чтобы выполнялось соотношение  $A(\alpha \rightarrow \beta) \ln(W/\Lambda) \ll 1$ . Тогда вычисленное в низшем порядке теории возмущений сечение  $\Gamma_{\beta\alpha}^\Lambda$  даст хорошее приближение; основные радиационные поправки при  $E \ll \Lambda$  будут даваться множителем  $(E/\Lambda)^A$  в формуле (13.3.11).

\* \* \*

Аналогичное устранение инфракрасных расходимостей имеет место и для мягких гравитонов [3]. Сечение любого процесса, в котором мягкие гравитоны уносят суммарную энергию не выше  $E$ , оказывает-

ся пропорциональным  $E^B$ , где

$$B = \frac{G}{2\pi} \sum_{nm} \eta_n \eta_m m_n m_m \frac{1 + \beta_{nm}^2}{\beta_{nm} \sqrt{1 - \beta_{nm}^2}} \ln \left( \frac{1 + \beta_{nm}}{1 - \beta_{nm}} \right). \quad (13.3.12)$$

### § 13.4. Инфракрасные расходимости. Общий случай

Связанные с мягкими фотонами инфракрасные расходимости, которые мы рассматривали в этой главе, дают лишь один пример инфракрасных расходимостей, появляющихся в различных физических теориях. Другой пример дает квантовая электродинамика безмассовых заряженных частиц, где даже после устранения расходимостей, обусловленных мягкими фотонами, остается логарифмическая расходимость показателя  $A$  в формуле (13.3.11). Для процесса, в котором все заряженные частицы являются электронами, в соответствии с (13.2.11) и (13.2.7) получаем для величины  $A$  в пределе  $m_e \rightarrow 0$  следующую асимптотику:

$$A \rightarrow -\frac{1}{4\pi^2} \sum_n e_n^2 - \frac{1}{4\pi^2} \sum_{n \neq m} e_n e_m \eta_n \eta_m \ln \left( \frac{2|p_n \cdot p_m|}{m_e^2} \right) \rightarrow -\frac{\ln m_e}{2\pi^2} \sum_n e_n^2.$$

(На последнем шаге мы воспользовались условием сохранения заряда  $\sum_n e_n \eta_n = 0$ .) Инфракрасные расходимости в этом выражении возникают из-за мягких фотонов, излучаемых в направлении импульса какого-либо из “жестких” электронов в начальном или конечном состоянии, но не исчезают и в случае, когда фотон не является мягким, так как знаменатель пропагатора  $(p_n \pm q)^2$  обращается в нуль при  $p_n^2 = q^2 = 0$  и соправленных  $\mathbf{p}_n$  и  $\mathbf{q}$ , а именно при  $p_n^2 = q^2 = 0$  интеграл от даваемого пропагатором множителя<sup>1)</sup> равен

$$\int (p \pm q)^{-2} d^2 \hat{q} = \mp \frac{\pi}{\sqrt{\mathbf{p}^2 \mathbf{q}^2}} \int_0^\pi \frac{\sin \theta d\theta}{1 - \cos \theta},$$

где через  $\theta$  обозначен угол между импульсами фотона и заряженной частицы. Интеграл логарифмически расходится вблизи  $\theta = 0$ .

Конечно, в реальном мире не существует безмассовых электрически заряженных частиц, но при рассмотрении реакций, в которых характерное значение  $E^2$  скалярных произведений  $|p_n \cdot p_m|$  много

<sup>1)</sup> Мы не возводим этот множитель в квадрат, так как расходимость возникает только при интерференции рассматриваемого вклада в элемент  $S$ -матрицы с другими вкладами, связанными с излучением фотона с другой линии  $m \neq n$  заряженной частицы. При  $m = n$  интеграл (13.2.8) пропорционален  $m_n^2$ .

больше  $m_e^2$ , полезно контролировать появление больших логарифмов  $\ln(m_e/E)$ . Ведущие радиационные поправки в таких случаях частично обусловлены слагаемым

$$-\ln\left(\frac{m_e}{E}\right) \sum_n \frac{e_n^2}{2\pi^2}$$

в выражении для  $A$ . Еще более важен случай квантовой хромодинамики, где имеются безмассовые частицы (глюоны), несущие аналогичное электрическому заряду сохраняющееся квантовое число (цвет). Излучение жестких глюонов вдоль импульса жестких цветных частиц в начальном или конечном состоянии приводит к возникновению инфракрасных расходимостей.

Вообще говоря, подобные расходимости не исчезают после суммирования по подходящим наборам конечных состояний. Но Ли и Науэнберг [6] показали, что от инфракрасных расходимостей можно избавиться, если не только просуммировать по подходящим конечным состояниям, но и ввести некоторое распределение вероятностей *начальных* состояний. Далее можно повторить с небольшими изменениями приведенный выше анализ, после чего сразу же станет ясна причина того, почему в случае электродинамики массивных электронов можно было ограничиться суммированием по конечным состояниям.

Для этих целей удобно вернуться к неинвариантной теории возмущений, в рамках которой из (3.2.7) и (3.5.3) получаем для  $S$ -матрицы выражение

$$S_{ba} = \delta(b - a) - 2i\pi\delta(E_a - E_b)T_{ba}, \quad (13.4.1)$$

где

$$T_{ba} = V_{ba} + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{V_{bc_1} V_{c_1 c_2} \cdots V_{c_{\nu} a}}{(E_a - E_{c_1} + i\epsilon) \cdot \dots \cdot (E_a - E_{c_{\nu}} + i\epsilon)} dc_1 \dots dc_{\nu}. \quad (13.4.2)$$

(Каждое из интегрирований по  $c_1, \dots, c_{\nu}$  включает суммирование по спинам и типам частиц в соответствующих состояниях и интегрирование по их 3-импульсам.) Инфракрасные расходимости возникают только тогда, когда знаменатель этого выражения обращается в нуль.

Но не каждое обращение знаменателя в нуль приводит к расходимости. Типичное промежуточное состояние  $c$  может иметь энергию  $E_c = E_a$ , но обычно оно представлено лишь одной внутренней точкой в области интегрирования, и слагаемое  $i\epsilon$  в знаменателе обеспечивает сходимость. Для того чтобы промежуточное состояние  $c$  привело к расходимости, необходимо выполнение равенства  $E_c = E_a$  в *граничной точке* области интегрирования. Это имеет место, например, когда первое промежуточное состояние  $c_1$  в (13.4.2) представляет собой набор частиц в начальном состоянии  $a$ , в котором одна из безмассовых частиц заменена на *джеты* (*струи*), состоящие из произвольно-

го числа безмассовых частиц с почти параллельными импульсами и суммарным импульсом, равным импульсу замененной частицы. Тогда граничная точка, в которой  $E_{c1} = E_a$ , соответствует случаю, когда в каждом из джетов импульсы всех безмассовых частиц сонаправлены. Более общий пример получится, если заменить некоторые частицы в состоянии  $a$  на джеты безмассовых частиц с почти параллельными импульсами и добавить произвольное количество мягких безмассовых частиц. Множество всех таких состояний обозначим через  $D(a)$ . (Строго говоря, нам следовало бы ввести малую энергию  $\Lambda$  и малый угол  $\Theta$ , чтобы четко определить понятия “мягкости” и “почти параллельности”. Но мы не будем останавливаться на зависимостях  $D(a)$  от  $\Lambda$  и  $\Theta$ .) Состояния из  $D(a)$  “опасны” в том смысле, что обращение в нуль знаменателя  $E_a - E_{c1}$  в граничной точке области интегрирования может привести к инфракрасной расходимости. Граничная точка, в которой  $E_{c1} = E_a$ , соответствует случаю, когда в каждом из джетов импульсы всех частиц параллельны, а дополнительные безмассовые частицы имеют нулевую энергию.

Далее, если состояния  $c_1, \dots, c_n$  все принадлежат  $D(a)$ , то и промежуточное состояние  $c_{n+1}$  из  $D(a)$  будет опасным в указанном выше смысле. С другой стороны, если некоторое промежуточное состояние  $c_m$  не принадлежит  $D(a)$ , то более позднее состояние  $c_k$  с  $k > m$  не будет опасным, даже если оно будет лежать в  $D(a)$ . Действительно, конфигурация из жестких частиц или джетов, 3-импульсы которых равны 3-импульсам соответствующих частиц в состоянии  $a$ , будет тогда лишь обычной точкой, лежащей внутри области интегрирования. Совершенно аналогично можно определить множество состояний  $D(b)$ , каждое из которых представляет собой результат замены нескольких безмассовых частиц в состоянии  $b$  на джеты безмассовых частиц с почти параллельными импульсами (полный импульс каждого из джетов совпадает с импульсом замененной частицы) и добавления произвольного числа мягких безмассовых частиц. Промежуточное состояние  $c_m$  будет опасным, если и оно, и все состояния  $c_k$  с  $k > m$  принадлежат множеству  $D(b)$ .

Чтобы выделить вклады опасных состояний, перепишем (13.4.2) в виде

$$T_{ba} = V_{ba} + \sum_{\nu=1}^{\infty} \left( V \left[ \frac{\mathcal{P}_a + \mathcal{P}_b + \mathcal{P}_{\notin a,b}}{E_a - H_0 + i\epsilon} V \right]^{\nu} \right)_{ba}, \quad (13.4.3)$$

где  $\mathcal{P}_a$ ,  $\mathcal{P}_b$  и  $\mathcal{P}_{\notin a,b}$  — проекторы соответственно на  $D(a)$ , на  $D(b)$  и на состояния, не лежащие ни в  $D(a)$ , ни в  $D(b)$ . Здесь мы предполагаем, что ни одна из заряженных частиц в состоянии  $b$  не обладает импульсом, близким к ее импульсу в состоянии  $a$ , так что множества  $D(a)$  и  $D(b)$  не пересекаются. При  $\Lambda \rightarrow 0$  и  $\Theta \rightarrow 0$  опасные промежуточные состояния занимают в фазовом пространстве столь малую об-

ласть, что их вкладом можно пренебречь всегда, когда он не приводит к возникновению инфракрасной расходимости. Степенной ряд (13.4.3) принимает вид

$$T_{ba} = \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{\nu=0}^{\infty} \left( \left[ V \frac{\mathcal{P}_b}{E_a - H_0 + i\epsilon} \right]^r V \left[ \frac{\mathcal{P}_{\notin a,b}}{E_a - H_0 + i\epsilon} V \right]^{\nu} \times \right. \\ \left. \times \left[ \frac{\mathcal{P}_a}{E_a - H_0 + i\epsilon} V \right]^s \right)_{ba}. \quad (13.4.4)$$

Этот результат будет точным, если заменить все проекторы  $\mathcal{P}_{\notin a,b}$  (между крайним слева и крайним справа) на  $\mathcal{P}_a + \mathcal{P}_b + \mathcal{P}_{\notin a,b}$ , а все  $\mathcal{P}_a$  и  $\mathcal{P}_b$  слева и справа заменить на  $\mathcal{P}_a + \mathcal{P}_b$ . Но, как было отмечено выше, эффект от такой замены будет пренебрежимо мал при достаточно малых  $\Lambda$  и  $\Theta$ .

Равенство (13.4.4) можно переписать в более компактном виде

$$T_{ba} = (\Omega_b^{-\dagger} T_S \Omega_a^+ )_{ba}, \quad (13.4.5)$$

где  $\Omega_\alpha^+$  и  $\Omega_\beta^-$  для произвольных состояний  $\alpha$  и  $\beta$  определяются как

$$(\Omega_\alpha^+ )_{ca} \equiv \sum_{r=0}^{\infty} \left( \left[ \frac{\mathcal{P}_\alpha}{E_a - H_0 + i\epsilon} V \right]^r \right)_{ca}, \quad (13.4.6)$$

$$(\Omega_\beta^- )_{db} \equiv \sum_{r=0}^{\infty} \left( \left[ \frac{\mathcal{P}_\beta}{E_b - H_0 + i\epsilon} V \right]^r \right)_{db}, \quad (13.4.7)$$

а  $T_S$  — “безопасный” оператор<sup>2)</sup>:

$$(T_S)_{dc} \equiv \sum_{\nu=0}^{\infty} \left( V \left[ \frac{\mathcal{P}_{\notin c,d}}{E_c - H_0 + i\epsilon} V \right]^{\nu} \right)_{dc}. \quad (13.4.8)$$

Все инфракрасные расходимости теперь выделены в операторные множители  $\Omega_b^-$  и  $\Omega_a^+$ .

Чтобы удалить эти расходимости, достаточно заметить, что с точностью до проекторов на опасные состояния операторы  $\Omega_b^-$  и  $\Omega_a^+$  представляют собой унитарные операторы, переводящие (согласно (3.1.16)) состояния свободных частиц в *out*- и *in*-состояния соответственно. Следовательно, унитарны их ограничения на подпространства  $D(\beta)$  и  $D(\alpha)$  состояний, опасных в случае конечного состояния  $\beta$

<sup>2)</sup> В выражении для  $(\Omega_b^-)_{db}$  мы использовали то, что  $T_{ba}$  вычисляется при  $E_b = E_a$ ; в выражении для  $(T_S)_{dc}$  — то, что проекционные операторы  $\mathcal{P}_a$  уничтожают  $(\Omega_a^+ )_{ca}$ , если энергия  $E_c$  не очень близка к  $E_a$ . Кроме того, из-за наличия в (13.4.5) множителей  $\Omega_b^{-\dagger}$  и  $\Omega_a^+$  имеем  $\mathcal{P}_{\notin c,d} = \mathcal{P}_{\notin a,b}$ .

и начального состояния  $\alpha$ , а именно для произвольных  $\alpha$  и  $\beta$ :

$$\Omega_{\beta}^{-} \mathcal{P}_{\beta} \Omega_{\beta}^{-\dagger} = \mathcal{P}_{\beta}, \quad (13.4.9)$$

$$\Omega_{\alpha}^{+} \mathcal{P}_{\alpha} \Omega_{\alpha}^{+\dagger} = \mathcal{P}_{\alpha}. \quad (13.4.10)$$

*Сечение процесса, следовательно, свободно от инфракрасных расходимостей после суммирования по подпространствам опасных состояний, соответствующих начальному состоянию  $\alpha$  и конечному состоянию  $\beta$ :*

$$\begin{aligned} \sum_{a \in D(\alpha)} \sum_{b \in D(\beta)} |T_{ba}|^2 &= \text{Tr}\{\Omega_{\beta}^{-} \mathcal{P}_{\beta} \Omega_{\beta}^{-\dagger} T_S \Omega_{\alpha}^{+} \mathcal{P}_{\alpha} \Omega_{\alpha}^{+\dagger} T_S^{\dagger}\} = \\ &= \text{Tr}\{\mathcal{P}_{\beta} T_S \mathcal{P}_{\alpha} T_S^{\dagger}\} = \sum_{a \in D(\alpha)} \sum_{b \in D(\beta)} |(T_S)_{ba}|^2. \end{aligned} \quad (13.4.11)$$

Чтобы убедиться, что это действительно решает проблему инфракрасных расходимостей в общем случае, нужно привести доводы в пользу того, что только суммы вида (13.4.11) измеримы в реальных экспериментах. Необходимость суммирования сечений по опасным конечным состояниям представляется естественной, поскольку в эксперименте невозможно отличить вылетающую заряженную (цветную) безмассовую частицу от несущих тот же заряд (цвет) джета безмассовых частиц (с почти параллельными импульсами и той же полной энергией, что и у исходной частицы [7]) и произвольного числа очень мягких квантов. Вопрос о суммировании по начальным состояниям более сложен. Можно исходить из того, что истинно безмассовые частицы всегда рождаются как джеты, сопровождаемые распределенными однородно в некоторой области импульсного пространства мягкими квантами. Насколько мне известно, никто не дал полного доказательства того, что все экспериментально измеримые сечения свободны от инфракрасных расходимостей.

Описанная трудность не возникает в квантовой электродинамике (с массивными заряженными частицами), где, как мы видели ранее, для устранения инфракрасных расходимостей достаточно суммирования по конечным состояниям. Объяснением подобного различия может служить то, что в квантовой электродинамике состояния  $a, b, c, \dots$  представляют собой прямые произведения состояний с определенным числом заряженных частиц и жестких фотонов и состояний, содержащих лишь мягкие фотоны с энергией, меньшей некоторой малой величины  $\Lambda$ . Тогда для процесса, в котором при переходе  $\alpha \rightarrow \beta$  системы из заряженных частиц и жестких фотонов дополнительно рождается набор  $f$  мягких фотонов, уравнение (13.4.5) упрощается:

$$T_{\beta f, \alpha} = (\Omega^{-}(\beta)^{\dagger} \Omega^{+}(\alpha))_{f0} (T_S)_{\beta \alpha}, \quad (13.4.12)$$

Здесь 0 обозначает вакуум мягких фотонов, а  $\Omega^{\pm}$  определяются как

выше, но в редуцированном гильбертовом пространстве, содержащем только состояния мягких фотонов; взаимодействие между фотонами задается исходным гамильтонианом, в котором все заряженные частицы зафиксированы в состояниях  $\alpha$  или  $\beta$ . Как и ранее, эти операторы унитарны в пространстве  $\mathcal{D}$  “опасных” состояний мягких фотонов, так что<sup>3)</sup>

$$\sum_{f \in \mathcal{D}} |T_{\beta f, \alpha 0}|^2 = |(T_S)_{\beta \alpha}|^2 (\Omega^+(\alpha)^\dagger \Omega^-(\beta) \Omega^-(\beta)^\dagger \Omega^+(\alpha))_{00} = \\ = |(T_S)_{\beta \alpha}|^2 (\Omega^+(\alpha)^\dagger \Omega^+(\alpha))_{00} = (T_S)_{\beta \alpha}|^2 \quad (13.4.13)$$

без необходимости суммирования по начальным состояниям.

### § 13.5. Рассеяние мягких фотонов<sup>1)</sup>

При изучении эффектов, связанных с излучением или поглощением мягких фотонов, мы до сих пор рассматривали только процессы  $\alpha \rightarrow \beta$ , которые могли происходить и без участия мягких фотонов. Но можно получить полезные общие результаты и в случае, когда переход  $\alpha \rightarrow \beta$  тривиален, а мягкие фотоны играют в реакции существенную роль. Ниже мы рассмотрим простейший и наиболее важный пример подобного процесса, рассеяние мягкого фотона на массивной частице произвольного типа и спина (в этом случае  $\alpha$  и  $\beta$  — одиночественные состояния). Некоторые сложности здесь возникают из-за того, что ведущий вклад в амплитуду рассеяния мягкого фотона дают не сингулярные (содержащие полюсы) слагаемые, а регулярные слагаемые, связанные с сингулярными через условие сохранения тока.

$S$ -матрицу для рассеяния фотона можно представить в виде

$$S(q, \lambda; p, \sigma \rightarrow q', \lambda'; p', \sigma') = i(2\pi)^4 \sigma^4 (q + p - q' - p') \times \\ \times \frac{\epsilon_\nu^*(\mathbf{q}', \lambda') \epsilon_\mu(\mathbf{q}, \lambda) M_{\sigma', \sigma}^{\nu \mu}(q; \mathbf{p}', \mathbf{p})}{(2\pi)^6 \sqrt{4q^0 q'^0}}, \quad (13.5.1)$$

где  $q$  и  $q'$  — начальный и конечный 4-импульсы фотона,  $p$  и  $p'$  — начальный и конечный 4-импульсы мишени,  $\lambda$  и  $\lambda'$  — начальная и конечная спиральности фотона,  $\epsilon_\nu(\mathbf{q}', \lambda')$  и  $\epsilon_\mu(\mathbf{q}, \lambda)$  — соответствующие

<sup>3)</sup> Множитель  $(E/\Lambda)^A$ , подобный вошедшему в (13.3.11), теперь не возникает, так как мы отождествляем максимальную энергию  $E$  состояний реальных мягких фотонов, по которым ведется суммирование, с максимальной энергией  $\Lambda$  “опасных” фотонных состояний, по которым мы суммировали для нахождения  $\Omega^\pm$ .

<sup>1)</sup> Материал этого параграфа выходит за рамки основного содержания книги и может быть опущен при первом чтении.

векторы поляризации фотона, а  $\sigma$  и  $\sigma'$  — z-компоненты спина мишени в начальном и конечном состояниях. В соответствии с теоремой из § 6.4, амплитуда  $M^{\nu\mu}$  может быть записана в виде

$$(2\pi)^{-3} M_{\sigma', \sigma}^{\nu\mu}(q; \mathbf{p}', \mathbf{p}) = \int d^4x e^{iq \cdot x} (\Psi_{\mathbf{p}', \sigma'}, T\{J^\nu(0), J^\mu(x)\} \Psi_{\mathbf{p}, \sigma}) + \dots, \quad (13.5.2)$$

где через  $J^\mu$  обозначен электромагнитный ток, а многоточие указывает на возможное наличие дополнительных слагаемых (как, например, в теории заряженного скалярного поля, где два фотона взаимодействуют в вершине, а не через отдельные токи). Теперь можно воспользоваться стандартными аргументами “теории полюсов”, изложенными в гл. 10 и уже задействованными нами в § 13.1. После вставки полного набора промежуточных состояний между операторами тока в (13.5.2), интегрирования по  $x$  и выделения одночастичных промежуточных состояний получаем

$$\begin{aligned} M^{\nu\mu}(q; \mathbf{p}', \mathbf{p}) &= \frac{G^\nu(\mathbf{p}', \mathbf{p} + \mathbf{q}) G^\mu(\mathbf{p} + \mathbf{q}, \mathbf{p})}{E(\mathbf{p} + \mathbf{q}) - E(\mathbf{p}) - q^0 - i\epsilon} + \\ &\quad + \frac{G^\mu(\mathbf{p}', \mathbf{p}' - \mathbf{q}) G^\nu(\mathbf{p}' - \mathbf{q}, \mathbf{p})}{E(\mathbf{p}' - \mathbf{q}) - E(\mathbf{p}') + q^0 - i\epsilon} + N^{\nu\mu}(q; \mathbf{p}', \mathbf{p}), \end{aligned} \quad (13.5.3)$$

где  $G^\mu$  — одночастичный матричный элемент тока,

$$(2\pi)^{-3} G_{\sigma', \sigma}^\mu(\mathbf{p}', \mathbf{p}) \equiv (\Psi_{\mathbf{p}', \sigma'}, J^\mu(0) \Psi_{\mathbf{p}, \sigma}) \quad (13.5.4)$$

а  $N^{\nu\mu}$  содержит вклады состояний, отличных от одночастичного, и вклады от взаимодействия двух фотонов. (Произведения в (13.5.3) следует понимать в смысле матричного умножения, хотя мы и не выписали спиновые индексы явно.) О величине  $N^{\nu\mu}$  мы знаем очень мало, за исключением того, что она (в отличие от первых двух слагаемых) не имеет сингулярности при  $q^\mu \rightarrow 0$  и потому может быть разложена по степеням  $q^\mu$ .

Воспользуемся теперь условием сохранения тока (или калибровочной инвариантностью):

$$q_\mu M^{\nu\mu}(q; \mathbf{p}', \mathbf{p}) = 0, \quad (13.5.5)$$

$$\mathbf{q} \cdot G(\mathbf{p} + \mathbf{q}, \mathbf{p}) = [E(\mathbf{p} + \mathbf{q}) - E(\mathbf{p})] G^0(\mathbf{p} + \mathbf{q}, \mathbf{p}), \quad (13.5.6)$$

$$\mathbf{q} \cdot G(\mathbf{p}', \mathbf{p}' - \mathbf{q}) = [E(\mathbf{p}') - E(\mathbf{p}' - \mathbf{q})] G^0(\mathbf{p}', \mathbf{p}' - \mathbf{q}). \quad (13.5.7)$$

В приложении к (13.5.3) эти равенства дают требуемое условие на  $N^{\nu\mu}$ :

$$\begin{aligned} q_\mu N^{\nu\mu}(q; \mathbf{p}', \mathbf{p}) &= \\ &= -G^\nu(\mathbf{p}', \mathbf{p} + \mathbf{q}) G^0(\mathbf{p} + \mathbf{q}, \mathbf{p}) + G^0(\mathbf{p}', \mathbf{p}' - \mathbf{q}) G^\nu(\mathbf{p}' - \mathbf{q}, \mathbf{p}). \end{aligned} \quad (13.5.8)$$

Заметим также, что  $M^{\nu\mu}$  удовлетворяет соотношению “кроссинг-симметрии”:

$$M^{\nu\mu}(q; \mathbf{p}', \mathbf{p}) = M^{\mu\nu}(p' - p - q; \mathbf{p}', \mathbf{p}) \quad (13.5.9)$$

Так как для содержащих полюсы слагаемых в (13.5.3) это соотношение очевидным образом выполнено, оно должно выполняться и для  $N^{\nu\mu}$ :

$$N^{\nu\mu}(q; \mathbf{p}', \mathbf{p}) = N^{\mu\nu}(p' - p - q; \mathbf{p}', \mathbf{p}) \quad (13.5.10)$$

Мы воспользуемся полученными результатами для нахождения первых членов в разложении  $N^{\nu\mu}$  по степеням импульса.

Сначала нам нужно выяснить некоторые свойства разложения одночастичного матричного элемента  $G^\mu(\mathbf{p}, \mathbf{p}')$  по степеням импульсов  $\mathbf{p}'$  и  $\mathbf{p}$ . Из инвариантности относительно пространственного отражения (при условии, что последняя имеет место) следует, что в разложение  $G^0$  входят только четные степени импульсов, а в разложение  $G^i$  (с  $i = 1, 2, 3$ ) — только нечетные. Согласно (10.6.3) член нулевого порядка по импульсу в разложении  $G_{\sigma', \sigma}^0$  равен  $e\delta_{\sigma', \sigma}$ , где  $e$  — заряд частицы. Из условия сохранения тока тогда получаем, что до второго порядка по импульсу

$$(\mathbf{p}' - \mathbf{p}) \cdot \mathbf{G}_{\sigma', \sigma}(\mathbf{p}', \mathbf{p}) = \left( \frac{\mathbf{p}'^2}{2m} - \frac{\mathbf{p}^2}{2m} \right) e\delta_{\sigma', \sigma}.$$

Поэтому линейные по импульсу слагаемые в  $\mathbf{G}$  представляют собой сумму  $e(\mathbf{p}' + \mathbf{p})\delta_{\sigma', \sigma}/2m$  и, возможно, слагаемых, ортогональных  $\mathbf{p}' - \mathbf{p}$ . Из инвариантности относительно вращений следует, что последние должны быть пропорциональны  $(\mathbf{p}' - \mathbf{p}) \times \mathbf{J}_{\sigma', \sigma}$ , где  $\mathbf{J}$  — знакомая нам спиновая матрица заряженной частицы. Суммируя полученные результаты, записываем

$$G^0(\mathbf{p}', \mathbf{p}) = e\mathbf{1} + \text{квадратичные члены}, \quad (13.5.11)$$

$$\mathbf{G}(\mathbf{p}', \mathbf{p}) = \frac{e\mathbf{1}}{2m} (\mathbf{p}' + \mathbf{p}) + \frac{i\mu}{j} \mathbf{J} \times (\mathbf{p}' - \mathbf{p}) + \text{кубические члены}, \quad (13.5.12)$$

где через “1” обозначена единичная спиновая матрица, а “квадратичные” и “кубические” указывают степень отброшенных слагаемых по малым импульсам  $\mathbf{p}$  и  $\mathbf{p}'$ . Коэффициент  $\mu/j$  в (13.5.2) действителен, так как ток эрмитов. Если записать его в таком (включающем спин частицы  $j$ ) виде, то  $\mu$  будет магнитным моментом частицы.

Обратимся теперь к  $N^{\mu\nu}$  и рассмотрим разложение (13.5.8) по степеням малых импульсов  $q^\mu$ ,  $\mathbf{p}$  и  $\mathbf{p}'$ . Полагая в (13.5.8)  $\nu = 0$ , получаем, что  $q_\mu N^{0\mu}$  имеет по меньшей мере второй порядок по этим импульсам. Поскольку не существует постоянного вектора, ортогонального  $q^\mu$ , величина  $N^{0\mu}$  должна быть по крайней мере первого порядка по малым импульсам. Из условия кроссинг-симметрии (13.5.10) следует тогда, что  $N^{i0}$  тоже должна быть по крайней мере первого порядка по

импульсам. Полагая  $\nu = i$  в (13.5.8) и используя (13.5.12), получаем

$$q_k N^{ik} = -\frac{e^2 q^i}{m} + \text{квадратичные члены},$$

откуда

$$N^{ik} = -\frac{e^2}{m} \delta_{ik} + \text{линейные члены}. \quad (13.5.13)$$

Поскольку  $G^i$  не ниже первого порядка по малым импульсам, сингулярные слагаемые в выражении (13.5.3) для  $M^{ik}$  не дают вклада в нулевой порядок. Последний, следовательно, содержит лишь вклад *несингулярного* слагаемого  $N^{ik}$ :

$$M^{ik}(0; 0, 0) = N^{ik}(0; 0, 0) = -\frac{e^2}{m} \delta_{ik} \quad (13.5.14)$$

Теперь мы можем вычислить сечение рассеяния мягкого фотона. Но в этом вычислении нет необходимости: если нам известно, что в пределе нулевого импульса амплитуда рассеяния фотона зависит только от массы и заряда частицы-мишени и имеет второй порядок по этому заряду, мы можем воспользоваться *любым* уже имеющимся результатом вычисления до второго порядка сечения рассеяния фотона на частице любого спина. Например, подойдет формула (8.7.42) для дифференциального сечения рассеяния фотона в квантовой электродинамике:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{e^4}{32\pi^2 m^2} (1 + \cos^2 \theta). \quad (13.5.15)$$

Теперь мы видим, что это общая формула, справедливая в пределе низких энергий для мишени массы  $m$ , заряда  $e$ , любого спина и с произвольными в остальном характеристиками (в том числе для составной или участвующей в сильных взаимодействиях мишени, например атомного ядра.) Гелл-Манн, Голдбергер и Лоу [8] показали, что эти результаты можно усилить и выразить следующий по порядку величины член в амплитуде рассеяния мягкого фотона через массу, заряд и магнитный момент частицы-мишени.

## § 13.6. Приближение внешнего поля<sup>1)</sup>

Интуитивно ясно, что тяжелую заряженную частицу (такую, как атомное ядро) можно приближенно рассматривать как источник классического внешнего поля. В этом параграфе мы подтвердим это предположение и получим представление о границах применимости такой модели.

Рассмотрим фейнмановскую диаграмму или часть фейнмановской диаграммы, в которой тяжелая заряженная частица испускает  $N$  вир-

<sup>1)</sup> Материал этого параграфа выходит за рамки основного содержания книги и может быть опущен при первом чтении.

туальных фотонов с 4-импульсами  $q_1, q_2, \dots, q_N$  и индексами поляризации  $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_N$ . Сумма всех таких диаграмм (или поддиаграмм) без учета  $N$  фотонных пропагаторов дает амплитуду

$$\begin{aligned} & \int d^4x_1 d^4x_2 \dots d^4x_N e^{-iq_1 \cdot x_1} e^{-iq_2 \cdot x_2} \dots e^{-iq_N \cdot x_N} \times \\ & \times \langle \mathbf{p}', \sigma' | T\{J^{\mu_1}(x_1), J^{\mu_2}(x_2), \dots, J^{\mu_N}(x_N)\} | \mathbf{p}, \sigma \rangle \equiv \\ & \equiv \mathcal{G}_{\sigma', \sigma}^{\mu_1, \mu_2 \dots \mu_N}(q_1, q_2, \dots, q_N; p), \quad (13.6.1) \end{aligned}$$

где матричный элемент вычисляется с учетом всех взаимодействий, в которых может участвовать тяжелая частица, включая сильные ядерные взаимодействия. Эта амплитуда имеет кратный полюс при  $q_1, q_2, \dots, q_N \rightarrow 0$ , возникающий от слагаемых в матричном элементе произведения токов, в которых промежуточные состояния представляют собой ту же тяжелую частицу, что и в начальном или конечном состояниях. Этот кратный полюс дает ведущий вклад в (13.6.1), когда все компоненты  $q_1, q_2, \dots, q_N$  малы по сравнению с энергиями и импульсами, связанными с динамикой тяжелой частицы (возможно, составной). В этом случае при помощи изложенных в § 10.2 методов получаем<sup>2)</sup>

$$\begin{aligned} & \mathcal{G}_{\sigma', \sigma}^{\mu_1, \mu_2 \dots \mu_N}(q_1, q_2, \dots, q_N; p) \rightarrow \frac{(-i)^{N-1}}{2p^0(2\pi)^3} (2\pi)^4 \times \\ & \times \delta^4(p' + q_1 + q_2 + \dots + q_N - p) \sum_{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{N-1}} \times \\ & \times \frac{\mathcal{G}_{\sigma', \sigma_1}^{\mu_1}(p) \mathcal{G}_{\sigma_1, \sigma_2}^{\mu_2}(p) \dots \mathcal{G}_{\sigma_{N-1}, \sigma}^{\mu_N}(p)}{[2p \cdot q_1 - i\epsilon][2p \cdot (q_1 + q_2) - i\epsilon] \dots [2p \cdot (q_1 + \dots + q_{N-1}) - i\epsilon]} + \\ & + \text{все перестановки в формулах,} \quad (13.6.2) \end{aligned}$$

где

$$\frac{\mathcal{G}_{\sigma', \sigma}^{\mu}(p)}{2p^0(2\pi)^3} \equiv \langle \mathbf{p}, \sigma' | J^\mu(0) | \mathbf{p}, \sigma \rangle, \quad (13.6.3)$$

а “+ все перестановки” означает, что нам следует просуммировать по всем перестановкам  $N$  фотонов. Для приложений к атомным системам важно, что выражение (13.6.1) справедливо для частиц произвольного спина, участвующих как в электромагнитных, так и в сильных взаимодействиях (например, для атомных ядер).

<sup>2)</sup> В теории возмущений знаменатели определяются знаменателями пропагаторов:

$$\begin{aligned} (p' + q_1 + \dots + q_r)^2 + m^2 - i\epsilon & \rightarrow 2p' \cdot (q_1 + \dots + q_r) - i\epsilon \rightarrow \\ & \rightarrow 2p \cdot (q_1 + \dots + q_r - i\epsilon), \end{aligned}$$

в то время как числители пропагаторов дают множители вида  $\sum u u^\dagger$ , которые вместе с матрицами фотонных вершин образуют матричные элементы (13.6.3). Матрица  $\mathcal{G}^\mu$  отличается от матрицы  $G^\mu$  из предыдущего параграфа на множитель  $2p^0$ .

Заметим также, что для частиц заряда  $Ze$  и произвольного спина матричные элементы электромагнитного тока для перехода между состояниями с одинаковыми 4-импульсами равны<sup>3)</sup>

$$\langle p, \sigma' | J^\mu(0) | p, \sigma \rangle = \frac{Z e p^\mu \delta_{\sigma', \sigma}(p)}{p^0 (2\pi)^3}, \quad (13.6.4)$$

откуда

$$\mathcal{G}_{\sigma', \sigma}^\mu(p) = 2 Z e p^\mu \delta_{\sigma', \sigma}. \quad (13.6.5)$$

Важно, что все матрицы (13.6.5) коммутируют друг с другом, так что их произведение можно вынести за сумму по перестановкам:

$$\begin{aligned} & \mathcal{G}_{\sigma', \sigma}^{\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_N}(q_1, q_2, \dots, q_N; p) \rightarrow \\ & \rightarrow \frac{(-i)^{N-1} (Ze)^N p^{\mu_1} p^{\mu_2} \dots p^{\mu_N}}{p^0 (2\pi)^3} (2\pi)^4 \delta^4(p' + q_1 + q_2 + \dots + q_N - p) \times \\ & \times \delta_{\sigma', \sigma} \left[ \frac{1}{[p \cdot q_1 - i\epsilon][p \cdot (q_1 + q_2) - i\epsilon] \dots [p \cdot (q_1 + \dots + q_{N-1}) - i\epsilon]} + \right. \\ & \left. + \text{все перестановки в формулах} \right]. \quad (13.6.6) \end{aligned}$$

В ведущем порядке по  $q$  дельта-функцию можно представить в виде

$$\begin{aligned} & \delta^4(p' + q_1 + \dots + q_N - p) = \\ & = p^0 \delta^3(\mathbf{p}' + \mathbf{q}_1 + \dots + \mathbf{q}_N - \mathbf{p}) \delta(p \cdot (q_1 + \dots + q_N)). \quad (13.6.7) \end{aligned}$$

К счастью, результат суммирования по перестановкам выглядит существенно проще, чем отдельные слагаемые. Для  $p \cdot (q_1 + \dots + q_N) = 0$  имеем

$$\begin{aligned} & \left[ \frac{1}{[p \cdot q_1 - i\epsilon][p \cdot (q_1 + q_2) - i\epsilon] \dots [p \cdot (q_1 + \dots + q_{N-1}) - i\epsilon]} + \right. \\ & \left. + \text{все перестановки в формулах} \right] = \\ & = (2i\pi)^{N-1} \delta(p \cdot q_1) \delta(p \cdot q_2) \dots \delta(p \cdot q_{N-1}). \quad (13.6.8) \end{aligned}$$

Например, при  $N = 2$

$$\frac{1}{p \cdot q_1 - i\epsilon} + \frac{1}{p \cdot q_2 - i\epsilon} = \frac{1}{p \cdot q_1 - i\epsilon} + \frac{1}{-p \cdot q_1 - i\epsilon} = 2i\pi \delta(p \cdot q_1).$$

Общую формулу (13.6.8) проще всего получить как результат фурье-

<sup>3)</sup> Проще всего показать это, рассмотрев лоренцеву систему отсчета, в которой частица покоятся. Из инвариантности относительно вращений тогда следует, что пространственные компоненты матричного элемента тока равны нулю, а временная компонента пропорциональна  $\delta_{\sigma', \sigma}$  (с коэффициентом, не зависящим от  $\sigma$  и  $\sigma'$ ). Коэффициент пропорциональности дается выражением (10.6.3); после преобразования Лоренца к исходной системе отсчета получаем (13.6.4).

преобразования тождества

$$\theta(\tau_1 - \tau_2)\theta(\tau_2 - \tau_3) \dots \theta(\tau_{N-1} - \tau_N) + \\ + \text{все перестановки в формулах} = 1.$$

После подстановки (13.6.8) в (13.6.6) получаем окончательный результат для амплитуды (13.6.1):

$$\mathcal{G}_{\sigma',\sigma}^{\mu_1,\mu_2\dots\mu_N}(q_1,q_2,\dots,q_N;p) \rightarrow \\ \rightarrow (Ze)^N (2\pi)^N \delta_{\sigma',\sigma} p^{\mu_1} p^{\mu_2} \dots p^{\mu_N} \delta^3(\mathbf{p}' + \mathbf{q}_1 + \dots + \mathbf{q}_N - \mathbf{p}) \times \\ \times \delta(p \cdot q_1) \delta(p \cdot q_2) \dots \delta(p \cdot q_N). \quad (13.6.9)$$

Это выражение справедливо и для релятивистских, и для медленно движущихся частиц. С его помощью можно получить приближение “Вайцзеккера–Вильямса” [9] для рассеяния заряженных частиц. В частном случае нерелятивистской заряженной частицы с  $|\mathbf{p}| \ll p^0$  можно упростить (13.6.9) до

$$\mathcal{G}_{\sigma',\sigma}^{\mu_1,\mu_2\dots\mu_N}(q_1,q_2,\dots,q_N;p) \rightarrow (Ze)^N (2\pi)^N n^{\mu_1} n^{\mu_2} \dots n^{\mu_N} \times \\ \times \delta^3(\mathbf{p}' + \mathbf{q}_1 + \dots + \mathbf{q}_N - \mathbf{p}) \delta(q_1^0) \delta(q_2^0) \dots \delta(q_N^0) \delta_{\sigma',\sigma}, \quad (13.6.10)$$

где  $n$  — единичный времениподобный вектор

$$n^0 = 1, \quad \mathbf{n} = 0.$$

Предположим теперь, что некоторая тяжелая нерелятивистская частица заряда  $Ze$  с нормированной на единицу волновой функцией  $\chi_\sigma(\mathbf{p})$  появляется и в начальном, и в конечном состояниях. Переходя к фурье-представлению дельта-функции в (13.6.10), получим для матричного элемента  $\mathcal{G}$  выражение

$$\int d^3 p d^3 p' \chi_{\sigma'}^*(\mathbf{p}') \chi_\sigma(\mathbf{p}) \mathcal{G}_{\sigma',\sigma}^{\mu_1,\mu_2\dots\mu_N}(q_1,q_2,\dots,q_N;p) \rightarrow \\ \rightarrow \int d^3 X \sum_\sigma |\psi_\sigma(\mathbf{X})|^2 \prod_{r=1}^N 2\pi Z e n^{\mu_r} \delta(q_r^0) e^{-i\mathbf{q}_r \cdot \mathbf{X}}, \quad (13.6.11)$$

где  $\psi(\mathbf{x})$  — волновая функция в координатном представлении,

$$\psi_\sigma(\mathbf{X}) \equiv (2\pi)^{-3/2} \int d^3 p \chi_\sigma(\mathbf{p}) e^{-i\mathbf{p} \cdot \mathbf{X}}. \quad (13.6.12)$$

Из-за факторизации (13.6.11) учет влияния тяжелой заряженной частицы эквивалентен введению новых вершин в правила Фейнмана в импульсном пространстве. Каждая такая вершина соответствует взаимодействию легкой дираковской частицы заряда  $-e$  (например, электрона) с внешним полем и добавляет в выражение для полной амплитуды множитель<sup>4)</sup> (с учетом фотонного пропагатора и

<sup>4)</sup> Первый множитель здесь — обычный множитель  $i$ , сопровождающий входящие в лагранжиан взаимодействия константы в правилах Фейнмана.

электрон-фотонной вершины)

$$i \int d^4 q \left[ \frac{-i}{(2\pi)^4} \frac{1}{q^2 - i\epsilon} \right] [2\pi Z e n_\mu \delta(q^0) e^{-i\mathbf{q} \cdot \mathbf{X}}] [(2\pi)^4 e \gamma^\mu \delta^4(k - k' - q)], \quad (13.6.13)$$

где  $k$  и  $k'$  — начальный и конечный 4-импульсы электрона. Чтобы получить полную амплитуду рассеяния, нужно произвести усреднение по координате  $\mathbf{X}$  тяжелой частицы с весом  $\sum_\sigma |\psi_\sigma(\mathbf{X})|^2$ . Такой же множитель (13.6.13) мы получили бы, добавив в лагранжиан взаимодействия новое слагаемое

$$\mathcal{L}_{\text{ext}}(x) = \mathcal{A}_\mu(x) J_e^\mu(x), \quad (13.6.14)$$

где  $J_e^\mu \equiv -ie\bar{\Psi}\gamma^\mu\Psi$  — электромагнитный ток электронов, а  $\mathcal{A}^\mu$  — векторный потенциал внешнего поля:

$$\mathcal{A}_\mu(x) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4 q e^{iq \cdot x} \left[ \frac{2\pi Z e n_\mu \delta(q^0) e^{-i\mathbf{q} \cdot \mathbf{X}}}{q^2 - i\epsilon} \right]. \quad (13.6.15)$$

Конечно же, это просто обычный кулоновский потенциал:

$$\mathcal{A}^0(x) = \frac{Ze}{4\pi|\mathbf{x} - \mathbf{X}|}, \quad \mathcal{A}(x) = 0. \quad (13.6.16)$$

При наличии нескольких тяжелых заряженных частиц (например, в случае молекулы) потенциал  $\mathcal{A}^\mu$  будет суммой слагаемых вида (13.6.16) с соответствующими частицами координатами  $\mathbf{X}$  и зарядами  $Ze$ .

Полезно представлять себе, суммированию каких диаграмм эквивалентно использование приближения внешнего поля. Рассмотрим взаимодействие одного электрона (релятивистского или нерелятивистского) с одной тяжелой заряженной частицей (такой, как протон или дейtron). Если пренебречь всеми остальными взаимодействиями, то фейнмановские диаграммы для рассеяния электрона в результате его взаимодействия с внешним полем — это диаграммы, на которых на электронную линию добавлено произвольное количество вершин (13.6.4) типа электрон-(внешнее поле) (см. рис. 13.4). Но из способа суммирования по перестановкам в (13.6.2) следует, что эти диаграммы соответствуют диаграммам исходной теории, на которых концы выходящих с линии электрона фотонных линий располагаются в различном порядке на линии тяжелой заряженной частицы (см. рис. 13.5). “Лестничные диаграммы” без пересечений (помеченные на рис. 13.5 символом “L”) дают доминирующий вклад в сумму, только если и электрон, и тяжелая заряженная частица являются нерелятивистскими. (В терминах неинвариантной теории возмущений такие диаграммы содержат вклады от промежуточных состояний с теми же частицами, что и в начальном или конечном состоянии — с малыми энергиями в знаменателях в случае нерелятивистских электрона и заряженной частицы; остальные диаграммы на рис. 13.5 соответствуют промежуточным состояниям либо с лишними фотонами, либо

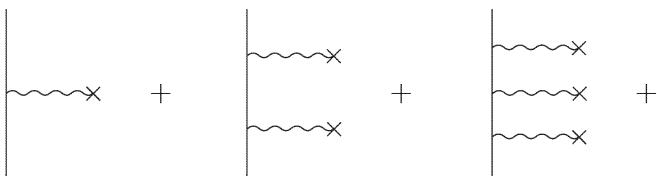


Рис. 13.4. Диаграммы для рассеяния электрона во внешнем электромагнитном поле. Прямая линия соответствует электрону, волнистые линии с крестами на концах представляют его взаимодействие с внешним полем

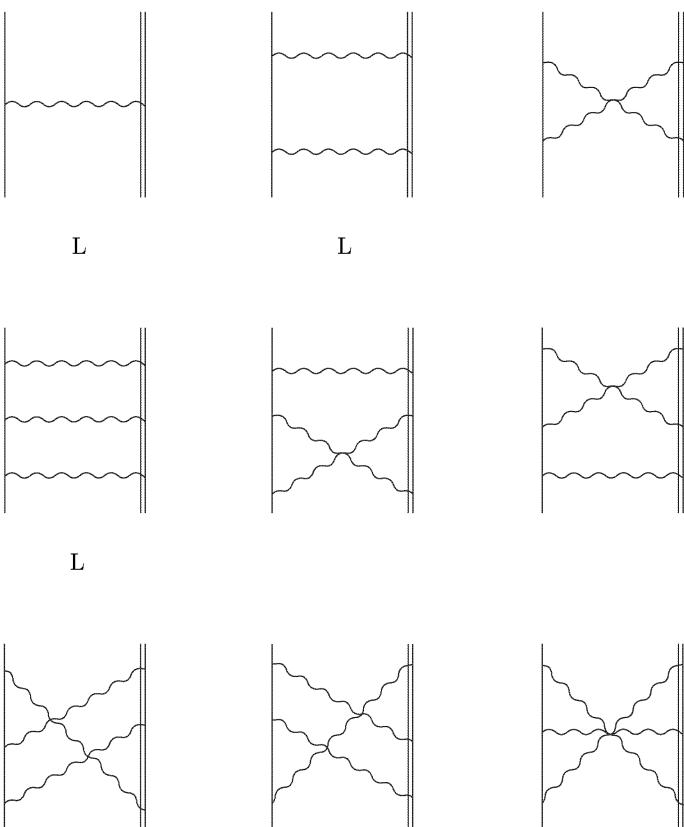


Рис. 13.5. Диаграммы для рассеяния электрона на тяжелой заряженной частице-мишени, в пределе большой массы мишени дающие тот же результат, что и диаграммы на рис. 13.4. Здесь одинарная прямая линия соответствует электрону, двойная прямая линия — тяжелой заряженной частице, волнистые линии — виртуальным фотонам. Помеченные символом “L” диаграммы называются лестничными; их вклад является доминирующим, когда электрон и тяжелая частица нерелятивистские

с лишними парами электрон–позитрон, либо с лишними парами тяжелая частица–античастица, вклады которых подавлены большими энергиями в знаменателях.) Лестничные диаграммы можно просуммировать, решив интегральное уравнение, известное как уравнение Бете–Солпитера [10]. Нет оснований выделять такое подмножество диаграмм, если только обе частицы не являются нерелятивистскими; но в последнем случае уравнение Бете–Солпитера сводится к обычному нерелятивистскому уравнению Шредингера с релятивистскими поправками, описывающими спин–орбитальное взаимодействие (которые можно рассматривать как малые возмущения). Следует отметить, что теория релятивистских эффектов и радиационных поправок в связанных состояниях пока что не вполне удовлетворительна.

При выводе выражения (13.6.16) для внешнего поля мы учитывали взаимодействие тяжелой заряженной частицы с электромагнитным полем только в ведущем порядке по импульсу фотона. Имеются поправки высших порядков по импульсу фотона, связанные с магнитным дипольным моментом тяжелой частицы, ее электрическим квадрупольным моментом и т.д. Кроме того, есть радиационные поправки, связанные с фейнмановскими диаграммами, не изображенными на рис. 13.4 — например, с диаграммами, на которых фотон испускается и поглощается на электронной линии или в фотонные линии вставлены электронные петли. В следующей главе мы увидим, что при рассмотрении связанных состояний изображенные на рис. 13.4 диаграммы должны быть просуммированы во всех порядках, но остальные поправки высших порядков по импульсу фотона или заряду  $e$  могут быть учтены как возмущения этих диаграмм.

## Задачи

1. Рассмотрим процесс  $e^+ + e^-$  в системе центра масс при энергии 1 ГэВ и угле рассеяния  $90^\circ$ . Пусть при измерении энергий пионов в конечном состоянии мы определили, что на долю мягких фотонов пришлась энергия, не превосходящая  $E_T \ll 1$  ГэВ. Как зависит сечение процесса от  $E_T$ ?
2. Рассмотрим безмассовую бессpinовую частицу, описываемую скалярным полем  $\phi$ . Предположим, что плотность лагранжиана взаимодействия дается для нее выражением  $\phi(x)J(x)$ , где в  $J(x)$  входят только массивные поля. Получите формулу для вероятности излучения в процессе  $\alpha \rightarrow \beta$  произвольного числа мягких скалярных частиц суммарной энергии не выше малой величины  $E_T$ . Учитывайте радиационные поправки от мягких скалярных частиц с энергией не выше малой энергии  $\Lambda$ .
3. Получите следующий член в выражении (13.5.14) для рассеяния низкоэнергетичного фотона на произвольной мишени.

4. Предположим, что частица спина 1 с очень малой массой  $m$ , описываемая векторным полем  $V^\mu(x)$ , взаимодействует лишь с намного более тяжелым фермионом, представленным дираковским полем  $\psi(x)$ , причем плотность лагранжиана взаимодействия равна  $gV^\mu\bar{\psi}\gamma_\mu\psi$ . Пусть тяжелый фермион обычно распадается на невзаимодействующие с  $V^\mu$  частицы с выделением энергии  $W \gg m$ . Рассмотрим такой процесс распада, где наряду с обычными продуктами дополнительно испускается частица  $V^\mu$  с энергией не выше  $E$  (где  $W \gg E \gg m$ ). Как вероятность такого процесса зависит от  $E$  и  $m$ ? Не учитывайте радиационные поправки.

5. Докажите равенство (13.6.8) при  $p \cdot (q_1 + \dots + q_N) = 0$ .

## Литература

1. Bloch F., Nordsieck A. // Phys. Rev. **37**, 54 (1937); Yennie D.R., Frautschi S.C., Suura H. // Ann. Phys. (N.Y.). **13**, 379 (1961). Также см. Mahantappa K.T. // Ph.D. Thesis at Harvard University (1961), unpublished.
2. Weinberg S. // Phys. Lett. **9**, 357 (1964); Phys. Rev. **135**, B1049 (1964).
3. Weinberg S. // Phys. Rev. **140**, B515 (1965).
4. Эта фаза появляется в ряде теории возмущений для нерелятивистского кулоновского рассеяния. См. Dalitz R.H. // Proc. Roy. Soc. London. **206**, 509 (1951).
5. См., например, Schiff L.I. Quantum Mechanics. McGraw-Hill, N.Y., 1949. Section 20. [Рус. пер.: Шифф Л. Квантовая механика.—М.: Изд-во иностранной литературы, 1959.]
6. Lee T.D., Nauenberg M. // Phys. Rev. **133**, B1549 (1964). Также см. Kinoshita T. // J. Math. Phys. **3**, 650 (1962); Sterman G., Weinberg S. // Phys. Rev. Lett. **39**, 1416 (1977).
7. Sterman G., Weinberg S., ссылка 6.
8. Low F.E. // Phys. Rev. **96**, 1428 (1954); Gell-Mann M., Goldberg M.L. // Phys. Rev. **96**, 1433 (1954). Также см. Weinberg S. // B Lectures on Elementary Particles and Quantum Field Theory — 1970 Brandeis Summer Institute in Theoretical Physics, ed. by S. Deser, M. Grisaru, H. Pendleton. MIT Press, Cambridge, MA, 1970.
9. Williams E.J. // Kgl. Dan. Vid. Sel. Mat.-fys. Medd. **XIII**, No. 4 (1935).
10. Bethe H.A., Salpeter E.E. // Phys. Rev. **82**, 309 (1951); **84**, 1232 (1951).

## СВЯЗАННЫЕ СОСТОЯНИЯ ВО ВНЕШНИХ ПОЛЯХ

Вычисляя радиационные поправки в гл. 11, мы рассматривали только низшие порядки теории возмущений. Однако существует очень важный класс задач, для решения которых приходится с самого начала учитывать фейнмановские диаграммы, имеющие произвольный порядок по константе связи. К числу таких задач относится проблема описания связанных состояний. В электродинамике примером связанных состояний являются обычные атомы и молекулы, а также такие экзотические системы, как позитроний и мюоний.

Нетрудно понять, что для решения подобного рода задач обычная теория возмущений не годится. Будем, например, рассматривать амплитуду электрон-протонного рассеяния как функцию энергии в системе центра масс  $E$ . Как мы видели в § 10.3, возможность образования связанных состояния (основного состояния атома водорода) предполагает наличие у амплитуды рассматриваемого процесса полюса в точке

$$E = m_p + m_e - 13,6 \text{ эВ.}$$

Однако ни в одном порядке теории возмущений такой полюс не возникает. Довольно очевидно, что в этом случае он должен возникать в результате суммирования по всем диаграммам.

Причину такой расходимости ряда теории возмущений понять нетрудно, если рассмотреть вместо фейнмановских диаграмм времененоупорядоченные диаграммы старой теории возмущений. Предположим, что в системе центра масс обе частицы, электрон и протон, имеют импульс  $q \ll m_e$ . Рассмотрим промежуточное состояние, в котором импульсы электрона и протона различны, но по-прежнему являются величинами порядка  $q$ . Этому состоянию соответствует дополнительный энергетический множитель порядка  $[q^2/m_e]^{-1}$ . Кроме того, необходимо принять во внимание матричный элемент кулоновского взаимодействия. Он представляет собой величину порядка  $e^2/q^2$  (фурье-преобразование потенциала  $e^2/r$ ), а соответствующий интеграл по импульсному пространству — величину порядка  $q^3$ . В результате находим, что каждое дополнительное кулоновское взаимодействие приводит к появлению общего множителя порядка

$$[q^2/m_e]^{-1} [e^2/q^2] [q^3] = e^2 m_e / q.$$

Таким образом, теорией возмущений нельзя пользоваться в тех случаях, когда  $q$  меньше или порядка  $e^2 m_e$ , или, что то же самое, когда кинетическая и потенциальная энергии (которые суть величины по-

рядка  $q^2/m_e$ ) не превосходят  $e^4 m_e$  (что по порядку величины равно энергии связи электрона в атоме водорода).

Наша задача состоит в том, чтобы понять, как можно использовать теорию возмущений для вычисления радиационных поправок в задаче о связанных состояниях. Мы должны научиться суммировать те диаграммы, которые суммировать нужно, и выявлять те диаграммы, для которых такой необходимости нет.

### § 14.1. Уравнение Дирака

В этой главе мы рассмотрим задачи, в которых связанные состояния возникают из-за кулоновского взаимодействия электронов (или мюонов) с тяжелыми заряженными частицами типа атомных ядер. Как мы видели в § 13.6, такое взаимодействие можно учесть, прибавляя к лагранжиану член<sup>1)</sup>, описывающий эффекты, связанные с *c*-числовым внешним векторным потенциалом  $\mathcal{A}^\mu(x)$ :

$$\mathcal{L}_{\mathcal{A}} = -ie\bar{\Psi}\gamma^\mu\Psi\mathcal{A}_\mu - \frac{1}{2}(Z_3 - 1)(\partial^\mu\mathcal{A}^\nu - \partial^\nu\mathcal{A}^\mu)(\partial_\mu\mathcal{A}_\nu - \partial_\nu\mathcal{A}_\mu) - ie(Z_2 - 1)\mathcal{A}_\mu\bar{\Psi}\gamma^\mu\Psi. \quad (14.1.1)$$

Последняя формула получается из (11.1.6) заменой в сумме  $\mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_1$  квантового векторного потенциала  $A^\mu$  на  $A^\mu + \mathcal{A}^\mu$ . Например, в случае одной тяжелой частицы с зарядом  $Ze$ , находящейся в начале координат, мы получаем

$$\mathcal{A}^0(x) = \frac{Ze}{4\pi|\mathbf{x}|}, \quad \mathcal{A}(x) = 0. \quad (14.1.2)$$

Именно в случае взаимодействия (11.4.1) приходится учитывать диаграммы всех порядков. В этом параграфе мы изучим теорию на примере только этого взаимодействия. Рассмотрение же радиационных поправок мы отложим до следующего параграфа.

Один из подходов к решению подобных задач физикам известен почти с детства. Он состоит в нахождении решений волнового уравнения Дирака при наличии внешнего поля. Вывод здесь этого уравнения может показаться не совсем уместным. Однако как было отмечено в гл. 1, первоначально Дирак ввел его, поскольку релятивистское уравнение Шредингера не выдерживало критики. Кроме того, в процессе вывода мы получим условия нормировки, которым должны удовлетворять решения уравнения Дирака. Эти условия в рамках

<sup>1)</sup> В этой главе мы вернемся к прежним обозначениям, используя заглавную букву  $\Psi$  для электронного поля в представлении Гейзенберга и строчную букву  $\psi$  для дираковского поля, эволюция которого во времени определяется исключительно *c*-числовым внешним полем  $\mathcal{A}^\mu(x)$ .

излагаемого подхода кажутся несколько искусственными. Решения уравнения Дирака, найденные здесь, будут использованы нами для изучения радиационных поправок в следующем параграфе.

Мы будем работать в представлении взаимодействия, причем в качестве гамильтониана, определяющего зависимость операторов от времени, будет выступать гамильтониан системы, состоящей из электромагнитного и электронного полей, взаимодействие которых описывается выражением (14.1.1). Электронное поле в этом представлении удовлетворяет уравнению

$$\left[ \gamma^\lambda \frac{\partial}{\partial x^\lambda} + m + ie\gamma^\lambda \mathcal{A}_\lambda(x) \right] \psi(x) = 0. \quad (14.1.3)$$

Это уравнение не является уравнением Дирака в том первоначальном смысле, который ему придавал сам автор [1], поскольку  $\psi(x)$  здесь является квантовым оператором, а не *c*-числовой волновой функцией. Обычные же *c*-числовые *волновые функции* Дирака определяются формулами

$$u_N(x) \equiv (\Phi_0, \psi(x)\Phi_N), \quad (14.1.4)$$

$$v_N(x) \equiv (\Phi_N, \psi(x)\Phi_0), \quad (14.1.5)$$

где через  $\Phi_N$  обозначен полный ортонормированный набор векторов состояния ( $\Phi_0$  соответствует вакууму). Из уравнения (14.1.3) непосредственно следует, что функции (14.1.4) и (14.1.5) удовлетворяют однородному уравнению Дирака

$$\begin{aligned} \left[ \gamma^\lambda \frac{\partial}{\partial x^\lambda} + m + ie\gamma^\lambda \mathcal{A}_\lambda(x) \right] u_N(x) = \\ = \left[ \gamma^\lambda \frac{\partial}{\partial x^\lambda} + m + ie\gamma^\lambda \mathcal{A}_\lambda(x) \right] v_N(x) = 0. \end{aligned} \quad (14.1.6)$$

Из равновременных антисимметрических соотношений, которым удовлетворяют дираковские поля, мы также можем вывести условие нормировки. Эти антисимметрические соотношения не зависят от взаимодействия (14.1.1) и поэтому имеют тот же вид, что и соотношения для свободных полей:

$$\{\psi(\mathbf{x}, t), \bar{\psi}(\mathbf{y}, x)\} = i\gamma^0\delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}). \quad (14.1.7)$$

Взяв вакуумное среднее и вставляя сумму по состояниям  $\Phi_N$ , мы находим

$$\sum_N u_N(\mathbf{x}, t) u_N^\dagger(\mathbf{y}, t) + \sum_N v_N(\mathbf{x}, t) v_N^\dagger(\mathbf{y}, t) = \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}). \quad (14.1.8)$$

Ясно, что сумма по  $N$  включает интеграл по непрерывному множеству состояний, а также сумму по всем дискретным связанным состояниям.

Мы главным образом интересуемся внешними полями, не зависящими от времени (примером такого поля является (14.1.2)). Векторы  $\Phi_N$  оказываются тогда собственными состояниями гамильтониана

(с учетом взаимодействия (14.1.1)), причем соответствующие собственные значения энергии равны  $E_N$ . В силу инвариантности относительно сдвигов во времени функции  $u_N(x)$  и  $v_N(x)$  зависят от времени следующим образом:

$$u_N(\mathbf{x}, t) = e^{-iE_N t} u_N(\mathbf{x}), \quad v_N(\mathbf{x}, t) = e^{+iE_N t} v_N(\mathbf{x}). \quad (14.1.9)$$

Однородные уравнения Дирака (14.1.6) в этом случае принимают вид

$$i\gamma^0[\gamma \cdot \nabla + m + ie\gamma^\lambda \mathcal{A}_\lambda(x)]u_N(\mathbf{x}) = E_N u_N(\mathbf{x}), \quad (14.1.10)$$

$$i\gamma^0[\gamma \cdot \nabla + m + ie\gamma^\lambda \mathcal{A}_\lambda(x)]v_N(\mathbf{x}) = -E_N v_N(\mathbf{x}). \quad (14.1.11)$$

Знак минус в правой части (14.1.11) свидетельствует о том, что функция  $v_N$  есть известное решение Дирака с “отрицательной энергией”. Как видно из (14.1.8), наличие решений с отрицательной энергией необходимо для существования полного набора волновых функций. Конечно, для достаточно слабых внешних полей теория не содержит состояний с отрицательной энергией. По этой причине все  $E_N$  оказываются положительными. Имеется все же важное отличие между состояниями с  $u_N = 0$  и состояниями с  $v_N = 0$ : из определений (14.1.4) и (14.1.5) следует, что для заданной частицы равенства  $u_N \neq 0$  или  $v_N \neq 0$  могут выполняться только, если она имеет заряд  $-e$  или  $+e$  соответственно. Именно в этом смысле понимается имеющееся соответствие “отрицательно-частотных” решений уравнений Дирака и античастиц. Это соответствие, однако, никак не связано с внутренней структурой уравнения Дирака. Более того, оно даже никак не связано со спином электрона.

Из волновых уравнений Дирака (14.1.10) и (14.1.11) мы можем легко увидеть, что волновые функции с различной энергией ортогональны друг другу. Это можно записать следующим образом:

$$(E_M - E_N^*)(u_N^\dagger u_M) = \nabla \cdot (u_N^\dagger i\gamma^0 \gamma u_M).$$

Поэтому если выражение  $|\mathbf{x}|^2(u_N^\dagger i\gamma^0 \gamma u_M)$  ограничено при  $|\mathbf{x}| \rightarrow 0$  и  $|\mathbf{x}| \rightarrow \infty$ , то

$$\int d^3x (u_N^\dagger(\mathbf{x}) u_M(\mathbf{x})) = 0, \quad \text{если } E_N \neq E_M^*. \quad (14.1.12)$$

Используя аналогичные граничные условия для  $v_N$ , мы находим, что

$$\int d^3x (v_N^\dagger(\mathbf{x}) v_M(\mathbf{x})) = 0, \quad \text{если } E_N \neq E_M^*, \quad (14.1.13)$$

$$\int d^3x (u_N^\dagger(\mathbf{x}) v_M(\mathbf{x})) = 0, \quad \text{если } E_N \neq -E_M^*. \quad (14.1.14)$$

Полагая  $N = M$ , получаем из (14.1.12) и (14.1.13), что все энергии являются вещественными. Поэтому в (14.1.12)–(14.1.14) мы можем опустить знак комплексного сопряжения у  $E_M$ . Находим, что функции  $u$ , соответствующие разным энергиям, ортогональны (пока поле

достаточно слабое; в противном случае, возникают *состояния* с отрицательной энергией), функции  $v$ , соответствующие разным энергиям, ортогональны. Кроме того, функции  $u$  ортогональны всем  $v$ . Выбирая надлежащим образом дискретные квантовые числа, характеризующие состояния с фиксированной энергией, мы всегда можем добиться выполнения равенств

$$\int d^3x (u_N^\dagger(\mathbf{x})u_M(\mathbf{x})) = 0, \quad \text{если } N \neq M, \quad (14.1.15)$$

$$\int d^3x (v_N^\dagger(\mathbf{x})v_M(\mathbf{x})) = 0, \quad \text{если } N \neq M, \quad (14.1.16)$$

$$\int d^3x (u_N^\dagger(\mathbf{x})v_M(\mathbf{x})) = 0. \quad (14.1.17)$$

Умножая уравнение (14.1.8) справа на  $u_M(\mathbf{y})$  или  $v_M(\mathbf{y})$ , получаем, что эти волновые функции удовлетворяют следующим нормировочным соотношениям:

$$\int d^3y (u_N^\dagger(\mathbf{y})u_M(\mathbf{y})) = \int d^3y (v_N^\dagger(\mathbf{y})v_M(\mathbf{y})) = \delta_{NM}, \quad (14.1.18)$$

где  $\delta_{NM}$  — произведение символа Кронекера на дельта-функцию в пространстве импульсов. Нормировка выбрана таким образом, чтобы  $\sum_N \delta_{NM} = 1$ . Такие нормировочные условия не связаны напрямую с вероятностной интерпретацией волновых функций Дирака, а следуют из антисимметрических соотношений для полей (14.1.7).

Рассмотрим теперь случай чисто электростатического внешнего поля с  $\mathcal{A} = 0$ . Матрицы Дирака в стандартном представлении имеют следующий вид:

$$\gamma = i \begin{pmatrix} 0 & -\sigma \\ \sigma & 0 \end{pmatrix}, \quad i\gamma^0 = \beta = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Здесь  $\sigma$  — обычный трехвектор двумерных матриц Паули, “1” и “0” — двумерные единичная и нулевая матрицы. Введем двухкомпонентные волновые функции  $f_N$  и  $g_N$ , положив

$$u_N = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} f_N + ig_N \\ f_N - ig_N \end{pmatrix}. \quad (14.1.19)$$

Уравнение на собственные значения энергии (14.1.10) сводится к

$$(\sigma \cdot \nabla) f_N = (E_N + e\mathcal{A}^0 + m) g_N, \quad (14.1.20)$$

$$(\sigma \cdot \nabla) g_N = -(E_N + e\mathcal{A}^0 - m) f_N. \quad (14.1.21)$$

В нерелятивистском случае  $e\mathcal{A}^0 r \approx Z\alpha \ll 1$ , откуда следует, что энергия связи  $m - E_N$  имеет порядок  $Z^2 \alpha^2 m$ , а оператор градиента — порядок  $Z\alpha m$ . В результате  $f_N \sim Z\alpha g_N$ . (Чтобы найти позитронные волновые функции, мы должны везде заменить  $E_N$  на  $-E_N$ . При этом

оказывается, что  $g_N \sim Z\alpha f_N$ .) Мы вернемся к нерелятивистскому случаю в конце этого параграфа.

Физические состояния можно классифицировать как четные или нечетные относительно пространственной инверсии:

$$\mathbf{P}\Phi_N = \eta_N \Phi_N, \quad (14.1.22)$$

где  $\eta_N$  принимает значения  $\pm 1$ . Вспоминая, что внутренняя четность электрона равна  $+1$ , находим закон, по которому преобразуется поле Дирака при инверсии пространства:

$$\mathbf{P}\psi(\mathbf{x}, t)\mathbf{P}^{-1} = \beta\psi(-\mathbf{x}, t).$$

Отсюда и из формул (14.1.4), (14.1.22) следует, что для волновых функций Дирака справедливо следующее условие четности:

$$u_N(\mathbf{x}) = \eta_N \beta u_N(-\mathbf{x}), \quad (14.1.23)$$

или, что то же самое,

$$f_N(\mathbf{x}) = \eta_N f_N(-\mathbf{x}), \quad g_N(\mathbf{x}) = -\eta_N g_N(-\mathbf{x}). \quad (14.1.24)$$

Отметим, что четность состояния определяется четностью  $f_N(\mathbf{x})$ , а не  $g_N(\mathbf{x})$ .

Если потенциал  $\mathcal{A}^0$  вращательно инвариантен, решения волновых уравнений можно классифицировать по их полному угловому моменту  $j$  и четности  $\eta$ . Для заданного  $j$  компоненты  $f$  и  $g$  можно разложить по сферическим гармоникам с орбитальными угловыми моментами  $l = j + 1/2$  и  $l = j - 1/2$ . Однако если четность задана ( $\eta = (-1)^{j \mp 1/2}$ ), то из (14.1.24) видно, что  $l = j \mp 1/2$  в  $f$ , и  $l = j \pm 1/2$  в  $g$ . Складывая угловые моменты обычным образом, находим, что для состояния с полным угловым моментом  $j$ ,  $z$ -компонентой полного углового момента  $\mu$  и четностью  $(-1)^{j \mp 1/2}$  “большая” двухкомпонентная волновая функция  $f$  имеет вид

$$f(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} C_{j \mp 1/2, 1/2}(j, \mu; \mu - 1/2, 1/2) Y_{j \mp 1/2}^{\mu-1/2}(\hat{\mathbf{x}}) \\ C_{j \mp 1/2, 1/2}(j, \mu; \mu + 1/2, -1/2) Y_{j \mp 1/2}^{\mu+1/2}(\hat{\mathbf{x}}) \end{pmatrix} F(|\mathbf{x}|), \quad (14.1.25)$$

где  $C$  — обычные коэффициенты Клебша–Гордана, а  $Y$  — сферические гармоники [2]. Кроме того, если задана произвольная волновая функция с определенными угловым моментом и четностью, то, используя оператор  $\sigma \cdot \hat{\mathbf{x}}$ , можно построить другую волновую функцию с теми же самыми  $j$  и  $\mu$ , но противоположной четностью. В результате “малые” компоненты могут быть приведены к следующему виду:

$$g(\mathbf{x}) = (\sigma \cdot \hat{\mathbf{x}}) \begin{pmatrix} C_{j \mp 1/2, 1/2}(j, \mu; \mu - 1/2, 1/2) Y_{j \mp 1/2}^{\mu-1/2}(\hat{\mathbf{x}}) \\ C_{j \mp 1/2, 1/2}(j, \mu; \mu + 1/2, -1/2) Y_{j \mp 1/2}^{\mu+1/2}(\hat{\mathbf{x}}) \end{pmatrix} G(|\mathbf{x}|). \quad (14.1.26)$$

Удобно ввести орбитальный угловой момент  $l$  состояния как орбитальный угловой момент “больших” компонент  $f(\mathbf{x})$ ,

$$l = j \mp 1/2, \quad (14.1.27)$$

так что четность всегда оказывается равной  $(-1)^l$ .

Подставляя выражения (14.1.25) и (14.1.26) в уравнения (14.1.20) и (14.1.21), получаем систему двух дифференциальных уравнений

$$\frac{dG}{dr} + \frac{k+1}{r} G + (E + e\mathcal{A}^0 - m)F = 0, \quad (14.1.28)$$

$$\frac{dF}{dr} - \frac{k-1}{r} F - (E + e\mathcal{A}^0 + m)G = 0, \quad (14.1.29)$$

где

$$k \equiv \pm(j + 1/2), \quad (14.1.30)$$

если четность равна  $\eta = (-1)^{j \mp 1/2}$ .

Рассмотрим теперь простое кулоновское поле (14.1.2), для которого  $e\mathcal{A}^0 = Z\alpha/r$ . Результаты, получаемые из анализа уравнения Дирака, в этом случае [3] хорошо известны, поэтому мы просто кратко перечислим их здесь для полноты изложения. Легко видеть, что решения вблизи начала координат ведут себя как  $r^{s-1}$ , где  $s^2 = k^2 - Z^2\alpha^2$ . (Отметим, что  $k^2 \geq 1$ , так что показатель экспоненты  $s$  принимает вещественные значения при  $Z\alpha \leq 1$ .) Мы должны отбросить решения с  $s < 0$ , поскольку они не удовлетворяют нормировочному условию (14.1.18). Принимая теперь во внимание тот факт, что волновые функции не должны расходиться при  $r \rightarrow \infty$ , находим собственные значения энергии:

$$E_{n,j} = m \left[ 1 + \left( \frac{Z\alpha}{n - j - 1/2 + \sqrt{(j + 1/2)^2 - Z^2\alpha^2}} \right)^2 \right]^{-1/2}, \quad (14.1.31)$$

где  $n$  — “главное квантовое число”, удовлетворяющее условию

$$j + 1/2 \leq n. \quad (14.1.32)$$

Отметим, что уровни энергии (14.1.31) зависят только от  $n$  и  $j$ , но не зависят от четности или от  $l$ . Для каждого  $n$  и  $j$  существуют два решения, соответствующие двум знакам  $k$  или двум возможным четностям, за тем исключением, что  $k > 0$  и четность равна  $(-1)^{j-1/2}$  при  $n = j + 1/2$  (откуда следует, что  $l = j - 1/2$ ). С учетом (14.1.32) получаем известное нерелятивистское ограничение  $l \leq n - 1$ .

Для легких атомов с  $Z\alpha \ll 1$  из формулы (14.1.31) следует разложение в ряд:

$$E = m \left[ 1 - \frac{Z^2\alpha^2}{2n^2} + \frac{Z^4\alpha^4}{n^4} \left( \frac{3}{8} - \frac{n}{2j+1} \right) + \dots \right]. \quad (14.1.33)$$

Первые два члена, конечно же, совпадают с энергией покоя и энергией связи, выражения для которых нетрудно вывести с помощью обычного

го нерелятивистского уравнения Шредингера. Третий член, представляющий собой первую релятивистскую поправку, имеет наименьший порядок среди всех членов, зависящих от  $j$  и  $n$ . Для  $n = 1$  возможно только одно значение полного углового момента,  $j = 1/2$ , а поскольку в этом случае  $n = j + 1/2$ , то возможно только одно значение четности,  $(-1)^{j-1/2} = +1$ , соответствующее  $l = 0$ . По этой причине трудно наблюдать, как релятивистские поправки в формуле (14.1.33) влияют на состояния атома водорода с  $n = 1$ . Тем не менее, как мы увидим в § 14.3, в последнее время это стало возможно. С другой стороны, при  $n = 2$  существуют два состояния с  $j = 1/2$ , отличающиеся друг от друга четностью ( $2s_{1/2}$  и  $2p_{1/2}$ ), и одно состояние с  $j = 3/2$  и отрицательной четностью ( $2p_{3/2}$ ). Из (14.1.33) получаем разность энергий двух  $p$ -состояний атома водорода:

$$E(2p_{3/2}) - E(2p_{1/2}) = \frac{\alpha^4 m_e}{32} = 4,5283 \times 10^{-5} \text{ эВ.} \quad (14.1.34)$$

Такое релятивистское расщепление линии носит название *тонкой структуры* атомного состояния. С самого начала было известно, что теоретическое выражение (14.1.34) находится в хорошем согласии с тонкой структурой, наблюдаемой на эксперименте. С другой стороны, из уравнения Дирака нельзя вывести выражение для разности энергий состояний  $2s_{1/2}$  и  $2p_{1/2}$ . Поэтому, как мы увидим в § 14.3, нужно учитывать влияние других поправок.

Прежде чем закончить этот параграф, мы рассмотрим в нерелятивистском пределе приближенный вид волновых функций и матричных элементов для произвольного электростатического потенциала  $\mathcal{A}^0$ . (В случае кулоновского потенциала условием нерелятивистского предела является неравенство  $Z\alpha \ll 1$ ). Поскольку

$$E_N + m \approx 2m \gg |e\mathcal{A}^0|,$$

“малые” компоненты волновой функции электрона приближенно выражаются через большие компоненты с помощью формулы

$$g_N \approx (\boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla) f_N / 2m. \quad (14.1.35)$$

Уравнение (14.1.21) тогда сводится просто к нерелятивистскому уравнению Шредингера

$$\left[ -\frac{\nabla^2}{2m} - e\mathcal{A}^0 \right] f_N \approx (E_N - m) f_N. \quad (14.1.36)$$

Поскольку в уравнении для  $f_N$  больше нет никаких членов, описывающих взаимодействие между спиновыми и орбитальными степенями свободы, мы можем записать полный набор решений этого уравнения в виде

$$f_N = \chi_N \psi_N(\mathbf{x}),$$

где  $\chi_N$  — двухкомпонентный постоянный спинор, а  $\psi_N(\mathbf{x})$  — обычное однокомпонентное решение уравнения Шредингера. Однако мы часто

работаем с состояниями, значение полного углового момента  $j$  которых фиксировано. Для этих состояний  $f_N$  есть сумма таких членов (при ненулевом орбитальном угловом моменте).

В нерелятивистском приближении четырехкомпонентная волновая функция Дирака имеет вид

$$u_N \approx \frac{1}{\sqrt(2)} \left[ \begin{array}{l} (1 + i\boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla / 2m) f_N \\ (1 - i\boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla / 2m) f_N \end{array} \right], \quad (14.1.37)$$

а из равенства (14.1.18) получается нормировочное условие

$$\int d^3x (f_N^\dagger, f_M) \approx \delta_{NM} - \frac{1}{4} (\mathbf{v}^2)_{NM}, \quad (14.1.38)$$

где

$$(\mathbf{v}^2)_{NM} \equiv -\frac{1}{m^2} \int d^3x f_N^\dagger(\mathbf{x}) \nabla^2 f_M(\mathbf{x}).$$

По поводу связи матричных элементов во внешнем поле с матричными элементами для свободных частиц, полезно заметить, что волновая функция  $N$ -го собственного состояния гамильтониана в импульсном представлении может быть записана следующим образом:

$$u_N(\mathbf{p}) \equiv (2\pi)^{-3/2} \int d^3x e^{-i\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}} u_N(\mathbf{x}) \approx \sum_{\sigma} u(\mathbf{p}, \sigma) [f_N(\mathbf{p})]_{\sigma}, \quad (14.1.39)$$

где  $u(\mathbf{p}, \sigma)$  — дираковский спинор свободной частицы:

$$u(\mathbf{p}, \sigma) \approx \frac{1}{\sqrt{2}} \left[ \begin{array}{l} (1 - \mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\sigma} / 2m) \chi \sigma \\ (1 + \mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\sigma} / 2m) \chi \sigma \end{array} \right],$$

$$\chi_{+1/2} \equiv \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \chi_{-1/2} \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

а  $f_N(\mathbf{p})$  — фурье-преобразование двухкомпонентной волновой функции Шредингера:

$$f_N(\mathbf{p}) \equiv (2\pi)^{-3/2} \int d^3x e^{-i\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}} f_N(\mathbf{x}).$$

\* \* \*

В заключение, чтобы облегчить рассмотрение влияния различных возмущений, заметим, что матричные элементы шестнадцати независимых матриц  $4 \times 4$  в главном порядке даются формулами

$$(\bar{u}_M u_N) \approx (f_M^\dagger f_N) - \frac{1}{4m^2} (\nabla f_M^\dagger \cdot \boldsymbol{\sigma} \boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla f_N), \quad (14.1.40)$$

$$i(\bar{u}_M \gamma^0 u_N) \approx (f_M^\dagger f_N) + \frac{1}{4m^2} (\nabla f_M^\dagger \cdot \boldsymbol{\sigma} \boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla f_N), \quad (14.1.41)$$

$$(\bar{u}_M \gamma u_N) \approx \frac{1}{2m} [(\nabla f_M^\dagger \cdot \boldsymbol{\sigma} \boldsymbol{\sigma} f_N) - (f_M^\dagger \boldsymbol{\sigma} \boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla f_N)], \quad (14.1.42)$$

$$(\bar{u}_M[\gamma^0, \gamma]u_N) \approx \frac{i}{m} [(\nabla f_M^\dagger \cdot \sigma \sigma f_N) + (f_M^\dagger \sigma \sigma \cdot \nabla f_N)], \quad (14.1.43)$$

$$(\bar{u}_M[\gamma^i, \gamma^j]u_N) \approx 2i\epsilon_{ijk}(f_M^\dagger \sigma_k f_N), \quad (14.1.44)$$

$$(\bar{u}_M\gamma_5\gamma u_N) \approx -i(f_M^\dagger \sigma f_N), \quad (14.1.45)$$

$$(\bar{u}_M\gamma_5\gamma^0 u_N) \approx \frac{1}{2m} [(\nabla f_M^\dagger \cdot \sigma f_N) - (f_M^\dagger \sigma \cdot \nabla f_N)], \quad (14.1.46)$$

$$(\bar{u}_M\gamma_5 u_N) \approx \frac{i}{2m} [(\nabla f_M^\dagger \cdot \sigma f_N) + (f_M^\dagger \sigma \cdot \nabla f_N)]. \quad (14.1.47)$$

## § 14.2. Радиационные поправки во внешних полях

Рассмотрим теперь радиационные поправки к результатам, полученным в предыдущем параграфе. Эти поправки обусловлены взаимодействием электронов с квантовым электромагнитным полем, а также с внешним полем, создаваемым тяжелыми заряженными частицами. Эти радиационные поправки можно вычислить, используя обычные фейнмановские диаграммы. Влияние внешнего поля сводится к изменению пропагатора электронного поля (и к появлению в (14.1.1) зависящих от внешнего поля перенормировочных контрчленов). Выражаясь более точно, возможность подстановки произвольного количества вершин, соответствующих первому члену взаимодействия (14.1.1), во внешнюю электронную линию любой диаграммы приводит к замене затравочного пропагатора  $-iS(x-y)$  на исправленный пропагатор

$$\begin{aligned} -iS_{\mathcal{A}}(x, y) &\equiv -iS(x-y) + \\ &+ (-i)^2 \int d^4 z_1 S(x-z_1) e\gamma^\mu \mathcal{A}_\mu(z_1) S(z_1-y) + \\ &+ (-i)^3 \int d^4 z_1 \int d^4 z_2 S(x-z_1) e\gamma^\mu \mathcal{A}_\mu(z_1) S(z_1-z_2) \times \\ &\times e\gamma^\nu \mathcal{A}_\nu(z_2) S(z_2-y) + \dots, \end{aligned} \quad (14.2.1)$$

где, как обычно,

$$S(x-y) \equiv \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4 p \frac{-i\gamma_\lambda p^\lambda + m}{p^2 + m^2 - i\epsilon} e^{ip \cdot (x-y)}.$$

(Мы должны рассматривать  $S_{\mathcal{A}}$  в виде функции  $x$  и  $y$ , а не  $x-y$ , поскольку внешнее поле нарушает трансляционную инвариантность.) Из теоремы, доказанной нами в § 6.4, следует, что (14.2.1) можно записать в следующем виде:

$$-iS_{\mathcal{A}}(x, y) = (\Phi_0, T\{\psi(x), \bar{\psi}(y)\}\Phi_0)_{\mathcal{A}}. \quad (14.2.2)$$

Нижний индекс  $\mathcal{A}$  в правой части свидетельствует о том, что вакуумное состояние  $\Phi_0$  и электронное поле  $\psi(x)$  рассматриваются в пред-

ставлении Гейзенберга, когда во внимание принимается только взаимодействие (14.1.1) с внешним полем. Подставляя в (14.2.2) полный набор промежуточных состояний  $\Phi_N$ , выражаем пропагатор через дираковские волновые функции  $u_N$  и  $v_N$ , введенные в предыдущем параграфе:

$$-iS_{\mathcal{A}}(x, y) = \theta(x^0 - y^0) \sum_N u_N(x) \bar{u}_N(y) - \theta(y^0 - x^0) \sum_M v_M(x) \bar{v}_M(y). \quad (14.2.3)$$

Кроме того, пропагатор (14.2.2) можно получить как решение *неоднородного уравнения Дирака*:

$$\left[ \gamma^\lambda \frac{\partial}{\partial x^\lambda} + m + ie\gamma^\lambda \mathcal{A}_\lambda(x) \right] S_{\mathcal{A}}(x, y) = \delta^4(x - y), \quad (14.2.4)$$

которое следует из уравнений поля (14.1.3) и антисимметрических соотношений (14.1.7). Его также формально можно вывести исходя из ряда теории возмущений (14.2.1). Еще одним следствием равенства (14.2.3) является тот факт, что пропагатор удовлетворяет граничным условиям: его фурье-разложение содержит только “члены с положительной частотой” (пропорциональные  $\exp[-iE(x^0 - y^0)]$ , где  $E > 0$ ) при  $x^0 - y^0 \rightarrow \infty$ , и только “члены с отрицательной частотой” (пропорциональные  $\exp[+iE(x^0 - y^0)]$ , где  $E > 0$ ) при  $x^0 - y^0 \rightarrow -\infty$ . Неоднородное уравнение Дирака с такими граничными условиями можно использовать для численного нахождения этого пропагатора [4] даже в тех случаях, когда внешнее поле очень сильное и нельзя применять теорию возмущений. Если пропагатор  $S_{\mathcal{A}}(x, y)$  известен, то амплитуды для рассеяния во внешнем поле можно вычислить, используя обычные фейнмановские диаграммы. Однако при этом вместо  $S(x - y)$  нужно везде подставить  $S_{\mathcal{A}}(x, y)$ . Кроме того, там, где это необходимо, нужно вставить зависящие от  $\mathcal{A}$  перенормировочные контрчлены.

Рассмотрим теперь вопрос о том, как можно использовать теорию возмущений для вычисления сдвигов энергии связанных состояний, если в качестве пропагатора выступает  $S_{\mathcal{A}}(x, y)$ , а не  $S(x - y)$ . Полный электронный пропагатор  $S'_{\mathcal{A}}(x, y)$ , учитывающий взаимодействие электрона как с квантованным электромагнитным полем, так и с внешним полем, определяется формулой

$$-iS'_{\mathcal{A}}(x, y) \equiv (\Omega_0, T\{\Psi(x), \bar{\Psi}(y)\}\Omega_0)_{\mathcal{A}}. \quad (14.2.5)$$

Здесь  $\Psi(x)$  — электронное поле в представлении Гейзенберга, учитывающем все взаимодействия, а  $\Omega_0$  — вакуумное собственное состояние полного гамильтониана. Если внешний потенциал не зависит от времени, то существует полный ортонормированный набор  $\Omega_N$  собственных состояний полного гамильтониана с соответствующими собственными значениями энергии  $E'_N$ . Вставляя сумму по состояниям

из этого набора в (14.2.5), получаем

$$\begin{aligned} -iS'_{\mathcal{A}}(x, y) &= \theta(x^0 - y^0)e^{-iE'_N(x^0 - y^0)} \sum_N U_N(\mathbf{x})\bar{U}_N(\mathbf{y}) - \\ &\quad - \theta(y^0 - x^0)e^{-iE'_N(y^0 - x^0)} \sum_N V_N(\mathbf{x})\bar{V}_N(\mathbf{y}), \end{aligned} \quad (14.2.6)$$

где

$$(\Omega_0, \Psi(\mathbf{x}, t)\Omega_N) \equiv e^{-iE'_N t}U_N(\mathbf{x}), \quad (14.2.7)$$

$$(\Omega_N, \Psi(\mathbf{x}, t)\Omega_0) \equiv e^{+iE'_N t}V_N(\mathbf{x}). \quad (14.2.8)$$

(Сумма включает интеграл по континуальному множеству состояний и сумму по всем дискретным связанным состояниям. Как и раньше, функции  $U_N$  и  $V_N$  не равны тождественно нулю, только если состояние  $\Omega_N$  обладает зарядом  $-e$  или  $+e$  соответственно.) Пропагатор можно также представить в виде функции энергии, а не времени:

$$S'_{\mathcal{A}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}; E) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} dx^0 e^{iE(x^0 - y^0)} S'_{\mathcal{A}}(x, y). \quad (14.2.9)$$

(Инвариантность относительно временных трансляций приводит к тому, что  $S'_{\mathcal{A}}(x, y)$  является функцией  $x^0 - y^0$ , а не отдельно  $x^0$  и  $y^0$ .) Из (14.2.6) следует, что

$$S'_{\mathcal{A}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}; E) = \sum_N \frac{U_N(\mathbf{x})\bar{U}_N(\mathbf{y})}{E'_N - E - i\epsilon} - \sum_N \frac{V_N(\mathbf{x})\bar{V}_N(\mathbf{y})}{E'_N + E - i\epsilon}. \quad (14.2.10)$$

В частности, функция  $S'_{\mathcal{A}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}; E)$  имеет полюсы в точках, в которых  $E$  совпадает с энергией любого электронного связанных состояния или противоположна по знаку энергии любого позитронного связанных состояния. (Конечно же, позитроны не образуют связанных состояний в кулоновском поле обычных положительно заряженных ядер.)

Рассмотрим теперь в ведущем порядке радиационные поправки к полному пропагатору. Из правил Феймана следует, что полный пропагатор в этом случае дается суммой  $S'_{\mathcal{A}} = S_{\mathcal{A}} + \delta S_{\mathcal{A}}$ , где

$$\delta S_{\mathcal{A}}(x, y) = \int d^4z \int d^4w S_{\mathcal{A}}(x, z)\Sigma_{\mathcal{A}}^*(z, w)S_{\mathcal{A}}(w, y). \quad (14.2.11)$$

Здесь через  $i\Sigma_{\mathcal{A}}^*$  обозначена сумма всех однопетлевых диаграмм с одной входящей и одной выходящей электронной линией (пропагаторы конечных электронов не учитываются), при вычислении которой вместо  $S(x - y)$  для внутренних электронных линий использовалась функция  $S_{\mathcal{A}}(x, y)$  с прибавленными к ней перенормировочными контрчленами второго порядка. Переходя от интегрирования по времени

к интегрированию по энергии, получаем

$$\delta S_{\mathcal{A}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}; E) = \int d^3 z \int d^3 w S_{\mathcal{A}}(\mathbf{x}, \mathbf{z}; E) \Sigma_{\mathcal{A}}^*(\mathbf{z}, \mathbf{w}; E) S_{\mathcal{A}}(\mathbf{w}, \mathbf{y}; E), \quad (14.2.12)$$

где

$$\Sigma_{\mathcal{A}}^*(\mathbf{z}, bw; E) \equiv \int dz^0 e^{iE(z^0 - w^0)} \Sigma_{\mathcal{A}}^*(z, w). \quad (14.2.13)$$

Влияние этих радиационных поправок сводится к изменению волновых функций ( $U_N = u_N + \delta u_N$  и  $V_N = v_N + \delta v_N$ ) и энергии связанных состояний ( $E'_N = E_N + \delta E_N$ ). В результате полный пропагатор дается формулой

$$\begin{aligned} S'_{\mathcal{A}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}; E) \approx S_{\mathcal{A}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}; E) &+ \\ &+ \sum_N \frac{\delta u_N(\mathbf{x}) \bar{u}_N(\mathbf{y}) + u_N \delta(\mathbf{x}) \bar{u}_N(\mathbf{y})}{E_N - E} - \\ &- \sum_N \frac{\delta v_N(\mathbf{x}) \bar{v}_N(\mathbf{y}) + v_N \delta(\mathbf{x}) \bar{v}_N(\mathbf{y})}{E_N + E} - \\ &- \sum_N \frac{u_N(\mathbf{x}) \bar{u}_N(\mathbf{y}) \delta E_N}{(E_N - E)^2} + \sum_N \frac{v_N(\mathbf{x}) \bar{v}_N(\mathbf{y}) \delta E_N}{(E_N + E)^2}. \end{aligned} \quad (14.2.14)$$

(Мы опускаем слагаемые  $i\epsilon$ , поскольку  $E$  теперь не относится к континуальному множеству состояний рассеяния.) Мы видим, что сдвиг  $\delta E_N$  энергии связанного электрона дается коэффициентом при  $-u_N(\mathbf{x}) \bar{u}_N(\mathbf{y}) / (E_N - E)^2$  в выражении для полного пропагатора. Чтобы вычислить этот коэффициент, заметим, что формулу (14.2.3) можно переписать следующим образом:

$$S_{\mathcal{A}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}; E) = \sum_N \frac{u_N(\mathbf{x}) \bar{u}_N(\mathbf{y})}{E_N - E - i\epsilon} - \sum_N \frac{v_N(\mathbf{x}) \bar{v}_N(\mathbf{y})}{E_N + E - i\epsilon}. \quad (14.2.15)$$

Подставляя полученное выражение в (14.2.12), получаем

$$\begin{aligned} \delta S_{\mathcal{A}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}; E) = \sum_{N, M} \frac{u_N(\mathbf{x}) \bar{u}_M(\mathbf{y})}{(E_N - E)(E_M - E)} \times \\ \times \int d^3 z \int d^3 w \bar{u}_N(\mathbf{z}) \Sigma_{\mathcal{A}}^*(\mathbf{z}, \mathbf{w}; E) u_M(\mathbf{w}) + \dots, \end{aligned} \quad (14.2.16)$$

где через многоточие обозначены дополнительные члены, обладающие хотя бы одним полюсом при отрицательных энергиях. Сравнивая коэффициенты при  $(E_N - E)^{-2}$  в (14.2.16) и (14.2.14), находим

$$\delta E_N = - \int d^3 x \int d^3 y \bar{u}_N(\mathbf{x}) \Sigma_{\mathcal{A}}^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}; E_N) u_N(\mathbf{y}). \quad (14.2.17)$$

Функции  $u_N$  — это решения однородного уравнения Дирака, удовлетворяющие нормировочному условию (14.1.8). Поэтому все это очень

похоже на обычную теорию возмущений первого порядка, но с заменой возмущения в гамильтониане на  $-\Sigma^*$ .

Вообще говоря, сдвиг  $\delta E_N$  принимает комплексные значения. Этот факт есть простое следствие нестабильности атомных уровней энергии относительно радиационного распада (падения электрона на нижние уровни). Мы видели в гл. 3, что нестабильному состоянию с энергией  $E$  и вероятностью распада  $\Gamma$  в различных амплитудах соответствует полюс при комплексном значении энергии  $E - i\Gamma/2$ . Мнимая часть выражения (14.2.17) равна поэтому  $-\Gamma/2$ , в то время как его вещественная часть определяет сдвиг энергии.

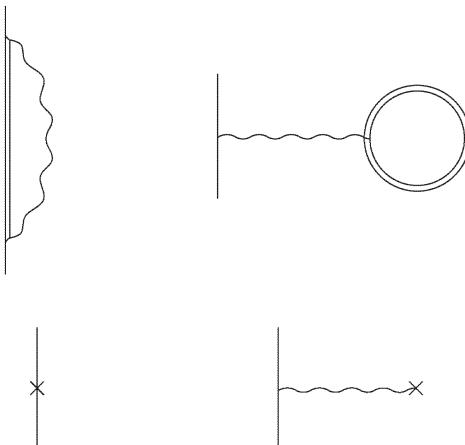


Рис. 14.1. Фейнмановские диаграммы низшего порядка для собственной энергии электрона  $\Sigma_A^*(x, y)$  при наличии внешнего поля. Здесь двойные прямые линии соответствуют электронным пропагаторам  $S_A$ , учитывающим эффекты, связанные с внешним полем. Одинарные прямые линии соответствуют входящим и выходящим электронам, волновые линии — виртуальным фотонам. Крестиками обозначены перенормировочные контргченлы

Фейнмановские диаграммы для  $\Sigma^*$  показаны на рис. 14.1. (Заметьте, что возникли новые диаграммы с фотонным отростком. Они возможны, поскольку внешнее поле нарушает лоренц-инвариантность, а также инвариантность относительно зарядового сопряжения. Последние две запрещают существование таких диаграмм в случае обычных правил Фейнмана.) Применение к этим диаграммам фейнмановских правил в координатном представлении приводит к формуле

$$\begin{aligned} i\Sigma_A^*(x, y) = & [e\gamma^\mu] [-iS_{mA}(x, y)] [e\gamma_\mu] [-iD(x - y)] - \\ & - [e\gamma^\mu \delta^4(x - y)] \int d^4 z [-iD(x - z)] Tr\{[-iS_A(z, z)] [e\gamma_\mu]\} - \\ & - i(Z_2 - 1)(\gamma^\mu \partial_\mu + m)\delta^4(x - y) + i\delta m\delta^4(x - y) + \end{aligned}$$

$$+ e\gamma^\mu(Z_2 - 1)\delta^4(x - y)\mathcal{A}_\mu(x) + \\ + i(Z_3 - 1)[e\gamma_\mu]\delta^4(x - y)\int d^4z[-iD(x - z)]\partial_v(\partial^v\mathcal{A}^\mu(z) - \partial^\mu\mathcal{A}^v(z)), \quad (14.2.18)$$

где перенормировочные константы  $(Z_2 - 1)$ ,  $(Z_3 - 1)$  и  $\delta m$  вычисляются во втором порядке по  $e$ . (Знак “ $-$ ”, который мы видим во втором слагаемом, ставится всегда, когда мы имеем дело с замкнутыми электронными петлями.)

В случае сильных внешних полей, для которых  $Z\alpha \sim 1$ , электронный пропагатор  $S_{\mathcal{A}}$  в координатном представлении и интегралы в (14.2.17) и (14.2.18) аналитически вычислить нельзя. Можно воспользоваться численными методами [4]. Однако в случае слабых полей мы можем подставить первые несколько членов разложения (14.2.1) в (14.2.18) и найти эти интегралы в замкнутом виде. С этой целью более удобно работать в импульсном представлении, определив функции

$$S_{\mathcal{A}}(x, y) = (2\pi)^{-4} \int d^4p' d^4p e^{ip'\cdot x} e^{-ip'\cdot y} S_{\mathcal{A}}(p', p), \quad (14.2.19)$$

$$\Sigma_{\mathcal{A}}^*(x, y) = (2\pi)^{-4} \int d^4p' d^4p e^{ip'\cdot x} e^{-ip'\cdot y} \Sigma_{\mathcal{A}}^*(p', p), \quad (14.2.20)$$

$$u_N(\mathbf{x}) = (2\pi)^{-3/2} \int d^3p e^{ip\cdot x} u_N(\mathbf{p}), \quad (14.2.21)$$

$$\mathcal{A}^\mu(x) = \int d^4q e^{iq\cdot x} \mathcal{A}^\mu(q). \quad (14.2.22)$$

(Мы здесь не совсем последовательны, поскольку используем один и тот же символ для обозначения и функции, и ее фурье-преобразования. Однако на то, с каким представлением мы имеем дело в том или ином случае, указывает аргумент в скобках.) Тогда (14.2.1) и (14.2.18) сводятся к

$$S_{\mathcal{A}}(p', p) = \frac{-i\hat{p} + m}{p^2 + m^2 - i\epsilon} - ie \frac{-i\hat{p}' + m}{p'^2 + m^2 - i\epsilon} \widehat{\mathcal{A}}(p' - p) \frac{-i\hat{p} + m}{p^2 + m^2 - i\epsilon} + \dots, \quad (14.2.23)$$

и

$$\Sigma_{\mathcal{A}}^*(p', p) = \frac{ie^2}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4k}{k^2 - i\epsilon} \gamma^\mu S_{\mathcal{A}}(p' - k, p - k) \gamma_\mu + \\ + [-(Z_2 - 1)(i\hat{p} + m) + Z_2 \delta m] \delta^4(p' - p) - ie(Z_2 - 1) \widehat{\mathcal{A}}(p' - p) - \\ - \frac{ie^2 \gamma^\mu}{(2\pi)^4} \frac{1}{(p - p')^2 - i\epsilon} \int d^4q \text{Tr}\{S_{\mathcal{A}}(q, q + p' - p) \gamma_\mu\} + \\ + \frac{ie(Z_3 - 1)}{(p - p')^2 - i\epsilon} [(p - p')^2 \widehat{\mathcal{A}}(p' - p) - (\hat{p} - \hat{p}')(p - p') \cdot \mathcal{A}(p' - p)]. \quad (14.2.24)$$

Поскольку внешнее поле не зависит от времени,  $x^0$  и  $y^0$  могут входить в  $S_{\mathcal{A}}(x, y)$  и  $\Sigma_{\mathcal{A}}^*$  только в виде разности  $x^0 - y^0$ . Отсюда следует, что  $S_{\mathcal{A}}(p', p)$ ,  $\Sigma_{\mathcal{A}}^*(p', p)$  и  $\mathcal{A}^\mu(p' - p)$  должны быть пропорциональны  $\delta(p'^0 - p^0)$ :

$$\mathcal{A}^\mu(p' - p) = \delta(p'^0 - p^0) \mathcal{A}^\mu(\mathbf{p}' - \mathbf{p}), \quad (14.2.25)$$

$$S_{\mathcal{A}}(p', p) = \delta(p'^0 - p^0) S_{\mathcal{A}}(\mathbf{p}', \mathbf{p}; p^0), \quad (14.2.26)$$

$$\Sigma_{\mathcal{A}}^*(p', p) = \delta(p'^0 - p^0) \Sigma_{\mathcal{A}}^*(\mathbf{p}', \mathbf{p}; p^0). \quad (14.2.27)$$

Сдвиг энергии тогда определяется из выражений (14.2.17) и (14.2.13):

$$\delta E_N = - \int d^3 p' \int d^3 p \bar{u}_N(\mathbf{p}', \mathbf{p}; E_N) u_N(\mathbf{p}), \quad (14.2.28)$$

где  $\Sigma_{\mathcal{A}}^*(\mathbf{p}', \mathbf{p}; E_N)$  задается формулами (14.2.23), (14.2.24) и (14.2.27). Полученное выражение (14.2.28) является очень важным. В следующем параграфе мы воспользуемся им для вычисления сдвигов энергии в слабых внешних полях.

### § 14.3. Лэмбовский сдвиг в легких атомах

Вычислим теперь радиационные поправки к энергии нерелятивистского электрона в произвольном электростатическом поле (например, электрона в кулоновском поле легкого ядра с  $Z\alpha \ll 1$ ). В этом пределе довольно естественно рассматривать кулоновское поле как слабое возмущение. Однако мы увидим, что это приводит к инфракрасным расходимостям, непосредственно связанным с расходимостями, с которыми мы встречались в § 11.3. Инфракрасные расходимости на практике оказываются мнимыми, так как 4-импульсы  $\mathbf{p}$ ,  $E_N$  и  $\mathbf{p}'$ ,  $E_N$  не удовлетворяют условию на массовой оболочке для электрона. Тем не менее к ним надо подходить с некоторой осторожностью.

Обычно эта проблема решается путем разбиения области интегрирования по энергиям виртуальных фотонов на две части, низкоэнергетическую и высокоэнергетическую. В первой подобласти мы можем считать электрон нерелятивистским. Правда, при этом необходимо учитывать поправки во всех порядках теории возмущений. Во второй подобласти мы должны принять во внимание релятивистские эффекты, но зато только в ведущем порядке по внешнему полю. В этом параграфе мы поступим по-другому, а именно введем фиктивную массу фотона  $\mu$ , величину которой выберем таким образом, чтобы она была намного больше характерной кинетической энергии электрона, и вместе с тем намного меньше характерного электронного импульса. В случае кулоновского поля эти ограничения сводятся

к следующим

$$(Z\alpha)^2 m_e \ll \mu \ll Z\alpha m_e. \quad (14.3.1)$$

Пропагатор фотона, входящий в первые два слагаемые в формуле (14.2.24), запишется в виде

$$\frac{1}{k^2 - i\epsilon} = \left[ \frac{1}{k^2 + \mu^2 - i\epsilon} \right] + \left[ \frac{1}{k^2 - i\epsilon} - \frac{1}{k^2 + \mu^2 - i\epsilon} \right]. \quad (14.3.2)$$

Сдвиг энергии равен сумме двух членов, “высокоэнергетического” и “низкоэнергетического”. Высокоэнергетический член вычисляется с помощью подстановки первого члена в выражении для фотонного пропагатора (14.3.2) в первые три слагаемые в формуле (14.2.24). Полученный результат нужно сложить с последними двумя слагаемыми (отвечающими поляризации вакуума) в (14.2.24), которые не могут расходиться в инфракрасной области. Низкоэнергетический член вычисляется с помощью подстановки второго члена в выражении (14.3.2) в первые три слагаемые формулы (14.2.24). Одним из достоинств такого метода является возможность использования результатов релятивистских вычислений, проделанных нами в § 11.3 и § 11.4. При этом нет надобности отыскивать довольно сложную связь между массой фотона и инфракрасным порогом обрезания интеграла. В конце мы, конечно, должны проверить, что члены, зависящие от массы фотона  $\mu$ , при сложении высокоэнергетического и низкоэнергетического членов сокращаются, т.е. что полный сдвиг энергии от  $\mu$  не зависит.

#### A. Высокоэнергетический член

В силу того что величина  $\mu$  намного больше энергии связи электрона в атоме, мы можем принимать во внимание только члены, имеющие наименший порядок по внешнему полю. Однопетлевая радиационная поправка к энергии атома, помещенного в произвольный, независящий от времени внешний векторный потенциал  $\mathcal{A}^\mu(\mathbf{x})$ , дается формулами (14.2.24) и (14.2.23). Слагаемые нулевого порядка по внешнему полю сокращаются тривиальным образом: член с  $\delta t$  взаимно уничтожается с первым членом (в котором  $\mathcal{A} = 0$ ), член с  $Z_3 - 1$  взаимно уничтожается с третьим членом (в котором  $\mathcal{A} = 0$ ), а члены с  $Z_2 - 1$  зануляются, поскольку  $u(p)$  удовлетворяет уравнению Дирака. Слагаемое в  $\Sigma_{\mathcal{A}}(p', p)$ , имеющее первый порядок по  $\mathcal{A}^\mu$ , можно привести к виду

$$\Sigma_{\mathcal{A}1}(p', p) = -ie\mathcal{A}_\mu(p' - p)\Gamma_1^\mu(p', p), \quad (14.3.3)$$

где

$$\begin{aligned} \Gamma_1^\mu(p', p) &= \frac{ie^2}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4 k}{k^2 + \mu^2 - i\epsilon} \times \\ &\times \gamma^\nu \left[ \frac{-i(\hat{p}' - k) + m_e}{(p' - k)^2 + m_e^2 - i\epsilon} \right] \gamma^\mu \left[ \frac{-i(\hat{p} - \hat{k}) + m_e}{(p - k)^2 + m_e^2 - i\epsilon} \right] \gamma_\nu + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + (Z_2 - 1)\gamma^\mu - \frac{ie^2\gamma_\nu}{(2\pi)^4} \frac{1}{(p - p')^2 - i\epsilon} \times \\
& \times \int d^4l \operatorname{Tr} \left\{ \left[ \frac{-il + m_e}{l^2 + m_e^2} \right] \gamma^\mu \left[ \frac{-il - ip' + ip + m_e}{(l + p' - p)^2 + m_e^2} \right] \gamma^\nu \right\} - \\
& - \frac{Z_3 - 1}{(p - p')^2 - i\epsilon} [(p - p')^2 \eta^{\mu\nu} - (p' - p)^\mu (p' - p)^\nu] \gamma_\nu. \quad (14.3.4)
\end{aligned}$$

Сравнивая первые два слагаемых с (11.3.1) и (11.3.8), а вторые два слагаемых — с (11.3.9), (11.2.3) и (11.2.15), мы видим, что  $\Gamma_1^\mu(p', p)$  является полной однопетлевой вершинной функцией, т.е. в ней учтены все эффекты поляризации вакуума и все контрчлены. Матричные элементы последних, удовлетворяющие условию на массовой оболочке, мы уже вычислили в § 11.3. Используя (14.2.26) и (14.2.25), находим соответствующий сдвиг энергии (14.2.28):

$$\begin{aligned}
[\delta E_N]_{\text{high energy}} = ie \int d^3p' \int d^3p (\bar{u}_N(\mathbf{p}') \Gamma_1^\mu(\mathbf{p}', E_N, \mathbf{p}, E_N) \times \\
\times u_N(\mathbf{p})) \mathcal{A}_\mu(\mathbf{p}' - \mathbf{p}). \quad (14.3.5)
\end{aligned}$$

(Заметьте, что эту формулу можно получить простой заменой  $\gamma^\mu$  на  $\Gamma_1^\mu$  в члене, описывающем взаимодействие электрона с внешним полем.) Как мы видели в § 14.1, в силу неравенства  $Z\alpha \ll 1$  в (14.3.5) вместо дираковской волновой функции  $u_N$  можно использовать ее приближенный вид,

$$[u_N(\mathbf{p})]_\alpha = \sum_\sigma u_\alpha(\mathbf{p}, \sigma) [f_N(\mathbf{p})]_\sigma. \quad (14.3.6)$$

Здесь  $f_N$  — нерелятивистская двухкомпонентная волновая функция электрона во внешнем кулоновском поле, а  $u(\mathbf{p}, \sigma)$  — четырехкомпонентное нормированное решение уравнения Дирака в импульсном представлении,

$$[i\gamma_\mu p^\mu + m_e]u(\mathbf{p}, \delta) = 0. \quad (14.3.7)$$

Через  $\sigma$  обозначена  $z$ -компоненты спина. Поскольку функция  $u_N(\mathbf{p})$  приближенно удовлетворяет уравнению Дирака для свободной частицы, общий вид матричных элементов  $\Gamma_1^\mu$  определяется формулой (10.6.15):

$$\begin{aligned}
\bar{u}_M(\mathbf{p}') [\gamma^\mu + \Gamma_1^\mu(p', p)] u_N(\mathbf{p}) = \\
= \bar{u}_M(\mathbf{p}') [\gamma^\mu F_1(q^2) + \frac{1}{2} i[\gamma^\mu, \gamma^\nu] q_\nu F_2(q^2)] u_N(\mathbf{p}), \quad (14.3.8)
\end{aligned}$$

где  $q \equiv p' - p$ . Волновые функции  $u_N(\mathbf{p})$  убывают очень быстро при выполнении условия  $|\mathbf{p}| \gg Z\alpha m_e$ . Поэтому нам нужно знать выражения для  $F_1(\mathbf{q}^2)$  и  $F_2(\mathbf{q}^2)$  только в пределе  $|q^2| \ll m_e$ . Из (11.3.31),

(10.6.18) и (11.3.16) следует, что при  $|q^2| \ll m_e$

$$F_1(q^2) \approx 1 + \frac{e^2}{24\pi^2} \left( \frac{q^2}{m_e^2} \right) \left[ \ln \left( \frac{\mu^2}{m_e^2} \right) + \frac{2}{5} + \frac{3}{4} \right], \quad (14.3.9)$$

$$F_2(q^2) \approx \frac{e^2}{16m_e\pi^2}. \quad (14.3.10)$$

Рассмотрим сначала член в (14.3.8), содержащий  $F_1$ . Вклад этого члена в выражение для сдвига энергии, безусловно, самый большой. При вычислении его возникает ряд чрезвычайно интересных проблем. В случае электростатического поля с  $\mathcal{A} = 0$  из формул (14.3.5), (14.3.8) и (14.3.9) следует, что

$$[\delta E_N]_{F_1} = -\frac{e^2}{24\pi^2 m_e^2} \left[ \ln \left( \frac{\mu^2}{m_e^2} \right) + \frac{2}{5} + \frac{3}{4} \right] \times \\ \times \int d^3 p' \int d^3 p \bar{u}_N(\mathbf{p}') (-ie\mathcal{A}^0(\mathbf{p}' - \mathbf{p})) \gamma^0(\mathbf{p}' - \mathbf{p})^2 u_N(\mathbf{p}). \quad (14.3.11)$$

Чтобы упростить это выражение, мы можем воспользоваться ведущим членом в нерелятивистском матричном элементе (14.1.41):

$$[\delta E_N]_{F_1} = -\frac{e^2}{24\pi^2 m_e^2} \left[ \ln \left( \frac{\mu^2}{m_e^2} \right) + \frac{2}{5} + \frac{3}{4} \right] \times \\ \times \int d^3 p' \int d^3 p f_N^\dagger(\mathbf{p}') e\mathcal{A}^0(\mathbf{p}' - \mathbf{p}) [\mathbf{p}' - \mathbf{p}]^2 f_N(\mathbf{p}), \quad (14.3.12)$$

или, переписывая эту формулу в координатном представлении,

$$[\delta E_N]_{F_1} = \frac{e^2}{24\pi^2 m_e^2} \left[ \ln \left( \frac{\mu^2}{m_e^2} \right) + \frac{2}{5} + \frac{3}{4} \right] \int d^3 x f_N^\dagger(\mathbf{x}) [e\nabla^2 \mathcal{A}^0(\mathbf{x})] f_N(\mathbf{x}). \quad (14.3.13)$$

В частности, для кулоновского потенциала (14.1.2) мы имеем равенство

$$e\nabla^2 \mathcal{A}^0(\mathbf{x}) = -Ze^2 \delta^3(\mathbf{x}).$$

Обозначим буквой  $N$  совокупность квантовых чисел электрона в атоме (главное квантовое число  $n$ , а также квантовые числа углового момента  $j, m, l$ ). Из (11.2.41) следует, что

$$[f_{njml}(0)]_\sigma = 2(Z\alpha m_e/n)^{3/2} \delta_{l,0} \delta_{\sigma,m} / \sqrt{4\pi}.$$

Сдвиг энергии (14.3.11) тогда дается формулой

$$[\delta E_{jnl}]_{F_1} = -\frac{2Z^4 \alpha^5 m_e}{3\pi n^3} \left[ \ln \left( \frac{\mu^2}{m_e^2} \right) + \frac{2}{5} + \frac{3}{4} \right] \delta_{l,0}. \quad (14.3.14)$$

(Тот факт, что  $\delta E$  не зависит от  $z$ -компоненты полного углового момента  $m$ , является следствием инвариантности относительно вращений.) Наличие слагаемого  $2/5$  в квадратных скобках в формулах (14.3.12) и (14.3.13) обусловлено поляризацией вакуума. Это слага-

гаемое в точности соответствует сдвигу энергии, вычисленному нами довольно эвристическим образом в §11.2.

Прежде чем переходить к вычислению магнитного и низкоэнергетического вкладов в выражение для сдвига энергии, стоит отметить, что результат, который мы уже получили, дает хорошую оценку величины лэмбовского сдвига. Мы можем ожидать, что низкоэнергетические члены содержат слагаемое, пропорциональное  $\ln(\mu/B)$ . При этом коэффициент пропорциональности должен оказаться таким, чтобы зависимость от  $\mu$  исчезла (в силу сокращения с таким же членом в (14.3.12)). Постоянная  $B$  имеет размерность энергии. Она необходима, так как аргумент логарифма должен быть безразмерной величиной. Вспомним, что именно энергия связи электрона в атоме определяет порог инфракрасного обрезания. Исходя из этого мы можем предположить, что  $B$  есть просто характеристическая энергия связи ( $B \approx (Z\alpha)^2 m_e$ ). В результате полный сдвиг энергии состояния  $N$  с главным квантовым числом  $n$  и орбитальным угловым моментом  $l$  дается формулой

$$\delta E_N = -\frac{2Z^4\alpha^5 m_e}{3\pi n^3} [\ln(Z^4\alpha^4)\delta_{l,0} + O(1)]. \quad (14.3.15)$$

Для состояния  $2s$  атома водорода вклад логарифмического члена равен

$$\delta E_{2s} \approx -\frac{\alpha^5 m_e}{12\pi} \ln(\alpha^4) = 5,5 \times 10^{-6} \text{ эВ} = 1300 \text{ МГц} \times 2\pi\hbar.$$

Как мы увидим позже, слагаемые в (14.3.15), обозначенные нами через “ $O(1)$ ”, уменьшают величину полного сдвига энергии приблизительно на 25%.

Рассмотрим теперь член, содержащий  $F_2$ . Мы видели в §10.6, что его вклад в матричный элемент  $\Gamma_1^\mu$ , можно интерпретировать как радиационную поправку к магнитному моменту электрона. Используя (14.3.10), (14.3.8) и (14.3.6), находим, что рассматриваемый член приводит к следующему сдвигу энергии:

$$[\delta E_N]_{F_2} = -\frac{e^2}{32\pi^2 m_e} \int d^3 p' \int d^3 p (\bar{u}_N(\mathbf{p}') [\gamma_\mu, \gamma_\nu] u_N(\mathbf{p})) \times e \mathcal{A}_\mu(\mathbf{p}' - \mathbf{p}) (p' - p)_\nu, \quad (14.3.16)$$

или, переписывая эту формулу в координатном представлении,

$$[\delta E_N]_{F_2} = \frac{ie^2}{64\pi^2 m_e} \int d^3 x (\bar{u}_N(\mathbf{x}) [\gamma^\mu, \gamma^\nu] u_N(\mathbf{x})) e \mathcal{F}_{\mu\nu}(\mathbf{x}). \quad (14.3.17)$$

Здесь

$$\mathcal{F}_{\mu\nu}(\mathbf{x}) \equiv \partial_\mu \mathcal{A}_\nu(\mathbf{x}) - \partial_\nu \mathcal{A}_\mu(\mathbf{x}). \quad (14.3.18)$$

В случае чисто электростатического поля с  $\mathcal{A} = 0$  мы получаем

$$[\delta E_N]_{F_2} = \frac{-ie^2}{32\pi^2 m_e} \int d^3x (\bar{u}_N(\mathbf{x}) [\gamma, \gamma^0] u_N(\mathbf{x})) \cdot \nabla [e\mathcal{A}^0(\mathbf{x})]. \quad (14.3.19)$$

В нерелятивистском пределе  $Z\alpha \ll 1$  мы можем использовать приближенную формулу (14.1.43), которая в нашем случае переписывается следующим образом:

$$\begin{aligned} \bar{u}_N[\gamma^0, \gamma] u_N &\approx \frac{i}{m_e} [(\nabla f_N^\dagger \cdot \boldsymbol{\sigma} \boldsymbol{\sigma} f_N) + (\nabla f_N^\dagger \boldsymbol{\sigma} \boldsymbol{\sigma} \cdot f_N)] = \\ &= \frac{i}{m_e} [\nabla(f_N^\dagger f_N) - i(\nabla f_N^\dagger \times \boldsymbol{\sigma}) f_N - i f_N^\dagger (\boldsymbol{\sigma} \times \nabla f_N)]. \end{aligned} \quad (14.3.20)$$

Используя последнюю формулу с целью преобразования (14.3.8) и интегрируя по частям, получаем

$$\begin{aligned} [\delta E_N]_{F_2} &= \frac{e^2}{32\pi^2 m_e^2} \int d^3x [-|f_N(\mathbf{x})|^2 \nabla^2(e\mathcal{A}^0(\mathbf{x})) + \\ &\quad + 2i f_N^\dagger(\mathbf{x}) \boldsymbol{\sigma} \cdot (\nabla(e\mathcal{A}^0(\mathbf{x})) \times f_N(\mathbf{x}))]. \end{aligned} \quad (14.3.21)$$

Суммируя (14.3.12) и (14.3.21), находим полный высокоэнергетический вклад в выражение для сдвига энергии электрона, помещенного в произвольный электростатический потенциал  $\mathcal{A}^0$ :

$$\begin{aligned} [\delta E_N]_{\text{high energy}} &= \\ &= \frac{e^2}{24\pi^2 m_e^2} \left[ \ln\left(\frac{\mu^2}{m_e^2}\right) + \frac{2}{5} \right] \int d^3x f_N^\dagger(\mathbf{x}) [e\nabla^2 \mathcal{A}^0(\mathbf{x})] f_N(\mathbf{x}) + \\ &\quad + \frac{ie^2}{16\pi^2 m_e^2} \int d^3x f_N^\dagger(\mathbf{x}) \boldsymbol{\sigma} \cdot (\nabla(e\mathcal{A}^0(\mathbf{x})) \times \nabla f_N(\mathbf{x})). \end{aligned} \quad (14.3.22)$$

### *Низкоэнергетический член*

Низкоэнергетический вклад в выражение для сдвига энергии определяется тремя первыми слагаемыми из формулы (14.2.24), в которой вместо обычного пропагатора фотона используется разность двух пропагаторов:

$$\frac{1}{k^2 - i\epsilon} \rightarrow \frac{1}{k^2 - i\epsilon} - \frac{1}{k^2 + \mu^2 - i\epsilon}. \quad (14.3.23)$$

Такая замена приводит к инфракрасному обрезанию интеграла по четырехимпульсу фотона. Порог обрезания по порядку величины равен  $\mu$ . Однако этого нельзя увидеть, если не принять во внимание перенормировку массы. По этой причине мы на данный момент воздержимся от каких-либо нерелятивистских приближений (до той поры, пока мы не вычислим перенормированную массу). Кроме того, мы сейчас рассматриваем импульсы фотона, по величине меньшие

или равные характерной энергии связи электрона в атоме. Следовательно, мы должны принять во внимание электростатические силы во всех порядках теории возмущений.

Формула (14.2.24) записана в импульсном представлении. Нам же будет удобно использовать ее координатное представление (14.2.18). Низкоэнергетический вклад в собственную энергию электрона дается выражением

$$\begin{aligned} [\Sigma_A^*(x, y)]_{\text{low energy}} &= \\ &= ie^2 \gamma^\rho S_{\mathcal{A}}(x, y) \gamma_\rho D(x - y; \mu) + \delta m_e(\mu) \delta^4(x - y) - \\ &\quad - (Z_2(\mu) - 1)(\gamma_\mu [\partial_\mu + ie\mathcal{A}_\mu] + m_e) \delta^4(x - y), \end{aligned} \quad (14.3.24)$$

где  $D(x - y; \mu)$  — модифицированный пропагатор фотона:

$$D(x - y; \mu) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4 k e^{ik \cdot (x-y)} \left[ \frac{1}{k^2 - ie} - \frac{1}{k^2 + \mu^2 - i\epsilon} \right]. \quad (14.3.25)$$

Контрчлены  $Z_2(\mu) - 1$  и  $\delta m(\mu)$  вычисляются с использованием именно этого модифицированного пропагатора. Переходя от времени к энергии с помощью фурье-преобразования, находим вклад в функцию (14.2.13), обусловленный фотонами с низкими энергиями:

$$\begin{aligned} [\Sigma_\alpha^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}; E)]_{\text{low energy}} &= \frac{ie^2}{(2\pi)^4} \int d^4 k \gamma^\rho S_\alpha(\mathbf{x}, \mathbf{y}; \mathbf{E} - \mathbf{k}^0) \gamma_\rho \times \\ &\quad \times \left[ \frac{1}{k^2 - ie} - \frac{1}{k^2 + \mu^2 - ie} \right] e^{i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{x}-\mathbf{y})} - \\ &\quad - (Z_2(\mu) - 1)(\gamma \cdot \nabla + i\gamma^0 E + ie\gamma^\nu \mathcal{A}_\nu + m_e) \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}) + \\ &\quad + \delta m_e(\mu) \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}). \end{aligned} \quad (14.3.26)$$

Низкоэнергетический вклад в выражение для сдвига энергии дается следующей формулой:

$$\begin{aligned} [\delta E_N]_{\text{low energy}} &= - \int d^3 x \int d^3 y \bar{u}_N(\mathbf{x}) [\Sigma_\alpha^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}; E_N)]_{\text{low energy}} u_N(\mathbf{y}) = \\ &= \frac{-ie^2}{(2\pi)^4} \int d^4 k \int d^3 x \int d^3 y \bar{u}_N(\mathbf{x}) \gamma^\rho S_\alpha(\mathbf{x}, \mathbf{y}; E_N - k^0) \gamma_\rho u_N(\mathbf{y}) \times \\ &\quad \times \left[ \frac{1}{k^2 - ie} - \frac{1}{k^2 + \mu^2 - ie} \right] e^{i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{x}-\mathbf{y})} - \\ &\quad - \delta m_e(\mu) \int d^3 x \bar{u}_N(\mathbf{x}) u_N(\mathbf{x}). \end{aligned} \quad (14.3.27)$$

Отметим, что члены, пропорциональные  $Z_2(\mu) - 1$ , пропали, поскольку дираковская волновая функция  $u_N(\mathbf{x})$  удовлетворяет уравнению Дирака (14.1.10). Пропагатор электрона в кулоновском поле дается

выражением (14.2.15):

$$S_{\mathcal{A}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}; E) = \sum_M \frac{u_M(\mathbf{x})\bar{u}_M(\mathbf{y})}{E_M - E - i\epsilon} - \sum_M \frac{\nu_M(\mathbf{x})\bar{\nu}_M(\mathbf{y})}{E_M - E - i\epsilon}.$$

Первое суммирование ведется по всем одноэлектронным, а второе — по всем однопозитронным состояниям. Интегралы по  $k^0$  легче всего вычислить, замыкая контур интегрирования с помощью полуокружности большого радиуса, расположенной в нижней полуплоскости в случае первого слагаемого и в верхней полуплоскости — в случае второго слагаемого:

$$\begin{aligned} \int dk^0 \left( \frac{1}{k^2 + \mu - i\epsilon} \right) \left( \frac{1}{E_M \mp E_N \pm k^0 - i\epsilon} \right) &= \\ &= \frac{i\pi}{\sqrt{\mathbf{k}^2 + \mu^2}} \left( \frac{1}{E_M \mp E_N + \sqrt{\mathbf{k}^2 + \mu^2} - i\epsilon} \right). \end{aligned}$$

Аналогично находится интеграл с  $\mu = 0$ . Выражение для сдвига энергии (14.3.27) приводится тогда к следующему виду:

$$\begin{aligned} [\delta E_N]_{\text{low energy}} &= -\frac{e^2}{2(2\pi)^3} \int d^3 k \sum_m \times \\ &\times \left[ \Gamma_{MN}^\rho(\mathbf{k})^* \Gamma_{\rho MN}(\mathbf{k}) \left( \frac{1}{|\mathbf{k}|(E_M - E_N + |\mathbf{k}| - i\epsilon)} - \right. \right. \\ &- \frac{1}{\sqrt{\mathbf{k}^2 + \mu^2}(E_M - E_N + \sqrt{\mathbf{k}^2 + \mu^2} - i\epsilon)} \Big) - \\ &- \widetilde{\Gamma}_{MN}^\rho(\mathbf{k})^* \widetilde{\Gamma}_{\rho MN}(\mathbf{k}) \left( \frac{1}{|\mathbf{k}|(E_M + E_N + |\mathbf{k}| - i\epsilon)} - \right. \\ &- \left. \left. \frac{1}{\sqrt{\mathbf{k}^2 + \mu^2}(E_M + E_N + \sqrt{\mathbf{k}^2 + \mu^2} - i\epsilon)} \right) \right] - \\ &- \delta m_e(\mu) \int d^3 x \bar{u}_N(\mathbf{x}) u_N(\mathbf{x}), \quad (14.3.28) \end{aligned}$$

где

$$\Gamma_{MN}^\rho(\mathbf{k}) \equiv \int d^3 y e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{y}} \bar{u}_M(\mathbf{y}) \gamma^\rho u_N(\mathbf{y}), \quad (14.3.29)$$

$$\widetilde{\Gamma}_{MN}^\rho(\mathbf{k}) \equiv \int d^3 y e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{y}} \bar{v}_M(\mathbf{y}) \gamma^\rho u_N(\mathbf{y}). \quad (14.3.30)$$

(Вклад электронных и позитронных состояний в “сумму” по  $M$ , входящую в формулу (14.3.28), таков: первое слагаемое определяется только электронными состояниями, второе — только позитронными.) Более прямой вывод формулы (14.3.28) можно дать в рамках старой теории возмущений. Знаменатели  $E_M - E_N + \omega$  и  $E_M + E_N + \omega$  получаются следующим образом: оба выражения равны разности энергий  $E_N$  начального и промежуточного состояний, причем последнее

состоит из лептона (в первом случае электрона, во втором — позитрона) с энергией  $E_M$  и фотона с энергией  $\omega$ . В обоих случаях начальной и конечной частицей является электрон. (См. рис. 14.2).

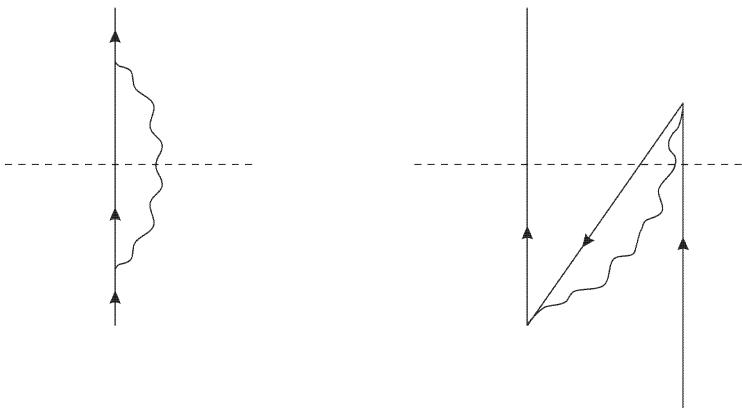


Рис. 14.2. Устаревший способ изображения диаграмм теории возмущений, описывающих низкоэнергетическую часть сдвига энергии электрона. Сплошные линии соответствуют электронам, волнистые — фотонам. Пунктирная линия пересекает линии частиц, соответствующих промежуточным состояниям, описываемым двумя первыми членами в (14.3.28)

Прежде чем делать какие-либо приближения к (14.3.28), удобно выразить временные компоненты матричных элементов  $\Gamma_{MN}^\rho$  и  $\tilde{\Gamma}_{MN}^\rho$  через соответствующие пространственные компоненты. Для этого воспользуемся соотношениями<sup>1)</sup>, получаемыми из закона сохранения электрического тока:

$$k_i \Gamma_{MN}^i(\mathbf{k}) = (E_N - E_M) \Gamma_{MN}^0(\mathbf{k}), \quad (14.3.31)$$

$$k_i \tilde{\Gamma}_{MN}^i(\mathbf{k}) = (E_N - E_M) \tilde{\Gamma}_{MN}^0(\mathbf{k}). \quad (14.3.32)$$

Более того, используя соотношение полноты (14.1.8), нетрудно показать, что

$$\sum_M [|\Gamma_{MN}^0(\mathbf{k})|^2 + |\tilde{\Gamma}_{MN}^0(\mathbf{k})|^2] = 1 \quad (14.3.33)$$

<sup>1)</sup> Чтобы вывести (14.3.31), заметим, что

$$\begin{aligned} k_i \Gamma_{MN}^i(\mathbf{k}) &= -i \int d^3x e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \nabla \cdot ((\bar{u}_M)(\mathbf{x}) \gamma u_N(\mathbf{x})) = \\ &= i \int d^3x e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \partial_0 [(\bar{u}_M(\mathbf{x}) \gamma^0 u_N(\mathbf{x})) e^{-i(E_N - E_M)x^0}]_{x^0=0} = \\ &= (E_N - E_M) \Gamma_{MN}^0(\mathbf{k}). \end{aligned}$$

Формула (14.3.32) выводится аналогичным образом.

и

$$\begin{aligned} \sum_M [|\Gamma_{MN}^{0*}(\mathbf{k})|^2(E_M - E_N) - |\tilde{\Gamma}_{MN}^0(\mathbf{k})|^2(E_M + E_N)] &= \\ = \sum_M [-\Gamma_{MN}^{0*}(\mathbf{k})\mathbf{k} \cdot \Gamma_{MN}(\mathbf{k}) - \tilde{\Gamma}_{MN}^{0*}(\mathbf{k})\mathbf{k}\tilde{\Gamma}_{MN}(\mathbf{k})] &= \\ = -i\mathbf{k} \cdot \int d^3x \bar{u}_N(\mathbf{x})\gamma u_N(\mathbf{x}) &= 0. \quad (14.3.34) \end{aligned}$$

Последний шаг следует из условия четности (14.1.23). В результате выражение (14.3.28) можно переписать следующим образом:

$$\begin{aligned} [\delta E_N]_{\text{low energy}} &= \\ = -\frac{e^2}{2(2\pi)^3} \int d^3k \sum_m &\left[ \frac{(|\Gamma_{MN}(\mathbf{k})|^2 - |\mathbf{k} \cdot \Gamma_{MN}(\mathbf{k})|^2/\mathbf{k}^2)}{|\mathbf{k}|(E_M - E_N + |\mathbf{k}| - i\epsilon)} - \right. \\ \left. - \frac{(|\Gamma_{MN}(\mathbf{k})|^2 - |\mathbf{k} \cdot \Gamma_{MN}(\mathbf{k})|^2/(\mathbf{k}^2 + \mu^2))}{\sqrt{\mathbf{k}^2 + \mu^2}(E_M - E_N + \sqrt{\mathbf{k}^2 + \mu^2} - i\epsilon)} \right] + \\ + \frac{e^2}{2(2\pi)^3} \int d^3k \sum_M &\left[ \frac{(|\tilde{\Gamma}_{MN}(\mathbf{k})|^2 - |\mathbf{k} \cdot \tilde{\Gamma}_{MN}(\mathbf{k})|^2/\mathbf{k}^2)}{|\mathbf{k}|(E_M + E_N + |\mathbf{k}|)} - \right. \\ \left. - \frac{(|\tilde{\Gamma}_{MN}(\mathbf{k})|^2 - |\mathbf{k} \cdot \tilde{\Gamma}_{MN}(\mathbf{k})|^2/(\mathbf{k}^2 + \mu^2))}{\sqrt{\mathbf{k}^2 + \mu^2}(E_M + E_N + \sqrt{\mathbf{k}^2 + \mu^2} - i\epsilon)} \right] - \\ - \frac{e^2}{2(2\pi)^3} \int d^3k \sum_M &|\tilde{\Gamma}_{MN}^0(\mathbf{k})|^2 \left( \frac{1}{\mathbf{k}^2} - \frac{1}{\mathbf{k}^2 + \mu^2} \right) + \\ + \frac{1}{2} \alpha\mu - \delta m_e(\mu) \int d^3x \bar{u}_N(\mathbf{x})u_N(\mathbf{x}). & \quad (14.3.35) \end{aligned}$$

В предпоследнем слагаемом мы использовали элементарный интеграл

$$\int d^3k \left( \frac{1}{\mathbf{k}^2} - \frac{1}{\mathbf{k}^2 + \mu^2} \right) = 2\mu\pi^2.$$

Все равенства, с которыми мы имели дело до сих пор, были точными. Теперь мы должны сделать несколько приближений. Во-первых, рассмотрим перенормировку массы. В § 11.4 мы вычислили  $\delta m_e(\mu)$  с точностью до членов первого порядка по  $\alpha$ :

$$\delta m_e(\mu) = \frac{2m_e\pi^2 e^2}{(2\pi)^4} \int_0^1 dx [1+x] \ln \left( \frac{m_e^2 x^2 + \mu^2(1-x)}{m_e^2 x^2} \right). \quad (14.3.36)$$

Хотя в § 11.4 мы рассматривали  $\mu$  как массу регулятора (причем считалось, что  $\mu \gg m_e$ ), мы точно так же можем использовать (14.3.36) в интересном для нас случае  $\mu \ll m_e$ . В этом пределе выражение (14.3.36) сводится к

$$m_e(\mu) \rightarrow \frac{\alpha\mu}{2} \left[ 1 - \frac{3\mu}{2\pi m_e} + \dots \right]. \quad (14.3.37)$$

Вспомним теперь, что  $u_N(\mathbf{x})$  при  $Z\alpha \ll 1$  определяется формулой (14.1.37):

$$u_N(\mathbf{x}) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[ \frac{(1 - \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{v}/2 + \dots) f_N(\mathbf{x})}{(1 + \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{v}/2 + \dots) f_N(\mathbf{x})} \right]. \quad (14.3.38)$$

Многоточиями здесь обозначены члены высших порядков по  $Z\alpha$ ,  $\mathbf{v}$  — нерелятивистский оператор скорости:  $-i\nabla/m_e$ ,  $f_N(\mathbf{x})$  — двухкомпонентное спинорное решение нерелятивистского уравнения Шредингера, нормированное условием (14.1.38):

$$\int |f_N(\mathbf{x})|^2 = 1 - \frac{1}{4} (\mathbf{v}^2)_{NN} + \dots \quad (14.3.39)$$

Отсюда мы получаем коэффициент при  $\delta m_e(\mu)$  в (14.3.35):

$$\int d^3x \bar{u}_N(\mathbf{x}) u_N(\mathbf{x}) = 1 - \frac{1}{4} (\mathbf{v}^2)_{NN} + \dots \quad (14.3.40)$$

Непосредственно видно, что главный член в  $-\delta m_e(\mu) \int d^3x \bar{u}_N u_N$  взаимно уничтожается со слагаемым  $\alpha\mu/2$  в (14.3.35). На самом деле, мы могли бы предсказать заранее такое уничтожение, поскольку член  $\alpha\mu/2$  в (14.3.35) не зануляется в пределе  $Z\alpha \rightarrow 0$ , а из определения перенормированной массы электрона  $m_e(\mu)$  следует, что никакого сдвига энергии в этом пределе быть не может. По той же самой причине, можно предсказать заранее, что член порядка  $\alpha\mu^2/m_e$  в выражении для  $\delta m_e(\mu)$  (этот член больше, чем член порядка  $\alpha(Z\alpha)^4 m_e$ , и поэтому им нельзя просто пренебречь) взаимно уничтожается со вторым и третьим слагаемыми в (14.3.35) (оба слагаемых имеют тот же порядок)<sup>2)</sup>. С другой стороны, если мы перемножим член порядка  $\alpha\mu^2/m_e$  в разложении для  $\delta m_e$  и второе слагаемое в матричном элементе (14.3.40), то произведение будет представлять собой величину

<sup>2)</sup> Уничтожение происходит следующим образом. Мы предполагаем, что второй и третий члены в (14.3.35) достаточно малы, и поэтому при их вычислении можно использовать нерелятивистское приближение  $\beta u_N(\mathbf{x}) = u_N(\mathbf{x})$ , где функция  $u_N(\mathbf{x})$  удовлетворяет уравнению Дирака. С другой стороны, хотя кулоновским взаимодействием в позитронных волновых функциях  $v_M(\mathbf{x})$  можно пренебречь, релятивистские позитроны вносят важный вклад в сумму по  $M$  в третьем слагаемом. Поэтому мы воспользуемся следующим приближением:  $v_{\mathbf{p},\sigma}(\mathbf{x}) \approx (2\pi)^{-3/2} v(\mathbf{p},\sigma) e^{ip \cdot x}$ , где  $v(\mathbf{p},\sigma)$  — позитронный спинор, введенный в § 5.5 и удовлетворяющий нормировочному условию  $\bar{v}(\mathbf{p},\sigma') v(\mathbf{p},\sigma) = \delta_{\sigma',\sigma}$ . В результате суммы по  $M$  во втором и третьем членах в (14.3.35) даются приближенными формулами

$$\frac{1}{2} \left[ \sum_M \tilde{\Gamma}_{MN}^{i*}(\mathbf{k}) \tilde{\Gamma}_{MN}^j(\mathbf{k}) + (i \leftrightarrow j) \right] \approx \delta_{ij} \left( \frac{\sqrt{\mathbf{k}^2 + m_e^2} + m_e}{2\sqrt{\mathbf{k}^2 + m_e^2}} \right),$$

$$\sum_M |\tilde{\Gamma}_{MN}^0(\mathbf{k})|^2 \approx \left( \frac{\sqrt{\mathbf{k}^2 + m_e^2} + m_e}{2\sqrt{\mathbf{k}^2 + m_e^2}} \right).$$

В главном порядке по  $\mu/m_e$  второй и третий члены в (14.3.35) равны тогда

порядка  $(Z\alpha)^2 \alpha \mu^2 / m_e \ll \alpha(Z\alpha)^4 m_e$ , и поэтому им можно пренебречь. С точностью до членов порядка  $\alpha(Z\alpha)^4 m_e$ , все, что остается от перенормировки массы, — это произведение ведущего члена в разложении  $\delta m_e(\mu)$  и члена порядка  $(Z\alpha)^2$  в  $\int d^3x \bar{u}_N u_N$ :

$$-\left[\frac{e^2 \mu}{8\pi}\right] \left[-\frac{1}{2} (\mathbf{v}^2)_{NN}\right] = \frac{e^2 \mu}{16\pi} (\nu^2)_{NN}.$$

(Это и есть то самое влияние перенормировки массы на кинетическую энергию электрона, упомянутое в § 1.3.) Оказывается, что если бы мы пренебрели разностью уровней энергии, то первый член в формуле (14.3.35) в точности совпал бы с последним выражением, взятым с обратным знаком. Чтобы увидеть это, заметим, что эффективный порог обрезания интеграла в этом члене равен  $|\mathbf{k}| \sim \mu \ll Z\alpha m_e$ , так что мы можем вычислить матричный элемент  $\Gamma_{MN}(\mathbf{k})$  в пределе  $\mathbf{k} \rightarrow 0$ . В низшем порядке по  $Z\alpha$  из формулы (14.1.42) следует равенство

$$\Gamma_{MN}(0) = (\mathbf{v})_{MN}. \quad (14.3.41)$$

Воспользовавшись полнотой набора решений  $f_N$  нерелятивистского уравнения Шредингера, мы получаем

$$\sum_M \Gamma_{MN}^{i*}(\mathbf{k}) \Gamma_{MN}^j \approx (v^i v^j)_{NN}. \quad (14.3.42)$$

Поэтому, с той же точностью,

$$-\frac{e^2}{2(2\pi)^3} \int d^3k \sum_M \left[ \frac{(|\Gamma_{MN}(\mathbf{k})|^2 - |\mathbf{k} \cdot \Gamma_{MN}(\mathbf{k})|^2 / \mathbf{k}^2)}{\mathbf{k}^2} - \frac{(|\Gamma_{MN}(\mathbf{k})|^2 - |\mathbf{k} \cdot \Gamma_{MN}(\mathbf{k})|^2 / (\mathbf{k}^2 + \mu^2))}{\mathbf{k}^2 + \mu^2} \right] \approx$$

соответственно

$$\frac{e^2}{4m_e(2\pi)^3} \int d^3k \left[ \frac{2}{k} - \frac{(3 - \mathbf{k}^2 / (\mathbf{k}^2 + \mu^2))}{\sqrt{\mathbf{k}^2 + \mu^2}} \right] \left( \frac{\sqrt{\mathbf{k}^2 + m_e^2} + m_e}{2\sqrt{\mathbf{k}^2 + m_e^2}} \right) \approx \frac{\alpha \mu^2}{4\pi m_e}$$

и

$$-\frac{e^2}{2(2\pi)^3} \int d^3k \left( \frac{1}{\mathbf{k}^2} - \frac{1}{\mathbf{k}^2 + \mu^2} \right) \left( \frac{\sqrt{\mathbf{k}^2 + m_e^2} + m_e}{2\sqrt{\mathbf{k}^2 + m_e^2}} \right) \approx \frac{\alpha \mu^2}{\pi m_e}.$$

(Уравнение (14.3.32) исключает возможность того, что релятивистская поправка к последнему выражению не окажется подавленной множителем  $\mathbf{k}^2 / m_e^2$ , возникающим в этом выражении при  $|\mathbf{k}|^2 \ll m_e^2$ .) Эти два члена взаимно уничтожаются со слагаемым  $+3\alpha\mu^2/4\pi m_e$  в  $-\delta m_e(\mu) \times \int d^3x \bar{u}_N(\mathbf{x}) u_N(\mathbf{x})$ . Отметим, наконец, что релятивистские поправки к приведенным выше оценочным выражениям для сумм по позитронным состояниям должны содержать дополнительные множители  $v^2/c^2 \approx (Z\alpha)^2$ . В результате вклад этих релятивистских поправок оказывается величиной порядка  $\alpha(Z\alpha)^2 \mu^2 / m_e \ll \alpha(Z\alpha)^4 m_e$ . Отсюда следует, что нерелятивистские приближения, использованные здесь, справедливы.

$$\approx -\frac{e^2}{2(2\pi)^3} (\mathbf{v}^2)_{NN} \int d^3 k \left[ \frac{2}{3\mathbf{k}^2} - \frac{(1 - \mathbf{k}^2/3(\mathbf{k}^2 + \mu^2))}{\mathbf{k}^2 + \mu^2} \right] = \\ = -\frac{e^2 \mu}{16\pi} (\nu^2)_{NN}.$$

Таким образом, после перенормировки массы от правой части (14.3.35) у нас остается следующее выражение:

$$[\delta E_N]_{\text{low energy}} = \frac{e^2}{2(2\pi)^3} \int d^3 k \sum_M (E_M - E_N) \times \\ \times \left[ \frac{(|\Gamma_{MN}(\mathbf{k})|^2 - |\mathbf{k} \cdot \Gamma_{MN}(\mathbf{k})|^2/\mathbf{k}^2)}{\mathbf{k}^2(E_M - E_N + |\mathbf{k}| - i\epsilon)} - \right. \\ \left. - \frac{(|\Gamma_{MN}(\mathbf{k})|^2 - |\mathbf{k} \cdot \Gamma_{MN}(\mathbf{k})|^2/(\mathbf{k}^2 + \mu^2))}{(\mathbf{k}^2 + \mu^2)(E_M - E_N + \sqrt{\mathbf{k}^2 + \mu^2} - i\epsilon)} \right]. \quad (14.3.43)$$

Вновь используя (14.3.41), получаем

$$[\delta E_N]_{\text{low energy}} = \frac{e^2}{2(2\pi)^3} \sum_M (E_M - E_N) |\mathbf{v}_{MN}|^2 \times \\ \times \int d^3 k \left[ \frac{2}{3\mathbf{k}^2(E_M - E_N + |\mathbf{k}| - i\epsilon)} - \right. \\ \left. - \frac{1 - \mathbf{k}^2/3(\mathbf{k}^2 + \mu^2)}{(\mathbf{k}^2 + \mu^2)(E_M - E_N + \sqrt{\mathbf{k}^2 + \mu^2} - i\epsilon)} \right]. \quad (14.3.44)$$

Характерные значения импульса электрона обычно намного больше расстояния между атомными уровнями энергии. Тем не менее это неверно для величины  $|\mathbf{k}|$  в подынтегральном выражении, поскольку интеграл в противном случае содержал бы инфракрасную расходимость (так как разностью  $E_M - E_N$  в знаменателях можно было бы тогда пренебречь). Интеграл в (14.3.44) в пределе  $\mu \gg |E_M - E_N| \sim \sim (Z\alpha)^2 m_e$  вычисляется с помощью разбиения области интегрирования по  $|\mathbf{k}|$  на две части. Для одной области справедливо неравенство  $0 < |\mathbf{k}| < \lambda$ , для второй — неравенство  $\lambda < \infty$ , причем  $\lambda$  выбирается таким образом, чтобы  $|E_M - E_N| \ll \lambda \ll \mu$ . В результате мы получаем

$$\int_0^\infty k^2 dk \left[ \frac{2}{3\mathbf{k}^2(E_M - E_N + \mathbf{k}) - i\epsilon} - \right. \\ \left. - \frac{1 - \mathbf{k}^2/3(\mathbf{k}^2 + \mu^2)}{(\mathbf{k}^2 + \mu^2)(E_M - E_N + \sqrt{\mathbf{k}^2 + \mu^2} - i\epsilon)} \right] \approx \\ \approx \frac{2}{3} \left[ \ln \left( \frac{\mu}{2|E_M - E_N|} \right) + \frac{5}{6} + i\pi\theta(E_N - E_M) \right].$$

Мнимое слагаемое отвечает возможности перехода атома из состояния  $N$  в состояние  $M$  с меньшей энергией. Вероятность такого перехода определяется мнимой частью сдвига энергии. Нас больше интересует вещественная часть, и поэтому в дальнейшем мы будем опускать

мнимый член. Формула (14.3.44) сводится к

$$[\delta E_N]_{\text{low energy}} = \frac{e^2}{6\pi^2} \sum_M (E_M - E_N) |\mathbf{v}_{MN}|^2 \left[ \ln\left(\frac{\mu}{2|E_M - E_N|}\right) + \frac{5}{6} \right]. \quad (14.3.45)$$

### C. Полное выражение для сдвига энергии

Нам нужно связать друг с другом сумму в (14.3.45) и матричный элемент в высокоэнергетическом члене (14.3.22). Задавшись этой целью, найдем сначала значение, которое принимала бы сумма в (14.3.45) в случае, если бы мы могли пренебречь логарифмом. Замечая, что  $(E_M - E_N)\mathbf{v}_{NM} = [\mathbf{v}, H]_{NM}$ , получаем

$$\begin{aligned} \sum_M (E_M - E_N) |\mathbf{v}_{MN}|^2 &= \frac{1}{2} \sum_M ([v^i, H]_{NM} v^i_{MN} + v^i_{MN} [H, v^i]_{MN}) = \\ &= -\frac{1}{2m_e^2} ([p^i, [p^i, H]])_{NN}. \end{aligned}$$

Единственным членом в нерелятивистском гамильтониане  $H$ , некоммутирующим с оператором импульса  $\mathbf{p}$ , является потенциальная энергия  $-e\mathcal{A}^0(\mathbf{x})$ . Следовательно,

$$\sum_M (E_M - E_N) |\mathbf{v}_{MN}|^2 = -\frac{e}{2m_e^2} (\nabla^2 \mathcal{A}^0(\mathbf{x}))_{NN}. \quad (14.3.46)$$

Из (14.3.45) и (14.3.22) видно, что слагаемое в высокоэнергетическом члене, пропорциональное  $\ln \mu$ , взаимно уничтожается с таким же слагаемым в низкоэнергетическом члене:

$$\begin{aligned} \delta E_N &= [\delta E_N]_{\text{high energy}} + [\delta E_N]_{\text{low energy}} = \\ &= \frac{e^2}{6\pi^2} \sum_M (E_M - E_N) |\mathbf{v}_{MN}|^2 \left[ \ln\left(\frac{m_e}{2|E_N - E_M|}\right) + \frac{5}{6} - \frac{1}{5} \right] - \\ &\quad - \frac{e^2}{16\pi^2 m_e^2} (\boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla (e\mathcal{A}(\mathbf{x})) \times \mathbf{p})_{NN}. \quad (14.3.47) \end{aligned}$$

Все высказанное справедливо для произвольного электростатического поля  $\mathcal{A}^0(\mathbf{x})$ . Нас же интересует частный случай чисто кулоновского поля, для которого справедливо равенство

$$\mathcal{A}^0(\mathbf{x}) = Ze/|\mathbf{x}|. \quad (14.3.48)$$

В этом случае формула (14.3.46) приобретает вид

$$\sum_M (E_M - E_N) |\mathbf{v}_{MN}|^2 = \frac{Ze^2}{2m_e^2} (\boldsymbol{\sigma}^3(\mathbf{x}))_{NN} = \frac{Ze^2}{2m_e^2} (f_N^\dagger(0)f_N(0)). \quad (14.3.49)$$

Правая часть последней формулы не равна нулю только, когда  $l = 0$ . Матричный элемент в (14.3.47) принимает следующее значение:

$$(\boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla (e\mathcal{A}(\mathbf{x})) \times \mathbf{p})_{NN} = -Ze \left( \frac{1}{r^3} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{L} \right)_{NN}. \quad (14.3.50)$$

На этот раз правая часть не равна нулю только при  $l \neq 0$ . Поэтому случаи  $l = 0$  и  $l \neq 0$  имеет смысл рассматривать отдельно.

**i.**  $l = 0$ .

Здесь нам будет удобно вычислить среднюю энергию возбуждений  $\Delta E_N$ :

$$\begin{aligned} \sum_M |\mathbf{v}_{MN}|^2 (E_M - E_N) \ln |E_N - E_M| &\equiv \ln \Delta E_N \sum_M |\mathbf{v}|^2 (E_M - E_N) = \\ &= \frac{Ze^2}{2m_e^2} \ln \Delta E_N (f_N^\dagger(0)f_N(0)). \end{aligned} \quad (14.3.51)$$

Состояния  $s$  атома водорода определяются следующим набором квантовых чисел  $N$ : главным квантовым числом  $n$ ,  $z$ -компонентой спина  $m$ . Поскольку  $[f_{nm}(0)]_\sigma = 2(Z\alpha m_e/n)^{3/2} \delta_{\sigma,m} / \sqrt{4\pi}$ , справедлива формула

$$(f_N^\dagger(0)f_N(0)) = \frac{1}{\pi} \left( \frac{Z\alpha m_e}{n} \right)^3. \quad (14.3.52)$$

Подставляя (14.3.51) и (14.3.52) в (14.3.47), находим сдвиг энергии  $s$ -состояний:

$$[\delta E]_{n,l=0} = \frac{4\alpha(Z\alpha)^4 m_e}{3\pi n^3} \left[ \ln \left( \frac{m_e}{2\Delta E_{n,l=0}} \right) + \frac{19}{30} \right]. \quad (14.3.53)$$

**ii.**  $l = 0$ .

В этом случае сумма (14.3.49) равна нулю. Поэтому формула (14.3.51) перестает быть справедливой. Вместо нее принято использовать следующее выражение для средней энергии возбуждений  $\Delta E_N$ :

$$\sum_M |\mathbf{v}_{MN}|^2 (E_M - E_N) \ln |E_N - E_M| \equiv \frac{2(Z\alpha)^4 m_e}{n^3} \left( \ln \frac{2\Delta E_N}{Z^2 \alpha^2 m_e} \right). \quad (14.3.54)$$

(Так как сумма (14.3.49) зануляется, то безразлично, в каких единицах измеряется разность  $E_N - E_M$  в (14.3.54).) В состоянии с полным угловым моментом  $j$ , орбитальным угловым моментом  $l$  и главным квантовым числом  $n$ , скалярное произведение  $\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{L}$  равно  $j(j+1) - l(l+1) - 3/4$ , а среднее значение оператора  $1/r^3$  дается формулой

$$\int d^3r |\mathbf{f}_N|^2 / r^3 = \frac{2Z^3 \alpha^3 m_e^3}{n^3 l(l+1)(2l+1)}. \quad (14.3.55)$$

В результате выражение (14.3.47) сводится к

$$\begin{aligned} [\delta E]_{jnl} = -\frac{4\alpha(Z\alpha)^4 m_e}{3\pi n^3} \ln \left( \frac{2\Delta E_{jnl}}{Z^2 \alpha^2} m_e \right) + \\ + \frac{\alpha(Z\alpha)^4 m_e}{2\pi n^3} \left[ \frac{j(j+1) - l - l(l+1) - 3/4}{l(l+1)(2l+1)} \right]. \end{aligned} \quad (14.3.56)$$

Полученные результаты теперь можно использовать, для вычисления сдвига энергии. Средняя энергия возбуждений в этом случае находится численно. Воспользовавшись выражениями для нерелятивистских волновых функций атома водорода, получим искомый ответ [5]:

$$\Delta E_{1s} = 19,769266917(6) \text{ Ry},$$

$$\Delta E_{2s} = 16,63934203(1) \text{ Ry}, \quad \Delta E_{2p} = 0,9704293186(3) \text{ Ry},$$

Здесь  $1 \text{ Ry} \equiv m_e \alpha^2 / 2 = 13,6057 \text{ эВ}$ . Из (14.3.53) находим

$$[\delta E]_{1s} = \frac{4\alpha^5 m_e}{3\pi} \left[ \ln\left(\frac{m_e}{2\Delta E_{1s}}\right) + \frac{19}{30} \right] = 3,3612 \times 10^{-6} \text{ эВ} = \\ = 2\pi\hbar \times 8127,4 \text{ МГц}, \quad (14.3.57)$$

$$[\delta E]_{2s} = \frac{\alpha^5 m_e}{6\pi} \left[ \ln\left(\frac{m_e}{2\Delta E_{2s}}\right) + \frac{19}{30} \right] = 4,2982 \times 10^{-5} \text{ эВ} = \\ = 2\pi\hbar \times 1039,31 \text{ МГц}, \quad (14.3.58)$$

в то время как из (14.3.56) следует, что

$$[\delta E]_{2p_{1/2}} = \frac{\alpha^5 m_e}{6\pi} \left[ \ln\left(\frac{\alpha^2 m_e}{2\Delta E_{2p}}\right) - \frac{1}{8} \right] = -5,3267 \times 10^{-8} \text{ эВ} = \\ = 2\pi\hbar \times -12,88 \text{ МГц}. \quad (14.3.59)$$

Классический лэмбовский сдвиг определяется как разность энергий состояний  $2s$  и  $2p_{1/2}$  атома водорода. (В отсутствие радиационных поправок эти энергии одинаковы.) Наше вычисление показывает, что

$$[\delta E]_{2s} - [\delta E]_{2p_{1/2}} = 4,35152 \times 10^{-6} \text{ эВ} = 2\pi\hbar \times 1052,19 \text{ МГц}.$$

Этот ответ находится в согласии со старыми результатами Кролля–Лэмба [6], с одной стороны, и Френча–Вайскопфа [7] — с другой, полученными с помощью методов старого варианта теории возмущений. Ранее в этом параграфе мы получили грубую оценку для лэмбовского сдвига (1300 МГц), приняв во внимание только высокоэнергетический вклад в выражение для сдвига энергии уровня  $2s$ . При этом мы предполагали, что инфракрасный порог обрезания в этом случае имеет порядок  $\alpha^2 m_e = 2 \text{ Ry}$ . Мы видим теперь, что наша оценка оказалась значительно больше реального значения. Причиной этого является то обстоятельство, что истинная величина инфракрасного обрезания равна  $\Delta E_{2s} = 16,64 \text{ Ry}$ , что значительно больше предполагаемой ранее. С другой стороны, как мы видели в § 1.3, в 1947 г. Гансу Бете [8] удалось получить довольно хорошую оценку лэмбовского сдвига (1040 МГц), приняв во внимание только *низкоэнергетический* вклад в выражение для сдвига энергии уровня  $2s$ . При этом *ультрафиолетовое* обрезание производилось на импульсах порядка  $m_e$ . (Первая оценка энергии возбуждения, полученная Бете, была равна  $\Delta E_{2s} \approx 17,8 \text{ Ry}$ .)

Более точное значение лэмбовского сдвига можно найти, учтя радиационные поправки высших порядков, размер ядра, а также явление отдачи. В настоящее время наибольшая неопределенность происходит из-за неточного среднеквадратичного значения зарядового радиуса протона  $r_p$ . Если  $r_p = 0,862 \times 10^{-13} \text{ см}$ , то лэмбовский сдвиг оказывается равным 1057,87 МГц [9]; если же  $r_p = 0,805 \times 10^{-13} \text{ см}$ , то лэмбовский сдвиг равен 1057,85 МГц [9]. Некоторые авторы [10] приводят другие значения для лэмбовского сдвига (1057,883 МГц или 1057,865 МГц). Если принять во внимание большую погрешность для радиуса протона, согласие с экспериментом отличное (современное экспериментальное значение [11] — 1057,845(9) МГц). Точность

эксперимента ограничена главным образом естественной шириной ( $\sim 100$  МГц) состояния  $2p$  в атоме водорода. По этой причине существенно улучшить результат будет очень трудно.

За последние несколько лет были получены важные результаты, касающиеся измерения сдвига энергии основного состояния  $1s$ . Эксперимент заключался в сравнении частоты резонанса  $1s-2s$  с учетверенными частотами двухфотонных резонансов  $2s-4s$  и  $2s-4d$ . Ширина соответствующих  $s$ - и  $d$ -состояний намного меньше ширины состояния  $2p$ . Поэтому разности частот можно измерить с большей точностью, чем классический лэмбовский сдвиг. В течение некоторого короткого времени казалось, что между теорией и экспериментом имеется расхождение. Однако вычисления [12, 13] показали, что если радиус протона равен  $r_p = 0,862(11) \times 10^{-13}$  см, то учет конечного размера ядра и другие поправки приводят к увеличению теоретического значения сдвига энергии уровня  $1s$  с 8127,4 МГц до 8173,12(6) МГц. Если же радиус протона равен  $r_p = 0,805(11) \times 10^{-13}$  см, то с учетом поправок результат оказывается равным 8172,94(9) МГц. Значение радиуса протона  $r_p = 0,862(11) \times 10^{-13}$  см представляется наиболее надежным. Тем не менее соответствующее ему значение 8173,12(6) МГц не совпадает с экспериментальным результатом 8172,86(5) МГц [13]. Дальнейшие вычисления [14] показали, что учет членов порядка  $\alpha^2(Z\alpha)^5$  приводит к тому, что сдвиги энергий уровней  $1s$ ,  $2s$  и  $4s$  согласуются с экспериментом. Таким образом, квантовая электродинамика вновь восторжествовала.

## Задачи

**1.** Рассмотрим заряженную скалярную частицу с массой  $m \neq 0$ , которой соответствует поле  $\phi(x)$ , взаимодействующее только с внешним, зависящим от времени электромагнитным полем  $\mathcal{A}^\mu(x)$ . Обозначим через  $\Phi_N$  полный набор нормированных одночастичных (один бозон или один антибозон) состояний с энергией  $E_N$ . Кроме того, пусть, по определению,  $u_N(x)e^{-iE_N t} \equiv (\Phi_0, \phi(x, t)\Phi_N)$  и  $v_N(x)e^{iE_N t} \equiv \equiv (\Phi_N, \phi(x, t)\Phi_0)$ , где  $\Phi_0$  — вакуумное состояние. Покажите, что совокупность всех  $u_N$  и  $v_N$  образует полный набор, и найдите формулы для коэффициентов разложения произвольной функции  $f(x)$  по этому полному набору.

**2.** Предположим, что для системы из предыдущей задачи мы учли радиационные поправки. Через  $i\Pi^*(x, y)$  обозначим сумму всех диаграмм с одной входящей и одной выходящей заряженной скалярной частицей первого порядка по  $\alpha$ . Выведите формулу для сдвига энергии  $E_N$  однобозонных состояний, обусловленного радиационными поправками. Ответ выразите через  $u_N(x)$  и  $\Pi^*(x, y)$ .

**3.** Используя результаты § 14.3, вычислите скорость распада состояния  $2p$  атома водорода.

4. Предположим, что взаимодействию электрона с легким скалярным полем  $\phi$  в лагранжиане соответствует член вида  $g\phi\bar{\psi}_e\psi_e$ . Пусть при этом масса скалярного поля  $m_\phi$  удовлетворяет неравенствам  $(Z\alpha)^2 m_e \ll m_\phi \ll Z\alpha m_e$ . Вычислить изменение энергии состояния  $1s$  атома водорода, обусловленное этим взаимодействием.

5. Решите задачу 4 в случае  $m_\phi = 0$ .

## Литература

1. *Dirac P.A.M.* // Proc. Roy. Soc. (London). **A117**, 610 (1928).
2. См., например, *Edmonds A.R.* Angular Momentum in Quantum Mechanics. Princeton University Press, Princeton, 1957; *Rose M.E.* Elementary Theory of Angular Momentum. John Wiley & Sons, N.Y., 1957.
3. См., например, *Schiff L.I.* Quantum Mechanics. McGraw-Hill, N.Y., 1949. Section 43. [Рус. пер.: *Шифф Л.* Квантовая механика.—М.: Изд-во иностранной литературы, 1959.] Оригинальные ссылки: *Darwin C.G.* // Proc. Roy. Soc. (London). **A118**, 654 (1928); там же, **A120**, 621 (1928); *Gordon W.* // Zeit. f. Phys. **48**, 11 (1928).
4. *Brown G.E., Langer J.S., Schaefer G.W.* // Proc. Roy. Soc. (London). **A251**, 92 (1959); *Brown G.E., Mayers D.F.* // Proc. Roy. Soc. (London). **A251**, 105 (1959); *Desiderio A.M., Johnson W.R.* // Phys. Rev. **A3**, 1267 (1971).
5. *Huff R.W.* // Phys. Rev. **186**, 1367 (1969).
6. *Kroll N.M., Lamb W.E.* // Phys. Rev. **75**, 388 (1949).
7. *French J.B., Weisskopf V.F.* // Phys. Rev. **75**, 1240 (1949).
8. *Bethe H.A.* // Phys. Rev. **72**, 339 (1947).
9. *Sapirstein J.R., Yennie D.R.* // In: *Quantum Electrodynamics*, ed. by T. Kinoshita. World Scientific, Singapore, 1990. P. 575. См. также ссылки, приведенные в данном сборнике.
10. *Grotch H.* // Foundations of Physics. **24**, 249 (1994).
11. *Lundeen S.R., Pipkin F.M.* // Phys. Rev. Lett. **46**, 232 (1981); *Lundeen S.R., Pipkin F.M.* // Metrologia. **22**, 9 (1986). Обзором по вопросу является работа *Pipkin F.M.* // In: *Quantum Electrodynamics*, ed. by T. Kinoshita. World Scientific, Singapore, 1990. P. 697.
12. *Weitz M., Huber A., Schmidt-Kaler F., Leibfried D., Hänsch T.W.* // Phys. Rev. Lett. **72**, 328 (1994).
13. *Weitz M., Schmidt-Kaler F., Hänsch T.W.* // Phys. Rev. Lett. **68**, 1120 (1992). См. также ссылку 12.
14. *Pachucki K.* // Phys. Rev. Lett. **72**, 3154 (1994).

## ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

- Абелевы группы, определение 72  
Аксиальная калибровка 372  
Аксиомы Остервальдера–Шрадера 411, 455  
Альфа–распад 184  
Амплитуда рассеяния ( $F$ ) 171, 177–178, 498–499  
Анионы 450  
Аномальный эффект Зеемана 20  
Антиунитарные и антилинейные операторы, определение 69  
Античастицы 29, 39–45, 124, 172–173, 226, 606  
Ароматы (лептонов) 566
- Баба (электрон–позитронное) рас-  
сечение 45  
 $\Delta$ -барион 190  
Барионное число, определение 147  
Белинфантен тензор 342  
Березина интегрирование, опреде-  
ление 431  
Бесконечности, см. ультрафиоле-  
товые расходимости, инфракрас-  
ные расходимости  
Бета–распад 38, 46, 149, 169, 256,  
555  
Бете–Солпитера уравнение 601  
Бозе–Эйнштейна статистика 26,  
195–198, 448–450  
Больцмана  $H$ -теорема 175  
Борна приближение 137, 180  
“БПХЦ” алгоритм 548–549  
Брейта–Вигнера формула 187  
Буст, определение 79
- Вакуумная энергия 40, 42  
Вакуумное состояние 40, 43, 202
- Вероятности в квантовой механике 21, 43–44, 50, 67  
Вершинная часть ( $\Gamma_\mu$ ) 477, 517,  
542–543, 619–620  
— волновая функция 413–416  
Взаимодействия представление 165,  
314  
— для векторного поля 347–350  
— для дираковского поля 350–352  
— для скалярного поля 331–332,  
350  
— для электродинамики 379  
— если вершина взаимодействия со-  
держит производные полей 345–  
346  
Вигнеровский поворот 86–92  
Виков поворот 507–508  
Вильсоновский подход к перенорми-  
ровкам 562–566  
Внешние поля 294, 314–317, 441–  
442, 595–601, 612–618  
Внешние производные 395  
Внутренние симметрии 142–145  
Возбужденные состояния, в атоме  
водорода 632–634  
Волновые пакеты 131–132  
Временная калибровка 372  
Вспомогательные поля 336–337, 341  
Вторичные связи, см. условия  
Второго рода связи, см. связи  
Вычитания в дисперсионных соот-  
ношениях 492, 497
- Галилеевская инвариантность 80,  
169  
Гамильтониан  
— взаимодействующего векторного  
поля 348

- Гамильтониан
- взаимодействующего дираковского поля 350
  - взаимодействующих скалярных полей 30–32, 225, 329
  - для уравнения Дирака 23
  - комплексного скалярного поля 37, 374–375
  - одномерного скалярного поля 30–32
  - свободных частиц 201
  - электродинамики 375–376
- Гауссовы интегралы 451–453
- Гейзенберга представление 130, 315, 324, 489
- Генераторы симметрий 334–341
- Гильберта пространство, определение 66
- Гиперзаряд 145
- Гипероны 47, 144
- открытие 47
- Глобальные симметрии, определение 334
- Глюоны 588
- Гомотопические группы и классы 108–110, 116–120, 450
- определение 120
- Гравитон 92–93, 281, 557, 575, 586
- Грассмановы переменные, определение 429
- Группа и алгебра Пуанкаре, см. преобразования Лоренца
- Группа кос 450
- Группа  $SL(2, C)$  106, 108
- Группа  $Spin(d)$  110
- Группа  $SU(2)$  108, 145, 258
- Группа  $Z_2$  107
- Группы, определение, см. также абелевы группы, гомотопические группы и классы, Ли группы, малые группы, представления, полупростые группы 69
- $\gamma_5$  245
- Дайсона ряд 167, 287
- Далица график 164
- Два-коциклы, определение 101
- Де Рама когомология 395
- Действие 326, 334
- Джеты (струи) 588, 591
- Дирака матрицы 23–24, 241–247
- свертка матриц Дирака с 4-вектором, определение 384
  - след 387, 398–400
- Дирака скобки 355–358, 359–363
- в электродинамике 373–375
- Дирака уравнение 15, 21–30, 252, 604–612
- Дираковское представление однородной группы Лоренца 240–247
- Дисперсионные соотношения 492, 494–501
- Дифракционное рассеяние 171, 172, 182
- Дифференциальные формы, см.  $p$ -формы
- Длина рассеяния, определение 182
- Древесные диаграммы, определение 310
- Дуальность 259, 397
- Дырок теория 27, 45, 48
- Замкнутые  $p$ -формы, определение 395
- Заряд, см. электрический заряд
- Зарядовое сопряжение С
- для фотонов 458–459
  - несохранение 154
  - определение 142, 153–154
  - преобразование векторных полей 240
  - преобразование дираковских полей 254
  - преобразование неприводимых полей общего вида 269–270
  - преобразование операторов рождения 202
  - преобразование скалярных полей 233
  - преобразование фермионных билинейных комбинаций 256
  - случайная симметрия 557, 566–569
  - фазы зарядового сопряжения 153
  - см. также особые виды частиц
- Затмения явление в системах двойных звезд 394
- Избыточные взаимодействия 358–359, 558–560

- Изоспин (изотопический спин) 145  
 Импульса оператор 79, 337–339  
 СР-инвариантность  
 — вырожденных мультиплетов 125  
 — несохранение в  $K^0-\bar{K}^0$ -распаде 154–155  
 СРТ-инвариантность 124, 155, 273–275, 490  
 Инвариантные подгруппы и подалгебры 89, 107  
 Индуцированное излучение фотонов 33  
 Индуцированные представления 83  
 Инёну–Вигнера сужение 80  
 Интеграл по путям в евклидовом пространстве 411  
 Интегралы по путям 287, 402–404, 561  
 — вывод 404–412  
 — для взаимодействий, содержащих производные скаляров 419  
 — для квантовой электродинамики 443–448  
 — для массивных векторных полей 421–422  
 — для  $S$ -матрицы 412–417  
 — для нелинейной сигма-модели 420–421  
 — для фермионов 427–442  
 — использование для вывода фейнмановских правил 422–426  
 — лагранжев вариант 417–422  
 Инфракрасные расходимости 49–50, 524, 529, 577–592  
 Искашенной волны борновское приближение 169–170  
 Исключения принцип 26  
**К**  
 Казимира эффект 323  
 Канонические преобразования 356  
 Калибровочные преобразования 279–281, 365–369, 371, 396, 479–483  
 — см. также аксиальная калибровка, временная калибровка, кулоновская калибровка, лоренцева калибровка, унитарная калибровка, фейнмановская калибровка  
 Квантовая механика 66–67  
 Квантовая хромодинамика 145, 569, 588  
 Квантовая электродинамика 45, 47–56, 365–387, 443–448, 504–530, 538, 542–551, 566–569, 603–634  
 — см. также квантовые поля, электрон, фотон, калибровочные преобразования, ультрафиолетовые расходимости, инфракрасные расходимости  
 Квантовые поля  
 — безмассовые частицы 275–284  
 — векторные 234–240  
 — дираковские 38–40, 247–256  
 — единственность неприводимых полей 266  
 — квантовые поля общего вида 260–273  
 — переопределение 358–359  
 — ранние теории 30–47  
 — свободные поля 217–227  
 — скалярные 37–38, 40–44, 227–233  
 Кварки 245, 569  
 Кинетическая теория 173–175  
 Киравльное преобразование 556  
 Кластерной разложимости принцип 194, 202–215, 223, 287  
 Клебша–Гордана коэффициенты 146, 176, 178, 180, 261, 271, 608  
 Клейна–Гордона–Шредингера уравнение 15, 28, 36, 226  
 Клиффорда алгебра 242  
 Когерентные состояния 215  
 Коммутации и антакоммутации канонические соотношения 31, 35–38, 320–325, 567  
 Компактные и некомпактные группы 258  
 Комптоновское (электрон–фотонное) рассеяние 45, 387–395  
 Константа взаимодействия пиона с нуклоном 466  
 Контрчлены в квантовой электродинамике 504–505  
 Конференция в Shelter Island (1947) 52–56  
 Космические лучи 45, 144  
 Крамерса вырождение 100  
 Крамерса–Кронига соотношение 501  
 Круговая поляризация 385

- Кулоновская калибровка 279, 373–376, 391  
 Кулоновская энергия 376, 379, 382, 599  
 Кумулянты 203
- Лагранжиан 37, 324–334  
 — взаимодействующего скалярного поля 329  
 — вырожденный 353  
 — интегрирование по частям 332–334  
 — комплексного скалярного поля 37  
 Лежандра преобразования 324, 328  
 Лептонное число 144, 568  
 Лептоны 504  
 Леса 548–549  
 Ли группы 70–72  
 Ли–Наэнберга теорема 588–592  
 Линейная поляризация 385  
 Липшица–Швингера уравнение 133, 164  
 Локальные симметрии 368  
 — для безмассовых частиц 276  
 — для различных импульсов 83–85  
 — определение 82, 334  
 — см. также калибровочные преобразования  
 Лоренца преобразования  
 — в каноническом формализме 341–345  
 — в теории возмущений 167–169, 287, 304–307  
 — действие на одночастичные состояния 81–92  
 — действие на операторы рождения 202  
 — действие на состояния общего вида 74, 218  
 — для *S*-матрицы 138–142  
 — для матричных элементов состояний, лежащих вне массовой оболочки 313–317, 457  
 Лоренца преобразования  
 — для сечений и вероятностей распада 161–162  
 — однородная группа Лоренца, определение 75, 256–260  
 — определение 73–75
- Лоренца преобразования  
 — Пуанкаре алгебра 76–77  
 — Пуанкаре группа, определение 75  
 — собственная ортохронная группа Лоренца 75  
 Лоренцева (или Ландау) калибровка 239, 372, 448  
 ЛСЦ теорема, см. редукционная формула  
 Лучи, определение 66–67  
 Лэмбовский сдвиг 52–53, 516, 618–634
- Магнитные моменты, для частиц со спином  $1/2$  487–488, 517–526, 556, 594–595  
 — см. также электрон, мюон  
 Майорановские фермионы 253, 270  
 Максвелла уравнения 15, 280, 365, 368, 396  
 Малые группы 83–85  
 —  $m \neq 0$  86–87  
 —  $m = 0$  88–92  
 Мандельстамовские переменные 551  
 Маргинальные взаимодействия 538  
 Массы перенормировка 470–473, 505, 528–529, 620–630  
*S*-матрица 18, 50  
 — С, СР и СРТ 153–156  
 — РТ 153, 155  
 — *S*-оператор 135  
 — внутренние симметрии 142–146  
 — лоренц-инвариантность 138–142  
 — обращение времени 150–153  
 — определение 134  
 — унитарность 135, 170–175  
 — четность 146–149  
 — см. также *T*-матрица, *M*-матрица  
*T*-матрица 133, 137, 164–165, 176, 588  
*M*-матрица, определение 138  
 Матрицы вращений ( $D_{\sigma'}^j(R)$ ) 86  
 Матрицы Паули, определение 244  
 Матричная механика 18  
 $J/\psi$ -мезон 252  
 $\omega$ -мезон 254  
 $K$ -мезоны 144, 154–155  
 — открытие 46

$\rho$ -мезоны 189, 252, 254, 501  
 Мёллера (электрон-электронное) рассеяние 45  
 Многовременной формализм 38  
 Множители, связанные с фазовым объемом 161–164  
 缪он 56  
 — магнитный момент 521–523  
 — открытие 47  
 缪онный атом 515–517  
 Мягкие фотоны 572–587, 592–595  
 Нарушенная симметрия 474, 482  
 Начальные и конечные состояния 128–134, 137  
 Нейтрон 46  
 — нейтрана на протоне рассеяние 182  
 Некомпактные группы, см. компактные и некомпактные группы  
 Нелинейная сигма-модель 363, 404, 420  
 Неприводимые представления, определение 82  
 Несохранение РТ 153  
 Несущественные взаимодействия 538  
 Нормальное упорядочение 201, 227, 290  
 $N^{14}$ , молекулярный спектр 46  
**Обращение времени (T)**  
 — несохранение 156  
 — определение 97  
 — преобразование  $J_{\mu\nu}$  и  $P_\mu$  93–95  
 — преобразование векторных полей 240  
 — преобразование вырожденных мультиплетов 120–125  
 — преобразование дираковского поля 254–256  
 — преобразование одночастичных состояний 96–100  
 — преобразование операторов рождения и уничтожения 202  
 — преобразование произвольных неприводимых полей 270–271  
 — преобразование скалярных полей 233  
 — следствия для  $S$ -матрицы 150–153

Общая теория относительности 284, 339, 343, 395, 554–555, 557  
 Односвязные пространства, определение 103  
 Одночастичная неприводимость, определение 470  
 Опасные состояния 589–591  
 Оптическая теорема 178  
 Относительности принцип 575  
**Парастатистика** 450  
 Первичные связи, см. связи  
 Первого рода связи, см. связи  
 Перекрестная (или кроссинг-) симметрия 297, 499, 594  
 Перекрывающиеся расходимости 546–548  
 Перенормировка 51–56, 541–552  
 — см. также электрический заряд, перенормировка поля, перенормировка массы  
 Перенормировка поля 358–359, 467–473, 482, 493, 505, 511, 516, 581–583  
 Перенормируемость 54, 533, 537–538, 552–561  
 Петли 213, 297, 310–311, 384, 442  
 Пионы 29, 56, 466–467, 558  
 — внутренняя фаза зарядового сопряжения для  $\pi^0$  153, 256  
 — внутренняя четность 149  
 — предсказание и обнаружение 47  
 — распад  $\pi^\pm$  149  
 — распад  $\pi^0$  153  
 — рассеяние на нуклонах 495, 501  
 Плавающий порог обрезания 562–566  
 Плотности матрица 386  
 Поглощение фотонов 33  
 Позитрон 27–28, 606–608, 626  
 Позитроний 254  
 Поле Париты–Швингера 260, 454  
 Положительность энергии 94–95, 329  
 Полупростые группы и алгебры Ли, определение 89, 105  
 Полюса амплитуды рассеяния 459–467, 593, 603  
 Поля уравнения, см. также квантовые поля 226, 238–239, 267

- Поля, см. квантовые поля  
Поляризация  
— безмассовость 379  
— массивная частица спина 1 236–237, 239  
— фотон 92–93  
Поляризация вакуума 49, 51, 505–517, 621  
Пороговое поведение 181–189  
Правила суперотбора 70, 109–110  
Представление Шредингера 130  
Представления  
— групп, определение 71  
— однородной группы Лоренца 256–260  
Принцип действия Швингера 315  
Причинность 168, 225, 495  
Проблема  $\tau$ - $\theta$  149  
Проективные представления 70, 101–110, 116–120  
Пропагаторы 290, 301–307, 424–426, 541, 613–618  
Пространственная инверсия, см. четность и пространственная инверсия  
Протон  
— в ядрах 45  
— заряд 476  
— интерпретация как дырки 27  
— зарядовый радиус 55, 634  
— формфакторы 488  
Радиационные поправки, см. перенормировка, квантовая электродинамика, ультрафиолетовые расходимости, инфракрасные расходимости, собственно-энергетические части, вершинные части, поляризация вакуума, мягкие фотоны  
Радиус зарядовый, определение 526  
Разложение по парциальным волнам 175–183  
Разложимые взаимодействия 190  
Размерная регуляризация 480, 509–510, 527, 530–531  
Размерность полей и констант связи 536, 555, 562–564  
Распад  $\text{Co}^{60}$  149, 152–153  
Рассеяние нейтронов на составных ядрах 182, 184  
Регуляризатор Паули–Вилларса 518, 527  
Редукционная формула 467–469  
Резонансы 183–190  
Релятивистские волновые уравнения 15–30  
Ренормгруппа 523, 552, 562  
Ридберг ( $R_y$ ), определение 633  
Рождение пар 47  
Рождения и уничтожения операторы 32, 35–36, 39–40, 42–45, 194, 198–202  
Рождения операторы, см. рождения и уничтожения операторы
- Связанные состояния, см. составные частицы**  
Связи 352–358  
— в электродинамике 370, 373  
Связные амплитуды (то же, что и связные диаграммы) 203–208, 298, 310, 313, 416, 442  
Связь спина и статистики 266  
Сдвиги уровней энергии состояний атома 48–49, 613–618  
— сдвиг уровня  $1s$  634  
— см. также лэмбовский сдвиг, Юлинга эффект, мюонный атом  
Сечение рассеяния  
— высокoenергетический предел 182–183  
— определение 156–164  
— разложение по парциальным волнам 181  
Сечения, общая формула 156–159  
Сильные взаимодействия 47  
 $3j$ -символы Вигнера 265  
Симметрии 67–72, 110–116, 334–341, 456  
— см. также законы сохранения, группы, лоренц-инвариантность, четность, зарядовое сопряжение, обращение времени, внутренние симметрии, изоспин,  $SU(3)$   
 $SU(3)$ -симметрия 145  
Скалярная теория поля, инвариантная относительно трансляций по полевой переменной 557–560  
Скобки Пуассона, определение 354

- Скорость распада, общая формула 160  
 Следы, см. матрицы Дирака  
 Случайные симметрии 566–569  
 Собственно-энергетические части ( $\Pi^*$ ,  $\Sigma^*$ ) 470, 505–513, 526–529, 543–544, 548–551, 614–619, 624  
 Составные частицы 132, 493–494  
 “Состояния” с отрицательной энергией 25–30, 38–44, 606  
 Состояния типа стоячих волн 191  
 Сохранения законы  
   — заряда 141, 225, 457  
   — ограничения 282, 575–576  
   — тока 239, 335, 510, 626  
   — углового момента 139  
   — энергии и импульса 140–141, 456–458  
   — см. также специальные симметрии и сохраняющиеся величины  
 Спектральная функция, см. разложение Челлена–Лемана  
 Спиновые матрицы, определение 258  
 Спиновые суммы 237, 252, 264–265, 280, 386–387, 390, 584  
 Спиральность  
   — ограничения для полей безмассовых частиц 275–284  
   — определение 90  
   — принимающая целые и полуцелые значения 109  
 Спонтанное излучение фотонов 33–35, 631  
 Старомодная теория возмущений, см. теория возмущений  
 Странность и странные частицы 144  
   — см. К-мезоны, гипероны  
 Структурные константы, определение 72  
 Суперперенормируемые взаимодействия 538, 542  
 Суперсимметрия 352, 541, 563  
 Существенные взаимодействия 567  
 Сферические гармоники 177, 608  
 Теорема Вигнера–Эккарта 177  
 Теорема Вика 287  
 Теорема Нетер 335  
 Теорема о подсчете степеней 540  
 Теорема о полярном разложении 107, 568  
 Теорема Польчинского 563–566  
 Теорема Померанчука 500  
 Теорема Пуанкаре 119, 395  
 Теорема Римана–Лебега 207  
 Теорема Уотсона 153  
 Теория возмущений  
   — инвариантная 165–169  
   — старомодная 165, 287, 588, 603, 625–626, 633  
   — см. также ряд Дайсона, диаграммы Фейнмана, интегралы по путям  
 Теория струн 16, 30, 272, 397, 561  
 Тождества Уорда и Уорда–Такахаши 476–478, 509, 543, 547  
 Томсоновское рассеяние 395, 595  
 Тонкая структура 18–21, 610  
 Тонкой структуры постоянная 17, 19  
 Топология  
   — группы Лоренца и групп вращений 105–110  
   — см. также гомотопические группы, односвязные пространства, когомологии де Рама  
 Точные  $p$ -формы 395  
 Траектории Редже 500–501  
 Ультрафиолетовые расходимости 47–56, 509–510, 515, 518, 523, 529–530, 534–540  
 Универсальная накрывающая группа 110  
 Унитарная калибровка 372  
 Унитарность  $S$ -матрицы 135–137, 152, 170–175, 179, 186, 557  
 Условные расходимости 534–537, 546  
**Ф**аддеева уравнения 214  
 Фазовые сдвиги 152–153, 179  
 Фарри теорема 459–460, 544  
 Фейнмана диаграммы 54, 287–318  
   — в электродинамике 381–384  
 Фейнмановская калибровка 381, 447  
 Фейнмановские параметры 506, 519, 528

- Ферми–Дирака статистика 27, 295–298, 448–450, 604–612  
 Формула Розенблюта 488  
 Формфакторы 483–488, 517–526, 620–622  
 $p$ -формы 395–398  
 Фотон 17  
   – безмассовость 379, 482, 509  
   – пропагатор 379–381  
   – рассеяние фотона на фотоне 49, 544, 560–561  
   – спиральность и поляризация 92–93, 278–279, 385–386, 393  
   – фаза зарядового сопряжения 256  
   – см. также мягкие фотоны, квантовая электродинамика  
 Фруассара предел 183  
 Функционалы, система обозначений 326  
 $\Delta_+$ -функция 228  
 $\Delta_F$ -функция 303  
 Функция в смысле главного значения 134  
 Хаббарда–Стратоновича преобразование 493  
 Хронологически упорядоченные произведения, определение 166, 307  
 Цвет 588  
 Центра масс система 162  
 Центральные заряды 102  
 Частица  $Z^0$  184–185, 234  
 Частицы  $W^\pm$  234  
 Челлена–Леманна представление 488–494  
 Четность и пространственная инверсия ( $\mathcal{P}$ )  
   – внутренние четности 147–149  
   – несохранение в слабых взаимодействиях 149  
   – определение 76  
   – преобразование  $J_{\mu\nu}$  и  $P_\mu$  93–95  
   – преобразование векторных полей 240  
     Четность и пространственная инверсия ( $\mathcal{P}$ )  
       – преобразование дираковского поля 249, 251–252  
       – преобразование одиноческих состояний 95–98, 124  
       – преобразование операторов рождения и уничтожения 202  
       – преобразование произвольных неприводимых полей 267–269  
       – преобразование скалярных полей 232–233  
       – связанных состояний электронов 608–609, 626  
       – случайные (дополнительные) симметрии 557, 567–569  
       – см. также особые виды частиц  
 Член Паули 29, 554, 556  
 Чью–Фраучи график 501, 503
- Ш**вингеровские члены 480
- Эйлера постоянная 511, 531  
 Эйлера–Лагранжа уравнения 327  
 Электрический дипольный момент 100, 557  
 Электрический заряд 367  
   – перенормировка 368, 473–478, 505, 512–516  
   – сохранение 144, 575  
 Электрон  
   – классическая теория 47, 395, 530  
   – магнитный момент 20, 25, 29, 53, 488, 501, 556  
   – зарядовый радиус 526  
   – спин 20–24  
 Эллиптическая поляризация 386  
 Энергии–импульса тензор 337–340  
 Энтропия 175  
 Эффект Рамзауэра–Таунсенда 190  
 Эффект Юлинга 51, 516, 621  
 Эффективные теории поля 533, 560–561
- Я**дерные силы 45–47, 465–466  
 Якоби тождество 102

## ИМЕННОЙ УКАЗАТЕЛЬ \*

- Аарон (Aaron R.) 502  
Аарони (Aharony A.) 193  
Айткен (Aitken A.C.) 127  
Амадо (Amado R.D.) 502  
Андерсон (Anderson C.D.) 27, 46, 59, 61  
Арамаки (Aramaki S.) 64  
Арджирес (Argyres P.C.) 286  
Артин (Artin E.) 455
- Баба (Bhabha H.J.) 45, 60  
Бакамиджиан (Bakamijian B.) 215  
Баргман (Bargmann V.) 127  
Барджойн (Burgoyne N.) 286  
Батлер (Butler C.C.) 47, 61, 144, 191  
Бейли (Bailey J.) 532  
Белинфанте (Belinfante F.J.) 59, 342, 364  
Бергман (Bergmann P.G.) 364  
Березин (Berezin F.A.) 431, 433, 455  
Бете (Bethe H.) 45, 51, 53, 60, 61, 63, 601, 602, 634, 636  
Блох (Bloch F.) 49, 61, 602  
Блэкетт (Blackett P.M.) 28  
Боголюбов (Bogoliubov N.N.) 548, 570  
Бор (Bohr N.) 18, 26, 35, 48, 58, 59, 193, 225, 285  
Борн (Born M.) 18, 30, 31, 32, 33, 34, 39, 41, 56, 58, 59, 62, 137, 191, 319  
Браун (Brown G.E.) 635  
Браун (Brown L.) 60, 62, 64, 65, 191, 569  
Брейт (Breit G.) 53, 63, 187, 191, 193  
Бъркен (Bjorken J.D.) 570  
Бэггер (Bagger J.) 364, 570  
Бэйер (Beyer R.T.) 59, 64
- Вайнберг (Weinberg S.) 57, 62, 65, 126, 192, 193, 216, 285, 286, 364, 401, 454, 503, 570, 571, 602  
Вайнрих (Weinrich M.) 126, 192
- Вайнштейн (Vainshtein A.I.) 571  
Вайскопф (Weisskopf V.F.) 42, 44, 48, 51, 53, 54, 59, 60, 61, 62, 63, 65, 633, 636  
Вайтман (Wightman A.S.) 126, 286  
Вайц (Weitz M.) 636  
ван дер Варден (van der Waerden B.I.) 56, 285  
Вебб (Webb N.) 61  
Вейль (Weyl H.) 27, 58, 401  
Вело (Velo G.) 286  
Вельтман (Veltman M.) 509, 531  
Венцель (Wentzel G.) 58, 62, 65  
Весс (Wess J.) 364, 570  
Вест (West T.) 401  
Вигнер (Wigner E.P.) 34, 58, 59, 68, 80, 86, 110, 112, 120, 123, 124, 126, 127, 129, 177, 180, 187, 193, 263  
Вик (Wick G.C.) 126, 318, 507, 519, 530, 531  
Вилларс (Villars F.) 527, 532  
Вильсон (Wilson W.) 57, 562, 565, 571  
Вильчек (Wilczek F.) 455  
Виттен (Witten E.) 65, 286, 401  
Воган (Vaughan M.J.) 502  
By (Wu C.S.) 126, 149, 192
- Габердил (Gaberdiel R.) 455  
Гайтлер (Heitler W.) 45, 60, 63  
Гамов (Gamow G.) 22, 58, 64  
Гарвин (Garwin R.) 126, 192  
Гейзенберг (Heisenberg W.) 18, 25, 30, 31, 32, 36, 39, 40, 41, 46, 48, 49, 50, 56, 57, 58, 59, 60, 61, 62, 130, 191, 319, 555, 570, 571  
Гелл-Манн (Gell-Mann M.) 145, 154, 192, 318, 494, 503, 595, 602  
Герштейн (Gerstein I.S.) 454  
Глимин (Glimm J.) 454  
Голдстоун (Goldstone J.) 203, 216

\* Наклонным шрифтом указаны номера страниц ссылок на публикации в разделах “Литература”.

- Гольдбергер (Goldberger M.L.) 191, 494, 503, 595  
 Гордон (Gordon W.) 19, 22, 24, 28, 41, 43, 57, 58, 226, 239, 267, 304, 635  
 Гоудсмит (Goudsmith S.) 20, 25, 57  
 Грин (Green M.B.) 401  
 Грисару (Grisaru M.) 602  
 Гротч (Grotch H.) 636  
 Гурси (Gürsey F.) 127  
 Гьюдехас (Gudehus T.) 286  
 Дайсон (Dyson F.J.) 54, 63, 65, 127, 167, 192, 286, 287, 314, 318, 402, 533, 569  
 Далиц (Dalitz R.H.) 164, 192, 602  
 Данкоф (Dancoff S.M.) 49, 51, 61  
 Darwin (Darwin C.G.) 25, 57, 58, 635  
 Де Витт (De Witt C.M.) 403, 448, 455, 503  
 де Бройль (de Broglie L.) 17, 56  
 де Крониг (de Kronig R.) 501, 503  
 ДеВитт (DeWitt B.S.) 454  
 Дедье (Dedijer S.) 286  
 Дезер (Deser S.) 602  
 Дезидерио (Desiderio A.M.) 635  
 Джакив (Jackiw R.) 65, 454  
 Джраффе (Jaffe A.) 454  
 Джексон (Jackson J.D.) 503  
 Джеммер (Jammer M.) 64  
 Джермер (Germer L.H.) 18, 56  
 Джессер (Gasser J.) 570  
 Джонсон (Johnson W.R.) 635  
 Джорджи (Georgi H.) 285  
 Джуліан (Julian R.S.) 63  
 Динс (Deans W.M.) 57  
 Дирак (Dirac P.A.M.) 18, 20, 21, 23, 25, 26, 27, 29, 33, 34, 38, 39, 40, 43, 44, 45, 49, 50, 51, 56, 57, 58, 59, 60, 61, 62, 64, 66, 126, 226, 241, 245, 285, 319, 352, 355, 356, 364, 371, 402, 454, 488, 502, 521, 604, 605, 606, 635  
 Донохью (Donoghue J.F.) 570  
 Дрезден (Dresden M.) 191  
 Дрелл (Drell S.D.) 570  
 Дринкуотер (Drinkwater J.W.) 62  
 Дрюл (Drühl K.) 455  
 Дэвиссон (Davisson C.J.) 18, 56  
 Елзассер (Elsasser W.) 18, 56  
 Енни (Yennie D.R.) 602, 636  
**Ж**олио (Joliot F.) 60  
 Жювье (Jouvet B.) 502  
 Закариас (Zacharias J.R.) 63  
 Захаров (Zakharov V.I.) 571  
 Зоммерфельд (Sommerfeld A.) 18, 20, 21, 26, 57  
 Зумино (Zumino B.) 286  
 Израэль (Israel W.) 570  
 Инёну (Inönü E.) 80, 126  
 Ино (Inoue T.) 61  
 Инфельд (Infeld L.) 62  
 Иоос (Joos H.) 286  
 Иост (Jost R.) 286  
 Ито (Ito D.) 63  
 Йордан (Jordan P.) 18, 25, 30, 31, 32, 33, 34, 39, 41, 56, 57, 59, 319  
 Кабир (Kabir P.) 568, 571  
 Казимир (Casimir H.B.G.) 364  
 Кайзер (Kaiser G.) 286  
 Камефучи (Kamefuchi S.) 455, 570  
 Кан (Kahn B.) 63  
 Канесава (Kanesawa S.) 63  
 Карлсон (Carlson J.F.) 45, 46, 48, 60  
 Картан (Cartan E.) 285  
 Кассен (Cassen B.) 191  
 Кеммер (Kemmer N.) 49, 61  
 Киношита (Kinoshita T.) 602, 636  
 Клейн (Klein O.) 19, 22, 28, 41, 43, 45, 57, 59, 60, 226, 239, 267, 304, 393, 401  
 Коба (Koba Z.) 62, 63  
 Кокель (Kockel B.) 49, 61, 571  
 Коллат (Kollath R.) 193  
 Коллинз (Collins P.D.B.) 503, 569  
 Комитон (Compton A.H.) 57, 387, 390, 538  
 Конверси (Conversi M.) 47, 61  
 Кондон (Condon E.U.) 191  
 Коухен (Cohen R.S.) 59, 285  
 Краммерс (Kramers H.A.) 52, 62, 63, 100, 127, 192, 193, 501, 503  
 Кричтон (Crichton J.H.) 215  
 Кролл (Kroll N.M.) 55, 63, 633, 636  
 Кронин (Cronin J.W.) 127, 155, 192  
 Кубо (Kubo R.) 216  
 Куш (Kusch P.) 63  
 Кюри-Жолио (Curie-Joliot I.) 60  
 Лангер (Langer J.S.) 635  
 Ландau (Landau L.D.) 126, 193, 447, 483  
 Ланде (Lande A.) 57

- Ландин (Lundeen S.R.) 636  
 Латтес (Lattes C.) 47  
 Ледерман (Lederman L.) 126, 192  
 Лейнаас (Leinaas J.M.) 455  
 Лейтвайлер (Leutwyler H.) 570  
 Леман (Lehmann H.) 469, 488, 495,  
 502  
 Ли (Lee T.D.) 126, 149, 154, 192, 203,  
 215, 256, 454, 588, 602  
 Либфрид (Leibfried D.) 636  
 Липпман (Lippmann B.) 133, 191  
 Лифшиц (Lifshitz E.M.) 126, 193  
 Лондон (London F.) 401  
 Лоу (Low F.E.) 318, 595, 602  
 Льюис (Lewis H.W.) 62  
 Лэдлоу (Laidlaw M.G.G.) 448, 455  
 Лэмб (Lamb W.E.) 52, 55, 62, 63,  
 633, 636  
 Лэнг (Lang S.) 455  
 Лю (Liu H.N.T.) 532  
 Любарский (Lyubarski G.Ya.) 286  
 Людвиг (Ludwig G.) 56  
 Людерс (Lüders G.) 273, 286  
 Майерс (Mayers D.F.) 635  
 Майкельсон (Michelson A.A.) 57  
 Мандельстам (Mandelstam S.) 454  
 Маршак (Marshak R.E.) 56, 61  
 Маскава (Maskawa T.) 356, 357, 364  
 Мёллер (Møller C.) 45, 60, 62, 191  
 Мехра (Mehra J.) 64  
 Миллер (Miller A.I.) 60, 64, 532  
 Мирхейм (Myrheim J.) 455  
 Мицумото (Miyamoto Y.) 63  
 Макки (Mackey G.W.) 126  
 Мэттьюз (Matthews P.T.) 570  
 Накаджима (Nakajima H.) 356, 357,  
 364  
 Наппи (Nappi C.R.) 286  
 Науненберг (Nauenberg M.) 588, 602  
 Нафе (Nafe J.E.) 63  
 Неддермейер (Neddermeyer S.H.)  
 46, 61  
 Нееман (Ne'eman Y.) 145, 192  
 Нельсон (Nelson E.B.) 63  
 Нишина (Nishina Y.) 45, 60, 393, 401  
 Новиков (Novikov V.) 571  
 Нордзик (Nordsieck A.) 49, 61, 602  
 Нордхайм (Nordheim L.) 47, 61  
 Ньютон (Newton R.G.) 191  
 Нэйджел (Nagel D.E.) 63  
 Нэш (Nash C.) 127  
 Омнес (Omnes R.) 503  
 Онуки (Ohnuki Y.) 455  
 Оппенгеймер (Oppenheimer J.R.)  
 27, 39, 43, 44, 45, 46, 48, 52, 55,  
 56, 58, 60, 61  
 Остервальдер (Osterwalder K.) 455  
 Оччалини (Occchialini G.P.S.) 28, 47,  
 61  
 Пайерлс (Peierls R.E.) 60, 61, 62,  
 193  
 Пайс (Pais A.) 64, 154, 192  
 Панчини (Pancini E.) 47, 61  
 Парасюк (Parasiuk O.) 548, 570  
 Пастернак (Pasternack S.) 62  
 Паули (Pauli W.) 18, 26, 29, 35, 36,  
 38, 39, 40, 42, 44, 48, 56, 58, 59, 60,  
 61, 62, 273, 286, 319, 527, 532, 554  
 Пауэлл (Powell C.F.) 47, 61  
 Пачуки (Pachucki K.) 636  
 Пашен (Paschen F.) 57  
 Пенделтон (Pendleton H.) 602  
 Перлмуттер (Perlmutter A.) 286  
 Петерман (Petermann A.) 532  
 Пипкин (Pipkin F.M.) 636  
 Пиччиони (Piccioni O.) 47, 61, 192  
 Плачек (Placzek G.) 193  
 Подольский (Podolsky B.) 38, 60  
 Польчинский (Polchinski J.) 455,  
 563, 571  
 Померанчук (Pomeranchuk I.Ia.)  
 500, 501, 503  
 Попов (Popov V.N.) 403, 454  
 Презент (Present R.S.) 191  
 Раби (Rabi I.I.) 53, 63  
 Рака (Racah G.) 60  
 Рамзауэр (Ramsauer) 190  
 Рарита (Rarita W.) 260, 286  
 Редже (Regge T.) 501, 503  
 Резерфорд (Rutherford R.C.) 62  
 Решенберг (Rechenberg H.) 60  
 Риндани (Rindani S.D.) 286  
 Ричардсон (Richardson O.) 62  
 Робертс (Roberts J.E.) 455  
 Робертсон (Robertson H.P.) 58  
 Розенблют (Rosenbluth M.N.) 488,  
 502  
 Розенфельд (Rosenfeld L.) 35, 59, 60,  
 225, 285, 364  
 Рорлих (Rohrlich F.) 285  
 Роуз (Rose M.E.) 61, 126, 192, 193,  
 286, 635

- Рочестер (Rochester G.D.) 47, 61, 144, 191  
 Рюгер (Rüger S.M.) 455  
 Саката (Sakata S.) 61, 570  
 Салам (Salam A.) 58, 64, 548, 570  
 Сапирштейн (Sapirstein J.R.) 636  
 Сен (Sen S.) 127  
 Сербер (Serber R.) 61, 64  
 Сивакумар (Sivakumar M.) 286  
 Силер (Seiler R.) 286  
 Симанчик (Symanzik K.) 469, 495, 502  
 Скритон (Screaton R.) 503  
 Слетеर (Slater J.C.) 58  
 Солпитер (Salpeter E.E.) 601, 602  
 Спарнай (Spaarnay M.J.) 364  
 Стераман (Sterman G.) 602  
 Стечел (Stachel J.) 59, 285  
 Стивенсон (Stevenson E.C.) 46  
 Стора (Stora R.) 64  
 Стоунер (Stoner E.C.) 58  
 Стратонович (Stratonovich R.L.) 493, 503  
 Стрит (Street J.C.) 46  
 Стритер (Streater R.F.) 286  
 Суура (Suura H.) 532, 602  
 Такахashi (Takahashi Y.) 478, 502  
 Тамм (Tamm I.) 27, 58, 60, 401  
 Тарлей (Turlay R.) 127, 192  
 Тати (Tati T.) 63  
 Таунсенд (Townsend) 190  
 Тейт (Tate J.E.) 455  
 Телегди (Teleghi V.L.) 126, 192  
 Тернбулл (Turnbull H.W.) 127  
 Тирринг (Thirring W.) 494, 503  
 Тичмарш (Titchmarsh E.C.) 216  
 Толл (Toll J.S.) 503  
 Томас (Thomas L.H.) 57, 215  
 Томонага (Tomonaga S.-I.) 54, 55, 62, 63, 65, 287, 402  
 Томсон (Thomson J.J.) 395  
 Тув (Tuve M.A.) 191  
 Тунг (Tung W.-K.) 126  
**У**оллер (Waller I.) 61  
 Уиллер (Wheeler J.A.) 18, 50, 62, 191  
 Уильямс (Williams E.J.) 602  
 Уильямс (Williams R.C.) 62  
 Уильямс (Williams W.E.) 62  
 Уиттакер (Whittaker E.) 65  
 Уичман (Wichmann E.H.) 215, 285, 532  
 Уленбек (Uhlenbeck G.E.) 20, 57  
 Уmezава (Umezawa H.) 570  
 Уорд (Ward J.C.) 478, 502  
 Уотсон (Watson K.M.) 153, 191, 192  
 Фабри (Fabri E.) 192  
 Фаддеев (Faddeev L.D.) 216, 403, 404, 454  
 Фарри (Furry W.H.) 39, 43, 44, 48, 60, 61, 459, 502  
 Фейнберг (Feinberg G.) 192, 568, 571  
 Фейнберг (Feinberg J.) 364  
 Фейнман (Feynman R.P.) 50, 54, 55, 62, 63, 64, 287, 303, 307, 313, 379, 380, 381, 385, 401, 402, 403, 429, 440, 442, 447, 454, 457, 461, 491, 504, 506, 519, 531, 598, 612  
 Феретти (Ferretti B.) 192  
 Ферми (Fermi E.) 26, 34, 39, 58, 59, 60, 64, 319  
 Финберг (Feenberg E.) 191, 193  
 Фирц (Fierz M.) 36, 59, 61, 62, 65, 286  
 Фитч (Fitch V.L.) 127, 155, 192  
 Фландерс (Flanders H.) 127, 401  
 Фойли (Foley H.M.) 63  
 Фок (Fock V.) 38, 39, 57, 60, 401  
 Фреденхаген (Fredenhagen K.) 455  
 Френч (French J.B.) 53, 55, 63, 633, 636  
 Фрёлих (Fröhlich H.) 63  
 Фридман (Friedman J.I.) 126, 192  
 Фраучи (Frautschi S.C.) 503, 602  
 Фруассар (Froissart M.) 193  
 Фукуда (Fukuda H.) 63  
 Хаар (Haag R.) 455  
 Хаббард (Hubbard J.) 493, 503  
 Хабер (Huber A.) 636  
 Хан (Hahn Y.) 570  
 Ханч (Hänsch T.W.) 636  
 Харви (Harvey J.) 571  
 Хафстад (Hafstad L.D.) 191  
 Хафф (Huff R.W.) 636  
 Хейденберг (Heydenberg N.) 191  
 Хепп (Hepp K.) 548, 570  
 Херцберг (Herzberg G.) 60  
 Хиббс (Hibbs A.R.) 454  
 Ховард (Howard J.C.) 502  
 Ходдесон (Hoddeson L.) 62, 64, 65, 191  
 Хокинг (Hawking S.W.) 570

- Хокинг (Hocking J.G.) 127  
 Холтер (Halter J.) 571  
 'т Хофт ('t Hooft G.) 403, 454, 509,  
     531  
 Христенсон (Christenson J.H.) 127,  
     192  
 Хугенхольц (Hugenholtz N.M.) 203,  
     216  
**Цао** (Cao T.Y.) 64  
 Цванцигер (Zwanziger D.) 286  
 Цвика (Swieca J.A.) 286  
 Циммерман (Zimmerman W.) 469,  
     495, 502, 548, 570  
**Чедвик** (Chadwick J.) 60  
 Челлен (Källen G.) 488, 502  
 Чиновски (Chinowsky W.) 192  
 Чу (Chew G.) 62, 503  
**Шафер** (Schaefer G.W.) 635  
**Шварц** (Schwarz J.H.) 401  
**Швебер** (Schweber S.S.) 64, 65  
**Швингер** (Schwinger J.) 29, 50, 53,  
     54, 55, 59, 62, 63, 65, 133, 191, 260,  
     286, 287, 318, 401, 402, 454, 502,  
     522, 531  
**Шерер** (Schearer J.F.) 57  
**Шифман** (Shifman M.A.) 571  
**Шифф** (Schiff L.I.) 57, 59, 192, 602,  
     635  
**Шмидт-Калер** (Schmidt-Kaler F.)  
     636  
**Шредер** (Schrader R.) 455  
**Шредингер** (Schrödinger E.) 17, 18,  
     20, 28, 43, 57, 130  
**Шроэр** (Schroer B.) 286  
**Штейнберг** (Steinberger J.) 192  
**Шуберт** (Schubert K.R.) 192  
**Шур** (Schur I.) 285  
**Эдмондс** (Edmonds A.R.) 126, 192,  
     193, 286, 635  
**Эйлер** (Euler H.) 49, 61, 560, 561,  
     562, 571  
**Эйнштейн** (Einstein A.) 26, 29, 33,  
     34, 59, 73, 554  
**Эккарт** (Eckart.) 177, 180, 187, 189  
**Эпштейн** (Epstein S.) 62  
**Эренфест** (Ehrenfest P.) 31, 46, 59,  
     60  
**Эрикソン** (Erickson G.W.) 532  
**Юкава** (Yukawa H.) 46, 61, 64, 183,  
     467, 502  
**Юлинг** (Uehling E.A.) 51, 61, 62,  
     516, 531  
**Янг** (Yang C.N.) 126, 149, 154, 192,  
     193, 203, 215, 256, 285, 401  
**Янг** (Yang C.P.) 193  
**Яух** (Jauch J.M.) 285